UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ingeniería

Programa para la Solución, en el Plano de Armaduras y Marcos considerando en estos últimos Flexión y Fuerza Axial.

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Título de :

INGENIERO CIVIL

P r e s e n t a :

JOSE RAUL SALINAS CORIA

México, D. F. **1985**

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

METODO DE LAS RIGIDECES.

Este método de analizar estructuras se utiliza más extensamente para estructuras grandes y complejas, tales estructuras requieren el empleo de computadoras digitales para efectuar los extensos cálculos numéricos, y este método es el más apropiado para la programación de computadoras. La razón es que el método de las rigideces, puede ponerse en la forma de un procedimiento estandarizado, que no requiere ninguna decisión de ingeniería durante el proceso de cálculo debida a condiciones de hiperestaticidad de la estructura.

En este método se considera a los desplazamientos como las incógnitas de la formulación.

Heinrich Manderla fue el primero en utilizar los desplazamientos de los nudos como incógnitas en el análisisde estructuras indeterminadas estáticamente, en 1880 analizó una armadura con nudos rígidos tomando en consideración las deformaciones producidas en los elementos de la estructura, por la acción de los momentos de flexión y fuerzas axiales, esta técnica no resultó apropiada para la época por la complejidad del sistema resultante de ecuasiones, expresado en términos de la traslación y rotación desconocidas de los nudos y pretende describir el efecto de la flexión y fuerza axial sobre cada elemento. - Posteriormente en 1892 Otto Mhor quien había contribuido al desarrollo del método de flexibilidad para el análisis de estructuras indeterminadas estáticamente, propuso un método aproximado para el cálculo de los esfuerzos producidos por la flexión en una armadura de nudos rígidos. La técnica de Mhor requería la solución de un sistema de ecuaciones expresado únicamente en términos de la rotación de los nudos, su traslación se determinaba suponiendo que las conexiones correspondían a articulaciones.

En 1914 Alex Bendixen propuso el método pendiente-deflexión para el - análisis de estructuras que requiere la solución de un sistema de ecuasiones expresado en término del desplazamiento de los nudos. En 1915 el Profr. G.A. Maney de la Universidad de Minnesota dió a conocer el desarrollo de este método; el método pendiente-deflexión, propuesto - por Bendixen y Maney, es semejante al método propuesto anteriormente por Mhor para el cálculo de los esfuerzos secundarios en armaduras - con nudos rígidos. En 1930, el Profr. Hardy Cross en ese entonces -- en la Universidad de Illinois difundió el método de distribución de - los momentos, que aproxima progresivamente el valor de los momentos - no equilibrados en los nudos permitiendo en esta forma analizar las -

estructuras. Esta técnica tuvo gran aceptación en la práctica por cuanto eliminó la necesidad de resolver el sistema numeroso de ecuasiones simultáneas requerido por el método pendiente-deflexión. Casi contemporáneamente con la presentación por parte del profr. Cross del método de distribución de los momentos, el Profr. R.C. Southwell de la Universidad de Oxford propuso el método de relajación de aproximaciones suscesivas su trabajo fue presentado en 1935.

El método pendiente deflexión para el análisis de estructuras indeterminadas estáticamente es el predecesor del método mas generalizado de análisis que se utiliza actualmente. El advenimiento del computador digital para realizar operaciones matemáticas eliminó la solución de ecuaciones simultáneas como una restricción para el análisis estructural, esto ha permitido la utilización de un método muy general, para el análisis de estructuras, las incognitas de su formulación son los desplazamientos de los nudos. Este método de análisis se denomina método de las rigideces.

Cuando se analiza una estructura por el método de las rigideces se emplea el concepto de indeterminación cinemática, el cual explicaremos a continuación.

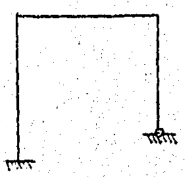
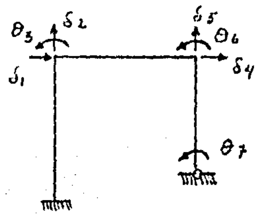
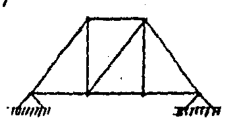
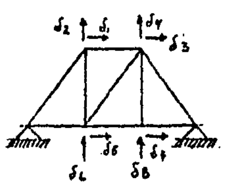
C A P I T U L O   I

PROGRAMA PARA ARMADURAS

1. INDETERMINACIÓN CINEMÁTICA.

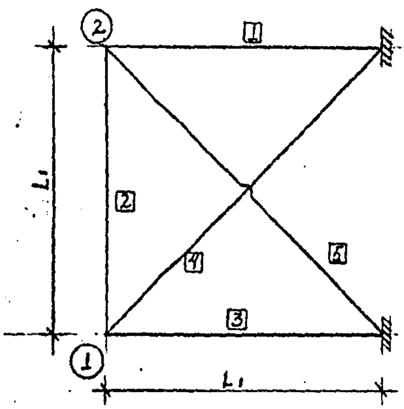
Si pretende analizar una estructura utilizando el método de las rigideces, es necesario definir el grado de indeterminación cinemática del sistema estructural. Este a su vez define el número existente de componentes no restringidas del desplazamiento de los nudos de la estructura, las que deben calcularse durante el análisis.

En una estructura plana, la traslación de un nudo no restringido se describe en término de dos componentes ortogonales. Además, un nudo rígido puede girar. El grado de indeterminación cinemática de un sistema es igual al número total de componentes independientes del desplazamiento de los nudos no restringidos de la estructura. Se dice que una estructura es determinada cinemáticamente cuando se restringe completamente el desplazamiento de sus nudos. Para el caso de una armadura, no se considera la rotación de los nudos, por cuanto se supone que estas son articulaciones. Por tanto, al definir el grado de indeterminación cinemática de una armadura se considera únicamente la traslación de los nudos. Ejemplos: a), b) y c).

ESTRUCTURA	COMPONENTES INDEPENDIENTES DEL DESPLAZAMIENTO DE LOS NUDOS.	GRADO DE INDETERMINACION CINEMATICA.
a) 		7
b) 	Todas las componentes del desplazamiento de los nudos estan restringidos - por lo tanto es una estructura determinada cinemáticamente.	0
c) 		8

2. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1 PRINCIPIO DE CONTINUIDAD.



Ejemplo 1

Basándonos en el ejemplo 1, se obtendrá la matriz de continuidad, empezaremos por definir algunos términos.

{F}=Vector de fuerzas

$$\underset{(2\times n_N,\ 1)}{\{F\}} = \left\{\begin{matrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ \vdots \end{matrix}\right\}$$

{d} = Vector de desplazamiento de los nudos

$$\underset{(2 \times n_N,\ 1)}{\{ d \}} = \begin{Bmatrix} d_{1X} \\ d_{1Y} \\ d_{2X} \\ d_{2Y} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

{e} = Vector de alargamiento de las barras

$$\underset{(n_B,\ 1)}{\{ e \}} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

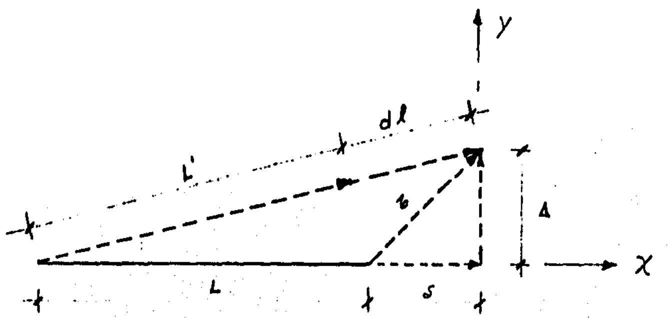
2.2 PRINCIPIO DE CONTINUIDAD.

Los desplazamientos que experimentan los nudos de una armadura al ser solicitada por fuerzas exteriores deben ser compatibles con las deformaciones que experimentan las barras de esta, esto es:

$\{ e \} = [a] \{ d \}$ (Esta ecuación se cumple sólo para desplazamientos pequeños).

Debido a que sólo se cumple para desplazamientos pequeños, no es aplicable para materiales muy deformables.

Por otro lado tomamos un elemento barra y provocamos una deformación $e = dl$ esta deformación se puede proyectar en dos deformaciones ortogonales, δ en la dirección "X", y Δ en la dirección "Y", demostraremos que el desplazamiento transv.. Δ se desprecia.



$$e = \sqrt{(L + \delta\ )^2 + \Delta^2} - L$$

$$e = \sqrt{L^2 + \delta^2 + 2\,L\delta + \Delta^2} - L$$

$$e = \sqrt{L^2\ (\ 1 + (\ \delta/L)^2 + 2\delta/L + (\Delta/L)^2)} - L$$

$$e = \quad L\ [\ 1 + 1/2\ (\delta/L)^2 + (\delta/L) + 1/2\ (\Delta/L)^2] \ - L$$

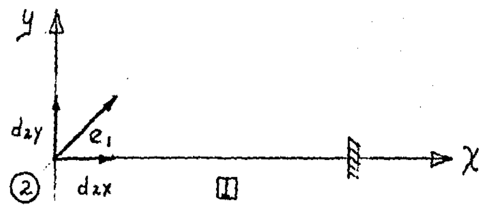
$$e = \quad 1/2\ \delta\ (\cancelto{0}{\delta/L}) + 1/2\Delta\ \ (\cancelto{0}{\Delta/L}) + \delta \qquad \Delta/L << 1 \text{ y } \delta/L << 1$$

Linealidad Geométrica.

$e = \delta$ desplazamiento longitud.; por lo tanto se desprecia el desplazamiento transv. por ser muy pequeño.

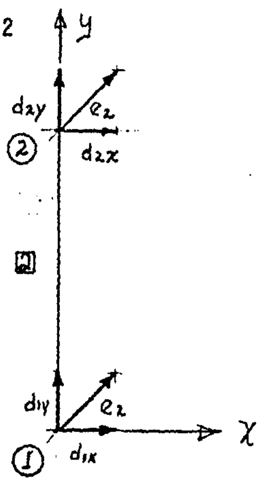
Una vez demostrado ésto obtendremos la relación entre las deformaciones de las barras y los desplazamientos de los nudos.

Para la barra 1.



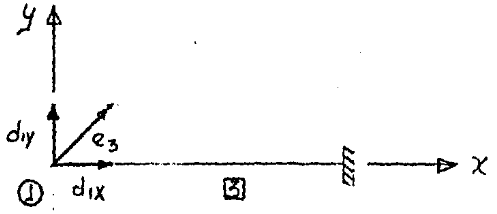
$$e_1 = -d_{2x}$$

Para la barra 2



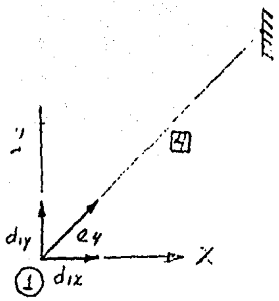
$$e_2 = d_{2y} - d_{1y}$$

Para la barra 3



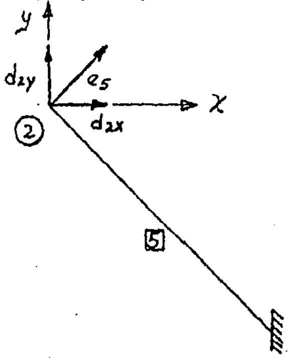
$$e_3 = - d_{1x}$$

Para la barra 4



$$e_4 = -0.7071\ d_{1x} - 0.7071\ d_{1y}$$

Para la barra 5



$$e_5 = -0.7071\ d_{2x} + 0.7071\ d_{2y}$$

Resumiendo:

BARRA / NUDO			1 x	1 y	2 x	2 y
1	e_1	=	-	-	$-d_{2}x$	-
2	e_2	=	-	$-d_{1}y$	-	$d_{2}y$
3	e_3	=	$-d_{1}x$	-	-	-
4	e_4	=	$-0.7071\ d_{1}x$	$-0.7071\ d_{1}y$	-	-
5	e_5	=	-	-	$-0.7071 d_{2}x$	$0.7071\ d_{2}y$

En forma matricial

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1x \\ d_1y \\ d_2x \\ d_2y \end{Bmatrix} \quad \text{ó}$$

$\{ e \} = [a] \{ d \}$ donde $[a]$ matriz de continuidad

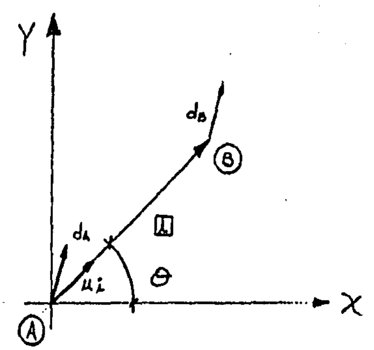
(N barras x 1) = (N barras x (N nud x 2))((N nud x 2) x 1) orden de cada matriz

Algoritmo para obtener la matriz [a] por renglones:

Para obtener el renglón "i" por ejemplo:

[a]

1
2
.
.
.
i $a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{ij}$



Dada una bara "i" como se muestra en el esquema. Le asignaremos un sentido arbitrario a la barra y un vector con el mismo sentido la - misma dirección pero de magnitud unitaria, cuyo vector de sus proyecciones respecto a un eje coordenado es el siguiente:

$$\{ u_i \} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{Bmatrix}$$

Si al punto de inicio de la barra le asignamos A y al punto de terminación B, y a los desplazamientos que sufren estos puntos debidas a solicitaciones externas les asignamos $d_{\bar{A}}$ y $d_{\bar{B}}$ respectivamente, - como se muestra en la figura, obtendremos la siguiente ecuación, para el desplazamiento total de la barra i:

$$ei = d_B \cdot u_i - d_A \cdot u_i \quad \text{ó}$$

$$e_i = d_{Bx} \times u_{ix} + d_{By} \times u_{iy} - (d_{Ax} \times d_{uix} + d_{Ay} \times d_{uiy})$$

En términos de u_i

$$e_i = \{u_i\}^T \{d_B\} - \{u_i\}^T \{d_A\}$$

Aplicando esta ecuación tenemos:

$$
[\,a\,] = \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \text{Nudo A} & & \text{Nudo B} & \\ x & y & x & y \end{array} \\
\begin{bmatrix}
a_{1xA} & a_{1yA} & a_{1xB} & a_{1yB} \\
a_{2xA} & a_{2yA} & a_{2xB} & a_{2yB} \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & & \\
-u_{ixA} & -u_{iyA} & u_{ixB} & u_{iyB}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Si el nudo tiene todos sus desplazamientos restringidos

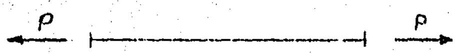
$$a_{ixj} = 0; \qquad a_{iyj} = 0$$

2.3 LEY DE HOOKE

Si definimos el vector de fuerzas axiales en cada elemento de la estructura como:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{NB} \end{Bmatrix} \quad \text{Fuerzas axiales en las barras}$$

La convención de signos será la siguiente:



Tensión (+)

Compresión (-)

Esfuerzo-Deformación:

Una barra prismática de sección recta en toda su longitud, de eje recto, y cargada axialmente, experimentará un alargamiento ó acortamiento por tracción (tensión) o por compresión respectivamente. Esta fuerza generará esfuerzos que no son otra cosa que una distribución contínua de la fuerza en el área de la sección recta, la intensidad de esta fuerza por unidad de área es la que se designa como esfuerzo y generalmente se designa con la letra σ, y que algebraicamente se designa como:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Tal ecuación muestra que el esfuerzo se mide en unidades de fuerza por unidad de área.

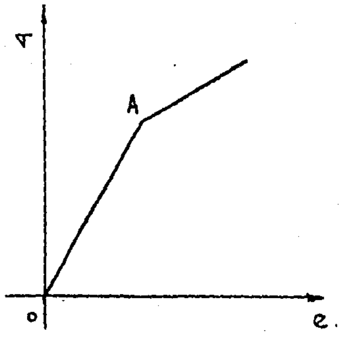
Una condición necesaria para que sea válida la ecuación es que el esfuerzo σ tiene que ser uniforme en la sección recta de la barra tal condición se cumple si la fuerza axial "P" pasa por el centroide de la sección recta. Si la carga "P" no actua en el centroide, resultará flexión de la barra, y será necesario entonces un análisis más complicado, por - otro lado se desprecia el peso propio de la barra.

El alargamiento total de la barra, que soporta una fuerza axial, se - representa por "e", y el alargamiento por unidad de longitud; llamado deformación unitaria o simplemente deformación, se determina entonces por la ecuación:

$$\varepsilon = \frac{e}{L}$$

Donde L es la longitud total de la barra, obsérvese que ε es adimensio nal, solo es válida si la deformación es uniforme en toda la longitud de la barra.

La mayor parte de los materiales estructurales tienen una región inicial en la gráfica deformación -esfuerzo en la que el material se comporta - tanto elástica como linealmente. La región desde O hasta A en el dia-- grama esfuerzo -deformación; cuando un material se comporta elásticamen te y además presenta una relación lineal entre esfuerzo y deformación, se dice que es linealmente elástico.



La relación lineal entre esfuerzo y deformación para una barra en tensión o compresión puede expresarse por la simple ecuación.

$$\sigma = E\varepsilon$$

En la que "E" es una constante de proporcionalidad conocida por módulo de elasticidad del material, se ve que este módulo es la pendiente de la gráfica deformación-esfuerzo en la región linealmente elástica, para la mayor parte de los materiales el módulo de elasticidad a la compresión es el mismo que a la tensión la ecuación anterior se llama generalmente Ley de Hooke.

Como vemos cuando una barra se carga el esfuerzo axial es $\sigma = P/A$ y la deformación axial es $\varepsilon = e/L$ combinado estas dos ecuaciones con la Ley de Hooke se obtiene la siguiente ecuación para el alargamiento total de la barra.

$$\frac{P}{A} = E\,\frac{e}{L} \qquad \text{despejando } e$$

$$e = \frac{PL}{EA} \qquad \text{ó} \qquad P = \frac{EA}{L}\,e$$

Esta ecuación muestra que el alargamiento total de la barra linealmente elástica es directamente proporcional a su carga y a su longitud, e inversamente proporcional al modulo de elasticidad y a su área transversal, el producto EA se conoce como rigidez axial de la barra.

La flexibilidad de la barra se define por la deformación total por unidad de carga de manera que la ecuación es L/EA. De manera análoga, la rigidez de la barra se define por la fuerza requerida para producir una deformación total unitaria así pues la rigidez es igual a EA/L el reciproco de la flexibilidad.

Si asignamos k a EA/L la ecuación anterior nos queda:

$$P = \left(\frac{EA}{L}\right) e = \quad p = k_e$$

Para cada barra nos queda:

$$Pi = ki\ ei \qquad \text{donde } i = 1, 2, 3, \ldots n_\beta$$

Además

$$ki = \frac{Ei \quad Ai}{Li}$$

Para un sistema de barras

$$P_1 = k_1 e_1$$

$$P_2 = k_2 e_2$$

$$P_3 = k_3 e_3$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$P_{nB} = k_{nB} \cdot e_{nB}$$

Matricialmente

$$\{P\} = [k]\{e\} \qquad ó$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Pn \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{nB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \\ \\ \\ e_{nB} \end{Bmatrix}$$

2.4 EQUILIBRIO

Ecuaciones de la Estática.

Cuando se somete un cuerpo rígido en reposo a la acción de un sistema fuerzas y momentos, las acciones deben estar en equilibrio estático, si el cuerpo ha de permanecer en reposo; si no es así, el cuerpo se pondrá en movimiento, la mayor parte de las estructuras están restringidas en tal forma que no pueden desplazarse libremente en el espacio; por tanto la acción restrictiva de los apoyos de la estructura producen el equilibrio de cualquier sistema de cargas que actue sobre ella.

Las condiciones que aseguran el equilibrio de un sistema de acciones coplanares son: (1) la suma algebraíca de todas las componentes de - fuerza en cualquier dirección debe ser nula y (2) la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas respecto a un punto específico perteneciente al plano determinado por ellas debe ser nula.

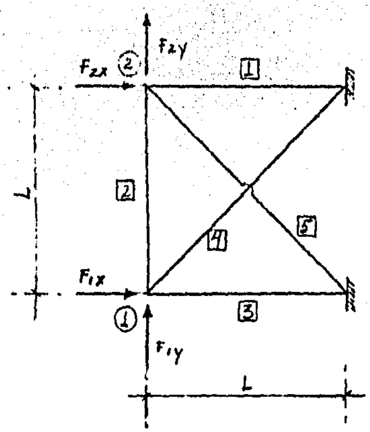
El requisito de anularse la suma de fuerzas en cualquier dirección - se satisface si las sumas algebraicas de las componentes de fuerza - en dos direcciones perpendiculares, es decir, independientes, se anulan. Luego, las condiciones que definen el estado de equilibrio estático se expresan mediante el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\Sigma Fx = 0 \qquad \Sigma Fy = 0 \qquad \Sigma Mj = 0$$

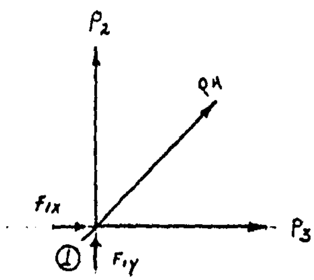
Estas tres ecuaciones de la estática deben ser satisfechas por cualquier sistema coplanar de acciones que actuen sobre un cuerpo libre.

Aplicando lo anterior al ejemplo 1 obtenemos el siguiente sistema - de ecuaciones:

Tomando nudo por nudo y aplicando las ecuaciones de equilibrio:



Nudo 1



Σ Fx = 0

$F_1x = -P_3 - 0.7071\ P_4$

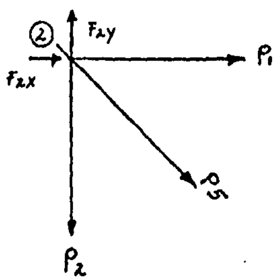
Σ Fy = 0

$F_1y = -P_2 - 0.7071\ P_4$

$\Sigma\ M_i = 0$

0

Nudo 2



Σ Fx = 0

$F_2x = -P_1 - 0.7071\ P_5$

Σ Fy = 0

$F_2y = P_2 + 0.7071\ P_5$

Σ Mi = 0

0

EN FORMA MATRICIAL

$$\{F\} = [a]^T \{p\}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -0.7071 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -0.7071 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -0.7071 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix}$$

Donde:

$[a]^T$ = Matriz de equilibrio.

Si comparamos la matriz de equilibrio con la matriz de continuidad, nos damos cuenta de que es su traspuesta por lo tanto:

Matriz de equilibrio = $[a]^T$
(matriz de continuidad)$^{\text{traspuesta}}$

Resumiendo:

Ecuación de compatibilidad

$$\{e\} = [a]\{d\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Ley de Hooke

$$\{P\} = [k]\ \{e\} \quad \ldots\ldots \qquad (2)$$

Ecuaciones de equilibrio

$$\{F\} = [a]^{T}\ \{P\} \quad \ldots\ldots \qquad (3)$$

2.5 SOLUCIÓN

Sustituyendo (2)en(3)

$$\{F\} = [a]^{T}\ [k]\ \{e\} \ldots\ldots \qquad (4)$$

Sustituyendo(1)en(4)

$$\{F\} = [a]^{T}\ [k]\ [a]\ \{d\}$$

Asignando

$$[K] = [a]^{T}\ [k]\ [a]$$

Obtenemos

$$\{F\} = [K]\ \{d\}$$

$[K]$ = Matriz de rigidez de la estructura.

Pasos que se deben seguir para llegar a la solución:

- Obtener la matriz $[a]$; matriz de continuidad

- Obtener su traspuesta $[a]^T$; matriz de equilibrio.

- Obtener la matriz de Rigidez para todas y cada una de las barras $[k]$

- Obtener la matriz de Rigidez de la estructura $[K] = [a]^T [k] [a]$

- Obtener el vector de fuerzas $\{F\}$

- Obtener la solución del sistema de ecuaciones $\{F\} = [K] \{d\}$

- Obtener el vector de deformación de las barras $\{e\} = [a] \{d\}$

- Obtener el vector de fuerzas internas $\{P\} = [k] \{e\}$

- Comprobar la solución $\{F\} = [a]^T \{P\}$

El orden de las matrices y vectores es el siguiente:

$[a] = (n_B, \ 2 \times n_N)$

$\{d\} = (2 \times n_N, \ 1)$

$\{e\} = (n_B, 1)$

$\{F\} = (2 \times n_N, 1)$

$[k] = (2 \times n_N, 2 \times n_N)$

$\{P\} = (n_B, 1)$

Donde:

n_B = número de barras

n_N = número de nudos

3. Manual de Uso del Programa

El programa funciona para armaduras bidimensionales, las cuales pueden ser isostáticas o hiperestáticas tanto interior como exteriormente o ambos casos. Además este programa tiene las siguientes restricciones:

1º Las cargas deben actuar en el mismo plano que la estructura.

2ª Todas las cargas deben ser puntuales y aplicadas en los nudos de la estructura.

3ª Todas y cada una de las barras deberán ser de sección constante a lo largo de su longitud, pudiendo variar entre barra y barra.

El procedimiento para la utilización de este programa consta de los siguientes pasos:

1º Referenciar la estructura a un sistema de ejes cartesianos, de preferencia haciendo coincidir un nudo de la armadura con el origen del sistema de ejes coordenados, para facilitar en lo posible la obtención de las coordenadas de cada nudo.

2° Numerar todas y cada una de las barras de la armadura de preferencia encerrando el número en un cuadro □ para evitar confusiones.

3° Numerar todos y cada uno de los nudos de la armadura de preferencia en un circulo O.

4° Dar un sentido a todas y cada una de las barras asignando de preferencia:

(A) Al inicio de la flecha, y

(B) A la terminación.

5° Obtener las coordenadas de todos y cada uno de los nudos de la armadura, de acuerdo al sistema de ejes coordenados que se haya elegido.

6° Encontrar la rigidez de todas y cada una de las barras (EA/L)

7° Definir el vector de fuerzas externas o actuantes. Todas las fuerzas deberán estar proyectadas en dos direcciones perpendiculares de acuerdo al sistema de ejes coordenados elegido en un principio.

8º Por último codificar los datos para alimentar el programa de acuerdo al formato que se indica a continuación:

1er. renglón:	4 espacios para poner el número de barras de la estructura:
	4 espacios para poner el número de nudos de la estructura.
2°. renglón: hasta N_B Renglones (N_B = número de barras)	4 espacios para poner el número de barra del 0000 al 9999.
	4 espacios para poner el valor del nudo "A"; del 0000 al 9999
	4 espacios para poner el valor del nudo "B", del 0000 al 9999.
	8 espacios para poner el valor de la coordenada "x" del nudo "A" debiendo poner siempre dos decimales. IIIII.dd
	8 espacios para poner el valor de la coordenada "y" del nudo "A" debiendo poner siempre dos decimales. IIIII.dd

8 espacios para poner el valor de la coordenada "x" del nudo "B" debiendo poner siempre dos decimales. IIIII.dd

8 espacios para poner el valor de la coordenada "y" del nudo "B" debiendo poner siempre dos decimales. IIIII.dd

Después de que se hayan metido todas las coordenadas de los nudos de cada una de las barras, el siguiente renglón es:

Siguiente renglón: 5 espacios de 16 campos cada uno por cada renglón para darle el valor de la rigidez de cada barra, y deberá ser en forma exponencial esto es:

IIIIIIII.ddd E $\pm$ nn

8 campos para el número entero (I)
Un campo para el punto decimal (.)
3 campos para los decimales (d)
Un campo para la letra E
Un campo para el signo del exponente (+ ó -)
Dos campos para el exponente (n)

Ejemplo:

6666.666×10^6 = 00006666.666E+06

100×10^3 00000100.000E 03

Después de que se hayan metido los valores de la rigidez de todas y cada una de las barras (5 por renglón) el siguiente renglón será:

Siguiente renglón: 10 espacios de 8 campos cada uno por renglón, para darle el valor de las cargas en cada nudo, primero la fuerza en la dirección "x" y luego en la dirección "y", el valor debe llevar dos decimales.

IIIII.dd

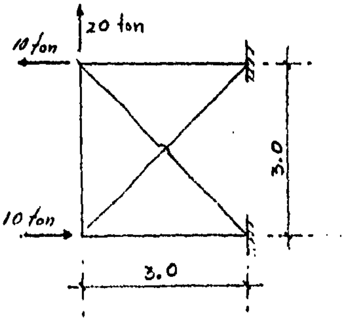
5 campos para los enteros (I)

1 campo para el punto decimal (.)

2 campos para decimales (d)

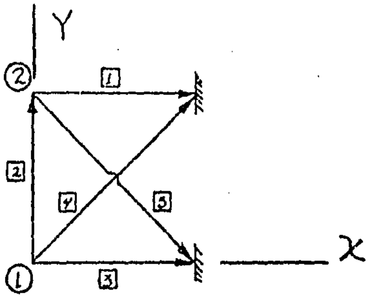
Para su mejor comprensión damos el siguiente ejemplo:

DATOS
$E = 2.1 \times 10^6$ Kg./cm.^{2}
A,= 25 cm.^{2}



Dada la armadura anterior encontraremos las fuerzas axiales en todas y cada una de las barras, así como los desplazamientos de todos y cada - uno de los nudos.

En primer lugar se enumeran todos y cada uno de los nudos de ésta ence rrando el número en un círculo, se enumeran también todas y cada una - de la barras encerrando el número en un cuadro, y se elige el origen - del sistema coordenado en un nudo de la armadura de modo que se puedan encontrar las coordenadas de todos y cada uno de los nudos de una mane ra fácil y rápida, y por último se le asigna un sentido a todas y cada una de las barras como se muestra en la figura que a continuación se - esquematiza:



Como se puede observar, tenemos un total de cinco barras y dos nudos - que no tienen restringido su desplazamiento, se observa además que se - eligió como origen del sistema coordenado al nudo número 1.

El siguiente punto es encontrar las coordenadas de todos y cada uno de los nudos de la armadura, para nuestro caso tenemos:

BARRA	NUDO A	NUDO B	NUDO A CORXA	NUDO A CORYA	NUDO B CORXB	NUDO B CORYB
1	2	0	0	3	3	3
2	1	2	0	0	0	3
3	1	0	0	0	3	0
4	1	0	0	0	3	3
5	2	0	0	3	3	0

El siguiente punto es obtener la rigidez de todas y cada una de las barras (EA/L) para el ejemplo tenemos:

RIGIDEZ (1) = 21×10^{6} (25×10^{-4}) /3 = 17,500 Ton/m
RIGIDEZ (2) = 21×10^{6} (25×10^{-4}) /3 = 17,500 Ton/m
RIGIDEZ (3) = 21×10^{6} (25×10^{-4}) /3 = 17,500 Ton/m
RIGIDEZ (4) = 21×10^{6} (25×10^{-4}) / 18 = 12,374 Ton/m
RIGIDEZ (5) = 21×10^{6} (25×10^{-4}) / 18 = 12,374 Ton/m

El siguiente paso es encontrar el vector de fuerzas externas que actúa sobre la armadura, para nuestro ejemplo tenemos:

F_{1X} = 10 TON.

F_{1Y} = 0 TON

F_{2X} = -10 TON

F_{2Y} = 20 TON

De modo que la codificación de los datos es la siguiente:

DATOS PARA EL PROGRAMA *Ejem. 1* HOJA *1 de 1*

1–5	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50	51–55	56–60	61–65	66–70	71–75	76–80
00050	002														
00010	00200	00000	00.00	00003	.0000	003.0	00000	3.00							
0002	1	2	0.00	0	.00	0.0	0	3.00							
3	1	0	0.00	0	.00	3.0	0	0.00							
4	1	0	0.00	0	.00	3.0	0	3.00							
5	2	0	0.00	3	.00	3.0	0	0.00							
00017	50.00	00E 0	10001	750.0	000E	01.000	1750.	0000E	0100	01237	.4365	E 010	0 0123	7.436	3E 01
00010	.0000	000.0	0-001	0.000	0020.	00									

4. Programa para la Solución en el Plano de Armaduras.

VAX/VMS RSC200 ARMADURAS 16-JAN-1985 19:09 LPA0: 16-JAN-1985 19:09 DISK$CECAF1:[RSC200.DALIRA]ARMADURAS.LIS;1 VAX/VMS
VAX/VMS RSC200 ARMADURAS 16-JAN-1985 19:09 LPA0: 16-JAN-1985 19:09 DISK$CECAF1:[RSC200.DALIRA]ARMADURAS.LIS;1 VAX/VMS

RSC200

ARMADURAS.

LIS;1

RSC200

VAX/VMS RSC200 ARMADURAS 16-JAN-1985 19:09 LPA0: 16-JAN-1985 19:09 DISK$CECAF1:[RSC200.DALIRA]ARMADURAS.LIS;1 VAX/VMS
VAX/VMS RSC200 ARMADURAS 16-JAN-1985 19:09 LPA0: 16-JAN-1985 19:09 DISK$CECAF1:[RSC200.DALIRA]ARMADURAS.LIS;1 VAX/VMS

```
C PROGRAMA PARA EL ANALISIS DE MARCOS PLANOS TOMANDO EN CUENTA FLEXION Y COMPRESION
      DIMENSION DATO(100,7),KE(100,100),F(100),S(100,
     *100),KS1(100),D(100),D1(100),T(3,3),KS2(6,6),F1(100),R(100)
      REAL KS(3,3),K1,K2,K3,K4,KE,II,LONG,KS1,KS2
      OPEN(UNIT=5,FILE='KORM2.DAT',STATUS='OLD')
      READ (5,1000)NELE,NNUD
 1000 FORMAT (2I4)
      WRITE (6,3001)NELE,NNUD
 3001 FORMAT (/,10X,'NUMERO DE BARRAS= ',I4,/,10X,'NUMERO DE NUD
     *OS= ',I4)
      WRITE (6,3002)
 3002 FORMAT (//,6X,'BARRA',6X,'NUDO A',6X,'NUDO B',6X,'ANG.D
     *E INCLINACION',5X,'MOD. DE ELAST.',6X,'MOM. DE INERCIA'
     *,6X,'AREA',6X,'LONGITUD')
      J1=1
      FIN=NELE
      N=NNUD*3
   50 FIN=FIN-1
      READ (5,1001)NUDOA,NUDOB,O,EE,II,AREA,LONG
 1001 FORMAT (2I3,F6.2,2E11.4,2F10.4)
      WRITE (6,3003)J1,NUDOA,NUDOB,O,EE,II,AREA,LONG
 3003 FORMAT (/,6X,I4,7X,I4,8X,I4,14X,F6.2,10X,E11.4
     *,9X,E11.4,5X,F10.4,5X,F10.4)
      DATO(J1,1)=NUDOA
      DATO(J1,2)=NUDOB
      DATO(J1,3)=O
      DATO(J1,4)=EE
      DATO(J1,5)=II
      DATO(J1,6)=AREA
      DATO(J1,7)=LONG
      J1=J1+1
C OBTENCION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ A-A DE LA BARRA DEL SISTEMA GLOBAL
      K=0.0
      K1=EE*AREA/LONG
      K2=12*EE*II/LONG**3
      K3=6*EE*II/LONG**2
      K4=4*EE*II/LONG
      IF(NUDOA.EQ.0)GO TO 1
      K=K+1
      IF(O.EQ.0)GO TO 2
      IF(O.EQ.90)GO TO 3
      CALL RIG3(K1,K2,K3,K4,O,KS)
      GO TO 4
C OBTENCION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ B-B DE LA BARRA DEL SISTEMA GLOBAL
    1 IF(NUDOB.EQ.0)GO TO 5
      K=K+1
      IF(O.EQ.0)GO TO 6
      IF(O.EQ.90)GO TO 7
      K3=-K3
      CALL RIG3(K1,K2,K3,K4,O,KS)
      K3=-K3
      GO TO 8
    2 CALL RIG1(K1,K2,K3,K4,KS)
      GO TO 4
    3 K3=-K3
```

```
      DO 120,I=1,NELE
  120 WRITE (6,2012)I,RIG(I)
 2012 FORMAT (8X,I4,5X,E15.4)
 1002 FORMAT (5E16.4)
      DO 45,L=1,N
      DO 45,J=1,N
      DO 45,I=1,NELE
   45 K(L,J)=A(I,L)*RIG(I)*A(I,J)+K(L,J)
C SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES F=KD
      WRITE (6,2013)
 2013 FORMAT (7X,'NODO',10X,'FZA. X',10X,'FZA. Y')
      READ (5,1003)(FUER(I),I=1,N)
      J=0
      DO 125,I=1,N,2
      J=J+1
  125 WRITE (6,2014)J,FUER(I),FUER(I+1)
 2014 FORMAT (8X,I4,7X,F8.2,7X,F8.2,7X,F8.2)
 1003 FORMAT (10F8.2)
      DO 50,I=1,N
      DO 50,J=1,N
      IF(I.GT.J)GO TO 55
      SUM=0.0
      IF(I.EQ.J)GO TO 60
      DO 65,L=1,I-1
   65 SUM=SUM+S(L,I)*S(L,J)
      A1=K(I,J)-SUM
      IF(A1.EQ.0)GO TO 55
      S(I,J)=A1/S(I,I)
      GO TO 50
   60 DO 70,L=1,I-1
   70 SUM=SUM+S(L,I)**2
      A2=K(I,I)-SUM
      S(I,I)=SQRT(A2)
      GO TO 50
   55 S(I,J)=0.0
   50 K1(I)=FUER(1)/S(1,1)
      DO 71,I=2,N
      SUM=0.0
      DO 72,L=1,I-1
   72 SUM=SUM+S(L,I)*K1(L)
      A1=FUER(I)-SUM
      IF(S(I,I).EQ.0)GO TO 73
      K1(I)=A1/S(I,I)
      GO TO 71
   73 K1(I)=0.0
   71 D(N)=K1(N)/S(N,N)
      I1=N-1
   85 SUM=0.0
      DO 75,L=I1+1,N
   75 SUM=SUM+S(I1,L)*D(L)
      IF(S(I1,I1).EQ.0)GO TO 400
      D(I1)=(K1(I1)-SUM)/S(I1,I1)
      GO TO 401
  400 D(I1)=0.0
  401 I1=I1-1
```

```
      IF(II.EQ.0)GO TO 80
      GO TO 85
   80 WRITE (6,2004)
 2004 FORMAT (26X,'DESPLAZAMIENTOS')
      WRITE (6,2008)
 2008 FORMAT (8X,'NUDO',15X,'DIREC.X',21X,'DIRC.Y')
      I=1
      J=1
   86 WRITE (6,2009)I,D(J),D(J+1)
 2009 FORMAT (10X,I2,8X,F20.8,8X,F20.8)
      I=I+1
      J=J+2
      IF(J.GT.N)GO TO 90
      GO TO 86
   90 DO 95,I=1,NEBE
      E(I)=0.0
      DO 95,J=1,N
   95 E(I)=E(I)+A(I,J)*D(J)
      DO 100,I=1,NEBE
  100 P(I)=RIG(I)*E(I)
      WRITE (6,2010)
 2010 FORMAT (10X,'BARRA',12X,'FUERZA')
      DO 105,I=1,NEBE
  105 WRITE (6,2005)I,P(I)
 2005 FORMAT (12X,I2,6X,F20.8)
      WRITE (6,2006)
 2006 FORMAT (/,10X,'FUERZAS EXTERIORES')
      DO 110,I=1,N
      F=0.0
      DO 115,J=1,NEBE
  115 F=F+A(J,I)*P(J)
      WRITE (6,2007)F
 2007 FORMAT (12X,F20.8)
  110 CONTINUE
      CALL EXIT
      END
```

PROGRAM SECTIONS

NAME	BYTES	ATTRIBUTES
0 $CODE	2379	PIC CON REL LCL SHR EXE RD NOWRT LONG
1 $PDATA	436	PIC CON REL LCL SHR NOEXE RD NOWRT LONG
2 $LOCAL	122612	PIC CON REL LCL NOSHR NOEXE RD WRT LONG
TOTAL SPACE ALLOCATED	125427	

ENTRY POINTS

ADDRESS	TYPE	NAME
0-00000000		ARMADURASS$MAIN

VARIABLES

ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME
2-0001DE70	R*4	A1	2-0001DE74	R*4	A2	2-0001DE50	R*4	CORAA	2-0001DE58	R*4	CORAB
2-0001DE54	R*4	CORYA	2-0001DE5C	R*4	CORYB	2-0001DE7C	R*4	F	[illegible]	[illegible]	F1
2-0001DE3C	I*4	I	2-0001DE78	I*4	II	2-0001DE40	I*4	J	[illegible]	I*4	[illegible]
2-0001DE24	R*4	LCA	2-0001DE28	R*4	LCB	2-0001DE20	R*4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2-0001DE44	I*4	NBAR	2-0001DE2C	I*4	NEGE	2-0001DE30	I*4	[illegible]	[illegible]	I*4	[illegible]
2-0001DE4C	I*4	NGOOD	2-0001DE6C	R*4	SUM	2-0001DE00	R*4	U1	[illegible]	[illegible]	[illegible]

ARRAYS

ADDRESS	TYPE	NAME	BYTES	DIMENSIONS
2-00000000	R*4	A	40000	(100, 100)
2-00010970	R*4	D	400	(100)
2-00010900	R*4	E	400	(100)
2-00013A10	R*4	FUER	400	(100)
2-00009D00	R*4	K	40000	(100, 100)
2-00010760	R*4	K1	400	(100)
2-00010C90	R*4	P	400	(100)
2-00009C40	R*4	RIG	400	(100)
2-00013BA0	R*4	S	40000	(100, 100)

LABELS

ADDRESS	LABEL	ADDRESS	LABEL	ADDRESS	LABEL	ADDRESS	LABEL	ADDRESS	LABEL	ADDRESS	LABEL
0-00000094	1	0-000001C0	5	0-00000100	10	0-00000100	15	0-000001E0	20	0-00000223	25
0-00000266	30	0-00000272	35	0-000002E2	40	0-00000340	45	0-000005C0	50	0-000003A[illegible]	55
0-0000051[illegible]	60	0-0000048C	65	0-00000540	70	0-00000680	71	0-000006[illegible]	72	0-[illegible]	73
0-000006C6	75	0-00000743	80	0-000006AF	85	0-00000777	88	0-000007C7	90	0-[illegible]	95
0-000006[illegible]	100	0-00000870	105	0-00000919	110	0-000008F1	115	0-00000[illegible]	120	0-[illegible]	125
0-0000072F	400	0-00000738	401	1-0000000A	1000'	1-000000B7	1001'	1-000000FA	1002'	1-[illegible]	1003'

```
1-0000000F   2000'     1-00000041   2001'     1-00000053   2002'     1-000000C1   2003'     1-00000137   200[illegible]'     1-[illegible]   20[illegible]'
1-0000019C   2006'     1-000001A5   2007'     1-000001AD   2008'     1-[illegible]   2009'     1-[illegible]   201[illegible]'     1-[illegible]   201[illegible]'
1-000000F0   2012'     1-00000100   2013'     1-00000110   2014'
```

FUNCTIONS AND SUBROUTINES REFERENCED

```
TYPE  NAME              TYPE  NAME              TYPE  NAME

      FOR$EXIT                FOR$OPEN           R*4  MTH$SQRT
```

COMMAND QUALIFIERS

```
FORTRAN /NOOPTIMIZE/LIS ARMADURAS

/CHECK=(NOBOUNDS,OVERFLOW,NOUNDERFLOW)
/DEBUG=(NOSYMBOLS,TRACEBACK)
/STANDARD=(NOSYNTAX,NOSOURCE_FORM)
/SHOW=(NOPREPROCESSOR,NOINCLUDE,MAP)
/F77  /NOG_FLOATING  /I4  /NOOPTIMIZE  /WARNINGS  /NOD_LINES  /NOCROSS_REFERENCE  /NOMACHINE_CODE  /CONTINUATIONS=19
```

COMPILATION STATISTICS

```
RUN TIME:          5.90 SECONDS
ELAPSED TIME:      10.03 SECONDS
PAGE FAULTS:       622
DYNAMIC MEMORY:    295 PAGES
```

NUMERO DE BARRAS= 5
NUMERO DE NUDOS= 2

BARRA	NUDO A	NUDO B	NUDO A COORDENADA X	NUDO A COORDENADA Y	NUDO B COORDENADA X	NUDO B COORDENADA Y
1	2	0	0.00	3.00	3.00	3.00
2	1	2	0.00	0.00	0.00	3.00
3	1	0	0.00	0.00	3.00	0.00
4	1	0	0.00	0.00	3.00	3.00
5	2	0	0.00	3.00	3.00	0.00

BARRA	RIGIDEZ
1	0.1750E+05
2	0.1750E+05
3	0.1750E+05
4	0.1237E+05
5	0.1237E+05

NUDO	FZA. X	FZA. Y
1	10.00	0.00
2	-10.00	20.00

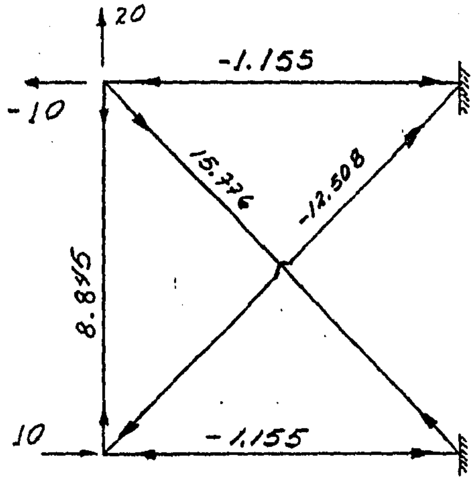
DESPLAZAMIENTOS

NUDO	DIREC.X	DIRC.Y
1	0.00006601	0.00136353
2	0.00006601	0.00180895

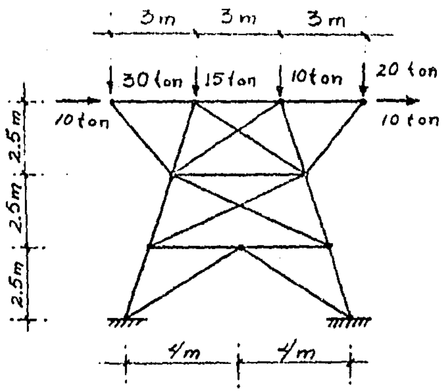
BARRA	FUERZA
1	-1.15515077
2	8.84184673
3	-1.15515709
4	-12.50649724
5	15.77570733

FUERZAS EXTERIORES
10.00000095
-0.00000286
-10.00000286
20.00000000

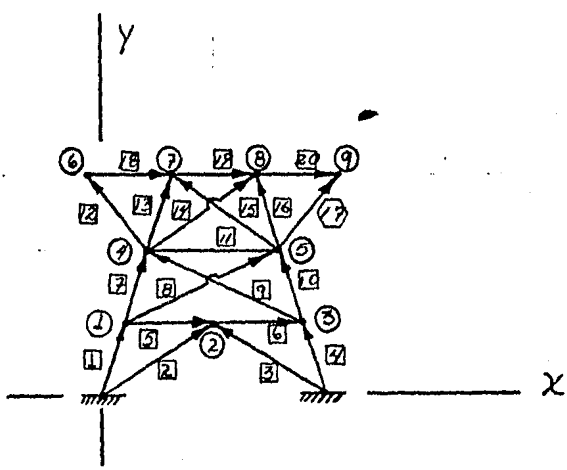
R E S U L T A D O S:



4.2 EJEMPLO A.



Dada la armadura que se muestra en la figura anterior, encontrar el desplazamiento que sufren los nudos de ésta, al ser solicitada por las fuerzas exteriores que se muestran, así como encontrar el valor de las fuerzas internas en todas y cada una de las barras.



Los nudos y las coordenadas de los extremos de la barra son las siguientes

			NUDO A		NUDO B	
BARRA	NUDO A	NUDO B	CORXA	CORYA	CORXB	CORYB
1	0	1	0.00	0.00	0.83	2.50
2	0	2	0.00	0.00	4.00	2.50
3	0	2	8.00	0.00	4.00	2.50
4	0	3	8.00	0.00	7.16	2.50
5	1	2	0.83	2.50	4.00	2.50
6	2	3	4.00	2.50	7.16	2.50
7	1	4	0.83	2.50	1.66	5.00
8	1	5	0.83	2.50	6.33	5.00
9	3	4	7.16	2.50	1.66	5.00
10	3	5	7.16	2.50	6.33	5.00
11	4	5	1.66	5.00	6.53	5.00
12	4	6	1.66	5.00	-0.50	7.50
13	4	7	1.66	5.00	2.50	7.50
14	4	8	1.66	5.00	5.50	7.50
15	5	7	6.33	5.00	2.50	7.50
16	5	8	6.33	5.00	5.50	7.50
17	5	9	6.33	5.00	8.50	7.50
18	6	7	-0.50	7.50	2.50	7.50
19	7	8	2.50	7.50	5.50	7.50
20	8	9	5.50	7.50	8.50	7.50

La rigidez de todas y cada una de las barras es la siguiente:

$21 \times 10^6 \; (25 \times 10^{-4}) \; /2,6352 = 19,922$ Ton/m

$21 \times 10^6 \; (25 \times 10^{-4}) \; /4.7169 = 11,130$ "

$21 \times 10^6 \; (25 \times 10^{-4}) \; /3.1667 = 16,570$ "

$21 \times 10^6 \; (25 \times 10^{-4}) \; /6.0415 = 8,690$ "

$21 \times 10^6 \ (25 \times 10^{-4}) \ /4.6666 = 11{,}250$ Ton/m.

$21 \times 10^6 \ (25 \times 10^{-4}) \ /3.3082 = 15{,}870$ "

$21 \times 10^6 \ (25 \times 10^{-4}) \ /4.5765 = 11{,}472$ "

$21 \times 10^6 \ (25 \times 10^{-4}) \ /3.0000 = 17{,}500$ "

RIGIDEZ (1) = 19,922 Ton/m

RIGIDEZ (2) = 11,130 "

RIGIDEZ (3) = 11,130 "

RIGIDEZ (4) = 19,922 "

RIGIDEZ (5) = 16,539 "

RIGIDEZ (6) = 16,579 "

RIGIDEZ (7) = 19,922 "

RIGIDEZ (8) = 8,690 "

RIGIDEZ (9) = 8,690 "

RIGIDEZ (10) = 19,922 "

RIGIDEZ (11) = 11,250 "

RIGIDEZ (12) = 15,870 "

RIGIDEZ (13) = 19,922 "

RIGIDEZ (14) = 11,472 "

RIGIDEZ (15) = 11,472 "

RIGIDEZ (16) = 19,922 "

RIGIDEZ (17) = 15,870 "

RIGIDEZ (18) = 17,500 "

RIGIDEZ (19) = 17,500 "

RIGIDEZ (20) = 17,500 "

El vector de fuerzas es el siguiente:

$F_{1X} = 0$ TON.

$F_{1Y} = 0$ "

$F_{2X} = 0$ "

$F_{2Y} = 0$ "

$F_{3X} = 0$ "

$F_{3Y} = 0$ "

$F_{4X} = 0$ "

$F_{4Y} = 0$ "

$F_{5X} = 0$ "

$F_{5Y} = 0$ "

$F_{6X} = 10$ "

$F_{6Y} = -30$ "

$F_{7X} = 0$ "

$F_{7Y} = -15$ "

$F_{8X} = 0$ "

$F_{8Y} = -10$ "

$F_{9X} = 10$ "

$F_{9Y} = -20$ "

De modo que la codificación de datos es la siguiente:

DATOS PARA EL PROGRAMA Ejem. A HOJA 1 de 2

```
0020000009
000100000001000000.00000001.00000000.8300002.50
   2    0    2    0.00     0.00    4.00     2.50
   3    0    2    0.00     0.00    4.00     2.50
   4    0    3    8.00     0.00    7.16     2.50
   5    1    2    0.83     2.50    4.00     2.50
   6    2    3    4.00     2.50    7.16     2.50
   7    1    4    0.83     2.50    1.66     5.00
   8    1    5    0.83     2.50    6.33     5.00
   9    3    4    7.16     2.50    1.66     5.00
  10    3    5    7.16     2.50    6.33     5.00
  11    4    5    1.66     5.00    6.33     5.00
  12    4    6    1.66     5.00    0.50     7.50
  13    4    7    1.66     5.00    2.50     7.50
  14    4    8    1.66     5.00    5.50     7.50
  15    5    7    6.33     5.00    2.50     7.50
  16    5    8    6.33     5.00    5.50     7.50
  17    5    9    6.33     5.00    8.50     7.50
  18    6    7   -0.50     7.50    2.50     7.50
  19    7    8    2.50     7.50    5.50     7.50
  20    8    9    5.50     7.50    8.50     7.50
0000199.2236E 020000111.3019E 020000111.3019E 020000199.2236E 020000165.7877E 02
    165.7877E 02    199.2236E 02     86.8989E 02     86.8989E 02    199.2236E 02
    112.5016E 02    158.6966E 02    199.2236E 02    111.7165E 02    111.7165E 02
    199.2236E 02    158.6966E 02    175.0000E 02    175.0000E 02    175.0000E 02
```

DATOS PARA EL PROGRAMA *Ejem. A* HOJA *2 de 2*

```
1   5    10   15   20   25   30   35   40   45   50   55   60   65   70   75   80
00000.00000000.000000000.0000000000.0000000.00000000.0000000.0000000000.0000.0000000000.0
   10.0   -30.0       0.00  -15.00     0.00  -10.00    10.00   -20.00
```

NUMERO DE BARRAS= 20
NUMERO DE NUDOS= 9

			NUDO I		NUDO J	
BARRA	NUDO I	NUDO J	COORDENADA X	COORDENADA Y	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0	1	0.00	[illegible]	0.33	2.50
2	0	2	0.00	0.00	4.00	2.50
3	0	2	8.[illegible]	[illegible]	1.00	2.50
4	0	3	8.00	0.00	7.16	2.50
5	1	2	0.83	2.50	4.00	2.50
6	2	3	4.00	2.50	7.16	2.50
7	1	4	0.83	2.50	1.00	5.00
8	3	5	0.83	2.50	0.33	5.00
9	3	4	7.16	2.50	1.00	5.00
10	3	5	7.16	2.50	[illegible]	5.00
11	4	5	1.66	5.00	[illegible]	5.00
12	4	6	1.66	5.00	[illegible]	7.50
13	4	7	1.66	5.00	2.50	7.50
14	4	8	1.66	5.00	[illegible]	7.50
15	5	7	6.33	5.00	[illegible]	7.50
16	5	8	6.33	5.00	5.00	7.50
17	5	9	6.33	[illegible]	[illegible]	7.50

18	6	7	-0.50	7.50	2.50	7.50
19	7	8	2.50	7.50	5.50	7.50
20	8	9	5.50	7.50	8.50	7.50

ASTA	RIGIDEZ
1	0.1992E+05
2	0.1111E+05
3	0.1113E+05
4	0.1992E+05
5	0.1658E+05
6	0.1658E+05
7	0.1992E+05
8	0.8690E+04
9	0.8690E+04
10	0.1992E+05
11	0.1125E+05
12	0.1587E+05
13	0.1992E+05
14	0.1147E+05
15	0.1147E+05
16	0.1992E+05
17	0.1587E+05
18	0.1750E+05
19	0.1750E+05
20	0.1750E+05

NUDO	FZA. X	FZA. Y
1	0.00	0.00
2	0.00	0.00
3	0.00	0.00
4	0.00	0.00
5	0.00	0.00
6	10.00	-30.00
7	0.00	-15.00
8	0.00	-10.00
9	10.00	-20.00

DESPLAZAMIENTOS

NUDO	DIREC.X	DIREC.Y
1	0.00009154	-0.00196430
2	0.00092433	0.00000000
3	0.00189949	-0.00189574
4	0.00325016	-0.00439996
5	0.00172150	-0.00398050
6	0.00135725	-0.00933669
7	0.00226096	-0.00462476
8	0.00382729	-0.00400837
9	0.00499131	-0.00963443

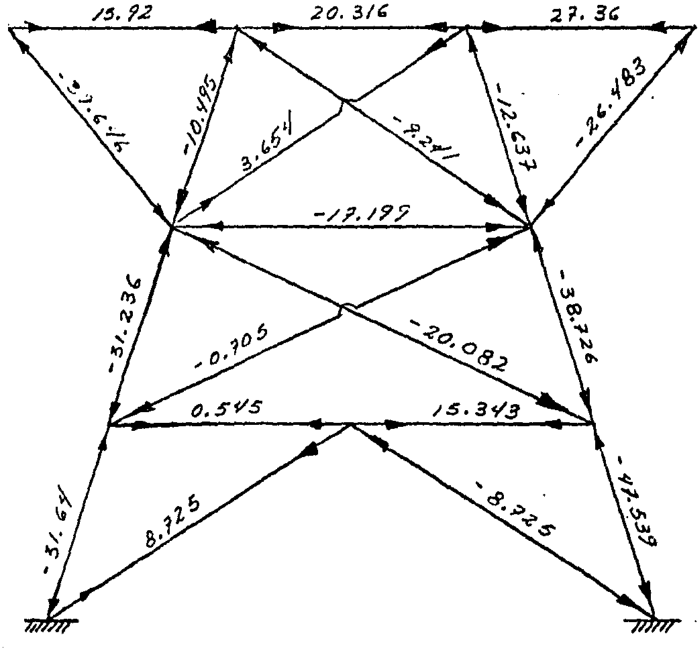
BARRA	FUERZA
1	-31.94356603
2	7.72511959
3	-6.72511959
4	-47.94008702
5	0.94523526
6	15.34306732
7	-31.23002486
8	-0.70530339
9	-20.08425000
10	-38.72567779

11	-17.1[illegible]21675
12	-35.[illegible]0051671
13	-11.9[illegible]1[illegible]56
14	1.0[illegible]377927
15	-0.2[illegible]1[illegible]0694
16	-17.03722229
17	-26.[illegible]1131173
18	15.[illegible]2[illegible]0077[illegible]
19	29.31[illegible]1[illegible]2[illegible]
20	27.36000252

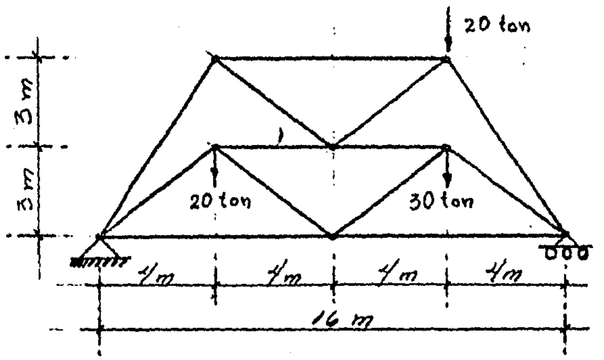
FUERZAS EXTERIORES

0.[illegible]0062[illegible]2
0.[illegible]1132
[illegible].000[illegible]0068
0.00000000
0.00000191
0.00000381
-0.00001073
0.00000589
-0.00000705
-0.00000954
[illegible].99999128
-30.00000000
-0.00000763
-10.999[illegible]9523
-0.99[illegible]0057[illegible]
-10.00000191
10.[illegible]959
-19.99999237

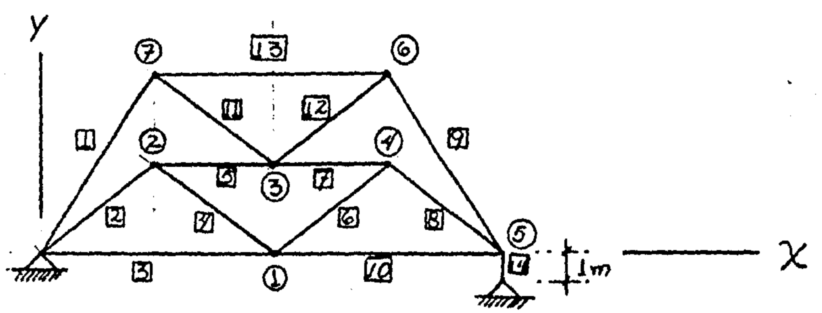
R E S U L T A D O S :


15.92
20.316
27.36
-10.495
3.654
-9.241
-12.637
-26.483
-17.197
-31.236
-0.705
-20.082
-38.726
0.545
15.343
-31.64
8.725
-8.725
-47.539

4.3 EJEMPLO B



Dada la armadura que se muestra en la figura anterior, encontrar el desplazamiento que sufren los nudos de éste al ser solicitada por - las fuerzas exteriores que se muestran, así como encontrar el valor de las fuerzas internas en todas y cada una de las barras,



Los nudos y las cordenadas de los extremos de la barra son las siguientes:

			NUDO A		NUDO B	
BARRA	NUDO A	NUDO B	CORXA	CORYA	CORXB	CORYB
1	0	7	0.00	0.00	4.00	6.00
2	0	2	0.00	0.00	4.00	3.00
3	0	1	0.00	0.00	8.00	0.00
4	1	2	8.00	0.00	4.00	3.00
5	2	3	4.00	3.00	8.00	3.00
6	1	4	8.00	0.00	12.00	3.00
7	3	4	8.00	3.00	12.00	3.00
8	5	4	16.00	0.00	12.00	3.00
9	5	6	16.00	0.00	12.00	6.00
10	1	5	8.00	0.00	16.00	0.00
11	3	7	8.00	3.00	4.00	6.00
12	3	6	8.00	3.00	12.00	6.00
13	7	6	4.00	6.00	12.00	6.00
14	0	5	16.00	-1.00	16.00	0.00

La rigidez de todas y cada una de las barras es la siguiente:

$21 \times 10^6 \ (25 \times 10^{-4}) \ /7.2111 = 7,280$ Ton/m

$21 \times 10^6 \ (25 \times 10^{-4}) \ /5.0000 = 10,500$ "

$21 \times 10^6 \ (25 \times 10^{-4}) \ /8.0000 = 6,562$ "

$21 \times 10^6 \ (25 \times 10^{-4}) \ /4.0000 = 13,125$ "

$21 \times 10^6 \ (25 \times 10^{-4}) \ /1.0000 = 52,500$ " Pero por ser apoyo 1×10^8

RIGIDEZ (1) = 7,280 Ton/m

RIGIDEZ (2) = 10,500 "

RIGIDEZ (3) = 6,562 "

RIGIDEZ (4) = 10,500 "

RIGIDEZ (5) = 13,125 "

RIGIDEZ (6) = 10,500 "

RIGIDEZ (7) = 13,125 "

RIGIDEZ (8) = 10,500 "

RIGIDEZ (9) = 7,280 "

RIGIDEZ (10) = 6,562 "

RIGIDEZ (11) = 10,500 "

RIGIDEZ (12) = 10,500 "

RIGIDEZ (13) = 6,562 "

RIGIDEZ (14) = 1×10^{6} "

El vector de fuerzas es el siguiente:

$F_{1X} = 0$ Ton.

$F_{1Y} = 0$ "

$F_{2X} = 0$ "

$F_{2Y} = -20$ "

$F_{3X} = 0$ "

$F_{3Y} = 0$ "

$F_{4X} = 0$ "

$F_{4Y} = -30$ "

$F_{5X} = 0$ Ton.

$F_{5Y} = 0$ "

$F_{6X} = 0$ "

$F_{6Y} = -20$ "

$F_{7X} = 0$ "

$F_{7Y} = 0$ "

De modo que la codificación de datos es la siguiente:

DATOS PARA EL PROGRAMA *Ejem. B* HOJA *1 de 1*

```
00140007
00010000000200000.000000000.0000004.0000006.00
    2    0    2     0.00      0.00      4.00      3.00
    3    0    1     0.00      0.00      8.00      0.00
    4    1    2     8.00      0.00      4.00      3.00
    5    2    3     4.00      3.00      8.00      3.00
    6    1    4     8.00      0.00     12.00      3.00
    7    3    4     8.00      3.00     12.00      3.00
    8    5    4    16.00      0.00     12.00      3.00
    9    5    6    16.00      0.00     12.00      6.00
   10    1    5     8.00      0.00     16.00      0.00
   11    3    7     8.00      3.00      4.00      6.00
   12    3    6     8.00      3.00     12.00      6.00
   13    7    6     4.00      6.00     12.00      6.00
   14    0    5    16.00     -1.00     16.00      0.00
0000072.8044E 020000105.0000E 020000065.6250E 020000105.0000E 020000131.2500E 02
    105.    E 02    131.25  E 02    105.    E 02      72.8044E 02     65.6250E 02
    195.    E 02    105.    E 02     65.6250E 02       1.    E 08
00000.00000.00.0000000.00  -20.0000000.0000000.0000000.00  -30.0000000.0000000.00
    0.00  -20.00    0.00    0.00
```

NUMERO DE BARRAS= 14
NUMERO DE NODOS= 7

			NUDO A		NUDO B	
BARRA	NUDO A	NUDO B	COORDENADA X	COORDENADA Y	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0	7	0.00	0.00	4.00	6.00
2	0	2	0.00	0.00	4.00	3.00
3	0	1	0.00	0.00	8.00	0.00
4	1	2	8.00	0.00	4.00	3.00
5	2	3	4.00	3.00	8.00	3.00
6	1	4	8.00	0.00	12.00	3.00
7	3	4	8.00	3.00	12.00	3.00
8	5	4	16.00	0.00	12.00	3.00
9	5	6	16.00	0.00	12.00	6.00
10	1	5	8.00	0.00	16.00	0.00
11	3	7	8.00	3.00	4.00	6.00
12	3	6	8.00	3.00	12.00	6.00
13	7	6	4.00	6.00	12.00	6.00
14	0	5	16.00	-1.00	16.00	0.00

BARRA	RIGIDEZ
1	0.7230E+04
2	0.1050E+05
3	0.6553E+04
4	0.1050E+05
5	0.1113E+05
6	0.1050E+05
7	0.1110E+05
8	0.1050E+05
9	0.7250E+04

10	0.0503E+09
11	0.1050E+05
12	0.1050E+05
13	0.5503E+04
14	0.1900E+04

NUDO	COOR.X	COOR.Y
1	0.00	0.00
2	0.00	-20.00
3	0.00	0.00
4	0.00	-30.00
5	0.00	0.00
6	0.00	-20.00
7	0.00	0.00

DESPLAZAMIENTOS

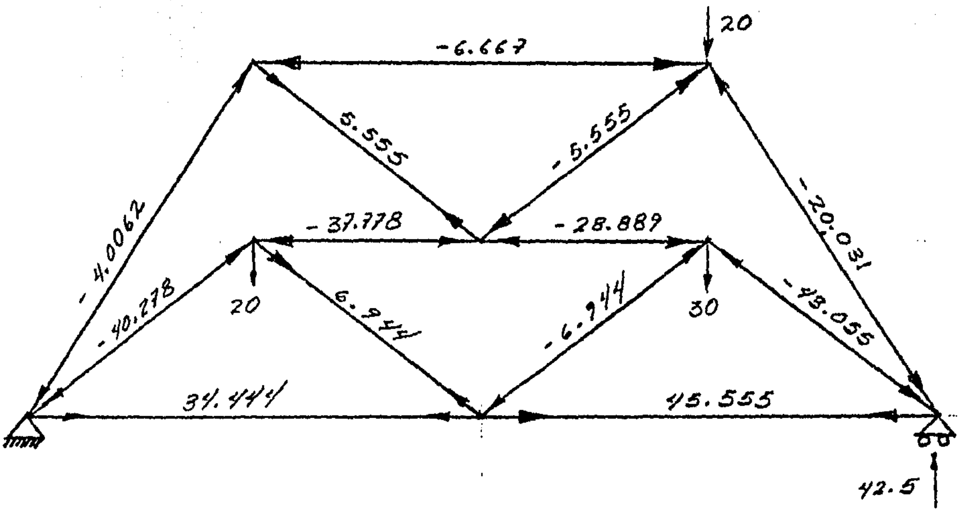
NUDO	DIREC.X	DIREC.Y
1	0.00124606	-0.02151904
2	0.00759113	-0.01090414
3	0.00500092	-0.00700633
4	0.00279955	-0.01935555
5	0.01215317	-0.00000042
6	0.00508088	-0.00040063
7	0.00609676	-0.00472566

BARRA	FUERZA
1	-1.00617206
2	-46.27779398
3	31.11151093
4	8.94146797
5	-17.77778213
6	-6.94443750
7	-26.46066339
8	-13.05553519
9	-27.03043891
10	43.55554591
11	5.55550154
12	-5.55555577
13	-8.88887706
14	-42.44449619

FUERZAS EXTERIORES

0.00001526
-0.00001799
-0.00002670
-19.99991669
-0.00200331
-0.00000240
-3.00000381
-29.99991665
0.00000301
-0.00000391
-0.00001237
-20.00000006
0.00002260
-0.00000024

RESULTADOS:


20
-6.667
5.555
-5.555
-4.0062
-37.778
-28.889
-20.031
-40.278
20
6.944
-6.944
30
-43.055
34.444
45.555
42.5

C A P I T U L O II

PROGRAMA PARA MARCOS

1. METODO DE LAS RIGIDECES PARA LA SOLUCION DE MARCOS.

El método es en ecencia similar al utilizado para armaduras, ya que en los dos métodos las incógnitas son los desplazamientos en los nudos; -- aunque en marcos además hay giro. En los dos métodos su primera etapa consiste en obtener la matriz de rigidez y después solucionar la ecuación característica del método.

{F} = [K] {d} donde :

{F} = Vector de fuerzas externas

[K] = Matriz de rigidez de la estructura

{d} = Vector de desplazamientos (incógnitas)

Este método a grandes razgos consiste en una vez dadas las características físicas y geométricas de cada barra obtener para ésta en primer lugar la matriz de rigidez acoplada, de acuerdo con un sistema de - - ejes coordenados local, cuyo eje "X" coincide con el eje del elemento y después mediante una formulación que explicaremos más adelante la - transforma a otro sistema coordenado general o global, que abarca toda la estructura.

A continuación y mediante el ensamble de matrices que también se desarrolla adelante se relacionan entre sí todos y cada uno de los elementos para dar origen a la matriz de rigidez de la estructura.

Es pues, necesario para entender el método de las rigideces explicar los siguientes puntos:

a) Matriz de rigidez acoplada del elemento

b) Ensamble de matrices

c) Transformacion de las acciones y desplazamientos del elemento (del sistema coordenado local al sistema coordenado global)

d) Cargas equivalentes aplicadas en los nudos.

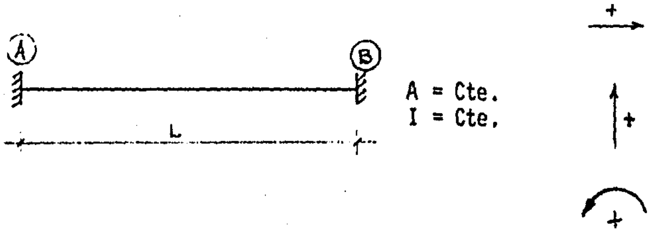
e) Metodología

3. MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO: (Matriz Acoplada)

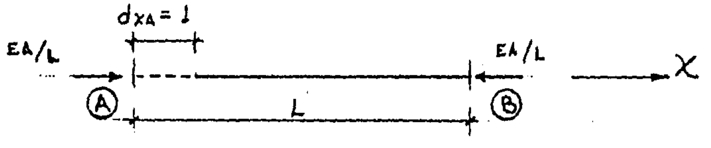
El desplazamiento generalizado de un nudo rígido de una estructura plana se describe en términos de una rotación y dos componentes ortogonales de la traslación. El análisis de una estructura por el método de rigidez, requiere que se estudie el comportamiento de la estructura restringida al aplicar individualmente una unidad de cada una de las componentes posibles, del desplazamiento de cada nudo no restringido de la estructura original. Por tanto, es importante conocer como responden los elementos estructurales a la aplicación individual, en los extremos del miembro de cada una de estas componentes posibles del desplazamiento. Es evidente la utilidad de este desarrollo en el análisis de la estructura restringida. La relación entre las componentes generalizadas del desplazamiento de los extremos y las acciones que se desarrollan en ellos se puede definir fácilmente en términos de las acciones y desplazamientos básicos de los extremos.

Las acciones que se desarrollan en los extremos de un elemento estructural típico puede expresarse mediante la satisfacción de las condiciones de equilibrio en términos de las tres acciones básicas (M, P, S), (momento, fuerza axial, fuerza cortante).

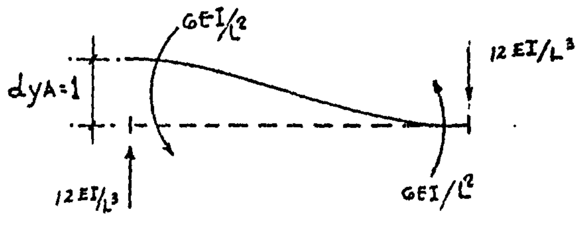
Aplicando lo anterior a un elemento de una estructura restringida obtendríamos la Matriz de Rigidez del Elemento:



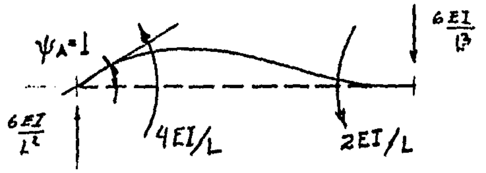
$1^{\underline{a}}$ Columna; aplicamos un desplazamiento unitario $dx_A = 1$



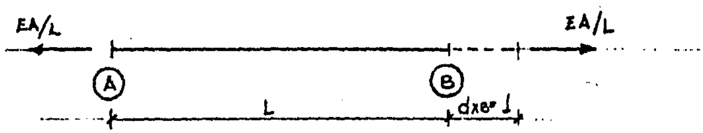
$2^{\underline{a}}$ Columna; aplicamos un desplazamiento unitario $dy_A = 1$



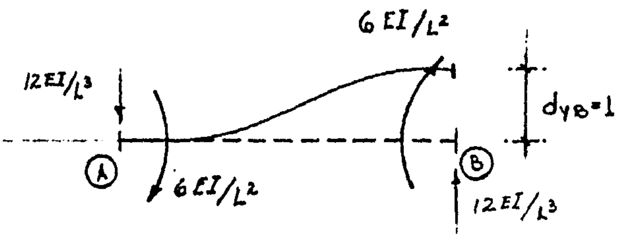
3ª Columna; aplicamos un giro unitario $\psi A = 1$



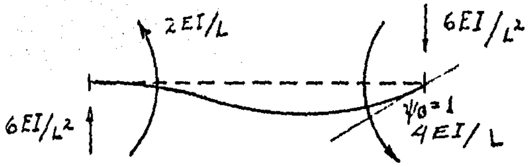
4ª Columna; aplicamos un desplazamiento unitario $dx_B = 1$



5ª Columna; aplicamos un desplazamiento unitario $dy_B = 1$



$6^{\underline{a}}$ Columna; aplicamos un giro unitario $\psi B = 1$



Matricialmente nos queda:

$$
\begin{array}{c}
\\
dxA \\ dyA \\ \psi A \\ dxB \\ dyB \\ \psi B
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
dxA=1 & dyA=1 & \psi A=1 & dxB=1 & dyB=1 & \psi B=1
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc:ccc}
EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\
0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\
0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^3 & 2EI/L \\
\hdashline
-EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\
0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\
0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Como se puede observar esta matriz se puede dividir en cuatro submatrices las cuales son: [KAA], [KAB], [KBA] y [KBB], por lo tanto nos queda:

$$
\left[\begin{array}{c:c}
[KAA] & [KAB] \\
\hdashline
[KBA] & [KBB]
\end{array}\right]
$$

siendo:

$$[KAA]\begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

$$[KAB]\begin{bmatrix} -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \end{bmatrix}$$

$$[K_{BA}]\begin{bmatrix} -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L \end{bmatrix}$$

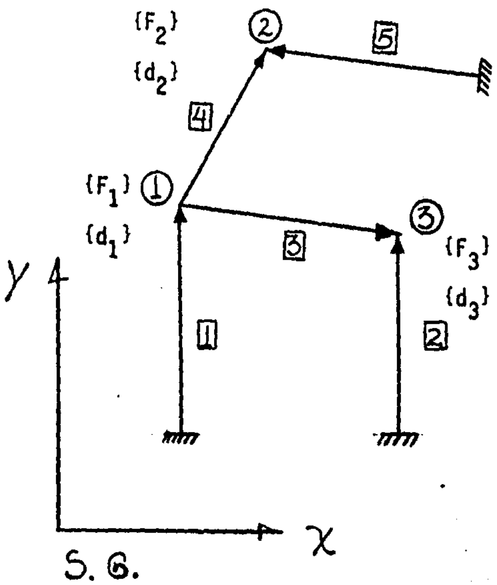
$$[K_{BB}]\begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

Lo cual significa que cada matriz [Kij] contiene el valor de las acciones que se generan en el nudo i al aplicar un desplazamiento o giro unitario en el nudo j.

3. ENSAMBLE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

El algoritmo que veremos a continuación se llama ensamble de la matriz de rigidez o aplicación de la regla de la suma. La obtención de la matriz [K], matriz de rigidez de la estructura es para el sistema global de ejes coordenados.

Ejemplo Topológico.



$\{F\} = [K]\ \{d\}$

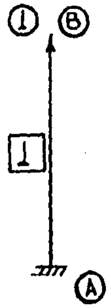
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

$\{F_i\}$ = Vector de fuerzas externas en el nudo (i) sist. global.

$\{d_i\}$ = Vector de desplazamientos en el nudo (i) sist. global.

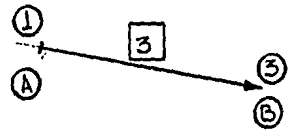
$[K]$ = Matriz de rigidez de la estructura de acuerdo a S.G.

Para la barra "1"



$[K_{BB}]_{1,1}$ $\boxed{1}$

Para la barra "3"



$[K_{AA}]\ 1,1$

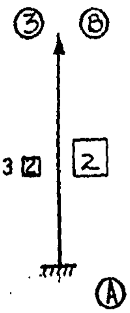
$[K_{AB}]\ 1,3$ $\boxed{3}$

$[K_{BA}]\ 3,1$

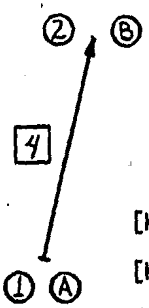
$[K_{BB}]\ 3,3$

Para la barra "2"

$[K_{BB}]_{3,3}$ $\boxed{2}$



Para la barra "4"



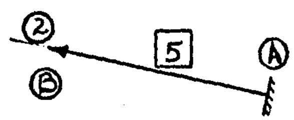
$[K_{AA}]_{1,1}$

$[K_{AB}]_{1,2}$ $\boxed{4}$

$[K_{BA}]_{2,1}$

$[K_{BB}]_{2,2}$

Para la barra "5"



$[K_{BB}]_{2,2}$ $\boxed{5}$

Y ensamblando o sumando cada matriz de acuerdo a sus subíndices nos queda el siguiente arreglo.

$[K_{AA}]$ i, j, m Se suma al renglón i; columna j

PARA NUESTRO EJEMPLO.

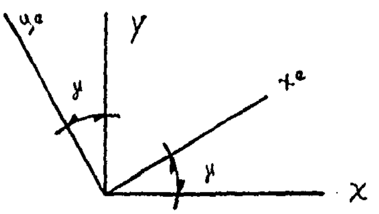
$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & \qquad\qquad 2 & \qquad\qquad 3 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc}
[K_{BB}]_1 + [K_{AA}]_3 + [K_{AA}]_4 & [K_{AB}]_4 & [K_{AB}]_3 \\
 & & \\
[K_{BA}] & [K_{BB}]_4 + [K_{BB}]_5 & 0 \\
 & & \\
[K_{BA}]_3 & 0 & [K_{BB}]_2 + [K_{BB}]_3
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Como cada matriz $[Ki,j]_k$ es de 3 x 3 nos queda un arreglo de 3n x 3n, siendo "n" el número de nudos. Cabe recalcar que todas y cada una de las matrices $[Ki,j]_m$ se obtiene respecto al sistema global de ejes coordenados, y como en un principio estas matrices se obtienen de acuerdo a un sistema de ejes coordenados locales donde el eje "x" -

coincide con el eje de la barra en estudio, daremos a continuación una metodología para transformar los terminos de esta matriz obtenidos para un sistema de ejes locales, a un sistema deejes coordenados globales.

4. TRANSFORMACION DE LAS ACCIONES Y DESPLAZAMIENTOS DE LOS EXTREMOS.

Durante el análisis de una estructura es necesario definir las acciones y desplazamientos de los extremos de sus elementos en términos de sus componentes según un sistema ortogonal de coordenadas más general, que se denomina "sistema de referencia"; y estas componentes deben relacionarse con las definidas de acuerdo con los ejes locales.

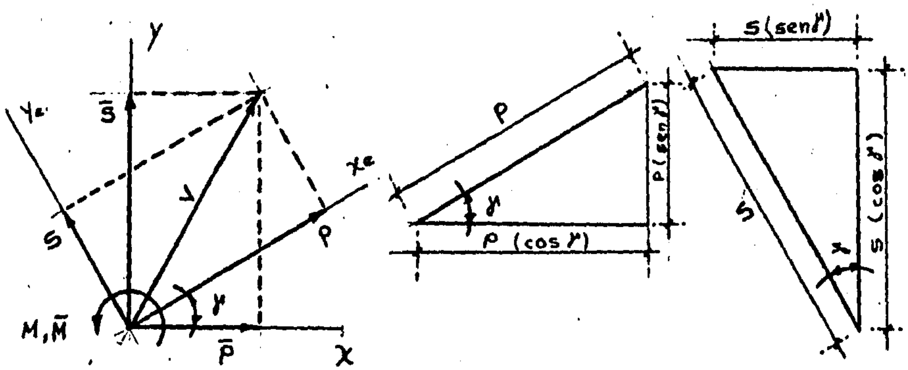


Ejes locales (Xe, Ye)

Ejes de referencia (X, Y)

Para la discución considerese los dos sistemas de ejes representados en la figura de arriba. Los ejes Xe y Ye constituyen el sistema local para un elemento tipico y los ejes X-Y son el sistema general de ejes ortogonales, es decir, el sistema de referencia. Se supone que el eje local Xe forma el ángulo γ con el eje de referencia X; el ángulo γ se mide en el sentido antihorario a partir del eje X.

En la figura (a), hoja 76, se muestra referido al sistema de ejes locales Xe-, Ye un sistema típico de acciones, es decir, un momento M, una fuerza axial P y una fuerza cortante S, que pueden desarrollarse en el extremo de un elemento. Las dos fuerzas pueden componerse en un sólo vector V como se indica en la figura, este vector a su vez, puede descomponerse según un segundo sistema de coordenadas, éste puede ser el sistema de referencia X - Y. Las componentes de la fuerza V respecto a los ejes del sistema de referencia se identifican como $\overline{P}$ y $\overline{S}$ en la figura. Es obvio que el momento M es independiente del sistema de coordenadas. La fuerza axial P, en la dirección Xe, puede descomponerse respecto a los ejes X - Y en la forma ilustrada en la figura (b), la fuerza cortante S, que actua en la dirección Ye, también puede descomponerse respecto a los ejes de referencia X - Y en la forma en que se indica en la figura (c). Sumando las componentes correspondientes es posible expresar las acciones definidas respecto a los ejes de referencia, X - Y, en términos de las componentes de la acción en el sistema local del elemento:



(a) (b) (c)

$$\bar{P} = P\,(\cos\gamma) - S\,(\operatorname{sen}\gamma)$$
$$\bar{S} = P\,(\operatorname{sen}\gamma) + S\,(\cos\gamma)$$

y como se definió anteriormente

$$\bar{M} = M$$

Matricialmente las ecuasiones se expresan como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{P} \\ \bar{S} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma & 0 \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ S \\ M \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

$$\{F\} = [\ Te\ ]^T\ \{fe\}$$

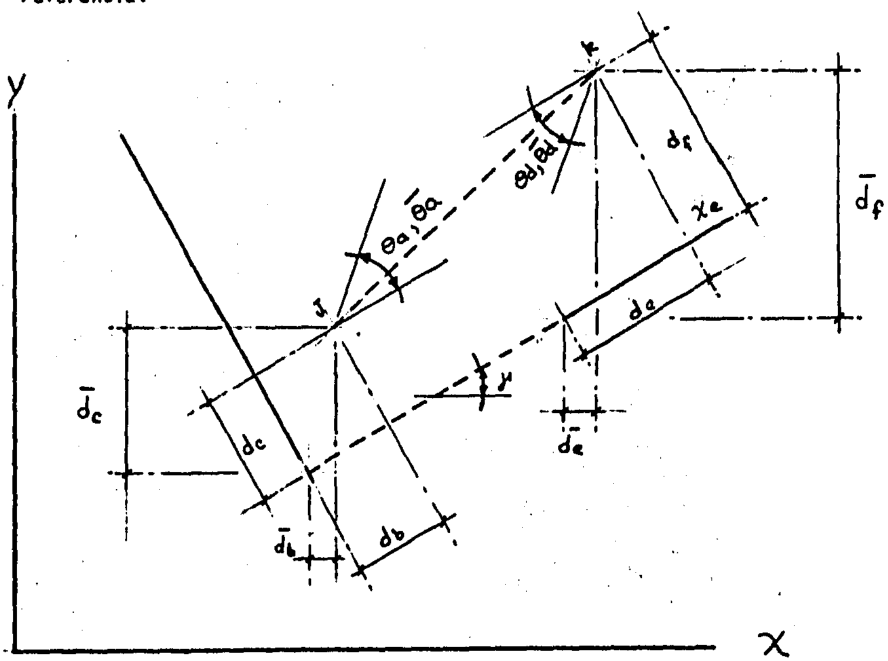
En forma semejante, las acciones definidas respecto a los - ejes locales Xe - Ye, pueden calcularse en término de las - acciones definidas reaspecto a los ejes del sistema de refe rencia X - Y, mediante la relación:

$$\begin{Bmatrix} P \\ S \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma & 0 \\ -\operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P} \\ \bar{S} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

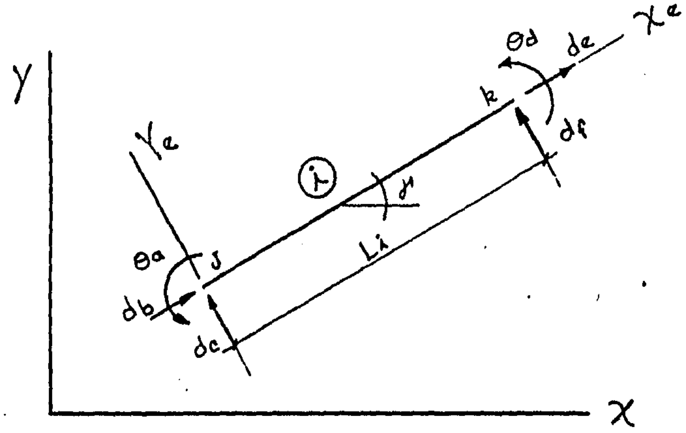
$$\{fe\} = [Te\ ]\ \ \{F\}$$

Observe que la matriz que cambia el sistema de coordenadas en las ecuaciones anteriores es simplemente la traspuesta de la matriz correspondiente a la ecuación (1).

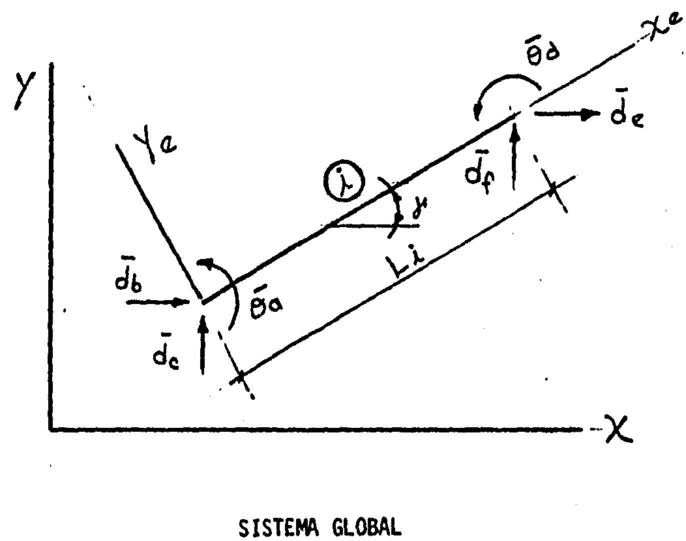
Las componentes generalizadas del desplazamiento de los extremos del elemento también pueden describirse respecto a los ejes de referencia tanto como a los ejes del sistema local en la figura de abajo se identifican las componentes del desplazamiento de los extremos respecto a los ejes del sistema local y del sistema de referencia.



Esta transformación puede parecer más obvia cuando los desplazamientos se expresan vectorialmente como se hace en las figuras de abajo.



SISTEMA LOCAL



SISTEMA GLOBAL

$$\begin{Bmatrix} d\bar{c} \\ d\bar{b} \\ \theta\bar{a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos & -\mathrm{sen} & 0 \\ \mathrm{sen} & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dc \\ db \\ \theta a \end{Bmatrix}$$

ó $$\{d\bar{e}\}_i = [Te]_i^T \{de\}_i$$

La relación entre estas componentes del desplazamiento también puede expresarse como

$$\{de\}_i = [Te]_i \{\bar{de}\}_i$$

5. CARGAS EQUIVALENTES APLICADAS EN LOS NUDOS.

Debido a que las cargas se aplican generalmente en la zona intermedia de los miembros y no pueden satisfacer directamente el requisito, de ser cargas aplicadas en los nudos, para que el método matricial funcione, existe un método que permite resolver el problema que origina una carga distribuida, así como el correspondiente a una carga concentrada intermedia, que consiste en reemplazarla carga por un sistema estáticamente equivalente, de cargas aplicados en los nudos. Estas cargas equivalentes estáticamente deben seleccionarse en tal forma que el desplazamiento resultante en los nudos de la estructura sea igual al desplazamiento que experimentan bajo la acción de la carga real. El desplazamiento que otros puntos de la estructura experimentan al actuar el sistema equivalente de cargas aplicadas en los nudos, no debe ser necesariamente igual al desplazamiento producido por la carga real distribuida.

En términos de las acciones de empotramiento asociadas con una carga intermedia específica, puede definirse un sistema de cargas aplicadas en los nudos, que es equivalente estáticamente a la carga mencionada.

Este análisis puede ser considerado como la superposición de:

(1) el análisis de la estructura suponiendo que todos sus nudos están restringidos (esta se denomina la estructura restringida) y que la solicitan las cargas aplicadas y (2) el análisis de la estructura original bajo la acción del sistema equivalente de cargas aplicadas en los nudos. Si todos los nudos de la estructura están restringidos, es decir, fijos o empotrados, las acciones restrictivas que se desarrollan en los extremos de los elementos por la acción de la carga aplicada se denominan acciones de empotramiento. Estas acciones mantienen en los extremos la condición de desplazamiento nulo y con la carga aplicada definen el equilibrio estático del elemento. Conocidas las acciones de empotramiento para los diversos elementos que componen la estructura, las reacciones de los apoyos, de la estructura restringida, se calculan superponiendo las acciones que corresponden a cada nudo intermedio. Esto constituye el análisis de la estructura restringida.

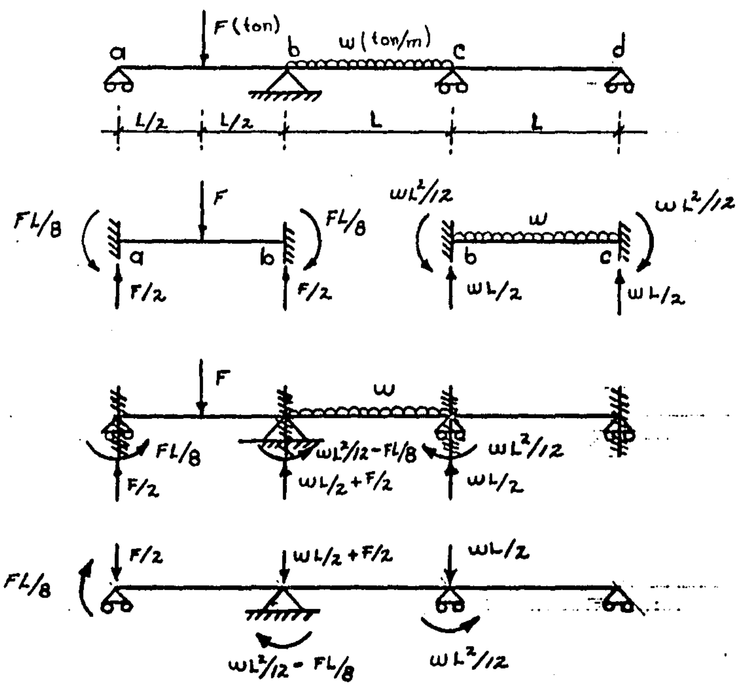
Si se invierte la dirección de las reacciones de los apoyos de la estructura restringida, se define un sistema de acciones que es equivalente estáticamente a las cargas aplicadas a los miembros. Si se remplazan las cargas originales por este sistema equivalente de cargas aplicadas en los nudos, se puede utilizar el método de rigideces que considera a los elementos en el análisis de la estructura original.

La solución final, es la suma de las dos soluciones descritas anteriormente, la que corresponde a los elementos calculados al analizar la estructura original sometida a la acción de las cargas equivalentes aplicadas en los nudos, y las acciones de empotramiento.

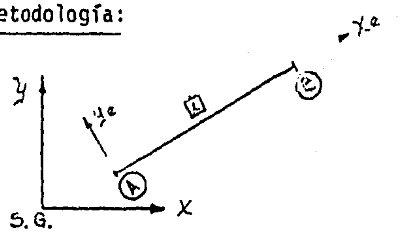
Frecuentemente se requiere analizar una estructura bajo la influencia de una perturbación distinta a las fuerzas aplicadas, por ejemplo, - temperatura, pretensado o errores de fabricación. Si la perturbación actua sobre todo un elemento o en algún punto intermedio, esta puede escribirse en términos de un sistema equivalente de cargas aplicadas en los nudos lo que facilita la utilización del método de Rigideces - que considera a los elementos. Como en el caso anterior el sistema - equivalente de cargas aplicadas en los nudos será igual a las acciones de empotramiento, con sentido invertido, correspondientes a la perturbación aplicada al elemento.

Por tanto cualquier perturbación cuyo punto de aplicación sea distinto de los extremos de un elemento, puede remplazarse mediante un sistema equivalente de cargas aplicadas en los nudos, que es igual a las acciones de empotramiento correspondientes pero con sentido invertido.

Ejemplo ilustrativo:



6. Metodología:



EI = cte

EA = cte

Dadas las características físicas y geométricas de la barra i que se muestra en la figura de arriba, el primer punto del metodo consiste en obtener la matriz acoplada de esta como se explicó anteriormente, de acuerdo al sistema local de ejes coordenados cuyo eje xe coincide - con el eje de la barra,de modo que tenemos.

$$[Ke] = \left[\begin{array}{c|c} [K_{AA}]_e & [K_{AB}]_e \\ \hline [K_{BA}]_e & [K_{BB}]_e \end{array}\right]$$

Por otro lado también se explicó en transformación de las acciones y desplazamientos de los extremos las siguientes relaciones.

$$(S.G.)\left\{\begin{array}{l} \{F\} = [Te]^T \{fe\} \;.\;.\;.\;.\quad (1) \\ \{d\} = [Te]^T \{de\} \;.\;.\;.\;.\quad (2) \end{array}\right\} (S.L.)$$

$$(S.L.)\left\{\begin{array}{l} \{fe\} = [Te] \{F\} \;.\;.\;.\;.\quad (3) \\ \{de\} = [Te] \{d\} \;.\;.\;.\;.\quad (4) \end{array}\right\} (S.G.)$$

Además por ley de Hooke, tenemos:

$$\{fe\} = [Ke] \; \{de\} \qquad (S.L.)$$

$$\{F\} = [K] \; \{d\} \qquad (S.G)$$

Multiplicamos la primera ecuación por $[Te]^T$

$$[Te]^T \{fe\} = [Te]^T \; [Ke] \; \{de\} \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Sustituimos (2) y (3) en (5)

$$F = [Te]^T \; [Ke] \; [Te] \; \{d\}$$

Donde asignaremos:

$$\underset{(S.G)}{[K]} = [Te]^T \; \underset{(S.L.)}{[Ke]} \; [Te]$$

Esta ecuación es valida para cualquier pareja de índices, por lo tanto:

$$[K_{AA}] = [Te]^T \; [K_{AA}]_e \; [Te]$$
$$[K_{AB}] = [Te]^T \; [K_{AB}]_e \; [Te]$$
$$[K_{BA}] = [Te]^T \; [K_{BA}]_e \; [Te]$$
$$[K_{BB}] = [Te]^T \; [K_{BB}]_e \; [Te]$$

Desarroyando lo anterior tenemos:

$$[Te]^{T} \quad [K_{AA}]e \quad [Te]$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L}\cos^2\theta + \frac{12EI}{L^3}\operatorname{sen}^2\theta & \frac{EA}{L}\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \frac{12EI}{L^3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \frac{-6EI}{L^2}\operatorname{sen}\theta \\ \frac{EA}{L}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{12EI}{L^3}\cos\theta\operatorname{sen}\theta & \frac{EA}{L}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{12EI}{L^3}\cos^2\theta & \frac{6EI}{L^2}\cos\theta \\ -\frac{6EI}{L^2}\operatorname{sen}\theta & \frac{6EI}{L^2}\cos\theta & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Para $[K_{AB}]$ GLOBAL

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-EA}{L}\cos^2\theta - \frac{12\,EI}{L^3}\operatorname{sen}^2\theta & \frac{-EA}{L}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \frac{12EI}{L^3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \frac{-6EI}{L^2}\operatorname{sen}\theta \\ \frac{-EA}{L}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{12EI}{L^3}\cos\theta\operatorname{sen}\theta & \frac{-EA}{L}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{12EI}{L^3}\cos^2\theta & \frac{6EI}{L^2}\cos\theta \\ \frac{6EI}{L^2}\operatorname{sen}\theta & \frac{-6EI}{L^2}\cos\theta & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

Para $[K_{BA}]$ GLOBAL

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-EA}{L}\cos^2\theta - \frac{12EI}{L^3}\operatorname{sen}^2\theta & \frac{-EA}{L}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{12EI}{L^3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \frac{6EI}{L^2}\operatorname{sen}\theta \\ \frac{-EA}{L}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{12EI}{L^3}\cos\theta\operatorname{sen}\theta & \frac{-EA}{L}\operatorname{sen}^2\theta - \frac{12EI}{L^3}\cos^2\theta & \frac{-6EI}{L^2}\cos\theta \\ \frac{-6EI}{L^2}\operatorname{sen}\theta & \frac{6EI}{L^2}\cos\theta & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

Para $[K_{BB}]$ GLOBAL

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L}\cos^2\theta + \frac{12EI}{L^3}\operatorname{sen}^2\theta & \frac{EA}{L}\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \frac{12EI}{L^3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \frac{6EI}{L^2}\operatorname{sen}\theta \\ \frac{EA}{L}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{12EI}{L^3}\cos\theta\operatorname{sen}\theta & \frac{EA}{L}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{12EI}{L^3}\cos^2\theta & -\frac{6EI}{L^2}\cos\theta \\ +\frac{6EI}{L^2}\operatorname{sen}\theta & -\frac{6EI}{L^2}\cos\theta & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

A continuación y mediante el ensamble de matrices, se suman las matrices acopladas que se obtuvieron de acuerdo al sistema global de ejes coordenados, para todas y cada una de las barras y así obtener la matriz de rigidez de la estructura para con ella resolver la ecuación característica del método.

$$\underset{(S.G.)}{\{F\}} = \underset{(S.G.)}{[K]} \; \underset{(S.G.)}{\{d\}}$$

Luego para obtener el vector de desplazamientos para cada barra de acuerdo al sistema local de ejes coordenados utilizamos la siguiente ecuación:

$$\{de\} = [Te] \; \{d\}$$

Una vez obtenido el vector de desplazamientos encontramos el vector de fuerzas para cada barra de acuerdo al mismo sistema local de ejes coordenados de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\{fe\} = [Ke] \; \{de\}$$

Para comprobar la solución, la suma de fuerzas en cada uno de los nudos (fuerza axial, cortante y momento flexionante) de acuerdo al sistema global de ejes coordenados deberá ser igual a cero entonces primero obtenemos el vector de fuerzas, para el sistema global

$$\{F\} = [Te]^T \{fe\}$$

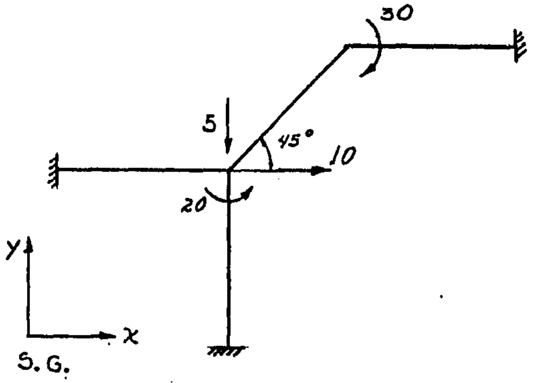
Y luego sumamos en cada nudo las fuerzas correspondientes.

$$\begin{aligned} &\Sigma\{Fx\} = 0 \\ (S.G.)\ &\Sigma\{Fy\} = 0 \quad \text{para el nudo } i \\ &\Sigma\{M\} = 0 \end{aligned}$$

Lo anterior sólo es válido para cuando las fuerzas exteriores están aplicadas en los nudos, pero cuando se tienen cargas intermedias, - se deberá transformar estas cargas por cargas equivalentes aplica-- das en los nudos se les cambia desentido y se resuelve la estructu- ra. A la solución, se deben sumar las cargas equivalentes aplica-- das en los nudos con sus sentidos originales.

Para entender mejor lo anterior desarrollaremos un ejemplo completo y luego lo solucionaremos por medio del programa.

Ejemplo ilustrativo:



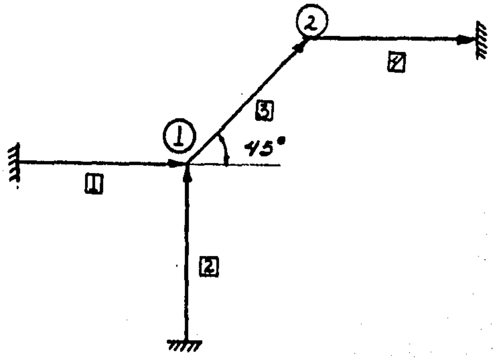
L= 3 m

E = cte

I = cte

A = 50 I

En primer lugar se numeran todas y cada una de las barras al igual que todos y cada uno de los nudos encerrando estos en un cuadro o círculo respectivamente, así como se les asigna un sentido a todas y cada una de las barras por lo tanto nos queda de la siguiente - manera.



Además le asignamos la letra A al inicio de la barra y la letra B al final. Luego entonces por ensamble de matrices, sumaremos las matrices acopladas de cada barra de acuerdo a la interrelación que hay entre nudos y barras.

Nudos /Nudo

$$\begin{array}{c} \\ ① \\ \\ ② \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \qquad ① \qquad\qquad & \qquad\qquad ② \end{array} \\ \begin{bmatrix} [K_{BB}]_1 + [K_{BB}]_2 + [K_{AA}]_3 & [K_{AB}]_3 \\ & \\ [K_{BA}]_3 & [K_{BB}]_3 + [K_{AA}]_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Todo lo anterior para el S.G., por lo tanto las matrices acopladas que corresponden a este sistema son las siguientes.

$$[K_{BB}]_1 = \begin{bmatrix} 16.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & -0.667 & 1.333 \end{bmatrix}$$

$$[K_{BB}]_2 = \begin{bmatrix} 0.444 & 0 & 0.667 \\ 0 & 16.67 & 0 \\ 0.667 & 0 & 1.333 \end{bmatrix}$$

$$[K_{AA}]_3 = \begin{bmatrix} 8.556 & 8.111 & -0.471 \\ 8.111 & 8.556 & 0.471 \\ -0.471 & 0.471 & 1.333 \end{bmatrix}$$

$$[K_{BB}]_3 = \begin{bmatrix} 8.556 & 8.111 & 0.471 \\ 8.111 & 8.556 & -0.471 \\ 0.471 & -0.471 & 1.333 \end{bmatrix}$$

$$[K_{AB}]_3 = \begin{bmatrix} 8.556 & -8.111 & 0.471 \\ -8.8111 & -8.556 & -0.471 \\ 0.471 & -0.471 & 0.667 \end{bmatrix}$$

$$[K_{BA}]_3 = \begin{bmatrix} 8.556 & -8.111 & -0.471 \\ -8.111 & -8.556 & 0.471 \\ -0.471 & 0.471 & 0.667 \end{bmatrix}$$

Y haciendo la correspondiente suma tenemos:

1.667	0.000	0.000	-8.556	-8.111	-0.471
0.444	0.000	0.667			
8.556	8.111	-0.471			
25.667	8.111	0.196			
0.000	0.444	-0.667	-8.111	-8.556	0.471
0.000	16.667	0.000			
8.111	8.556	0.471			
8.111	25.667	-0.196			
0.000	-0.667	1.333	0.471	-0.471	0.667
0.667	0.000	1.333			
-0.471	0.471	1.333			
0.196	-0.196	4.000			
-8.556	-8.111	0.471	16.670	0.000	0.000
			8.556	8.111	0.471
			25.222	8.111	0.471
-8.111	-8.556	-0.471	0.000	0.444	0.667
			8.111	8.556	-0.471
			8.111	9.000	0.196
-0.471	0.471	0.667	0.000	0.667	1.333
			0.471	-0.471	1.333
			0.471	0.196	2.667

De modo que el sistema de ecuaciones para el (S.G.) es el siguiente:

$$\{F\} = [K] \{d\}$$

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ -5 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.667 & 8.111 & 0.196 & -8.556 & -8.111 & -0.471 \\ 8.111 & 25.666 & -0.196 & -8.111 & -8.556 & 0.471 \\ 0.196 & -0.196 & 4.000 & 0.471 & -0.471 & 0.667 \\ 8.556 & -8.111 & -0.471 & 25.222 & 8.111 & 0.471 \\ -8.111 & -8.556 & -0.471 & 8.111 & 9.000 & 0.196 \\ -0.471 & 0.471 & 0.667 & 0.471 & 0.196 & 2.667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1x \\ d_1y \\ M_1 \\ d2x \\ d2y \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Cuya solución para (S.G.) es la siguiente.

$$\left.\begin{aligned} d_1x &= 0.4072 \\ d_1y &= 0.4629 \\ M_1 &= 7.4066 \end{aligned}\right\} \quad \{d\}_1 \qquad \text{Nudo} \quad 1$$

$$\left.\begin{aligned} d2x &= 0.1144 \\ d2y &= 1.5924 \\ M_2 &= 13.2088 \end{aligned}\right\} \quad \{d\}_2 \qquad \text{Nudo} \quad 2$$

Luego entonces los elementos mecánicos para cada barra de acuerdo al (S.L.) son los siguientes:

Para la barra $\boxed{1}$ y de transformación de desplazamientos tenemos:

$$\{de\} = [Te]\ \{d\}$$

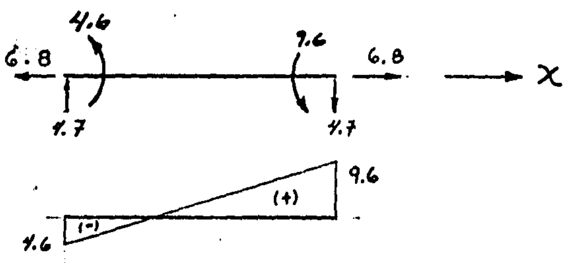
$$\underset{[Te]}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{\{d\}_0}{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{[T]}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{\{d\}_1}{\begin{Bmatrix} 0.4072 \\ 0.4629 \\ 7.4066 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} 0.4072 \\ 0.4629 \\ 7.4066 \end{Bmatrix}$$

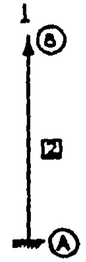
Luego entonces los elementos mecánicos serán:

$$\{fe\}_1 = [Ke]_1\ \{de\}_1$$

$$
\begin{bmatrix}
16.670 & 0 & 0 & -16.670 & 0 & 0 \\
0 & 0.444 & 0.667 & 0 & -0.444 & 0.667 \\
0 & 0.667 & 1.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\
-16.670 & 0 & 0 & 16.670 & 0 & 0 \\
0 & -0.444 & -0.667 & 0 & 0.444 & -0.667 \\
0 & 0.667 & 0.667 & 0 & -0.667 & 1.333
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.4072 \\ 0.4629 \\ 7.4066 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} -6.8 \\ 4.7 \\ 4.6 \\ 6.8 \\ -4.7 \\ 9.6 \end{Bmatrix}
$$

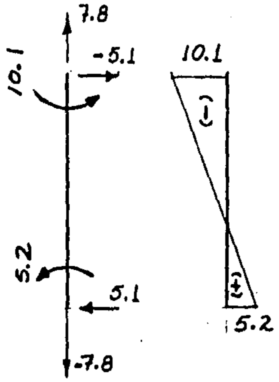


Para la barra $\boxed{2}$ haciendo lo mismo



$$\{de\}_2 = [Te]\,\{d\}$$

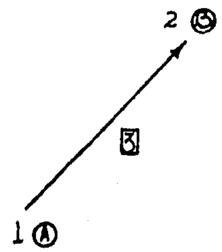
$$
[Te] \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
\{de\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.4699 \\ -0.4072 \\ 7.4060 \end{Bmatrix}
$$



de : $\{fe\} = [Ke]\ \{de\}$

$$\{fe\} = \begin{Bmatrix} -7.8 \\ 5.1 \\ 5.2 \\ 7.8 \\ -5.1 \\ 10.1 \end{Bmatrix}$$

Para la barra $\boxed{3}$



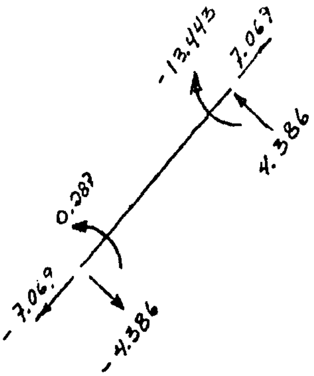
$$\{de\}_3 = [Te]\ \{d\}$$

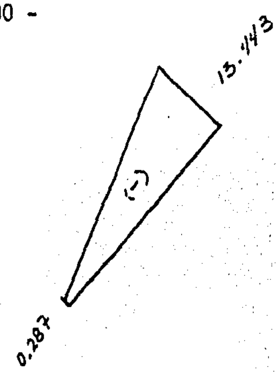
$$[Te] = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{d'\} = \begin{Bmatrix} 0.4072 \\ 0.4629 \\ 7.4066 \\ 0.1144 \\ 1.5924 \\ -13.2088 \end{Bmatrix} \qquad \{de\} = \begin{Bmatrix} 0.6602 \\ 0.0443 \\ 7.4066 \\ 1.0451 \\ 1.2069 \\ -13.2088 \end{Bmatrix}$$

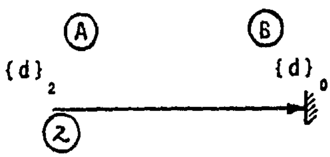
de : $\{fe\} = [Ke]\ \{de\}$

$$fe = \begin{Bmatrix} -7.0690 \\ -4.3863 \\ 0.2873 \\ 7.0690 \\ 4.3863 \\ -13.4426 \end{Bmatrix}$$





Para la barra $\boxed{4}$



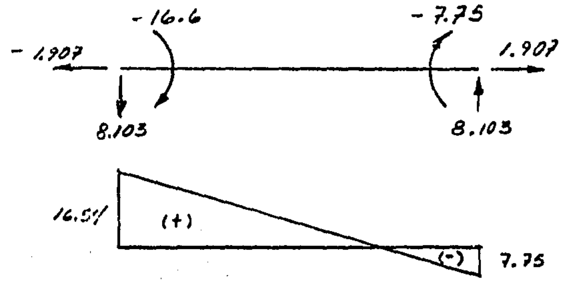
$$\{de\} = [T] \quad \{d\}$$

$$\{Te\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{de\} = \begin{Bmatrix} 0.1144 \\ 1.5924 \\ -13.2088 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{fe\} = [Ke] \quad \{de\}$$

$$\{fe\} = \begin{Bmatrix} -1.9 \\ -8.1 \\ -16.6 \\ 1.9 \\ 8.1 \\ -7.75 \end{Bmatrix}$$



Comprobación.

$$(S.G.)\quad \left.\begin{array}{l} \Sigma\, Fx = 0 \\ \Sigma\, Fy = 0 \\ \Sigma\, M = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Para cada nudo}$$

Para la barra $\boxed{1}$ tenemos el siguiente vector de fuerzas.

$$\{F\} = [Te]\ \{fe\}$$

$$\{Te\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6.8 \\ -4.7 \\ 9.6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.8 \\ -4.7 \\ 9.6 \end{Bmatrix}$$

Para la barra $\boxed{2}$

$$[Te]\ \{fe\} = \{F\}_i$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 7.8 \\ -5.1 \\ 10.1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.1 \\ 7.8 \\ 10.1 \end{Bmatrix}$$

Para la barra $\boxed{3}$

$$[Te] \; \{fe\}_1 = \{F\}_1$$

$$\begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ +0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -6.4146 \\ -4.3863 \\ 0.2873 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.4342 \\ -7.6373 \\ 0.2873 \end{Bmatrix}$$

$$[Te] \; \{fe\}_2 = \{F\}_2$$

$$\begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ +0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 7.1 \\ 4.4 \\ -13.4485 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.9070 \\ 8.1000 \\ -13.4485 \end{Bmatrix}$$

Para la barra $\boxed{4}$

$$[Te] \; \{fe\}_2 = \{F\}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.9070 \\ -8.10 \\ -16.55 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.9070 \\ -8.1000 \\ -16.5515 \end{Bmatrix}$$

Sumando vectores para el nudo 1

$$\begin{Bmatrix} 6.8 \\ -4.7 \\ 9.6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5.1 \\ 7.8 \\ 10.1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1.4342 \\ -7.6373 \\ 0.2873 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.4658 \\ -4.5373 \\ 19.9873 \end{Bmatrix} \doteq \begin{Bmatrix} 10 \\ -5 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

Sumando vectores para el nudo 2

$$\begin{Bmatrix} 1.9070 \\ 8.1000 \\ -13.4484 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1.9070 \\ -8.1000 \\ -16.5515 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \end{Bmatrix}$$

7. Manual de uso.

Aspectos generales:

El programa trabaja para marcos en el plano cuyas característi- ticas deben ser las siguientes:

- Sus apoyos deben de ser completos, es decir, todos sus desplazamientos estan restringidos.

- La estructura en general debe carecer de uniones o articulaciones a lo largo de sus elementos o en las uniones entre estos, es decir, en los nudos.

- El área, el momento de inercia, y el módulo de elasticidad deben ser constantes a lo largo del elemento, pudiendo variar entre los diferentes miembros de la estructura.

- La carga puede estar aplicada en los nudos de la estructura o a lo largo del elemento, a este último se transforman mediante el procedimiento que se explicó anteriormente, por cargas equivalentes aplicadas en los nudos de la estructura.

Codificación de datos:

Para la utilización del programa se utilizan los siguientes - formatos de lectura:

1er. Renglón	Dos campos de cuatro dígitos cada uno, para la lectura del número de elementos y del número de nudos de la estructura 0000,0000.
2o. Renglón. hasta NB= número de barras.	Dos campos de tres dígitos cada uno para la lectura del valor del nudo "A" y del nudo - "B" respectivamente, un campo real de seis dígitos para la lectura del ángulo de la barra con la horizontal debiendo llevar dos - decimales: $\pm$II.dd. Dos campos exponenciales de once dígitos cada uno para la lectura del módulo de elasticidad y el momento - de inercia, de los cuales dos dígitos son - para el entero, uno para el punto decimal,- cuatro para dos decimales, uno para la letra E, uno para el signo del exponente y -- dos para el exponente, estos es: --------- II.dddd E$\pm$ee. Y por último dos campos de - diez dígitos para la lectura del área y de la longitud, debiendo llevar cuatro decimales. Como aclaración importante el punto - decimal ocupa el lugar de un dígito, esto - es: IIIII.dddd.
Siguiente Renglón hasta $\frac{N_n}{8}$= número de nudos.	Ocho campos de diez dígitos para la lectura de las fuerzas aplicadas en los nudos, debiendo llevar cuatro decimales: IIIII.dddd, Estos deben llevar el siguiente orden.

1°. Se debe empezar por el nudo de menor denominación, y seguir en orden ascendente.

1°= n, 2°= n+1, 3°= n+2, etc.

2°. Se debe poner en primer lugar el valor correspondiente a la fuerza "x", Fx, luego a la fuerza "y" Fy, y luego el valor del momento M del primer nudo y así consecutivamente para el siguiente nudo.

Generación de datos:

Para la generación de datos se requiere lo siguiente:

- Número de todos y cada uno de los elementos de las estructuras así como los nudos de ésta; a los apoyos de la estructura se les asigna el número cero.

- Se les asigna una dirección arbitraria a la barra designando como "A" el inicio de la barra y como "B" el final.

De ésta se obtienen los datos necesarios para la codificación valor del nudo "A", nudo "B", angulo de inclinación con la horizontal θ, Módulo de Elasticidad E, momento de inercia I, área de la sección transversal de la barra, y su longitud, y por último, las fuerzas aplicadas en los nudos de la estructura, deben estar proyectadas en dos direcciones ortogonales y un momento.

8. PROGRAMA PARA LA SOLUCIÓN EN EL PLANO DE MARCOS CONSIDERANDO EN ÉSTOS FLEXIÓN Y FUERZA AXIAL.

VAX/VMS RSC200 MARCUS 30-JAN-1985 19:47 LPA0: 30-JAN-1985 19:47 DISK$CECAF111:[RSC200.SADIKA]MARCUS.LIS;1 VAX/VMS
VAX/VMS RSC200 MARCUS 30-JAN-1985 19:47 LPA0: 30-JAN-1985 19:47 DISK$CECAF111:[RSC200.SADIKA]MARCUS.LIS;1 VAX/VMS

RSC200

MARCUS:

LIS;1

RSC200

VAX/VMS RSC200 MARCUS 30-JAN-1985 19:47 LPA0: 30-JAN-1985 19:47 DISK$CECAF111:[RSC200.SADIKA]MARCUS.LIS;1 VAX/VMS
VAX/VMS RSC200 MARCUS 30-JAN-1985 19:47 LPA0: 30-JAN-1985 19:47 DISK$CECAF111:[RSC200.SADIKA]MARCUS.LIS;1 VAX/VMS

```
C12345678901234567890
CPROGRAMA PARA LA SOLUCION DE ARMADURAS BIDIRECCIONALES
      DIMENSION A(100,100),RIG(100),K(100,100),FUER(100)
     *,S(100,100),KI(100),D(100),E(100),P(100)
      REAL LONBAR,LCA,LCO,K,KI
CCALCULO DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD
      OPEN(UNIT=5,FILE='EJEM1.DAT',STATUS='OLD')
      READ (5,1000)NELE,NNUD
 1000 FORMAT (I4,I4)
      WRITE (6,2000)NELE,NNUD
 2000 FORMAT (/,10X,'NUMERO DE BARRAS= ',I4,/,10X,'NUMERO DE NUD
     *OS= ',I4)
      FIN=NELE
      N=NNUD*2
      DO 1,I=1,FIN
      DO 1,J=1,N
    1 A(I,J)=0.0
      WRITE (6,2001)
 2001 FORMAT (//,45X,'NUDO A',25X,'NUDO B')
      WRITE (6,2002)
 2002 FORMAT (/,5X,'BARRA',5X,'NUDO A',3X,'NUDO B',5X,'COORDENAD
     *A X',3X,'COORDENADA Y',5X,'COORDENADA X',3X,'COORDENADA
     * Y')
   40 READ (5,1001)NBAR,NUDOA,NUDOB,CORXA,CORYA,CORXB,CORYB
 1001 FORMAT (3I4,4F8.2)
      WRITE (6,2003)NBAR,NUDOA,NUDOB,CORXA,CORYA,CORXB,CORYB
 2003 FORMAT (//,5X,I4,7X,I4,5X,I4,4(7X,F8.2))
      LCO=CORYB-CORYA
      LCA=CORXB-CORXA
      LONBAR=SQRT(LCA**2.0+LCO**2.0)
      IF(LCA.EQ.0)GO TO 5
      U1=LCA/LONBAR
      GO TO 10
    5 U1=0.0
   10 IF(LCO.EQ.0.0)GO TO 15
      U2=LCO/LONBAR
      GO TO 20
   15 U2=0.0
   20 IF(NUDOA.EQ.0)GO TO 25
      I=NUDOA+(NUDOA-1)
      J=NUDOA+NUDOA
      A(NBAR,I)=-1.*U1
      A(NBAR,J)=-1*U2
   25 IF(NUDOB.EQ.0)GO TO 30
      I=NUDOB+(NUDOB-1)
      J=NUDOB+NUDOB
      A(NBAR,I)=U1
      A(NBAR,J)=U2
   30 FIN=FIN-1
      IF(FIN.EQ.0)GO TO 35
      GO TO 40
CONTENCION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ K
   35 WRITE (6,2011)
 2011 FORMAT (/,7X,'BARRA',10X,'RIGIDEZ')
      READ (5,1002)(RIG(I),I=1,NELE)
```

```
              DO 120,I=1,NEGR
          120 WRITE (6,2012)I,RIG(I)
         2012 FORMAT (8X,I4,5X,E15.4)
         1002 FORMAT (5E16.4)
              DO 45,L=1,N
              DO 45,J=1,N
              DO 45,I=1,NEGR
           45 K(L,J)=A(I,L)*RIG(I)*A(I,J)+K(L,J)
        C SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES F=KD
              WRITE (6,2013)
         2013 FORMAT (7X,'NUDO',10X,'FZA. X',10X,'FZA. Y')
              READ (5,1003)(FUER(I),I=1,N)
              J=0
              DO 125,I=1,N,2
              J=J+1
          125 WRITE (6,2014)J,FUER(I),FUER(I+1)
         2014 FORMAT (8X,I4,7X,F8.2,7X,F8.2,7X,F8.2)
         1003 FORMAT (10F8.2)
              DO 50,I=1,N
              DO 50,J=1,N
              IF(I.GT.J)GO TO 55
              SUM=0.0
              IF(I.EQ.J)GO TO 60
              DO 65,L=1,I-1
           65 SUM=SUM+S(L,I)*S(L,J)
              A1=K(I,J)-SUM
              IF(A1.EQ.0)GO TO 55
              S(I,J)=A1/S(I,I)
              GO TO 50
           60 DO 70,L=1,I-1
           70 SUM=SUM+S(L,I)**2
              A2=K(I,I)-SUM
              S(I,I)=SQRT(A2)
              GO TO 50
           55 S(I,J)=0.0
           50 K1(I)=FUER(I)/S(I,I)
              DO 71,I=2,N
              SUM=0.0
              DO 72,L=1,I-1
           72 SUM=SUM+S(L,I)*K1(L)
              A1=FUER(I)-SUM
              IF(S(I,I).EQ.0)GO TO 73
              K1(I)=A1/S(I,I)
              GO TO 71
           73 K1(I)=0.0
           71 D(N)=K1(N)/S(N,N)
              I1=N-1
           85 SUM=0.0
              DO 75,L=I1+1,N
           75 SUM=SUM+S(I1,L)*D(L)
              IF(S(I1,I1).EQ.0)GO TO 400
              D(I1)=(K1(I1)-SUM)/S(I1,I1)
              GO TO 401
          400 D(I1)=0.0
          401 I1=I1-1
```

```
      IF(II.EQ.0)GO TO 80
      GO TO 85
   80 WRITE (6,2004)
 2004 FORMAT (26X,'DESPLAZAMIENTOS')
      WRITE (6,2008)
 2008 FORMAT (8X,'NUDO',15X,'DIREC.X',21X,'DIREC.Y')
      I=1
      J=1
   86 WRITE (6,2009)I,D(J),D(J+1)
 2009 FORMAT (10X,I2,8X,F20.8,8X,F20.8)
      I=I+1
      J=J+2
      IF(J.GT.N)GO TO 90
      GO TO 86
   90 DO 95,I=1,NELE
      E(I)=0.0
      DO 95,J=1,N
   95 E(I)=E(I)+A(I,J)*D(J)
      DO 100,I=1,NELE
  100 P(I)=RIG(I)*E(I)
      WRITE (6,2010)
 2010 FORMAT (10X,'BARRA',12X,'FUERZA')
      DO 105,I=1,NELE
  105 WRITE (6,2005)I,P(I)
 2005 FORMAT (12X,I2,6X,F20.8)
      WRITE (6,2006)
 2006 FORMAT (/,10X,'FUERZAS EXTERIORES')
      DO 110,I=1,N
      F=0.0
      DO 115,J=1,NELE
  115 F=F+A(J,I)*P(J)
      WRITE (6,2007)F
 2007 FORMAT (12X,F20.8)
  110 CONTINUE
      CALL EXIT
      END
```

```
      204 SUM=0.0
          DO 111,I=2,N
          DO 112,L=1,I-1
      112 SUM=SUM+S(L,I)*KSI(L)
          IF(S(I,I).EQ.0)GO TO 204
          KSI(I)=(F(I)-SUM)/S(I,I)
          GO TO 205
      204 KSI(I)=0.0
      205 SUM=0.0
      111 CONTINUE
          IF(S(N,N).EQ.0)GO TO 206
          D(N)=KSI(N)/S(N,N)
          GO TO 207
      206 D(N)=0.0
      207 I=N-1
       17 SUM=0.0
          DO 113,L=I+1,N
      113 SUM=SUM+S(I,L)*D(L)
          IF(S(I,I).EQ.0)GO TO 208
          D(I)=(KSI(I)-SUM)/S(I,I)
          GO TO 209
      208 D(I)=0.0
      209 I=I-1
          IF(I.EQ.0)GO TO 16
          GO TO 17
       16 WRITE (6,2012)
     2012 FORMAT (//,31X,'NUDO A',50X,'NUDO B')
          WRITE (6,2011)
     2011 FORMAT (//,5X,'BARRA',5X,'FZA. NORMAL',5X,'FZA CORTANTE',5X,'MOM.
         * FLEXIONANTE',7X,'FZA. NORMAL',5X,'FZA. CORTANTE',5X,'MOM. FLEXION
         *ANTE')
C     CONTRACCION DE LOS DESPLAZAMIENTOS Y DE LOS ELEMENTOS MECANICOS SISTEMA LOCAL
          DO 114,I=1,NBAR
          U=DATO(I,3)
          IF(U.EQ.0)GO TO 15
          CALL T1(U,T)
          IF(DATO(I,1).EQ.0)GO TO 19
          J=(DATO(I,1)-1)*3+1
          M=1
          DO 115,K=1,3
          D1(K)=0.0
          DO 116,L=1,3
          D1(K)=T(M,L)*D(J)+D1(K)
      116 J=J+1
          J=J-3
      115 M=M+1
          GO TO 20
       15 IF(DATO(I,1).EQ.0)GO TO 21
          J=(DATO(I,1)-1)*3+1
          DO 117,K=1,3
          D1(K)=D(J)
      117 J=J+1
          GO TO 22
       19 DO 118,K=1,3
      118 D1(K)=0.0
```

```
      GO TO 20
   21 DO 119,K=1,3
  119 D1(K)=0.0
   22 IF(DATO(I,2).EQ.0)GO TO 23
      J=(DATO(I,2)-1)*3+1
      DO 120,K=4,6
      D1(K)=D(J)
  120 J=J+1
      GO TO 24
   23 DO 121,K=4,6
  121 D1(K)=0.0
      GO TO 24
   20 IF(DATO(I,2).EQ.0)GO TO 25
      J=(DATO(I,2)-1)*3+1
      M=1
      DO 122,K=4,6
      D1(K)=0.0
      DO 123,L=1,3
      D1(K)=T(M,L)*D(J)+D1(K)
  123 J=J+1
      J=J-3
  122 M=M+1
      GO TO 24
   25 DO 124,K=4,6
  124 D1(K)=0.0
   24 N2=NELE*2+3
      CALL ESC(D1,N2,1,DL)
      K1=(DATO(I,4)*DATO(I,6))/DATO (I,7)
      K2=(12*DATO(I,4)*DATO(I,5))/DATO(I,7)**3
      K3=(6*DATO(I,4)*DATO(I,5))/DATO(I,7)**2
      K4=(4*DATO(I,4)*DATO(I,5))/DATO(I,7)
      CALL RIGI(K1,K2,K3,K4,KS)
      DO 126,J=1,3
      DO 126,K=1,3
  126 KS2(J,K)=KS(J,K)
      KS(2,3)=-KS(2,3)
      KS(3,2)=-KS(3,2)
      DO 127,J=4,6
      DO 127,K=4,6
  127 KS2(J,K)=KS(J-3,K-3)
      KS(1,1)=-KS(1,1)
      KS(2,2)=-KS(2,2)
      KS(2,3)=-KS(2,3)
      KS(3,3)=KS(3,3)/2.0
      DO 128,J=1,3
      DO 128,K=4,6
  128 KS2(J,K)=KS(J,K-3)
      KS(2,3)=-KS(2,3)
      KS(3,2)=-KS(3,2)
      DO 129,J=4,6
      DO 129,K=1,3
  129 KS2(J,K)=KS(J-3,K)
      DO 130,J=1,6
      F1(J)=0.0
      DO 130,K=1,6
```

```
      130 FI(J)=RS2(J,K)*DI(K)+FI(J)
      114 WRITE (6,2010)I,(FI(J),J=1,6)
     2010 FORMAT (//,6X,I3,5X,F11.5,5X,F13.5,5X,F16.5,7X,F11.5,5X,F13.5,5X,F
         *16.5)
          WRITE (6,2014)
     2014 FORMAT (//,22X,'NUDO A',41X,'NUDO B')
          WRITE (6,2015)
     2015 FORMAT (//,5X,'BARRA',5X,'DESPL. X',5X,'DESPL. Y',5X,'GIRO',10X,'D
         *ESPL. X',5X,'DESPL. Y',5X,'GIRO')
          II=1
          DO 301,I=1,NELE
          II=(I-1)*6+1
      301 WRITE (6,2013)I,(DG(J),J=II,II+5)
     2013 FORMAT (//,6X,I3,5X,E11.4,5X,E11.4,3X,E11.4,8X,E11.4,5X,
         *E11.4,2X,F11.4)
          CALL EXIT
          END
```

PROGRAM SECTIONS

NAME	BYTES	ATTRIBUTES
0 $CODE	3447	PIC CON REL LCL SHR EXE RD NOWRT LONG
1 $PDATA	575	PIC CON REL LCL SHR NOEXE RD NOWRT LONG
2 $LOCAL	85712	PIC CON REL LCL NOSHR NOEXE RD WRT LONG
TOTAL SPACE ALLOCATED	89734	

ENTRY POINTS

ADDRESS	TYPE	NAME
0-00000000		MARCOS$MAIN

VARIABLES

ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME
2-00014DE4	R*4	AREA	2-00014DE0	R*4	EE	2-00014DCC	R*4	FIN	2-00014DF4	I*4	I
2-00014E10	I*4	II	2-00014DD8	R*4	II	2-00014E00	I*4	J	2-00014DC8	I*4	JI
2-00014DF8	I*4	K	2-00014DA8	R*4	K1	2-00014DAC	R*4	K2	2-00014DB0	R*4	K3
2-00014DB4	R*4	K4	2-00014DFC	I*4	L	2-00014DBC	R*4	LONG	2-00014DEC	I*4	M
2-00014DD0	I*4	N	2-00014DF0	I*4	N1	2-00014E0C	I*4	N2	2-00014DC0	I*4	NELE
2-00014DC4	I*4	NUDO	2-00014DD4	I*4	NUDOA	2-00014E08	I*4	NUDOB	2-00014DDC	R*4	Q
2-00014E08	R*4	V	2-00014DE8	R*4	W	2-00014E04	R*4	SUM			

ARRAYS

ADDRESS	TYPE	NAME	BYTES	DIMENSIONS
2-00014090	R*4	D	400	(100)
2-00014620	R*4	D1	400	(100)
2-00000000	R*4	DATO	2800	(100, 7)
2-000140F4	R*4	DL	400	(100)
2-0000A730	R*4	F	400	(100)
2-00014A64	R*4	F1	400	(100)
2-000140B4	R*4	RS	36	(3, 3)
2-00014500	R*4	RS1	400	(100)
2-00014904	R*4	RS2	144	(6, 6)
2-0000AF00	R*4	RE	40000	(100, 100)
2-0000A8C0	R*4	S	40000	(100, 100)
2-000149B0	R*4	T	36	(3, 3)

LABELS

ADDRESS	LABEL	ADDRESS	LABEL	ADDRESS	LABEL	ADDRESS	LABEL	ADDRESS	LABEL	ADDRESS	LABEL
0-0000021C	1	0-0000024A	2	0-00000255	3	0-00000296	4	0-0000026[illegible]	5	0-00000273	6
0-000002B0	7	0-0000030E	8	0-000004F8	9	0-000003F7	10	0-0000030C	11	0-0000036C	12
0-00000308	13	0-000006E6	15	0-000006A3	16	0-000008DF	17	[illegible]	18	[illegible]	19
0-00000A35	20	0-000009CA	21	0-000009DC	22	0-00000A20	23	0-00000AB7	24	0-00000A85	25
0-0000008A	50	0-00000360	100	0-000002F3	101	0-00000378	102	0-0000030C	103	[illegible]	104
0-00000461	105	0-000004EA	106	0-00000400	107	0-000005F0	108	0-000005E3	109	[illegible]	110
0-000007BF	111	0-00000740	112	0-00000823	113	0-00000C69	114	[illegible]	115	[illegible]	116
0-000009AC	117	0-000009BA	118	0-000009CE	119	0-00000A15	120	0-00000A24	121	[illegible]	122
0-00000ABF	123	0-00000AB9	124	0-0000047E	126	0-000006D4	127	[illegible]	128	[illegible]	129
0-00000C5E	130	0-00000670	201	0-0000071A	202	0-0000071E	203	0-00000703	204	0-0000078C	205
0-000008B0	206	0-000008C9	207	0-000008BF	208	0-0000089F	209	[illegible]	301	[illegible]	302'
1-0000000A	1000'	1-000000B0	1001'	1-000000E9	1002'	1-00000192	2010'	[illegible]	2011'	1-00000108	2012'
1-0000021A	2013'	1-00000167	2014'	1-000001CE	2015'	1-0000000F	3001'	[illegible]	3002'	[illegible]	3003'

FUNCTIONS AND SUBROUTINES REFERENCED

TYPE	NAME	TYPE	NAME	TYPE	NAME	TYPE	NAME	TYPE	NAME	TYPE	NAME
	ESC		FOR$EXIT		FOR$OPEN	R*4	MTH$SQRT		RIG1		RIG2
	RIG3		J1								

```
      SUBROUTINE RIG1(K1,K2,K3,K4,KS)
      REAL KS(3,3),K1,K2,K3,K4
      DO 1,I=1,3
      DO 1,J=1,3
    1 KS(I,J)=0.0
      KS(1,1)=K1
      KS(2,2)=K2
      KS(2,3)=K3
      KS(3,2)=K3
      KS(3,3)=K4
      RETURN
      END
```

```
PROGRAM SECTIONS

    NAME                                BYTES   ATTRIBUTES

  0 $CODE                                 94    PIC CON REL LCL   SHR   EXE   RD NOWRT LONG
  2 $LOCAL                                28    PIC CON REL LCL NOSHR NOEXE  RD   WRT LONG

    TOTAL SPACE ALLOCATED                122

ENTRY POINTS

    ADDRESS  TYPE  NAME

  0-00000000        RIG1

VARIABLES

    ADDRESS  TYPE  NAME          ADDRESS  TYPE  NAME          ADDRESS  TYPE  NAME          ADDRESS  TYPE  NAME

  2-00000000  I*4  I           2-00000004  I*4  J          AP-00000004@ R*4  K1          AP-00000008@ R*4  K2
 AP-0000000C@ R*4  K3         AP-00000010@ R*4  K4

ARRAYS

    ADDRESS  TYPE  NAME                 BYTES  DIMENSIONS

 AP-00000014@ R*4  KS                     36   (3, 3)

LABELS

    ADDRESS   LABEL

  0-00000018  1
```

```
      SUBROUTINE RIG2(K1,K2,K3,K4,KS)
      REAL KS(3,3),K1,K2,K3,K4
      DO 1,I=1,3
      DO 1,J=1,3
    1 KS(I,J)=0.0
      KS(1,1)=K2
      KS(1,3)=K3
      KS(2,2)=K1
      KS(3,1)=K3
      KS(3,3)=K4
      RETURN
      END
```

PROGRAM SECTIONS

NAME	BYTES	ATTRIBUTES
0 $CODE	94	PIC CON REL LCL SHR EXE RD NOWRT LONG
2 $LOCAL	28	PIC CON REL LCL NOSHR NOEXE RD WRT LONG
TOTAL SPACE ALLOCATED	122	

ENTRY POINTS

ADDRESS	TYPE	NAME
0-00000000		RIG2

VARIABLES

ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME
2-00000000	I*4	I	2-00000004	I*4	J	AP-00000004@	R*4	K1	AP-00000008@	R*4	K2
AP-0000000C@	R*4	K3	AP-00000010@	R*4	K4						

ARRAYS

ADDRESS	TYPE	NAME	BYTES	DIMENSIONS
AP-00000014@	R*4	KS	36	(3, 3)

LABELS

ADDRESS	LABEL
0-00000016	1

```
SUBROUTINE RIG3(K1,K2,K3,K4,U,K$)
REAL K$(3,3),K1,K2,K3,K4
U=U*3.14159265/180
A=SIN(U)
B=COS(U)
K$(1,1)=K1*(B**2)+K2*(A**2)
K$(1,2)=K1*A*B-K2*A*B
K$(1,3)=-K3*A
K$(2,1)=K$(1,2)
K$(2,2)=K1*(A**2)+K2*(B**2)
K$(2,3)=K3*B
K$(3,1)=K$(1,3)
K$(3,2)=K$(2,3)
K$(3,3)=K4
U=U*180/3.14159265
RETURN
END
```

PROGRAM SECTIONS

NAME	BYTES	ATTRIBUTES
0 $CODE	237	PIC CON REL LCL SHR EXE RD NOWRT LONG
2 $LOCAL	28	PIC CON REL LCL NOSHR NOEXE RD WRT LONG
TOTAL SPACE ALLOCATED	265	

ENTRY POINTS

ADDRESS	TYPE	NAME
0-00000000		RIG3

VARIABLES

ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME
2-00000000	R*4	A	2-00000004	R*4	B	AP-00000004@	R*4	K1	AP-00000008@	R*4	K2
AP-0000000C@	R*4	K3	AP-00000010@	R*4	K4	AP-00000014@	R*4	U			

ARRAYS

ADDRESS	TYPE	NAME	BYTES	DIMENSIONS
AP-00000018@	R*4	K$	36	(3, 3)

FUNCTIONS AND SUBROUTINES REFERENCED

TYPE	NAME	TYPE	NAME
R*4	MTH$COS	R*4	MTH$SIN

```
      SUBROUTINE T1(U,T)
      DIMENSION T(3,3)
      DO 1,I=1,3
      DO 1,J=1,3
    1 T(I,J)=0.0
      U=U*3.141592654/180
      T(1,1)=COS(U)
      T(1,2)=SIN(U)
      T(2,1)=-T(1,2)
      T(2,2)=T(1,1)
      T(3,3)=1.0
      U=U*180/3.141592654
      RETURN
      END
```

```
PROGRAM SECTIONS

    NAME                          BYTES   ATTRIBUTES

  0 $CODE                           155   PIC CON REL LCL   SHR   EXE   RD NOWRT LONG
  2 $LOCAL                           28   PIC CON REL LCL NOSHR NOEXE   RD   WRT LONG

    TOTAL SPACE ALLOCATED           183

ENTRY POINTS

    ADDRESS   TYPE  NAME

  0-00000000        T1

VARIABLES

    ADDRESS   TYPE  NAME             ADDRESS   TYPE  NAME             ADDRESS   TYPE  NAME

  2-00000000  I*4  I            2-00000004  I*4  J            AP-00000004@ R*4  U

ARRAYS

    ADDRESS   TYPE  NAME              BYTES  DIMENSIONS

 AP-00000008@ R*4  T                   36  (3, 3)
```

```
LABELS

    ADDRESS    LABEL

  0-00000018   1


FUNCTIONS AND SUBROUTINES REFERENCED

  TYPE  NAME              TYPE  NAME

   R*4  MTH$COS            R*4  MTH$SIN
```

```
      SUBROUTINE ESC(D1,N2,I,DL)
      DIMENSION DL(N2)
      DIMENSION D1(6)
      II=(I-1)*6+1
      DO 1,J=1,6
      DL(II)=D1(J)
    1 II=II+1
      RETURN
      END
```

PROGRAM SECTIONS

NAME	BYTES	ATTRIBUTES
0 $CODE	78	PIC CON REL LCL SHR EXE RD NOWRT LONG
2 $LOCAL	68	PIC CON REL LCL NOSHR NOEXE RD WRT LONG
TOTAL SPACE ALLOCATED	146	

ENTRY POINTS

ADDRESS	TYPE	NAME
0-00000000		ESC

VARIABLES

ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME	ADDRESS	TYPE	NAME
AP-0000000C@	I*4	I	2-00000000	I*4	II	2-00000004	I*4	J	AP-00000008@	I*4	N2

ARRAYS

ADDRESS	TYPE	NAME	BYTES	DIMENSIONS
AP-00000004@	R*4	D1	24	(6)
AP-00000010@	R*4	DL	**	(*)

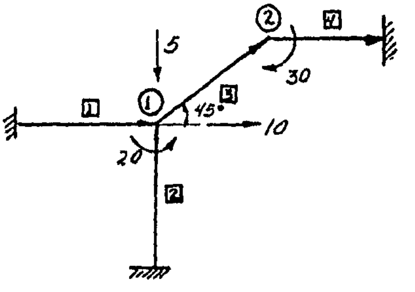
LABELS

ADDRESS	LABEL
0-00000046	1

```
COMMAND QUALIFIERS

  FORTRAN /NOOPTIMIZE/LIS MARCOS

  /CHECK=(NOBOUNDS,OVERFLOW,NOUNDERFLOW)
  /DEBUG=(NOSYMBOLS,TRACEBACK)
  /STANDARD=(NOSYNTAX,NOSOURCE_FORM)
  /SHOW=(NOPREPROCESSOR,NOINCLUDE,MAP)
  /F77  /NOG_FLOATING  /I4  /NOOPTIMIZE  /WARNINGS  /NOD_LINES  /NOCROSS_REFERENCE  /NOMACHINE_CODE  /CONTINUATIONS=19


COMPILATION STATISTICS

  RUN TIME:             13.98 SECONDS
  ELAPSED TIME:         40.82 SECONDS
  PAGE FAULTS:          2495
  DYNAMIC MEMORY:       353 PAGES
```

Para su mejor entendimiento utilizaremos el ejemplo anterior:

8.1 EJEMPLO A



L = 3 mt.
E = cte.
I = cte.
A = 50 I

Como se puede observar se tiene cuatro barras y dos nudos y se les designó la dirección que se muestra para cada barra, de modo que la generación de los datos es la siguiente:

Barra	Nudo A	Nudo B	Ang.de Incl.	Modulo Elast.	Moment. Inercia	Area	Longt.
1	0	1	0	cte.	cte.	50.00	3.00
2	0	1	90	cte.	cte.	50.00	3.00
3	1	2	45	cte.	cte.	50.00	3.00
4	2	0	0	cte.	cte.	50.00	3.00

Las fuerzas son las siguientes:

Nudo 1	Fx = 10.0 ton. Fy = -5.0 ton. M = 20.0 ton-m	Nudo 2	Fx = 0.0 Fy = 0.00 M = -30.00 ton-m

De manera que la codificación de los datos es la siguiente:

DATOS PARA EL PROGRAMA *Ejem A* HOJA *1 de 1*

```
1   5    10   15   20   25   30   35   40   45   50   55   60   65   70   75   80
00040002
000001000.00001.1000E 0100. 1000E 0100050.000000003.0000
  0  1 20.00 1.1   E 01 0. 1   E 01   50.00      3.00
  1  2 45.00 0.1   E 01 0. 1   E 01   50.00      3.00
  2  0 00.00 0.1   E 01 0. 1   E 01   50.00      3.00
00010.0000   -5.000000020.-000000000.000000000-.0000  -30.0000
```

- 124 -

NUMERO DE BARRAS= 4
NUMERO DE NUDOS= 2

BARRA	NUDO A	NUDO B	ANG.DE INCLINACION	MOD. DE ELAST.	MOM. DE INERCIA	AREA	LONGITUD
1	0	1	0.00	0.1000E+01	0.1000E+01	50.0000	3.0000
2	0	1	90.00	0.1000E+01	0.1000E+01	50.0000	3.0000
3	1	2	45.00	0.1000E+01	0.1000E+01	50.0000	3.0000
4	2	0	0.00	0.1000E+01	0.1000E+01	50.0000	3.0000

FUERZAS EXTERIORES

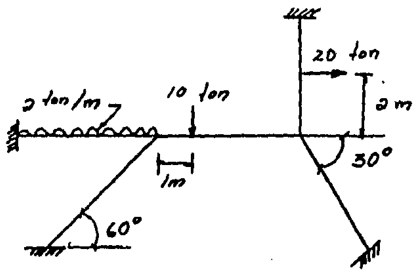
10.0000	-5.0000	20.0000	0.0000	0.0000	-30.0000

	NUDO A			NUDO B		
BARRA	FZA. NORMAL	FZA CORTANTE	MOM. FLEXIONANTE	FZA. NORMAL	FZA. CORTANTE	MOM. FLEXIONANTE
1	-6.78043	4.72817	4.62381	6.78043	-4.72817	9.56071
2	-7.82726	5.11771	5.20812	7.82726	-5.11771	10.14502
3	-7.06911	-4.38473	0.29427	7.06911	4.38473	-13.44846
4	-1.89814	-8.09908	-16.55154	1.69814	8.09908	-7.74571

	NUDO A			NUDO B		
BARRA	DESPL. X	DESPL. Y	GIRO	DESPL. X	DESPL. Y	GIRO
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.4068	0.4696	7.4054
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.4696	-0.4068	7.4054
3	0.6198	0.0444	7.4054	1.0439	1.2050	-13.2087
4	-0.1139	1.5902	-13.2087	0.0000	0.0000	0.0000

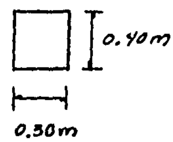
8.2 EJEMPLO B

Dada la estructura que se muestra en la figura, encontrar la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante, para cada elemento de ésta, así como los desplazamientos que sufre la estructura en sus nudos.

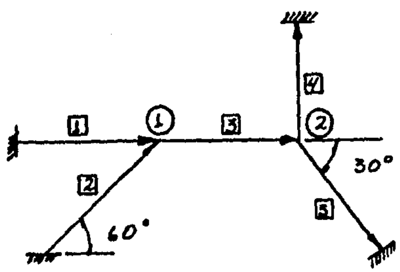


L = 4.0 m

E = 1.4×10^6 ton/m^2



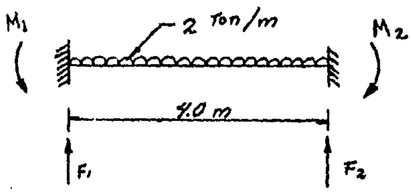
Como primer paso numeramos todos y cada uno de los elementos de la estructura, así como los nudos de ésta, y además le asignamos un sentido a cada barra como se muestra en la siguiente figura.



Como se tiene cargas aplicadas a lo largo de los elementos - se transformará primero a cargas aplicadas en los nudos,se resolverá la estructura, y al resultado se le sumará las - - fuerzas de emprotamiento de la estructura restringida para - así obtener el resultado final.

Transformación de cargas intermedias a cargas aplicadas en - los nudos. Los momentos y fuerzas de empotramiento se obte<u>n</u> dran de las tablas que se anexan:

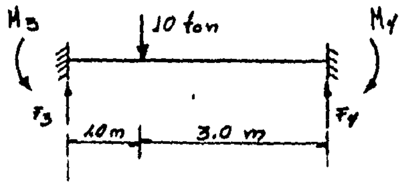
Para la Barra 1



$$M_1 = M_2 = \frac{wl^2}{12} = \frac{2(4)^2}{12} = 2.67 \text{ ton-m}$$

$$F_1 = F_2 = \frac{wl}{2} = \frac{2(4)}{2} = 4 \text{ ton.}$$

Para la barra 3



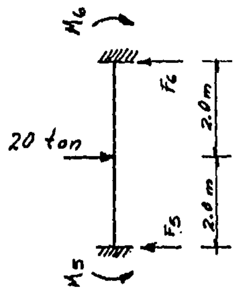
$$M_3 = \frac{Pa\ b^2}{l^2} = \frac{10\ (1)\ (3)^2}{(4)^2} = 5.63 \text{ ton-m}$$

$$M_4 = \frac{Pa^2 b}{l^2} = \frac{10\ (1)^2 (3)}{(4)^2} = 1.88 \text{ ton-m}$$

$$F_3 = P\left(\frac{b}{l}\right)^2\left(1+2\frac{a}{l}\right) = 10\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(1+2\frac{1}{4}\right) = 8.44 \text{ ton}$$

$$F = P\left(\frac{a}{l}\right)^2\left(1+2\frac{b}{l}\right) = 10\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1+2\frac{3}{4}\right) = 1.56 \text{ ton}$$

Para la barra 4

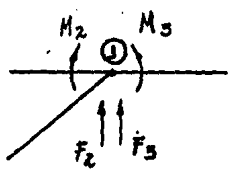


$$M_5 = M_6 = \frac{Pl}{8} = \frac{20\ (4)}{8} = 10 \text{ ton-m}$$

$$F_5 = F_6 = \frac{P}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ ton.}$$

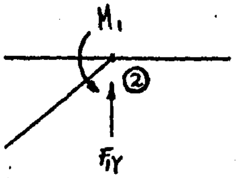
Las fuerzas de empotramiento serán las que resulten de sumar - vectorialmente las fuerzas en cada nudo.

Para el nudo (1)



$M_1' = -2.67 + 5.63 = 2.96$ ton-m

$F_1y = 4 + 8.44 = 12.44$ ton.



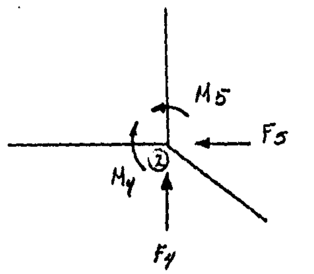
Fuerzas de empotramiento

$F_x = 0.00$ ton.

$F_y = 12.44$ ton.

$M = 2.96$ ton-m

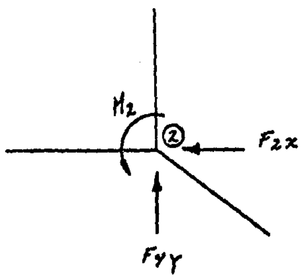
Para el nudo (2)



M_2 = 10-1.88 = 8.12 ton-m

F_2x= 10 ton.

F_2y= 1.56 ton.



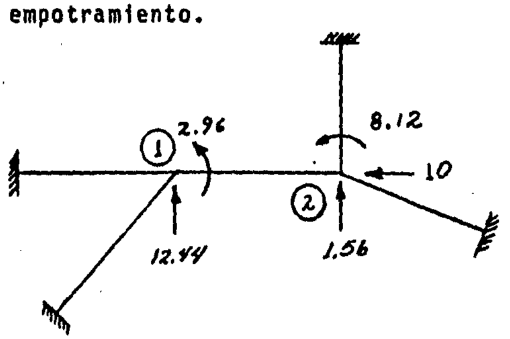
Fuerzas de empotramiento.

Fx = 10 ton.

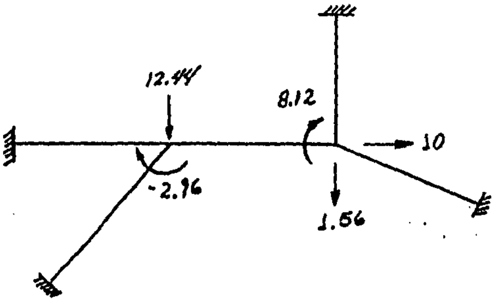
Fy = 1.56 ton.

M = 8.12 ton-m

De tal manera que la estructura quedará sujeta a las siguientes fuerzas de empotramiento.



Por lo que la estructura deberá resolverse con estas fuerzas pero con sentido contrario.



$Fx_1 = 0.00$ ton.
$Fy_1 = -12.44$ ton.
$M_1 = -2.96$ ton-m
$Fx_2 = 10.00$ ton.
$Fy_2 = -1.56$ ton.
$M_2 = -8.12$ ton-m

Y la generación de datos es la siguiente:

Barra	Nudo A	Nudo B	Ang.de Incl.	Modulo Elast.	Moment Inercia	Area	Longt.
1	0.00	1.00	0.00	1.4×10^6	16×10^{-4}	0.12	4.0
2	0.00	1.00	60.00	1.4×10^6	16×10^{-4}	0.12	4.0
3	1.00	2.00	0.00	1.4×10^6	16×10^{-4}	0.12	4.0
4	2.00	0.00	90.00	1.4×10^6	16×10^{-4}	0.12	4.0
5	2.00	0.00	-30.00	1.4×10^6	16×10^{-4}	0.12	4.0

Y la codificación de los datos es la siguiente:

DATOS PARA EL PROGRAMA *Ejem 3* HOJA *1 de 1*

```
00050002
000001000.0000.1400E 0700.1600E-0200000.1200000004.0000
  0  1  60.00 0.14  E 07 0.16  E-02      0.12       4.00
  1  2   0.00 0.14  E 07 0.16  E-02      0.12       4.00
  2  0 90.00 0.14  E 07 0.16  E-02      0.12       4.00
  2  0330.00 0.14  E 07 0.16  E-02      0.12       4.00
00000.0000  -12.4400   -2.250000010.0100   -1.5600   -8.1200
```

NUMERO DE BARRAS= 5
NUMERO DE NUDOS= 2

BARRA	NUDO A	NUDO B	ANG.DE INCLINACION	MOD. DE ELAST.	MOM. DE INERCIA	AREA	LONGITUD
1	0	1	0,00	0,1400E+07	0,1600E-02	0,1200	4,0000
2	0	1	60,00	0,1400E+07	0,1600E-02	0,1200	4,0000
3	1	2	0,00	0,1400E+07	0,1600E-02	0,1200	4,0000
4	2	0	90,00	0,1400E+07	0,1600E-02	0,1200	4,0000
5	2	0	330,00	0,1400E+07	0,1600E-02	0,1200	4,0000

FUERZAS EXTERIORES
0,0000 -12,4400 -2,9600 10,0000 -1,5600 -8,1200

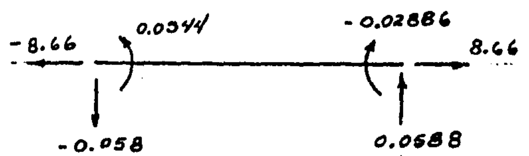
	NUDO A			NUDO B		
BARRA	FZA. NORMAL	FZA CORTANTE	MOM. FLEXIONANTE	FZA. NORMAL	FZA. CORTANTE	MOM. FLEXIONANTE
1	-8,66067	-0,05855	0,05444	8,66067	0,05855	-0,28862
2	12,88161	-0,08292	0,00570	-12,88164	0,08292	-0,33730
3	-2,14814	-1,38400	-2,33402	2,14814	1,38400	-3,20197
4	1,96915	-1,01635	-2,03820	-1,96915	1,01635	-1,42719
5	8,37630	-0,83716	-2,27983	-8,37630	0,83716	-1,00982

	NUDO A			NUDO B		
BARRA	DESPL. X	DESPL. Y	GIRO	DESPL. X	DESPL. Y	GIRO
1	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,2062E-03	-0,4732E-03	-0,3063E-03
2	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	-0,3067E-03	-0,4152E-03	-0,3063E-03
3	0,2062E-03	-0,4732E-03	-0,3063E-03	0,2574E-03	0,4088E-04	-0,1081E-02
4	0,4088E-04	-0,2574E-03	-0,1081E-02	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00

5	0.1994E-03	0.1693E-03	-0.1081E-02	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

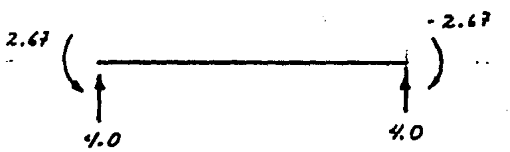
De los datos de la corrida del programa, tenemos, para la primera barra los siguientes elementos mecánicos.

Barra 1



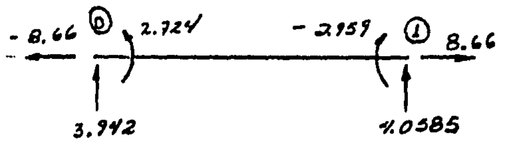
Resultados de la corrida

+

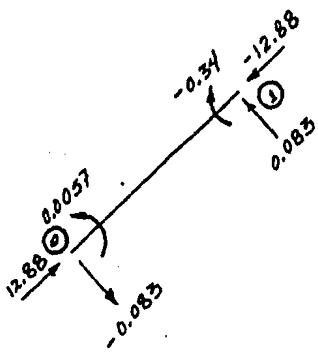


Resultados de empotramiento

=

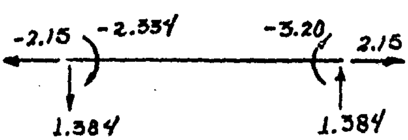


Para la barra 2



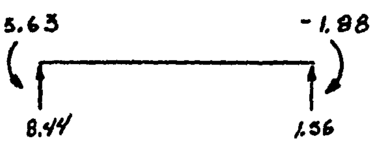
Resultado de la corrida

Para la Barra 3



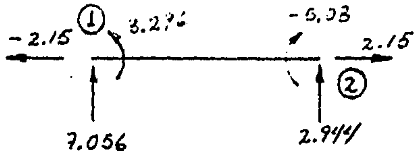
Resultado de la corrida

+

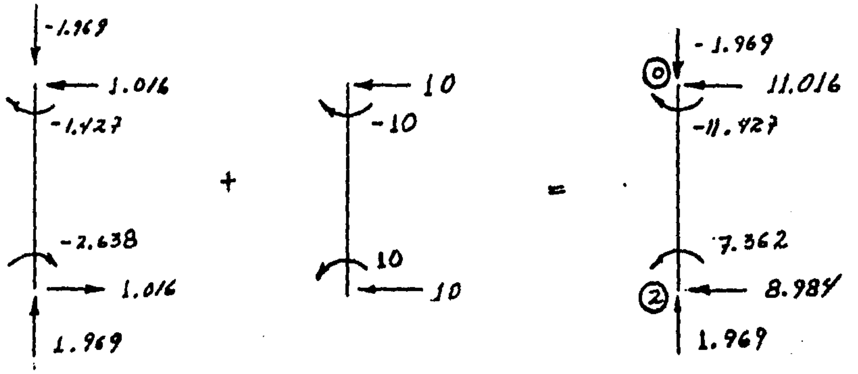


Fuerzas de empotramiento

=



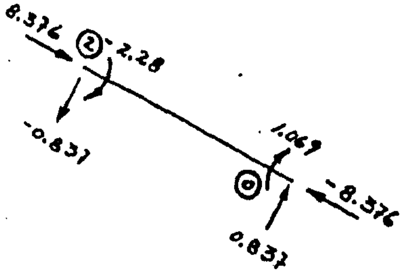
Para la Barra 4



Resultados de la corrida

Fuerzas de empotramiento

Para la barra 5



Resultados de la corrida

Sumando fuerzas en el nudo 1

$$\Sigma Fx = 8.66 - 12.88 \cos 60° - 0.083 \cos 30° - 2.15$$
$$= 0.00188$$

$$\Sigma Fy = 4.0585 - 12.88 \text{ sen } 60° + 0.083 \text{ sen } 30° + 7.056$$
$$= 0.00159$$

$$\Sigma M = -2.959 - 0.34 + 3.296 = 0.003$$

Sumando fuerzas en el nudo 2

$$\Sigma Fx = 2.15 - 8.984 + 8.376 \cos 30° - 0.837 \cos 60°$$
$$= 0.0013$$

$$\Sigma Fy = 2.944 + 1.969 - 8.376 \text{ sen } 30° - 0.837 \text{ sen } 60°$$
$$= 0.00013$$

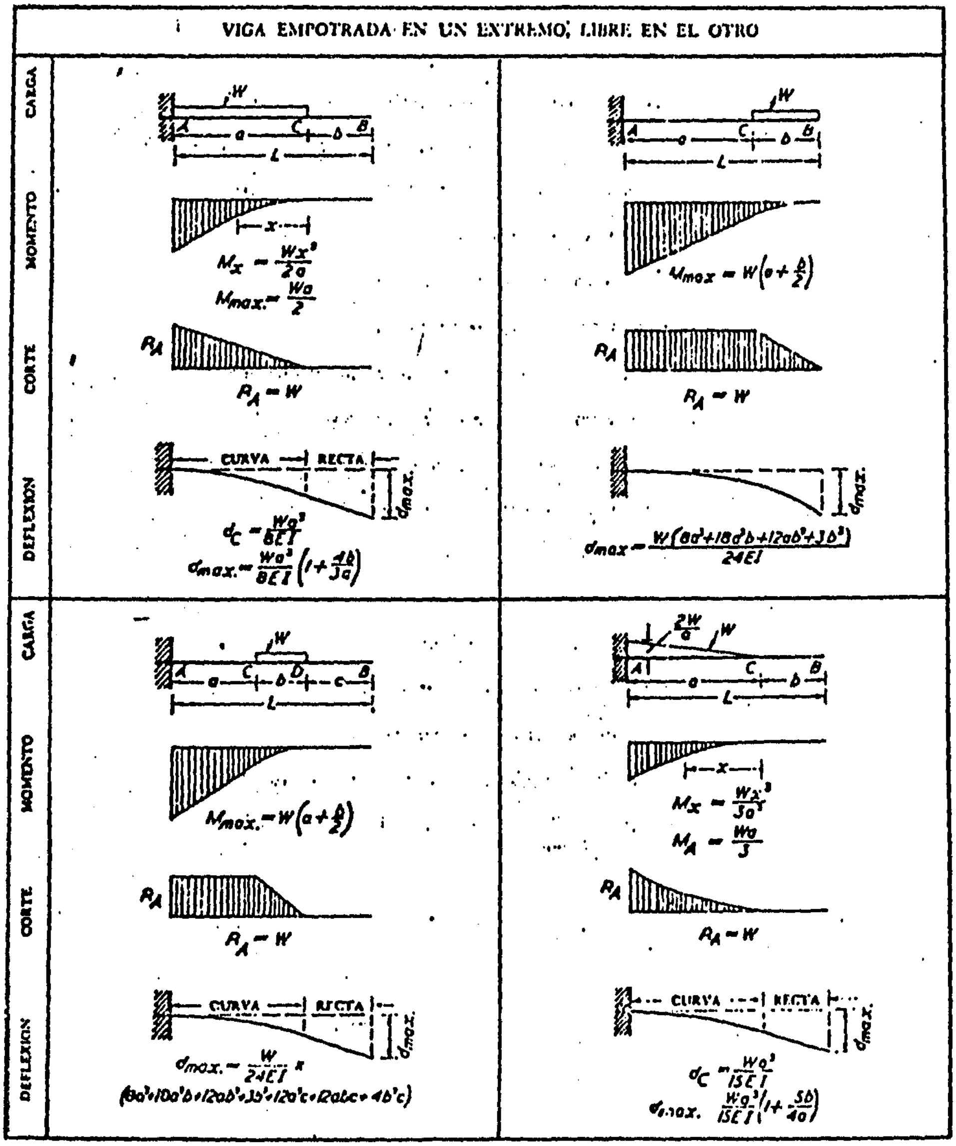
$$\Sigma M = 7.362 - 5.08 - 2.28$$
$$= 0.002$$

A P E N D I C E

NOMENCLATURA

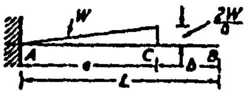
a, b, c, m, n,	Distancias parciales dentro de la longitud de una viga o marco.
da, db, dc, dx	Deflexión total de una viga o marco en el lugar donde indica el subíndice.
E	Módulo de elasticidad 2,038,990 K/cm² para el acero.
f	Peralte de una armadura o marco.
h	Altura de columnas para armaduras o marcos.
Ha-Hb, etc.	Reacción horizontal en apoyos de marcos.
Iab, Ibc, Icd	Momento de inercia de la pieza indicada por el subíndice.
L	Longitud de una viga o armadura entre apoyos.
Ma-Mb-Mc	Momento flexionante actuando en el lugar indicado por el subíndice.
N	Cantidad de fuerzas aplicadas a una viga.
P	Carga concentrada.
Ra, Rb, Rc	Reacción en vigas según el apoyo indicado por el subíndice.
Va, Vv, Vc	Reacción vertical en apoyos de marcos.
W	Carga total distribuida uniformemente.
w	Carga unitaria distribuida uniformemente.
α, *a*	Angulo que forma la cubierta de un techo con la horizontal.
A; B, D, F, G, J, K. N, S, T, ϕ, ψ	Constantes para cálculo de marcos rígidos. Definidas en cada caso y usadas para simplificar las fórmulas.

6.1. FORMULAS Y DIAGRAMAS PARA VIGAS

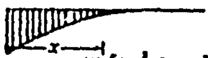


VIGAS EMPOTRADAS EN UN EXTREMO, LIBRE EN EL OTRO

CARGA



MOMENTO



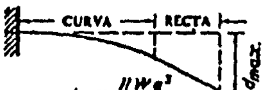
$M_x = \frac{Wa}{3}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{3x}{a} + 2\right]$

$M_A = \frac{2Wa}{3}$

CORTE

$R_A = W$

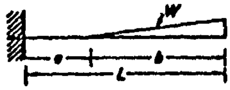
DEFLEXION



$d_C = \frac{11Wa^3}{60EI}$

$d_{max.} = \frac{11Wa^3}{60EI}\left(1 + \frac{15b}{11a}\right)$

CARGA



MOMENTO

$M_{max.} = W\left(a + \frac{2b}{3}\right)$

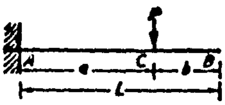
CORTE

$R_A = W$

DEFLEXION

$d_{max.} = \frac{W(20a^3 + 50a^2b + 40ab^2 + 11b^3)}{60EI}$

CARGA



MOMENTO

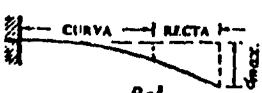
$M_x = P.x$

$M_{max} = P.a$

CORTE

$R_A = P$

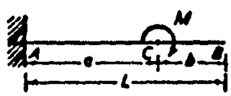
DEFLEXION



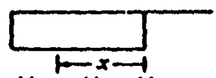
$d_C = \frac{Pa^3}{3EI}$

$d_{max} = \frac{Pa^3}{3EI}\left(1 + \frac{3b}{2a}\right)$

CARGA



MOMENTO



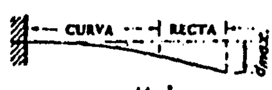
$M_{max} = M_x = M_C$

CORTE

NO HAY CORTE

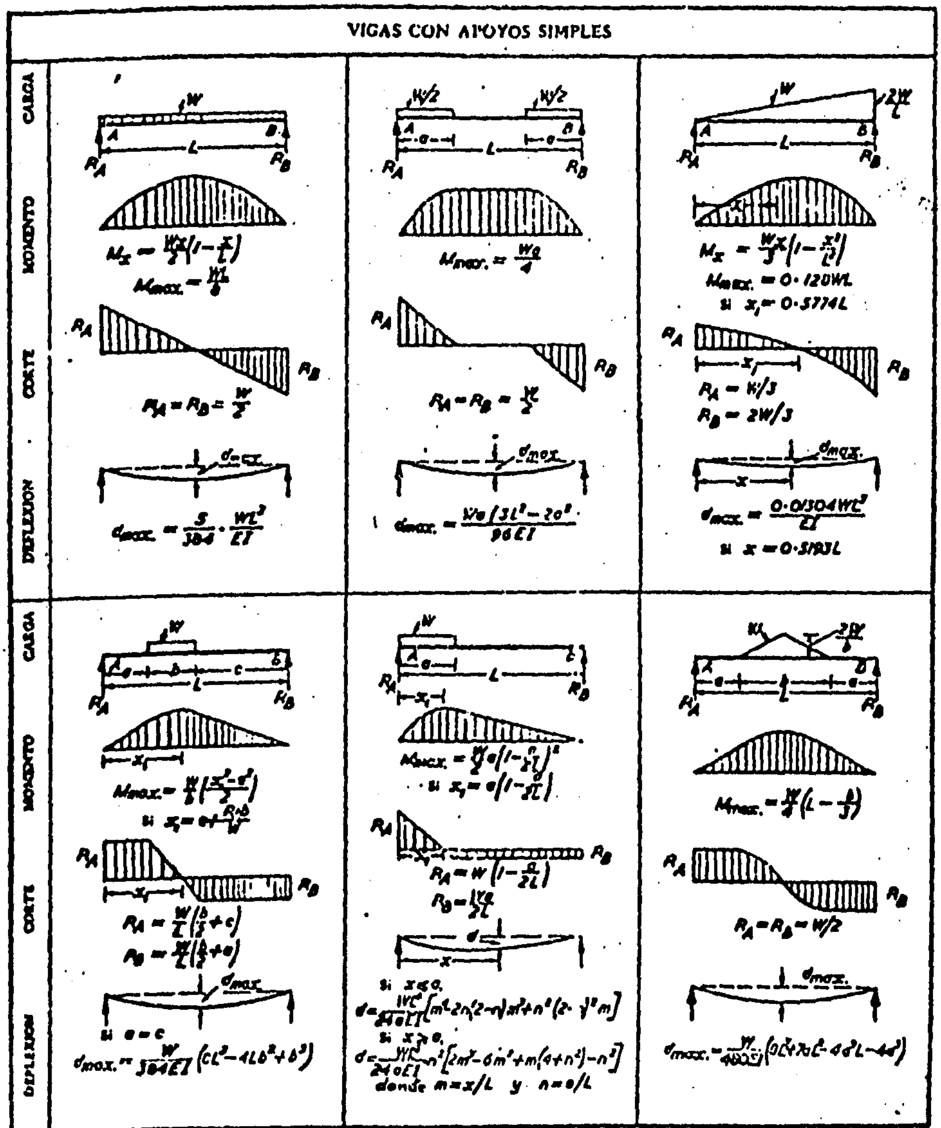
Para momentos contrarios a las manecillas del reloj, la deflexión es hacia arriba.

DEFLEXION

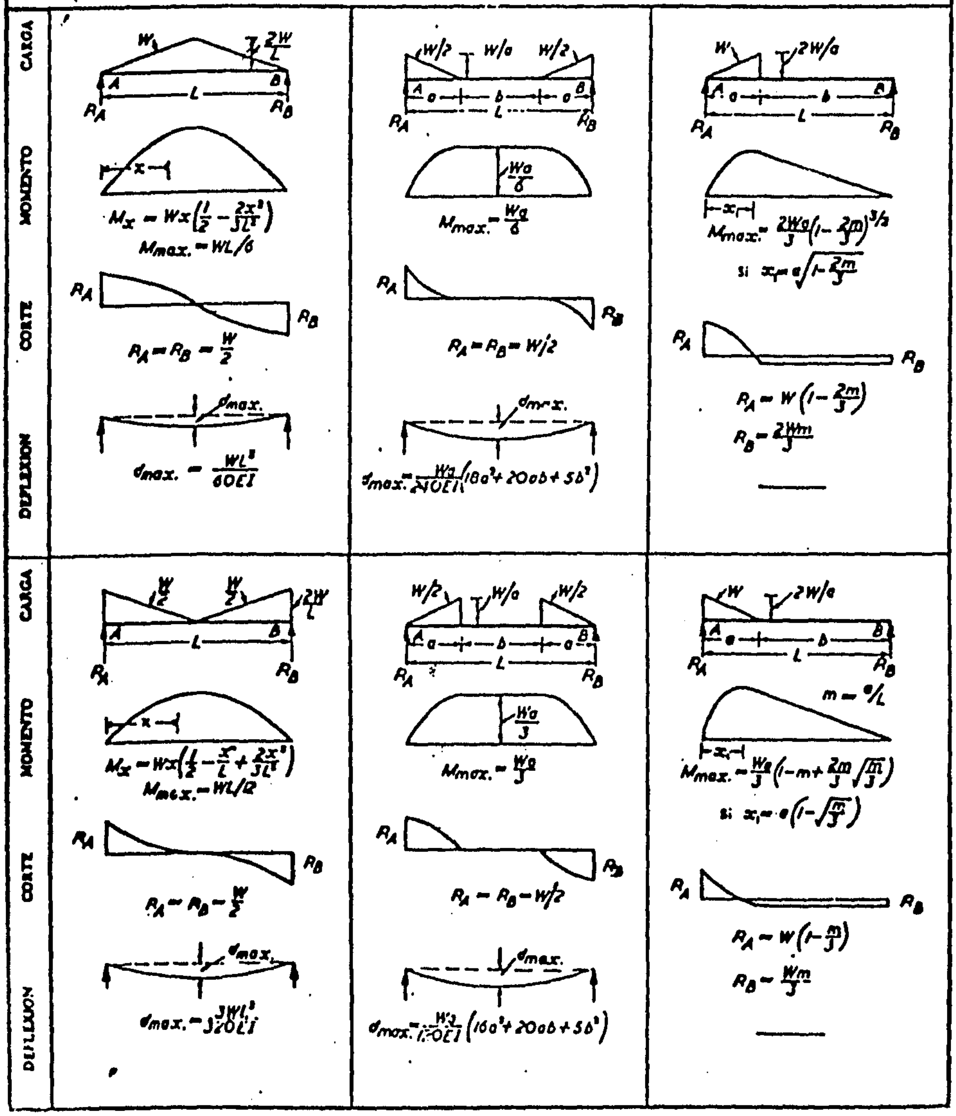


$d_C = \frac{Ma^2}{2EI}$

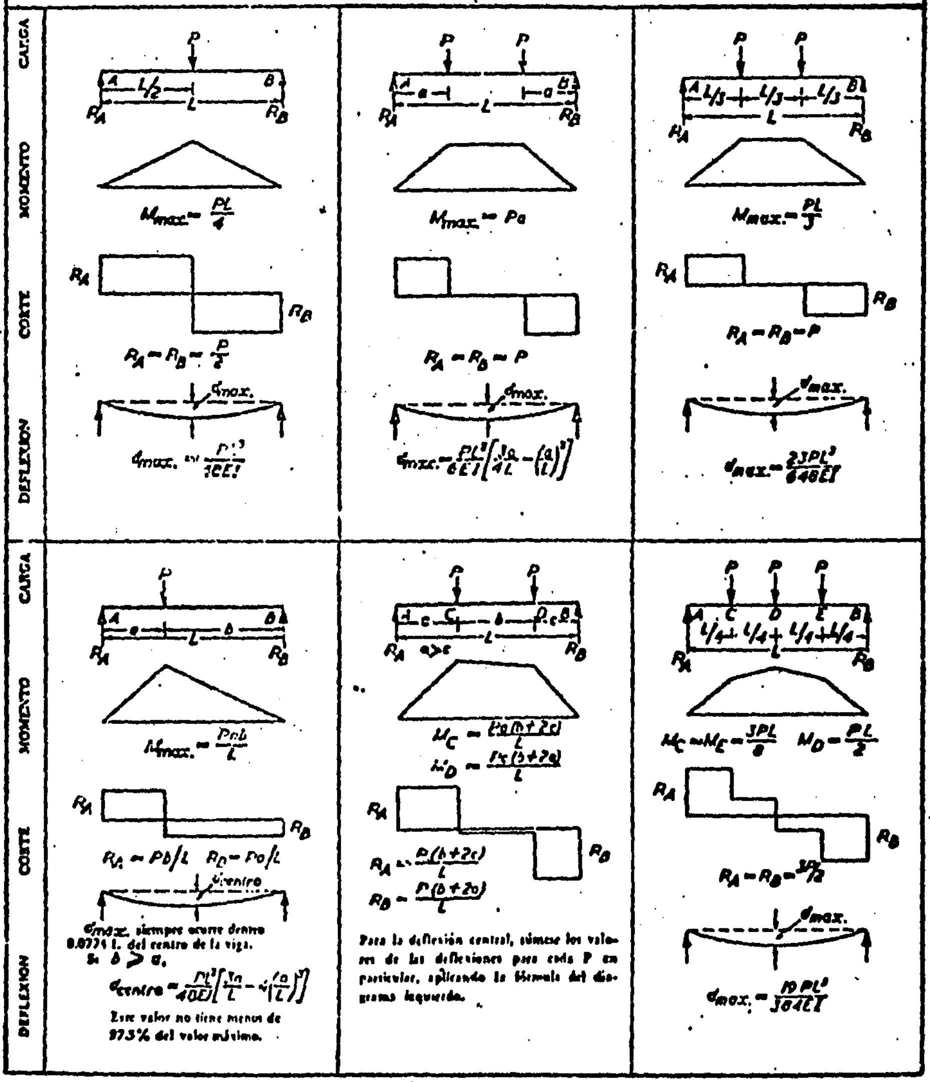
$d_{max.} = \frac{Ma^2}{2EI}\left(1 + \frac{2b}{a}\right)$


VIGAS CON APOYOS SIMPLES
CARGA
MOMENTO
CORTE
DEFLEXION
W
A
B
L
R_A
R_B
W/2
a
$M_{max.} = \frac{Wa}{4}$
$R_A = R_B = \frac{W}{2}$
$d_{max.}$
$d_{max.} = \frac{5}{384} \cdot \frac{WL^3}{EI}$
2W/L
$R_A = W/3$
$R_B = 2W/3$
$M_{max.} = 0 \cdot 120WL$
si $x_1 = 0 \cdot 5774L$
$d_{max.} = \frac{0 \cdot 01304WL^3}{EI}$
si $x = 0 \cdot 5193L$
b
c
x_1
si $a = c$
$R_A = W/2$
donde $m = x/L$ y $n = a/L$

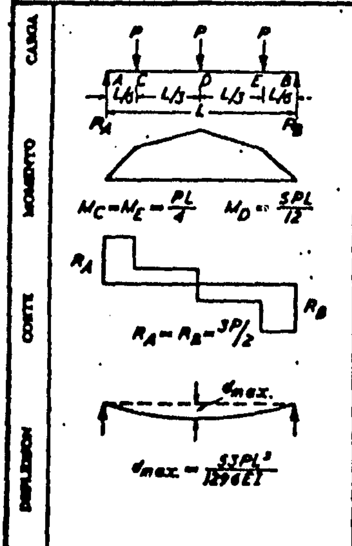
VIGAS CON APOYOS SIMPLES



VIGAS CON APOYOS SIMPLES



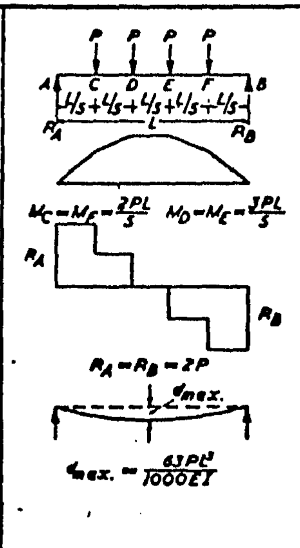
VIGAS CON APOYOS SIMPLES



$M_C = M_E = \frac{PL}{4}$ $M_D = \frac{5PL}{12}$

$R_A = R_B = 3P/2$

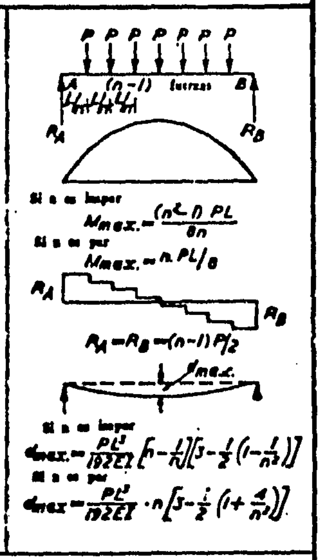
$d_{max.} = \frac{53PL^3}{1296EI}$



$M_C = M_F = \frac{2PL}{5}$ $M_D = M_E = \frac{3PL}{5}$

$R_A = R_B = 2P$

$d_{max.} = \frac{63PL^3}{1000EI}$



Si n es impar

$M_{max.} = \frac{(n^2-1)PL}{8n}$

Si n es par

$M_{max.} = nPL/8$

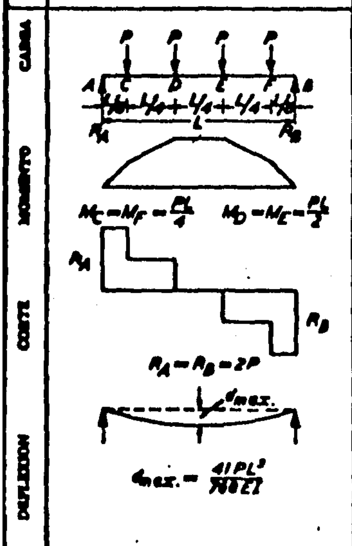
$R_A = R_B = (n-1)P/2$

Si n es impar

$d_{max.} = \frac{PL^3}{192EI}\left[n-\frac{1}{n}\right]\left[3-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

Si n es par

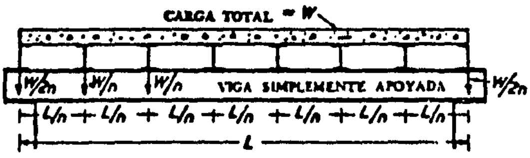
$d_{max} = \frac{PL^3}{192EI}\cdot n\left[3-\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)\right]$



$M_C = M_F = \frac{PL}{4}$ $M_D = M_E = \frac{PL}{2}$

$R_A = R_B = 2P$

$d_{max.} = \frac{41PL^3}{768EI}$



Si n>10, considere la carga uniformemente distribuida.

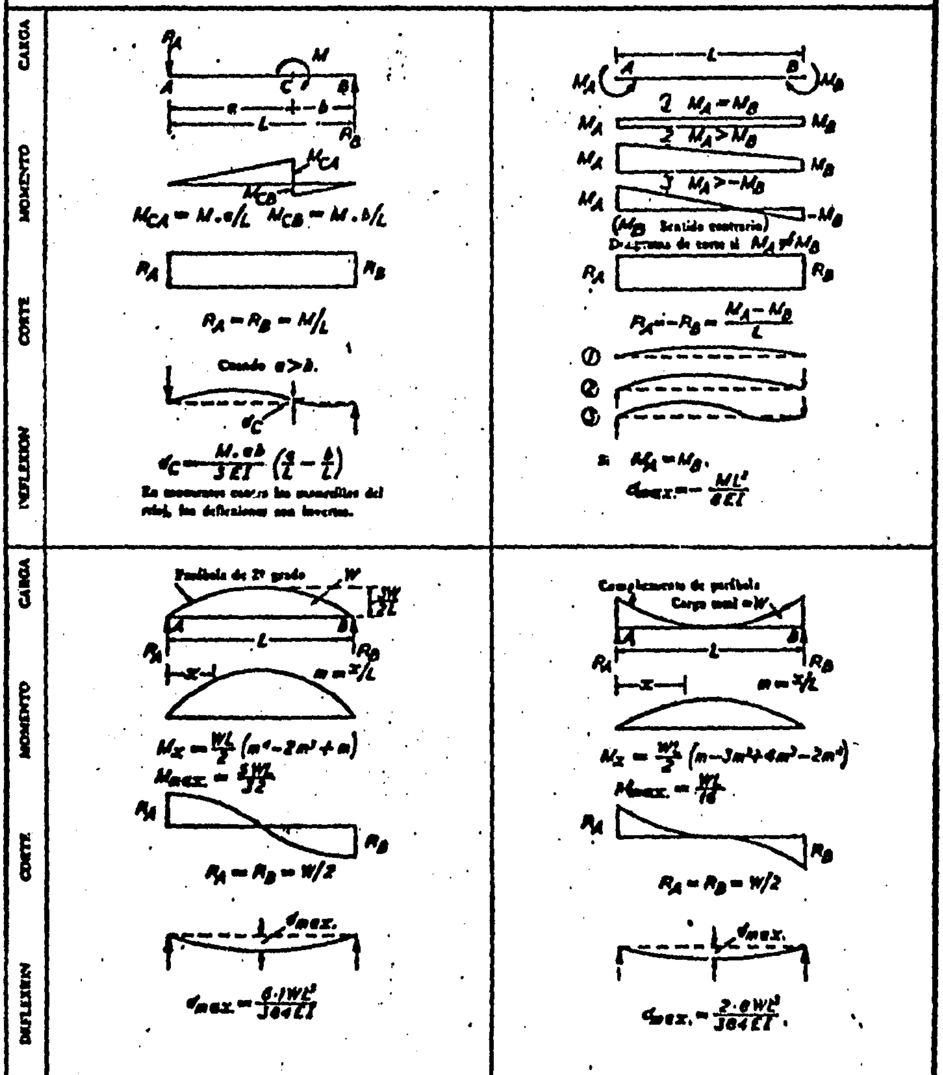
La reacción en los soportes $= W/2$ y la fuerza de corte máxima ocurre en los extremos de la viga $= \frac{W(n-1)}{2n} = AW$

El valor del momento de flexión máximo $= CWL$

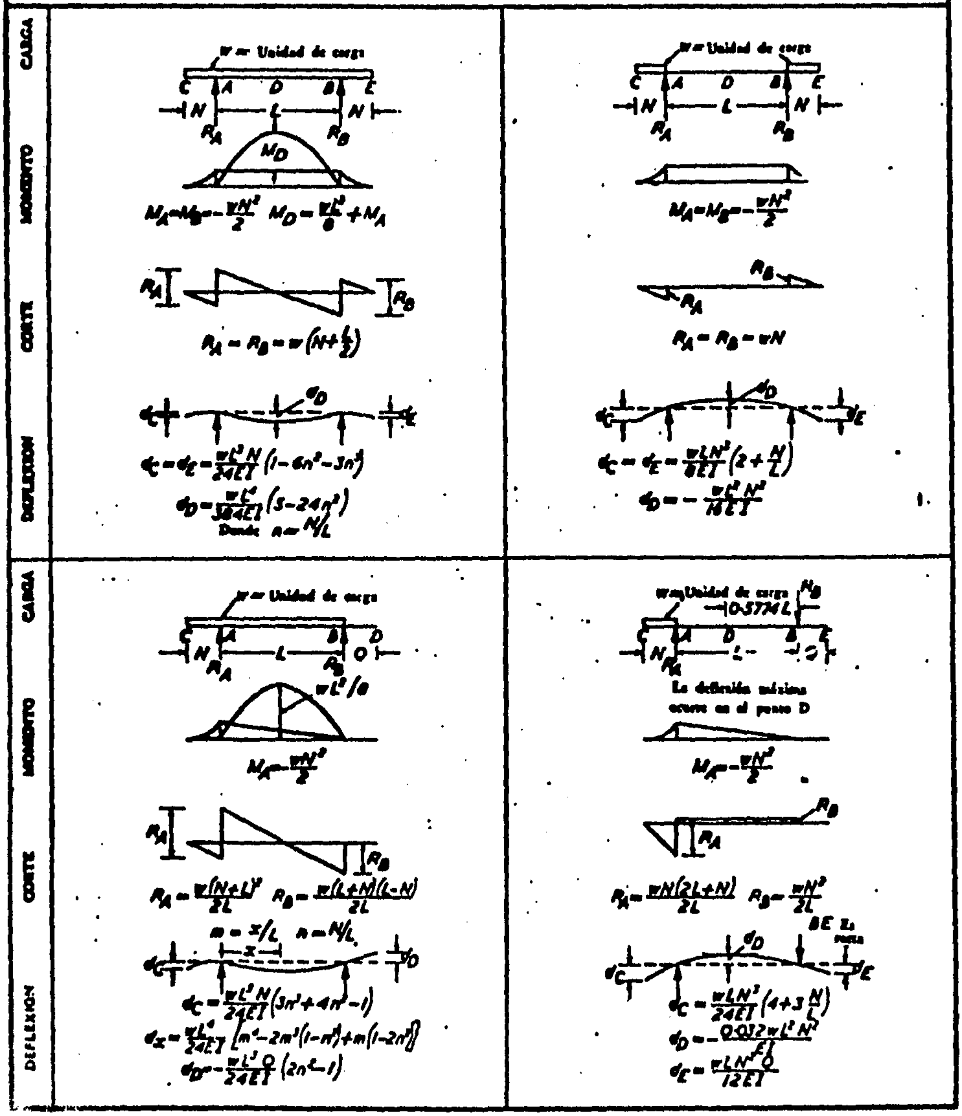
El valor de la deflexión en el centro del claro $= K\,\frac{WL^3}{EI}$

Valor de n	A	C	k
2	0·2500	0·1250	0·0105
3	0·3333	0·1111	0·0118
4	0·3750	0·1250	0·0124
5	0·4000	0·1200	0·0126
6	0·4167	0·1250	0·0127
7	0·4286	0·1224	0·0128
8	0·4375	0·1250	0·0128
9	0·4444	0·1236	0·0129
10	0·4500	0·1250	0·0129

VIGAS CON APOYOS SIMPLES

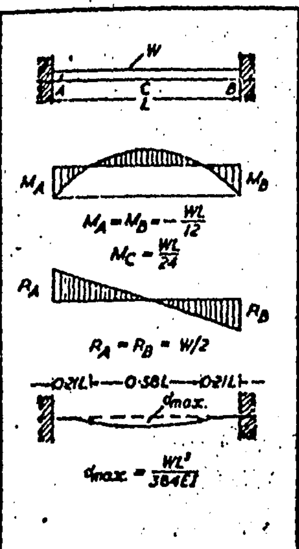


VIGAS CON APOYOS SIMPLES



VIGAS EMPOTRADAS EN AMBOS EXTREMOS

(CARGA – MOMENTO – CORTE – DEFLEXION)

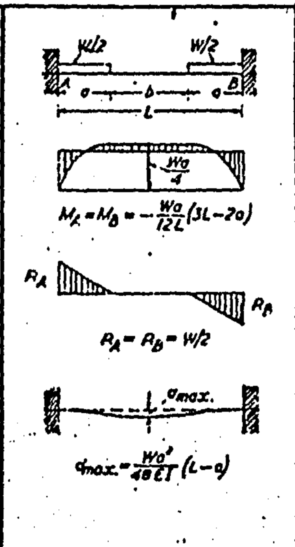


$M_A = M_B = -\frac{WL}{12}$

$M_C = \frac{WL}{24}$

$R_A = R_B = W/2$

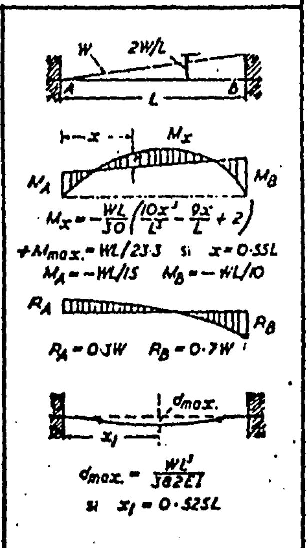
$d_{max.} = \frac{WL^3}{384EI}$



$M_A = M_B = -\frac{Wa}{12L}(3L-2a)$

$R_A = R_B = W/2$

$d_{max.} = \frac{Wa^2}{48EI}(L-a)$



$M_x = -\frac{WL}{30}\left(\frac{10x^3}{L^3} - \frac{9x}{L} + 2\right)$

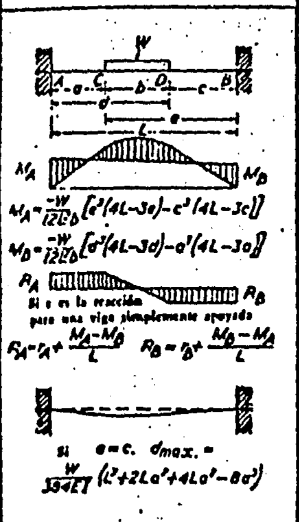
$+M_{max.} = WL/23.3$ si $x = 0.55L$

$M_A = -WL/15 \quad M_B = -WL/10$

$R_A = 0.3W \quad R_B = 0.7W$

$d_{max.} = \frac{WL^3}{382EI}$

si $x_1 = 0.525L$



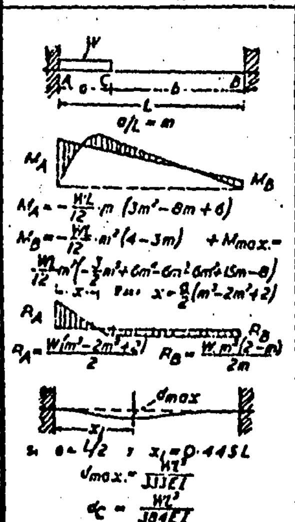
$M_A = \frac{-W}{12L^2b}\left[e^3(4L-3e) - c^3(4L-3c)\right]$

$M_B = \frac{-W}{12L^2b}\left[d^3(4L-3d) - a^3(4L-3a)\right]$

Si r es la reacción para una viga simplemente apoyada

$R_A = r_A + \frac{M_A - M_B}{L} \quad R_B = r_B + \frac{M_B - M_A}{L}$

si $e = c$. $d_{max.} = \frac{W}{384EI}(L^3 + 2La^2 + 4La^2 - 8a^3)$



$M_A = -\frac{WL}{12} \cdot m\,(3m^2 - 8m + 6)$

$M_B = -\frac{WL}{12} \cdot m^2(4-3m) \quad +M_{max.} =$

$\frac{WL}{12} m^2\left(-\frac{3}{2}m^2 + 6m^2 - 6m^2 6m^2 + 15m - 8\right)$

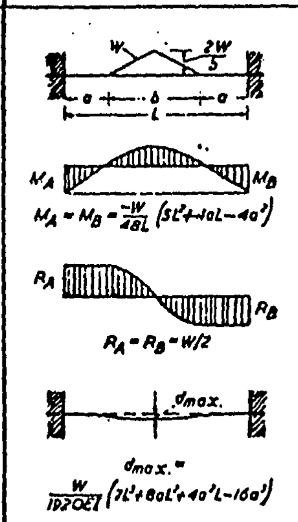
para $x = \frac{a}{2}(m^3 - 2m^2 + 2)$

$R_A = \frac{W(m^3 - 2m^2 + 2)}{2} \quad R_B = \frac{W\,m^2(2-m)}{2m}$

si $a = L/2$ y $x_1 = 0.445L$

$d_{max.} = \frac{WL^3}{333EI}$

$d_C = \frac{WL^3}{384EI}$

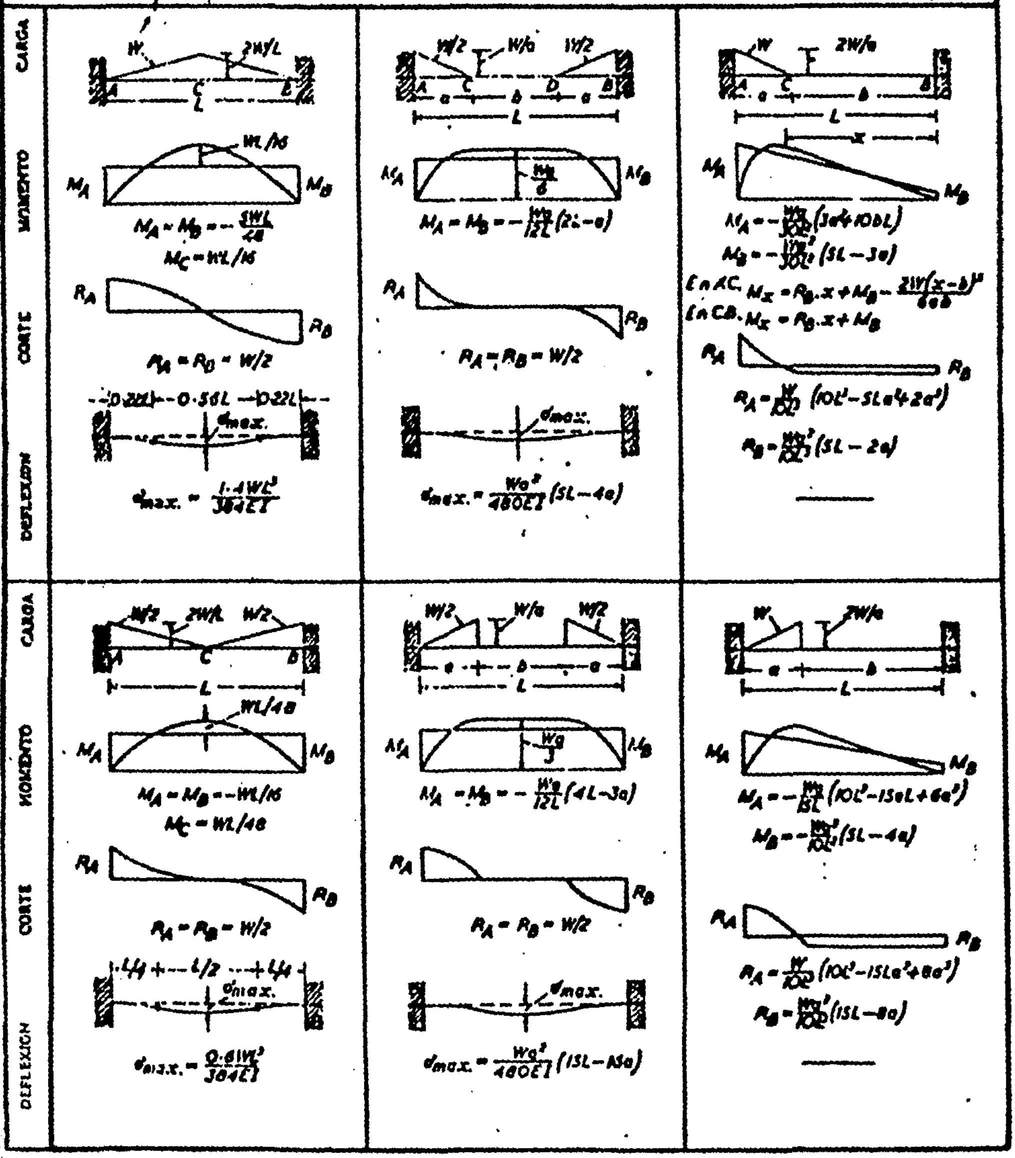


$M_A = M_B = \frac{-W}{48L}(5L^2 + 4aL - 4a^2)$

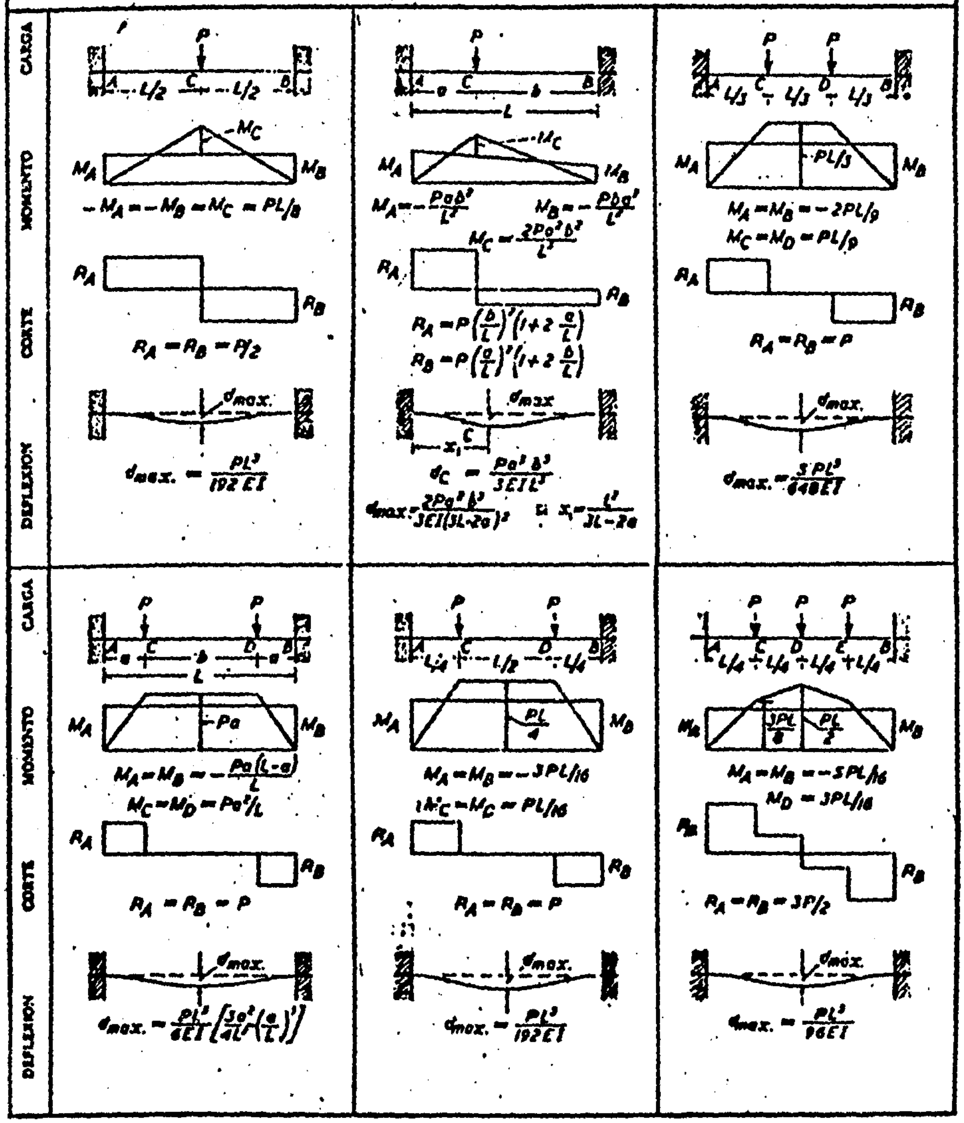
$R_A = R_B = W/2$

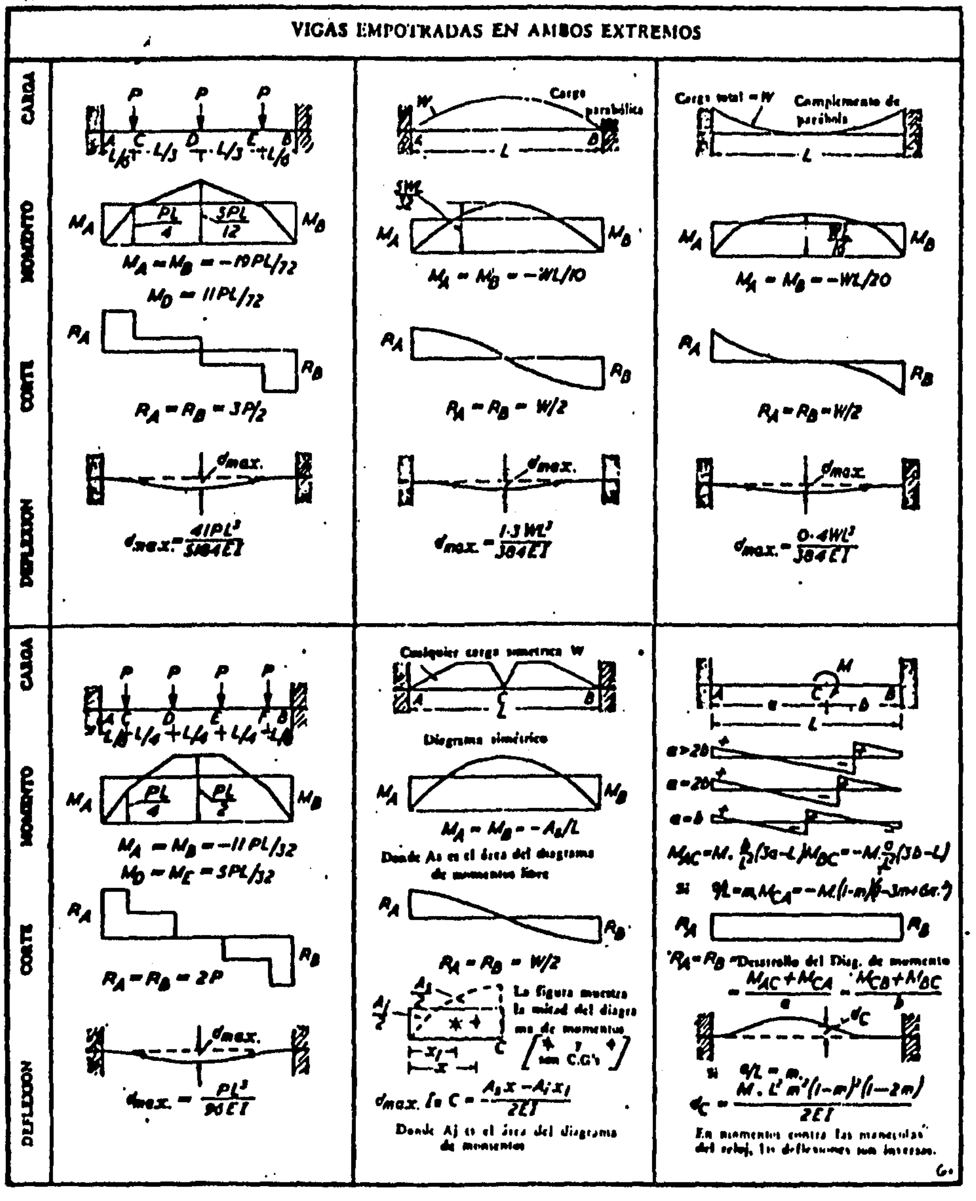
$d_{max.} = \frac{W}{1920EI}(7L^3 + 8aL^2 + 4a^2L - 16a^3)$

VIGAS EMPOTRADAS EN AMBOS EXTREMOS



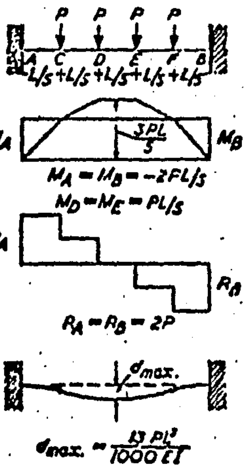
VIGAS EMPOTRADAS EN AMBOS EXTREMOS

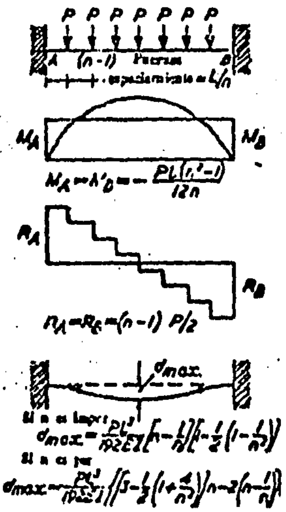


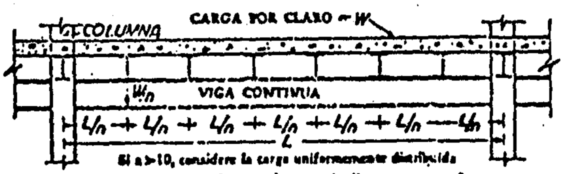

VIGAS EMPOTRADAS EN AMBOS EXTREMOS
CARGA
MOMENTO
CORTE
DEFLEXION
P P P
Carga parabólica
Carga total = W
Complemento de parábola
$M_A = M_B = -19PL/72$
$M_D = 11PL/72$
$M_A = M_B = -WL/10$
$M_A = M_B = -WL/20$
$R_A = R_B = 3P/2$
$R_A = R_B = W/2$
$R_A = R_B = W/2$
$d_{max.} = \frac{41PL^3}{3184EI}$
$d_{max.} = \frac{1.3WL^3}{384EI}$
$d_{max.} = \frac{0.4WL^3}{384EI}$
Cualquier carga simetrica W
Diagrama simétrico
$M_A = M_B = -11PL/32$
$M_D = M_E = 5PL/32$
$M_A = M_B = -A_s/L$
Donde As es el área del diagrama de momentos libre
$R_A = R_B = 2P$
$R_A = R_B = W/2$
La figura muestra la mitad del diagrama de momentos
$d_{max.} = \frac{PL^3}{96EI}$
$d_{max.}$ en $C = \frac{A_s x - A_i x_1}{2EI}$
Donde Aj es el área del diagrama de momentos
$a > 2b$
$a = 2b$
$a = b$
$R_A = R_B$ = Desarrollo del Diag. de momento
$= \frac{M_{AC} + M_{CA}}{a} = \frac{M_{CB} + M_{BC}}{b}$
$d_C = \frac{M \cdot L^2 m^2 (1-m)^2 (1-2m)}{2EI}$
En momentos contra las manecillas del reloj, las deflexiones son inversas.

VIGAS EMPOTRADAS EN AMBOS EXTREMOS

CARGA · MOMENTO · CORTE · DEFLEXION







Si n > 10, considere la carga uniformemente distribuida

La carga en los claros exteriores, está soportada directamente por los apoyos.

Las vigas continuas se suponen horizontales en cada apoyo.

La reacción en los apoyos para todo el claro = W/2 pero la máxima fuerza de corte en cualquier claro de vigas continuas $= \frac{W(n-1)}{2n} = AW$

El valor del momento de flexión en cada apoyo = B.WL.

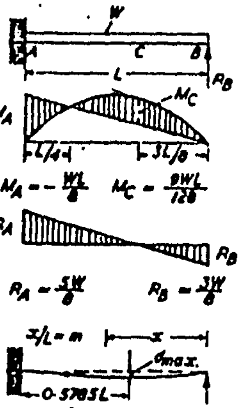
El valor del momento máximo positivo para todos los claros = C.WL.

El valor de la deflexión máxima para todos los claros = $0.0026\,\frac{WL^3}{EI}$

Valor de n	A	B	C
2	0.2500	0.0625	0.0625
3	0.3333	0.0741	0.0370
4	0.3750	0.0781	0.0469
5	0.4000	0.0800	0.0400
6	0.4167	0.0811	0.0439
7	0.4286	0.0816	0.0408
8	0.4375	0.0820	0.0430
9	0.4444	0.0823	0.0413
10	0.4500	0.0825	0.0425

VIGAS EMPOTRADAS EN UN EXTREMO Y APOYO SIMPLE EN EL OTRO

CARGA — MOMENTO — CORTE — DEFLEXION

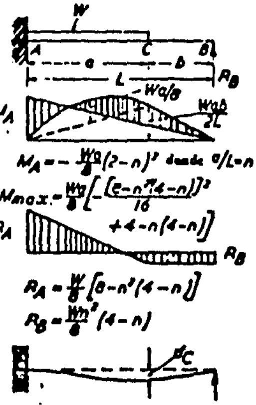


$M_A = -\frac{WL}{8}$ $M_C = \frac{9WL}{128}$

$R_A = \frac{5W}{8}$ $R_B = \frac{3W}{8}$

$d = \frac{WL^3}{48EI}(m - 3m^3 + 2m^4)$

$d_{max.} = \frac{WL^3}{185EI}$



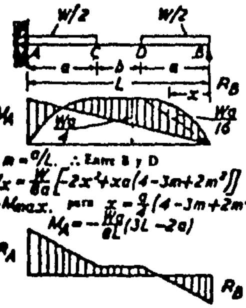
$M_A = -\frac{Wa}{8}(2-n)^2$ donde $a/L = n$

$+M_{max.} = \frac{Wa}{8}\left[-\frac{(8-n^2(4-n))^2}{16} + 4 - n(4-n)\right]$

$R_A = \frac{W}{8}[8 - n^2(4-n)]$

$R_B = \frac{Wn^2}{8}(4-n)$

$d_C = \frac{Wa^3}{48EI}(6 - 12n + 7n^2 - n^3)$



Si $m = a/L$. ∴ Entre B y D

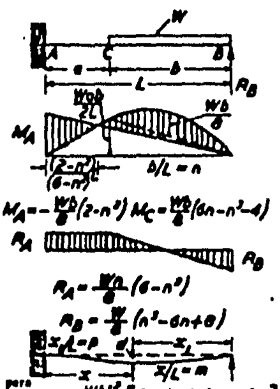
$M_x = \frac{W}{8a}\left[-2x^2 + xa(4 - 3m + 2m^2)\right]$

$+M_{max.}$ para $x = \frac{a}{4}(4 - 3m + 2m^2)$

$M_A = -\frac{Wa}{8L}(3L - 2a)$

$R_A = \frac{W}{4L}(2L^2 + 3aL - 4a^2)$

$R_B = \frac{W}{4L}(2L^2 - 3aL + 4a^2)$



$M_A = -\frac{Wb}{8}(2-n^2)$ $M_C = \frac{Wb}{8}(6n - n^2 - 4)$

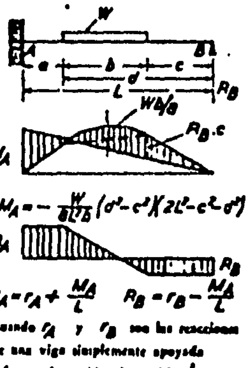
$R_A = \frac{Wn}{8}(6 - n^2)$

$R_B = \frac{W}{8}(n^3 - 6n + 8)$

para $x \leq a$, $d = \frac{WbL^2}{48EI}[(n^2-6)m^2 - (3n^2-6)m^3]$

para $x \geq a$,

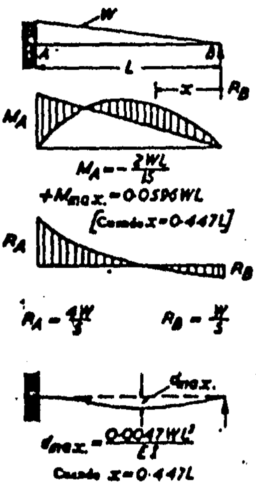
$d = \frac{WL^4}{48bEI}[2p^4 - p^3n(n^2 - 6n + 8) + pn^3(3n^2 - 8n + 6)]$



$M_A = -\frac{W}{8L^2b}(d^2 - c^2)(2L^2 - c^2 - d^2)$

$R_A = r_A + \frac{M_A}{L}$ $R_B = r_B - \frac{M_A}{L}$

Cuando r_A y r_B son las reacciones de una viga simplemente apoyada (M_A será considerado positivo)



$M_A = -\frac{2WL}{15}$

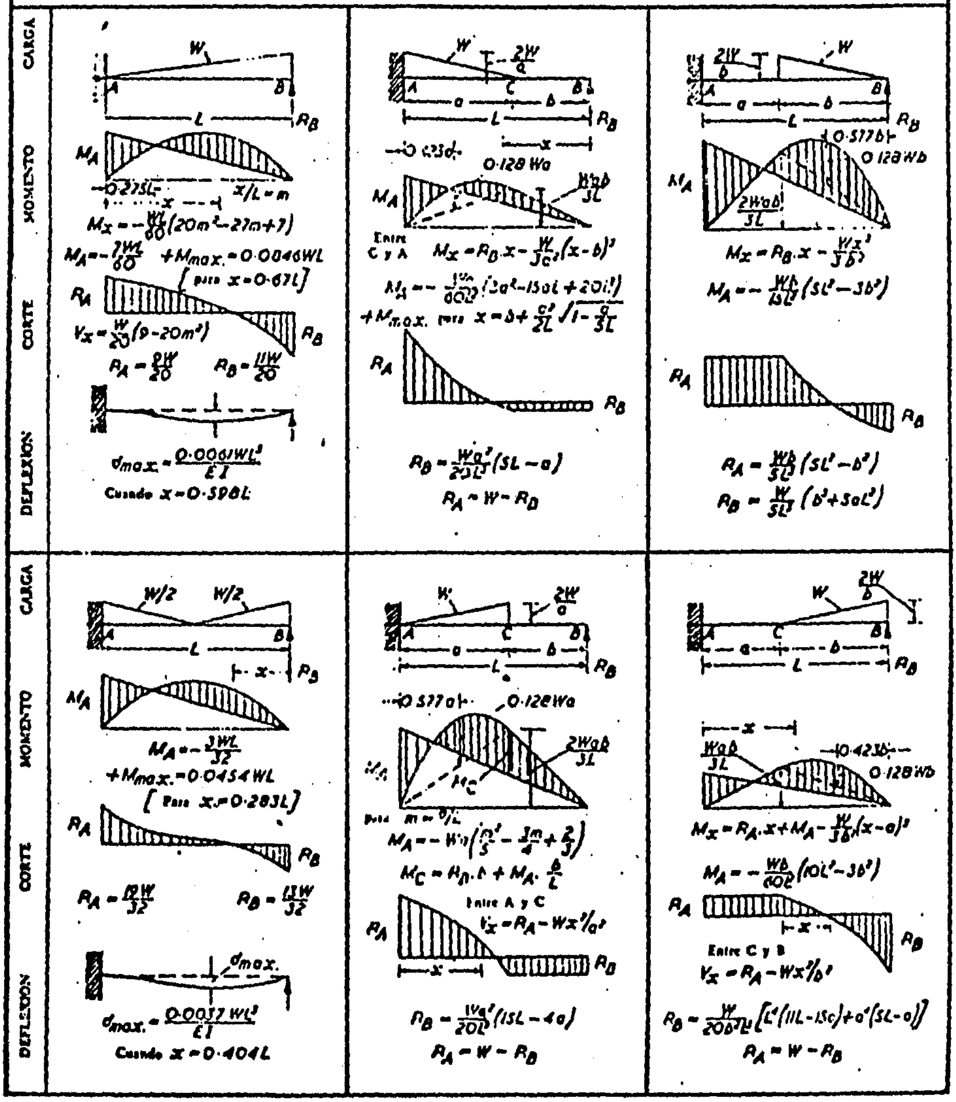
$+M_{max.} = 0.0596WL$ [Cuando $x = 0.447L$]

$R_A = \frac{4W}{5}$ $R_B = \frac{W}{5}$

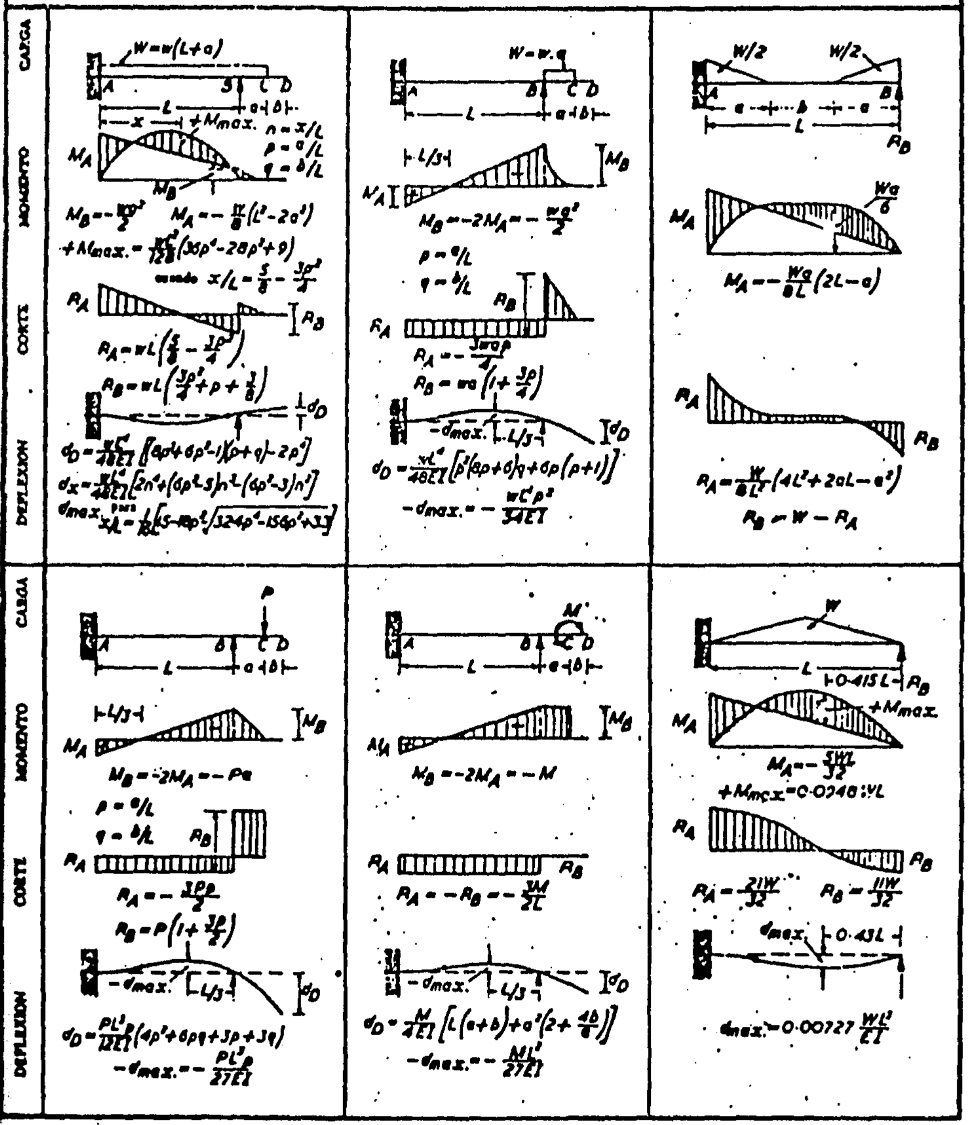
$d_{max.} = \frac{0.0047WL^3}{EI}$

Cuando $x = 0.447L$

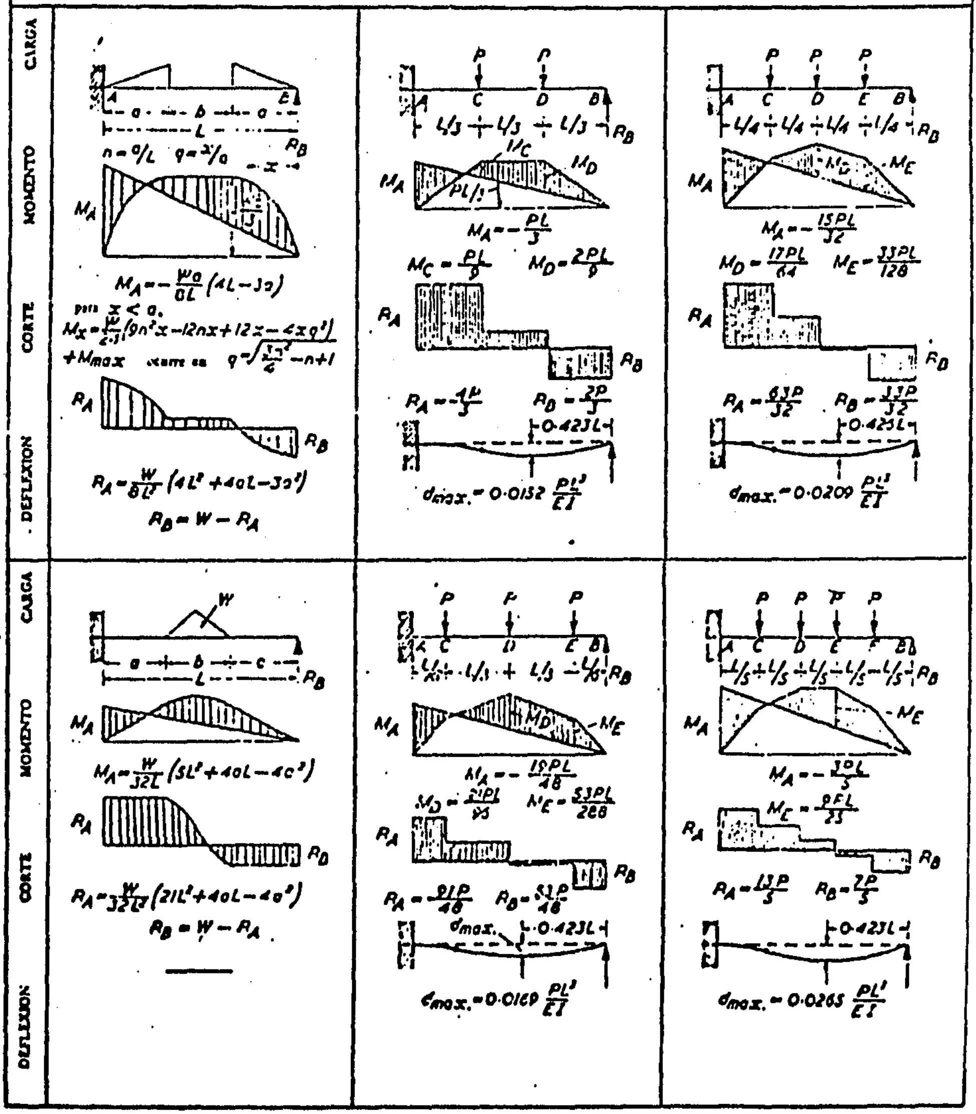
VIGAS EMPOTRADAS EN UN EXTREMO Y APOYO SIMPLE EN EL OTRO



VIGAS EMPOTRADAS EN UN EXTREMO Y APOYO SIMPLE EN EL OTRO

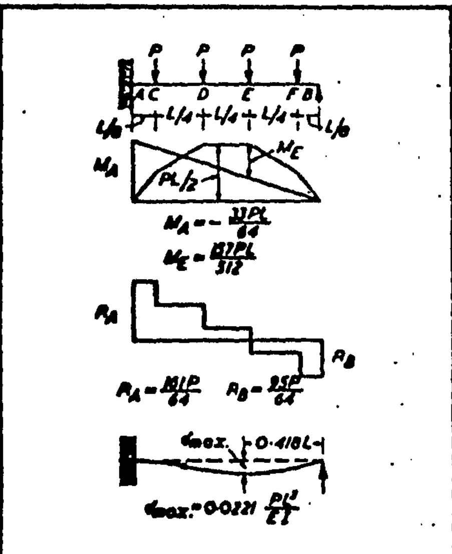


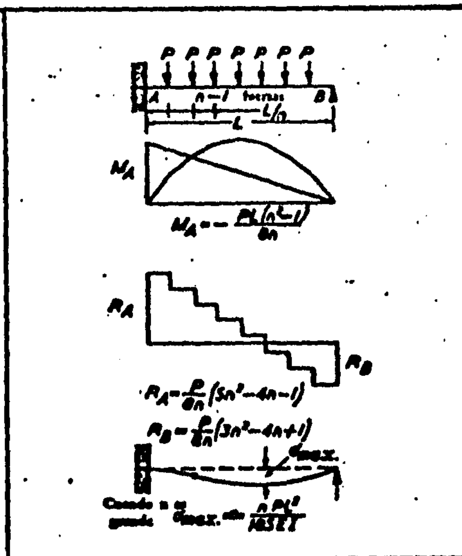
VIGAS EMPOTRADAS EN UN EXTREMO Y APOYO SIMPLE EN EL OTRO



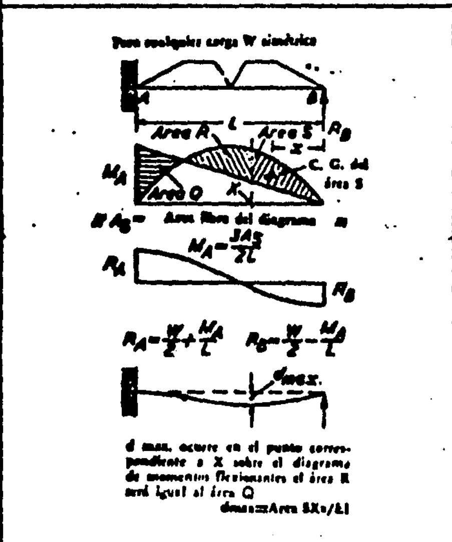
VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y APOYO SIMPLE EN EL OTRO

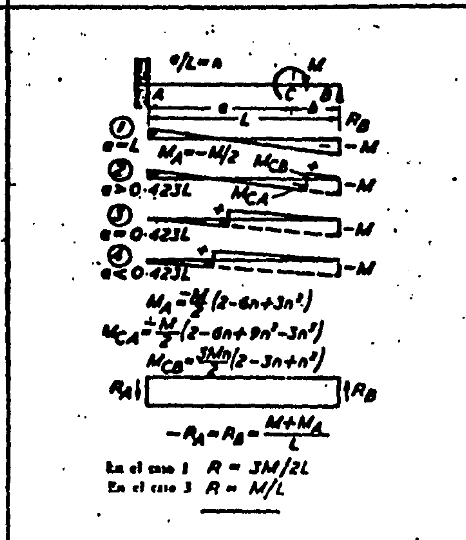
CARGA — MOMENTO — CORTE — DEFLEXION





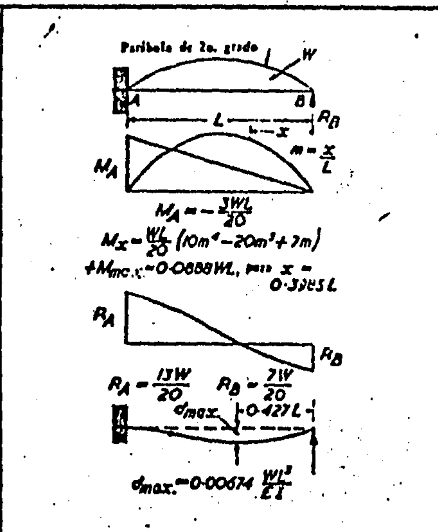
CARGA — MOMENTO — CORTE — DEFLEXION

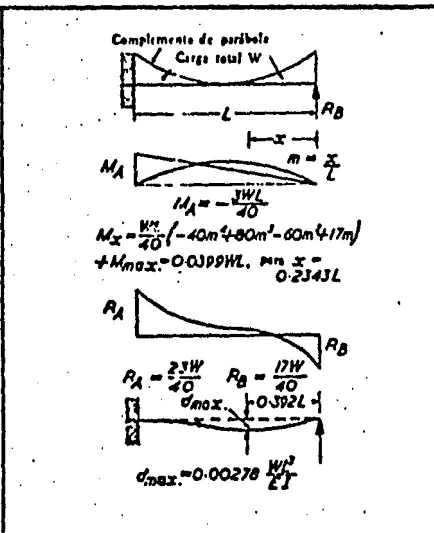


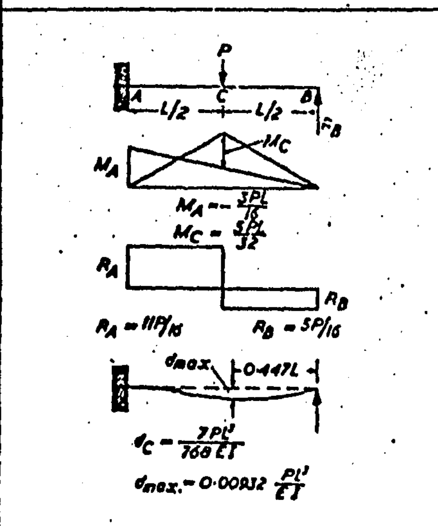


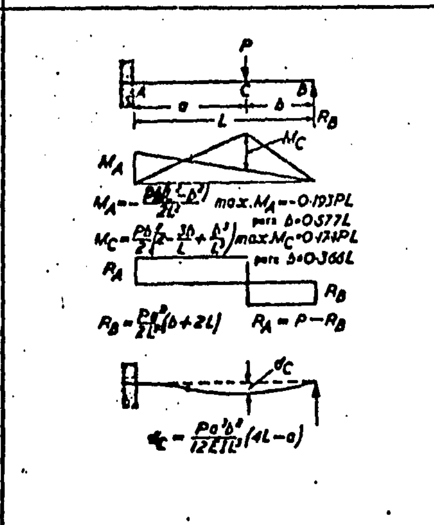
VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y APOYO SIMPLE EN EL OTRO

CARGA — MOMENTO — CORTE — DEFLEXION









B I B L I O G R A F I A:

DAMY RIOS JULIO. Ing.

Apuntes de Aplicación de las Computadoras al Análisis Estructura.

BEAUFAIT, FRED W.

Análisis Estructural
Ed. Prentice Hall Internacional.

FADDEEVA, V.N.

Computational Methods of. Linear Algebra.
Dover Publications, Inc.

SOCIEDAD MEXICANA DE INGENIERIA ESTRUCTURAL A.C.

Ayudas de Diseño 1983.

CHUKIA, WANG.

Introducción al Análisis Estructural con Métodos Matriciales.