



# Universidad Nacional Autónoma de México

---

---

FACULTAD DE INGENIERIA

"TEORIA Y EJEMPLOS DE APLICACION PARA LA  
CLASE DE INGENIERIA SISMICA"

## Tesis Profesional

Que para obtener el título de  
INGENIERO CIVIL  
P r e s e n t a

FREDDY ZURITA MONTERO

Director de Tesis: M. en I. José Luis Trigos Suarez

México, D. F.

1985





Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

I.- INTRODUCCION	4
II.- SISTEMAS ELASTICOS DE UN GRADO DE LIBERTAD	6
A.- ECUACION GENERAL DE EQUILIBRIO DINAMICO	7
B.- VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO	9
C.- VIBRACIONES LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO	13
1.- Ecuación de equilibrio dinámico	13
2.- Amortiguamiento crítico	13
3.- Sistemas sub-amortiguados	15
4.- Decremento logarítmico	18
D.- VIBRACIONES FORZADAS SIN AMORTIGUAMIENTO	19
1.- Ecuación de equilibrio dinámico	19
2.- Caso con excitación armónica	19
3.- Caso con excitación arbitraria. (Integral de Duhamel)	20
TABLA DE INTEGRALES	23
E.- VIBRACIONES FORZADAS CON AMORTIGUAMIENTO	28
1.- Ecuación de equilibrio dinámico	28
2.- Caso con excitación armónica	28
3.- Caso con excitación arbitraria. (Integral de Duhamel)	31
4.- Superposición	33
5.- Respuesta sísmica	34
6.- Espectro de respuesta	35
7.- Espectro de diseño	37

<b>III.- SISTEMAS ELASTICOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD</b>	<b>39</b>
<b>A.- ECUACION GENERAL DE EQUILIBRIO DINAMICO</b>	<b>41</b>
1.- <i>Matriz de masas</i>	42
2.- <i>Matriz de rigideces</i>	43
3.- <i>Matriz de amortiguamientos</i>	43
<b>B.- VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO</b>	<b>44</b>
1.- <i>Ecuación de equilibrio dinámico</i>	44
2.- <i>Solución mediante la ecuación característica</i>	46
3.- <i>Propiedades de ortogonalidad de los modos</i>	50
4.- <i>Métodos iterativos</i>	51
a.- <i>Método de Newmark</i>	51
* <i>Aplicación al cálculo del primer modo de vibración</i>	51
* <i>Aplicación al cálculo de modos superiores</i>	52
b.- <i>Método de Holzer</i>	54
c.- <i>Método de Jacobi</i>	56
d.- <i>Otros métodos</i>	60
5.- <i>Superposición de respuestas de modos</i>	61
<b>C.- VIBRACIONES LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO</b>	<b>62</b>
1.- <i>Ecuación de equilibrio dinámico</i>	62
2.- <i>Obtención de la matriz de amortiguamientos</i>	62
3.- <i>Superposición de respuestas modales</i>	64
<b>D.- VIBRACIONES FORZADAS CON AMORTIGUAMIENTO</b>	<b>65</b>
1.- <i>Ecuación de equilibrio dinámico</i>	65
2.- <i>Superposición de respuestas modales</i>	65

3.- <i>Respuesta de estructuras elásticas a una excitación sísmica</i>	67
a.- Análisis Sísmico Modal Espectral	69
b.- Análisis Sísmico Estático	74
IV.- EJEMPLOS DE APLICACION	77
V.- CONCLUSIONES	188
REFERENCIAS	189

## I. INTRODUCCION

El conocimiento de la respuesta de estructuras ante un sismo en las regiones sísmicas del país es ahora más que nunca una necesidad imperiosa. La construcción de estructuras antisísmicas que haga más segura la vida de los habitantes de una ciudad exige un pleno conocimiento de la respuesta de las estructuras ante un sismo para su adecuado diseño. Este trabajo de tesis cuenta con un resumen de la teoría de dinámica estructural y una serie de ejemplos de aplicación, que tienen el fin de ser ilustrativos y brindar una visión didáctica para los que se inician en esta rama, especialmente dirigido a estudiantes de la materia de Ingeniería Sísmica que se imparte en la Facultad de Ingeniería, de la UNAM.

Es importante señalar que las propiedades geométricas y mecánicas (masa, rigidez y amortiguamiento) determinan las propiedades dinámicas de la estructura (frecuencia natural, periodo y amplitud) y éstas a su vez, al presentarse una excitación, determinan la respuesta dinámica.

Para cumplir con el objetivo de este trabajo, se ha dividido en dos grandes grupos: sistemas discretos de un grado de libertad y de varios grados de libertad.

El capítulo II se refiere a los sistemas discretos de un grado de libertad donde se analiza la respuesta dinámica de estructuras, que por sus características pueden ser estudiadas con una sola coordenada para describir su movimiento. Contiene vibraciones libres sin y con amortiguamiento; vibraciones

forzadas sin y con amortiguamiento; el caso en que se presenta una fuerza excitadora cualquiera (integral de Duhamel); y al final se hace referencia a la obtención de espectros de respuesta y de diseño.

En el capítulo III se analiza la respuesta dinámica de los sistemas discretos de varios grados de libertad. Su contenido es el siguiente: vibraciones libres sin amortiguamiento donde se incluye la solución por medio de la ecuación característica y por medio de la aplicación de métodos iterativos para la obtención de las frecuencias naturales y las configuraciones modales naturales; vibraciones libres con amortiguamiento, donde entre otros aspectos, se analiza la obtención de la matriz de amortiguamientos; vibraciones forzadas con amortiguamiento y es aquí donde se analiza la respuesta de estructuras elásticas a una excitación sísmica. Se presenta también el método del análisis sísmico modal espectral y el análisis sísmico estático.

El procedimiento usual para determinar la respuesta de un sistema de varios grados de libertad es el de la superposición de respuestas modales y por tanto se aplica en cada subtema del capítulo III.

En el capítulo IV se presentan los ejemplos de aplicación.

No se analiza comportamiento inelástico de estructuras, ni sistemas continuos, ya que son objeto de estudio de otros trabajos, que complementan lo que aquí se presenta.

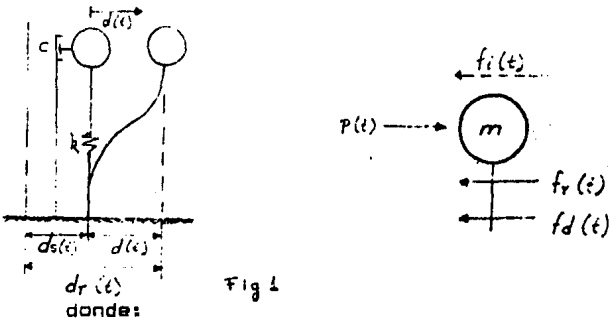
**II. SISTEMAS ELASTICOS  
DE UN GRADO DE  
LIBERTAD**



## II.- SISTEMAS DISCRETOS DE UN GRADO DE LIBERTAD

### A.- ECUACION GENERAL DE EQUILIBRIO DINAMICO

Partiendo del esquema de la Fig. 1 tenemos el diagrama de cuerpo libre correspondiente, donde se muestran las fuerzas, dependientes del tiempo,  $t$ , que actúan sobre la masa:



$f_i(t)$  = Fuerza de inercia

$f_r(t)$  = Fuerza restauradora

$f_d(t)$  = Fuerza disipadora

$p(t)$  = Fuerza externa

*Sistema general de un grado de libertad*

Modelo matemático:

De la segunda ley de Newton:

$$f_i(t) = ma(t)$$

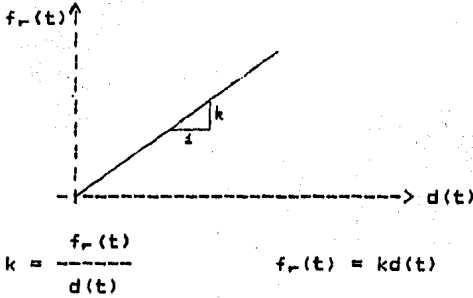
Considerando el sistema de referencia:

$$f_i(t) = m\ddot{d}_T(t)$$

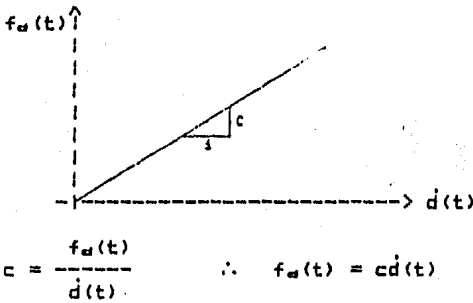
Descomponiendo:  $d_T(t) = \ddot{d}(t) + \ddot{d}_0(t)$ , se tiene:

$$f_i(t) = m\ddot{d}(t) + m\ddot{d}_0(t)$$

Variación de la Fuerza Restauradora.



Variación de la Fuerza Disipadora.



Finalmente del equilibrio de fuerzas, aplicando el principio de D'Alembert:  $\sum f_w = 0$ ,

$$f_s(t) + f_d(t) + f_r(t) = p(t)$$

Sustituyendo:

$$m\ddot{d}(t) + m\ddot{d}_0(t) + cd(t) + kd(t) = p(t)$$

Acomodando términos:

$$m\ddot{d}(t) + cd(t) + kd(t) = p(t) - m\ddot{d}_0(t) \quad (1)$$

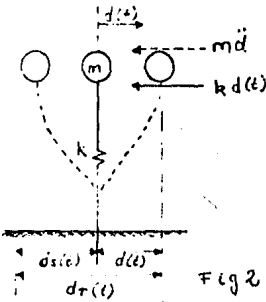
Que representa la ecuación de equilibrio general de un sistema, de un grado de libertad, comportamiento elástico lineal.

Es una ecuación diferencial de 2<sup>do</sup> orden, 1<sup>er</sup> grado y no homogénea.

**B.- VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO**

Se trata de un movimiento simplificado de un sistema simple como el de la Fig. 2, donde  $c = \ddot{d}_e(t) = p(t) = 0$ , de ahí que la ecuación de equilibrio es:

$$m\ddot{d}(t) + kd(t) = 0 \tag{2}$$



Representa un movimiento oscilatorio. Sus hipótesis son:

- 1.- No existen fuerzas de fricción que tiendan a frenar el movimiento.
- 2.- No existen fuerzas de excitación que aceleren el movimiento.

La Fig. 2 muestra el sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento, en vibración libre.

*Solución para la ecuación (2):*

En general la solución se puede expresar como:

$$d(t) = ae^{st} \tag{3}$$

$$\dot{d}(t) = ase^{st} \tag{4}$$

$$\ddot{d}(t) = as^2e^{st} \tag{5}$$

donde se requieren conocer a y s. Para ello sustituyendo (3) y (5) en (2), se tiene:

$$mas^2e^{st} + kae^{st} = 0$$

$$s^2e^{st} + (k/m)e^{st} = 0$$

Haciendo un cambio de variable:  $w^2 = k/m$  se obtiene la llamada ecuación característica:

$$s^2 + w^2 = 0, \text{ cuyas soluciones son: } s_{1-2} = \pm iw$$

De ahí que

$$d(t) = a_1e^{iwt} + a_2e^{-iwt}$$

entonces:

$$d(t) = a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t} \quad (3a)$$

$$\dot{d}(t) = a_1 i\omega e^{i\omega t} - a_2 i\omega e^{-i\omega t} \quad (4a)$$

Obtención de los parámetros  $a_1$  y  $a_2$

$$\text{Condiciones Iniciales: C.I.} = \begin{cases} d(t=0) = d_0 \\ \dot{d}(t=0) = \dot{d}_0 \end{cases}$$

Sustituyendo las C.I. en las ecuaciones (3a) y (4a):

$$d(0) = a_1 + a_2 = d_0 \quad (6)$$

$$\dot{d}(0) = a_1 i\omega - a_2 i\omega = \dot{d}_0 \quad (7)$$

De (6):

$$a_1 = d_0 - a_2 \quad (8)$$

Sustituyendo en (7):

$$\dot{d}_0 = (d_0 - a_2)i\omega - a_2 i\omega$$

De donde se obtiene:

$$a_2 = \frac{i\omega d_0 - \dot{d}_0}{2i\omega}$$

De (8)

$$a_1 = d_0 - \frac{-\dot{d}_0 + i\omega d_0}{2i\omega}$$

Simplificando:

$$a_1 = \frac{d_0 i\omega + \dot{d}_0}{2i\omega}$$

Entonces:

$$d(t) = \frac{d_0 i\omega + \dot{d}_0}{2i\omega} e^{i\omega t} + \frac{i\omega d_0 - \dot{d}_0}{2i\omega} e^{-i\omega t} \quad (3b)$$

$$\dot{d}(t) = \frac{d_0 i\omega + \dot{d}_0}{2} e^{i\omega t} - \frac{i\omega d_0 - \dot{d}_0}{2} e^{-i\omega t} \quad (4b)$$

$$\ddot{d}(t) = \frac{d_0 i \omega + \dot{d}_0}{2} \omega i e^{i \omega t} + \frac{i \omega d_0 - \dot{d}_0}{2} \omega i e^{-i \omega t} \quad (5b)$$

Forma trigonométrica:

Como  $e^{\pm i x} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$ , la ecuación (3a) queda:

$$d(t) = a_1 (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + a_2 (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t)$$

Realizando operaciones y simplificando:

$$d(t) = (a_1 + a_2) \cos \omega t + (a_1 i - a_2 i) \operatorname{sen} \omega t$$

Haciendo:

$$(a_1 + a_2) = b_1$$

$$(a_1 i - a_2 i) = b_2$$

Resulta:

$$d(t) = b_1 \cos \omega t + b_2 \operatorname{sen} \omega t$$

Obtención de los parámetros  $b_1$  y  $b_2$

$$d(t) = b_1 \cos \omega t + b_2 \operatorname{sen} \omega t \quad (8)$$

Derivando la ecuación (8) con respecto a  $t$ :

$$\dot{d}(t) = -b_1 \omega \operatorname{sen} \omega t + b_2 \omega \cos \omega t \quad (9)$$

$$\text{Condiciones Iniciales: } \begin{cases} d(t=0) = d_0 \\ \dot{d}(t=0) = \dot{d}_0 \end{cases}$$

De (8):

$$d(t=0) = b_1(1) + b_2(0) = d_0 \quad \implies b_1 = d_0$$

De (9):

$$\dot{d}(t=0) = -b_1 \omega(0) + b_2 \omega(1) = \dot{d}_0 \quad \implies b_2 = \frac{\dot{d}_0}{\omega}$$

Por lo que la ecuación (8) queda:

$$d(t) = d_0 \cos \omega t + \frac{\dot{d}_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$$

Ordenando:

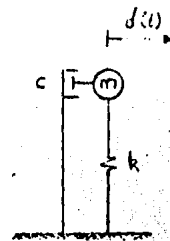
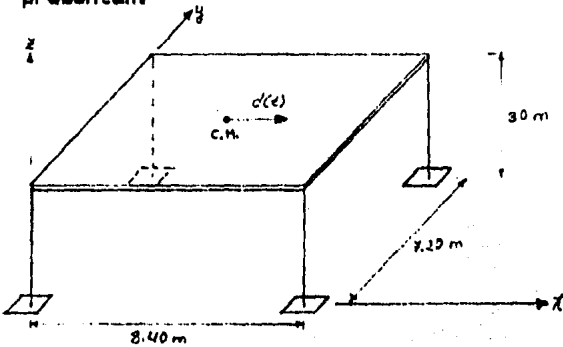
$$d(t) = \frac{\dot{d}_0}{\omega} \text{sen } \omega t + d_0 \text{cos } \omega t \quad (3c)$$

Así:

$$\dot{d}(t) = \dot{d}_0 \text{cos } \omega t - \omega d_0 \text{sen } \omega t \quad (4c)$$

$$\ddot{d}(t) = -\dot{d}_0 \omega \text{sen } \omega t - \omega^2 d_0 \text{cos } \omega t \quad (5c)$$

Planteamiento de los parámetros de la estructura de un grado de libertad que sirve de base para la mayoría de los ejercicios que se presentan.



VER EJEMPLOS 1, 2 Y 3.

## C.- VIBRACIONES LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO

### 1.- Ecuación de equilibrio dinámico

La ecuación del movimiento es:

$$m\ddot{d}(t) + c\dot{d}(t) + kd(t) = 0 \quad (1)$$

Si se supone una solución de la forma:

$$d(t) = ae^{st} \quad (2)$$

la velocidad y la aceleración son:

$$\dot{d}(t) = ase^{st} \quad (3)$$

$$\ddot{d}(t) = as^2e^{st} \quad (4)$$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1) y simplificando queda

$$s^2e^{st} + \frac{c}{m} se^{st} + w^2e^{st} = 0$$

De donde se obtiene la ecuación característica:

$$s^2 + c/m + w^2 \quad (5)$$

Cuya solución es

$$s_{1,2} = -c/2m \pm \sqrt{(c/2m)^2 - k/m} \quad (6)$$

Dependiendo del signo del radical,  $\sqrt{\quad}$ , se tienen 3 casos:

- a.-  $\sqrt{\quad} = 0$ , Vibración con amortiguamiento crítico
- b.-  $\sqrt{\quad} < 0$ , Vibración subamortiguada
- c.-  $\sqrt{\quad} > 0$ , Vibración sobre amortiguada

### 2.- Vibración con amortiguamiento crítico

Partiendo de

$$\sqrt{(c_{CR}/2m)^2 - w^2} = 0$$

Efectuando operaciones algebraicas:

$$c_{CR} = 2mw$$

Se define:

$$\gamma = \frac{c}{c_{CR}} \quad (100\%) \quad (\text{porcentaje de amortiguamiento})$$

Expresando la ecuación (6) en términos de  $\zeta$ , queda:

$$\frac{c}{2m} = \frac{\zeta c_{cm}}{2m} = \zeta \frac{2m\omega}{2m} = \zeta\omega \quad (7)$$

La ecuación (6) queda:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega \pm \sqrt{\zeta^2\omega^2 - \omega^2}$$

$$s_{1,2} = \omega (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

Los tres casos identificados arriba, dependen de si  $\zeta$  es mayor que, menor que, o igual a 1.

Solución para amortiguamiento crítico,  $\zeta = 1$ .

De las ecuaciones (6) y (7),

$$s_1 = s_2 = -\zeta\omega = -\omega$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$d(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t}$$

$$d(t) = a_1 e^{-\omega t} + a_2 t e^{-\omega t}$$

$$d(t) = e^{-\omega t} [a_1 + a_2 t] \quad (8)$$

Obtención de los parámetros  $a_1$  y  $a_2$  de la ecuación (8) utilizando las condiciones iniciales:

$$C.I. = \begin{cases} d(t=0) = d_0 \\ \dot{d}(t=0) = \dot{d}_0 \end{cases}$$

$$d(t) = e^{-\omega t} [a_1 + a_2 t] \quad (9)$$

Derivando (9) con respecto a  $t$  se tiene:

$$\dot{d}(t) = e^{-\omega t} [-a_1\omega - a_2\omega t + a_2]$$

Agrupando:

$$\dot{d}(t) = e^{-\omega t} [a_2 - (a_1 + a_2 t)\omega] \quad (10)$$

Sustituyendo C.I. en (9):

$$a_1 = d_0$$



de (10)

$$\dot{d}_0 = a_2 - a_1 W$$

$$a_2 = \dot{d}_0 + w d_0$$

Sustituyendo  $a_1$  y  $a_2$  en (9) tenemos:

$$d(t) = e^{-wt} [d_0 + (\dot{d}_0 + w d_0 t)] \quad (11)$$

Derivando:

$$\dot{d}(t) = e^{-wt} [-(\dot{d}_0 + w d_0 t)W] \quad (12)$$

$$\ddot{d}(t) = e^{-wt} \{w^2 [d_0 + d_0(wt - 1)]\} \quad (13)$$

### 3.- Sistemas subamortiguados

En este caso se tiene  $\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$

De la solución de la ecuación característica (6), se tiene:

$$s_{1,2} = -(\zeta W) \pm w \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (14)$$

como:

$$\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0,$$

entonces:

$$w \sqrt{(\zeta^2 - 1)(-1)(-1)} < 0$$

y

$$\underbrace{w \sqrt{1 - \zeta^2}}_{w'} \underbrace{\sqrt{-1}}_i < 0$$

De ahí que la ecuación (14) queda:

$$s_{1,2} = -\zeta W \pm iw'$$

Sustituyendo en la ecuación (2):

$$d(t) = a_1 e^{-(\zeta W + iw')t} + a_2 e^{-(\zeta W - iw')t}$$

factorizando:

$$d(t) = (a_1 + a_2)e^{-\zeta W t} + a_1 e^{iw' t} + a_2 e^{-iw' t}$$

finalmente:

$$d(t) = e^{-\zeta W t} [a_1 e^{iw' t} + a_2 e^{-iw' t}] \quad (15)$$

Empleando la forma trigonométrica, se tiene:

$$d(t) = e^{-\zeta w t} [b_1 \operatorname{sen} w't + b_2 \operatorname{cos} w't] \quad (16)$$

a. Obtención de los parámetros  $a_1$  y  $a_2$

$$d(t) = e^{-\zeta w t} [a_1 e^{iw't} + a_2 e^{-iw't}]$$

Derivando, la velocidad es:

$$\dot{d}(t) = e^{-\zeta w t} e^{iw't} (a_1 iw' - a_1 \zeta w - a_2 iw' - a_2 \zeta w) \quad (17)$$

Sustituyendo en la ecuación (17)  $\dot{d}(t=0) = \dot{d}_0$  se tiene:

$$\dot{d}_0 = a_1 iw' + a_1 (-\zeta w) + a_2 (-iw') + a_2 (-\zeta w)$$

Agrupando:

$$\dot{d}_0 = a_1 (iw' - \zeta w) + a_2 (-iw' - \zeta w) \quad (18)$$

Sustituyendo  $d(t=0) = d_0$  en (15) se tiene:

$$d_0 = a_1 + a_2$$

$$a_1 = d_0 - a_2 \quad (19)$$

Sustituyendo (19) en (18) simplificando y despejando, se obtiene:

$$a_2 = \frac{-\dot{d}_0 + iw'd_0 - \zeta wd_0}{2iw'} \quad (20)$$

Sustituyendo (20) y en (19) y simplificando queda:

$$a_1 = \frac{\dot{d}_0 + \zeta wd_0}{2iw'} \quad (21)$$

b. Obtención de los coeficientes  $b_1$  y  $b_2$

$$d(t) = e^{-\zeta w t} [b_1 \operatorname{sen} w't + b_2 \operatorname{cos} w't] \quad (16)$$

Sustituyendo  $d(t=0) = d_0$  en (16) se obtiene:

$$b_2 = d_0 \quad (22)$$

Derivando la ecuación (16) se tiene:

$$\dot{d}(t) = e^{-\zeta w t} [(b_1 w' - b_2 \zeta w) \operatorname{cos} w't - (b_1 \zeta w + b_2 w') \operatorname{sen} w't] \quad (23)$$

Sustituyendo  $\dot{d}(t=0) = \dot{d}_0$  en (23) se tiene:

$$\dot{d}_0 = b_1 w' + b_2 (-\zeta w) \quad (24)$$

Sustituyendo (22) en (24):

$$\dot{d}_0 = b_1 w' - \zeta w d_0$$

$$b_1 = \frac{\dot{d}_0 + \zeta w d_0}{w'}$$

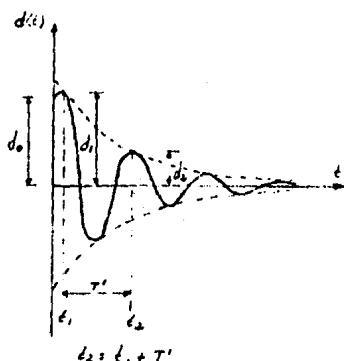
Finalmente, la ecuación (16) queda:

$$d(t) = e^{-\zeta w t} \left[ \frac{\dot{d}_0 + \zeta w d_0}{w'} \sin w' t + d_0 \cos w' t \right] \quad (16a)$$

VER EJEMPLO 4

#### 4.- Decremento logarítmico

Un modo conveniente de determinar la cantidad de amortiguamiento presente en un sistema, consiste en medir la amplitud de caída de las oscilaciones. A mayor amortiguamiento, mayor caída de la amplitud.



Utilizando la ecuación general para una vibración amortiguada:

$$m\ddot{d}(t) + c\dot{d}(t) + kd(t) = 0 \quad (1)$$

cuya solución, como ya se vio, viene dada por:

$$d(t) = e^{-\zeta\omega t} [b_1 \text{sen}\omega't + b_2 \text{cos}\omega't] \quad (2)$$

Tenemos que:

$$T' = 2\pi/\omega' = 2\pi/\omega(1/\sqrt{1-\zeta^2}) > T \quad (3)$$

Entonces:

$$d_1 \equiv d(t_1) = e^{-\zeta\omega t_1} [b_1 \text{sen}\omega't_1 + b_2 \text{cos}\omega't_1] \quad (4)$$

$$d_2 \equiv d(t_2) = e^{-\zeta\omega(t_1 + T')} [b_1 \text{sen}\omega'(t_1 + T') + b_2 \text{cos}\omega'(t_1 + T')] \quad (5)$$

El decremento logarítmico se define:

$$\delta = \ln \frac{d_1}{d_2} = \frac{e^{-\zeta\omega t_1} [b_1 \text{sen}\omega't_1 + b_2 \text{cos}\omega't_1]}{e^{-\zeta\omega(t_1 + T')} [b_1 \text{sen}\omega'(t_1 + T') + b_2 \text{cos}\omega'(t_1 + T')]} \quad (6)$$

ya que los valores de la función trigonométrica son los mismos por tratarse de una función periódica, la ecuación (6) se reduce a:

$$\delta = \ln \frac{e^{-\zeta\omega t_1}}{e^{-\zeta\omega(t_1 + T')}} = \ln e^{\zeta\omega T'} = \zeta\omega T' \quad (7)$$

Sustituyendo (3) en (7), se tiene:

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{solución exacta}) \quad (8)$$

cuando  $\zeta$  es pequeño:  $\sqrt{1 - \zeta^2} \approx 1$ , la ecuación (8) se puede escribir:

$$\delta \approx 2\pi\zeta \quad (9)$$

VER EJEMPLO 5

#### D.- VIBRACIONES FORZADAS SIN AMORTIGUAMIENTO

##### 1.- Ecuación de equilibrio dinámico

La ecuación de equilibrio dinámico es la siguiente: (ver ecuación

(1) capítulo II.A.)

$$f_s(t) + f_r(t) = p(t) \quad (1)$$

$$m\ddot{d}(t) + kd(t) = p(t) \quad (2)$$

##### 2.- Caso con excitación armónica

$$p(t) = p_0 \sin \omega t$$

La ecuación (2) queda:

$$m\ddot{d}(t) + kd(t) = p_0 \sin \omega t \quad (3)$$

La solución típica de la ecuación (3) es:

$$d(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Obtención de los parámetros A y B

$$d(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (4)$$

$$\dot{d}(t) = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t \quad (5)$$

$$\ddot{d}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t \quad (6)$$

Sustituyendo (6) y (4) en (3) y simplificando, se tiene:

$$(-A\omega^2 + \omega^2 A) \sin \omega t + (\omega^2 B - B\omega^2) \cos \omega t = p_0/m \sin \omega t$$

Igualando coeficientes:

$$-A\omega^2 + \omega^2 A = p_0/m \quad (7)$$

$$(\omega^2 B - B\omega^2) = 0 \quad (8)$$

De la ecuación (8)

$$B = 0 \quad (9)$$

De la ecuación (7):

$$A = \frac{p_0}{m} \frac{1}{(\omega^2 - \mu^2)} \quad (10)$$

Multiplicando y dividiendo por  $\omega^2$  y reagrupando, la ecuación (10) se puede escribir:

$$A = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\mu^2}{\omega^2}} \quad (10')$$

Però:

$$p_0/k = d_{est} = \text{desplazamiento estático}$$

$$\frac{1}{1 - (\mu/\omega)^2} = \text{FAD} = \text{Factor de Amplificación Dinámica}$$

Por lo que la ecuación (10') queda:

$$A = d_{est} \text{ FAD} \quad (10'')$$

Finalmente, sustituyendo (10'') en (4):

$$d(t) = d_{est} \text{ FAD} \text{ sen } \mu t \quad (11)$$

Derivando:

$$\dot{d}(t) = d_{est} \text{ FAD } \mu \text{ cos } \mu t \quad (12)$$

$$\ddot{d}(t) = -d_{est} \text{ FAD } \mu^2 \text{ sen } \mu t \quad (13)$$

VER EJEMPLO 6.

### 3.- Caso con excitación arbitraria. (Integral de Duhamel)

En este caso, al variar la fuerza  $p(t)$  sin uniformidad respecto al tiempo,  $p(t)$  se descompone en una serie de pulsos, lo que genera la respuesta para un pulso, luego superponiendo los pulsos, lo que es igual a una sumatoria ( $\sum$ ), se llega a la integral ( $\int$ ) para tomar en cuenta todos los pulsos existentes.

De la 2<sup>a</sup> Ley de Newton:

$$p(t) = m\ddot{d}(t) \quad (1)$$

que se puede expresar como:

$$p(t) = m \frac{d}{dt} \dot{d}(t) \quad (2)$$

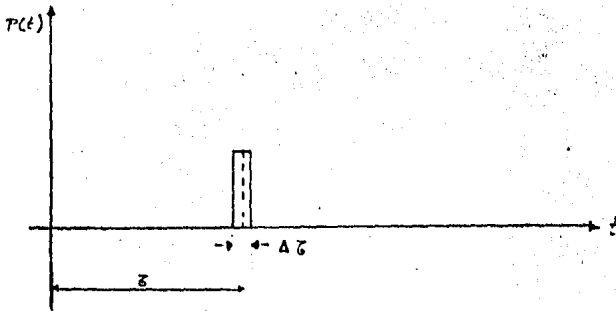
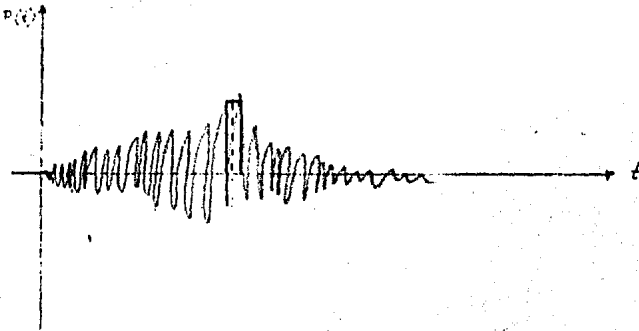
y

$$p(t) = m \frac{\Delta \dot{d}(t)}{\Delta t} \quad (3)$$

de donde:

$$\Delta \dot{d}(t) = \frac{1}{m} p(t) \Delta t \quad (4)$$

que es el principio del impulso y la cantidad de movimiento.



Del capítulo II.B., la solución general para vibraciones libres sin amortiguamiento es:

$$d(t) = \frac{\dot{d}_0}{w} \operatorname{sen} wt + d_0 \cos wt \quad (5)$$

La respuesta para un pulso en  $\tau$ , se obtiene aplicando el principio del impulso y la cantidad de movimiento transformando el pulso en una "velocidad inicial" equivalente C.I. =

$$\begin{cases} d_0 = 0 \\ \dot{d}_0 = \dot{d}(t=\tau) \end{cases} ;$$

entonces, el incremento del desplazamiento en la masa por el pulso es:

$$\Delta \dot{d}(t) = \frac{1}{w} \left[ \frac{1}{m} p(\tau) \Delta \tau \right] \operatorname{sen} w(t - \tau) \quad (6)$$

$$\Delta d(t) = \frac{1}{mw} p(\tau) \operatorname{sen} w(t - \tau) \Delta \tau$$

Integrando:

$$d(t) = \int_0^t \Delta \dot{d}(t) = \int_0^t \frac{1}{mw} p(\tau) \operatorname{sen} w(t - \tau) d\tau$$

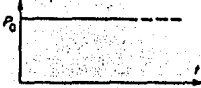

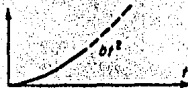
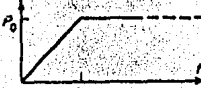
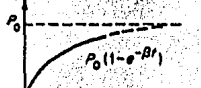
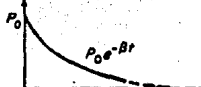
$$d(t) = \frac{1}{mw} \int_0^t p(\tau) \operatorname{sen} w(t - \tau) d\tau \quad (7)$$

La ecuación (7) es conocida como la Integral de Duhamel para vibraciones sin amortiguamiento.

VER EJEMPLOS 7 Y 8.



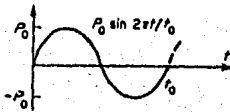
"TABLA DE INTEGRALES DE DUHAMEL PARA CASOS  $p(t)$ "

Caso no.	Función de fuerza $p(t)$	$\int_0^t \text{sen}[\omega(t - \tau)]p(\tau)d\tau$
1		$\frac{P_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$
2		$\frac{a}{\omega} \left( t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$
3		$\frac{b}{\omega} \left( t^2 + \frac{2 \cos \omega t}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2} \right)$
4		$\frac{P_0}{\omega t_0} \left( t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) \quad t < t_0$ $\frac{P_0}{\omega t_0} \left[ t_0 + \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right] \quad t > t_0$
5		$\frac{P_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$ $+ \frac{P_0 \omega}{\omega^2 + \beta^2} \left( -e^{-\beta t} + \cos \omega t - \frac{\beta \sin \omega t}{\omega} \right)$
6		$\frac{P_0 \omega}{\omega^2 + \beta^2} \left( e^{-\beta t} - \cos \omega t + \frac{\beta \sin \omega t}{\omega} \right)$

"TABLA DE INTEGRALES DE DUHAMEL PARA CASOS p(t)" (Continuacion)

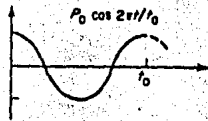
Caso no.	Función de fuerza p(t)	$\int_0^t \text{sen}[\omega(t-\tau)] p(\tau) d\tau$
----------	------------------------	---

7



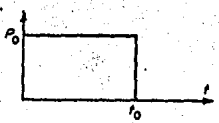
$$\frac{P_0 t_0}{\omega^2 t_0^3 - 4\pi^2} \left( \omega t_0 \sin 2\pi \frac{t}{t_0} - 2\pi \sin \omega t \right)$$

8



$$\frac{P_0 \omega t_0^3}{\omega^2 t_0^3 - 4\pi^2} \times \left( \cos 2\pi \frac{t}{t_0} - \cos \omega t \right)$$

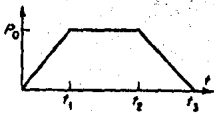
9



$$\frac{P_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) \quad t < t_0$$

$$\frac{P_0}{\omega} [\cos \omega(t - t_0) - \cos \omega t] \quad t > t_0$$

10



See case 4 for  $t < t_2$ ;  $t_1 = t_0$

$$\frac{P_0}{\omega^2 t_1} [\omega t_1 + \sin \omega(t - t_1) - \sin \omega t] - \frac{P_0}{\omega^2(t_2 - t_1)}$$

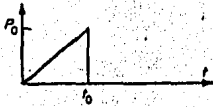
$$\times [\omega(t - t_2) - \sin \omega(t - t_2)] \quad t_1 < t < t_2$$

$$\frac{P_0}{\omega} \left[ \frac{\sin \omega(t - t_1)}{\omega t_1} - \frac{\sin \omega t}{\omega t_1} - \frac{\sin \omega(t - t_2)}{\omega(t_2 - t_1)} + \frac{\sin \omega(t - t_2)}{\omega(t_2 - t_1)} \right] \quad t > t_2$$

"TABLA DE INTEGRALES DE DUHAMEL PARA CASOS P(t)" (Continuación)

Caso Función de fuerza p(t)  $\int_0^t \text{sen}[\omega(t - \tau)]p(\tau)d\tau$

11

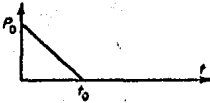


$$\frac{P_0}{\omega t_0} \left( t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) \quad t < t_0$$

$$\frac{P_0}{\omega t_0} \left[ t_0 \cos \omega(t - t_0) + \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} \right]$$

$$+ \frac{\sin \omega t}{\omega} \quad t > t_0$$

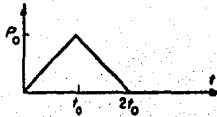
12



$$\frac{P_0}{\omega} \left( 1 - \cos \omega t - \frac{t}{t_0} + \frac{\sin \omega t}{\omega t_0} \right) \quad t < t_0$$

$$\frac{P_0}{\omega} \left[ -\cos \omega t - \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega t_0} + \frac{\sin \omega t}{\omega t_0} \right] \quad t > t_0$$

13



$$\frac{P_0}{\omega t_0} \left( t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) \quad t < t_0$$

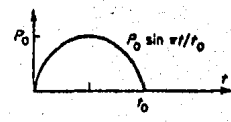
$$\frac{P_0}{\omega t_0} \left[ 2t_0 - t + \frac{2 \sin \omega(t - t_0)}{\omega} - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right] \quad t_0 < t < 2t_0$$

$$\frac{P_0}{\omega^2 t_0} [2 \sin \omega(t - t_0) - \sin \omega(t - 2t_0) - \sin \omega t] \quad t > 2t_0$$

"TABLA DE INTEGRALES DE DUHAMEL PARA CASOS P(t)" (Continuación)

Caso no.	Función de fuerza p(t)	$\int_0^t \text{sen}[\omega(t - \tau)]p(\tau)d\tau$
----------	------------------------	---

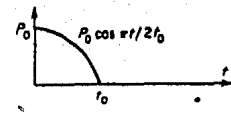
14



$$\frac{P_0 t_0}{\omega^2 t_0^3 - \pi^2} \left( \omega t_0 \sin \frac{\pi t}{t_0} - \pi \sin \omega t \right) \quad t < t_0$$

$$\frac{-P_0 \pi t_0}{\omega^2 t_0^3 - \pi^2} [\sin \omega(t - t_0) + \sin \omega t] \quad t > t_0$$

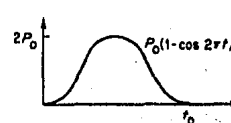
15



$$\frac{4P_0 \omega t_0^3}{4\omega^2 t_0^3 - \pi^2} \left( \cos \frac{\pi t}{2t_0} - \cos \omega t \right) \quad t < t_0$$

$$\frac{-4P_0 t_0^3}{4\omega^2 t_0^3 - \pi^2} \left[ \frac{\pi}{2t_0} \sin \omega(t - t_0) + \omega \cos \omega t \right] \quad t > t_0$$

16



$$\frac{P_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$$

$$- \frac{P_0 \omega t_0^3}{\omega^2 t_0^3 - 4\pi^2} \left( \cos \frac{2\pi t}{t_0} - \cos \omega t \right) \quad t < t_0$$

$$\frac{P_0}{\omega} \left[ \cos \omega(t - t_0) - \cos \omega t \right]$$

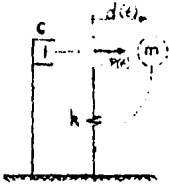
$$- \frac{\omega^2 t_0^3}{\omega^2 t_0^3 - 4\pi^2} [\cos \omega(t - t_0) - \cos \omega t] \quad t > t_0$$

"TABLA DE INTEGRALES DE DUHAMEL PARA CASOS P(t)" (Continuación)

Caso	Función de fuerza p(t)	$\int_0^t \text{sen}[\omega(t - \tau)] p(\tau) d\tau$
no.		
17		$\frac{P_0 t_0}{\omega^2 t_0^2 - 4\pi^2} \left( \omega t_0 \sin \frac{2\pi t}{t_0} - 2\pi \sin \omega t \right) \quad t < t_0$ $\frac{2\pi P_0 t_0}{\omega^2 t_0^2 - 4\pi^2} [\sin \omega(t - t_0) - \sin \omega t] \quad t > t_0$
18		$\frac{P_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) \quad t < t_0$ $\frac{P_0}{\omega} [2 \cos \omega(t - t_0) - \cos \omega t - 1] \quad t_0 < t < 2t_0$ $\frac{P_0}{\omega} [2 \cos \omega(t - t_0) - \cos \omega t - \cos \omega(t - 2t_0)] \quad t > 2t_0$

## VIBRACIONES FORZADAS CON AMORTIGUAMIENTO

### 1.- Ecuación de equilibrio dinámico



La ecuación de equilibrio dinámico es (ver capítulo II.A.):

$$\begin{aligned} f_s(t) + f_c(t) + f_p(t) &= p(t) \\ m\ddot{d}(t) + c\dot{d}(t) + kd(t) &= p(t) \end{aligned} \quad (1)$$

### 2.- Caso con excitación armónica

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 \sin \omega t \\ m\ddot{d}(t) + c\dot{d}(t) + kd(t) &= p_0 \sin \omega t \end{aligned} \quad (2)$$

La solución consta de dos partes:

1<sup>ra</sup> parte.- Solución homogénea, que es la vibración libre con amortiguamiento, cuya solución ya se analizó:

$$d(t)_H = e^{-\zeta\omega t} [b_1 \sin \omega' t + b_2 \cos \omega' t] \quad (3)$$

donde:

$$b_1 = \frac{\dot{d}_0 + \zeta\omega d_0}{\omega'}$$

$$b_2 = d_0$$

2<sup>da</sup> parte.- Solución particular. Se puede suponer como:

$$d(t)_P = A \sin(\omega t - \phi) \quad (4)$$

donde:

A = Amplitud de la oscilación

$\phi$  = Fase del desplazamiento.

Sustituyendo (4) en (2) se obtiene:

$$A = \frac{p_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (5)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (6)$$

Expresando en forma adimensional (dividiendo numerador y denominador de las ecuaciones (5) y (6) por k):

$$A = \frac{\frac{p_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\dot{u}^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\dot{u}}{k}\right)^2}} \quad (7)$$

$$\tan \phi = \frac{c\dot{u}/k}{1 - (m\dot{u}^2/k)} \quad (8)$$

donde:

$$w = \sqrt{k/m}$$

$$C_{CR} = 2mw$$

$$\zeta = c/C_{CR}$$

$$c\dot{u}/k = c/C_{CR} * C_{CR}/k = 2\zeta \dot{u}/w$$

Las expresiones no dimensionales de amplitud y fase quedan:

$$\frac{Ak}{p_0} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\dot{u}/w)^2]^2 + [2\zeta(\dot{u}/w)]^2}} \quad (9)$$

$$\tan \phi = \frac{2\zeta(\dot{u}/w)}{1 - (\dot{u}/w)^2} \quad (10)$$

Por lo tanto, la solución particular  $d(t)_p$  queda:

$$d(t)_p = \frac{p_0}{k} \frac{\sin(\dot{u}t - \phi)}{\sqrt{[1 - (\dot{u}/w)^2]^2 + [2\zeta(\dot{u}/w)]^2}} \quad (11)$$

La solución general será:

$$d(t) = d(t)_h + d(t)_p$$

$$d(t) = e^{-\zeta w t} [b_1 \sin w't + b_2 \cos w't] + \frac{p_0}{k} \frac{\sin(\dot{u}t - \phi)}{\sqrt{[1 - (\dot{u}/w)^2]^2 + [2\zeta(\dot{u}/w)]^2}} \quad \dots (12)$$

El primer término de la ecuación (12) es un estado transitorio inicial que se diluye conforme pasa el tiempo.

Derivando, la velocidad y aceleración quedan:

$$\begin{aligned} \dot{d}(t) = & e^{-\zeta w t} [\text{sen } w't(-\zeta w b_1 - w'b_2) + \text{cos } w't(w'b_1 - \zeta w b_2)] + \\ & + \frac{p_0}{k} \frac{\omega \text{cos } \omega t}{\sqrt{[1 - (\omega/w)^2]^2 + [2\zeta(\omega/w)]^2}} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{d}(t) = & e^{-\zeta w t} [-\text{sen } w't(\alpha\zeta w + \beta w') + \text{cos } w't(\alpha w' - \beta\zeta w)] + \\ & + \frac{p_0}{k} \frac{-\omega^2 \text{sen } \omega t}{\sqrt{[1 - (\omega/w)^2]^2 + [2\zeta(\omega/w)]^2}} \end{aligned} \quad (14)$$

donde:

$$\alpha = -(\zeta w b_1 + w'b_2)$$

$$\beta = (w'b_1 - \zeta w b_2)$$



### 3.- Caso con excitación arbitraria (Integral de Duhamel)

Nuevamente, al tratarse  $p(t)$  de una fuerza variable respecto al tiempo, se descompone en una serie de pulsos; se evalúa la respuesta para el pulso y aplicando la superposición por medio de la sumatoria, esto es, la integral, se toman en cuenta todos los pulsos existentes.

De la 2<sup>a</sup> Ley de Newton:

$$p(t) = m\ddot{d}(t) \quad (1)$$

que puede ser expresado como:

$$p(t) = m \frac{d}{dt} \dot{d}(t) \quad (2)$$

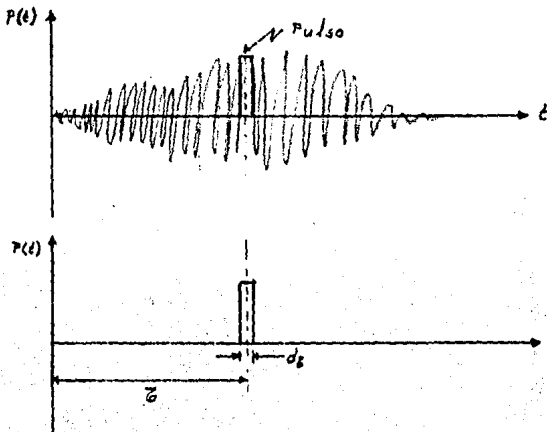
Y

$$p(t) = m \frac{\Delta \dot{d}(t)}{\Delta t} \quad (3)$$

de donde:

$$\Delta \dot{d}(t) = \frac{1}{m} p(t) \Delta t \quad (4)$$

que es el principio del impulso y la cantidad de movimiento.



Del capítulo II.C., la solución general para vibraciones libres con amortiguamiento es:

$$d(t) = e^{-\zeta w t} \left[ \frac{d_0 + \zeta w d_0}{w'} \operatorname{sen} w' t + d_0 \cos w' t \right] \quad (5)$$

La respuesta para un pulso en  $\tau$ , se obtiene aplicando el principio del impulso y la cantidad de movimiento, transformando el pulso en una "velocidad inicial" equivalente con condiciones

$$\text{iniciales} = \text{C.I.} = \begin{cases} d_0 = 0 \\ \dot{d}_0 = d(\dot{t} = \tau) \end{cases}, \text{ donde el incremento del}$$

desplazamiento en la masa por el pulso es:

$$\Delta \dot{d}(t) = \frac{1}{w'} \left[ \frac{1}{m} p(\tau) \Delta t \right] \exp.[-\zeta w(t - \tau)] \operatorname{sen} w'(t - \tau) \quad (6)$$

$$\Delta \dot{d}(t) = \frac{1}{mw'} p(\tau) \exp.[-\zeta w(t - \tau)] \operatorname{sen} w'(t - \tau) dt$$

Integrando:

$$d(t) = \int_0^t \Delta \dot{d}(t) = \int_0^t \frac{1}{mw'} p(\tau) \exp.[-\zeta w(t - \tau)] \operatorname{sen} w'(t - \tau) dt$$

$$d(t) = \frac{1}{mw'} \int_0^t p(\tau) \exp.[-\zeta w(t - \tau)] \operatorname{sen} w'(t - \tau) dt \quad (7)$$

La ecuación (7) es conocida como Integral de Duhamel para vibraciones con amortiguamiento.

VER EJEMPLO 9

#### 4. Superposición

Hasta el momento, se han presentado casos aislados de excitaciones

con y sin Condiciones Iniciales  $\begin{cases} d_0(t) = d_0 \\ \dot{d}_0(t) = \dot{d}_0 \end{cases}$ ; en el caso de que se

presenten excitaciones combinadas, como una fuerza  $p(t)$  y sismo  $\ddot{d}_0(t)$  actuando simultáneamente, con condiciones iniciales, se puede proceder de la siguiente forma:

- 1.- Sustituir las condiciones iniciales en los coeficientes  $a_1$  y  $a_2$ , si se van a utilizar las fórmulas exponenciales de desplazamiento, velocidad y aceleración; si se usa la forma trigonométrica, sustituir dichas condiciones en  $b_1$  y  $b_2$ .
- 2.- Encontrar la respuesta de la estructura en términos del desplazamiento, velocidad y aceleración, actuando solamente la fuerza  $p(t)$ .
- 3.- Encontrar la respuesta de la estructura [ $d(t)$ ,  $\dot{d}(t)$  y  $\ddot{d}(t)$ ] cuando actúa únicamente sismo.
- 4.- Finalmente, haciendo uso del "principio de superposición", que establece que los efectos de las acciones individuales, sobre una estructura, pueden superponerse (esto es, sumarse), se determinan los efectos totales de excitaciones  $p(t)$  y  $\ddot{d}_0(t)$  actuando simultáneamente bajo Condiciones

$$\text{Iniciales: } \begin{cases} d_0(t) = d_0 \\ \dot{d}_0(t) = \dot{d}_0 \end{cases}$$

### 5.- Respuesta sísmica

Considerando exclusivamente sismo, la ecuación de equilibrio dinámico se expresa: (ver sección II.A.)

$$m\ddot{d}(t) + c\dot{d}(t) + kd(t) = m\ddot{d}_m(t) \quad (1)$$

Para evaluar la respuesta de estructuras amortiguadas de un grado de libertad a un movimiento sísmico, se hace uso de la Integral de Duhamel para sistemas amortiguados, escrita en términos de la aceleración del suelo  $\ddot{d}_m(t)$  ya que el sismo actúa como carga arbitraria, cuyo caso se analizó en la sección II.E.3. La solución será entonces:

$$d(t) = \frac{1}{w'} \int_0^t \ddot{d}_m(\tau) \exp[-\zeta w(t - \tau)] \sin w'(t - \tau) d\tau \quad (2)$$

Si hacemos:

$$V(t) = \int_0^t \ddot{d}_m(\tau) \exp[-\zeta w(t - \tau)] \sin w'(t - \tau) d\tau \quad (3)$$

donde:

$V(t)$  es una Función de respuesta que depende de  $[\ddot{d}_m(t), \zeta, w, t]$

Sustituyendo (3) en (2):

$$d(t) = \frac{1}{w'} V(t) \quad (4)$$

El cortante en la base ( $V_b$ ) de la estructura es:

$$V_b = m(w')^2 d(t) \quad (5)$$

Sustituyendo (4) en (5):

$$V_0 = mw'V(t) \quad (6)$$

Como puede observarse, el cortante se encuentra en términos de la masa de la estructura, de su frecuencia natural y de la función de respuesta  $V(t)$  que se expresa en la ecuación (3). Las ecuaciones (4) y (6) describen la respuesta sísmica para cualquier tiempo  $t$  para una estructura de un grado de libertad; las soluciones a esas ecuaciones dependen de la evaluación de la ecuación (3).

#### 6.- Espectro de respuesta

La obtención de la historia completa de esfuerzos y desplazamientos durante un sismo utilizando las ecuaciones (3), (4) y (6) de la sección anterior (II.E.4) es un procedimiento largo y costoso. Para muchas estructura será suficiente evaluar solamente las respuestas máximas; esto es, encontrar el valor máximo de la Función de Respuesta  $V(t)$  de las ecuaciones (3) y (6). Este valor máximo se conoce como pseudo-velocidad espectral que se define como:

$$S_v = \left\{ \int_0^t \ddot{d}_g(\tau) \exp[-\zeta w(t - \tau)] \operatorname{sen} w(t - \tau) d\tau \right\}_{\text{máx}} \quad (1)$$

Por tanto, el desplazamiento espectral es:

$$S_d = \frac{S_v}{w'} \quad (2)$$

y la aceleración espectral es:

$$S_a = w'S_v \quad (3)$$

La fuerza máxima en el resorte:

$$[f_r(t)]_{\text{máx}} = kS_d \quad (4)$$

Recordando que:

$$(w')^2 = k/m \quad \implies k = m(w')^2 \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4), se tiene:

$$[f_r(t)]_{\text{máx}} = m(w')^2 S_d \quad (6)$$

Por otro lado se tiene:

$$S_d = \frac{1}{w'} S_v = \frac{1}{(w')^2} S_a \quad (7)$$

La fuerza de inercia se puede escribir como:

$$[f_i(t)]_{\text{máx}} = m S_a = m w' S_v = m (w')^2 S_d \quad (8)$$

De la observación de las ecuaciones (6) y (8), se aprecia que la fuerza restauradora es igual a la fuerza de inercia; esto es:

$$[f_r(t)]_{\text{máx}} = [f_i(t)]_{\text{máx}} \quad (9)$$

Por otra parte, la fuerza de inercia máxima se puede expresar:

$$[f_i(t)]_{\text{máx}} = m g \frac{S_a}{g} = w' c \quad (10)$$

donde:

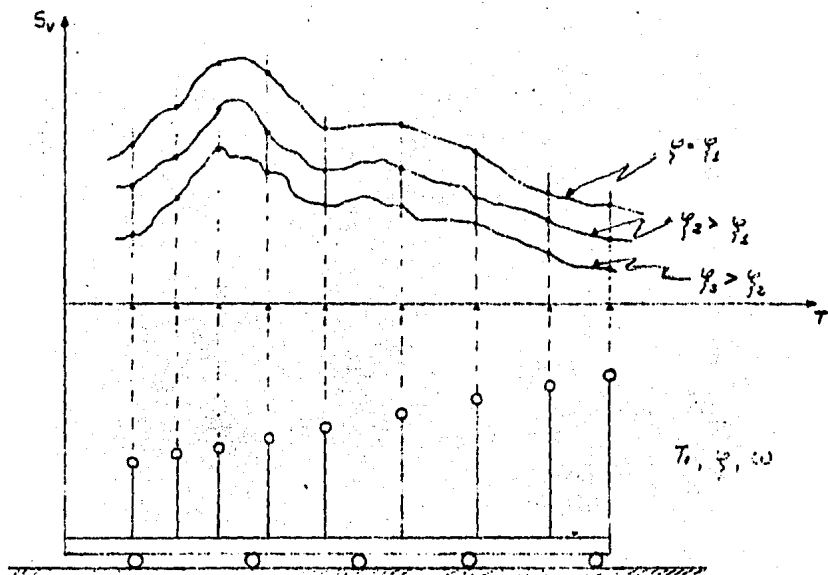
$$w' = m g = \text{Peso}$$

$$c = S_a / g = \text{Coeficiente sísmico u ordenada espectral máxima de aceleración.}$$

Esto es:

$$[f_i(t)]_{\text{máx}} = m S_a = w' c \quad (11)$$

Resolviendo la ecuación (1) para estructuras de un grado de libertad de periodos naturales diferentes, porcentajes de amortiguamiento iguales y masas iguales, puede graficarse una curva de respuesta de velocidad máxima llamada espectro de respuesta. Usualmente se calcula una familia de curvas para cualquier excitación dada, que muestra el efecto de las variaciones en la cantidad de amortiguamiento. (Ver Fig. 1). Asimismo se puede obtener espectros de desplazamiento y aceleración.



- Fig 1:

### 7.- Espectro de diseño

Para obtener un espectro de diseño, se superponen los espectros de respuestas correspondientes a los sismos ocurridos en el lugar en cuestión; la envolvente de todos estos espectros de respuesta, es decir un espectro ampliado por un Factor de Seguridad, constituye el espectro de diseño. Ver Fig. 2.

Para poder superponer los espectros de respuesta de un mismo sitio, se debe normalizar para hacerlos comparables y obtener un valor promedio de los espectros normalizados. Al construir el espectro con los sismos que ya han ocurrido, existe una probabilidad determinada por los estudios de riesgo sísmico, de que después de un cierto lapso de tiempo se presente un sismo que provoque desplazamientos mayores que los obtenidos a partir del espectro de diseño. Esta probabilidad de falla es pequeña.

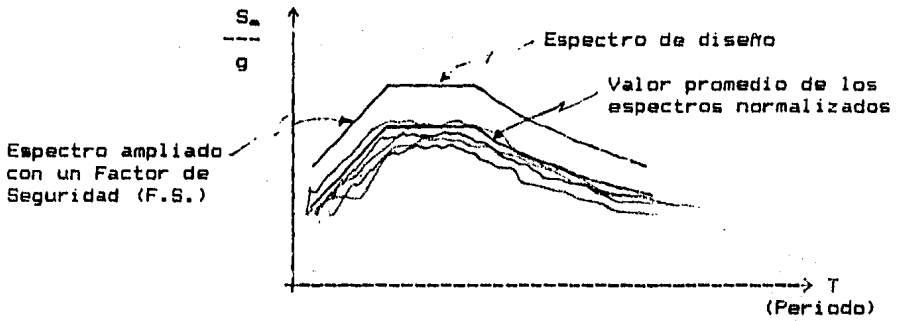


Fig. 2.- Espectro de diseño



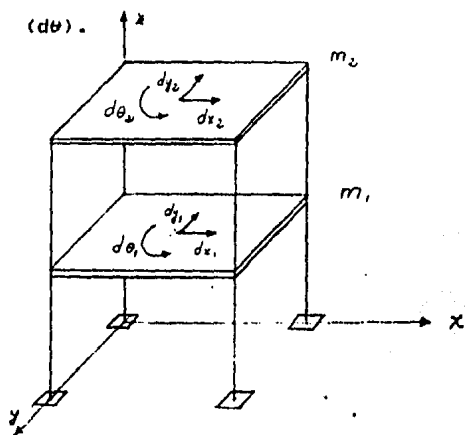
**III.- SISTEMAS ELASTICOS  
DE VARIOS GRADOS  
DE LIBERTAD**

### III. SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

Primeramente consideraremos las siguientes hipótesis de una estructura de varios grados de libertad; con sistemas de pisos rígidos en su plano:

- 1.- Es muy rígido en su plano
- 2.- Las columnas no se deforman significativamente en forma axial.

Con estas hipótesis podemos reducir de 6 a 3 grados de libertad por cada nivel: dos desplazamientos ( $dx$  y  $dy$ ) y un giro ( $d\theta$ ).



#### Idealización

Por razones de reducción de procesos y operaciones, no se analizan estructuras reales, sino ideales. La idealización consiste en la discretización de masas.

Asimismo, se añade que al analizar estructuras ideales, los resultados del análisis difieren poco de los obtenidos considerando las estructuras reales. Esta discretización lleva a tener un solo grado de libertad por cada nivel:  $d_1(t)$ ,  $d_2(t)$ , ...,  $d_n(t)$  como se indica en la Fig. 1.

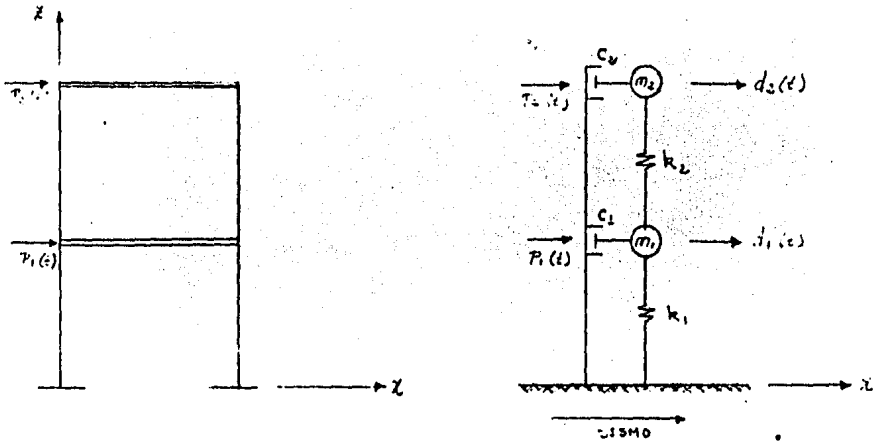
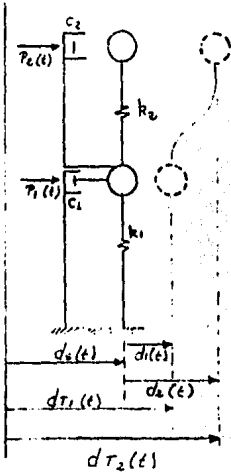


Fig. 1.

**A.- ECUACION GENERAL DE EQUILIBRIO DINAMICO**

La ecuación del movimiento del sistema de la Fig. 2 puede ser formulada a partir del equilibrio de las fuerzas efectivas asociadas con cada grado de libertad. En general son cuatro los tipos de fuerzas: la carga externa  $P(t)$ , fuerzas de inercia  $F_i(t)$ , fuerzas disipadoras  $F_d(t)$  y fuerzas restauradoras  $F_r(t)$ . Por lo tanto, la ecuación de equilibrio dinámico se expresa:



$$F_i(t) + F_d(t) + F_r(t) = P(t) \tag{1}$$

donde:

$$f_j(t) = m_j \ddot{d}_{r,j}(t) \tag{2}$$

$$d_{r,j}(t) = d_j(t) + d_m(t) \tag{3}$$

$$f_j(t) = m_j [\ddot{d}_j(t) + \ddot{d}_m(t)] \tag{4}$$

En este caso; con dos grados de libertad,

$$f_1 = m_1 \ddot{d}_1 + m_1 \ddot{d}_m$$

$$f_2 = m_2 \ddot{d}_2 + m_2 \ddot{d}_m$$

En forma matricial:

$$F_1(t) = \begin{Bmatrix} f_{1,1}(t) \\ f_{1,2}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_1 \ddot{d}_1(t) \\ m_2 \ddot{d}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_1 \ddot{d}_m(t) \\ m_2 \ddot{d}_m(t) \end{Bmatrix} \tag{5}$$

Descomponiendo (5)

$$F_x(t) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_1(t) \\ \ddot{d}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \ddot{d}_m(t) \\ m_2 \ddot{d}_m(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{d}_m(t) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_1 \ddot{d}_m(t) \\ m_2 \ddot{d}_m(t) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (1)

$$M\ddot{D}(t) + \ddot{d}_m(t)MJ + C\dot{D}(t) + KD(t) = P(t) \quad (7)$$

$$M\ddot{D}(t) + C\dot{D}(t) + KD(t) = P(t) - \ddot{d}_m(t)MJ \quad (8)$$

1.- Matriz de masas:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{11} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{21} & \dots & m_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{i1} & m_{i2} & m_{i3} & \dots & m_{i1} & \dots & m_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (9)$$

La matriz de masas, en el caso de un sistema discretizado (idealizado), se transforma en una matriz diagonal.

Por lo tanto, las fuerzas de inercia se pueden expresar:

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ \dots \\ f_{i1} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{11} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{21} & \dots & m_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{i1} & m_{i2} & m_{i3} & \dots & m_{i1} & \dots & m_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_1(t) \\ \ddot{d}_2(t) \\ \dots \\ \ddot{d}_i(t) \\ \dots \end{bmatrix} \quad (10)$$

$m_{ij}$  son los coeficientes de influencia de masa, definidas como:

$m_{ij}$  = fuerza correspondiente a la coordenada  $i$  debida a una aceleración unitaria en la coordenada  $j$

Simbólicamente la ecuación (10) se puede escribir:

$$F_x = M\ddot{D}(t) \quad (11)$$

## 2.- Matriz de rigideces

En forma general la matriz de rigideces se expresa:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (12)$$

Es importante indicar que la matriz de rigideces de sistemas discretos tiene forma simétrica.

Los coeficientes  $k_{ij}$  se definen:

$k_{ij}$  = fuerza correspondiente a la coordenada  $i$  debida a un desplazamiento unitario de la coordenada  $j$

Por tanto, en forma matricial, las fuerzas restauradoras se expresan:

$$\begin{bmatrix} f_{r1} \\ f_{r2} \\ \dots \\ f_{ri} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ \dots \\ d_i(t) \\ \dots \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\text{Simbólicamente:} \quad F_r = KD(t) \quad (14)$$

## 3.- Matriz de amortiguamientos

La matriz de amortiguamientos se expresa:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (15)$$

Esta matriz de amortiguamientos en el caso de sistemas discretos es simétrica, como se verá más adelante.

Los coeficientes  $c_{ij}$  se definen:

$c_{ij}$  = Fuerza correspondiente a la coordenada  $i$  debida a una velocidad unitaria de la coordenada  $j$ .

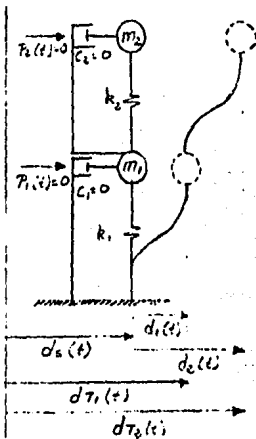
Por tanto, las fuerzas disipadoras se pueden expresar:

$$\begin{bmatrix} f_{d1} \\ f_{d2} \\ \dots \\ f_{dn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1(t) \\ \dot{d}_2(t) \\ \dots \\ \dot{d}_i(t) \\ \dots \end{bmatrix} \quad (16)$$

Simbólicamente:

$$F_d = CD(t) \quad (17)$$

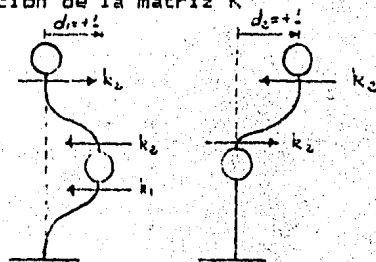
### B.- VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO



1.- Ecuación de equilibrio dinámica.

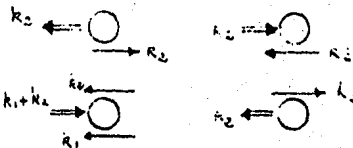
$$MD(t) + KD(t) = 0 \quad (1)$$

-Obtención de la matriz K



Del equilibrio:

Nivel 2



Nivel 1

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$D(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1)

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_1(t) \\ \ddot{d}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$m_1 \ddot{d}_1(t) + (k_1 + k_2)d_1(t) - k_2 d_2(t) = 0 \quad (5)$$

$$m_2 \ddot{d}_2(t) - k_2 d_1(t) + k_2 d_2(t) = 0 \quad (6)$$

Debido a que en las ecuaciones (5) y (6) existe un término adicional con respecto a la ecuación de equilibrio en el caso de sistemas de un grado de libertad, las ecuaciones (5) y (6) están acopladas.

Se planteará la expresión del desplazamiento en términos de una función de forma y una constante que representa el tamaño de la amplitud del desplazamiento:

$$D(t) = \phi q(t)$$

donde:

$\phi$  = función de amplitudes

$q(t)$  = constante de la amplitud del desplazamiento.

Se propone como solución:

$$D = \phi \text{ sen } \omega t \quad (7)$$

$$\dot{D} = \phi \omega \text{ cos } \omega t \quad (8)$$

$$\ddot{D} = \rho (-w^2 \text{sen } wt) = -w^2(\rho \text{ sen } wt)$$

$$\ddot{D} = -w^2 D \quad (9)$$

Sustituyendo (7) y (9) en (1):

$$M\rho (-w^2 \text{sen } wt) + K\rho \text{ sen } wt = 0$$

$$K\rho - w^2 M\rho = 0 \quad \left. \vphantom{K\rho - w^2 M\rho = 0} \right\} \text{Problema de valores y} \quad (10)$$

$$K\rho = w^2 M\rho \quad \left. \vphantom{K\rho = w^2 M\rho} \right\} \text{vectores característicos} \quad (11)$$

## 2.- Solución mediante la ecuación característica

Desarrollando (10):

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{Bmatrix} - w^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Las incógnitas son:  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $w^2$ . La ecuación (12) se puede expresar:

$$[K - w^2 M] \rho = 0 \quad (1')$$

Para encontrar una solución distinta de la trivial:

$$\text{Det} [K - w^2 M] = 0$$

$$K - w^2 M = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - w^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - w^2 m_2 \end{bmatrix}$$

Para simplificar se considerará que las rigideces de los resortes son iguales así como las masas, esto es:

$$k_1 = k_2 = k$$

$$m_1 = m_2 = m$$

$$K - w^2 M = \begin{bmatrix} 2k - w^2 m & -k \\ -k & k - w^2 m \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\text{Det} [K - w^2 M] = (2k - w^2 m)(k - w^2 m) - k^2 = 0$$

$$2k^2 - w^2 m k - 2k w^2 m + w^4 m^2 - k^2 = 0$$



$$k^2 - 3w^2mk + w^4m^2 = 0$$

Reordenando:

$$w^4m^2 - 3w^2mk + k^2 = 0$$

$$w^4 - (3k/m)w^2 + (k/m)^2 = 0$$

$$(w^2)^2 - (3k/m)w^2 + (k/m)^2 = 0$$

$$w^2_{1,2} = \frac{3k/m}{2} \pm \sqrt{\frac{(3k/m)^2}{4} - (k/m)^2}$$

Simplificando tenemos:

$$w^2_1 = k/m \left[ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right] \quad (14)$$

$$w^2_2 = k/m \left[ \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right] \quad (15)$$

Los valores de (14) y (15) hacen que el determinante sea cero.

Sustituyendo (14) en (1') obtenemos  $\phi_1 = \{\phi_{1,1}, \phi_{2,1}\}$  llamado vector característico asociado al valor característico  $w^2_1$ . De la misma forma, sustituyendo (15) en (1') obtenemos  $\phi_2 = \{\phi_{1,2}, \phi_{2,2}\}$  que es el vector característico asociado al valor característico  $w^2_2$ .

Primer modo de vibrar:

Sustituyendo (14) en (1'):

$$\begin{bmatrix} 2k - k/m [(3 - \sqrt{5})/2] m & -k \\ -k & k - k/m [(3 - \sqrt{5})/2] m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Simplificando y multiplicando por 2:

$$\begin{bmatrix} 1 + \sqrt{5} & -2 \\ -2 & 2 - (3 - \sqrt{5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$(1 + \sqrt{5})\phi_1 - 2\phi_2 = 0 \quad (16)$$

$$-2\phi_1 + (\sqrt{5} - 1)\phi_2 = 0 \quad (17)$$

Si  $\rho_1 = 1$

$$\text{de (16)} \quad \rho_2 = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618$$

$$\text{de (17)} \quad \rho_2 = 2/(\sqrt{5} - 1) = 1.618$$

$$\rho_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.618 \end{Bmatrix}$$

Primer modo de vibrar.

Segundo modo de vibrar:

Sustituyendo (15) en (1')

$$\begin{bmatrix} 2k - k/m (3 + \sqrt{5})/2 & -k \\ -k & k - k/m (3 + \sqrt{5})/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Simplificando y multiplicando por 2

$$\begin{bmatrix} 1 - \sqrt{5} & -2 \\ -2 & -1 - \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De donde:

$$(1 - \sqrt{5})\rho_1 - 2\rho_2 = 0 \quad (18)$$

$$2\rho_1 + (1 + \sqrt{5})\rho_2 = 0 \quad (19)$$

Si  $\rho_1 = 1$

$$\text{De (18)} \quad \rho_2 = (1 - \sqrt{5})/2 = -0.618$$

$$\text{De (19)} \quad \rho_2 = -2/(1 + \sqrt{5}) = -0.618$$

$$\rho_2 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.618 \end{Bmatrix}$$

Segundo modo de vibrar.

Finalmente encontramos:

$$T_1 = 2\pi/\omega_1$$

$$T_2 = 2\pi/\omega_2$$

VER EJEMPLO 10

La solución para la ecuación de vibraciones libres sin amortiguamiento (Ecuación (1)) se expresa como ya se indicó, en términos de una función de forma y una constante que representa la

amplitud del desplazamiento; velocidad y aceleración

$$D_1(t) = \rho_1 q_1(t) \quad (20)$$

$$\dot{D}_1(t) = \rho_1 \dot{q}_1(t) \quad (21)$$

$$\ddot{D}_1(t) = \rho_1 \ddot{q}_1(t) \quad (22)$$

Sustituyendo (20) y (22) en la ecuación (1) ( $M\ddot{D} + KD = 0$ )

obtenemos:

$$M\rho_1 \ddot{q}_1(t) + K\rho_1 q_1(t) = 0 \quad (23)$$

Premultiplicando (23) por la transpuesta de  $\rho_1$ :

$$\rho_1^T M \rho_1 \ddot{q}_1(t) + \rho_1^T K \rho_1 q_1(t) = 0 \quad (24)$$

Pero:

$$\rho_1^T M \rho_1 = m^*_1$$

$$\rho_1^T K \rho_1 = k^*_1$$

Por lo que la ecuación (24) resulta:

$$m^*_1 \ddot{q}_1(t) + k^*_1 q_1(t) = 0 \quad (25)$$

La ecuación (25) es semejante a la ecuación general para vibraciones libres sin amortiguamiento para un grado de libertad, por lo que la solución de la ecuación (25) es:

$$q_1(t) = \dot{q}_{01}/\omega_1 \text{ sen } \omega_1 t + q_{01} \text{ cos } \omega_1 t \quad (26)$$

Donde  $q_{01}$  y  $\dot{q}_{01}$  se encuentran a partir de las condiciones iniciales, como se indica a continuación:

Condiciones iniciales:  $D_0$  y  $\dot{D}_0$

La solución viene dada por:

$$D = \rho q$$

Entonces:

$$\rho^T M D_0 = \rho^T M \rho q_{01} \quad (27)$$

$$\rho^T M \dot{D}_0 = \rho^T M \rho \dot{q}_{01} \quad (28)$$

De la ecuación (27):

$$q_{e1} = \frac{\rho^T \dot{M} D_{e1}}{\rho^T M \rho_1} \quad (29)$$

$$\dot{q}_{e1} = \frac{\rho^T \dot{M} \dot{D}_{e1}}{\rho^T M \rho_1} \quad (30)$$

El método de superposición de respuestas modales se verá más adelante.

### 3.- Propiedades de ortogonalidad de los modos

En un sistema de N grados de libertad tenemos como definición las frecuencias y configuraciones modales siguientes:

$$w_1, w_2, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_N$$

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r, \rho_{r+1}, \dots, \rho_N$$

Para el modo r la fuerza restauradora es (ver ecuación (1))

$$F_{r,r} = K \rho_r = w_r^2 M \rho_r = F_{1,r}$$

Para el modo s:

$$F_{r,s} = K \rho_s = w_s^2 M \rho_s = F_{1,s}$$

Del Teorema de Maxwell-Betti

$$\rho^T A D_B = \rho^T B D_A \quad (1)$$

Enunciado como: "el efecto que produce la fuerza  $\rho^T A$  en el punto B es igual al efecto que produce la fuerza  $\rho^T B$  en el punto A".

Aplicando a los modos r y s:

$$\rho_r^T F_{r,r} = \rho_r^T K \rho_r = w_r^2 \rho_r^T M \rho_r$$

$$-\rho_r^T F_{r,s} = -\rho_r^T K \rho_s = -w_s^2 \rho_r^T M \rho_s$$

Restando miembro a miembro:

$$0 = (w_r^2 - w_s^2) \phi_r^T M \phi_s \quad (2)$$

Por lo tanto, las condiciones de ortogonalidad se resumen en:

$$\phi_r^T M \phi_s \begin{cases} \neq 0, & r = s & \text{Condición de ortogonalidad} \\ & & \text{de los modos con respecto a} \\ = 0, & r \neq s & \text{la matriz de masas} \end{cases}$$

$$\phi_r^T K \phi_s \begin{cases} \neq 0, & r = s & \text{Condición de ortogonalidad} \\ & & \text{de los modos con respecto a} \\ = 0, & r \neq s & \text{la matriz de rigidez} \end{cases}$$

#### 4.- Métodos iterativos

Los métodos iterativos que se utilizarán en el presente trabajo son: Stodola-Vianello-Newmark, Holzer y Jacobi para calcular las frecuencias y configuraciones modales.

##### a.- Método de Stodola-Vianello-Newmark

Este método que en adelante denominaremos simplemente como método de Newmark, converge al primer modo de vibrar.

Procedimiento:

- 1.- Suponer una configuración deformada de la estructura:  $\phi^{(1)}$ ,  $\phi^{(1)n}$ .
- 2.- Valuar las fuerzas de inercia asociadas a  $\phi^{(1)}$ , dejando  $w^2$  como factor común ya que no se conoce:

$$F_1 = mw^2 \phi^{(1)n}$$

3.- Valuar la fuerza cortante en la estructura

$$V_i = \sum_{r=n}^i F_{r1n} \quad (\text{función de } w^2)$$

4.- Calcular  $\delta_{in}$  correspondientes:

$$\delta_{in} = V_{in}/k_n = \sum m_n \rho_{in}^2 \quad (\text{función de } w^2)$$

5.- Obtener la configuración calculada  $\rho^c$  como la suma acumulativa de los incrementos de deformación de abajo hacia arriba:

$$\rho_{i1}^c = \sum_{r=n}^i \delta_{rn}$$

6.- Normalizar:

$$\hat{\rho}^c = \frac{\rho_{i1}^c}{\rho_{i1}^c}$$

7.- Comparar:

$$\hat{\rho}^c_n \stackrel{?}{=} \rho^c_n$$

con un error de:

$$e_n = \left[ \frac{\rho_{i1}^c - \hat{\rho}^c_{i1}}{\rho_{i1}^c} \right] \leq \text{Tolerancia } \psi_i$$

si no se cumple, repetir el proceso desde el paso 1, haciendo:

$$\rho^c = \hat{\rho}^c$$

VER EJEMPLO 11

» Aplicación del método de Newmark al cálculo de los modos superiores

Para calcular el segundo modo de vibrar con este método, se tiene que quitar a la configuración supuesta la participación del primer modo:  $a_1 \rho_{11}$ , para lo cual es necesario conocer  $\rho_{11}$  y  $a_1$ .  $\rho_{11}$ , se

calcula con el procedimiento ya conocido; para conocer  $a_r$  se recurre a la propiedad de ortogonalidad de los modos.

$$\overset{\text{supuesto}}{\phi^s} = a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + \dots + a_r \phi_r + \dots + a_N \phi_N$$

Premultiplicando por  $\phi^T M$ :

$$\phi^T M \phi^s = a_1 \phi^T M \phi_1 + a_2 \phi^T M \phi_2 + \dots + a_r \phi^T M \phi_r + \dots + a_N \phi^T M \phi_N$$

Aplicando la condición de ortogonalidad:

$$\phi^T M \phi^s = a_1 \times 0 + a_2 \times 0 + \dots + a_r \phi^T M \phi_r + \dots + a_N \times 0$$

Desconocemos  $a_r$ :

$$a_r = \frac{\phi^T M \phi^s}{\phi^T M \phi_r}$$

Por ejemplo, para el 2do modo:

conocidos  $\phi_1, w_1$

$$r = 1 \quad ; \quad s = 2$$

$$a_1 = \frac{\phi_1^T M \phi^s}{\phi_1^T M \phi_1}$$

$$\phi^s = \phi^s - a_1 \phi_1$$

Para el tercer modo:

conocidos:  $\phi_1, w_1$

$\phi_2, w_2$

$$r = 1 \quad ; \quad s = 3$$

$$a_1 = \frac{\phi_1^T M \phi^s}{\phi_1^T M \phi_1}$$

$$r = 2 ; s = 3$$

$$a_2 = \frac{\rho^T M \rho_3}{\rho^T M \rho_2}$$

$$\rho_3 = \rho_3 - a_1 \rho_1 - a_2 \rho_2$$

VER EJEMPLO 12

#### b.- Método de Holzer

En este método se supone la frecuencia y a partir de ella se calcula la configuración relativa de abajo hacia arriba de la estructura. Por ser una configuración relativa, se puede suponer también la deformación de la primera masa. Los datos son las masas y las rigideces.

Etapas del método:

- 1.- Suponer un valor de  $w^2$ .
- 2.- Obtener los valores de  $m w^2_{sup}$  para cada masa.
- 3.- Suponer la deformación del primer nivel:  $X_1$ ; conviene suponer un valor unitario. Equivale a suponer  $\Delta X_1$ .
- 4.- Calcular la fuerza cortante en la base de la estructura
 
$$V_1 = k_1 \Delta X_1 \quad \text{pero como } \Delta X_1 = 1, \quad V_1 = k_1.$$
- 5.- Calcular la fuerza de inercia asociada a la masa del primer nivel:
 
$$F_1 = m_1 w^2_{sup} X_1$$
- 6.- Por la definición de fuerza cortante, calcular el cortante del segundo entrepiso:

$$V_2 = V_1 - F_1$$



7.- Conocida la fuerza cortante en el entrepiso 2, calcular el incremento de deformación en ese entrepiso:

$$\Delta X_2 = \frac{V_2}{k_2}$$

8.- Sumando  $\Delta X_2$  a la deformación del primer nivel, se obtiene la deformación del segundo nivel:

$$X_2 = X_1 + \Delta X_2$$

9.- Repetir los pasos 6 a 8 para todas las masas hasta llegar al extremo superior de la estructura.

Si la frecuencia supuesta corresponde al modo de vibrar, se obtiene que la fuerza de inercia del último nivel es igual a la fuerza cortante del entrepiso correspondiente. Si la frecuencia supuesta no es la correspondiente a un modo de vibrar, se obtendrá una diferencia entre el valor de la fuerza de inercia y el de la fuerza cortante en el extremo de la estructura. Hay que tener en cuenta que el método no es convergente y lo que se debe de efectuar es otro ciclo con un valor supuesto de  $w^2$  cercano al anterior, con lo que se encontrará otra diferencia; a continuación trazar una gráfica que relacione frecuencias supuestas en las abscisas con las diferencias entre fuerza de inercia y fuerza cortante en el extremo superior de la estructura, en las ordenadas. Con las dos iteraciones, se obtienen 2 puntos de esta gráfica que se unen con una recta y se prolonga hasta cortar el eje de las abscisas; encontrándose un nuevo valor de  $w^2$  supuesto. Con este nuevo valor de  $w^2$  realizar una tercera iteración, donde se encontrará otra diferencia menor que las 2 anteriores, que define un tercer punto en la gráfica. Así se puede trazar una curva entre los tres puntos y

definir un nuevo valor de  $w^2$  que estará muy próximo a la frecuencia correcta de uno de los modos de vibrar de la estructura.

Estando ya cerca del valor correcto de  $w^2$  (cuando el residuo es pequeño), se puede mejorar el valor supuesto de  $w^2$  empleando el cociente de Grandall:

$$w^2 = w^2 \frac{V * \Delta X}{FX}$$

Este método se puede emplear para calcular cualquier modo natural de vibración. Como orientación, si se conoce el primer modo de vibrar (por ejemplo utilizando Newmark), se puede estimar a grosso modo el valor de las frecuencias de los modos superiores utilizando la relación:

$$w^2_2 = 9w^2_1$$

$$w^2_3 = 25w^2_1, \text{ etc.}$$

VER EJEMPLO 13

### c.- Método de Jacobi

Para calcular las frecuencias y sus respectivos modos de vibrar, el método de Jacobi considera la aplicación del concepto de rotación de ejes. (Consultar la referencia 7.)

Las ecuaciones lineales tienen la siguiente forma:

CASO A.-

$$[A][X] = \lambda [I][X] \quad (1)$$

Donde  $[A]$  es una matriz simétrica real,  $[X]$  es una matriz de columna de variables independientes, y  $\lambda$  es un parámetro escalar. En nuestro caso  $\lambda$  representa la frecuencia natural de vibración del sistema.

El problema, como en los anteriores métodos analizados, consiste en encontrar  $\Lambda$  (frecuencia natural) y su correspondiente  $[X]$  (vector característico o modo de vibración).

El objetivo del método de Jacobi es transformar la ecuación (1) en la siguiente identidad:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Donde  $[a']$  y  $[\Lambda]$  son matrices diagonales. Una vez que la transformación de coordenadas se completa, los valores y vectores característicos son encontrados.

Un procedimiento práctico para aplicar el método de Jacobi consiste en:

1.- Seleccionar el valor más grande en valor absoluto fuera de la diagonal de la matriz  $[A]$ ; la posición de este elemento, el cual va a ser eliminado, fija el término  $-\text{sen } \theta$  en la matriz de transformación  $[T]$ . A continuación se ubica el término  $\text{sen } \theta$  simétricamente opuesto al término  $-\text{sen } \theta$ ; en seguida se ubican los términos  $\text{cos } \theta$  formando un cuadrado con los términos de  $-\text{sen } \theta$  y  $\text{sen } \theta$ . Finalmente, en la diagonal donde se ubicaron los términos  $\text{cos } \theta$ , se completa la diagonal con 1 y los demás términos restantes se completan con cero.

Ejemplo:

sea  $[A] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  (3)

Si escogemos el término  $a_{1,2}$  ya que es el mayor en valor absoluto fuera de la diagonal, la matriz de transformación para eliminar este término queda:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.- Se calcula el ángulo  $\theta$  aplicando:

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{1,2}}{a_{1,1} - a_{2,2}}$$

En el ejemplo:

$$\tan 2\theta = \frac{2(-2)}{2 - 2} = \frac{-4}{0} = -\infty$$

$$\theta = -45^\circ$$

Sustituyendo  $\theta$  en (4) tenemos:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

3.- Calcular la matriz  $[A_1]$  aplicando:

$$[A_1] = [T_1]^T [A] [T_1] \quad (6)$$

4.- Repetir el procedimiento desde el paso 1 asumiendo que  $[A_1]$  es ahora  $[A]$ , y continuar hasta obtener la matriz  $[A_m]$  tal que, todos sus elementos fuera de la diagonal sean cero. Los términos de la diagonal de la matriz  $[A_m]$  serán entonces igual a los valores característicos o frecuencias naturales del movimiento.

5.- Los vectores característicos o modos de vibración asociados a los valores característicos o frecuencias naturales, se obtienen de la siguiente relación:

$$[V] = [T_1][T_2] \dots [T_m] \quad (7)$$

CASO B. -

$$[A][X] = \lambda[B][X] \quad (8)$$

Es importante notar que en el caso A, [B] es una matriz unitaria. En este caso, [B] es una matriz diagonal.

Para la solución de la ecuación (8), se asume que:

$$[B] = [G]^{-1}[G] \quad (9)$$

donde [G] es también una matriz diagonal. Tenemos entonces:

$$[B] = [G][G] \quad (10)$$

De (10) tenemos que cada elemento  $g_{ii}$  en [G], es igual a la raíz cuadrada del correspondiente elemento  $b_{ii}$  en [B], y este elemento tiene que ser positivo.

$$g_{ii} = \sqrt{b_{ii}}$$

Sustituyendo (10) en (8) tenemos:

$$[A][X] = \lambda[G][G][X] \quad (11)$$

Premultiplicando (11) por  $[G]^{-1}$ , tenemos:

$$[G]^{-1}[A][X] = \lambda[G][X] \quad (12)$$

o

$$[G]^{-1}[A][G]^{-1}[G][X] = \lambda[G][X] \quad (13)$$

Si se define:

$$[Y] = [G][X] \quad \text{y} \quad [Q] = [G]^{-1}[A][G]^{-1},$$

la ecuación (13) se convierte en:

$$[Q][Y] = \lambda[Y] \quad (14)$$

Al realizar estas operaciones, la ecuación (14) tiene la misma forma que la ecuación (1) del caso A. Por lo tanto, los valores característicos (frecuencias naturales) se obtienen de la diagonalización de Q aplicando el procedimiento indicado en el caso

A. Los vectores característicos verdaderos se obtienen solamente después de posmultiplicar por  $[G]^{-1}$  el resultado de los vectores.

$$[\text{vectores característicos verdaderos}] = [G]^{-1} [\text{resultado de los vectores}]$$

Cada elemento de la diagonal de la matriz  $[G]^{-1}$  es igual al recíproco de la raíz cuadrada de cada elemento de la diagonal de  $[B]$ .

VER EJEMPLO 14

d.- Otros métodos

\* Método de iteración inversa.

Consultar la referencia 1

\* Método Stodola Rigideces

\* Método Stodola Flexibilidades

\* Método de Holzer - Rayleigh

\* Método de Holzer Invertido

Consultar la referencia 6

\* Método de Rayleigh

\* Método de Rayleigh - Ritz

Consultar las referencias 2 y 3

### 5.- Superposición de respuestas modales

De la ecuación del equilibrio dinámico para vibraciones libres sin amortiguamiento:

$$M\ddot{D}(t) + KD(t) = 0 \quad (1)$$

La expresión del desplazamiento viene dada por:

$$D_i(t) = \rho_i q_i(t) \quad (2)$$

La velocidad y aceleración se expresan:

$$\dot{D}_i(t) = \rho_i \dot{q}_i(t) \quad (3)$$

$$\ddot{D}_i(t) = \rho_i \ddot{q}_i(t) \quad (4)$$

El subíndice  $i$  se refiere al modo de vibración.

Sustituyendo (2) y (4) en (1) tenemos:

$$M\rho_i \ddot{q}_i(t) + K\rho_i q_i(t) = 0 \quad (5)$$

Premultiplicando (5) por  $\rho_i^T$ :

$$\rho_i^T M \rho_i \ddot{q}_i(t) + \rho_i^T K \rho_i q_i(t) = \rho_i^T 0 = 0 \quad (6)$$

Haciendo:

$$m^*_{ii} = \rho_i^T M \rho_i \quad (7)$$

$$k^*_{ii} = \rho_i^T K \rho_i \quad (8)$$

Sustituyendo (7) y (8) en (6):

$$m^*_{ii} \ddot{q}_i(t) + k^*_{ii} q_i(t) = 0 \quad (9)$$

Condiciones iniciales:  $D_0, \dot{D}_0$

$$D_0 = \rho_i q_{0i} \\ \rho_i^T M D_0 = \rho_i^T M \rho_i q_{0i} \quad \implies \quad q_{0i} = \frac{\rho_i^T M D_0}{\rho_i^T M \rho_i} \quad (10)$$

En forma similar tenemos:

$$\dot{D}_0 = \rho_i \dot{q}_{0i} \\ \rho_i^T M \dot{D}_0 = \rho_i^T M \rho_i \dot{q}_{0i} \quad \implies \quad \dot{q}_{0i} = \frac{\rho_i^T M \dot{D}_0}{\rho_i^T M \rho_i} \quad (11)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación (9) viene dada por:

$$q_i(t) = \frac{\dot{q}_{0i}}{\omega_i} \text{sen } \omega_i t + q_{0i} \text{cos } \omega_i t \quad (12)$$

Por último, la expresión del desplazamiento final se expresa como la superposición de respuestas modales:

$$D(t) = \sum D_i(t) \quad (13)$$

donde:

$$D_i(t) = \phi_i q_i(t) \quad (14)$$

Por lo que la ecuación (13) queda:

$$D(t) = \sum \phi_i q_i(t) \quad (15)$$

$i$  = modo de vibración

VER EJEMPLO 15

## C.- VIBRACIONES LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO

### 1.- Ecuación de equilibrio dinámico

$$M\ddot{D}(t) + C\dot{D}(t) + KD(t) = 0$$

### 2.- Obtención de la matriz de amortiguamiento

Las condiciones de ortogonalidad para la matriz de masas y de rigideces:

$$\begin{aligned} \phi^T_m M \phi_n &= 0 \\ \phi^T_m K \phi_n &= 0 \end{aligned} \quad m \neq n \quad (1)$$

causan que todos los componentes exceptuando el enésimo término en la matriz de masas y de rigideces sean cero. Una similar reducción se aplicará también a la expresión del amortiguamiento, si se asume que las correspondientes condiciones de ortogonalidad se aplican a la matriz de amortiguamiento; esto es, se asume que:

$$\phi^T_m C \phi_n = 0 \quad m \neq n \quad (2)$$





a la frecuencia; por tanto, los modos altos de la estructura tendrán fuerte amortiguamiento.

VER EJEMPLO 16

### 3.- Superposición de respuestas modales

Ecuación matricial de equilibrio dinámico para vibraciones libres con amortiguamiento:

$$M\ddot{D}(t) + C\dot{D}(t) + KD(t) = 0 \quad (1)$$

La expresión del desplazamiento se expresa:

$$D_i(t) = \rho_i q_i(t) \quad (2)$$

La velocidad y aceleración se expresan:

$$\dot{D}_i(t) = \rho_i \dot{q}_i(t) \quad (3)$$

$$\ddot{D}_i(t) = \rho_i \ddot{q}_i(t) \quad (4)$$

Donde  $i$  es el modo de vibración

Sustituyendo (2) (3) y (4) en (1) tenemos:

$$M\rho_i \ddot{q}_i(t) + C\rho_i \dot{q}_i(t) + K\rho_i q_i(t) = 0 \quad (5)$$

Premultiplicando (5) por  $\rho_i^T$ :

$$\rho_i^T M \rho_i \ddot{q}_i(t) + \rho_i^T C \rho_i \dot{q}_i(t) + \rho_i^T K \rho_i q_i(t) = \rho_i^T 0 = 0 \quad (6)$$

Haciendo:

$$m_i^* = \rho_i^T M \rho_i \quad (7)$$

$$c_i^* = \rho_i^T C \rho_i \quad (8)$$

$$k_i^* = \rho_i^T K \rho_i \quad (9)$$

Sustituyendo (7), (8) y (9) en (6):

$$m_i^* \ddot{q}_i(t) + c_i^* \dot{q}_i(t) + k_i^* q_i(t) = 0 \quad (10)$$

Condiciones iniciales:  $D_0, \dot{D}_0$

$$D_0 = \rho_i q_{0i}$$

$$\rho_i^T M D_0 = \rho_i^T M \rho_i q_{0i} \quad \Rightarrow \quad q_{0i} = \frac{\rho_i^T M D_0}{\rho_i^T M \rho_i} \quad (11)$$

Similarmente:

$$\begin{aligned} \dot{D}_n &= \phi_n \dot{q}_{n1} \\ \phi_n^T M \dot{D}_n &= \phi_n^T M \phi_n \dot{q}_{n1} \implies \dot{q}_{n1} = \frac{\phi_n^T M \dot{D}_n}{\phi_n^T M \phi_n} \end{aligned} \quad (12)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación (10) se expresa:

$$q_i(t) = \exp.[-\zeta_i w_i t] \left[ \frac{\dot{q}_{i01} + \zeta_i w_i q_{i01}}{w_i'} \text{sen } w_i' t + q_{i01} \text{cos } w_i' t \right] \quad (13)$$

Por último, la expresión del desplazamiento final se expresa como la superposición de respuestas modales:

$$D(t) = \sum D_i(t) \quad (14)$$

donde:

$$D_i(t) = \phi_i q_i(t) \quad (15)$$

Por lo que la ecuación (14) queda:

$$D(t) = \sum \phi_i q_i(t) \quad (16)$$

$i$  = modo de vibración

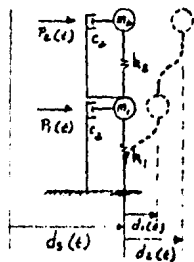
VER EJEMPLO 17

## D.- VIBRACIONES FORZADAS CON AMORTIGUAMIENTO

### 1.- Ecuación de equilibrio dinámico

La ecuación de equilibrio dinámico para una estructura idealizada como la que se indica en la figura, referida a un sistema absoluto

se expresa:



$$M\ddot{D}(t) + C\dot{D}(t) + KD(t) = P(t) - \ddot{d}_s(t)MJ \quad (1)$$

### 2.- Superposición de respuestas modales

La expresión del desplazamiento:

$$D_i(t) = \phi_i q_i(t) \quad (2)$$

La velocidad y aceleración:

$$\dot{D}_i(t) = \rho_i \dot{q}_i(t) \quad (3)$$

$$\ddot{D}_i(t) = \rho_i \ddot{q}_i(t) \quad (4)$$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1):

$$M \rho_i \ddot{q}_i(t) + C \rho_i \dot{q}_i(t) + K \rho_i q_i(t) = P_i(t) - \ddot{d}_m(t) M J \quad (5)$$

Premultiplicando (5) por  $\rho^T$ :

$$\rho^T M \rho_i \ddot{q}_i(t) + \rho^T C \rho_i \dot{q}_i(t) + \rho^T K \rho_i q_i(t) = \rho^T P_i(t) - \ddot{d}_m(t) \rho^T M J \quad (6)$$

Haciendo:

$$m^*_{i1} = \rho^T M \rho_i \quad (7)$$

$$c^*_{i1} = \rho^T C \rho_i \quad (8)$$

$$k^*_{i1} = \rho^T K \rho_i \quad (9)$$

$$p^*_{i1} = \rho^T P_i \quad (10)$$

$$\mathcal{L}_{i1} = \rho^T M J \quad (11)$$

Sustituyendo (7), (8), (9), (10) y (11) en (6):

$$m^*_{i1} \ddot{q}_i(t) + c^*_{i1} \dot{q}_i(t) + k^*_{i1} q_i(t) = p^*_{i1}(t) - \ddot{d}_m(t) \mathcal{L}_{i1} \quad (12)$$

Considerando solamente fuerza externa:

$$m^*_{i1} \ddot{q}_i(t) + c^*_{i1} \dot{q}_i(t) + k^*_{i1} q_i(t) = p^*_{i1}(t) \quad (13)$$

donde:  $i$  = modo de vibración.

La solución de la ecuación (13) se expresa en términos de la integral de Duhamel para cada modo:

$$q_i(t) = \frac{1}{m^*_{i1} w'_{i1}} \int_0^t P_i(\tau) \exp[-\zeta_{i1} w_{i1}(t - \tau)] \sin w'_{i1}(t - \tau) d\tau \quad (14)$$

Por último la expresión del desplazamiento final se expresa como la superposición de respuestas modales:

$$D(t) = \sum D_i(t) \quad (15)$$

Donde:

$$D_i(t) = \phi_i q_i(t) \quad (16)$$

Por lo que la ecuación (15) se expresa:

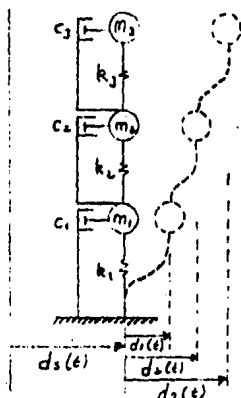
$$D(t) = \sum \phi_i q_i(t) \quad (17)$$

$i$  = modo de vibración

La ecuación (17) puede escribirse también:

$$D(t) = \phi_1 q_1(t) + \phi_2 q_2(t) + \phi_3 q_3(t) + \dots$$

### 3.- Respuesta de estructuras elásticas a una excitación sísmica



Considerando exclusivamente sismo, la ecuación de equilibrio dinámico se expresa:

$$M\ddot{D}(t) + C\dot{D}(t) + kD(t) = -\ddot{d}_m(t)MJ \quad (1)$$

Siguiendo el proceso ya analizado en el anterior inciso, la ecuación (1) se puede escribir:

$$m^* \ddot{q}_i(t) + c^* \dot{q}_i(t) + k^* q_i(t) = -\ddot{d}_m(t) \chi_i \quad (2)$$

donde:

$i$  = modo de vibración

La solución de la ecuación (2) se expresa en términos de la integral de Duhamel:

$$q_i(t) = \frac{\chi_i}{m^* \omega_i'} \int_0^t \ddot{d}_m(\tau) \exp[-\zeta_i \omega_i' (t - \tau)] \sin \omega_i' (t - \tau) d\tau \quad (3)$$

Si hacemos:

$$V[\cdot] = \int_0^t \ddot{d}_m(\tau) \exp[-\zeta_i \omega_i' (t - \tau)] \sin \omega_i' (t - \tau) d\tau \quad (4)$$

Donde:

$V[\cdot]$  es función de:  $\ddot{d}_m(t)$ ,  $\zeta_i$ ,  $\omega_i'$ ,  $t$  esto es:

$$V = V[\cdot] \equiv V [\ddot{d}_0(t), \gamma_i, w_i, t]$$

Sustituyendo (4) en (3)

$$q_i(t) = \frac{L_i}{m^{*i} w_i'} V \quad (5)$$

El desplazamiento en el modo  $i$  se expresa:

$$D_i(t) = \rho_i q_i \quad (6)$$

Sustituyendo (5) en (6)

$$D_i(t) = \rho_i \frac{L_i}{m^{*i} w_i'} V \quad (7)$$

Por último, tenemos que la expresión final del desplazamiento viene dada por la superposición de respuestas modales; esto es:

$$D(t) = \sum D_i(t) \quad (8)$$

Sustituyendo (7) en (8) tenemos:

$$D(t) = \phi \left\{ \frac{L_i}{m^{*i} w_i'} V \right\} \quad (8')$$

donde:

$\phi$  = matriz de configuraciones modales.

Las fuerzas elásticas se obtienen multiplicando el vector desplazamiento por la matriz de rigideces:

$$f_r(t) = K D(t) \quad (9)$$

Expresando estas fuerzas en términos de fuerzas de inercia equivalentes, mediante la relación:

$$K\phi = M\Omega^2 \quad (10)$$

donde  $\Omega^2$  es una matriz diagonal que contiene a las frecuencias al cuadrado  $w_i^2$ . La ecuación (9) se puede escribir:

$$f_r(t) = M\Omega^2 D(t) = M\phi \left\{ \frac{L_i}{m^{*i}} w_i V \right\} \quad (11)$$

a.- Análisis Sísmico Modal Espectral

La evaluación del efecto sísmico en estructuras de varios grados de libertad usando la ecuación (8'), exige cálculos laboriosos durante toda la historia del sismo para cada modo de vibrar significativo. Por tanto, el análisis modal espectral surge como una alternativa atractiva.

Nos interesa conocer la respuesta máxima de la estructura para cada modo.

De la ecuación de equilibrio dinámico:

$$M\ddot{D}(t) + C\dot{D}(t) + KD = \ddot{d}_m MJ \quad (1)$$

donde:

$$D_i(t) = \rho_i q_i(t) \quad (2)$$

$$\dot{D}_i(t) = \rho_i \dot{q}_i(t) \quad (3)$$

$$\ddot{D}_i(t) = \rho_i \ddot{q}_i(t) \quad (4)$$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1) y premultiplicando por  $\rho^T_i$  tenemos:

$$\underbrace{\rho^T_i M \rho_i}_{m^*_i} \ddot{q}_i(t) + \underbrace{\rho^T_i C \rho_i}_{c^*_i} \dot{q}_i(t) + \underbrace{\rho^T_i K \rho_i}_{k^*_i} q_i(t) = \ddot{d}_m(t) \underbrace{\rho^T_i M J}_{L_i} \quad (5)$$

De (5) obtenemos:

$$m^*_i \ddot{q}_i(t) + c^*_i \dot{q}_i(t) + k^*_i q_i(t) = \ddot{d}_m L_i \quad (6)$$

De donde:

$$q_{max\ i} = \frac{L_i}{m^*_i} \frac{S_{a_i}}{w^2_i} \quad (7)$$

donde  $S_{a_i}$  es la aceleración espectral para el modo  $i$  en función de  $\zeta_i$  y  $T_i$ .

El desplazamiento máximo es:

$$D_{\text{máx}_1} = \rho_1 q_{\text{máx}_1} = \rho_1 \frac{L^3}{m^*} \frac{S a_1}{W^2} \quad (8)$$

Las fuerzas de inercia máximas se obtienen:

$$F_{\text{máx}_1} = K D_{\text{máx}_1} = M \rho_1 \frac{L^3}{m^*} S a_1 \quad (9)$$

Los cortantes máximos para cada modo ( $V_{\text{máx}_1}$ ) se obtienen:

$$V_{\text{máx}_1} = S F_{\text{máx}_1} \quad (10)$$

donde:

S = matriz de sumas

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación (10) la podemos escribir:

$$V_{\text{máx}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{\text{máx}_1} \\ V_{\text{máx}_2} \\ \dots \\ V_{\text{máx}_{N-1}} \\ V_{\text{máx}_N} \end{Bmatrix}$$

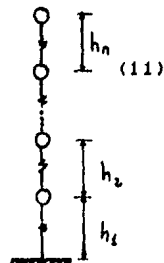
Finalmente, los momentos de volteo máximos para cada modo

( $M_{\text{máx}_1}$ ) se obtienen:

$$M_{\text{máx}_1} = H V_{\text{máx}_1}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ 0 & h_2 & \dots & h_n \\ 0 & 0 & \dots & h_n \end{bmatrix}$$

siendo:





Por lo tanto, la ecuación (11) la podemos expresar:

$$M_{i \text{ máx}_i} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ 0 & h_2 & \dots & h_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V^{\text{máx}_1} \\ V^{\text{máx}_2} \\ \dots \\ V^{\text{máx}_n} \end{Bmatrix}$$

**\* Superposición de Respuestas Modales**

Existen varias fórmulas con el propósito de obtener una razonable estimación de las respuestas máximas espectrales. La más simple y usual de estas fórmulas es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las respuestas modales, que en forma general la podemos expresar:

Sea  $R_i$  la respuesta ( $D_i$ ,  $F_i$ ,  $V_i$ ,  $M_i$ ,  $N_i$ ,  $\dots$ ,  $V_i$ ,  $M_i$ ,  $N_i$ , etc.) en el modo  $i$ .

Para sistemas remotamente acoplados; es decir,  $\omega_i \neq \omega_j \quad \forall i, j$

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n R_i^2} \quad (12)$$

Por ejemplo, el desplazamiento máximo modal espectral se expresa:

$$D_{\text{máx}} \doteq \sqrt{(D_1)^2_{\text{máx}} + (D_2)^2_{\text{máx}} + \dots} \quad (13)$$

Similarmente, la fuerza de inercia máxima modal se obtiene:

$$F_{i \text{ máx}} \doteq \sqrt{(F_1)^2_{\text{máx}} + (F_2)^2_{\text{máx}} + \dots} \quad (14)$$

Otro criterio de superposición modal espectral es el siguiente:

$$R = \sum_{i=1}^n |R_i|$$

En chimeneas se utiliza:

$$R_1 = \sqrt{\sum_{k=1}^n R_k^2}$$

$$R_2 = \sum_{k=1}^n |R_k|$$

y la respuesta para diseño:

$$R_3 = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

• Como resumen de la superposición de efectos modales espectrales tenemos:

1.- Raíz cuadrada de la suma de cuadrados:

$$R = \sqrt{R^T I R} = \sqrt{\sum R_k^2}$$

$\begin{matrix} (1,1) & (1,N) & (N,N) & (N,1) \end{matrix}$

2.- Suma de valores absolutos:

$$R = R^T U [\text{signo}] = \sum |R_k|$$

$\begin{matrix} (1,1) & (1,N) & (N,1) \end{matrix}$

(matriz unitaria  
 con elementos cuyo  
 signo es el del  
 elemento  $R_k$ )

3.- Combinación de cuadráticas completas:

$$R = \sqrt{R^T C R}$$

$\begin{matrix} (1,1) & (1,N) & (N,N) & (N,1) \end{matrix}$

donde:

$C_{ij}$  = coeficiente de correlación cruzada entre el modo  $i$   
 y el modo  $j$

$$C_{1,3} = \frac{8\zeta^2 (1+r) r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\zeta r (1+r)^2}$$

$$r = \frac{w_1}{w_3}$$

$\zeta$  = amortiguamiento del espectro usado.

VER EJEMPLOS 18 Y 19

#### *Análisis Modal Espectral Tridimensional*

El análisis dinámico tridimensional de un edificio puede efectuarse tomando en cuenta todos los grados de libertad estáticos y dinámicos que resulten relevantes.

Los siguientes ejemplos que se plantean, tienen la finalidad de ilustrar conceptos cuando se consideran grados de libertad de torsión en pisos y cabeceo en paraguas.

VER EJEMPLOS 20 Y 21

## b.- Análisis Sísmico Estático

Partiendo de la ecuación de equilibrio dinámico, considerando sólo sismo:

$$M\ddot{D}(t) + C\dot{D}(t) + KD(t) = \ddot{d}_m(t)MJ \quad (1)$$

En este tipo de análisis simplificado, la solución viene dada por:

$$D_1(t) = \phi_1 q_1(t) \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) y premultiplicando por  $\phi_1^T$  se obtiene:

$$\phi_1^T M \phi_1 \ddot{q}_1(t) + \phi_1^T C \phi_1 \dot{q}_1(t) + \phi_1^T K \phi_1 q_1(t) = \ddot{d}_m(t) \phi_1^T M J \quad (3)$$

Haciendo:

$$m^*_1 = \phi_1^T M \phi_1 \quad (4)$$

$$c^*_1 = \phi_1^T C \phi_1 \quad (5)$$

$$k^*_1 = \phi_1^T K \phi_1 \quad (6)$$

$$\alpha_1 = \phi_1^T M J \quad (7)$$

La ecuación (3) resulta:

$$m^*_1 \ddot{q}_1(t) + c^*_1 \dot{q}_1(t) + k^*_1 q_1(t) = \ddot{d}_m(t) \alpha_1 \quad (8)$$

El valor máximo se expresa:

$$q_1 \text{ máx} = \frac{\alpha_1}{m^*_1} \frac{S_{a1}}{w^2_1} \quad (9)$$

El desplazamiento máximo viene dado por:

$$D_1 \text{ máx} = \phi_1 q_1 \text{ máx} \quad (10)$$

Las fuerzas de inercia máximas:

$$F_{I1} \text{ máx} = K \phi_1 q_1 \text{ máx} \quad (11)$$

Sustituyendo (9) en (11), se tiene:

$$F_{i1} \text{ máx} = K \rho_1 \frac{d_1}{m^*_{i1}} \frac{S a_1}{w^2_{i1}} \quad (12)$$

El cortante máximo en la base resulta:

$$V_{o1} \text{ máx} = S K \rho_1 \frac{d_1}{m^*_{i1}} \frac{S a_1}{w^2_{i1}} \quad (13)$$

donde:  $S = J T$

Pero:

$$K \rho_1 = w^2_{i1} M \rho_1 \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en (12) y (13):

$$F = M \rho_1 \frac{d_1}{m^*_{i1}} S a_1 \quad ; \quad F_i = \frac{d_1 S a_1}{m^*_{i1}} m_i \rho_{1i} \quad (15)$$

$$V_{o1} \text{ máx} = S M \rho_1 \frac{d_1}{m^*_{i1}} S a_1 \quad ; \quad V_o = \frac{d_1 S a_1}{m^*_{i1}} \sum_{i=1}^n m_i \rho_{1i} \quad (16)$$

$$V_o = \frac{(J T M \rho_1)}{d_1} \frac{(\rho^T_1 M J)}{d_1} \frac{S a_1}{m^*_{i1}} = d_1 \left( \frac{d_1 S a_1}{m^*_{i1}} \right) \quad (17)$$

De la ecuación (17):

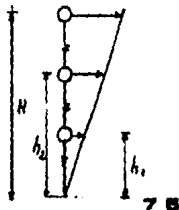
$$\frac{V_o}{d_1} = \frac{d_1 S a_1}{m^*_{i1}} \quad ; \quad V_o = \frac{S a_1}{g} \frac{g \cdot d_1^2}{m^*_{i1}} = c W_1 \quad (18)$$

Las fuerzas de inercia la podemos expresar:

$$F_i = \frac{V_o}{d_1} m_i \rho_{1i} = V_o \frac{m_i \rho_{1i}}{\rho^T_1 M J} = V_o \frac{m_i \rho_{1i}}{\sum m_i \rho_{1i}} \quad (19)$$

pero:

$$\rho_i = \frac{h_i}{H} \quad (20)$$



Sustituyendo (20) en (19), se tiene:

$$F_i = V_o \frac{(w_i/g) (h_i/H)}{\sum [(w_i/g) (h_i/H)]} = V_o \frac{w_i h_i}{\sum w_i h_i}$$

$$F_i = \frac{c W}{\sum w_i h_i} * w_i h_i \quad (21)$$

donde:

$c$  = Coeficiente sísmico

$$W = \sum w$$

$c$  es la ordenada máxima del espectro de diseño utilizado:

VER EJEMPLO 22.

**IV. - EJEMPLOS DE  
APLICACION**

**IV.- EJEMPLOS DE APLICACION**

**EJEMPLO 1.-** Para la estructura planteada, que sirve de base para los ejemplos, calcular a. la masa y b. la rigidez de la estructura utilizando:

- 1.- El método de las rigideces
- 2.- Las fórmulas de Willbur
- 3.- La rigidez de las columnas, consideradas fijas angularmente en sus extremos.

Suponer:

$f'_c = 200 \text{ kgf/cm}^2$

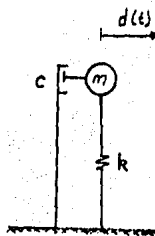
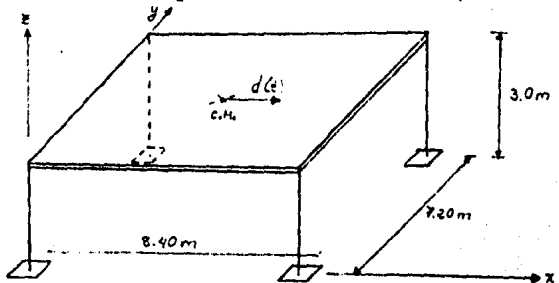
Se resolverá a base de: traveses, vigas, losa y columnas.

Columnas: 35 x 35 cm

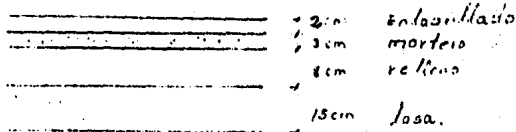
Traveses: 25 x 60 cm

Losa: 15 cm

Viga (trabe secundaria) peralte al eje y de 30 x 40 cm.



a. Cálculo de la masa (ver corte tipo):





Análisis por m<sup>2</sup>:

Enladrillado:	0.02 x 2000 =	40	kgf/m <sup>2</sup>
(1) Concreto:	0.03 x 2200 =	66	"
Relleno:	0.08 x 1600 =	128	"
(2) Losa:	0.15 x 2400 =	360	"
Por reglamento (1)	=	40	"
Por reglamento (2)	=	40	"
		<hr/>	
		634	kgf/m <sup>2</sup>

Peso de traves y viga:

2 [0.25 x 0.45(8.4 + 7.2) x 2400]	=	8424	kgf
0.30 x 0.25 x 7.2 x 2400	=	1296	"
0.30 x 0.30 x 3/2 x 4 x 2400	=	1296	"
		<hr/>	
		11016	kgf

Carga Muerta Total:

634 x 7.2 x 8.4	=	38344	kgf
	+	11016	"
		<hr/>	
Carga Muerta:		49360	kgf
Carga Viva: 70 x 7.2 x 8.4	=	4234	"
		<hr/>	
Carga Muerta + Carga Viva:		53594	kgf

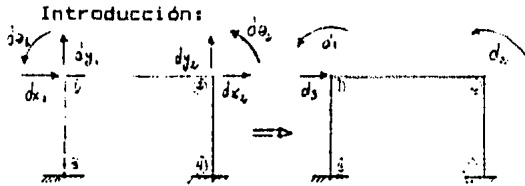
$$m = \frac{w}{g}$$

$$m = \frac{53594 \text{ kgf}}{981 \text{ cm/seg}^2} = 54.63 \text{ kgf-sec}^2/\text{cm}$$

Para fines prácticos se tomará: m = 55 kgf-sec<sup>2</sup>/cm

b. Obtención de la rigidez de la estructura  $k_w$  (dirección x)

1.- Por el método de rigideces



porque se consideran deformaciones axiales pequeñas en columnas y traves.

La ecuación de equilibrio estático es:

$$KD = P$$

donde ordenando en submatrices queda:

$$\begin{array}{ccc}
 K_{AA} & K_{AB} & D_A & P_A \\
 \left[ \begin{array}{cc|c} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{array} \right] & \left\{ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{array} \right\} & = & \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ P \end{array} \right\} \\
 K_{BA} & K_{BB} & D_B & P_B
 \end{array}$$

Las operaciones matriciales son:

$$K_{AA}D_A + K_{AB}D_B = P_A = 0$$

y

$$K_{BA}D_A + K_{BB}D_B = P_B$$

De la primera:

$$D_A = -K_{AA}^{-1}K_{AB}D_B$$

Sustituyendo en la segunda:

$$K_{BA}(-K_{AA}^{-1}K_{AB}D_B) + K_{BB}D_B = P_B$$

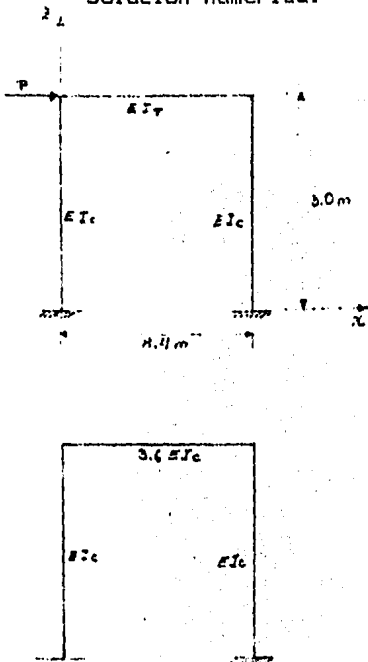
Factorizando:

$$(K_{BB} - K_{BA}K_{AA}^{-1}K_{AB})D_B = P_B$$

De ahí:

$$(K_{BB} - K_{BA}K_{AA}^{-1}K_{AB}) = \frac{P_B}{P_B} = \frac{P}{d} = k \quad (1)$$

Solución numérica:



$$I_c = bh^3/12 = 25 \times 60^3/12 = 450000 \text{ cm}^3$$

$$I_a = bh^3/12 = 35 \times 35^3/12 = 125052 \text{ cm}^3$$

$$I_c/I_a = 450000/125052 = 3.6$$

$$I_c = 3.6 I_a$$

$$E = 10000 \text{ kgf/cm}^2 = 10000 \times 200 = 141421 \text{ kgf/cm}^2$$

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 4E(I_a/h + I_c/L) & 2EI_c \\ 2EI_c/L & 4E(I_a/h + I_c/L) \end{bmatrix}$$

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 4E\left(\frac{I_a}{300} + \frac{3.6I_a}{840}\right) & \frac{7.2EI_a}{840} \\ \frac{7.2EI_a}{840} & 4E\left(\frac{I_a}{300} + \frac{3.6I_a}{840}\right) \end{bmatrix}$$

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 538844719 & 151522500 \\ 151522500 & 538844719 \end{bmatrix}$$

$$K_{AA}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.015 \times 10^{-7} & -566.663 \times 10^{-12} \\ -566.663 \times 10^{-12} & 2.015 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} -6EI_c/h^2 \\ -6EI_c/h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.179 \times 10^6 \\ -1.179 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$K_{BA} = \begin{bmatrix} -6EI_c & -6EI_c \\ h^2 & h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.179 \times 10^6 & -1.179 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$K_{BB} = 24EI_c/h^3 = 15.720 \times 10^3$$

Aplicando la expresión (1):

$$k_{MM} = (K_{BB} - K_{BB}K_{AA}^{-1}K_{AB})$$

$$k_{MM} = 15.720 \times 10^3 - \begin{bmatrix} -1.179 \times 10^6 & -1.179 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.015 \times 10^{-9} & -566.663 \times 10^{-12} \\ -566.663 \times 10^{-12} & 2.015 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.179 \times 10^6 \\ -1.179 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones:

$$k_{MM} = 11.693 \times 10^3 \text{ kgf/cm} \quad \text{Rigidez del marco}$$

Finalmente, la rigidez de la estructura en dirección x será:

$$k_M = 2 \times 11693 = 23386 \text{ kgf/cm}$$

2.- Obtención de  $k_M$  por medio de las fórmulas de Willbur:

Columnas empotradas en la cimentación:

$$k_{MM} = \frac{48E}{h_1 \left[ \frac{4h_1}{\sum k_{e1}} + \frac{h_1 + h_2}{\sum kt_1 + \frac{\sum k_{e1}}{12}} \right]}$$

$$k_{e1} = I_e/h = 125052/300 = 416.84$$

$$kt_1 = I_c/L = 450000/840 = 535.71$$

$$k_{MM} = \frac{48 \times 141421.36}{300 \left[ \frac{4 \times 300}{833.68} + \frac{300}{535.71 + 535.71/12} \right]}$$

$$k_{MM} = 11566.27 \text{ kgf/cm} \quad \text{Rigidez del marco}$$

La rigidez de la estructura  $k_M$  (sentido x) es:

$$k_M = 2 \times 11566.27 = 23133 \text{ kgf/cm}$$

3.- Rigidez de columnas, considerando fijas angularmente en sus extremos.

Rigidez de la columna  $k_{MM}$ :

$$k_{MM} = 12EI_c/h^3$$

Sustituyendo valores:

$$k_{NN} = (12 \times 141421.36 \times 125052) / (300)^3$$

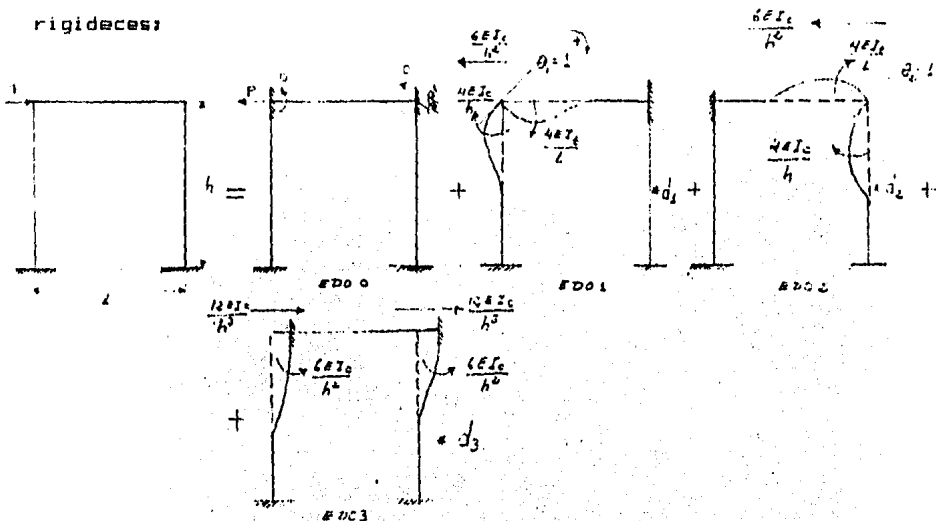
$$k_{NN} = 7860 \text{ kgf/cm Rigidez de columna}$$

La rigidez de la estructura será:

$$k_N = 4 \times 7860 = 31440 \text{ kgf/cm}$$

EJEMPLO 2.- Establecer una función que relacione la rigidez de entrespado de un marco, en término de sus propiedades de momentos de inercia y longitudes de traves y columnas.

Aplicando el principio de superposición del método directo de rigideces:



Superponiendo, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

Esto es:

$$\begin{bmatrix} 4E(I_c/h + I_c/L) & 2EI_c/L & -6EI_c/h^2 \\ 2EI_c/L & 4E(I_c/h + I_c/L) & -6EI_c/h^2 \\ -6EI_c/h^2 & -6EI_c/h^2 & 24EI_c/h^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_a \\ D_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_a \\ P_b \end{Bmatrix}$$

$$(K_{bb} - K_{ba}K_{aa}^{-1}K_{ab})D_b = P_b$$

donde:

$$K_{AA} = 24EI_c/h^3$$

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} 4E(I_c/h + I_e/L) & 2EI_e/L \\ 2EI_e/L & 4E(I_c/h + I_e/L) \end{bmatrix}$$

$$K_{BA} = \begin{bmatrix} -6EI_c/h^2 & -6EI_c/h^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{BB} = \begin{bmatrix} -6EI_c/h^2 \\ -6EI_c/h^2 \end{bmatrix}$$

$$D_A = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} ; \quad D_B = \begin{Bmatrix} d_3 \end{Bmatrix}$$

$$P_A = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad \text{-----} \rightarrow \text{para sismo } P_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$P_B = \{p\}$$

Obtención de  $K_{AA}^{-1}$

Realizando el siguiente cambio de variables:

$$M = I_c/h + I_e/L$$

$$N = EI_e/L$$

La matriz  $K_{AA}$  queda:

$$K_{AA} = \begin{bmatrix} 4EM & 2N \\ 2N & 4EM \end{bmatrix}$$

La inversa de  $K_{AA}$  se expresa:

$$K_{AA}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4EM}{(4EM)^2 - (2N)^2} & \frac{-2N}{(4EM)^2 - (2N)^2} \\ \frac{-2N}{(4EM)^2 - (2N)^2} & \frac{4EM}{(4EM)^2 - (2N)^2} \end{bmatrix}$$

La rigidez del marco viene dada por la expresión:

$$k = P_{12}/D_{12} = (K_{1122} - K_{1121}^{-1}K_{1122})$$

Sustituyendo las matrices y realizando operaciones se obtiene:

$$k = \left\{ \frac{24EI_c}{h^3} - 2 \left[ \frac{-2N}{(4EM)^2 - (2N)^2} \left( \frac{6EI_c}{h^2} \right)^2 + \frac{4EM}{(4EM)^2 - (2N)^2} \left( \frac{6EI_c}{h^2} \right) \right] \right\}$$

Siguiendo el proceso de simplificación:

$$k = \left\{ \frac{24EI_c}{h^3} - 2 \left( \frac{6EI_c}{h^2} \right)^2 \left[ \frac{4EM - 2N}{(4EM)^2 - (2N)^2} \right] \right\}$$

$$k = \frac{24EI_c}{h^3} - 2 \left( \frac{6EI_c}{h^2} \right)^2 \left[ \frac{1}{4EM + 2N} \right]$$

Sustituyendo:

$$M = I_c/h + I_e/L$$

$$N = EI_e/L$$

$$k = \frac{24EI_c}{h^3} - 2 \left( \frac{6EI_c}{h^2} \right)^2 \left[ \frac{1}{4E(I_c/h + I_e/L) + 2EI_e/L} \right]$$

Dividiendo ambos términos por  $24EI_c/h^3$  y simplificando:

$$\frac{k}{\frac{24EI_c}{h^3}} = 1 - \frac{3EI_c}{h} \left( \frac{1}{\frac{4EI_c}{h} + \frac{6EI_e}{L}} \right)$$

Sustituyendo:

$$\alpha = \frac{(EI_e/L)}{(EI_c/h)} \quad \text{---->} \quad EI_e/L = \alpha EI_c/h$$

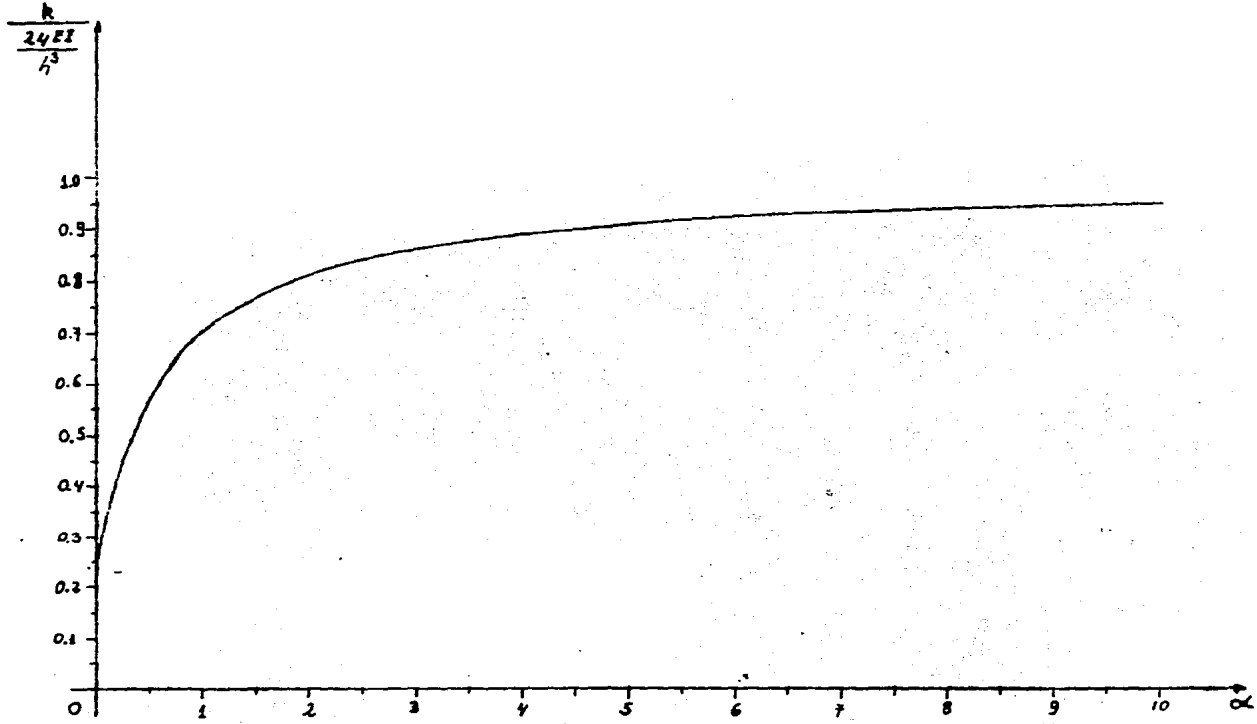
Finalmente:

$$\frac{k}{\frac{24EI_c}{h^3}} = 1 - \frac{3}{4 + 6\alpha}$$

La gráfica correspondiente es:



07



EJEMPLO 3.- Para la estructura de un grado de libertad del ejemplo 1, calcular:

- Frecuencia natural  $\omega$ , la frecuencia  $f$  y el periodo natural  $T$
- ¿Cuánto debe valer  $k$  para que  $T = 0.25$  seg?
- Calcular y graficar el desplazamiento, velocidad y aceleración en vibración libre no amortiguada para el intervalo  $0 \leq t \leq 3T$

Condiciones Iniciales: C.I. =  $\begin{cases} d_0 = 1 \text{ cm} \\ \dot{d}_0 = 0 \end{cases}$

Datos:

$m = 55 \text{ kgf}\cdot\text{seg}^2/\text{cm}$   
 $k = 31440 \text{ kgf/cm}$

a.  $\omega = \sqrt{k/m}$   
 $\omega = \sqrt{31440/55} = 23.91 \text{ rad/seg.}$   
 $f = \omega/2\pi = 1/2\pi \sqrt{k/m}$   
 $f = 1/2\pi \sqrt{31440/55} = 3.81 \text{ Hz}$   
 $T = 1/f = 1/3.81 = 0.26 \text{ seg.}$

b.  $T = 1/f = 2\pi/\omega = 2\pi/(\sqrt{k/m})$

Despejando  $k$ :

$k = (2\pi/T)^2 \times m$

Sustituyendo  $T = 0.25$  seg

$k = (2\pi/0.25)^2 \times 55$

$k = 34741 \text{ kgf/cm}$

$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{34741/55} = 25.13 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$

$f = 1/T = 1/0.25 = 4$

Por facilidad se utilizará en adelante:

$$m = 55 \text{ kgf-seg}^2/\text{cm}$$

$$k = 34741 \text{ kgf/cm}$$

$$T = 0.25 \text{ seg}$$

$$w = 25.13 \text{ rad/seg}$$

$$c. \quad d(t) = \frac{\dot{d}_0}{w} \text{ sen } wt + d_0 \text{ cos } wt$$

$$\dot{d}(t) = \dot{d}_0 \text{ cos } wt - w d_0 \text{ sen } wt$$

$$\ddot{d}(t) = -\dot{d}_0 w \text{ sen } wt - w^2 d_0 \text{ cos } wt$$

Sustituyendo  $w = 23.91 \text{ rad/seg}$

$$C.I. = \begin{cases} d_0 = 1 \text{ cm} \\ \dot{d}_0 = 0 \end{cases}$$

$$d(t) = \text{cos } 25.13 t$$

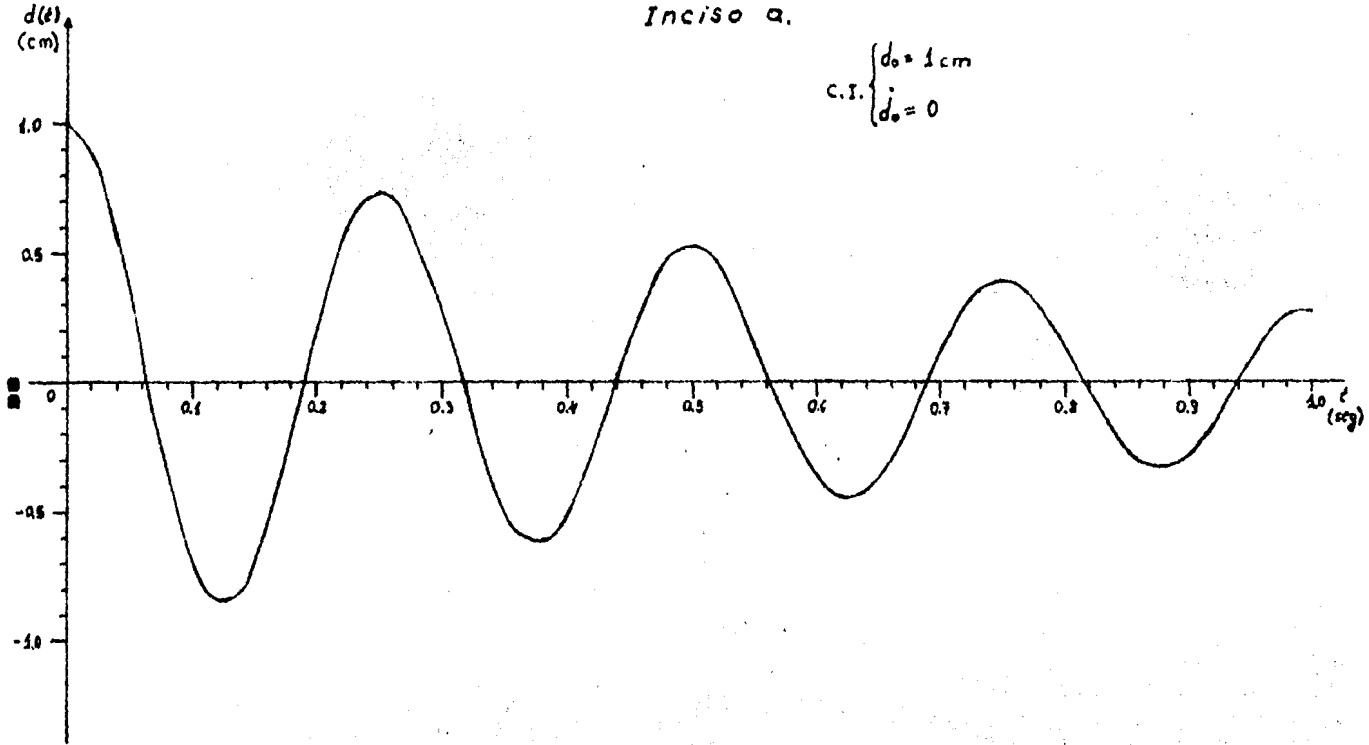
$$\dot{d}(t) = -23.91 \text{ sen } 25.13 t$$

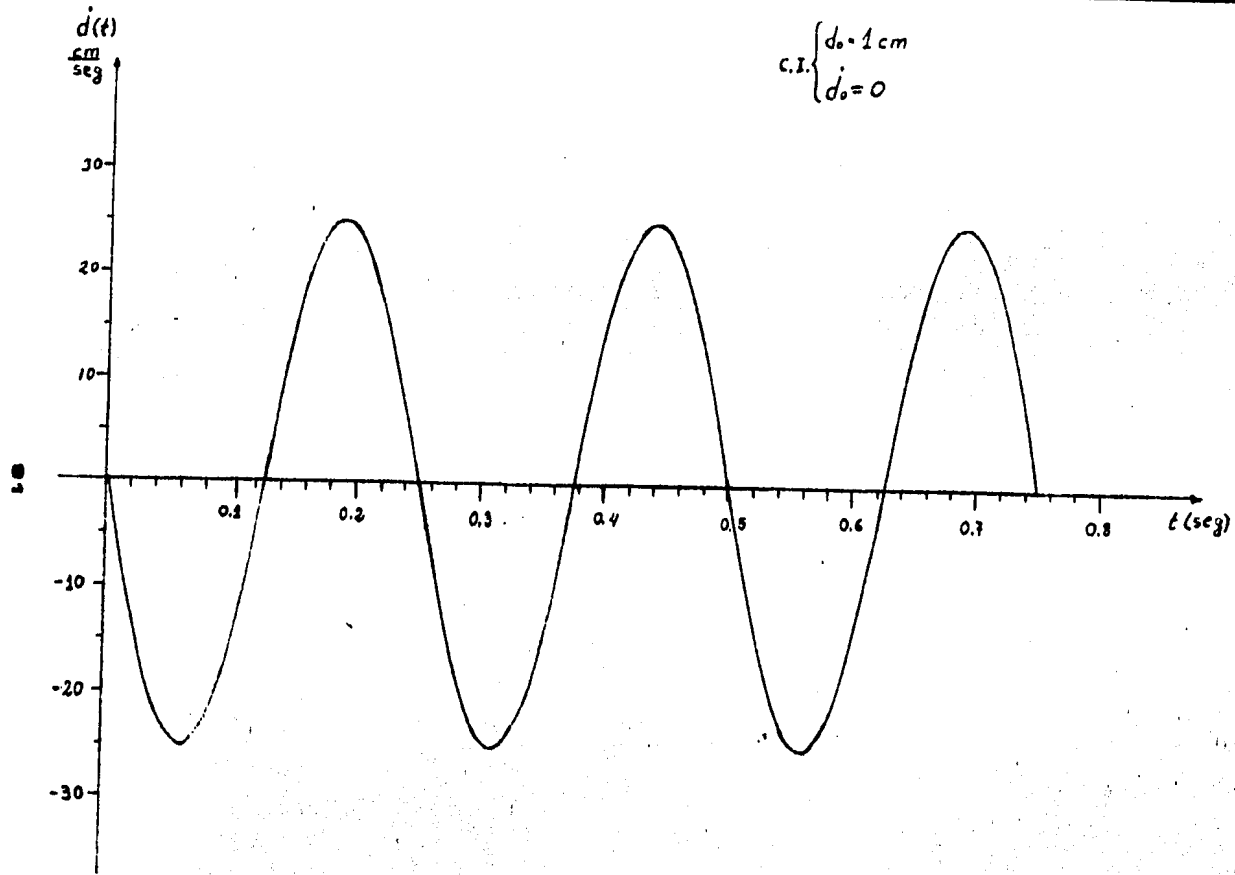
$$\ddot{d}(t) = -631.65 \text{ cos } 25.13 t$$

Las respectivas gráficas en el intervalo  $0 \leq t \leq 3T$  son:

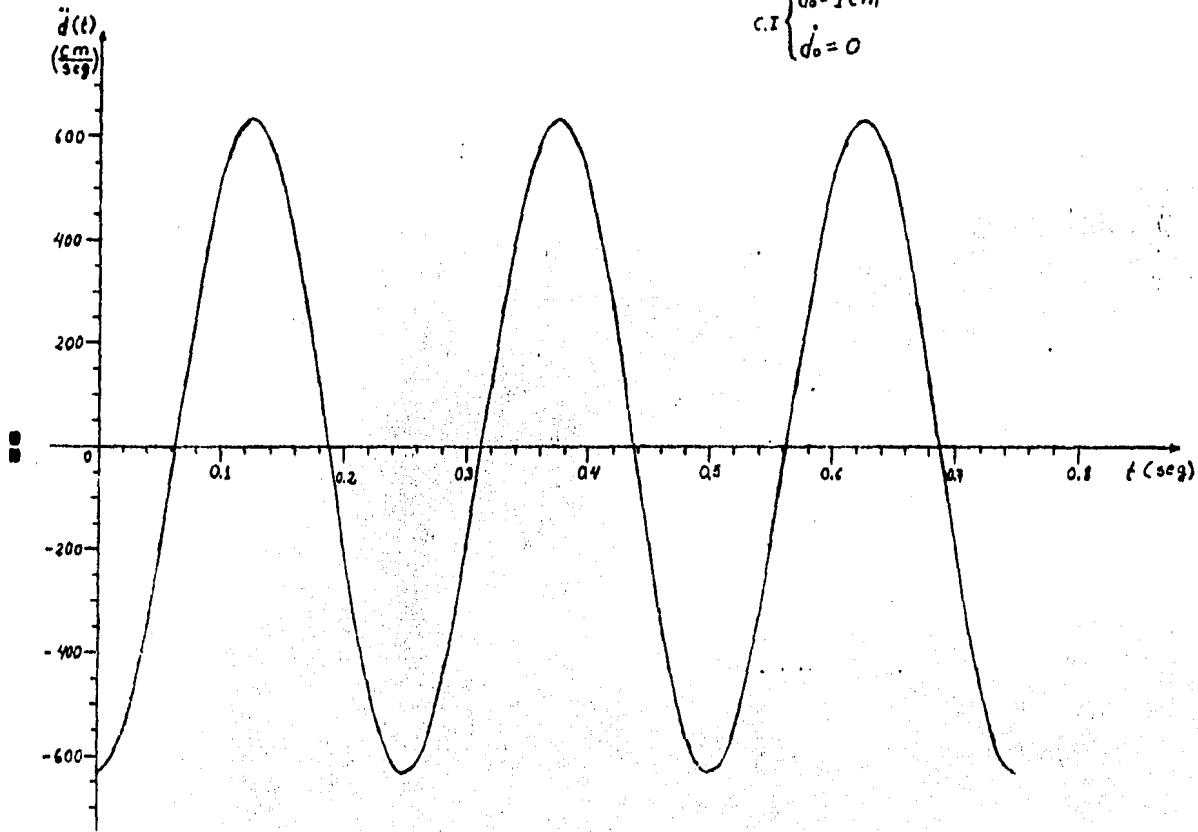
Inciso a.

$$\text{C.I.} \begin{cases} d_0 = 1 \text{ cm} \\ d_1 = 0 \end{cases}$$





$$\text{c.I.} \begin{cases} d_0 = 1 \text{ cm} \\ \dot{d}_0 = 0 \end{cases}$$



EJEMPLO 4.- Para la estructura del Ejemplo 3 cuyos datos son:  $m = 55$  kgf-seg<sup>2</sup>/cm,  $k = 34741$  kgf/cm y empleando  $\zeta = 0.05$ :

a. Calcular y graficar el desplazamiento y la velocidad para el intervalo  $0 \leq t \leq 4T$ . C.I.:  $\{ d_0 = 1\text{cm}$

b. Graficar el desplazamiento y la velocidad con la C.I.  $\{ d_0 = 10 \text{ cm/seg.}$

c. Graficar el desplazamiento y la velocidad con las siguientes

$$\text{C.I.: } \begin{cases} d_0 = 1 \text{ cm} \\ \dot{d}_0 = 10 \text{ cm/seg.} \end{cases}$$

Solución:

$$a. \quad d(t) = e^{-\zeta w t} [b_1 \text{ sen } w't + b_2 \text{ cos } w't] \quad (1)$$

Derivando la ecuación (1), simplificando y agrupando, se

tiene:

$$\dot{d}(t) = e^{-\zeta w t} [(-\zeta w b_1 - b_2 w') \text{ sen } w't + (b_1 w' - b_2 \zeta w) \text{ cos } w't] \quad (2)$$

donde:

$$b_1 = \frac{\dot{d}_0 + \zeta w d_0}{w'} \quad (3)$$

$$b_2 = d_0 \quad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (1) se obtiene:

$$d(t) = e^{-\zeta w t} \left[ \frac{\dot{d}_0 + \zeta w d_0}{w'} \text{ sen } w't + d_0 \text{ cos } w't \right] \quad (5)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2) y simplificando, se tiene:

$$\dot{d}(t) = e^{-\zeta w t} \left\{ \left[ -\zeta w \left( \frac{\dot{d}_0 + \zeta w d_0}{w'} \right) - w' d_0 \right] \text{ sen } w't + [\dot{d}_0] \text{ cos } w't \right\} \quad (6)$$

$$w = \sqrt{k/m} = \sqrt{34741/55} = 25.13 \text{ rad/seg}$$

$$w' = w \sqrt{1 - \zeta^2} = 25.13 \sqrt{1 - (0.05)^2} = 25.1013 \text{ rad/seg}$$

Considerando que  $w' \neq w$ , las ecuaciones (5) y (6) quedan:

$$d(t) = e^{-\zeta w t} \left[ \frac{\dot{d}_0 + \zeta w d_0}{w} \operatorname{sen} wt + d_0 \cos wt \right] \quad (7)$$

$$\dot{d}(t) = e^{-\zeta w t} [-\zeta \dot{d}_0 + \zeta^2 w d_0 - w d_0] \operatorname{sen} wt + [\dot{d}_0] \cos wt \quad (8)$$

### Gráficas

a. Para

$$\text{C.I.} \begin{cases} d_0 = 1 \text{ cm} \\ \dot{d}_0 = 0 \end{cases}$$

$$\zeta = 0.05$$

$$k = 34741 \text{ kgf/cm}$$

$$m = 55 \text{ kgf-seg}^2/\text{cm}$$

$$w = 25.13 \text{ rad/seg}$$

Sustituyendo valores en (7) y (8) y realizando operaciones, se tiene:

$$d(t) = e^{-1.257t} [0.05 \operatorname{sen} 25.13t + \cos 25.13t] \quad (9)$$

$$\dot{d}(t) = e^{-1.257t} (-25.07 \operatorname{sen} 25.13t) \quad (10)$$

b. Para:

$$\text{C.I.} \begin{cases} d_0 = 0 \\ \dot{d}_0 = 10 \text{ cm/seg} \end{cases}$$

Sustituyendo valores en (7) y (8) y realizando operaciones:

$$d(t) = e^{-1.257t} (0.40 \operatorname{sen} 25.13t) \quad (11)$$

$$\dot{d}(t) = e^{-1.257t} (-0.5 \operatorname{sen} 25.13t + 10 \cos 25.13t) \quad (12)$$

c. Para:

$$\text{C.I.} \begin{cases} d_0 = 1 \text{ cm} \\ \dot{d}_0 = 10 \text{ cm/seg} \end{cases}$$



Igualmente, sustituyendo valores en (7) y (8) y realizando operaciones, se obtiene:

$$d(t) = e^{-1.257t} (0.45 \text{ sen } 25.13t + \text{cos } 25.13t) \quad (13)$$

$$\dot{d}(t) = e^{-1.257t} (-25.57 \text{ sen } 25.13t + 10 \text{ cos } 25.13t) \quad (14)$$

A continuación, se presentan las gráficas de las ecuaciones para cada inciso en el intervalo:

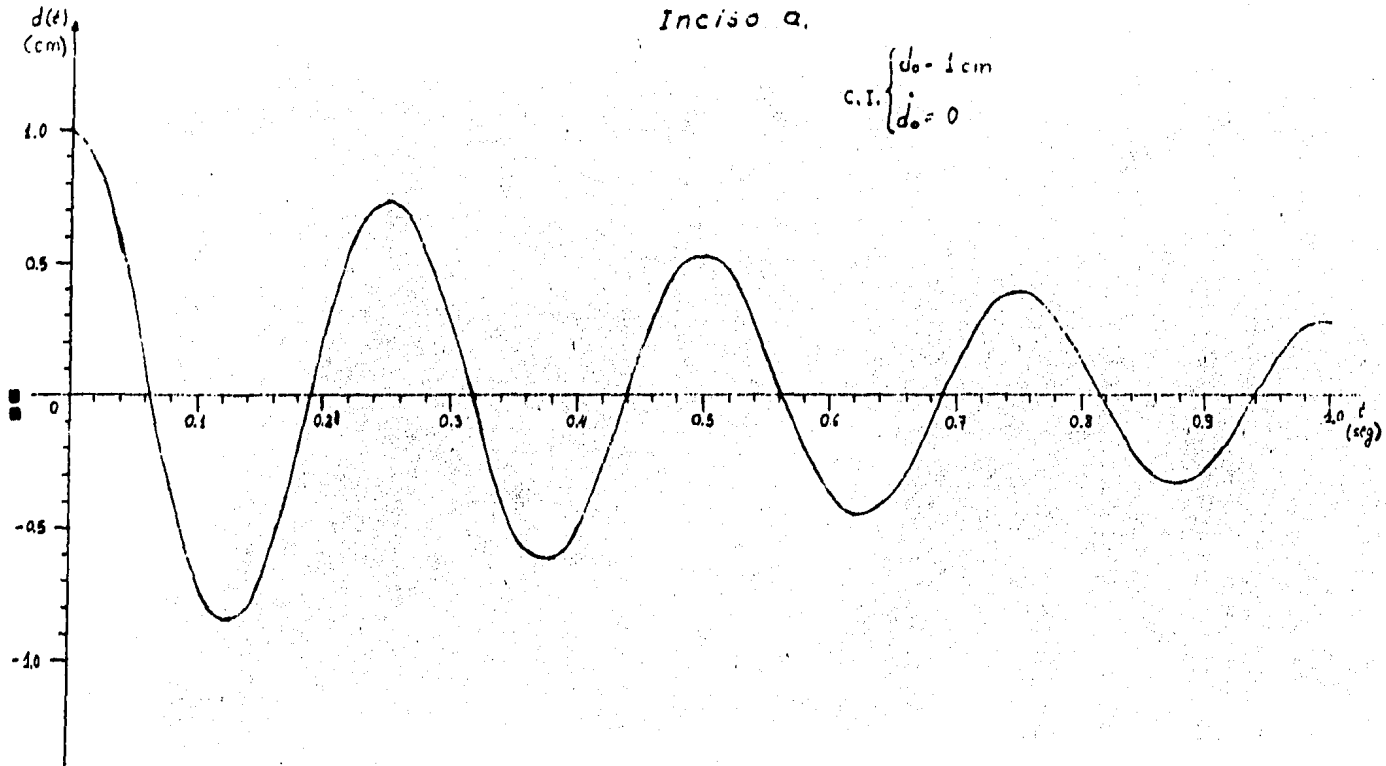
$$0 \leq t \leq 4T$$

donde:

$$T = 0.25 \text{ seg.}$$

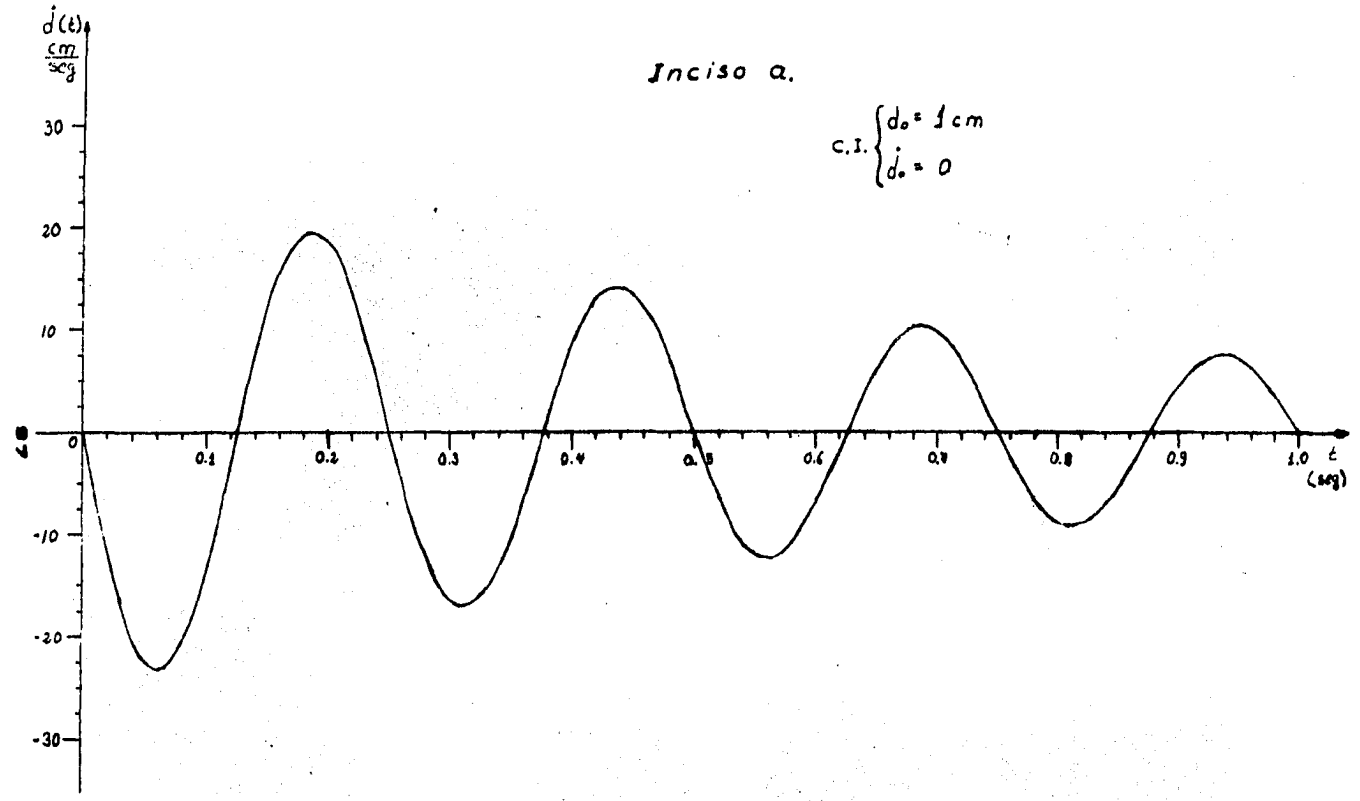
Inciso a.

$$\text{C.I.} \begin{cases} d_0 = 1 \text{ cm} \\ \dot{d}_0 = 0 \end{cases}$$



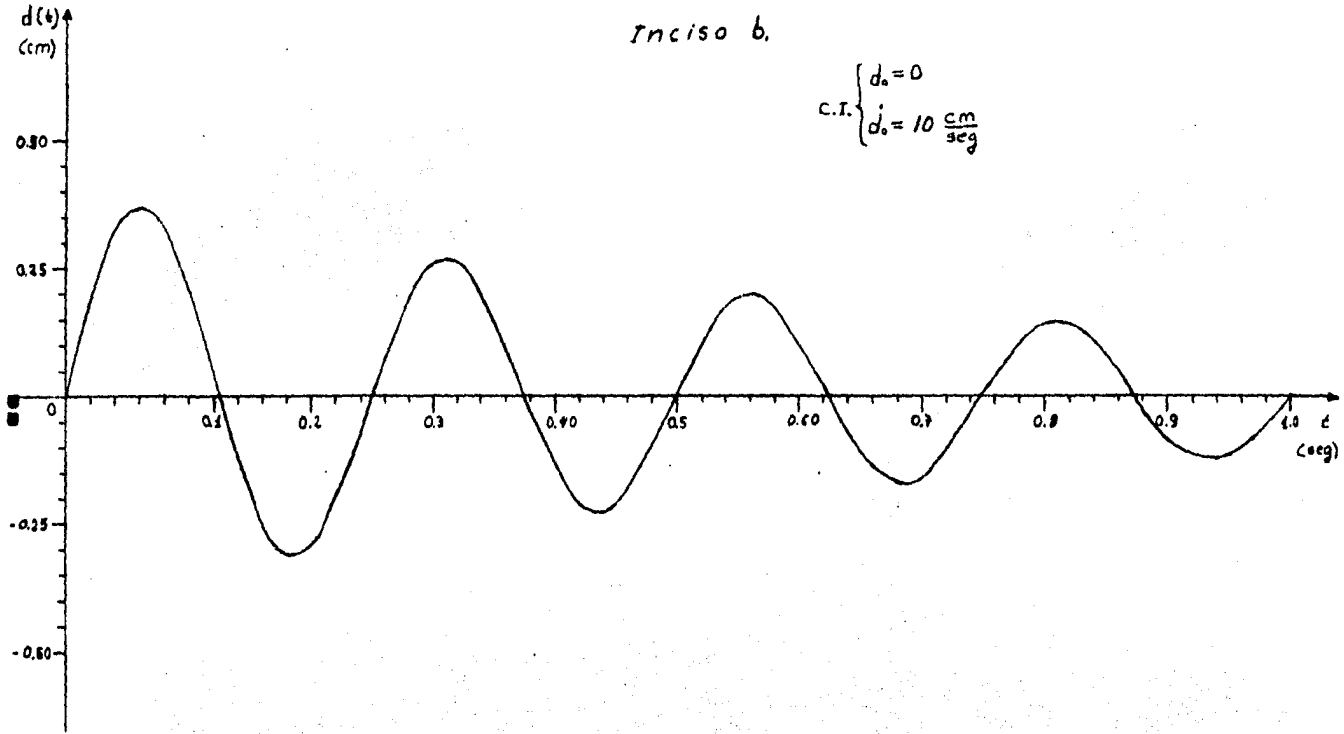
Inciso a.

$$\text{c.i.} \begin{cases} d_0 = 1 \text{ cm} \\ \dot{d}_0 = 0 \end{cases}$$



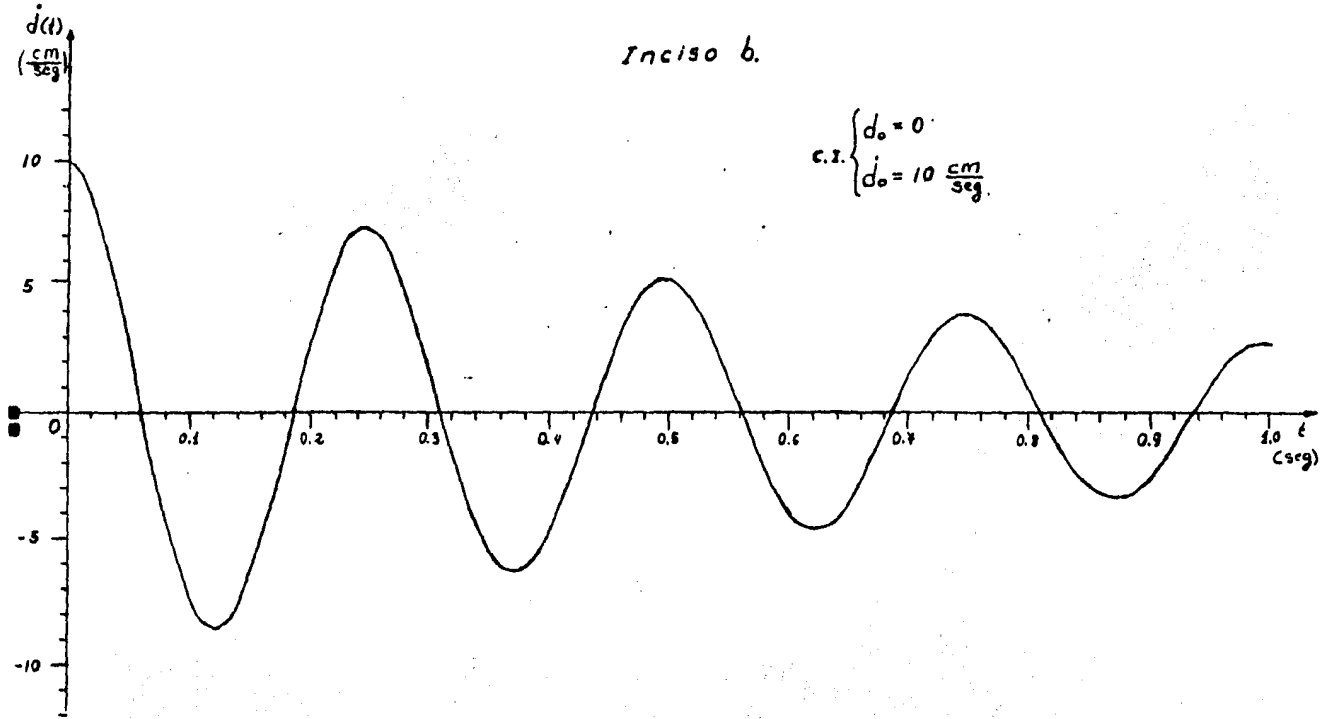
Inciso b.

$$\text{C.I.} \begin{cases} d_0 = 0 \\ \dot{d}_0 = 10 \frac{\text{cm}}{\text{seg}} \end{cases}$$

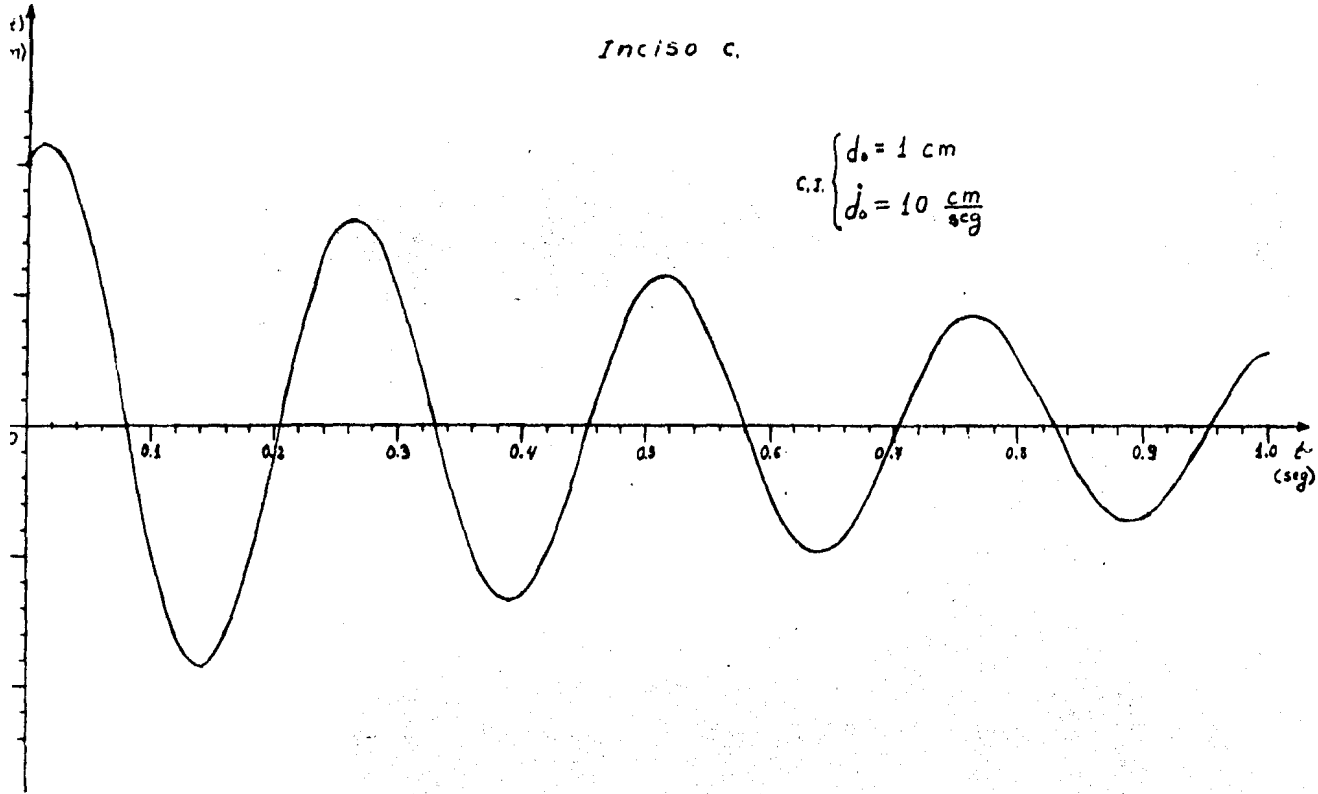


*Inciso b.*

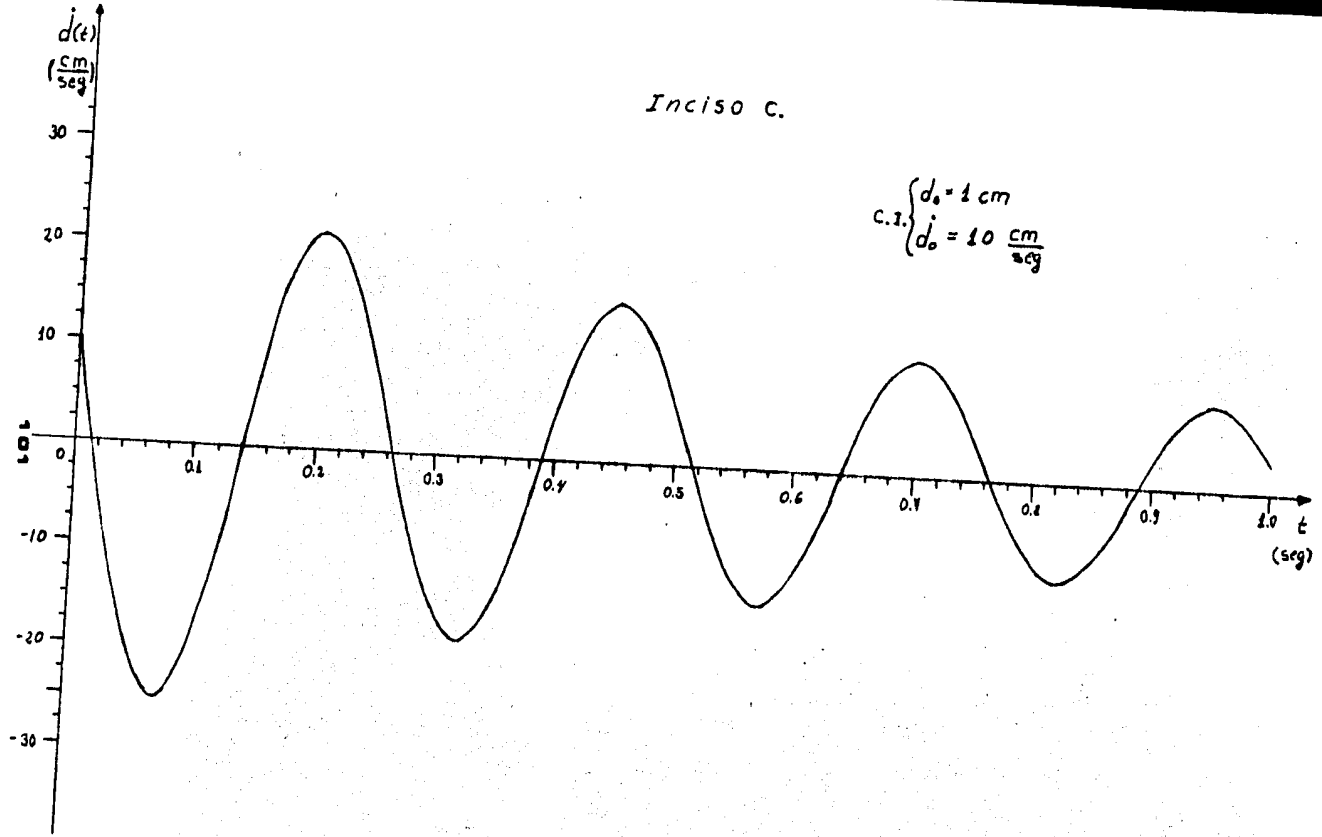
$$\text{c.i.} \begin{cases} d_0 = 0 \\ d'_0 = 10 \frac{\text{cm}}{\text{seg.}} \end{cases}$$



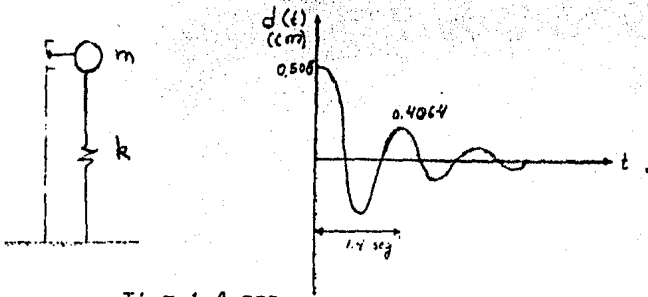
Inciso c.



*Inciso c.*



EJEMPLO 5.- Calcular para la estructura de un grado de libertad: a. rigidez, b. frecuencia natural amortiguada, c. decremento logarítmico, d. porcentaje de amortiguamiento, e. frecuencia natural, f. masa, g. peso, h. periodo, i. frecuencia, j. amortiguamiento y k. desplazamiento para  $t = .6T$ , si el registro de vibraciones libres es como el que se muestra en la Fig. y en condiciones estáticas  $p[d = 0.508 \text{ cm}] = 9072 \text{ kgf}$



$$T' = 1.4 \text{ seg}$$

a.- 
$$k = \frac{p}{\Delta} = \frac{9072}{0.508} = 17.858 \text{ T/cm}$$

b.- 
$$w' = 2\pi/T' = 2\pi/1.4 = 4.488 \text{ rad/seg}$$

c.- 
$$a = \ln(0.508/0.4064) = 0.223$$

d.- 
$$\zeta = \frac{a}{2\pi} = \frac{0.223}{2\pi} = 0.03549 = 3.549\%$$

e.- 
$$w = w\sqrt{1 - \zeta^2} \implies w = w'/\sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{4.488}{\sqrt{1 - (0.03549)^2}} = 4.491 \text{ rad/seg}$$

f.- 
$$w^2 = k/m \implies m = k/w^2 = 17.858/(4.491)^2 = 0.8854 \text{ T-sec}^2/\text{cm}$$

g.- 
$$w = mg = 0.8854 \times 981 = 868.59 \text{ T}$$



h.-  $T = 2\pi/\omega = 2\pi/4.491 = 1.399 \text{ seg}$

i.-  $f = 1/T = 1/1.399 = 0.715 \text{ c.p.s.}$

j.-  $\zeta = c/c_{\text{crit}} = c/2m\omega \implies c = 2\zeta m\omega$

$c = 2(0.03549)(0.8854)(4.491) = 0.2822 \text{ T-seg/cm}$

k.- 
$$d(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[ \frac{d_0 + \zeta\omega d_0}{\omega'} \sin \omega' t + d_0 \cos \omega' t \right]$$

C.I. =  $d_0 = 0.508 \text{ cm}$

$d_0 = 0$

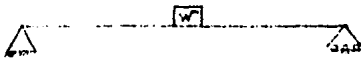
$t = 6T = 6 \times 1.399 = 8.394 \text{ seg}$

Sustituyendo valores:

$$d(t=6T) = e^{-(0.03549)(4.491)(8.394)} \left[ \frac{0 + (0.03549)(4.491)}{4.400} \sin(4.400)(8.394) + 0.508 \cos(4.400)(8.394) \right]$$

$d(t=6T) = 0.133 \text{ cm}$

EJEMPLO 6.- Para la estructura mostrada en la Fig. calcular: a. la rigidez y b. el desplazamiento máximo.



II

$$I_o = 2672.21 \text{ cm}^4$$

Datos:

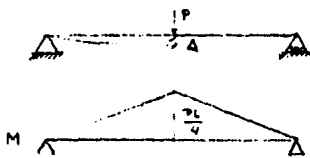
$$w = 7257.48 \text{ kgf}$$

$$I = 2I_o = 2 \times 2672.21 = 5344.41 \text{ cm}^4$$

$$\text{Motor a 300 R.P.M.; } p_o = 18.14 \text{ kgf}$$

$$E_{acero} = 2 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

a.- Por el principio del trabajo virtual:

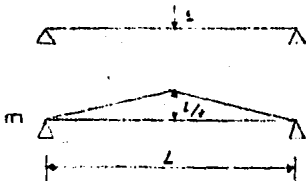


$$\Delta EI = \frac{L(pL/4)(L/4)}{3}$$

$$\Delta = \frac{pL^3}{48EI}$$

Sustituyendo valores:

$$\Delta = \frac{7257.48 \times (366)^3}{48 \times 2 \times 10^6 \times 5344.41} = 0.6935 \text{ cm}$$



$$k = \frac{p}{\Delta} = \frac{7257.48}{0.6935} = 10465 \text{ kgf/cm}$$

b.-

$$m = w/g = 7257.48/981 = 7.398 \text{ kgf-sec}^2/\text{cm}$$

$$w = \sqrt{k/m} = \sqrt{10465/7.398} = 37.611 \text{ rad/seg}^2$$

$$d(t) = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \text{ sen } \omega t$$

donde:

$$\omega = 300 \text{ rev/min} = 31.416 \text{ rad/seg}$$

$$d(t)] \text{ es máximo cuando } \text{sen } \omega t = 1$$

despejando t:

$$\text{sen } \omega t = 1$$

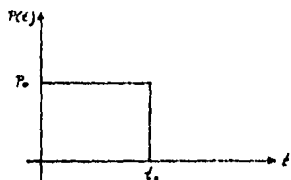
$$t = (\text{ang sen } 1) / 31.416 = 0.05 \text{ seg}$$

entonces:

$$d(t=0.05)_{\text{max}} = \frac{18.14}{10465} \frac{1}{1 - (31.416/37.611)^2} \text{sen}(31.416)(0.05)$$

$$d(t=0.05)_{\text{max}} = 0.005734 \text{ cm}$$

EJEMPLO 7.- Obtener la respuesta de un sistema no amortiguado con la fuerza que se indica en la Figura.



$$p(t) = \begin{cases} p_0 & ; 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & ; t > t_0 \end{cases}$$

$$d(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \operatorname{sen} \omega(t - \tau) d\tau$$

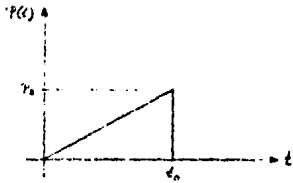
$$d(t) = \frac{p_0}{m\omega} \int_0^{t_0} \operatorname{sen} \omega(t - \tau) d\tau$$

$$d(t) = \frac{p_0}{m\omega} \frac{1}{-\omega} \int_0^{t_0} \operatorname{sen} \omega(t - \tau) (-\omega) d\tau$$

$$d(t) = \frac{p_0}{m\omega^2} [\cos \omega(t - \tau)] \Big|_0^{t_0}$$

$$d(t) = \frac{p_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

EJEMPLO B.- Obtener la respuesta del sistema no amortiguado cuya fuerza  $p(t)$  se indica en la Figura.



$$p(t) = \begin{cases} \frac{p_0}{t_0} t & ; 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & ; t > t_0 \end{cases}$$

$$d(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \operatorname{sen} \omega(t - \tau) d\tau$$

$$d(t) = \frac{p_0}{m\omega t_0} \int_0^t \tau \operatorname{sen} \omega(t - \tau) d\tau$$

Integrando por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

sea:  $u = \tau$

$$v = \int \operatorname{sen} \omega(t - \tau) d\tau$$

$$du = d\tau$$

$$v = \frac{1}{\omega} \cos \omega(t - \tau)$$

$$\int_0^t \tau \operatorname{sen} \omega(t - \tau) d\tau = \frac{\tau}{\omega} \cos \omega(t - \tau) - \frac{1}{\omega} \int_0^t \cos \omega(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

$$I = \frac{1}{\omega} \int_0^t \cos \omega(t - \tau) d\tau = - \frac{1}{\omega^2} \operatorname{sen} \omega(t - \tau) \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau \operatorname{sen} \omega(t - \tau) d\tau &= \left[ \frac{\tau}{\omega} \cos \omega(t - \tau) + \frac{1}{\omega^2} \operatorname{sen} \omega(t - \tau) \right]_0^t \\ &= \frac{1}{\omega} \left[ t - \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \right] \end{aligned}$$

Finalmente:

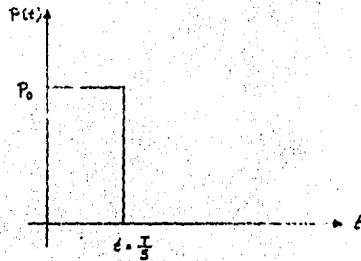
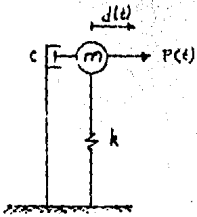
$$d(t) = \frac{p_0}{m\omega t_0} \int_0^t \tau \operatorname{sen} \omega(t - \tau) = \frac{p_0}{t_0 m \omega^2} \left[ t - \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \right]$$

pero:

$$\frac{p_0}{t_0} = a$$

$$d(t) = \frac{a}{m\omega} \int_0^t \tau \operatorname{sen} \omega(t - \tau) = \frac{a}{m\omega^2} \left[ t - \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \right]$$

EJEMPLO 9.- Para el sistema amortiguado de 1 grado de libertad, cuyos datos se indican, obtener: a. amortiguamiento, b. desplazamiento para  $t = T/5$  y c. fuerza restauradora para  $t = T/5$ , siendo  $T$  el periodo.



Datos:

- $m = 55 \text{ kgf-seg}^2/\text{cm}$
- $k = 34741 \text{ kg/cm}$
- $\zeta = 0.05$
- $P_0 = 1000 \text{ kgf}$

a.-

$$w = \sqrt{k/m} = \sqrt{34741/55} = 25.13 \text{ rad/seg}$$

$$c = 2\zeta mw = 2 \times 0.05 \times 55 \times 25.13 = 138.23 \text{ kgf-seg/cm}$$

b.-

$$d(t) = \frac{1}{mw'} \int_0^t p(\tau) \exp[-\zeta w(t - \tau)] \text{sen } w'(t - \tau) d\tau$$

como  $w \approx w'$  se tomará  $w$  por  $w'$

$$d(t) = \frac{P_0}{mw} \underbrace{\int_0^t \exp[-\zeta w(t - \tau)] \text{sen } w(t - \tau) d\tau}_{(A)} \quad (1)$$

Integrando (A) por partes:  $\int u dv = uv - \int v du$

donde:

$$u = \exp[-\zeta w(t - \tau)] \quad du = -\zeta w \exp[-\zeta w(t - \tau)] d\tau$$

$$v = 1/w \cos w(t - \tau) \quad dv = -\text{sen } w(t - \tau) d\tau$$

Entonces:

$$A = \exp.[-\zeta w(t - \tau)] \left\{ \frac{1}{w} \cos w(t - \tau) \right\} - \zeta \int \exp.[-\zeta w(t - \tau)] \cos w(t - \tau) dt \quad (2)$$

(B)

Integrando (B) por partes:  $\int u dv = uv - \int v du$

donde:

$$u = \exp.[-\zeta w(t - \tau)] \quad du = -\zeta w \exp.[-\zeta w(t - \tau)] dt$$

$$v = -1/w \operatorname{sen} w(t - \tau) \quad dv = \cos w(t - \tau) dt$$

Entonces:

$$B = \exp.[-\zeta w(t - \tau)] \left\{ -1/w \operatorname{sen} w(t - \tau) \right\} + \zeta \int \exp.[-\zeta w(t - \tau)] \operatorname{sen} w(t - \tau) dt \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$A = \exp.[-\zeta w(t - \tau)] \left\{ \frac{1}{w} \cos w(t - \tau) + \zeta \left( \frac{1}{w} \operatorname{sen} w(t - \tau) \right) \right\} - \zeta A$$

Despejando A:

$$A = \frac{1}{w(1 + \zeta^2)} \exp.[-\zeta w(t - \tau)] \left\{ \cos w(t - \tau) + \zeta \operatorname{sen} w(t - \tau) \right\} \Big|_0^t$$

Sustituyendo límites:

$$A = \frac{1}{w(1 + \zeta^2)} [1 - e^{-\zeta w t} (\zeta \operatorname{sen} w t + \cos w t)] \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1):

$$d(t) = \frac{p_0}{m w^2 (1 + \zeta^2)} [1 - e^{-\zeta w t} (\zeta \operatorname{sen} w t + \cos w t)] \quad (1')$$

donde:

$$p_0 = 1000 \text{ kgf}$$

$$m = 55 \text{ kgf-seg}^2/\text{cm}$$

$$w = 25.13 \text{ rad/seg}$$

$$\zeta = 0.05$$



$$T = 0.25 \text{ seg} \quad t = T/10 = 0.25/10 = 0.025 \text{ seg}$$

Sustituyendo valores en la ecuación (1') y realizando operaciones, se tiene:

$$d(t) = 0.0053843 \text{ cm} \quad (5)$$

Derivando la ecuación (1') con respecto a t:

$$\dot{d}(t) = \frac{P_0}{m\omega^2(1 + \zeta^2)} [e^{-\zeta\omega t}(1 - \zeta^2)\omega \text{ sen } \omega t] \quad (6)$$

Nuevamente, sustituyendo valores en la ecuación (6) y realizando operaciones, se tiene:

$$\dot{d}(t) = 0.4121 \text{ cm/seg} \quad (7)$$

Para cada valor de  $t > T/10$ , la estructura tiene un desplazamiento  $d(t)$  de acuerdo a la ecuación para vibraciones libres con amortiguamiento (ver ecuación 16, sección II.C.3), con las condiciones iniciales  $d_0$  y  $\dot{d}_0$  encontradas en (5) y (7).

En este problema se pide  $d(t = T/5)$

$$\text{C.I.} \begin{cases} d_0 = 0.0053843 \text{ cm} \\ \dot{d}_0 = 0.4121 \text{ cm/seg} \end{cases}$$

Ecuación para vibraciones libres con amortiguamiento:

(ecuación 16 de la sección II.C.3)

$$d(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[ \frac{\dot{d}_0 + \zeta\omega d_0}{\omega'} \text{ sen } \omega' t + d_0 \cos \omega' t \right] \quad (8)$$

donde:

$$\omega' = \omega\sqrt{1 - \zeta^2} = 25.13\sqrt{1 - (0.05)^2} = 25.1013 \text{ rad/seg}$$

$$t = T/5 = 0.25/5 = 0.05 \text{ seg}$$

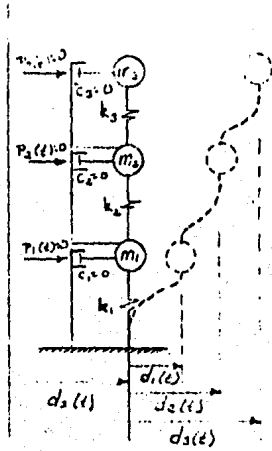
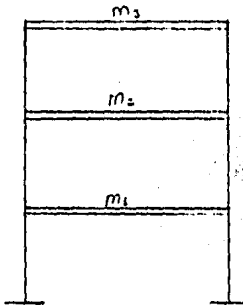
Sustituyendo valores en (8) y realizando operaciones, se tiene:

$$d(t=0.05) = 0.01647 \text{ cm}$$

$$c.- \quad f_r(t = T/5 = 0.05) = kd(t = T/5 = 0.05)$$

$$f_r(t = 0.05) = 34741 \times 0.01647 = 572.18 \text{ kgf}$$

EJEMPLO 10.- Para la estructura mostrada en la figura, calcular los modos de vibración por el método de valores y vectores característicos.

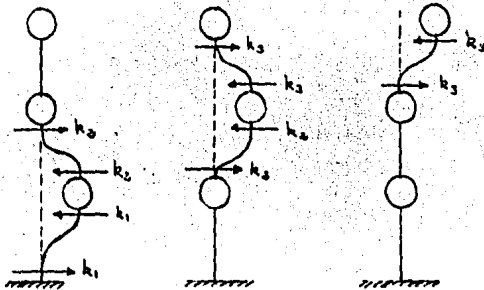


Ecuación general en forma matricial:

$$M\ddot{D} + K D = 0$$

(1)

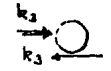
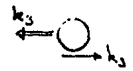
-Obtención de la matriz K



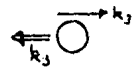
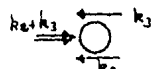
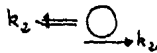
Del equilibrio:

Nivel 3

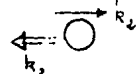
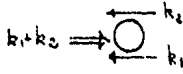
0



Nivel 2



Nivel 1



C

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$D(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1):

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_1(t) \\ \ddot{d}_2(t) \\ \ddot{d}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Proponiendo como solución:

$$D = \rho \operatorname{sen} \omega t \quad (5)$$

$$\dot{D} = \rho \omega \cos \omega t \quad (6)$$

$$\ddot{D} = \rho (-\omega^2 \operatorname{sen} \omega t) = -\omega^2 (\rho \operatorname{sen} \omega t) = -\omega^2 D \quad (7)$$

Sustituyendo (5) y (7) en (1):

$$M \rho (-\omega^2 \operatorname{sen} \omega t) + K \rho \operatorname{sen} \omega t = 0$$

La ecuación característica:

$$K \rho - \omega^2 M \rho = 0 \quad (8)$$

$$[K - \omega^2 M] \rho = 0 \quad (9)$$

Para encontrar una solución distinta de la trivial:

$$\operatorname{Det} [K - \omega^2 M] = 0$$

$$[K - w^2 M] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - w^2 m_1 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - w^2 m_2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - w^2 m_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Por simplicidad se considerará:

$$k_1 = k_2 = k_3 = k$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m$$

$$[K - w^2 M] = \begin{bmatrix} 2k - w^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - w^2 m & -k \\ 0 & -k & k - w^2 m \end{bmatrix} \quad (10')$$

Realizando el cambio de variable:

$$w^2 = z$$

$$[K - zm] = \begin{bmatrix} 2k - zm & -k & 0 \\ -k & 2k - zm & -k \\ 0 & -k & k - zm \end{bmatrix}$$

$$\text{Det } [K - zm] = (2k - zm)(2k - zm)(k - zm) - k^2(2k - zm) - k^2(k - zm) = 0$$

Realizando operaciones y simplificando tenemos:

$$-z^3 m^3 + 5z^2 m^2 k - 6z m k^2 + k^3 = 0$$

Dividiendo entre  $-m^3$

$$z^3 - 5z^2(k/m) + 6z(k^2/m^2) - (k^3/m^3) = 0$$

Si  $k/m = \alpha$

$$z^3 - 5z^2 \alpha + 6z \alpha^2 - \alpha^3 = 0 \quad (11)$$

La ecuación (11) es conocida como "ecuación característica de la matriz". El problema consiste en encontrar los valores de  $z$  que la satisfagan.

El grado de la ecuación característica coincide con el número de grados de libertad que determina el número de masas que compone la estructura.

Solución de la ecuación (11)

Aplicando el método de Newton Raphson para reducir el grado del polinomio:

$$z = z_0 - f(z)/f'(z)$$

donde:

$z_0$  = solución propuesta para la ecuación

$z$  = solución corregida

Primera iteración:

Proponemos  $z = 0.25\alpha$

$$f(z) = (0.25\alpha)^3 - 5(0.25\alpha)^2\alpha + 6(0.25\alpha)\alpha^2 - \alpha^3 = 0.203125\alpha^3$$

$$f'(z) = 3(0.25\alpha)^2 - 10(0.25\alpha)\alpha + 6\alpha^2 = 3.6875\alpha^2$$

$$z = 0.25\alpha - (0.203125\alpha^3/3.6875\alpha^2) = 0.1949\alpha$$

Segunda iteración:

Proponemos  $z = 0.1949\alpha$

$$f(z) = (0.1949\alpha)^3 - 5(0.1949\alpha)^2\alpha + 6(0.1949\alpha)\alpha^2 - \alpha^3 = -0.0131\alpha^3$$

$$f'(z) = 3(0.1949\alpha)^2 - 10(0.1949\alpha)\alpha + 6\alpha^2 = 4.1648\alpha^2$$

$$z = 0.1949\alpha - (-0.0131\alpha^3/4.1648\alpha^2) = 0.1981\alpha$$

Tercera iteración:

Proponemos  $z = 0.1981\alpha$

$$f(z) = (0.1981\alpha)^3 - 5(0.1981\alpha)^2\alpha + 6(0.1981\alpha)\alpha^2 - \alpha^3 = -43.405 \times 10^{-6}\alpha^3$$

$$f'(z) = 3(0.1981\alpha)^2 - 10(0.1981\alpha)\alpha + 6\alpha^2 = 4.137\alpha^2$$

$$z = 0.1981\alpha - (-43.405 \times 10^{-6}\alpha^3/4.137\alpha^2) = 0.1981\alpha$$

Como  $z = \text{propuesto}$ , tenemos una raíz

$$z = 0.1981\alpha$$

Aplicando la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -5\alpha & +6\alpha^2 & -\alpha^3 & 0.1981\alpha \\ & 0.1981\alpha & -0.9513\alpha^2 & \alpha^3 & \\ \hline 1 & -4.8019\alpha & 5.0487\alpha^2 & 0 & \end{array}$$

La nueva ecuación característica será:

$$z^2 - 4.8019z\alpha + 5.0487\alpha^2 = 0$$

Las soluciones de esta nueva ecuación son:

$$z_2 = 1.5549\alpha$$

$$z_3 = 3.2470\alpha$$

Como  $w^2 = z$

$$\alpha = k/m$$

Tenemos:

$$w^2_1 = 0.1981 \text{ k/m}$$

$$w^2_2 = 1.5549 \text{ k/m}$$

$$w^2_3 = 3.2470 \text{ k/m}$$

Que constituyen las frecuencias naturales de vibración para cada modo de vibrar.

Obtención del primer modo de vibrar:

Sustituyendo  $w^2_1 = 0.1981 \text{ k/m}$  en (9)

$$\begin{bmatrix} 2k - (0.1981k/m)m & -k & 0 \\ -k & 2k - (0.1981k/m)m & -k \\ 0 & -k & k - (0.1981k/m)m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Simplificando

$$\begin{bmatrix} 1.8019 & -1 & 0 \\ -1 & 1.8019 & -1 \\ 0 & -1 & 0.8019 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De donde obtenemos:

$$1.8019\rho_1 - \rho_2 = 0 \quad (12)$$

$$-\rho_1 + 1.8019\rho_2 - \rho_3 = 0 \quad (13)$$

$$-\rho_2 + 0.8019\rho_3 = 0 \quad (14)$$

Si  $\rho_1 = 1$

$$\text{De la ecuación (12): } \rho_2 = 1.8019$$

$$\text{De la ecuación (14): } \rho_3 = 1.8019/0.8019 = 2.2470 = \rho_3$$

$$\rho_1 = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix}$$

Obtención del segundo modo de vibrar:

Sustituyendo  $\omega^2_2 = 1.5549 \text{ k/m}$  en (9)

$$\begin{bmatrix} 2k - (1.5549k/m)m & & -k & & 0 \\ & -k & & 2k - (1.5549k/m)m & -k \\ & & 0 & & -k & & k - (1.5549k/m)m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Simplificando

$$\begin{bmatrix} 0.4451 & -1 & 0 \\ -1 & 0.4451 & -1 \\ 0 & -1 & -0.5549 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De donde obtenemos:

$$0.4451\rho_1 - \rho_2 = 0 \quad (15)$$

$$-\rho_1 + 0.4451\rho_2 - \rho_3 = 0 \quad (16)$$

$$-\rho_2 - 0.5549\rho_3 = 0 \quad (17)$$

Si  $\rho_1 = 1$

De la ecuación (15):  $\rho_2 = 0.4451$

De la ecuación (17):  $\rho_3 = -0.4451/0.5549 = -0.8021 = \rho_3$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.4451 \\ -0.8021 \end{pmatrix}$$

Obtención del tercer modo de vibrar:

Sustituyendo  $w^3 = 3.2470 \text{ k/m}$  en (9)

$$\begin{bmatrix} 2k - (3.2470k/m)m & -k & 0 \\ -k & 2k - (3.2470k/m)m & -k \\ 0 & -k & k - (3.2470k/m)m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Simplificando

$$\begin{bmatrix} -1.247 & -1 & 0 \\ -1 & -1.247 & -1 \\ 0 & -1 & -2.247 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos:

$$-1.247\rho_1 - \rho_2 = 0 \quad (18)$$

$$-\rho_1 - 1.247\rho_2 - \rho_3 = 0 \quad (19)$$

$$-\rho_2 - 2.247\rho_3 = 0 \quad (20)$$

Si  $\rho_1 = 1$

De la ecuación (18):  $\rho_2 = -1.247$

De la ecuación (20):  $\rho_3 = 1.247/2.247 = 0.555$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ -1.247 \\ 0.555 \end{pmatrix}$$

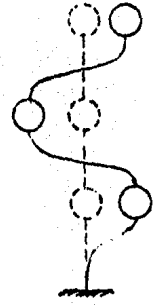
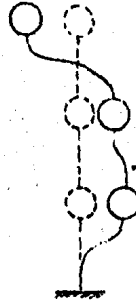
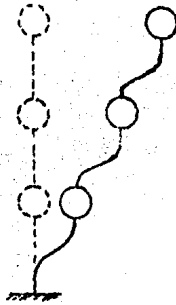
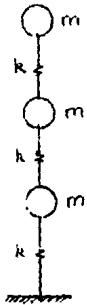


Por lo tanto, la matriz de configuraciones modales será:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.000 \\ 1.8019 & 0.4451 & -1.247 \\ 2.2470 & -0.8021 & 0.555 \end{bmatrix}$$

Esquemáticamente, la configuración para cada modo de vibrar

es:



$$\mathbf{f}_1 = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.4451 \\ -0.8021 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_3 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.247 \\ 0.555 \end{Bmatrix}$$

$$w_1 = \sqrt{0.1981k/m}$$

$$w_2 = \sqrt{1.5549k/m}$$

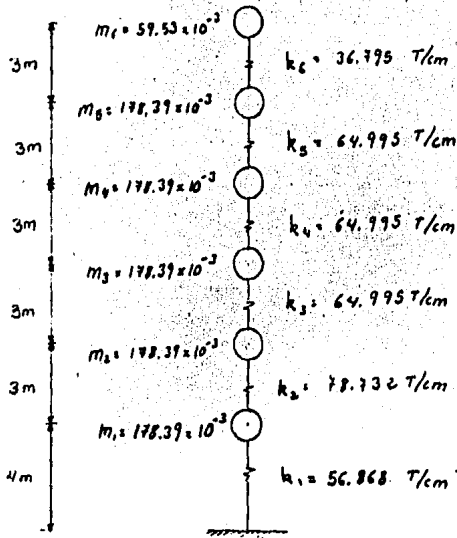
$$w_3 = \sqrt{3.247k/m}$$

$$T_1 = 2\pi/w_1$$

$$T_2 = 2\pi/w_2$$

$$T_3 = 2\pi/w_3$$

EJEMPLO 11.- Calcular la frecuencia y configuración modal del primer modo de vibrar de la estructura representada por el modelo matemático siguiente:



Solución:

Antes de proceder a realizar la tabulación para seguir los pasos del método, conviene uniformizar a un mismo valor las masas y las rigideces.

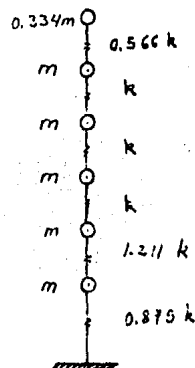
En este caso se uniformará a:

$$m = 178.39 \times 10^{-3} \text{ (T-seg}^2\text{) / cm}$$

$$k = 64.995 \text{ T/cm}$$

El modelo matemático simplificado

resulta:



Cálculo del primer modo de vibrar

1ª iteración

N	E	m	k	$\phi^2$	$f_1/w^2$	$\eta^2/w^2$	$\delta/w^2$	$\phi^2/w^2$	$\phi^2$
6		m		3.940	1.316m			54.577m/k	3.349
6			0.566k			1.316m	2.325m/k		
5		m		3.824	3.824m			52.252m/k	3.207
5			k			5.140m	5.140m/k		
4		m		3.412	3.412m			47.112m/k	2.891
4			k			8.552m	8.552m/k		
3		m		2.765	2.765m			38.560m/k	2.366
3			k			11.317m	11.317m/k		
2		m		1.941	1.941m			27.243m/k	1.672
2			1.211k			13.258m	10.948m/k		
1		m		1.000	m			16.295m/k	1.000
1			0.875k			14.258m	16.295m/k		
								0	

$k = 64.995 \text{ T/cm}$

$m = 178.39 \times 10^{-3} \text{ T-seg}^2/\text{cm}$

2ª Iteración

N	E	m	k	$\beta^m$	$f_1/u^2$	$\eta/u^2$	$\delta/u^2$	$\beta^m/u^2$	$\beta^m$
6		m		0.334m	3.349	1.119m		46.403m/k	3.313
6			k	0.566k		1.119m	1.977m/k		
5		m		3.207	3.207m			44.426m/k	3.172
5			k			4.326m	4.326m/k		
4		m		2.891	2.891m			40.100m/k	2.863
4			k			7.217m	7.217m/k		
3		m		2.366	2.366m			32.883m/k	2.348
3			k			9.583m	9.583m/k		
2		m		1.672	1.672m			23.300m/k	1.664
2			k	1.211k		11.255m	9.294m/k		
1		m		1.000	m			14.006m/k	1.000
1			k	0.875k		12.225m	14.006m/k		
								0	

3ª Iteración

N	E	m	k	$\beta^2$	$f_s/n^2$	$\eta/n^2$	$\delta/n^2$	$\phi^2/n^2$	$\xi^2$
6		0.334m		3.313	1.107m			45.968m/k	3.309
6		0.566k				1.107m	1.956m/k		
5		m		3.172	3.172m			44.012m/k	3.169
5			k			4.279m	4.279m/k		
4		m		2.863	2.863m			39.733m/k	2.861
4			k			7.142m	7.142m/k		
3		m		2.348	2.348m			32.591m/k	2.346
3			k			9.490m	9.490m/k		
2		m		1.664	1.664m			23.101m/k	1.663
2		1.211k				11.154m	9.211m/k		
1		m		1.000	m			13.890m/k	1.000
1		0.875k				12.154m	13.890m/k		
								0	

4<sup>a</sup> Iteración

N	E	a	k	$\phi^0$	$f_c/u^2$	$\sqrt{g}u^2$	$\delta/u^2$	$\phi^0/u^2$	$\bar{\phi}^0$
6		0.334m		3.309	1.105m			45.923m/k	3.309
6			0.546k			1.105m	1.952m/k		
5		a		3.169	3.169m			43.971m/k	3.168
5			k			4.274m	4.274m/k		
4		a		2.861	2.861m			39.697m/k	2.860
4			k			7.135m	7.135m/k		
3		a		2.346	2.346m			32.562m/k	2.346
3			k			9.481m	9.481m/k		
2		a		1.663	1.663m			23.081m/k	1.663
2			k	1.211k		11.144m	9.202m/k		
1		a		1.000	a			13.879m/k	1.000
1			k	0.875k		12.144m	13.879m/k		
								0	

$$\phi_1 = \begin{cases} 1.000 \\ 1.663 \\ 2.346 \\ 2.860 \\ 3.168 \\ 3.309 \end{cases}$$

$$\bar{\omega}_1^2 = (0.439/h)(k/m) = 0.072 \times 64.995/178.39 \times 10^{-3} = 26.458 \text{ rad/seg}^2$$

$$\omega_1 = 5.143 \text{ rad/seg}$$

$$\bar{T}_1 = 2/u_1 = 2/5.143 = 1.217 \text{ seg}$$

EJEMPLO 12.- Para la estructura representada por el modelo matemático del Ejemplo 11, calcular la configuración modal del segundo y tercer modo y sus respectivas frecuencias naturales y periodos asociados al segundo y tercer modo de vibrar.

Cálculo del segundo modo de vibrar:

N	E	m	k	$\phi_1$	$\phi_2$	$a_1\phi_1$	$a_2 - a_1\phi_1$	$f/u^2$	$V/u^2$	$\delta/u^2$	$\phi_0/u^2$	$\beta_0$
6		10.334m		3.309	-1.377	0.0109	-1.3879	-0.4636m			-2.5980m/k	-1.4387
6		0.566k						-0.4636m		-0.8191m/k		
5		m		3.168	-1.093	0.0104	-1.1034	-1.1034m			-1.7789m/k	-0.9831
5		k						-1.5670m		-1.5670m/k		
4		m		2.860	-0.127	0.0094	-0.1364	-0.1364m			-0.2110m/k	-0.1173
4		k						-1.7034m		-1.7034m/k		
3		m		2.346	0.915	0.0077	0.9073	0.9073m			1.4915m/k	0.8239
3		k						-0.7961m		-0.7961m/k		
2		m		1.643	1.385	0.0055	1.3795	1.3795m			2.2876m/k	1.2648
2		1.211k						0.5834m		0.4810m/k		
1		m		1.000	1.000	0.0033	0.9967	0.9967m			1.9058m/k	1.0000
1		0.875k						1.5801m		1.8058m/k		
											0	

$$a_1 = \frac{\sum m_i \phi_{1i} \phi_{2i}}{\sum m_i (\phi_{1i})^2}$$

$$a_1 = \frac{0.102}{31.142} = 0.0033$$

2<sup>a</sup> iteración

N	E	a	k	$\phi_i$	$\phi_{n2}$	$a_1 \phi_i$	$a_2 - a_1 \phi_i$	$t/u^2$	$\eta/u^2$	$\delta/u^2$	$\phi_e/u^2$	$\phi_e$
6		10.334m		3.309	-1.4387	-0.0002	-1.4385	-0.4805m			-2.5053m/k	-1.4513
6		10.366k							-0.4805m	-0.8489m/k		
5				3.168	-0.9851	-0.0002	-0.9849	-0.9849m			-1.6564m/k	-0.9595
5			k						-1.4654m	-1.4654m/k		
4				2.868	-0.1173	-0.0002	-0.1171	-0.1171m			-0.1910m/k	-0.1106
4			k						-1.5825m	-1.5825m/k		
3				2.346	0.8259	-0.0002	0.8261	0.8261m			1.3915m/k	0.8061
3			k						-0.7364m	-0.7364m/k		
2				1.663	1.2668	-0.0001	1.2669	1.2669m			2.1479m/k	1.2442
2			k						0.5105m	0.4216m/k		
1				1.000	1.0000	-0.0001	1.0001	1.0001m			1.7263m/k	1.0000
1			k						1.5105m	1.7263m/k		
											0	

$$a_1 = \frac{\sum m_s \rho_{s1} \phi_{s1}}{\sum m_s (\rho_{s1})^2}$$

$$a_1 = \frac{-0.0021}{31.1422} = -0.0001$$

$$\phi_n = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.244 \\ 0.806 \\ -0.111 \\ -0.960 \\ -1.451 \end{pmatrix}$$

$$\omega_n^2 = (3.3457/6)k/m = 0.5910 \times 64.995/(178 \times 10^{-3}) = 215.308 \text{ rad/seg}^2$$

$$\bar{\omega}_n = 14.673 \text{ rad/seg}$$

$$\bar{T}_n = 2 / \bar{\omega}_n = 2 / 14.673 = 0.428 \text{ seg}$$



Cálculo del tercer modo de vibrar

N	E	a	k	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_{21}$	$a_1 \phi_1$	$a_2 \phi_2$	$\phi_{21}$	$f/w^2$	$V/w^2$	$\delta/w^2$	$\phi_{21} w^2$	$\phi_{21}$
6		a	k	13.309	-1.451	1.2731	0.0168	-0.0192	1.2755	0.4260m			1.0907m/k	1.4713
6			k	0.566k							0.4260m	0.7527m/k		
5		a	k	13.168	-0.960	0.6893	0.0160	-0.0123	0.6856	0.6856m			0.3380m/k	0.4503
5			k								1.1116m	1.1116m/k		
4		a	k	12.860	-0.111	-1.1880	0.0143	-0.0015	-1.2010	-1.2010m			-0.7736m/k	-1.0436
4			k								-0.0894m	-0.0894m/k		
3		a	k	12.346	0.806	-1.0385	0.0119	0.0107	-1.0611	-1.0611m			-0.6842m/k	-0.9230
3			k								-1.1505m	-1.1505m/k		
2		a	k	11.663	1.244	0.8424	0.0084	0.0165	0.8175	0.8175m			0.4663m/k	0.6290
2			k	1.211k							-0.3330m	-0.2750m/k		
1		a	k	11.000	1.000	1.0000	0.0051	0.0133	0.9816	0.9816m			0.7413m/k	1.0000
1			k	0.875k							0.6486m	0.7413m/k		
													0	

$$a_1 = \frac{\sum m_k \phi_{2k} \phi_{21}}{\sum m_k (\phi_{2k})^2} = \frac{0.1577}{31.1422} = 0.0051$$

$$a_2 = \frac{\sum m_k \phi_{2k} \phi_{21}}{\sum m_k (\phi_{2k})^2} = \frac{0.0641}{4.8343} = 0.0133$$

2ª iteración

N	E	m	k	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$a_1 \phi_1$	$a_2 \phi_2$	$\phi_3$	$f/w^2$	$\eta/w^2$	$\delta/w^2$	$\beta_1/w^2$	$\beta_2$
6		m	10.334m	13.3091	-1.4511	1.47131	-0.00551	-0.00271	1.47951	0.4942m			1.1273m/k	1.5873
6		k	10.566k							0.4942m	0.8731m/k			
5		m		13.1681	-0.9601	0.45031	-0.00521	-0.00181	0.45731	0.4573m			0.2542m/k	0.3579
5		k								0.9515m	0.9515m/k			
4		m		12.8601	-0.1111	-1.04361	-0.00471	-0.00021	-1.03871	-1.0387m			-0.6973m/k	-0.9818
4		k								-0.0872m	-0.0872m/k			
3		m		12.3461	0.8061	-0.92301	-0.00391	0.00151	-0.92061	-0.9206m			-0.6101m/k	-0.8591
3		k								-1.0078m	-1.0078m/k			
2		m		11.6631	1.2441	0.62901	-0.00271	0.00231	0.62941	0.6294m			0.3977m/k	0.5600
2		k	11.211k							-0.3784m	-0.3125m/k			
1		m		11.0001	1.0001	1.00001	-0.00171	0.00191	0.99981	0.9998m			0.7102m/k	1.0000
1		k	10.875k							0.6214m	0.7102m/k			
													0	

$$a_1 = \frac{\sum m_i \phi_{1i} \phi_{2i}}{\sum m_i (\phi_{1i})^2} = \frac{-0.0514}{31.1422} = -0.0017$$

$$a_2 = \frac{\sum m_i \phi_{2i} \phi_{3i}}{\sum m_i (\phi_{2i})^2} = \frac{0.0090}{4.8343} = 0.0019$$

3ra iteración

N	E	m	k	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi^{\circ 2}$	$a_1 \phi_1$	$a_2 \phi_2$	$\phi^{\circ 3}$	$f/n^2$	$V/n^2$	$S/n^2$	$\phi_c/n^2$	$\phi_c$
6		m	10.334m	13.309	-1.451	1.5873	-0.0004	-0.0001	1.5878	0.5303m			1.1534m/k	1.6586
6		k	10.366k								0.5303m	0.9369m/k		
5		m	13.168	-0.960	0.3579	-0.0004	-0.0001	0.3584	0.3584m				0.2165m/k	0.3113
5		k								0.8887m	0.8887m/k			
4		m	12.860	-0.111	0.9818	-0.0004	0.0000	-0.9814	-0.9814m				-0.6722m/k	-0.9666
4		k								-0.0927m	-0.0927m/k			
3		m	12.346	0.806	0.8591	-0.0003	0.0001	-0.8589	-0.8589m				-0.5795m/k	-0.8333
3		k								-0.9516m	-0.9516m/k			
2		m	11.663	1.244	0.5600	-0.0002	0.0001	0.5601	0.5601m				0.3721m/k	0.3351
2		k	11.211k							-0.3915m	-0.3233m/k			
1		m	1.000	1.000	1.0000	-0.0001	0.0001	1.0000	a				0.6954m/k	1.0000
1		k	10.875k							0.6085m	0.6954m/k			
														0

$$a_1 = \frac{\sum m_i \phi_{1i} \phi_{3i}}{\sum m_i (\phi_{1i})^2} = \frac{-0.0040}{31.1422} = -0.0001$$

$$a_2 = \frac{\sum m_i \phi_{2i} \phi_{3i}}{\sum m_i (\phi_{2i})^2} = \frac{0.0003}{4.8343} = 0.00007$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.3351 \\ -0.8333 \\ -0.9666 \\ 0.3113 \\ 1.6586 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\omega}_2 = (8.9154/6)k/m = 1.4859 \times 64.995 / (178 \times 10^{-3}) = 541.376 \text{ rad/seg}^2$$

$$\bar{\omega}_2 = 23.267 \text{ rad/seg}$$

$$T_2 = 2 / \bar{\omega}_2 = 2 / 23.267 = 0.270 \text{ seg}$$

EJEMPLO 13.- Utilizando el método de Holzer, calcular el segundo y tercer modo de vibrar de la estructura representada por el modelo matemático del Ejemplo 11.

\* Cálculo del segundo modo de vibrar

Utilizando:

$$w^2_2 = 9w^2_1$$

De la solución del Ejemplo 11:  $w^2_1 = 26.658 \text{ rad/seg}^2$

$$w^2_{2 \text{ sup}} = 9 \times 26.658 = 240 \text{ rad/seg}^2$$

N	E	m	k	$9w^2_{\text{sup}}$	$\Delta X$	$X_1$	$F = 9w^2_{\text{sup}} X$	V	Dif.
6		0.0595		14.287		-1.126	-16.087		-14.661
	6		36.795		-0.039			-1.426	
5		0.1784		42.814		-1.087	-46.537		
	5		64.995		-0.738			-47.963	
4		0.1784		42.814		-0.349	-14.923		
	4		64.995		-0.968			-62.886	
3		0.1784		42.814		0.619	26.502		
	3		64.995		-0.560			-36.402	
2		0.1784		42.814		1.179	50.456		
	2		78.732		0.179			14.054	
1		0.1784		42.814		1.900	42.814		
	1		56.868		1.000			56.868	

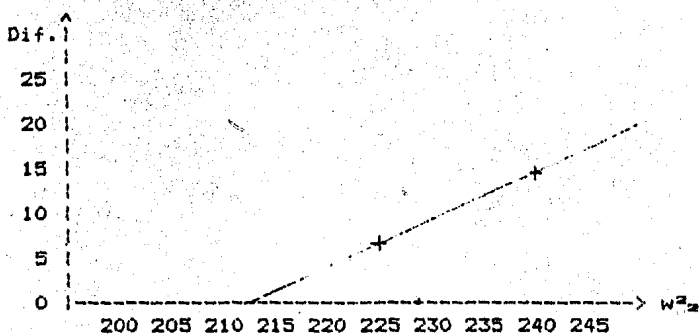
$$|w^2_{2 \text{ sup}} = 240|$$

2ª iteración

$$\omega_{2 \text{ sup}} = 225 \text{ rad/seg}^2$$

N	E	a	k	$m^2_{\text{sup}}$	$\Delta X$	$X_i$	$F = m^2_{\text{sup}} X$	V	Dif.
6		0.0595		13.394		-1.326	-17.763		-6.423
6			36.795		-0.308			-11.340	
5		0.1784		40.138		-1.018	-40.875		
5			64.995		-0.803			-52.215	
4		0.1784		40.138		-0.215	-8.646		
4			64.995		-0.936			-60.861	
3		0.1784		40.138		0.721	28.924		
3			64.995		-0.491			-31.937	
2		0.1784		40.138		1.212	48.667		
2			78.732		0.212			16.750	
1		0.1784		40.138		1.000	40.138		
1			56.868		1.000			56.868	

$$\omega_{2 \text{ sup}} = 225$$



∴  $\omega_{2 \text{ sup}}$  supuesta será: 213 rad/seg<sup>2</sup>

3<sup>ra</sup> iteración

$$\omega_{sup}^2 = 213 \text{ rad/seg}^2$$

N	E	a	k	$\omega_{sup}^2$	$\Delta Y$	$Y_i$	$F = \omega_{sup}^2 Y_i$	V	FI	VAR
6	0.0595		12.680		-1.465		-10.582	0.531	27.223	
6		36.795			-0.519			-19.113		9.920
5	0.1784		37.997		-0.946		-33.956		34.014	
5		64.995			-0.847			-55.069		46.643
4	0.1784		37.997		-0.099		-3.773		0.374	
4		64.995			-0.905			-58.884		53.254
3	0.1784		37.997		0.806		30.611		24.672	
3		64.995			-0.434			-28.233		12.253
2	0.1784		37.997		1.240		47.104		58.409	
2		78.732			0.240			18.871		4.529
1	0.1784		37.997		1.000		37.997		37.997	
1		56.868			1.000			56.868		56.868
								$\omega_{sup}^2 = 213$		$\sum$ 182.689
										183.467

Empleando el cociente de Grandall:

$$\bar{\omega}^2 = \omega^2 \frac{V \cdot \Delta X}{FX} = 213 * \frac{183.467}{182.689} = 213.907 \text{ rad/seg}^2$$

Por lo tanto, para la siguiente iteración, se considerará:

$$\omega_{sup}^2 = 213.907 \text{ rad/seg}^2$$

4<sup>a</sup> iteración

$$\omega^2_{z \text{ sup}} = 213.907 \text{ rad/seg}^2$$

N	E	a	k	$\omega^2_{\text{sup}}$	$\Delta X$	$X_1$	$F = \omega^2_{\text{sup}} X$	V	Dif.
6		0.0595		12.734		-1.454	-18.335		-0.045
6			36.795		-0.503			-18.490	
5		0.1784		38.159		-0.953	-36.366		
5			64.995		-0.844			-54.856	
4		0.1784		38.159		-0.109	-4.160		
4			64.995		-0.908			-59.015	
3		0.1784		38.159		0.799	30.498		
3			64.995		-0.439			-28.317	
2		0.1784		38.159		1.238	47.227		
2			78.732		0.238			18.709	
1		0.1784		38.159		1.000	38.159		
1			56.868		1.000			56.868	

$$\omega^2_{z \text{ sup}} = 213.097$$

Como puede observarse, la diferencia final de esta última iteración es despreciable, por lo que:

$$\omega^2_z = 213.097 \text{ rad/seg}^2$$

$$\omega_z = 14.626 \text{ rad/seg}$$

$$T_z = 2\pi/\omega_z = 2\pi/14.626 = 0.43 \text{ seg.}$$

\* Cálculo del tercer modo de vibrar

Utilizando:

$$w^2_3 = 25w^2_1$$

De la solución del Ejemplo 11:  $w^2_1 = 26.658 \text{ rad/seg}^2$

$$w^2_{3 \text{ sup}} = 25 \times 26.658 = 666.45 \text{ rad/seg}^2$$

Por facilidad, se supondrá para la primera iteración:

$$w^2_{3 \text{ sup}} = 600 \text{ rad/seg}^2$$

N	E	n	k	$\omega^2_{sup}$	$\Delta I$	$\chi_1$	$F = \omega^2_{sup} I$	V	Dif.
6		0.0595		35.718		1.161	41.454		26.420
	6		36.795		0.409			15.034	
5		0.1784		107.034		0.752	80.539		
	5		64.995		1.470			95.573	
4		0.1784		107.034		-0.718	-76.861		
	4		64.995		0.288			18.712	
3		0.1784		107.034		-1.066	-107.713		
	3		64.995		-1.369			-89.001	
2		0.1784		107.034		0.363	38.835		
	2		78.732		-0.637			-50.166	
1		0.1784		107.034		1.000	107.034		
	1		56.868		1.000			56.868	

$$w^2_{3 \text{ sup}} = 600$$

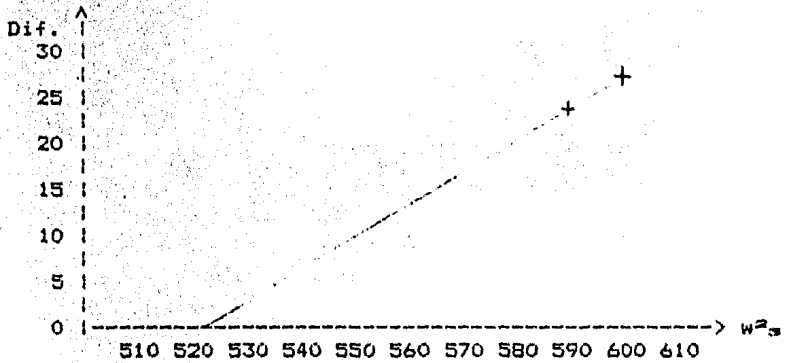


2<sup>a</sup> iteración

$$\omega_{sup}^2 = 590 \text{ rad/seg}^2$$

N	E	a	k	$\omega_{sup}^2$	$\Delta X$	$X_i$	$F = \omega_{sup}^2 X$	V	Dif.
6		0.0595		35.123		1.278	44.873		23.436
6	F		36.795		0.583			21.437	
5		0.1784		105.250		0.695	73.103		
5			64.995		1.455			94.540	
4		0.1784		105.250		-0.760	-79.967		
4			64.995		0.224			14.573	
3		0.1784		105.250		-0.984	-103.527		
3			64.995		-1.369			-88.954	
2		0.1784		105.250		0.385	40.572		
2			78.732		-0.615			-48.382	
1		0.1784		105.250		1.000	105.250		
1			56.868		1.000			56.868	

$$\omega_{sup}^2 = 590$$



$\therefore \omega_{sup}^2$  supuesta será: 522 rad/seg<sup>2</sup>

3<sup>a</sup> iteración

$$\omega_{sup}^2 = 522 \text{ rad/seg}^2$$

N	E	n	k	$\omega_{sup}^2$	$\Delta X$	$X_1$	$F = \omega_{sup}^2 X$	V	FX	VAX	
6		0.0595		31.075		1.801	55.974	-1.840	100.809		
6			36.795		1.571			57.814		90.826	
5		0.1784		93.120		0.230	21.407		4.924		
5			64.995		1.219			79.221		96.570	
4		0.1784		93.120		-0.989	-92.077		91.064		
4			64.995		-0.198			-12.856		2.545	
3		0.1784		93.120		-0.791	-73.639		58.248		
3			64.995		-1.331			-86.495		115.125	
2		0.1784		93.120		0.540	50.243		27.131		
2			78.732		-0.460			-56.252		16.676	
1		0.1784		93.120		1.000	93.120		93.120		
1			56.868		1.000			56.868		56.868	
								$\omega_{sup}^2 = 522$	$\sum$	375.297	378.610

Empleando el cociente de Grandall:

$$\omega^2 = \omega^2 \frac{V * \Delta X}{FX} = 522 * \frac{378.610}{375.297} = 526.609 \text{ rad/seg}^2$$

Por lo tanto, para la siguiente iteración, se considerará:

$$\omega_{sup}^2 = 526.609 \text{ rad/seg}^2$$

4ª iteración

$$\omega^2_{sup} = 526.609 \text{ rad/seg}^2$$

N	E	s	t	$\omega^2_{sup}$	$\Delta K$	$K_0$	$F = \omega^2_{sup} K$	V	Dif.
6		0.0595		31.349		1.781	55.827		0.053
6			36.795		1.516			55.774	
5		0.1784		93.942		0.265	24.863		
5			64.995		1.241			80.637	
4		0.1784		93.942		-0.976	-91.683		
4			64.995		-0.170			-11.046	
3		0.1784		93.942		-0.806	-75.734		
3			64.995		-1.335			-86.780	
2		0.1784		93.942		0.529	49.706		
2			78.732		-0.471			-37.074	
1		0.1784		93.942		1.000	93.942		
1			56.868		1.000			56.868	

$$\omega^2_{sup} = 526.609$$

Como puede observarse, la diferencia final de esta última iteración es despreciable, por lo que:

$$\omega^2_{sup} = 526.609 \text{ rad/seg}^2$$

$$\omega_{sup} = 22.948 \text{ rad/seg}$$

$$T_{sup} = 2\pi/\omega_{sup} = 2\pi/22.948 = 0.274 \text{ seg.}$$

EJEMPLO 14.- De la estructura que se indica en el Ejemplo 10, calcular las frecuencias y modos de vibración aplicando el método de Jacobi.

Solución

Las ecuaciones del movimiento vienen dadas por:

$$[K - \omega^2 M]p = 0 \quad (1)$$

Utilizando los datos y desarrollando (1) tenemos:

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 m & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Dividiendo por k y haciendo  $\lambda = m\omega^2/k$  la ecuación (2) resulta:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

La ecuación (3) es del tipo:

$$[A]IX = \lambda[I]IX \quad \text{analizado en el caso A}$$

A continuación, siguiendo el proceso ya indicado para aplicar el método de Jacobi (caso A), obtenemos los resultados que se indican en la siguiente tabla.

$$[A_0] =$$

a	$[A_a]$	Elemento a ser eliminado	$\tan 2\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$[T_{a+1}]$
1	2 -1 0					$\cos \theta \quad -\sin \theta \quad 0$
0	-1 2 -1	1,2		-0.7071	0.7071	$\sin \theta \quad \cos \theta \quad 0$
	0 -1 1					0 0 1
2	3 0 0.7071					$\cos \theta \quad 0 \quad -\sin \theta$
1	0 1 -0.7071	1,3	0.7071	0.3029	0.9530	0 1 0
	0.7071 -0.7071 1					$\sin \theta \quad 0 \quad \cos \theta$
3	3.2246 -0.2142 0					1 0 0
2	-0.2142 1 -0.6739	2,3	-5.9956	-0.6463	0.7631	0 $\cos \theta$ $-\sin \theta$
	0 -0.6739 0.7752					0 $\sin \theta$ $\cos \theta$
4	3.2246 -0.1635 -0.1384					$\cos \theta \quad -\sin \theta \quad 0$
3	-0.1635 1.5708 0	1,2	-0.1977	-0.0974	0.9952	$\sin \theta \quad \cos \theta \quad 0$
	-0.1384 0 0.2044					0 0 1
5	3.2403 0 -0.1377					$\cos \theta \quad 0 \quad -\sin \theta$
4	0 1.5546 -0.0135	1,3	-0.0907	-0.0432	0.9990	0 1 0
	-0.1377 -0.0135 0.2044					$\sin \theta \quad 0 \quad \cos \theta$
6	3.2467 0.0006 -0.0001					
5	0.0006 1.5546 -0.0135					
	-0.0001 -0.0135 0.1982					

En  $[A_m]$  vemos que ya prácticamente hemos obtenido la diagonalización de la matriz  $[A_0]$  por lo que tenemos:

$$\lambda_3 = \omega^2_3 = 3.2467 \text{ k/m}$$

$$\lambda_2 = \omega^2_2 = 1.5546 \text{ k/m}$$

$$\lambda_1 = \omega^2_1 = 0.1982 \text{ k/m}$$

Finalmente la matriz de configuraciones modales  $\Phi$  se obtiene a partir de:

$$\Phi = [T_1][T_2][T_3][T_4][T_5]$$

$$[T_1][T_2] = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9530 & 0 & -0.3029 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.3029 & 0 & 0.9530 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6739 & 0.7071 & -0.2142 \\ -0.6739 & 0.7071 & 0.2142 \\ 0.3029 & 0 & 0.9530 \end{bmatrix}$$

$$[T_1][T_2][T_3] = \begin{bmatrix} 0.6739 & 0.7071 & -0.2142 \\ -0.6739 & 0.7071 & 0.2142 \\ 0.3029 & 0 & 0.9530 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7631 & 0.6463 \\ 0 & -0.6463 & 0.7631 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6739 & 0.6780 & 0.2935 \\ -0.6739 & 0.4012 & 0.6205 \\ 0.3029 & -0.6159 & 0.7272 \end{bmatrix}$$

$$[T_1][T_2][T_3][T_4] = \begin{bmatrix} 0.6739 & 0.6780 & 0.2935 \\ -0.6739 & 0.4012 & 0.6205 \\ 0.3029 & -0.6159 & 0.7272 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9952 & 0.0974 & 0 \\ -0.0974 & 0.9952 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6046 & 0.7404 & 0.2935 \\ -0.7097 & 0.3336 & 0.6205 \\ 0.3614 & -0.5834 & 0.7272 \end{bmatrix}$$

$$[T_1][T_2][T_3][T_4][T_5] = \begin{bmatrix} 0.6046 & 0.7404 & 0.2935 \\ -0.7097 & 0.3336 & 0.6205 \\ 0.3614 & -0.5834 & 0.7272 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9990 & 0 & 0.0452 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.0452 & 0 & 0.9990 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5907 & 0.7404 & 0.3205 \\ -0.7370 & 0.3336 & 0.5878 \\ 0.3282 & -0.5834 & 0.7428 \end{bmatrix}$$

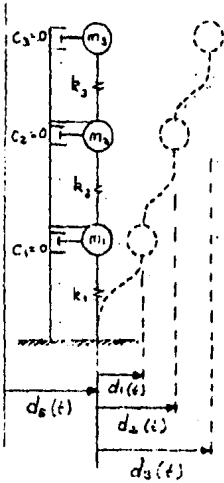
$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.5907 & 0.7404 & 0.3205 \\ -0.7370 & 0.3336 & 0.5878 \\ 0.3282 & -0.5834 & 0.7428 \end{bmatrix}$$

Normalizando

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.000 \\ -1.2477 & 0.4506 & 1.8340 \\ 0.5556 & -0.7880 & 2.3176 \end{bmatrix}$$

modo 3      modo 2      modo 1

EJEMPLO 15.- Encontrar la solución general a la vibración del sistema del Ejemplo 10, cuyos datos se indican a continuación.



Datos:

$$k_1 = k_2 = k_3 = 34741 \text{ kgf/cm}$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = 55 \text{ kgf-seg}^2/\text{cm}$$

$$\rho_1 = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix} \quad \rho_2 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.4451 \\ -0.8021 \end{Bmatrix} \quad \rho_3 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.247 \\ 0.555 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{0.1981k/m} \quad \omega_2 = \sqrt{1.5549k/m} \quad \omega_3 = \sqrt{3.2470k/m}$$

Condiciones iniciales:

$$D_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ cm} \quad D_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solución:

Modo 1:

$$m^{*1} \ddot{q}_1(t) + k^{*1} q_1(t) = 0 \quad (1)$$

donde:

$$m^{*1} = \rho^T M \rho_1$$

$$k^{*1} = \rho^T K \rho_1$$

Tenemos que:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores:

$$M = \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \quad [\text{kgf-scg}^2/\text{cm}]$$

$$K = \begin{bmatrix} 69482 & -34741 & 0 \\ -34741 & 69482 & -34741 \\ 0 & -34741 & 34741 \end{bmatrix} \quad [\text{kgf/cm}]$$

Por lo tanto:

$$a_1 = (1 \ 1.8019 \ 2.2470) \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{bmatrix} = 511.272 \text{ kgf-scg}^2/\text{cm} \quad (2)$$

$$k_1 = (1 \ 1.8019 \ 2.2470) \begin{bmatrix} 69482 & -34741 & 0 \\ -34741 & 69482 & -34741 \\ 0 & -34741 & 34741 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{bmatrix} = 63963.66 \text{ kgf/cm} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$511.272 \ddot{q}_1(t) + 63963.66 q_1(t) = 0 \quad (4)$$

La solución de la ecuación (4) viene dada por:

$$q_1(t) = \frac{\dot{q}_{01}}{\omega_1} \text{sen } \omega_1 t + q_{01} \text{cos } \omega_1 t \quad (5)$$

Donde:

$$q_{01} = \frac{\phi^T M D_0}{\phi^T M \phi_1}$$



$$q_{o1} = \frac{(1 \ 1.8019 \ 2.2470) \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{(1 \ 1.8019 \ 2.2470) \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{bmatrix}} = 1.2204 \quad (6)$$

$$\dot{q}_{o1} = \frac{\phi^T M \dot{D}_o}{\phi^T M \phi_1} = 0 \text{ porque } \dot{D}_o = \{0\} \quad (7)$$

$$w_1 = \sqrt{0.1981 \text{ k/m}} = \sqrt{0.1981 \times 34741/55} = 11.186 \text{ rad/seg} \quad (8)$$

Sustituyendo (6), (7) y (8) en (5)

$$q_1(t) = 1.2204 \cos 11.186t \quad \text{Modo 1} \quad (9)$$

Modo 2:

Siguiendo un proceso análogo al modo 1 tenemos:

$$m^* \ddot{q}_2(t) + k^* q_2(t) = 0 \quad (10)$$

donde:

$$m^* = \phi^T M \phi_2$$

$$k^* = \phi^T K \phi_2$$

Realizando operaciones:

$$m^* = (1 \ 0.4451 \ -0.8021) \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4451 \\ -0.8021 \end{bmatrix} = 101.281 \text{ kgf-sec}^2/\text{cm} \quad (11)$$

$$k^* = (1 \ 0.4451 \ -0.8021) \begin{bmatrix} 69482 & -34741 & 0 \\ -34741 & 69482 & -34741 \\ 0 & -34741 & 34741 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4451 \\ -0.8021 \end{bmatrix} = 99478.138 \text{ kgf/cm} \quad (12)$$

Sustituyendo (11) y (12) en (10)

$$101.281 \ddot{q}_2(t) + 99478.138 q_2(t) = 0 \quad (13)$$

La solución de la ecuación (13):

$$q_2(t) = \frac{\dot{q}_{02}}{\omega_2} \text{sen } \omega_2 t + q_{02} \text{cos } \omega_2 t \quad (14)$$

Donde:

$$q_{02} = \frac{F^T M D_0}{\Phi^T M \Phi_2}$$

$$q_{02} = \frac{\begin{pmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0.4451 & -0.8021 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4451 \\ -0.8021 \end{pmatrix}} = -0.2803 \quad (15)$$

$$\dot{q}_{02} = \frac{F^T M \dot{D}_0}{\Phi^T M \Phi_2} = 0 \text{ porque } \dot{D}_0 = \langle 0 \rangle \quad (16)$$

$$\omega_2 = \sqrt{1.5549k/m} = \sqrt{1.5549 \times 34741/55} = 31.339 \text{ rad/seg} \quad (17)$$

Sustituyendo (15), (16) y (17) en (14)

$$q_2(t) = -0.2803 \text{cos } 31.339t \quad \text{Modo 2} \quad (18)$$

Modo 3:

El procedimiento es el mismo:

$$m^* \ddot{q}_3(t) + k^* q_3(t) = 0 \quad (19)$$

donde:

$$m^* = \Phi^T M \Phi_3$$

$$k^* = \Phi^T K \Phi_3$$

Realizando operaciones:

$$m^* = \begin{pmatrix} 1 & -0.247 & 0.335 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1.247 \\ 0.335 \end{pmatrix} = 157.467 \text{ kgf-sec}^2/\text{cm} \quad (20)$$

$$K_3 = (1 \ -1.247 \ 0.555) \begin{bmatrix} 69482 & -34741 & 0 \\ -34741 & 69482 & -34741 \\ 0 & -34741 & 34741 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1.247 \\ 0.555 \end{bmatrix} = 322959.736 \text{ kgf/cm} \quad (21)$$

Sustituyendo (20) y (21) en (19)

$$157.467 \ddot{q}_3(t) + 322959.736 q_3(t) = 0 \quad (22)$$

La solución de la ecuación (22):

$$q_3(t) = \frac{\dot{q}_{03}}{\omega_3} \text{sen } \omega_3 t + q_{03} \text{cos } \omega_3 t \quad (23)$$

Donde:

$$q_{03} = \frac{\phi^T M \dot{D}_0}{\phi^T M \phi_3}$$

$$q_{03} = \frac{(1 \ -1.247 \ 0.555) \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{(1 \ -1.247 \ 0.555) \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1.247 \\ 0.555 \end{bmatrix}} = 0.0597 \quad (24)$$

$$\dot{q}_{03} = \frac{\phi^T M \dot{D}_0}{\phi^T M \phi_3} = 0 \text{ porque } \dot{D}_0 = \{0\} \quad (25)$$

$$\omega_3 = \sqrt{3.2470 \text{ k/m}^2} = \sqrt{3.2470 \times 34741/55} = 45.288 \text{ rad/seg} \quad (26)$$

Sustituyendo (24), (25) y (26) en (23):

$$q_3(t) = 0.0597 \text{cos } 45.288t \text{ Modo 3} \quad (27)$$

Finalmente la solución general del sistema no amortiguado en vibración libre es:

$$D(t) = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{bmatrix} (1.2204 \text{cos } 11.186t) + \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.4451 \\ -0.8021 \end{bmatrix} (-0.2803 \text{cos } 31.339t) + \begin{bmatrix} 1.000 \\ -1.247 \\ 0.555 \end{bmatrix} (0.0597 \text{cos } 45.288t)$$

EJEMPLO 16.- Para la estructura idealizada del Ejemplo 15 calcular la matriz de amortiguamiento de la cual se proporciona un 5% de porcentaje de amortiguamiento para el primer y tercer modos de vibración. Se supone que la estructura tiene un amortiguamiento Rayleigh. ¿Qué razón de amortiguamiento tendrá el segundo modo de vibrar?

$$\begin{aligned} \text{Datos: } \omega_1 &= 11.186 \text{ rad/seg} \\ \omega_2 &= 31.339 \text{ rad/seg} \\ \omega_3 &= 45.288 \text{ rad/seg} \end{aligned} \quad M = \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 69482 & -34741 & 0 \\ -34741 & 69482 & -34741 \\ 0 & -34741 & 34741 \end{bmatrix}$$

Solución:

Utilizando  $\zeta_i = 1/2 \sqrt{\frac{\alpha}{\omega_i}}$  tenemos: (A)

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} \frac{1}{11.186} \\ \frac{1}{45.288} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (I)$$

$$\zeta_i = \zeta_2 = 0.05$$

Resolviendo (I) tenemos:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.89704 \\ 0.00177 \end{bmatrix} \quad (II)$$

Por lo tanto, la matriz C se obtiene:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (III)$$

Sustituyendo (II) en (III) tenemos:

$$C = 0.89704 \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} + 0.00177 \begin{bmatrix} 69482 & -34741 & 0 \\ -34741 & 69482 & -34741 \\ 0 & -34741 & 34741 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 172.37 & -61.52 & 0 \\ -61.52 & 172.37 & -61.52 \\ 0 & -61.52 & 110.85 \end{bmatrix} \quad \text{en [kgf seg/cm]}$$

Para obtener  $\gamma_2$  utilizamos la relación dada por la ecuación

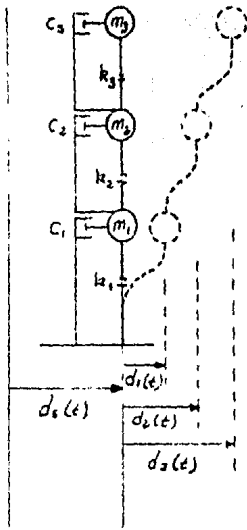
(A):

$$\gamma_2 = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & 31.339 \\ 31.339 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (IV)$$

Sustituyendo  $\alpha = 0.89704$  y  $\beta = 0.00177$  en (IV) tenemos:

$$\gamma_2 = 0.0421 = 4.21\%$$

EJEMPLO 17.- Encontrar la solución general para el sistema amortiguado que se muestra en la figura y cuyos datos (que se obtuvieron en Ejemplos 15 y 16) se indican a continuación.



Datos:

Condiciones iniciales:

$$D_{0a} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ cm} \quad \dot{D}_{0a} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = 55 \text{ kgf-seg}^2/\text{cm}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 34741 \text{ kgf/cm}$$

$$M = \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 69482 & -34741 & 0 \\ -34741 & 69482 & -34741 \\ 0 & -34741 & 34741 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 172.37 & -61.52 & 0 \\ -61.52 & 172.37 & -61.52 \\ 0 & -61.52 & 110.85 \end{bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.8019 & 0.4451 & -1.247 \\ 2.2470 & -0.8021 & 0.555 \end{bmatrix}$$

$$\zeta_1 = 0.05 \quad \omega_1 = 11.185 \text{ rad/seg}$$

$$\zeta_2 = 0.0421 \quad \omega_2 = 31.339 \text{ rad/seg}$$

$$\zeta_3 = 0.05 \quad \omega_3 = 45.288 \text{ rad/seg}$$

Solución:

Modo 1:

$$m^* \ddot{q}_1(t) + c^* \dot{q}_1(t) + k^* q_1(t) = 0 \quad (1)$$

donde:

$$m^* = \rho^T M \rho$$

$$c^* = \rho^T C \rho$$

$$k^* = \rho^T K \rho$$

Sustituyendo valores:

$$m^* = (1 \ 1.8019 \ 2.2470) \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 59 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{bmatrix} = 511.272 \text{ kgf-sec}^2/\text{cm} \quad (2)$$

$$c^* = (1 \ 1.8019 \ 2.2470) \begin{bmatrix} 172.37 & -61.52 & 0 \\ -61.52 & 172.37 & -61.52 \\ 0 & -61.52 & 110.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{bmatrix} = 571.832 \text{ kgf sec/cm} \quad (3)$$

$$k^* = (1 \ 1.8019 \ 2.2470) \begin{bmatrix} 69482 & -34741 & 0 \\ -34741 & 69482 & -34741 \\ 0 & -34741 & 34741 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{bmatrix} = 63963.66 \text{ kgf/cm} \quad (4)$$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1):

$$511.272 \ddot{q}_1(t) + 571.832 \dot{q}_1(t) + 63963.66 q_1 = 0 \quad (5)$$

La solución de la ecuación (5) viene dada por:

$$q_1(t) = \exp.[-\zeta_1 w_1 t] \left[ \frac{\dot{q}_{01} + \zeta_1 w_1 q_{01}}{w'_1} \text{sen } w'_1 t + q_{01} \text{cos } w'_1 t \right] \quad \dots (6)$$

Donde:

$$q_{01} = \frac{\rho^T M D_0}{\rho^T M \rho}$$

$$q_{o1} = \frac{\begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ (1 \ 1.8019 \ 2.2470) & 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ (1 \ 1.8019 \ 2.2470) & 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{bmatrix}} = 1.2204 \quad (7)$$

$$\dot{q}_{o1} = \frac{p^T M \dot{D}_o}{p^T M p_1} = 0 \quad \text{porque } \dot{D}_o = (0) \quad (8)$$

$$w_1 = 11.186 \text{ rad/seg} \quad (9)$$

$$w'_1 = w_1 \sqrt{1 - \zeta_1^2} = 11.186 \sqrt{1 - (0.05)^2} = 11.172 \text{ rad/seg} \quad (10)$$

Sustituyendo (7), (8), (9) y (10) en (6):

$$q_1(t) = e^{(-0.05)(11.186)t} \left[ \frac{(10 + (0.05)(11.186)(1.2204))}{11.172} \text{sen } 11.172t + 1.2204 \text{cos } 11.172t \right]$$

Realizando operaciones:

$$q_1(t) = e^{-0.5593t} (0.0611 \text{sen } 11.172t + 1.2204 \text{cos } 11.172t) \quad \text{Modo 1} \quad (11)$$

Modo 2:

Siguiendo un proceso análogo al modo (1) tenemos:

$$m^* \ddot{q}_2(t) + c^* \dot{q}_2(t) + k^* q_2(t) = 0 \quad (12)$$

donde:

$$m^*_2 = 101.281 \text{ kgf-seg}^2/\text{cm}$$

$$c^*_2 = 266.998 \text{ kgf-seg/cm}$$

$$k^*_2 = 99478.138 \text{ kgf/cm}$$

La solución de la ecuación (12) se expresa:

$$q_2(t) = \exp.[-\zeta_2 w_2 t] \left[ \frac{\dot{q}_{o2} + \zeta_2 w_2 q_{o2}}{w'_2} \text{sen } w'_2 t + q_{o2} \text{cos } w'_2 t \right] \dots (13)$$



Donde:

$$q_{02} = -0.2803 \quad (14)$$

$$\dot{q}_{02} = 0 \quad (15)$$

$$w_2 = 31.339 \text{ rad/seg.} \quad (16)$$

$$w'_2 = 31.339 \sqrt{1 - (0.0421)^2} = 31.311 \text{ rad/seg} \quad (17)$$

Sustituyendo (14), (15), (16) y (17) en (13):

$$q_2(t) = e^{(-0.0421)(31.339)t} \left[ \frac{[0 + (0.0421)(31.339)(-0.2803)]}{31.311} \text{ sen } 31.311t - 0.2803 \cos 31.311t \right]$$

Realizando operaciones:

$$q_2(t) = e^{-1.3194t} (-0.0118 \text{ sen } 31.311t - 0.2803 \cos 31.311t) \quad \text{Modo 2} \quad (18)$$

Modo 2:

Nuevamente siguiendo el proceso ya conocido, tenemos:

$$m^* \ddot{q}_3(t) + c^* \dot{q}_3(t) + k^* q_3(t) = 0 \quad (19)$$

donde:

$$m^* = 157.463 \text{ kgf-seg}^2/\text{cm}$$

$$c^* = 713.136 \text{ kgf-seg/cm}$$

$$k^* = 322959.736 \text{ kgf/cm}$$

La solución de la ecuación (19) se expresa:

$$q_3(t) = \exp[-\zeta_3 w_3 t] \left[ \frac{\dot{q}_{03} + \zeta_3 w_3 q_{03}}{w'_3} \text{ sen } w'_3 t + q_{03} \cos w'_3 t \right] \quad \dots (20)$$

Donde:

$$q_{03} = 0.0597 \quad (21)$$

$$\dot{q}_{03} = 0 \quad (22)$$

$$w_3 = 45.288 \text{ rad/seg.} \quad (23)$$

$$w'_3 = 45.288 \sqrt{1 - (0.05)^2} = 44.231 \text{ rad/seg} \quad (24)$$

Sustituyendo (21), (22), (23) y (24) en (20):

$$q_3(t) = e^{(-0.05)(45.288)t} \left[ \frac{10 + 10.05(45.288)(0.0597)}{44.231} \text{sen } 44.231t + 0.0597 \text{ cos } 44.231t \right]$$

Realizando operaciones:

$$q_3(t) = e^{-2.2644t} (0.003056 \text{ sen } 44.231t + 0.0597 \text{ cos } 44.231t) \quad \text{Nodo 2} \quad (25)$$

Finalmente la solución general del sistema amortiguado en vibración libre es:

$$D(t) = p_1 q_1(t) + p_2 q_2(t) + p_3 q_3(t) \quad (26)$$

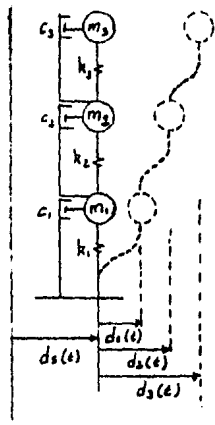
Donde:

$q_1(t)$  viene dada por la ecuación (11)

$q_2(t)$  viene dada por la ecuación (18)

$q_3(t)$  viene dada por la ecuación (25)

EJEMPLO 18.- Para la estructura mostrada en el Ejemplo 10, realizar el análisis sísmico modal espectral. Utilizar el espectro de diseño de la zona III. Alturas de entrepiso 3 metros.



Datos:

$k_1 = k_2 = k_3 = 34741 \text{ kgf/cm}$   
 $m_1 = m_2 = m_3 = 55 \text{ kgf-seg}^2/\text{cm}$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.4451 \\ -0.8021 \end{Bmatrix} \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.247 \\ 0.555 \end{Bmatrix}$$

$w_1 = 11.186 \text{ rad/seg}$      $w_2 = 32.339 \text{ rad/seg}$

$w_3 = 45.288 \text{ rad/seg}$

$T_1 = 0.562 \text{ seg}$      $T_2 = 0.20 \text{ seg}$      $T_3 = 0.139 \text{ seg}$

Solución:

$$M = \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad K = \begin{bmatrix} 69482 & -34741 & 0 \\ -34741 & 69482 & -34741 \\ 0 & -34741 & 34741 \end{bmatrix}$$

Modo 1:

1.- Primeramente necesitamos obtener:

$$q_{max 1} = \frac{L_1}{m^*_{11}} \frac{S_{a_1}}{w^2_{11}} \tag{a}$$

donde:

$$L_1 = \phi^T_1 M \phi_1$$

$$L_1 = (1 \ 1.8019 \ 2.2470) \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 277.69 \text{ kgf-seg}^2/\text{cm} \tag{b}$$

$$m^*_{11} = \rho^T T_1 M \rho_1$$

$$m^*_{11} = (1 \ 1.8019 \ 2.2470) \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{bmatrix} = 511.272 \text{ kgf-sec}^2/\text{cm} \quad (c)$$

Para obtener  $S_{a_1}$ :

Entrando con  $T_1 = 0.562$  seg al espectro de diseño zona III:

Interpolando:

$$S_{a_1}/g = 0.06 + (0.18 \times 0.562)/0.8 = 0.1865$$

$$S_{a_1} = 0.1865 \times g = 0.1865 \times 981 = 182.907 \text{ cm/seg}^2 \quad (d)$$

Sustituyendo (b), (c) y (d) y  $w^*_{11} = 125.131 \text{ rad/seg}^2$  en (a):

$$q_{\max 1} = \frac{277.69}{511.272} \times \frac{182.907}{125.131} = 0.7939 \text{ cm} \quad (f)$$

2.- Desplazamiento máximo:

$$D_{\max 1} = \rho_1 q_{\max 1} \quad (g)$$

$$D_{\max 1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix} 0.7939 = \begin{Bmatrix} 0.7939 \\ 1.4305 \\ 1.7839 \end{Bmatrix} \text{ [cm]}$$

3.- Fuerzas máximas:

$$F_{\max 1} = K D_{\max 1}$$

$$F_{\max 1} = \begin{bmatrix} 69482 & -34741 & 0 \\ -34741 & 69482 & -34741 \\ 0 & -34741 & 34741 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7939 \\ 1.4305 \\ 1.7839 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5464.76 \\ 9838.65 \\ 12277.47 \end{Bmatrix} \text{ [kgf]}$$

4.- Cortantes máximos:

$$V_{\max 1} = S F_{\max 1}$$

donde:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V^{\text{máx}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5464.76 \\ 9838.65 \\ 12277.47 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 27580.88 \\ 22116.12 \\ 12277.47 \end{Bmatrix} \text{ [kgf]}$$

5.- Momentos de volteo:

$$M_b^{\text{máx}}_1 = H V^{\text{máx}}_1$$

donde:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_b^{\text{máx}}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 27580.88 \\ 22116.12 \\ 12277.47 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 185.92 \times 10^3 \\ 103.18 \times 10^3 \\ 36.83 \times 10^3 \end{Bmatrix} \text{ [kgf-m]}$$

Modo 2: Siguiendo un proceso similar al modo 1 tenemos:

$$1.- \quad q_{\text{máx}}_2 = \frac{l_2}{m^*_2} \frac{S a_2}{w^2_2}$$

donde:

$$l_2 = 35.365 \text{ kgf-seg}^2/\text{cm}$$

$$m^*_2 = 101.281 \text{ kgf-seg}^2/\text{cm}$$

$$S a_2 = 103.005 \text{ cm/seg}^2$$

$$w^2_2 = 982.160 \text{ rad/seg}^2$$

$$\therefore q_{\text{máx}}_2 = \frac{35.365}{101.281} \frac{103.005}{982.160} = 0.0366 \text{ cm}$$

2.- Desplazamiento máximo:  $D_{\text{máx}_z} = P_z q_{\text{máx}_z}$

$$D_{\text{máx}_z} = \begin{Bmatrix} 0.0366 \\ 0.0163 \\ -0.0294 \end{Bmatrix} \quad [\text{cm}]$$

3.- Fuerzas máximas:  $F_{\text{máx}_z} = K D_{\text{máx}_z}$

$$F_{\text{máx}_z} = \begin{Bmatrix} 1976.76 \\ 882.42 \\ -1587.66 \end{Bmatrix} \quad [\text{kgf}]$$

4.- Cortantes máximos:  $V_{\text{máx}_z} = S F_{\text{máx}_z}$

$$V_{\text{máx}_z} = \begin{Bmatrix} 1271.52 \\ -705.24 \\ -1587.66 \end{Bmatrix} \quad [\text{kgf}]$$

5.- Momentos de Volteo:  $M_{\text{máx}_z} = H V_{\text{máx}_z}$

$$M_{\text{máx}_z} = \begin{Bmatrix} -3.064 \times 10^3 \\ -6.879 \times 10^3 \\ -4.763 \times 10^3 \end{Bmatrix} \quad [\text{kgf-m}]$$

Modo 3: Siguiendo un proceso similar al modo 1 tenemos:

$$1.- \quad q_{\text{máx}_3} = \frac{L_3}{m^*_3} \frac{S_{a3}}{w^2_3}$$

donde:

$$L_3 = 16.94 \quad \text{kgf-sec}^2/\text{cm}$$

$$m^*_3 = 157.467 \quad \text{kgf-sec}^2/\text{cm}$$

$$S_{a3} = 89.541 \quad \text{cm/seg}^2$$

$$w^2_3 = 2050.982 \quad \text{rad/seg}^2$$

$$\therefore q_{\text{máx}_3} = \frac{16.94}{157.467} \frac{89.541}{2050.982} = 0.0047 \quad \text{cm}$$

2.- Desplazamiento máximo:  $D_{\text{máx}} = \rho_{\text{D}} q_{\text{máx}}$

$$D_{\text{máx}} = \begin{Bmatrix} 0.00470 \\ -0.00586 \\ 0.00261 \end{Bmatrix} \quad [\text{cm}]$$

3.- Fuerzas máximas:  $F_{\text{máx}} = K D_{\text{máx}}$

$$F_{\text{máx}} = \begin{Bmatrix} 530.15 \\ -661.12 \\ 294.26 \end{Bmatrix} \quad [\text{kgf}]$$

4.- Cortantes máximos:  $V_{\text{máx}} = S F_{\text{máx}}$

$$V_{\text{máx}} = \begin{Bmatrix} 163.29 \\ -366.86 \\ 294.26 \end{Bmatrix} \quad [\text{kgf}]$$

5.- Momentos de Volteo:  $M_{\text{máx}} = H V_{\text{máx}}$

$$M_{\text{máx}} = \begin{Bmatrix} 272.07 \\ -217.80 \\ 882.78 \end{Bmatrix} \quad [\text{kgf-m}]$$

*Superposición de respuestas modales*

$$D_{\text{máx}} = \begin{matrix} \sqrt{(0.7939)^2 + (0.0366)^2 + (0.0047)^2} \\ \sqrt{(1.4305)^2 + (0.0163)^2 + (-0.00586)^2} \\ \sqrt{(1.7839)^2 + (-0.0294)^2 + (0.00261)^2} \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0.7948 \\ 1.4306 \\ 1.7841 \end{Bmatrix} \quad [\text{cm}]$$

Siguiendo el mismo criterio de superposición, se obtienen las siguientes respuestas:

$$F_{\text{máx}} = \begin{Bmatrix} 5835.43 \\ 9900.24 \\ 12383.20 \end{Bmatrix} \quad [\text{kgf}]$$

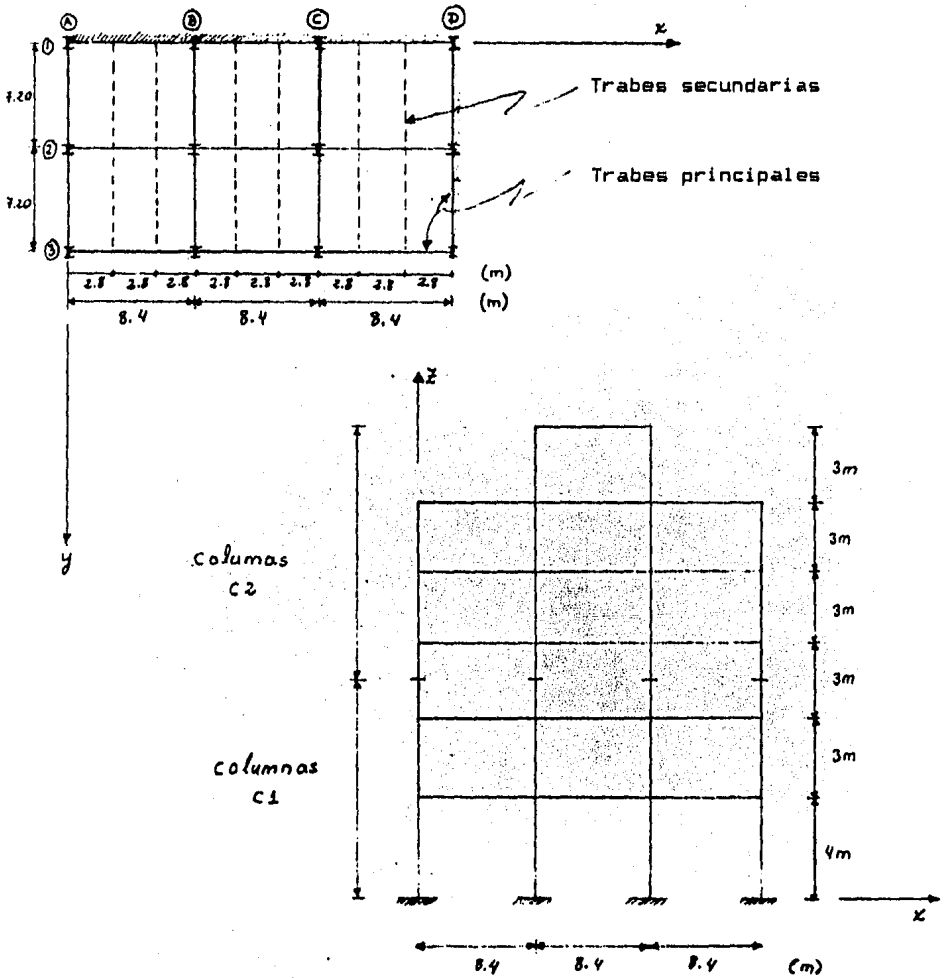
$$V_{\text{max}} = \begin{pmatrix} 27610.66 \\ 22130.40 \\ 12383.20 \end{pmatrix} \quad [\text{kgf}]$$

$$M_{\text{max}} = \begin{pmatrix} 185.95 \times 10^3 \\ 103.41 \times 10^3 \\ 37.15 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad [\text{kgf-m}]$$



EJEMPLO 19.- Para la estructura de acero mostrada, realizar el Análisis Sísmico Dinámico Modal Espectral en dirección x. Considerar el espectro de diseño zona III y un factor de ductilidad  $Q = 4$ . La descripción general de la estructura es la siguiente:

1.- Estructuración:

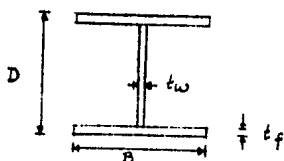


Trabes:

Trabes principales: IPR 18" x 7 1/2" x 105.6

Trabes secundarias: IPR 16" x 7" x 67.1

Columnas:



	D	B	t <sub>f</sub>	t <sub>w</sub>
C <sub>1</sub>	35	35	2.5	1.3
C <sub>2</sub>	35	35	1.6	0.8

2.- La rigidez de la estructura en el sentido x:

$$k_1 = 18.956 \times 3 = 56.868 \text{ T/cm}$$

$$k_2 = 26.244 \times 3 = 78.732 \text{ T/cm}$$

$$k_3 = 21.665 \times 3 = 64.995 \text{ T/cm}$$

$$k_4 = 21.665 \times 3 = 64.995 \text{ T/cm}$$

$$k_5 = 21.665 \times 3 = 64.995 \text{ T/cm}$$

$$k_6 = 12.265 \times 3 = 36.795 \text{ T/cm}$$

3.- Del análisis de las cargas se tiene:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 178.39 \times 10^{-3} \text{ T-seg}^2/\text{cm}$$

$$m_6 = 59.63 \text{ T-seg}^2/\text{cm}$$

4.- Las frecuencias y configuraciones modales obtenidas en los

Ejemplos 11 y 12 son:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.663 \\ 2.346 \\ 2.860 \\ 3.168 \\ 3.309 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.244 \\ 0.806 \\ -0.111 \\ -0.960 \\ -1.451 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5351 \\ -0.8333 \\ -0.9666 \\ 0.3113 \\ 1.6586 \end{pmatrix}$$

$$w^2_1 = 26.658$$

$$w^2_2 = 215.308$$

$$w^2_3 = 541.376 \text{ [rad/seg}^2\text{]}$$

$$T_1 = 1.217 \text{ seg}$$

$$T_2 = 0.428 \text{ seg}$$

$$T_3 = 0.270 \text{ seg}$$

Solución:

A.- Matriz de rigideces:

$$K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5+k_6 & -k_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores:

$$K = \begin{bmatrix} 135.600 & -78.732 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -78.732 & 143.727 & -64.995 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -64.995 & 129.990 & -64.995 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -64.995 & 129.990 & -64.995 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -64.995 & 101.790 & -36.795 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -36.795 & 36.795 \end{bmatrix}$$

B.- Matriz de masas:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores:

$$M = 10^{-3} \begin{bmatrix} 178.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 178.39 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 178.39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 178.39 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 178.39 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36.795 \end{bmatrix}$$

Modo 1: Siguiendo el proceso ya visto en el Ejemplo 18 tenemos:

$$1.- \quad q_{\max 1} = \frac{d_1}{m^*_1} \frac{S_{a1}}{w^2_1}$$

donde:

$$d_1 = \rho T_1 M J = 2.166 \text{ T-seg}^2/\text{cm}$$

$$m^*_1 = \rho T_1 M \rho_1 = 5.555 \text{ T-seg}^2/\text{cm}$$

$$S_{a1} = 235.44 \text{ cm/seg}^2$$

$$w^2_1 = 26.658 \text{ rad/seg}^2$$

$$q_{\max 1} = \frac{2.166}{5.555} \frac{235.44}{26.658} = 3.444 \text{ cm}$$

2.- Desplazamiento máximo:

$$D_{\max 1} = \rho_1 \frac{q_{\max 1}}{Q}$$

$$\text{donde: } q_{\max 1} = 3.444 \text{ cm}$$

$$Q = 4$$

$$D_{\text{máx}_1} = \begin{bmatrix} 0.861 \\ 1.432 \\ 2.020 \\ 2.462 \\ 2.728 \\ 2.849 \end{bmatrix} \quad [\text{cm}]$$

3.- Fuerzas máximas:

$$F_{\text{máx}_1} = K D_{\text{máx}_1}$$

$$F_{\text{máx}_1} = \begin{bmatrix} 4.007 \\ 6.739 \\ 9.489 \\ 11.439 \\ 12.836 \\ 4.452 \end{bmatrix} \quad [\text{T}]$$

4.- Cortantes máximos:

$$V_{\text{máx}_1} = S F_{\text{máx}_1}$$

donde:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore V_{\text{máx}_1} = \begin{bmatrix} 48.962 \\ 44.955 \\ 38.216 \\ 28.727 \\ 17.288 \\ 4.452 \end{bmatrix} \quad [T]$$

5.- Momentos de volteos:

$$M_{\text{máx}_1} = H V_{\text{máx}_1}$$

donde:

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad [m]$$

$$M_{\text{máx}_1} = \begin{bmatrix} 596.762 \\ 400.914 \\ 266.049 \\ 151.401 \\ 65.220 \\ 13.356 \end{bmatrix} \quad [T-m]$$

Modo 2: Siguiendo al proceso tenemos:

$$1.- \quad q_{\text{máx}_2} = \frac{d_2}{m^*_2} \frac{S_{a2}}{W^2_2}$$

donde:

$$d_2 = \rho T_2 M J = 266.66 \times 10^{-3} \text{ T-seg}^2/\text{cm}$$

$$m^*_2 = \rho T_2 M \rho_2 = 862.28 \times 10^{-3} \text{ T-seg}^2/\text{cm}$$

$$S_{a_z} = 153.33 \text{ cm/seg}^2$$

$$W^2_{a_z} = 215.308 \text{ rad/seg}^2$$

$$Q_{\text{máx}_z} = \frac{266.66 \times 10^{-3}}{862.28 \times 10^{-3}} \frac{153.330}{215.308} = 0.22023 \text{ cm}$$

2.- Desplazamiento máximo:

$$D_{\text{máx}_z} = \rho_z \frac{Q_{\text{máx}_z}}{Q}$$

donde:  $Q_{\text{máx}_z} = 0.22023 \text{ cm}$

$$Q = 4$$

$$D_{\text{máx}_z} = \begin{bmatrix} 0.0551 \\ 0.0685 \\ 0.0444 \\ -0.0061 \\ -0.0529 \\ -0.0799 \end{bmatrix} \text{ [cm]}$$

3.- Fuerzas máximas:

$$F_{\text{máx}_z} = K D_{\text{máx}_z}$$

$$F_{\text{máx}_z} = \begin{bmatrix} 2.078 \\ 2.621 \\ 1.716 \\ -0.240 \\ -2.841 \\ -0.993 \end{bmatrix} \text{ [T]}$$

4.- Cortantes máximos:

$$V_{\text{máx}_z} = S F_{\text{máx}_z}$$

$$V_{\text{máx}_z} = \begin{bmatrix} 2.341 \\ 0.263 \\ -2.358 \\ -4.074 \\ -3.834 \\ -0.993 \end{bmatrix} \quad [T]$$

5.- Momentos de volteo:

$$M_{\text{máx}_z} = H V_{\text{máx}_z}$$

$$M_{\text{máx}_z} = \begin{bmatrix} -23.624 \\ -32.988 \\ -33.777 \\ -26.703 \\ -14.481 \\ -2.979 \end{bmatrix} \quad [T-m]$$

Modo 3: Siguiendo nuevamente el proceso ya conocido:

$$1.- \quad q_{\text{máx}_3} = \frac{d_3}{m^*_3} \frac{S a_3}{w^2_3}$$

donde:

$$d_3 = \rho^T_3 M J = 107.03 \times 10^{-3} \text{ T-seg}^2/\text{cm}$$

$$m^*_3 = \rho^T_3 M \rho_3 = 701.07 \times 10^{-3} \text{ T-seg}^2/\text{cm}$$

$$S a_3 = 118.456 \text{ cm/seg}^2$$

$$w^2_3 = 541.376 \text{ rad/seg}^2$$

$$q_{\text{máx}_3} = \frac{107.03 \times 10^{-3}}{701.07 \times 10^{-3}} \cdot \frac{118.456}{541.376} = 3.3404 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

2.- Desplazamiento máximo:

$$D_{\text{máx}_3} = \rho_3 \frac{q_{\text{máx}_3}}{Q}$$



donde:  $q_{\max} = 0.0334 \text{ cm}$

$$Q = 4$$

$$D_{\max} = \begin{bmatrix} 0.0084 \\ 0.0045 \\ -0.0070 \\ -0.0081 \\ 0.0026 \\ 0.0139 \end{bmatrix} \text{ [cm]}$$

3.- Fuerzas máximas:

$$F_{\max} = K D_{\max}$$

$$F_{\max} = \begin{bmatrix} 0.785 \\ 0.440 \\ -0.676 \\ -0.767 \\ -0.773 \\ 0.416 \end{bmatrix} \text{ [T]}$$

4.- Cortantes máximos:

$$V_{\max} = S F_{\max}$$

$$V_{\max} = \begin{bmatrix} -0.575 \\ -1.360 \\ -1.800 \\ -1.124 \\ -0.357 \\ 0.416 \end{bmatrix} \text{ [T]}$$

5.- Momentos de volteo:

$$M_{\max} = H V_{\max}$$

$$M_{\text{máx}} = \begin{bmatrix} -14.975 \\ -12.675 \\ -8.595 \\ -3.195 \\ 0.177 \\ 1.248 \end{bmatrix} \quad [\text{T-m}]$$

*Superposición de respuestas modales*

Aplicando el criterio de la raíz cuadrada de la suma de cuadrados, tenemos:

$$D_{\text{máx}} = \begin{bmatrix} 0.863 \\ 1.434 \\ 2.021 \\ 2.462 \\ 2.729 \\ 2.850 \end{bmatrix} \quad [\text{cm}]$$

$$F_{\text{máx}} = \begin{bmatrix} 4.582 \\ 7.244 \\ 9.667 \\ 11.467 \\ 13.169 \\ 14.580 \end{bmatrix} \quad [\text{T}]$$

$v_{\text{máx}} =$ 

49.021
44.976
38.331
29.036
17.712
4.580

 [T]

$M_{\text{máx}} =$ 

597.417
402.469
268.322
153.771
66.809
13.356

 [T-m]

**EJEMPLO 20.-** Para la estructura mostrada a continuación, realizar el análisis modal espectral tridimensional. Usar el espectro para la zona III del D.F.

Datos:

$$m = 55 \text{ kgf-seg}^2/\text{cm}$$

Rigidez del marco =

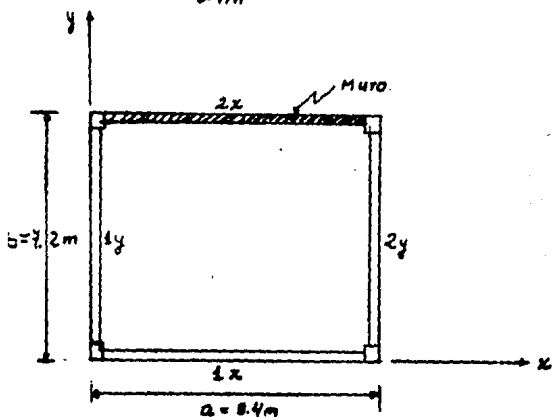
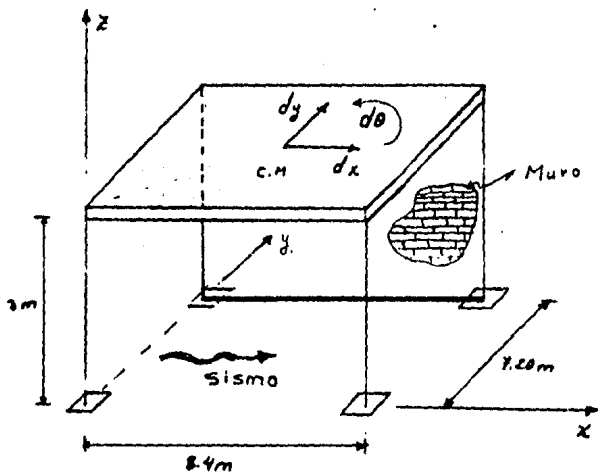
$$= k_m = 34741 \text{ kgf/cm}$$

Solución:

$$N = 3$$

2 desplazamientos:  $dx$  y  $dy$

1 giro:  $d\theta$



1.- Matriz de masas:

$$M = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & I_o \end{bmatrix}$$

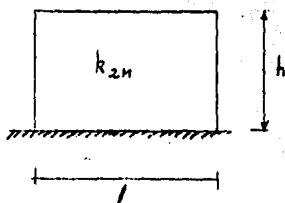
donde:

$I_o$  = momento de inercia polar de la masa con respecto a su centro:

$$I_o = m (a^2/12 + b^2/12)$$

$$\therefore M = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & m \left( \frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12} \right) \end{bmatrix}$$

2.- Obtención de la rigidez del muro:



$k_{2M}$  = Rigidez del muro

$$d = \int_0^h \frac{M m dx}{EI} + \int_0^h \frac{V v dx}{GA_c} \quad (1)$$

$$d = \frac{Ph^3}{3EI} + \frac{Ph}{GA_c} \quad (2)$$

donde:

$$I = \frac{t l^3}{12} \quad (3)$$

$$A_c = \frac{t l}{1.2} \quad (4)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5)$$

Sustituyendo (3), (4) y (5) en (2):

$$d = P \left[ \frac{h^3}{3E \frac{t1^3}{12}} + \frac{h}{\frac{E}{2(1+\nu)} \frac{t1}{1.2}} \right]$$

Realizando operaciones:

$$d = \frac{Ph}{Et1} \left[ \left( \frac{2h}{1} \right)^2 + 2.4(1+\nu) \right]$$

Pasando a dividir P e invirtiendo tenemos:

$$k = \frac{P}{d} = \frac{Et1}{h} \frac{1}{\left[ \left( \frac{2h}{1} \right)^2 + 2.4(1+\nu) \right]} \quad (6)$$

Sustituyendo:

$$E = 4500 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{para tabique recocido}$$

$$t = 20 \text{ cm}$$

$$l = 840 \text{ cm}$$

$$h = 300 \text{ cm}$$

$$\nu = 0.3$$

$$k_{2M} = 69418 \text{ kgf/cm}$$

Finalmente:

$$k_{2N} = k_{2M} + k_{2R}$$

donde:

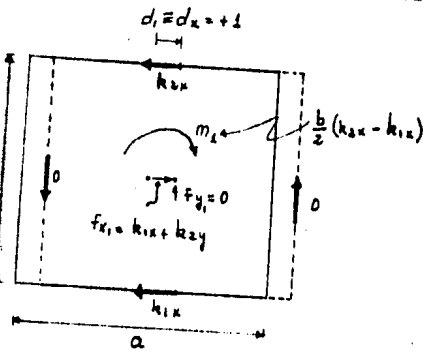
$$k_{2M} = \text{Rigidez del marco} = 34741 \text{ kgf/cm}$$

$$k_{2R} = \text{Rigidez del Muro} = 69418 \text{ kgf/cm}$$

$$\therefore k_{2N} = 34741 + 69418 = 104159 \text{ kg/cm}$$

### 3.- Obtención de la Matriz de Rigidez

#### a.- Desplazamiento unitario en dirección x:



$$\sum F_x = 0$$

$$f_{1x} - k_{1x} - k_{2x} = 0^{\text{a}}$$

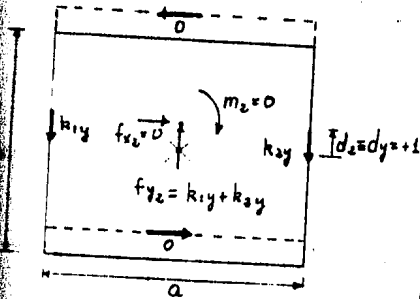
$$f_{1x} = k_{1x} + k_{2x}$$

$$\sum M_{\text{centro gravedad}} = \sum M_{\text{CG}} = 0$$

$$m_1 - k_{1x} \frac{b}{2} + k_{2x} \frac{b}{2} = 0$$

$$m_1 = \frac{b}{2} (k_{1x} - k_{2x})$$

#### b.- Desplazamiento unitario en dirección y:



$$\sum F_y = 0$$

$$f_{2y} - k_{1y} - k_{2y} = 0$$

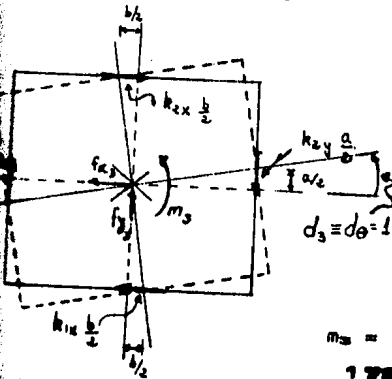
$$f_{2y} = k_{1y} + k_{2y}$$

$$\sum M_{\text{CG}} = 0$$

como  $k_{1y} = k_{2y}$

$$m_2 = 0$$

#### c.- Giro unitario de



$$\sum F_x = 0$$

$$f_{3x} = (k_{1x} - k_{2x}) \frac{b}{2}$$

$$\sum F_y = 0$$

como  $k_{1y} = k_{2y}$

$$f_{3y} = 0$$

$$\sum M_{\text{CG}} = 0$$

$$m_3 = (k_{1x} + k_{2x}) \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (k_{1y} + k_{2y}) \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Por tanto, la matriz de rigideces se conforma:

$$K = \begin{bmatrix} k_{1x} + k_{2x} & 0 & (k_{1x} - k_{2x}) \frac{b}{2} \\ 0 & k_{1y} + k_{2y} & 0 \\ k_{1x} - k_{2x} \frac{b}{2} & 0 & (k_{1x} + k_{2x}) \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (k_{1y} + k_{2y}) \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

#### 4.- Transformaciones en la matriz de Masas y en la de Rigideces

En ambas matrices se realizará la siguiente transformación:

- a.- Intercambio del renglón 3 por el 2 y viceversa.
- b.- Intercambio de la columna 3 por la 2 y viceversa.

Por lo que ambas matrices resultan:

$$M = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m (a^2/12 + b^2/12) & 0 \\ 0 & 0 & m_y \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$K = \begin{bmatrix} (k_{1x} + k_{2x}) & (k_{1x} - k_{2x}) \frac{b}{2} & 0 \\ (k_{1x} - k_{2x}) \frac{b}{2} & (k_{1x} + k_{2x}) \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (k_{1y} + k_{2y}) \left(\frac{a}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (k_{1y} + k_{2y}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

De la observación de las matrices (7) y (8) se concluye que el movimiento está desacoplado con respecto al eje y.



5.- Cálculo de  $\omega_i$ ,  $T_i$ ,  $\rho_i$ ,  $i = 1, 2$

Como el movimiento está desacoplado en dirección y tenemos:

$$[K - \omega^2 M] = \begin{bmatrix} (k_{1x} + k_{2x}) - \omega^2 m_x & (k_{1y} - k_{2y}) \frac{b}{2} \\ (k_{1x} - k_{2x}) \frac{b}{2} & (k_{1x} + k_{2x}) \left( \frac{b^2}{2} \right) + (k_{1y} + k_{2y}) \left( \frac{a^2}{2} \right) - \omega^2 m \left( \frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12} \right) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Sustituyendo:

$$m_x = m = 5.5 \text{ T-seg}^2/\text{m}$$

$$k_{1x} = 3474.1 \text{ T/m}$$

$$k_{2x} = 10415.9 \text{ T/m}$$

$$k_{1y} = 3474.1 \text{ T/m}$$

$$k_{2y} = 3474.1 \text{ T/m}$$

$$a = 8.4 \text{ m}$$

$$b = 7.2 \text{ m}$$

$$[K - \omega^2 M] = \begin{bmatrix} 13890 - 5.5\omega^2 & -24990.48 \\ -24990.48 & 302580.65 - 56.10\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det } [K - \omega^2 M] = 0$$

Realizando operaciones la ecuación característica resulta:

$$(\omega^2)^2 - 7919.049\omega^2 + 11.597 \times 10^4 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\omega^2_1 = 1939.471 \text{ rad/seg}^2 ; \omega_1 = 44.039 \text{ rad/seg} ; T_1 = 0.143 \text{ seg}$$

$$\omega^2_2 = 5979.578 \text{ rad/seg}^2 ; \omega_2 = 77.328 \text{ rad/seg} ; T_2 = 0.0183 \text{ seg}$$

Sustituyendo  $\omega^2_1 = 1939.471 \text{ rad/seg}^2$  en:

$$[K - \omega^2 M]p = 0 \quad (10)$$

tenemos:

$$\begin{bmatrix} 3222.912 & -24990.480 \\ -24990.480 & 193776.349 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{u1} \\ p_{\theta 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$3222.912 p_{u1} - 24990.48 p_{\theta 1} = 0$$

$$p_{\theta 1} = 0.1290 p_{u1}$$

haciendo  $p_{u1} = 1$  obtenemos el primer modo de vibrar:

$$p_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.129 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo  $\omega^2_2 = 5979.578 \text{ rad/seg}^2$  en (10):

$$\begin{bmatrix} -18997.681 & -24990.480 \\ -24990.480 & -32873.701 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{u2} \\ p_{\theta 2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-18997.681 p_{u2} - 24990.48 p_{\theta 2} = 0$$

$$p_{\theta 2} = -0.7602 p_{u2}$$

haciendo  $p_{u2} = 1$  se obtiene el segundo modo de vibrar:

$$p_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.7602 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El tercer modo de vibrar viene dado por:

$$p_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2.- Determinación de respuestas modales

Modo 1

$$p_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.129 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad w_1 = 44.039 \text{ rad/seg} ; \quad T_1 = 0.143 \text{ seg}$$

3.- 
$$q_{\max 1} = \frac{L_1}{m^* w_1^2} Sa_1$$

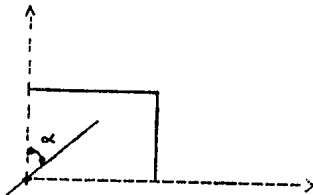
donde:

$$L_1 = p^T M J$$

pero:

$$J = \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{---> con las transformaciones:} \quad J = \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ 1 \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}$$

El ángulo  $\alpha$  se mide como se indica en la figura:



En nuestro caso  $\alpha = 90^\circ$

$$\therefore J = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Entonces:

$$L_1 = (1 \quad 0.129 \quad 0) \begin{bmatrix} 5.5 & 0 & 0 \\ 0 & 56.1 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 12.7369 \text{ T-seg}^2/\text{m}$$

$$m^*_1 = \rho^T_1 M \rho_1 = (1 \quad 0.129 \quad 0) \begin{bmatrix} 5.5 & 0 & 0 \\ 0 & 56.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.129 \\ 0 \end{Bmatrix} = 6.4336 \text{ T-sec}^2/\text{m}$$

$$S_{a1} = [0.06 + (0.18 \times 0.143)/0.8] \times 9.81 = 0.9042 \text{ m/seg}^2$$

$$q_{\max 1} = \frac{12.7369}{6.4336} \frac{0.9042}{1939.421} = 0.000923 \text{ m}$$

b.- Desplazamiento máximo:  $D_{\max 1} = \rho_1 q_{\max 1}$

$$D_{\max 1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.129 \\ 0 \end{Bmatrix} 0.000923 = \begin{Bmatrix} 0.000923 \\ 0.000119 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (\text{m}) \\ (\text{rad}) \end{matrix}$$

c.- Fuerzas máximas:  $F_{\max 1} = K D_{\max 1}$

$$F_{\max 1} = \begin{bmatrix} 13890.00 & -24990.48 & 0 \\ -24990.48 & 302580.65 & 0 \\ 0 & 0 & 6948.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.000923 \\ 0.000119 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.8466 \\ 12.9409 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (\text{T}) \\ (\text{T-m}) \\ \end{matrix}$$

Modo 2

$$\rho_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.7602 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \omega_2 = 77.328 \text{ rad/seg} ; T_2 = 0.0813 \text{ seg}$$

$$a.- q_{\max 2} = \frac{L_2}{m^*_2} \frac{S_{a2}}{\omega^2_2}$$

donde:

$$L_2 = (1 \quad -0.7602 \quad 0) \begin{bmatrix} 5.5 & 0 & 0 \\ 0 & 56.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = -37.1472 \text{ T-sec}^2/\text{m}$$

$$m^* z = \{1 \quad -0.7602 \quad 0\} \begin{bmatrix} 5.5 & 0 & 0 \\ 0 & 56.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.7602 \\ 0 \end{Bmatrix} = 37.9204 \text{ T-sec}^2/\text{m}$$

$$S a_z = [0.06 + (0.18 \times 0.0813)/0.8] \times 9.81 = 0.768 \text{ m/seg}^2$$

$$q_{\max z} = \frac{-37.1472 \quad 0.768}{37.9204 \quad 5979.578} = -0.0001258 \text{ m}$$

b.- Desplazamiento máximo:  $D_{\max z} = \phi_z q_{\max z}$

$$D_{\max z} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.7602 \\ 0 \end{Bmatrix} (-0.0001258) = \begin{Bmatrix} -0.0001258 \\ 0.0000956 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (\text{m}) \\ (\text{rad}) \end{matrix}$$

c.- Fuerzas máximas:  $F_{\max z} = K D_{\max z}$

$$F_{\max z} = \begin{bmatrix} 13890.00 & -24990.48 & 0 \\ -24990.48 & 302580.65 & 0 \\ 0 & 0 & 6948.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.0001258 \\ 0.0000956 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.13788 \\ 32.08522 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (\text{T}) \\ (\text{T-m}) \\ \end{matrix}$$

*Modo 3:* Siguiendo el mismo proceso y en vista de que está desacoplado se tiene:

a.-  $q_{\max 3} = 0$

b.-  $D_{\max 3} = \{0\}$

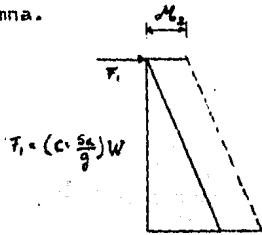
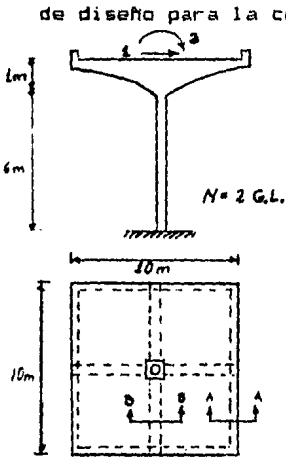
c.-  $F_{\max 3} = \{0\}$

## 7.- Superposición de respuestas modales

Empleando el criterio de la raíz cuadrada de la suma de cuadrados, se obtiene:

$$D_{\max} = \begin{Bmatrix} 0.0009315 \\ 0.0001526 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (\text{m}) \\ (\text{rad}) \end{matrix} ; F_{\max} = \begin{Bmatrix} 10.6807 \\ 34.5967 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (\text{m}) \\ (\text{T-m}) \end{matrix}$$

**EJEMPLO 21.-** Para la estructura indicada, proporcionar los elementos de diseño para la columna.



Datos:

$$CV = 100 \text{ kg/m}^2$$

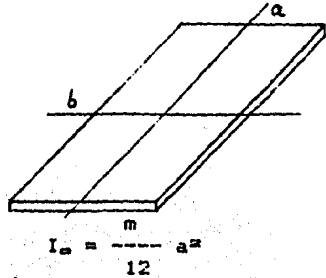
$$\gamma_c = 2.4 \text{ T/m}^3$$

$$F_1 = (C \cdot \frac{S_A}{g}) W$$

1.- Matriz de Masas:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{W}{g} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (1)$$

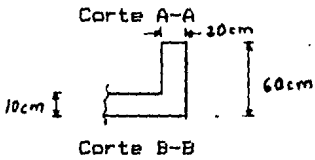
$I_p$  = Momento de inercia polar de la masa con respecto a su centro:



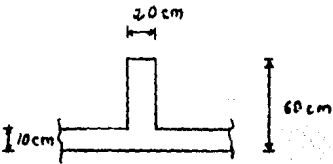
$$I_p = \frac{m}{12} a^2 \quad (2)$$

Espesor de losas: 10 cm

Para las vigas:



Corte B-B



Cálculo del peso:  $w$

$$\text{Losas: } 10 \times 10 \times 0.1 \times 2.4 \times 1.033 = 24.79 \text{ T}$$

$$\text{Trabes: } 10 \times 6 \times 0.50 \times 0.20 \times 2.4 = 14.40 \text{ T}$$

$$\text{Carga muerta: } w_m = 39.19 \text{ T}$$

$$\text{Carga viva: } w_v = 0.1 \times 10 \times 10 = 10.00 \text{ T}$$

$$w = w_m + w_v = 49.19 \text{ T}$$

$$m = \frac{W}{g} \quad (3)$$

Sustituyendo valores en (3):

$$m = 49.19/9.81 = 5.0143 \text{ T-seg}^2/\text{m}$$

Sustituyendo valores en (2)

$$I_a = 5.0143/12 \times 10^2 = 41.786 \text{ T-seg}^2/\text{m}$$

Finalmente, sustituyendo valores, la matriz de masas queda:

$$M = \begin{bmatrix} 5.0143 & 0 \\ 0 & 41.786 \end{bmatrix} \quad [\text{T-seg}^2/\text{m}]$$

2.- Obtención de la Matriz de Rigideces:

La matriz de rigideces se obtiene invirtiendo la matriz de flexibilidades; esto es:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = F^{-1} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

a.- Matriz de flexibilidades:

$$f_{11} = \frac{1}{EI_c} \int_0^L \frac{1}{2} \frac{x^2}{L} dx = \frac{L^3}{3EI_c}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI_c} \int_0^L \frac{1}{2} \frac{x^2}{L} dx = \frac{L}{EI_c}$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{1}{EI_c} \int_0^L \frac{1}{2} \frac{x^2}{L} dx = \frac{L^2}{2EI_c}$$

Por lo tanto, la matriz de flexibilidades resulta:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI_c} & \frac{L^2}{2EI_c} \\ \frac{L^2}{2EI_c} & \frac{L}{EI_c} \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz F es:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_c}{L^3} & \frac{-6EI_c}{L^2} \\ \frac{-6EI_c}{L^2} & \frac{4EI_c}{L} \end{bmatrix} \equiv K$$

b.- Sustitución de valores en la matriz K

Suponiendo una sección de columna de 50 x 50 cm

$$E = 1.5 \times 10^4 \text{ T/m}^2$$

$$I_c = (0.5)^4/12 - [\pi (0.1)^4]/64 = 0.00521 \text{ m}^4$$

La matriz K resulta:

$$K = \begin{bmatrix} 434.17 & -1302.5 \\ -1302.50 & 5210.0 \end{bmatrix} \quad [\text{T/m}]$$

3.- Cálculo de:  $w_i$ ,  $T_i$ ,  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2$

$$[K - w^2M] = \begin{bmatrix} 434.17 - 5.0143w^2 & -1302.5 \\ -1302.5 & 5210 - 41.786w^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\text{Det } [K - w^2M] = 0$$

Realizando operaciones, la ecuación característica resulta:

$$(w^2)^2 - 211.2693w^2 + 2699.022 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$w^2_1 = 13.6583 \text{ rad/seg}^2 ; w_1 = 3.6957 \text{ rad/seg} ; T_1 = 1.7 \text{ seg}$$

$$w^2_2 = 197.611 \text{ rad/seg}^2 ; w_2 = 14.0574 \text{ rad/seg} ; T_2 = 0.447 \text{ seg}$$

Sustituyendo  $w^2_1 = 13.6583 \text{ rad/seg}^2$  en:

$$[K - w^2M] \phi = 0 \quad (5)$$

tenemos:

$$\begin{bmatrix} 365.6834 & -1302.5000 \\ -1302.500 & 4639.2761 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$365.6834 \phi_{11} - 1302.5 \phi_{21} = 0$$



$$p_{21} = 0.28076 p_{11}$$

haciendo  $p_{11} = 1$ , obtenemos el primero modo de vibrar

$$p_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.28076 \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo  $\omega^2 = 197.611 \text{ rad/seg}^2$  en (5) tenemos:

$$\begin{bmatrix} -556.7101 & -1302.50000 \\ -1302.5000 & -3047.37383 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-556.7101 p_{12} - 1302.5 p_{22}$$

$$p_{22} = -0.42742 p_{12}$$

haciendo  $p_{12} = 1$ , se obtiene el segundo modo de vibrar:

$$p_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.42742 \end{Bmatrix}$$

#### 4.- Determinación de las respuestas modales:

Modo 1:

$$p_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.28076 \end{Bmatrix}; \omega_1 = 3.6957 \text{ rad/seg}; T_1 = 1.7 \text{ seg}$$

$$a.- q_{\max 1} = \frac{\mathcal{L}_1}{m^*} \frac{S a_1}{\omega_1^2}$$

donde:

$$\mathcal{L}_1 = p^T M J = \{1 \quad 0.28076\} \begin{bmatrix} 5.0143 & 0 \\ 0 & 41.786 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 16.74614 \text{ T-seg}^2/\text{m}$$

$$m^* = p^T M p = \{1 \quad 0.28076\} \begin{bmatrix} 5.0143 & 0 \\ 0 & 41.786 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.28076 \end{Bmatrix} = 8.30813 \frac{\text{T-seg}^2}{\text{m}}$$

$$S a_1 = 0.24 \times 9.81 = 2.3544 \text{ m/seg}^2$$

$$q_{\max 1} = \frac{16.74614}{8.30813} \frac{2.3544}{13.6583} = 0.34745 \text{ m}$$

b.- Desplazamiento máximo:  $D_{\max 1} = \phi_1 q_{\max 1}$

$$D_{\max 1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.28076 \end{Bmatrix} 0.34745 = \begin{Bmatrix} 0.34745 \\ 0.09755 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (m) \\ (\text{rad}) \end{matrix}$$

c.- Fuerzas máximas:  $F_{\max 1} = K D_{\max 1}$

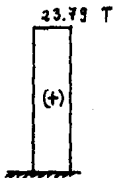
$$F_{\max 1} = \begin{bmatrix} 434.17 & -1302.5 \\ -1302.5 & 5210.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.34745 \\ 0.09755 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 23.79349 \\ 55.68188 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (T) \\ (T-m) \end{matrix}$$

d.- Momento máximo en la base:

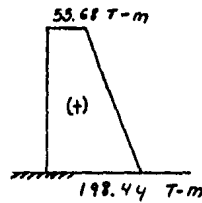
$$M_{\max 1} = \{6 \quad 1\} \begin{Bmatrix} 23.79349 \\ 55.68188 \end{Bmatrix} = \{198.44282\} \quad (T-m)$$

Diagramas de elementos mecánicos

Cortante:



Momento:



Modo 2:

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.42742 \end{Bmatrix}; \quad \omega_2 = 14.0574 \text{ rad/seg}; \quad T_2 = 0.447 \text{ seg}$$

$$a.- \quad q_{\max 2} = \frac{d_2}{m^*_{22}} \frac{S_{a2}}{\omega_2^2}$$

donde:

$$d_2 = \phi^T_2 M \phi_2 = \{1 \quad -0.42742\} \begin{bmatrix} 5.0143 & 0 \\ 0 & 41.786 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -12.84587 \text{ T-seg}^2/m$$

$$m^*_{22} = \phi^T_2 M \phi_2 = \{1 \quad -0.42742\} \begin{bmatrix} 5.0143 & 0 \\ 0 & 41.786 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.42742 \end{Bmatrix} = 12.64809 \frac{\text{T-seg}^2}{m}$$

$$S_{a2} = 0.16058 \times 9.81 = 1.57524 \text{ m/seg}^2$$

$$q_{\max z} = \frac{-12.84587}{12.64809} \frac{1.57524}{197.611} = -0.008096 \text{ m}$$

b.- Desplazamiento máximo:  $D_{\max z} = \phi_z q_{\max z}$

$$D_{\max z} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.42742 \end{Bmatrix} (-0.008096) = \begin{Bmatrix} -0.008096 \\ 0.003460 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (\text{m}) \\ (\text{rad}) \end{matrix}$$

c.- Fuerzas máximas:  $F_{\max z} = K D_{\max z}$

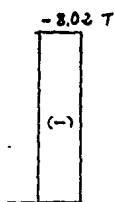
$$F_{\max z} = \begin{bmatrix} 434.17 & -1302.5 \\ -1302.5 & 5210.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.008096 \\ 0.003460 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8.02169 \\ 28.57164 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (\text{T}) \\ (\text{T-m}) \end{matrix}$$

d.- Momento máximo en la base:

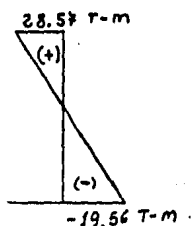
$$M_b \text{ máx} = \{6 \quad 1\} \begin{Bmatrix} -8.02169 \\ 28.57164 \end{Bmatrix} = \{-19.5585\} (\text{T-m})$$

Diagramas de elementos mecánicos

Cortante:



Momento:



5.- Superposición de respuestas modales:

Empleando el criterio de la raíz cuadrada de la suma de cuadrados, se tiene:

$$D_{\max} = \begin{Bmatrix} 0.34754 \\ 0.09761 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (\text{m}) \\ (\text{rad}) \end{matrix}$$

$$F_{\max} = \begin{Bmatrix} 25.11 \\ 62.58 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (\text{T}) \\ (\text{T-m}) \end{matrix}$$

$$M_b \text{ máx} = \{199.40\} (\text{T-m})$$

Los elementos de diseño son:

$$N = 49.19 \text{ T}$$

$$V = 25.11 \text{ T}$$

$$M_{\text{sup}} = 62.58 \text{ T}$$

$$M_{\text{base}} = 199.40 \text{ T-m}$$

EJEMPLO 22.- Para la estructura de acero de 6 niveles, planteada en el ejemplo 19, realizar el Análisis Sísmico Estático.

Datos:

Zona III del D.F.

$$c = 0.24$$

$$a_0 = 0.03$$

$$Q = 4$$

Solución:

Como primer paso se verifica que  $c/Q \geq a_0$

$$c/Q = 0.24/4 = 0.06 > a_0 = 0.03$$

Partiendo de la definición:

$$F_i = \frac{c}{Q} \sum w_i \frac{w_i h_i}{\sum w_i h_i} = 0.06 \sum w_i \frac{w_i h_i}{\sum w_i h_i}$$

Los resultados obtenidos por este método se presentan en la siguiente tabla:

Nivel	$w_i$ (m)	$\Delta h_i$ (m)	$h_i$ (m)	$w_i h_i$	F (T)	V (T)
6	58.4		19	1109.6	6.303	
		3				6.303
5	175		16	2800	15.904	
		3				22.207
4	175		13	2275	12.922	
		3				35.129
3	175		10	1750	9.940	
		3				45.069
2	175		7	1225	6.958	
		3				52.027
1	175		4	700	3.976	
						56.003
$\Sigma$	933.4			9859.6		

$$F_i = 0.06 \times 933.4 \frac{w_i h_i}{9859.6} = 5.680 \times 10^{-3} w_i h_i$$

## V. CONCLUSIONES

La realización de este trabajo estuvo encaminada a elaborar ejemplos representativos y didácticos que contribuyan a aclarar la teoría que se presenta en varios libros de dinámica estructural con énfasis al problema de excitación sísmica.

El camino seguido fué el de ordenar lo mejor posible el proceso que se sigue en el cálculo de la respuesta de una estructura ante una excitación arbitraria. La respuesta de la estructura en términos del desplazamiento, velocidad y aceleración, no se limitó a una representación matemática, sino que se ilustró esquemáticamente y con gráficas, que se presentan al final de este trabajo, con el objetivo de realizar una serie de ejemplos que abarquen los principales tópicos del comportamiento elástico de estructuras.

La adecuada determinación de las propiedades geométricas y mecánicas, es fundamental para una adecuada respuesta dinámica de estructuras, ya que éstas determinan sus propiedades dinámicas y por ende su comportamiento ante la excitación que se presente.

Se integró este trabajo en lenguaje sencillo, incorporando conceptos importantes para su comprensión, de manera que sirva como un elemento más de consulta para la clase de ingeniería sísmica, que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

## REFERENCIAS

- 1.- Bazan Enrique y Meli Roberto. "Manual de Diseño Sísmico de Edificios". *Series del Instituto de Ingeniería, D-1B, 1983, México.*
- 2.- Clough W. Ray y Penzien Joseph. "Dynamics of Structures", Ed. *Mc Graw-Hill Kogakusha, 1975.*
- 3.- Craig, Roy R. "Structural Dynamics", Ed. *John Wiley & Sons, 1981.*
- 4.- Dowrick, D.J. "Diseño de Estructuras Resistentes a Sismos" Ed. *Limusa, 1984.*
- 5.- Estrada Uribe Gabriel. "Estructuras Anti-sísmicas", Ed. *C.E.C.S.A., 1981.*
- 6.- I. Martinez, Navarro A. y Ceniceros J. "Dinámica Estructural", Ed. *Universitaria, Universidad Autónoma de Zacatecas, 1983, México.*
- 7.- Kuo S. Shan. "Computer Applications of Numerical Methods", Ed. *Addison-Wesley Publishing Company, 1972.*
- 8.- Thomson T. William. "Teoría de Vibraciones", Ed. *Prentice/Hall Internacional, 1983.*
- 9.- Trigos Suarez, José Luis. Apuntes de la clase de "Ingeniería Sísmica". *Facultad de Ingeniería, UNAM. 1985.*