

24/145



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS ESTRUCTURAL DE UN MARCO  
CONSIDERANDO LA RIGIDEZ DE LAS  
ZAPATAS DE CIMENTACION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERO CIVIL  
P R E S E N T A :

LAURA CATALINA ORDAZ GARDUÑO



MEXICO, D. F.

1986



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

CONTENIDO	Página
INTRODUCCION	1
I. ANALISIS ESTRUCTURAL DEL MARCO	3
I.- Matriz de rigidez	8
II.- Momentos de empotramiento	13
III.- Momentos y cortantes concentrados	14
II. DETERMINACION DE LA RIGIDEZ LINEAL Y ANGULAR DE LAS ZAPATAS DE CIMENTACION	20
I.- Desplazamiento Vertical	20
II.- Rigidez lineal o Módulo de cimentación	26
III.- Rigidez angular	38
III. EJEMPLO DE APLICACION	47
IV. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS	63
BIBLIOGRAFIA	67

# **INTRODUCCION**

## INTRODUCCION.

Durante mucho tiempo, el Ingeniero Civil ha realizado un sin número de análisis de todo tipo de estructuras, mediante diferentes métodos conocidos, ya sea flexibilidades, rigideces, etc., con el fin de encontrar los elementos mecánicos a los que estarán sometidas las partes componentes de dichas estructuras y así posteriormente se pueda llevar a cabo el diseño de las mismas.

Dichos elementos mecánicos pueden ser obtenidos bajo el análisis de cargas verticales, sismo, viento o la combinación de estos según sea el caso.

Convencionalmente el análisis se lleva a cabo de una manera sistematizada con la ayuda de los métodos ya mencionados para obtener los elementos mecánicos de la superestructura a la cimentación, es decir no tomando en cuenta la interacción suelo - estructura que realmente se está llevando a cabo.

El presente trabajo pretende la alternativa contraria, partiendo de los efectos actuantes en cimentación y con ayuda del método de rigideces, obtener los elementos -

*mecánicas en la superestructura; cabe señalar este tipo de interacción es válida para estructuras cimentadas en suelos de tipo compresible unicamente y para zapatas en las que no hay una interacción entre ellas ,ya que así se tomaria en cuenta el giro que tendrian las zapatas ( que es el caso estudiado en este trabajo) debido a los hundimientos diferenciales .*

*La tesis se desarrolla de la siguiente manera, en el capítulo I , se hace el análisis estructural del marco, tomando en cuenta la rigidez lineal y angular de las zapatas de cimentación .*

*En el capítulo II se presenta la obtención de manera general de la rigidez lineal y angular de las zapatas de cimentación.*

*En el capítulo III se presenta un ejemplo de aplicación en donde se toma en cuenta la rigidez lineal y angular de la zapata en el análisis del marco.*

*Por último, en el capítulo IV presento las conclusiones y comentarios referentes a este trabajo.*

# CAPITULO I

## I. ANALISIS ESTRUCTURAL DEL MARCO.

Se pretende hacer el análisis estructural del marco de la fig ( 1 ), utilizando la rigidez lineal y angular de las zapatas, las cuales se nos presenta como una fuerza  $P = K_L \delta$  y un momento  $M = K_\theta \theta$ , aplicados en los apoyos. Cabe señalar que los valores de  $K_L$  y  $K_\theta$  (rigidez angular y lineal de la zapata) son valores proporcionados por el laboratorio de mecánica de suelos, ya que se requiere de un estudio especial para la determinación de estos valores.

Como la finalidad de este trabajo es el análisis del marco unicamente, tomando en cuenta los parámetros antes mencionados, se estudiará de manera general la obtención de estas rigideces (angular y lineal) en el capítulo siguiente.

Considérese una estructura sometida a un sistema de cargas como el que se indica en la figura (1).

Creo necesario aclarar que la geometría mostrada en la figura ( 1 ), obedece a motivos exclusivamente de sencillez de cálculo.

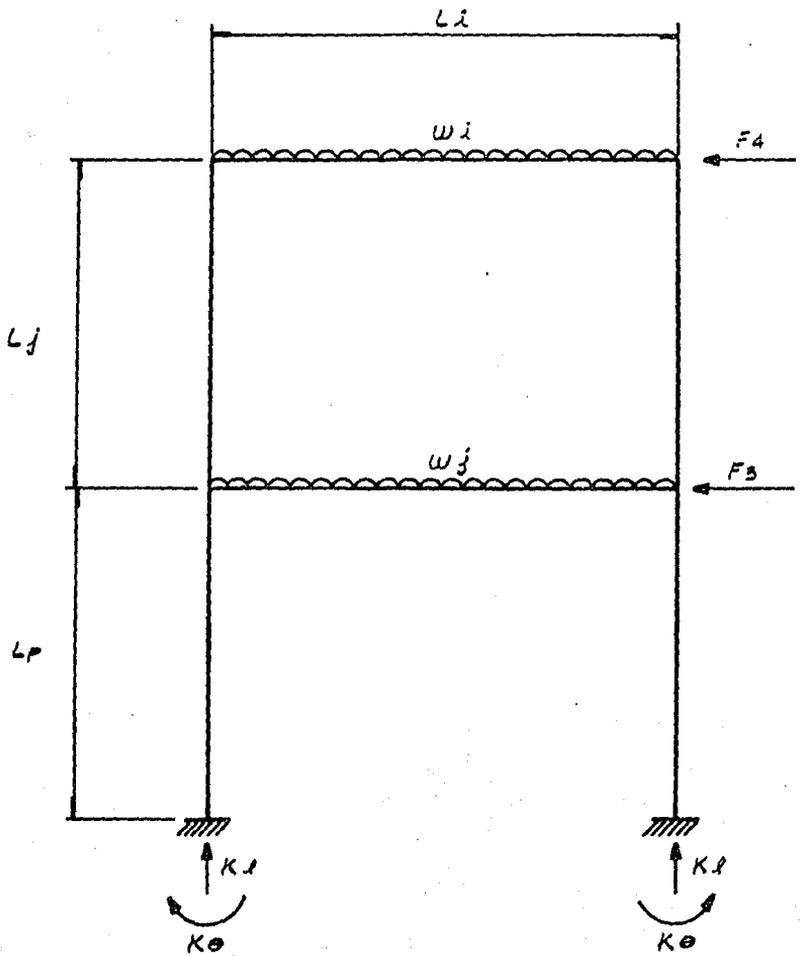


Figura ( 1 )

Utilicemos el método de rigideces para el análisis estructural de la estructura de la fig (1) , el cual se puede resumir en términos generales en lo siguiente:

- 1.- Primeramente se empotra toda la estructura, por lo que se generan momentos y cortantes de empotramiento , los cuales llamaremos  $M_i^e$  y  $V_i^e$ .
- 2.- Se permiten giros en los nudos y desplazamientos lineales ( como se indica en la figura ( 2 ) ), a los cuales llamaremos simplemente desplazamientos . Con esto se producen momentos y cortantes en los nudos y en los ejes de barras.
- 3.- En vista de que desconocemos los desplazamientos se calculan los elementos mecánicos ( cortantes y momentos ) debidos a desplazamientos unitarios. Los valores de los elementos mecánicos debidos a los desplazamientos unitarios forman la llamada matriz de rigideces de la estructura , la cuál denominaremos ( K ) .
- 4.- Los nudos de la estructura , debido a los momentos de empotramiento , a los momentos debidos a los desplazamientos y a los momentos concentrados deben estar en equilibrio. Además , los ejes de barras ( traveses y columnas ) deben estar en -

equilibrio por efecto de los contantes ocasionados por los desplazamientos . Estas condiciones de equilibrio , se pueden plantear con la siguiente ecuación matricial :

$$K \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_e \\ V_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M^C \\ V^C \end{Bmatrix} = 0$$

En este sistema de ecuaciones se nos presentan dos tipos de incognitas , los desplazamientos  $\delta_i$  y los giros  $\theta_i$  .

Para la formación de la matriz de rigideces (K) y la obtencion de los momentos y contantes de empotramiento utilizare el método propuesto por Beaufait al ( 1970 ), aunque en general podria utilizarse cualquier otro método .

El método consiste en encontrar la matriz de rigideces así como los contantes y momentos de empotramiento de cada una de las barra de la estructura, para que posteriormente se determine la matriz de rigideces de toda la estructura mediante la suma de las matrices de cada una de las barras.

Sea pues la estructura de la figura ( 2 ) .

Para la cuál tendremos las siguientes incógnitas en cada una de las barras .

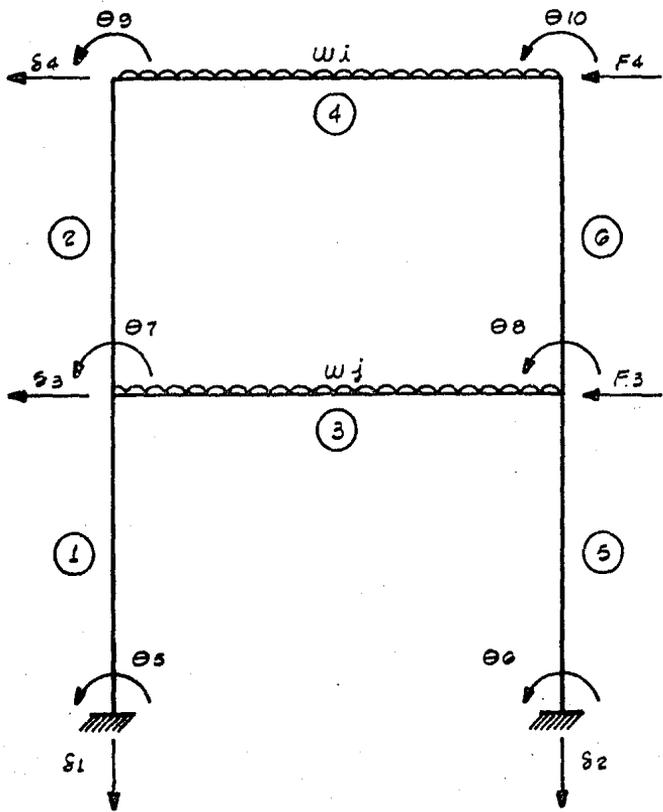


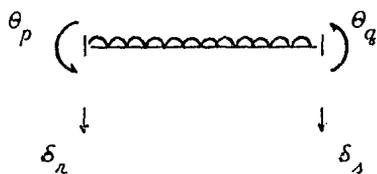
Figura ( 2 )

Barras	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_n$	$\delta_s$
1	$\theta_7$	$\theta_5$	$\delta_3$	-
2	$\theta_9$	$\theta_7$	$\delta_4$	$\delta_3$
3	$\theta_7$	$\theta_8$	$\delta_1$	$\delta_2$
4	$\theta_9$	$\theta_{10}$	$\delta_1$	$\delta_2$
5	$\theta_8$	$\theta_6$	$\delta_3$	-
6	$\theta_{10}$	$\theta_8$	$\delta_4$	$\delta_3$

I.- Matriz de Rigidez.

Calculando la matriz de rigideces de cada una de las barras tenemos:

Para las barras ( 4 ) y ( 3 )



en donde:

$$\theta_p = \theta_9 = \theta_7$$

$$\delta_n = \delta_1$$

$$\theta_q = \theta_{10} = \theta_8$$

$$\delta_s = \delta_2$$

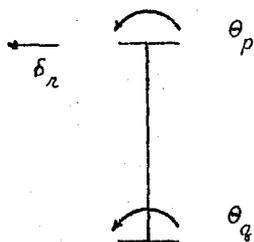
$K_3$

$\theta_7$	$\theta_8$	$\delta_1$	$\delta_2$	
$4EI/L_2$	$2EI/L_2$	$-6EI/L_2^2$	$6EI/L_2^2$	$\theta_7$
$2EI/L_2$	$4EI/L_2$	$-6EI/L_2^2$	$6EI/L_2^2$	$\theta_8$
$-6EI/L_2^2$	$-6EI/L_2^2$	$12EI/L_2^3$	$-12EI/L_2^3$	$\delta_1$
$6EI/L_2^2$	$6EI/L_2^2$	$-12EI/L_2^3$	$12EI/L_2^3$	$\delta_2$

$K_4$

$\theta_9$	$\theta_{10}$	$\delta_1$	$\delta_2$	
$4EI/L_1$	$2EI/L_1$	$-6EI/L_1^2$	$6EI/L_1^2$	$\theta_9$
$2EI/L_1$	$4EI/L_1$	$-6EI/L_1^2$	$6EI/L_1^2$	$\theta_{10}$
$-6EI/L_1^2$	$-6EI/L_1^2$	$12EI/L_1^3$	$-12EI/L_1^3$	$\delta_1$
$6EI/L_1^2$	$6EI/L_1^2$	$-12EI/L_1^3$	$12EI/L_1^3$	$\delta_2$

Para las Barras ( 1 ) y ( 5 )



en donde :

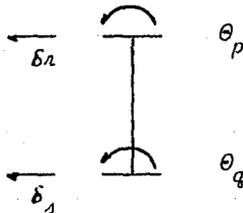
$$\theta_p = \theta_7 = \theta_8$$

$$\delta_{\alpha} = \delta_3$$

$$\theta_q = \theta_5 = \theta_6$$

	$\theta_7$	$\theta_5$	$\delta_3$	
	$4EI/L_3$	$2EI/L_3$	$-6EI/L_3^2$	$\theta_7$
$K_3$	$2EI/L_3$	$4EI/L_3$	$-6EI/L_3^2$	$\theta_5$
	$-6EI/L_3^2$	$-6EI/L_3^2$	$12EI/L_3^3$	$\delta_3$
	$\theta_8$	$\theta_6$	$\delta_3$	
	$4EI/L_4$	$2EI/L_4$	$-6EI/L_4^2$	$\theta_8$
$K_4$	$2EI/L_4$	$4EI/L_4$	$-6EI/L_4^2$	$\theta_6$
	$-6EI/L_4^2$	$-6EI/L_4^2$	$12EI/L_4^3$	$\delta_3$

Para las barras ( 2 ) y ( 6 )



en donde :

$$\theta_p = \theta_9 = \theta_{10}$$

$$\delta_n = \delta_4$$

$$\theta_q = \theta_7 = \theta_8$$

$$\delta_d = \delta_3$$

$K_5$

	$\theta_9$	$\theta_7$	$\delta_4$	$\delta_3$	
	$4EI/L_5$	$2EI/L_5$	$-6EI/L_5^2$	$6EI/L_5^2$	$\theta_9$
	$2EI/L_5$	$4EI/L_5$	$-6EI/L_5^2$	$6EI/L_5^2$	$\theta_7$
	$-6EI/L_5^2$	$-6EI/L_5^2$	$12EI/L_5^3$	$-12EI/L_5^3$	$\delta_4$
	$6EI/L_5^2$	$6EI/L_5^2$	$-12EI/L_5^3$	$12EI/L_5^3$	$\delta_3$

$K_6$

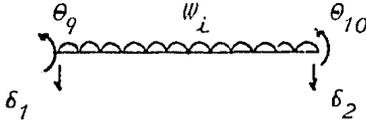
	$\theta_{10}$	$\theta_8$	$\delta_4$	$\delta_3$	
	$4EI/L_6$	$2EI/L_6$	$-6EI/L_6^2$	$6EI/L_6^2$	$\theta_{10}$
	$2EI/L_6$	$4EI/L_6$	$-6EI/L_6^2$	$6EI/L_6^2$	$\theta_8$
	$-6EI/L_6^2$	$-6EI/L_6^2$	$12EI/L_6^3$	$-12EI/L_6^3$	$\delta_4$
	$6EI/L_6^2$	$6EI/L_6^2$	$-12EI/L_6^3$	$12EI/L_6^3$	$\delta_3$

La matriz de rigideces de toda la estructura, podremos obtenerla con la suma de las matrices de cada una de las barras con lo que la matriz  $K$  para este caso será como se muestra a continuación.

	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_8$	$\theta_9$	$\theta_{10}$
$\delta_1$	$\frac{12EI+12EI}{3 \quad 1^3 \quad 1^3}$ $\frac{1}{L_1^3} \quad \frac{1}{L_2^3}$	$\frac{12EI-12EI}{1^3 \quad 1^3}$ $\frac{1}{L_1^3} \quad \frac{1}{L_2^3}$	0	0	0	0	$\frac{-6EI}{L_2^2}$	$\frac{-6EI}{L_2^2}$	$\frac{-6EI}{L_1^2}$	$\frac{-6EI}{L_1^2}$
$\delta_2$	$\frac{12EI-12EI}{1^3 \quad 1^3}$ $\frac{1}{L_1^3} \quad \frac{1}{L_2^3}$	$\frac{12EI+12EI}{1^3 \quad 1^3}$ $\frac{1}{L_1^3} \quad \frac{1}{L_2^3}$	0	0	0	0	$\frac{6EI}{L_2^2}$	$\frac{6EI}{L_2^2}$	$\frac{6EI}{L_1^2}$	$\frac{6EI}{L_1^2}$
$\delta_3$	0	0	$\frac{12EI+12EI}{1^3 \quad 1^3}$ $\frac{12EI+12EI}{1^3 \quad 1^3}$ $\frac{1}{L_3^3} \quad \frac{1}{L_6^3}$	$\frac{-12EI-12EI}{1^3 \quad 1^3}$ $\frac{1}{L_5^3} \quad \frac{1}{L_6^3}$	$\frac{-6EI}{L_3^2}$	$\frac{-6EI}{L_4^2}$	$\frac{-6EI+6EI}{L_1^2 \quad L_5^2}$ $\frac{1}{L_1^2} \quad \frac{1}{L_5^2}$	$\frac{-6EI+6EI}{L_4^2 \quad L_6^2}$ $\frac{1}{L_4^2} \quad \frac{1}{L_6^2}$	$\frac{6EI}{L_5^2}$	$\frac{6EI}{L_6^2}$
$\delta_4$	0	0	$\frac{-12EI-12EI}{1^3 \quad 1^3}$ $\frac{1}{L_5^3} \quad \frac{1}{L_6^3}$	$\frac{12EI+12EI}{1^3 \quad 1^3}$ $\frac{1}{L_5^3} \quad \frac{1}{L_6^3}$	0	0	$\frac{-6EI}{L_5^2}$	$\frac{-6EI}{L_6^2}$	$\frac{-6EI}{L_5^2}$	$\frac{-6EI}{L_6^2}$
$\theta_5$	0	0	$\frac{-6EI}{L_3^2}$	0	$\frac{4EI}{L_3}$	0	$\frac{2EI}{L_1}$	0	0	0
$\theta_6$	0	0	$\frac{-6EI}{L_4^2}$	0	0	$\frac{4EI}{L_4}$	0	$\frac{2EI}{L_4}$	0	0
$\theta_7$	$\frac{-6EI}{L_2^2}$	$\frac{6EI}{L_2^2}$	$\frac{-6EI+6EI}{L_3^2 \quad L_5^2}$ $\frac{1}{L_3^2} \quad \frac{1}{L_5^2}$	$\frac{-6EI}{L_5^2}$	$\frac{2EI}{L_3}$	0	$\frac{4EI+4EI}{L_2^2 \quad L_3^2}$ $\frac{4EI}{L_2^2} \quad \frac{4EI}{L_3^2}$ $\frac{1}{L_2^2} \quad \frac{1}{L_3^2}$	$\frac{2EI}{L_2}$	$\frac{2EI}{L_5}$	0
$\theta_8$	$\frac{-6EI}{L_2^2}$	$\frac{6EI}{L_2^2}$	$\frac{-6EI+6EI}{L_4^2 \quad L_6^2}$ $\frac{1}{L_4^2} \quad \frac{1}{L_6^2}$	$\frac{-6EI}{L_6^2}$	0	$\frac{2EI}{L_4}$	$\frac{2EI}{L_2}$ $\frac{4EI}{L_6}$	$\frac{4EI+4EI}{L_2^2 \quad L_4^2}$ $\frac{4EI}{L_2^2} \quad \frac{4EI}{L_4^2}$ $\frac{1}{L_2^2} \quad \frac{1}{L_4^2}$	0	$\frac{2EI}{L_6}$
$\theta_9$	$\frac{-6EI}{L_1^2}$	$\frac{6EI}{L_1^2}$	$\frac{6EI}{L_5^2}$	$\frac{-6EI}{L_5^2}$	0	0	$\frac{2EI}{L_5}$	0	$\frac{4EI+4EI}{L_1^2 \quad L_5^2}$ $\frac{4EI}{L_1^2} \quad \frac{4EI}{L_5^2}$ $\frac{1}{L_1^2} \quad \frac{1}{L_5^2}$	$\frac{2EI}{L_1}$
$\theta_{10}$	$\frac{-6EI}{L_1^2}$	$\frac{6EI}{L_1^2}$	$\frac{6EI}{L_6^2}$	$\frac{-6EI}{L_6^2}$	0	0	0	$\frac{2EI}{L_6}$	$\frac{2EI}{L_1}$	$\frac{4EI+4EI}{L_1^2 \quad L_6^2}$ $\frac{4EI}{L_1^2} \quad \frac{4EI}{L_6^2}$ $\frac{1}{L_1^2} \quad \frac{1}{L_6^2}$

II.- Cálculo de los Momentos de empotramiento.

En la barra ( 4 )

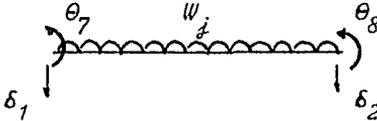


en donde :

$$M_9^e = \frac{w_i L_1^2}{12} \quad ; \quad V_1^e = \frac{-w_i L_1}{2}$$

$$M_{10}^e = \frac{-w_i L_1^2}{12} \quad ; \quad V_2^e = \frac{-w_i L_1}{2}$$

En la barra ( 3 )



en donde :

$$M_7^e = \frac{w_j L_2^2}{12} \quad ; \quad V_1^e = \frac{-w_j L_2}{2}$$

$$M_8^e = \frac{-w_j L_2^2}{12} \quad ; \quad V_2^e = \frac{-w_j L_2}{2}$$

De tal forma que el vector de momentos y cortantes de empotramiento será :

$$\left\{ \begin{array}{l} V^e \\ M^e \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_1^e = -W_i L_1 / 2 \quad - \quad W_d L_2 / 2 \\ V_2^e = -W_i L_1 / 2 \quad - \quad W_d L_2 / 2 \\ V_3^e = 0 \\ V_4^e = 0 \\ M_5^e = 0 \\ M_6^e = 0 \\ M_7^e = W_d L_2^2 / 12 \\ M_8^e = -W_d L_2^2 / 12 \\ M_9^e = W_i L_1^2 / 12 \\ M_{10}^e = -W_i L_1^2 / 12 \end{array} \right.$$

### III.- Momentos y cortantes concentrados.

El vector  $M^c$ ,  $V^c$ , que son los momentos y cortantes concentrados aplicados en los nodos quedará formado como sigue :

$$\begin{Bmatrix} V^c \\ M^c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} K_L \delta_1 \\ K_L \delta_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ K_\theta \theta_5 \\ -K_\theta \theta_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Finalmente estableciendo el equilibrio de fuerzas constantes en las columnas y el equilibrio de momentos flexionantes en los nudos de la estructura se puede ahora plantear la siguiente ecuación matricial .

$$K \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M^e \\ V^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M^c \\ V^c \end{Bmatrix} = 0$$

Habiendo establecido las condiciones anteriores obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones :

Por simetría tenemos que:

$$\delta_1 = \delta_2 \quad ; \quad \theta_5 = -\theta_6 \quad ; \quad \theta_7 = -\theta_8 \quad ; \quad \theta_9 = -\theta_{10}$$

El sistema de ecuaciones quedará :

$$\left( \frac{12EI}{L_1^3} + \frac{12EI}{L_2^3} \right) \delta_1 + \left( \frac{-12EI}{L_1^3} - \frac{12EI}{L_2^3} \right) \delta_2 - \frac{6EI}{L_2^2} \theta_7 - \frac{6EI}{L_2^2} \theta_8 +$$

$$-\frac{6EI}{L_1^2} \theta_9 - \frac{6EI}{L_1^2} \theta_{10} + \left( \frac{-W_1 L_1}{2} - \frac{W_2 L_2}{2} \right) + K_1 \delta_1 = 0 \quad (1)$$

$$\left( \frac{12EI}{L_3^3} + \frac{12EI}{L_4^3} + \frac{12EI}{L_5^3} + \frac{12EI}{L_6^3} \right) \delta_3 + \left( -\frac{12EI}{L_5^3} - \frac{12EI}{L_6^3} \right) - \frac{6EI}{L_3^2} \theta_5 +$$

$$-\frac{6EI}{L_4^2} \theta_6 + \left( \frac{-6EI}{L_3^2} + \frac{6EI}{L_5^2} \right) \theta_7 + \left( \frac{-6EI}{L_4^2} + \frac{6EI}{L_6^2} \right) \theta_8 + \frac{6EI}{L_5^2} \theta_9 +$$

$$+ \frac{6EI}{L_6^2} \theta_{10} + F_3 = 0 \quad (2)$$

$$\left( \frac{-12EI}{L_5^3} - \frac{12EI}{L_6^3} \right) \delta_3 + \left( \frac{12EI}{L_5^3} + \frac{12EI}{L_6^3} \right) \delta_4 - \frac{6EI}{L_5^2} \theta_7 - \frac{6EI}{L_6^2} \theta_8 +$$

$$-\frac{6EI}{L_5^2} \theta_9 - \frac{6EI}{L_6^2} \theta_{10} + F_4 = 0 \quad (3)$$

$$-\frac{6EI}{L_3^2} \delta_3 + \frac{4EI}{L_3} \theta_5 + \frac{2EI}{L_3} \theta_7 + K_0 \theta_5 = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-6EI}{L_2^2} \delta_1 + \frac{6EI}{L_2^2} \delta_2 + \left( \frac{-6EI}{L_3^2} + \frac{6EI}{L_5^2} \right) \delta_3 - \frac{6EI}{L_5^2} \delta_4 + \frac{2EI}{L_3} \theta_5 + \\
& + \left( \frac{4EI}{L_2} + \frac{4EI}{L_3} + \frac{4EI}{L_5} \right) \theta_7 + \frac{2EI}{L_3} \theta_8 + \frac{2EI}{L_5} \theta_9 + \frac{W_j L_2^2}{12} = 0 \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-6EI}{L_1^2} \delta_1 + \frac{6EI}{L_1^2} \delta_2 + \frac{6EI}{L_5^2} \delta_3 - \frac{6EI}{L_5^2} \delta_4 + \frac{2EI}{L_5} \theta_7 + \left( \frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_5} \right) \theta_9 + \\
& + \frac{2EI}{L_1} \theta_9 + \frac{W_j L_1^2}{12} = 0 \quad (6)
\end{aligned}$$

Però com anteriorment se havia dit :

$$\delta_1 = \delta_2 ; \theta_5 = -\theta_6 ; \theta_7 = -\theta_8 ; \theta_9 = -\theta_{10}$$

el sistema de equacions nos queda de la següent manera :

Ecuación ( 1 )

$$\begin{aligned}
& \left( 2 \times 12EI/L_1^3 + 2 \times 12EI/L_2^3 \right) \delta_1 - 6EI/L_2^2 \theta_7 + 6EI/L_2^2 \theta_7 + \\
& -6EI/L_1^2 \theta_9 + 6EI/L_1^2 \theta_9 + \left( -W_1 L_1/2 - W_j L_2/2 \right) + K_1 \delta_1 = 0
\end{aligned}$$

Ecuación ( 2 )

$$\begin{aligned} & (12EI/L_3^3 + 12EI/L_4^3 + 12EI/L_5^3 + 12EI/L_6^3) \delta_3 + (-12EI/L_5^3 + \\ & -12EI/L_6^3) \delta_4 - 6EI/L_3^2 \theta_5 + 6EI/L_4^2 \theta_5 + (-6EI/L_3^2 + 6EI/L_5^2) \theta_7 + \\ & -(-6EI/L_4^2 + 6EI/L_6^2) \theta_7 + 6EI/L_5^2 \theta_9 - 6EI/L_6^2 \theta_9 + F_3 = 0 \end{aligned}$$

Ecuación ( 3 )

$$\begin{aligned} & (-12EI/L_5^3 - 12EI/L_6^3) \delta_3 + (12EI/L_5^3 + 12EI/L_6^3) \delta_4 - 6EI/L_5^2 \theta_7 + \\ & + 6EI/L_6^2 \theta_7 - 6EI/L_5^2 \theta_9 + 6EI/L_6^2 \theta_9 + F_4 = 0. \end{aligned}$$

Ecuación ( 4 )

$$-6EI/L_3^2 \delta_3 + 4EI/L_3 \theta_5 + 2EI/L_3 \theta_7 + K_\theta \theta_5 = 0$$

Ecuación ( 5 )

$$\begin{aligned} & -6EI/L_2^2 \delta_1 - 6EI/L_2^2 \delta_1 + (-6EI/L_3^2 + 6EI/L_5^2) \delta_3 - 6EI/L_5^2 \delta_4 \\ & 2EI/L_3 \theta_5 + (4EI/L_2 + 4EI/L_3 + 4EI/L_5) \theta_7 - 2EI/L_2 \theta_7 + \\ & + 4EI/L_5 \theta_9 + W_j L_1^2 / 12 = 0 \end{aligned}$$

Ecuación ( 6 )

$$\begin{aligned} & -6EI/L_1^2 \delta_1 - 6EI/L_1^2 \delta_1 + 6EI/L_5^2 \delta_3 - 6EI/L_5^2 \delta_4 + 2EI/L_5 \theta_7 \\ & + ( 4EI/L_1 + 4EI/L_5 ) \theta_9 + 2EI/L_1 \theta_9 + W_1 L_1^2 / 12 = 0 \end{aligned}$$

En donde nuestras incógnitas serían:

$$\delta_1 ; \delta_3 ; \delta_4 ; \theta_5 ; \theta_7 ; \theta_9$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones mostrado tendríamos los desplazamientos y los giros con lo que podríamos obtener los elementos mecánicos en la estructura.

# **CAPITULO II**

## II. DETERMINACION DE LA RIGIDEZ LINEAL Y ANGULAR DE LAS ZAPATAS DE CIMENTACION

### I.- Desplazamiento Vertical ( asentamiento )

Para la obtención de la rigidez lineal y angular de una zapata rígida o cualquier estructura de cimentación rígida , es indispensable para el Ingeniero conocer los asentamientos o desplazamientos verticales de la misma.

Así pues, cuando una estructura de cimentación puede ser considerada rígida en comparación con la compresibilidad del estrato de suelo, la estructura de cimentación , que en este caso particular se trata de zapatas, estarán sometidas a un desplazamiento vertical uniforme, siempre y cuando las cargas y el área cargada sean simétricas.

Para el cálculo de los asentamientos ocurridos en una zapata rígida podemos basarnos en la Teoría de elasticidad para cimentaciones rectangulares , rígidas , en un medio elástico, semi - infinito e isotrópico con la siguiente fórmula:

$$S_a = v_e (2B) (1 - v^2) M_e \cdot q_a$$

En donde :

$B$  es el ancho de la zapata

$L$  es la longitud de zapata

$v_e$  coeficiente que depende de la relación  $L/B$

$M_e$  Modulo de resistencia a la elasticidad

$\nu$  Modulo de Poisson

$q_a$  porcentaje unitario de esfuerzos de contacto.

los valores del coeficiente  $e$  pueden ser obtenidos de la grafica de la figura 1.

De estudios realizados con la ayuda de la teoria de la elasticidad, los asentamientos ocurridos en una área - cuadrada uniformemente cargada en un medio elástico, semi-infinito e isotrópico pueden ser calculados como sigue:

En el centro de la zapata

$$\delta_c = 1.12 (2B) (1 - \nu^2) M_e \cdot q_a$$

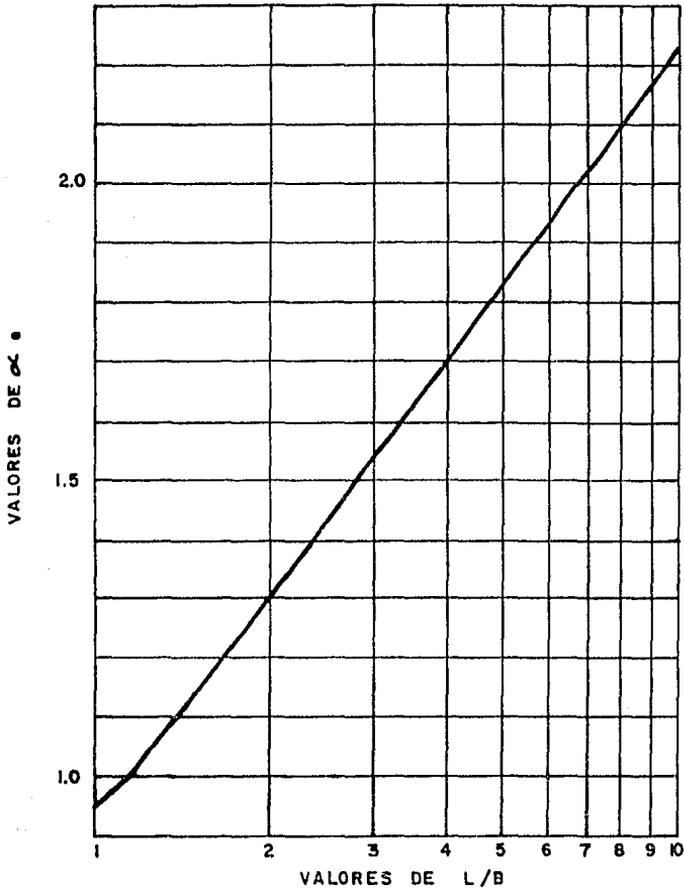
En los extremos

$$\delta_e = 1/2 \delta_c$$

Por lo que los resultados de estos estudios nos han llevado a concluir que el promedio de asentamiento ocurrido en toda el area cargada es del orden del 85% del asentamiento ocurrido en el centro de dicha área.

Sin embargo es necesario tener presente que en grandes áreas cargadas las condiciones de la estratigrafía del subsuelo son importantes.

Uno de los procedimientos para calcular más exactamente los asentamientos, es determinando los incrementos de esfuerzos



COEFICIENTE  $\alpha_e$  PARA ZAPATAS RIGIDAS RECTANGULARES  
SOBRE UN MEDIO SEMI-INFINITO E ISOTROPICO

*figura ( 1 )*

de cada uno de los estratos por el método de esfuerzos efectivos, y mediante estos esfuerzos determinar los desplazamientos verticales ( asentamientos ), correspondientes a las propiedades de compresibilidad de cada uno de los estratos encontrados .

El procedimiento para el análisis de asentamientos es realizado para algunos puntos , en la superficie cargada considerando una cimentación no rígida. La superficie cargada es dividida en áreas  $a_n$  (áreas tributarias) y el asentamiento o desplazamiento vertical  $S_n$  será determinado para cada una de las pequeñas áreas, por otra parte si la cimentación es rígida entonces el asentamiento promedio es obtenido del volumen de desplazamiento vertical del área cargada.

$$\delta_a = \frac{\sum \delta_n \cdot a_n}{\sum a_n}$$

Debe tenerse en cuenta que si la superficie de la zapata no está uniformemente cargada, dicha zapata sufrirá un giro  $\theta_a$  y por tal razón los asentamientos determinados no serán simétricos con respecto al eje principal de la superficie considerada y se tendrá ahora , que el valor calculado del asentamiento  $\delta_a$  , representara el desplazamiento vertical en el centro de gravedad del volumen de desplazamientos verticales.

El giro provocado en la zapata en un plano nos incrementará el desplazamiento vertical en el punto  $X_n, y_n$ , a causa del giro a lo largo del eje principal  $XX$  en  $\theta_x \cdot X_n$ , en el sentido del eje principal  $YY$  en  $\theta_y \cdot y_n$ . ( figura 2 )

Si tomamos momentos del volumen de desplazamientos para cada una de las áreas tributarias  $a_n$ .

$$\sum ( \theta_x \cdot X_n ) a_n \cdot X_n = \sum a_n \delta_n X_n$$

Por lo que :

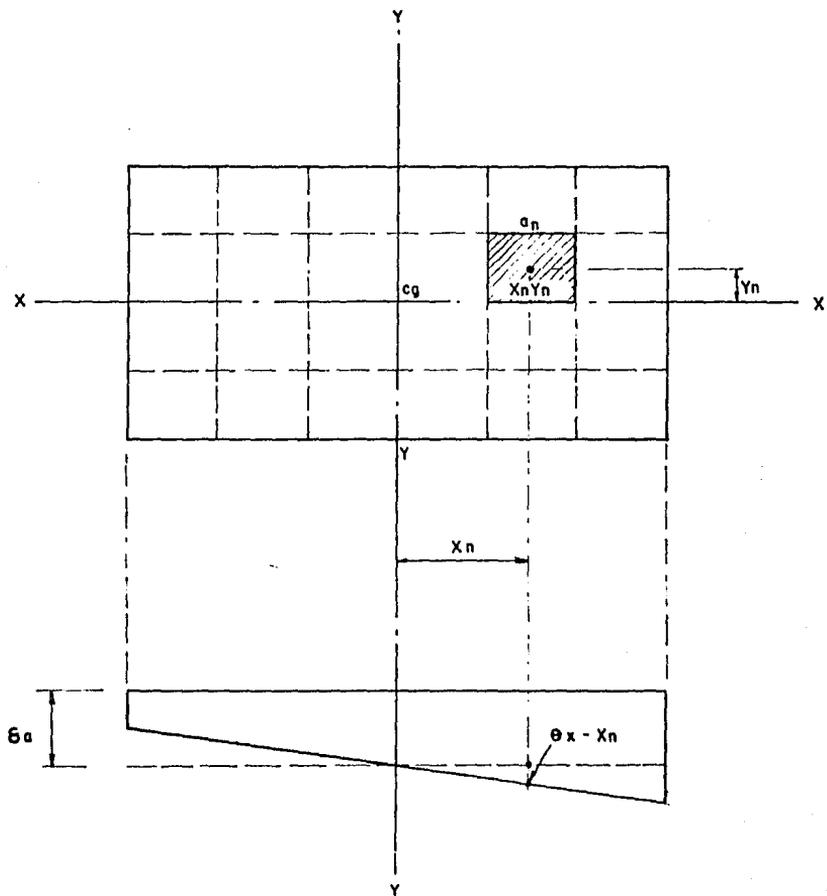
$$\theta_x = \frac{\sum a_n \delta_n X_n}{\sum a_n X_n^2}$$

y del mismo modo

$$\theta_y = \frac{\sum a_n \delta_n y_n}{\sum a_n y_n^2}$$

Por lo que podemos llegar a la conclusión de que el desplazamiento vertical total de la cimentación rígida en los puntos con coordenadas  $X_n, y_n$  es :

$$\delta_n = \delta_a \pm \theta_x \cdot X_n \pm \theta_y \cdot y_n$$



ROTACION DE CIMENTACION RIGIDA

fig. ( 2 )

Conociendo la forma para obtener los desplazamientos ocurridos en la zapata rígida de cimentación , así como el giro de la misma podemos obtener , la rigidez lineal y la rigidez angular de la zapata.

## II.- Rigidez Lineal o Módulo de Cimentación.

La rigidez lineal de una zapata de cimentación es conocida también como módulo de cimentación .

Dependiendo de las características esfuerzo - resistencia - tiempo del estrato de suelo los esfuerzos de contacto cambiarán bajo las zapatas de cimentación .

Los subgrados o módulos de reacción bajo la estructura de cimentación son determinados usando el concepto de rigidez lineal o módulo unitario de cimentación definido por:

$$K = q / \delta$$

En el cual :

$q$ .- es la carga unitaria

$\delta$ .- es el desplazamiento vertical

Es de gran importancia tener presente que la rigidez lineal o módulo de cimentación, no sólo es función de las propiedades del suelo, sino también depende de la distribución de la carga sobre la superficie cargada, así como también de la geometría de la superficie de la cimentación, las características estratigráficas y de compresibilidad del subsuelo.

Si llamamos  $q$  al porcentaje de carga unitario sobre una cierta área infinitamente pequeña  $a_n$ , de tal manera que el área total es:

$$\Delta Q_n = q_n a_n$$

Podemos obtener que :

$$k_n a_n = \frac{\Delta Q_n}{\delta_n} \quad \text{ó} \quad K_n = \frac{\Delta Q_n}{\delta_n}$$

que será el módulo concentrado de cimentación o módulo de cimentación para una área  $a_n$ .

Para zapatas corridas:

$$K (2B) \cdot l = \frac{q (2B) \cdot l}{\delta}$$

o

$$Kl = \frac{Q L}{\delta}$$

en el cual  $Ql$  es la carga por unidad de longitud de la zapata corrida y  $Kl$  el módulo de cimentación por unidad de longitud de zapata o rigidez lineal de cimentación .

Para el caso de una cimentación circular rígida, en el cual tenemos una carga total sobre el disco circular de:

$$Q = q_a \cdot \pi \cdot R^2 .$$

y conociendo la geometría y las propiedades mecánicas del estrato de suelo , con una distribución de esfuerzos uniforme sobre el área cargada , los desplazamientos verticales pueden ser calculados con la fórmula siguiente:

$$\delta_c = \sum_i^3 M_{vi} \cdot \Delta \sigma_i \cdot \Delta z_i .$$

Y como anteriormente se había nombrado que el desplazamiento vertical es:

$$\delta_a = 0.85 \delta_c .$$

podemos concluir que el módulo de rigidez lineal para una zapata con una superficie cargada  $A$  es:

$$K = \frac{q_a \cdot A}{\delta_c \cdot 0.85}$$

Con el resultado obtenido se puede concluir que el módulo de cimentación o rigidez lineal es una función de :

- a) El tamaño del área cargada
- b) La estratigrafía del subsuelo
- c) La distribución de esfuerzos en el subsuelo  
el cual depende de la rigidez de la zapata.
- d) De las propiedades de compresibilidad de el estrato de suelo.

Por tal razón los valores de  $K$  ( rigidez lineal o modulo de reacción ) no pueden ser considerados una propiedad constante del suelo.

Por ejemplo en un área grande cargada uniformemente que puede considerarse flexible, el asentamiento vertical no será uniforme y puede ser calculado en cualquier punto con coordenadas  $(x, y)$  del área cargada con :

$$S_c = \sum_i M_{vi} \cdot \Delta \sigma_i \cdot \Delta z_i$$

por lo que el valor de el módulo de cimentación o rigidez lineal variara de acuerdo a:

$$K_{xy} = \frac{q_{xy}}{\sum M_{vi} \cdot \Delta \sigma_i \cdot \Delta z_i}$$

con lo que se concluye que el módulo lineal de cimentación es una función su la posición del punto en cuestion dentro del area.

Para el caso de una zapata de ancho  $2B$  y  $2L$  de longitud, colocada en un medio de suelo cohesivo e isotropico de extensión semi-infinita, puede calcularse el desplazamiento vertical:

$$\delta = \alpha_e (2B) (1 - \nu^2) M_e * q_a$$

en donde el coeficiente  $\alpha_e$  es una función de la relación  $L/B$  y por lo que el valor del módulo de cimentación unitaria o rigidez lineal en una zapata, en un subsuelo elástico, isotropico y semi-infinito, puede ser calculado con:

$$K_a = \frac{1}{\alpha_e (2B) (1 - \nu^2) M_e}$$

De la figura 1, podemos observar que el coeficiente  $\alpha_e$  para una zapata cuadrada tiene el valor de 0.95 y por lo tanto:

$$K_a = \frac{1}{1.90 B (1 - \nu^2) M_e}$$

Tomando ahora el caso de un área circular cargada uniformemente  $q_a$ , en un medio de extensión semi-infinita con propiedades elásticas e isotropicas, en donde el módulo de deformación elástica  $M_e$  es constante con la profundidad

y con ayuda de la Teoría de la elasticidad, encontrando los desplazamientos verticales podemos calcular la rigidez lineal o módulo de reacción al centro y en el extremo respectivamente como sigue:

al centro:

$$\delta_c = 2 M_e (1-\nu^2) R^3 q_a ; \quad k = \frac{q_a}{\delta_c}$$

en el extremo:

$$\delta_e = \frac{4}{\pi} M_e (1-\nu^2) R^3 q_a ; \quad k = \frac{q_a}{\delta_e}$$

de aquí que

$$K = k_e / k_c = \pi / 2$$

con lo que podemos concluir que los valores de  $K$  toman diferentes magnitudes bajo un área cargada uniformemente y por lo tanto el equivalente módulo de reacción o rigidez lineal es  $\pi/2$  veces más grande en el extremo que en el centro del área cargada.

Considerando una cimentación circular rígida de radio  $R$ , sobre una masa de suelo compresible y con ayuda como

anteriormente se ha dicho de la Teoría de la elasticidad para cimentaciones rígidas, el desplazamiento vertical promedio será:

$$S_a = \frac{\pi}{2} m_e (1 - \nu^2) R^3 q_a$$

y la distribución de esfuerzos de contacto:

$$q_r = \frac{q_a}{2 (1 - r^2/R^2)^{3/2}}$$

de esta fórmula podemos que al centro de la zapata la reacción unitaria es:

$$q_c = (1/2 q_a)$$

y por lo tanto el módulo de reacción de cimentación será:

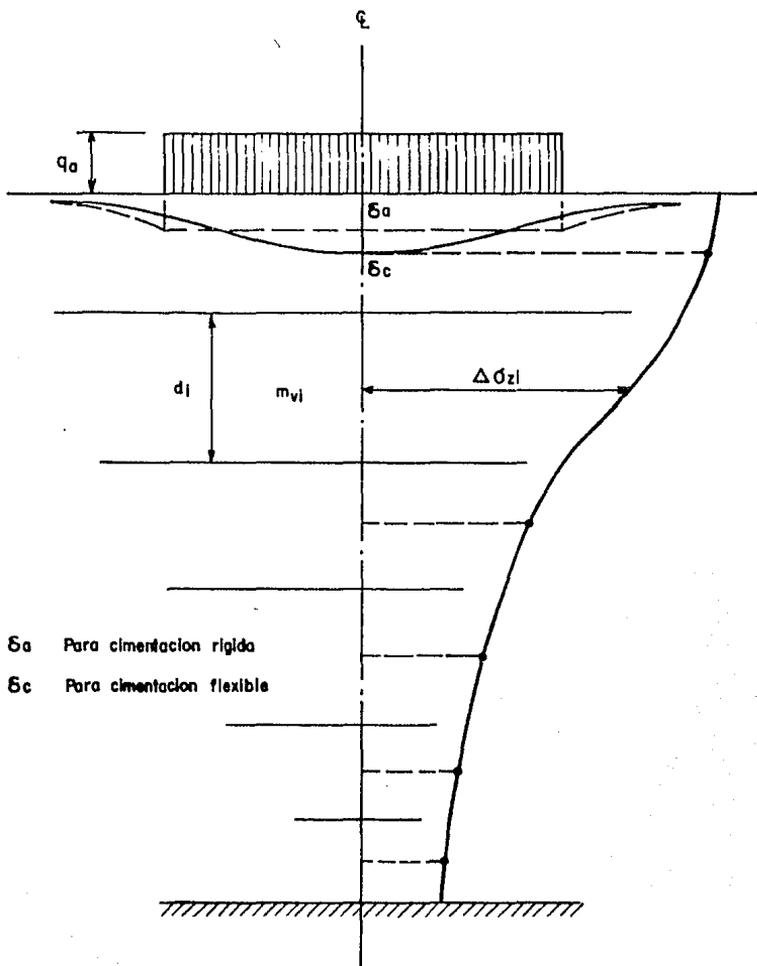
$$K_c = \frac{q_a}{2 \delta_a}$$

y para cualquier otro punto a una distancia  $r$  de el centro:

$$K_r = \frac{q_r}{\delta_a}$$

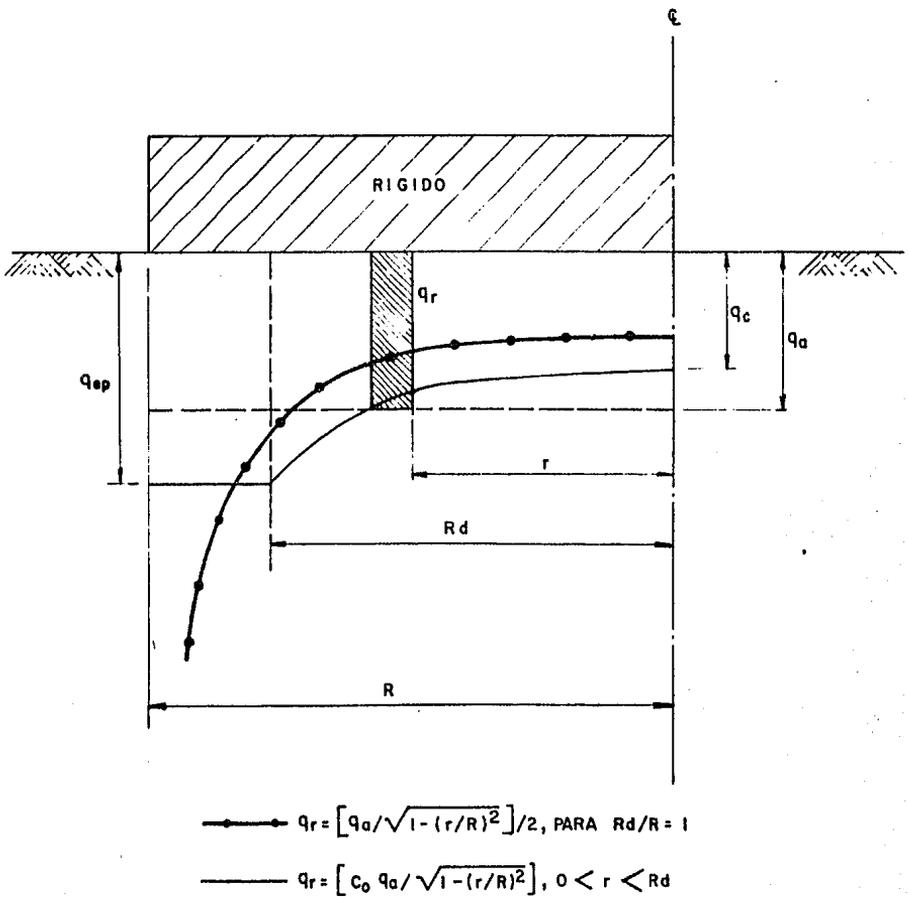
(ver figuras 3, 4 y 5).

Para encontrar un valor recomendado del módulo de reacción o rigidez lineal de cimentación Terzaghi da ciertas recomendaciones basadas en pruebas de campo hechas con placas rígidas de dimensiones de 1 pie x 1 pie, este método puede ser



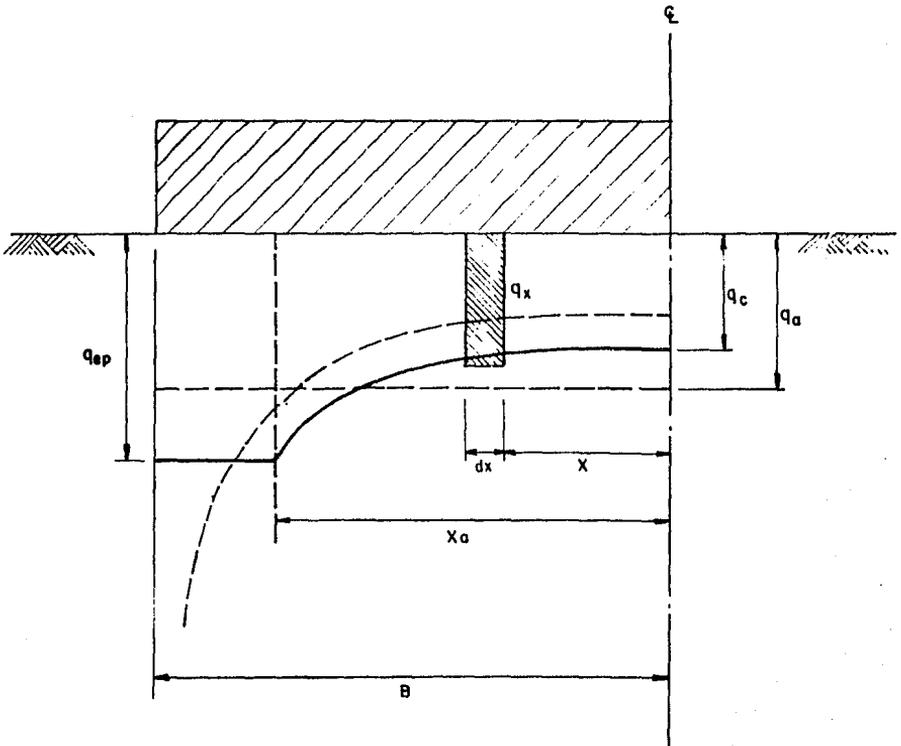
**DESPLAZAMIENTO VERTICAL BAJO UN AREA CARGADA**

Figura ( 3 )



ESFUERZO DE CONTACTO BAJO CIMENTACION CIRCULAR RIGIDA

figura ( 4 )



$$q_x = \left[ \frac{2 q_0}{\pi} \sqrt{1 - (x/B)^2} \right], \text{ PARA } x_0/B = 1$$

$$q_x = \left[ \frac{c_s q_0}{\sqrt{1 - (x/B)^2}} \right], x \leq x_0$$

ESFUERZOS DE CONTACTO  
BAJO CIMENTACION RIGIDA CORRIDA

*Figura ( 5 )*

usado en casos en los cuales la profundidad del suelo que está afectado por el ancho de la zapata, puede ser considerada isotrópica.

Si  $K_{S1}$  es la unidad promedio de los módulos de reacción o rigidez lineal, determinado por las pruebas de placa dando los resultados en  $\text{ton/m}^3$ , Terzaghi propone para el caso de arena el uso de la siguiente fórmula:

$$K_S = K_{S1} (B + 0.15/2B)^2$$

donde  $2B$  es el ancho en mts. de cualquier zapata u longitud mayor o igual que  $2B$ , o en una cimentación rígida está representada la distancia en mts. entre las líneas cargadas o entre el ancho del área tributaria de la columna.

En el caso de arcillas, recomienda:

$$K_S = \overline{K_{S1}} + \frac{n + 0.5}{1.5 n}$$

en el cual el área de contacto tiene la forma de un rectángulo de ancho  $B$  y longitud  $L = n B$ .

Terzaghi nos muestra en la siguiente tabla los valores del módulo de reacción o rigidez lineal encontrados mediante las pruebas de placa realizadas en arena y arcilla.

	<u>KS1 Promedio.</u>		<u>Rango de KS1 .</u>	
	tons/ft <sup>3</sup>	kg/cm <sup>3</sup>	tons/ft <sup>3</sup>	kg/cm <sup>3</sup>
<b>ARENA:</b>				
Suelta	40	1.29	20 - 60	0.64 - 1.92
Media	130	4.17	60 - 300	1.92 - 9.62
Compacta	500	16.10	300 - 1000	9.62 - 32.1
<b>ARCILLA</b>				
Firme	75	2.41	50 - 100	1.6 - 3.21
Muy Firme	150	4.82	100 - 200	3.21 - 6.42
Dura	300	9.64	300	9.60

**TABLA No. 1 .**

De hecho los valores de rigidez lineal o módulo de reacción , deben ser encontrados para el caso específico de las condiciones del subsuelo y del área cargada con ayuda de las siguientes fórmulas:

$$K = \frac{q_a \cdot A}{0.85 \delta_c}$$

$$K_{xy} = \frac{q_{xy}}{\sum_i M_{vi} \cdot \Delta G_1 \cdot \Delta z_i}$$

las cuales ya habían sido nombradas al principio de este capítulo, con el uso de las propiedades mecánicas del subsuelo, así como la compresibilidad del mismo, investigadas por medio de pruebas de laboratorio.

### III.- Rigidez Angular .

En toda construcción los momentos de volteo pueden ser inducidos en la cimentación en una fracción de segundos ya sea provocados por sismo o por fuerzas debidas a la acción del viento, es decir, se presentan como cargas transitorias.

Bajo la acción de estas cargas el problema que se presenta, viene sólo de la deformación elástoplastica, basada en la respuesta elástica de la cimentación de la estructura en cuestión .

Para asumir la respuesta elástica, se requiere estimar los esfuerzos inducidos por un momento de volteo.

Sea pues una losa de cimentación, en el cual la fuerza resultante que producen las condiciones mencionadas anteriormente, es aplicada a la altura  $H$  de la losa de cimentación.

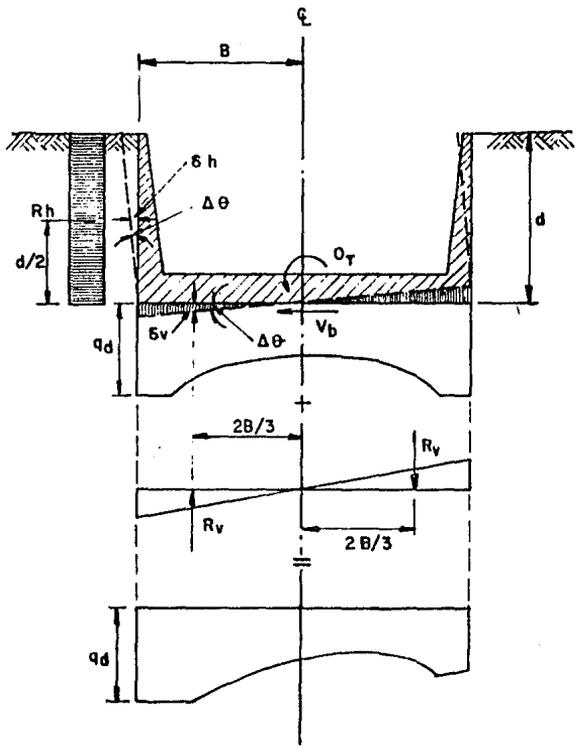
Debido al grado de elevación de los cimientos esta fuerza produce en la base un cortante  $V_b$  y un momento de volteo  $O_x$ .

Bajo estas circunstancias se puede analizar la mecánica del problema bajo las siguientes hipótesis de trabajo:

- a) El cajón de cimentación es rígido.
- b) El contante es resistido por el suelo de la losa de cimentación con un amplio factor de seguridad. Por lo que no existe desplazamiento entre el subsuelo y la losa de cimentación .
- c) La respuesta del suelo es considerada como -- elástica.
- d) La rotación del cajón de cimentación alrededor del punto medio de la losa de cimentación .
- e) El suelo es comprimido en un lado de la pared , con una distribución de esfuerzos de tensión uniforme.
- f) El incremento en la reacción vertical del suelo inducido por el momento de volteo en la base de la estructura de cimentación -- tiene una línea continua de variación , que -- puede ser sumado al subgrado estático de la distribución de la reacción .

basados en estas hipótesis los momentos de volteo de la cimentación pueden ser expresadas en terminos de reacción  $R_x$  y  $R_h$  como sigue:

$$O_x = 1/2 d R_h + 4/3 B R_v \quad ( 1 )$$



ESFUERZO INDUCIDO POR UN MOMENTO DE VOLTEO

Figura ( 6 )

de la figura 6. podemos observar de la geometría que:

$$\delta_h = 1/2 d\Delta\theta \quad \text{y} \quad \delta_v = 2/3 B\Delta\theta. \quad (2)$$

Si llamamos  $K_{vl}$  y  $K_{hl}$  módulo lineal de cimentación o rigidez lineal (módulo de reacción), para la distribución de carga en la dirección horizontal y vertical respectivamente.

$$R_h = K_{hl} \cdot \delta_h \quad \text{y} \quad R_v = K_{vl} \cdot \delta_v \quad (3)$$

Por lo tanto:

$$R_h/R_v = K_{hl}/K_{vl} \cdot \delta_h/\delta_v \quad (4)$$

Si sustituimos (2) en (4)

$$R_h/R_v = 3/4 K_{hl}/K_{vl} \cdot d/B$$

si usamos la ecuación (1) y llamamos  $K_1 = K_{hl}/K_{vl}$  obtenemos

$$R_h = \frac{2}{d(1 + 32/9 \lambda K_1 \cdot B^2/d^2)} O_t ;$$

$$R_v = \frac{3}{4B(1 + 9/32 \lambda K_1 \cdot d^2/B^2)} O_t$$

Con la obtención de estas fórmulas, podemos darnos cuenta de la importancia que tiene el diseñar la profundidad de la cimentación para obtener buena estabilidad en la estructura.

El incremento de los esfuerzos en las orillas será:

$$\Delta \sigma_h = R_h/d \quad \text{y} \quad \Delta \sigma_v = \pm 2 R_v/B$$

Para encontrar el ángulo de giro, de las fórmulas (2) y (3)

$$\Delta \theta = 3/2 R_v/K_{vl} \cdot B$$

Si llamamos  $O_{TB}$  al momento de volteo que se da en la cimentación podemos entonces calcular el módulo de giro lineal de cimentación o rigidez angular como sigue:

$$K_{\theta B} = \frac{O_{TB}}{\Delta \theta} \quad \text{o} \quad K_{\theta B} = 8/9 K_{vl} B^2$$

de manera similar pero ahora para la pared:

$$K_{\theta w} = \frac{O_{TW}}{\Delta \theta} \quad \text{o} \quad K_{\theta w} = 1/4 K_{hl} d^2$$

por lo tanto:

$$K_{\theta w} / K_{\theta B} = 9/32 \cdot K_{hl} / K_{vl} \cdot d^2 / B^2$$

y si llamamos

$$\lambda K_{\theta} = K_{\theta W} / K_{\theta B}$$

tenemos:

$$R_h = \frac{2\lambda K_{\theta}}{d(1 + \lambda K_{\theta})} O_T$$

y

$$R_v = \frac{3}{4B(1 + \lambda K_{\theta})} O_T$$

y la rotación elástica de la cimentación:

$$\Delta \theta_e = \frac{O_T}{K_{\theta B} (1 + \lambda K_{\theta})}$$

Los valores de  $K_{\theta B}$  y  $K_{\theta W}$  por unidad de longitud pueden obtenerse calculando los desplazamientos verticales y horizontales producidos por momentos  $O_{TB}$  y  $O_{TW}$  aplicados en el depósito de suelo.

Cuando tenemos cimentaciones superficiales y tomando en consideración las propiedades mecánicas de respuesta elástica del estrato del subsuelo y con la adición de las formulas:

$$\theta_x = \frac{\sum a_n \cdot S_n \cdot X_n}{\sum a_n \cdot X_n^2}$$

$$\theta_y = \frac{\sum a_n \cdot S_n \cdot Y_n}{\sum a_n \cdot Y_n^2}$$

$$\delta_n = \delta_a + \theta_x \cdot X_n + \theta_y \cdot Y_n$$

para las que el valor  $\lambda K_\theta$  puede ser determinada en este tipo de cimentaciones y tomaria el valor de  $\lambda K_\theta = 0$ , con lo que el módulo de giro lineal o rigidez angular será calculado con :

$$K_\theta = O_T / \Delta \theta_e$$

en el caso de que tubieramos una masa de suelo homogéneo e isotrópico de extensión semi - infinita.

Estudios realizados por Frölich ( 1953 ) ha encontrado basado en la teoría de la elasticidad , que el giro de una franja de cimentación rígida, de ancho  $2B$  sujeta a un momento flexionante  $M$  es dado por :

$$\tan v = \frac{4}{\pi} ( 1 - \nu^2 ) M / EB^2$$

ahora si utilizamos la nomenclatura anterior tenemos que:

$\tan \nu = \Delta \theta_e$  ; la respuesta del módulo elástico  $M_{ev} = 1/E$  ;  
 $M = O_{TB}$  , y para el caso de un suelo saturado donde  
 $\nu = 0.5$  , entonces :

$$\Delta \theta_e = \frac{3}{\pi} \frac{O_{TB}}{B^2} \cdot M_{ev}$$

con lo que el módulo de rotación lineal de cimentación o rigidez angular de la zapata se obtiene con :

$$K_{\theta B} = \pi B^2 / 3 M_{ev} \quad (A)$$

esta fórmula puede ser usada cuando el suelo es aproximadamente isotrópico y de extensión ilimitada, sin embargo estas limitaciones deben ser tomadas en cuenta si el subsuelo esta estratificado y  $M_e$  no puede ser considerado constante con la profundidad.

El desplazamiento horizontal a media altura ocasionado por la rotación de la pared puede ser calculado aproximadamente con:

$$\delta_h = M_{eh} \left( \frac{1}{2} d \right) \Delta \nabla_h$$

Por consiguiente:

$$K_{hl} = 2 / M_{eh}$$

en donde tenemos :

$M_{eh}$  - es el promedio de respuesta del módulo elástico del suelo en dirección horizontal.

El módulo de rotación lineal de la pared es :

$$K_{\theta W} = \frac{1}{2} d^2 / M_{eh}$$

$$\text{si } K_{\theta W} / K_{\theta B} = \lambda K_{\theta}$$

entonces

$$\lambda K_{\theta} = 3/2 \pi \cdot d^2 / B^2 ( M_{ev} / M_{eh} )$$

si  $( M_{ev} / M_{eh} ) = 1$  ; entonces :

$$\lambda K_{\theta} = 3/2 \pi \cdot ( d^2 / B^2 )$$

# **CAPITULO III**

### III . EJEMPLO DE APLICACION.

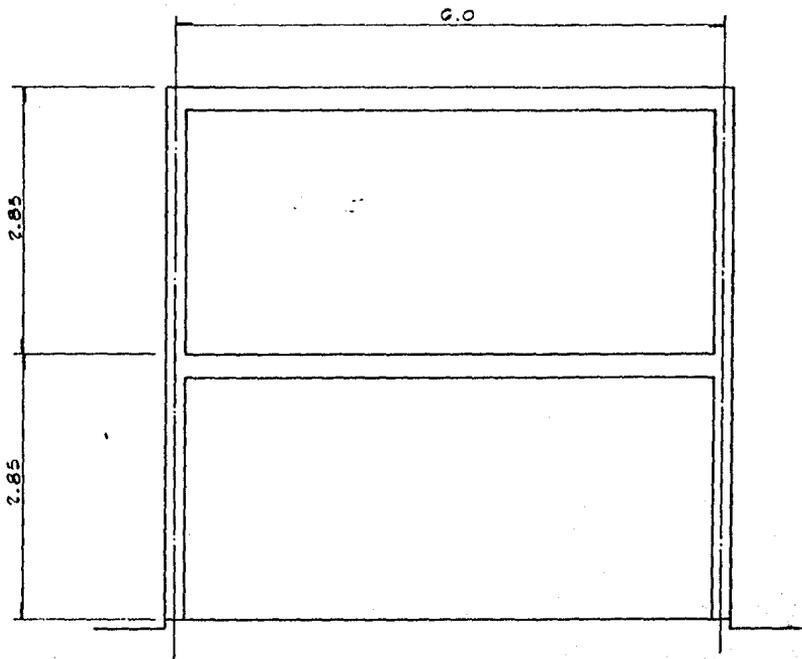
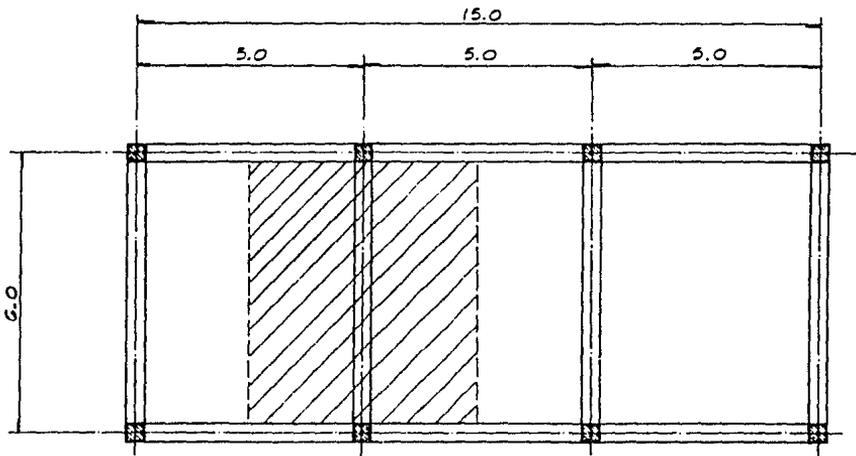
A continuación se presenta como ejemplo el análisis de un marco en el cual se toma en cuenta la rigidez lineal y angular de las zapatas ,y al final del mismo se presenta el diagrama de momentos que tendria el marco tomando en cuenta estos parámetros, así como también se presentan los resultados del mismo análisis pero sin tomar en cuenta la rigidez de las zapatas .

Sea pues la siguiente estructura que consta de dos niveles, primer nivel y azotea, cuya finalidad es el de ser utilizado como oficinas.

La estructura consta de un solo cuerpo a base de columnas, trabes y losa maciza , la cimentación estará resuelta a base de zapatas aisladas.

La sección de las columnas es de 35 x 35

La sección de las trabes es de 35 x 50 .



CARGAS CONSIDERADAS.

Primer Nivel

Losa $h = 10$ cm	$2400 \times .10 + 20$	260 Kg/cm <sup>2</sup> (RDF art.224)
Firme + mosaico		110 "
p.p. vigas y columnas		100 "
Canceles y muros divisorios		50 "
Plafond		50 "
Carga viva		250 "
		<hr/> 820 Kg/cm <sup>2</sup>

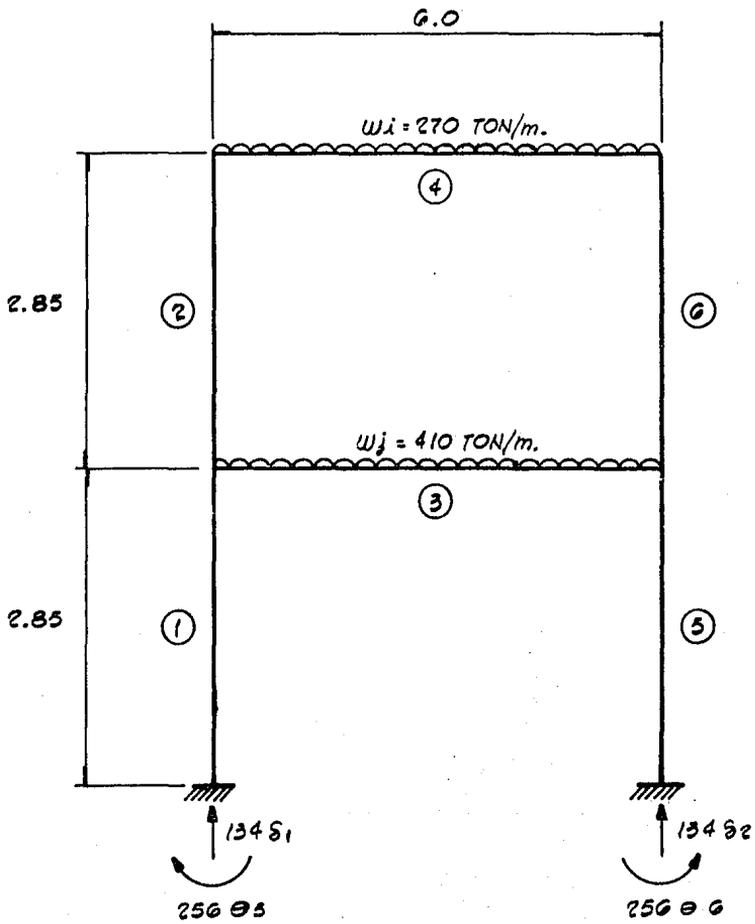
Nivel azotea.

Losa $h = 10$		260 Kg/cm <sup>2</sup>
Relleno de tezontle ( 20 cm )		30 "
Entontado y enladrillado		50 "
p.p. vigas		50 "
Plafond		50 "
Carga viva		100 "
		<hr/> 540 Kg/cm <sup>2</sup>

Area Tributaria ( fig. 1 )

$$W_1 = 5.0 \times 6.0 \times .820 = 24.60 \text{ ton.} \quad ; \quad w_1 = 2.70 \text{ ton/m}$$

$$W_2 = 5.0 \times 6.0 \times .540 = 16.20 \text{ ton.} \quad ; \quad w_2 = 4.10 \text{ ton/m}$$



Con lo que nuestro marco quedara bajo las acciones que se muestra en la figura 2.

Momento de inercia de la trabe:

$$I_t = \frac{bh^3}{12} = \frac{35 \times 50^3}{12} = 364,583.33 \text{ cm}^4$$

Momento de inercia de la columna.

$$I_c = \frac{35^4}{12} = 125,052.0 \text{ cm}^4$$

Módulo de elasticidad del concreto:

$$E = 10000 f'_c{}^{1/2}$$

Esfuerzo del concreto:

$$f'_c = 250 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$E = 10,000 (250)^{1/2} = 158,114 \text{ Kg/cm}^2$$

$$EI_t = 364,583 \times 158,114 = 5.765 \times 10^{10} \text{ Kg.cm}^2 = 5765 \text{ Ton. m}^2$$

$$EI_c = 125,052 \times 158,114 = 1.977 \times 10^{10} \text{ Kg.cm}^2 = 1977 \text{ Ton. m}^2$$

Sustituyendo valores en la matriz de rigideces de toda la estructura, que fue planteada en el capitulo I, la matriz nos quedara como sigue:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_8$	$\theta_9$	$\theta_{10}$
$S_1$	640.6	-640.6	0	0	0	0	-960.8	-960.8	-960.8	-960.8
$S_2$	-640.6	640.6	0	0	0	0	960.8	960.8	960.8	960.8
$S_3$	0	0	4099.3	-2049.7	-1460.4	-1460.4	0	0	1460.4	1460.4
$S_4$	0	0	-2049.67	2049.7	0	0	-1460.4	-1460.4	-1460.4	-1460.4
$\theta_5$	0	0	-1460.4	0	1318	0	1387.4	0	0	0
$\theta_6$	0	0	-1460.4	0	0	1318	0	637.0	0	0
$\theta_7$	-960.8	960.8	0	-1460.4	1387.4	0	9392.8	1921.7	1387.4	0
$\theta_8$	-960.8	960.8	0	-1460.4	0	639.0	1921.7	9392.8	0	1387.4
$\theta_9$	-960.8	960.8	1460.4	-1460.4	0	0	1387.4	0	6618.1	1921.7
$\theta_{10}$	-960.8	960.8	1460.4	-1460.4	0	0	0	1387.4	1921.7	6618.1

así como también calculando los cortantes y momentos de empotramiento y sustituyendo en el vector de cortantes y momentos:

$$V_1^e = \frac{-2.70 \times 6.0}{2} - \frac{4.70 \times 6.00}{2} = 20.40 \text{ ton.}$$

$$V_2^e = \frac{-2.70 \times 6.0}{2} - \frac{4.70 \times 6.00}{2} = 20.40 \text{ ton.}$$

$$M_7^e = \frac{4.10 \times 6.00^2}{12} = 12.30 \text{ ton.m}$$

$$M_8^e = -\frac{4.10 \times 6.00^2}{12} = -12.30 \text{ ton.m}$$

$$M_9^e = \frac{2.70 \times 6.00^2}{12} = 8.10 \text{ ton.m}$$

$$M_{10}^e = -\frac{2.70 \times 6.00^2}{12} = -8.10 \text{ ton.m}$$

quedando el vector de cargas de empotramiento de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} V^e \\ M^e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -20.40 \\ -20.40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12.30 \\ -12.30 \\ 8.10 \\ -8.10 \end{Bmatrix}$$

y por último sustituyendo en el vector de constantes y momentos concentrados .

de estudios hechos por el laboratorio de Mecánica de suelos se tiene como dato:

$$K_L = 134 \text{ ton}$$

$$K_\theta = 256 \text{ ton.m}$$

$$\begin{Bmatrix} V^c \\ M^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 134 S_1 \\ 134 S_2 \\ 0 \\ 0 \\ 256 O_5 \\ -256 O_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

y como se habla dicho anteriormente, por simetría

$$\delta_1 = \delta_2$$

$$\theta_5 = -\theta_6$$

$$\theta_7 = -\theta_8$$

$$\theta_9 = -\theta_{10}$$

y sustituyendo en el sistema de ecuaciones obtenido en el capítulo I (ecuaciones 1 a 6), tomando en cuenta las consideraciones anteriores .

Ecuación ( 1 )

$$\left( \frac{2 \times 12EI}{L_1^3} + \frac{2 \times 12EI}{L_2^3} \right) \delta_1 - \frac{6EI}{L_2^2} \theta_7 + \frac{6EI}{L_2^2} \theta_7 - \frac{6EI}{L_1^2} \theta_9 + \frac{6EI}{L_1^2} \theta_9 +$$
$$+ \left( \frac{-W_1 L_1}{2} - \frac{W_2 L_2}{2} \right) + K_1 \delta_1 = 0$$

Ecuación ( 2 )

$$\left( \frac{12EI}{L_3^3} + \frac{12EI}{L_4^3} + \frac{12EI}{L_5^3} + \frac{12EI}{L_6^3} \right) \delta_3 + \left( \frac{-12EI}{L_5^3} - \frac{12EI}{L_6^3} \right) \delta_4 - \frac{6EI}{L_3^2} \theta_5$$
$$+ \frac{6EI}{L_4^2} \theta_5 + \left( \frac{-6EI}{L_3^2} + \frac{6EI}{L_5^2} \right) \theta_7 - \left( \frac{-6EI}{L_4^2} + \frac{6EI}{L_6^2} \right) \theta_7 + \frac{6EI}{L_5^2} \theta_9 - \frac{6EI}{L_6^2} \theta_9$$
$$+ F_3 = 0$$

Ecuación ( 3 )

$$\left( \frac{-12EI}{L_5^3} - \frac{12EI}{L_6^3} \right) \delta_3 + \left( \frac{12EI}{L_5^3} + \frac{12EI}{L_6^3} \right) \delta_4 - \frac{6EI}{L_5^2} \theta_7 + \frac{6EI}{L_6^2} \theta_7 - \frac{6EI}{L_5^2} \theta_9$$
$$+ \frac{6EI}{L_6^2} \theta_9 + F_4 = 0$$

Ecuación ( 4 )

$$-\frac{6EI}{L_3^2} \delta_3 + \frac{4EI}{L_3} \theta_5 + \frac{2EI}{L_3} \theta_7 + K_0 \theta_5 = 0$$

Ecuación ( 5 )

$$\begin{aligned} & \frac{-6EI}{L_2^2} \delta_1 - \frac{6EI}{L_2^2} \delta_1 + \left( \frac{-6EI}{L_3} + \frac{6EI}{L_5^2} \right) \delta_3 - \frac{6EI}{L_5^2} \delta_4 + \frac{2EI}{L_3} \theta_5 + \\ & + \left( \frac{4EI}{L_2} + \frac{4EI}{L_3} + \frac{4EI}{L_5} \right) \theta_7 - \frac{2EI}{L_2} \theta_7 + \frac{4EI}{L_5} \theta_9 + \frac{WjLI^2}{12} = 0 \end{aligned}$$

Ecuación ( 6 )

$$\begin{aligned} & \frac{-6EI}{L_1^2} \delta_1 - \frac{6EI}{L_1^2} \delta_1 + \frac{6EI}{L_5^2} \delta_3 - \frac{6EI}{L_5^2} \delta_4 + \frac{2EI}{L_5} \theta_7 + \frac{2EI}{L_1} \theta_9 \\ & + \left( \frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_5} \right) \theta_9 + \frac{WjLI^2}{12} = 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo valores en estas ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned} 1.- & 1640.56 - 640.56 \delta_1 - 960.83 \theta_7 + 960.83 \theta_7 - 960.83 \theta_9 \\ & + 960.83 \theta_9 - 20.40 + 134 \delta_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.- & 4099.33 \delta_3 - 2049.67 \delta_4 - 1460.39 \theta_5 + 1460.39 \theta_5 + 1460.39 \theta_9 \\ & - 1460.39 \theta_9 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.- & -2049.67 \delta_3 + 2049.67 \delta_4 - 1460.39 \theta_7 + 1460.39 \theta_7 - 1460.39 \theta_9 \\ & + 1460.39 \theta_9 = 0 \end{aligned}$$

$$4.- -1460.39 \delta_3 + 1318 \theta_5 + 1387.37 \theta_7 + 256.0 \theta_5 = 0$$

$$\begin{aligned} 5.- & -960.83 \delta_1 + 960.83 \delta_1 - 1460.39 \delta_4 + 1387.37 \theta_5 + 9392.81 \theta_7 \\ & - 1921.67 \theta_7 + 1387.37 \theta_9 + 12.30 = 0 \end{aligned}$$

$$6.- -960.83 \delta_1 + 960.83 \delta_1 + 1460.39 \delta_3 - 1460.38 \delta_4 + 1387.37 \theta_7 \\ + 6618.07 \theta_9 - 1921.67 \theta_9 + 8.10 = 0$$

Pon lo que el sistema a resolver será :

$$a) 134 \delta_1 = 20.40$$

$$b) 4099.33 \delta_3 - 2049.67 \delta_4 = 0$$

$$c) -2049.67 \delta_3 + 2049.67 \delta_4 = 0$$

$$d) -1460.39 \delta_3 + 1574.0 \theta_5 + 1387.37 \theta_7 = 0$$

$$e) -1460.39 \delta_4 + 1387.37 \theta_5 + 7471.14 \theta_7 + 1387.37 \theta_9 = -12.30$$

$$f) 1460.39 \delta_3 - 1460.39 \delta_4 + 1387.37 \theta_7 + 4696.40 \theta_9 = -8.10$$

Resolviendo el sistema obtenemos los siguientes resultados:

$$\delta_1 = 0.1522$$

$$\delta_3 = 0$$

$$\delta_4 = 0$$

$$\theta_5 = 0.001495$$

$$\theta_7 = -0.001696$$

$$\theta_9 = -0.001223$$

Cálculando los momentos que se nos presentan en la estructura ,  
para trazar el diagrama de momentos flexionantes en las trabes  
y en las columnas.

Momento en el nodo 9.

en la trabe:

$$\frac{4(5765)(-0.001223)}{6} + \frac{2(5765)(0.001223)}{6} + 8.10 = 5.75 \text{ t.m}$$

en la columna:

$$\frac{4(1977)(-0.001223)}{2.85} + \frac{2(1977)(-0.001696)}{2.85} = -5.75 \text{ t.m}$$

Momento en el nodo 7

en la trabe:

$$\frac{4(5765)(-0.001696)}{6} + \frac{2(5765)(0.001696)}{6} + 12.30 = 9.04 \text{ t.m}$$

en la columna superior:

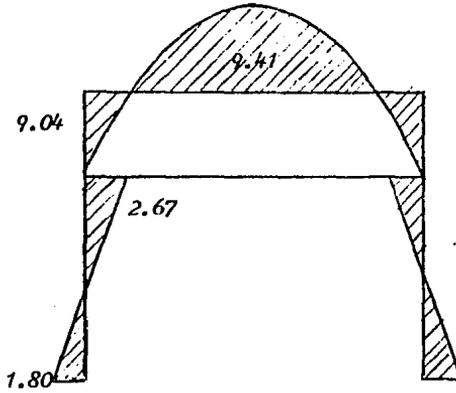
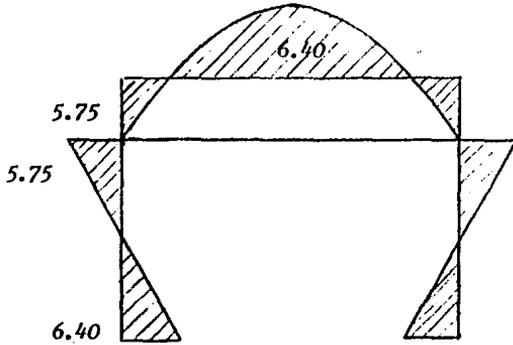
$$\frac{4(1977)(-0.001696)}{2.85} + \frac{2(1977)(-0.001223)}{2.85} = -6.40$$

en la columna inferior:

$$\frac{4(1977)(-0.001696)}{2.85} + \frac{2(1977)(0.001495)}{2.85} = -2.64 \text{ t.m}$$

Momento en el nodo 5

$$\frac{4(1977)(0.001495)}{2.85} + \frac{2(1977)(-0.001696)}{2.85} = 1.80 \text{ t.m}$$



*Diagrama de momentos del marco, tomando en cuenta la rigidez lineal y angular de las zapatas.*

A continuación , se presentan los resultados y el diagrama de momentos del mismo marco ,pero sin considerar la rigidez de las zapatas.

$$O_7 = -0.001404$$

$$O_8 = 0.001404$$

$$O_9 = -0.001308$$

$$O_{10} = 0.0013035$$

Momento en el nodo 9

en la trabe:

$$M = 5.59 \text{ t.m}$$

en la columna:

$$M = -5.59 \text{ t.m}$$

Momento en el nodo 7

en la trabe:

$$M = 9.51 \text{ t.m}$$

en la columna superior:

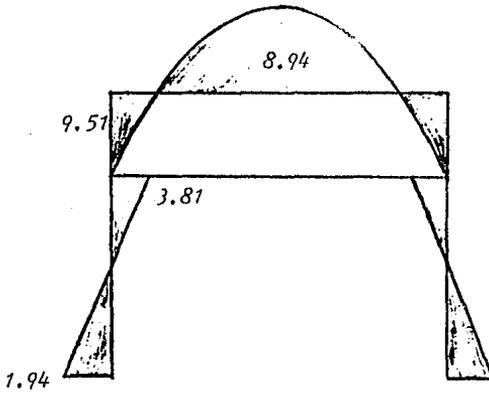
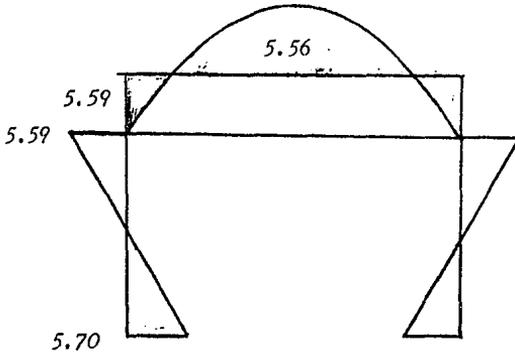
$$M = -5.70 \text{ t.m.}$$

en la columna inferior:

$$M = -3.81 \text{ t.m}$$

en los apoyos:

$$M = -1.94 \text{ t.m}$$



*Diagrama de momentos del marco sin tomar en cuenta la rigidez lineal y angular de las zapatas .*

Como podemos darnos cuenta al hacer un análisis comparativo de los diagramas de momentos flexionantes, podemos apreciar que los momentos en la superestructura cuando se toma en cuenta la rigidez de las zapatas del 1<sup>er</sup> nivel al nivel azotea en trabes aumenta en un 15% y en columnas un 12%; más sin embargo del nivel P.B/ a 1<sup>er</sup> nivel en trabes aumenta un 5% y en la columna disminuye un 43%, el cual debe considerarse como un decremento importante, y en los apoyos el momento disminuye en un 8%.

# **CAPITULO IV**

#### IV. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS.

Como anteriormente se había dicho el Ingeniero estructurista al hacer el análisis y diseño de estructuras, la gran mayoría de las veces tan sólo se limita a llevarlos a cabo sin tomar en cuenta realmente la importancia que existe entre el suelo y la estructura en estudio, cualquiera que está sea por simple o compleja que se nos presente, de igual forma el Ingeniero en mecánica de suelos, realiza los estudios del comportamiento de los estratos del suelo, muchas de las veces sin visualizar la gran importancia existente entre estas dos grandes áreas en estudio LAS ESTRUCTURAS Y EL SUELO.

El trabajo que presento como tesis podría resultar muy simple, pero la realidad de las cosas es que este trabajo toma en cuenta la interacción entre la cimentación y la superestructura, que es como en realidad deberían hacerse los análisis de todo tipo de estructuras.

El porqué de la importancia es fácil de explicar, simple y sencillamente porque el terreno donde se desplantan la gran mayoría de las construcciones existentes en nuestra ciudad es de muy alta compresibilidad y por consecuencia

*existen movimientos diferenciales que en un principio no se han tomado en cuenta y que afectan en poco o en mucho a las estructuras.*

*Cabe señalar que muchos de los Ingenieros dedicados al estudio de la interacción Suelo - Estructura, llegan de una u otra forma a la misma conclusión, es decir que en el análisis de las estructuras debe tomarse en cuenta, el comportamiento y la reacción del suelo, o sea, dicho en otra forma en el análisis de las estructuras debe tomarse en cuenta los desplazamientos y los giros que se provocan en cimentación debido al comportamiento del suelo y tomando en cuenta esto realizar el análisis de la estructura en estudio.*

*Los valores de los desplazamientos y giros obtenidos en este trabajo fueron para el caso particular de zapatas de cimentación y que han sido llamados rigidez lineal y angular o módulo de reacción lineal y angular de las zapatas, fueron proporcionados por el laboratorio de mecánica de suelos y explicados de forma general.*

*Como se pudo observar desde la obtención de los valores mencionados existe ya la participación del Ingeniero en cimentaciones y el Ingeniero estructurista.*

*Cabe aclarar que el método aquí presentado es válido para zapatas en las que no existe interacción entre ellas, es decir, que los esfuerzos que provoca una zapata no afectan el comportamiento de las otras adyacentes.*

*Por otra parte es interesante mencionar que con la ayuda del método de rigideces y por el procedimiento de las barras, se realizó el análisis del marco tomando en cuenta tanto las acciones debidas a las cargas a las que está sometido el marco, como a la fuerza vertical en la zapata y al giro que se presenta en la misma.*

*Esto nos permite de cierta manera tomar en cuenta un comportamiento más real del marco en estudio, ya que hay que tener presente que en una ciudad como en la que vivimos, que cuenta con zonas en las que se tiene suelo de consistencia muy blanda (podría decirse que se asemeja a una masa gelatinosa) en donde su comportamiento no es muy fácil de predecir y por lo tanto es de mucha importancia tomar en cuenta la relación existente entre el Suelo-Cimentación-Estructura.*

*Creo conveniente señalar que el análisis del marco que realice es está tesis, para facilidad de cálculo se consideró simétrico y sin la acción de cargas horizontales, pero cabe*

*aclarar que se puede llevar a cabo el análisis para cualquier tipo de marco, y bajo la acción de cualquier tipo de carga.*

*También es muy importante mencionar que tomando en cuenta la rigidez de las zapatas los momentos en la superestructura aumentan y esto debe tomarse muy en cuenta para el diseño de los miembros componentes de está.*

*Por último, sería recomendable que para la realización de cualquier obra, ya sea un puente, edificio, carretera, túnel, etc. que estén siempre en contacto tanto el Ingeniero estructuralista como el Ingeniero en mecánica de suelos antes de llevarse a cabo, ya que así se tomarían soluciones de común acuerdo a los posibles problemas que puedan presentarse, dando así una mejor solución a estos.*

# **BIBLIOGRAFIA**

## BIBLIOGRAFIA.

- "Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions"  
Leonardo Zeevaert.  
Van Nostrand Reinhold Company.  
New York, 1973.
- "Teoría elemental de estructuras"  
Yuan Yu Hsieh.  
Prentice Hall Internacional, 1981.
- "Análisis estructural "  
Jack. McCormack.  
Harla, 1983.
- "Introducción al análisis estructural con matrices"  
Hayretin Kardestuncer.  
Mc - graw Hill
- "Análisis estructural"  
Fred W. Beaufait.  
Prentice Hall Internacional, 1981.
- "Mecánica de Suelos. Tomo II."  
Júarez Badillo, Rico Rodríguez.  
Limusa, México, 1979.
- "Requisitos de seguridad y servicio para las  
estructuras, Título IV.  
Instituto de Ingeniería, Facultad de Ingeniería UNAM.  
México , 1977.

- *"Apuntes de Interacción Suelo - Estructura"*  
M. en J. Agustín Deméneghi Colina.  
Mexico.
  
- *"Apuntes de análisis estructural "*  
Facultad de Ingeniería .  
UNAM, 1980.