



**Universidad Nacional Autónoma de México**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**ANALISIS DE ARMADURAS  
TRIDIMENSIONALES**

**TESIS**

Que para obtener el título de :

**INGENIERO CIVIL**

Presenta:

**GREGORIO RIOS VILCHIS**

**México D. F.**

**1985**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

Página

### CAPITULO I.- PRINCIPIOS DEL ANALISIS ESTRUCTURAL.

I.1.- Breve historia del análisis estructural . . . . .	1
I.2.- El análisis estructural y su uso . . . . .	3
I.3.- Clasificación de estructuras . . . . .	5
I.4.- Tipos de apoyo . . . . .	8
I.5.- Cargas . . . . .	14
I.6.- Funciones y constantes . . . . .	16
I.7.- Principios fundamentales . . . . .	17
I.8.- Condiciones de estabilidad y determinación estática y cinemática en estructuras . . . . .	21

### CAPITULO II.- ECUACIONES DE CONTINUIDAD, LEY DE HOOKE Y EQUILIBRIO.

II.1.- Ecuación de continuidad . . . . .	27
II.2.- Ley de hooke . . . . .	31
II.3.- Ecuación de equilibrio . . . . .	35
II.4.- Solución de armaduras tridimensionales por el método de rigideces o de los desplazamien- tos . . . . .	38
II.5.- Isostaticidad, hiperestaticidad, estabilidad e inestabilidad de las estructuras . . . . .	40
II.6.- Apoyos completos e incompletos . . . . .	41
II.7.- Método de las fuerzas o flexibilidades . . . . .	42

### CAPITULO III.- DESARROLLO DE UN PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA ANALIZAR ARMADURAS TRIDIMENSIONALES

III.1.- Método de las rigideces . . . . .	45
III.2.- Codificación del programa . . . . .	47
III.3.- Aplicación . . . . .	57
Bibliografía . . . . .	65

## PRINCIPIOS DEL ANALISIS ESTRUCTURAL

## I.1.- BREVE HISTORIA DEL ANALISIS ESTRUCTURAL

Mucho antes de la era antihua de los Egipcios, Romanos y Griegos, ya había relación entre el hombre y el análisis estructural. Por ejemplo, Arquímedes (212-287 a. de J. C. ) introdujo el concepto de centro de gravedad y llevó a su más simple expresión los principios fundamentales de la estática y el equilibrio.

Después del renacimiento (1452-1642) personas como Leonardo da Vinci, Galileo Galilei, Fontana y Mimar Sinan de Estambul tuvieron gran sentido acerca de las estructuras debido a sus talentos innatos, son dignos de mención: La Cúpula de San Pedro, de Leonardo (hombre que también introdujo los conceptos de fuerza y momento); el libro de Galileo "Dos nuevas ciencias" acerca de la teoría de la viga en cantiliver y los esbeltos minaretes de Sinan, de gran flexibilidad para resistir terremotos.

Del año 1635 a 1813 surgen grandes hombres, tales como Hooke, Johann Bernouli, Daniel Bernouli, Euler y Lagrange que contribuyeron sin duda a la teoría de las estructuras por medio de las matemáticas. En este lapso se establecieron los principios fundamentales de los conceptos de energía, la relación entre esfuerzos y deformaciones ( Ley de Hooke ), las ecuaciones diferenciales de deformaciones y sus soluciones, la ecuación de las barras vibrantes de Bernouli, el pandeo de columnas de Euler. así como las ecuaciones de flexión de placas de Lagrange.

Se considera edad de oro de la ingeniería a los años comprendidos entre 1785 a 1925, ya que surgen hombres como Navier, Saint-Venant, Clapeyron, Airy, Maxwell, Castigliano, Mohr y Muller-Breslau, que utilizan las fórmulas matemáticas.

ticas desarrolladas en la época anterior para dar solución a los problemas estructurales. Sus descubrimientos y teoremas fueron la base para el desarrollo de la teoría de las estructuras en la edad moderna. Finalmente se desarrollan métodos más prácticos para analizar la complejidad de las estructuras tales como la deflexión de la pendiente, distribución de momentos, y relajación y distribución de esfuerzo cortante.

En la era contemporánea a mediados de este siglo, se desarrollan los poderosos equipos de cálculo tales como computadores analógicos y digitales; De aquí que los ingenieros fueron impulsados a establecer métodos que requieran menos su posiciones en el planteamiento de los problemas, logrando aún mejores resultados. Así, se introduce el llamado METODO MATRICIAL de a nálisis de estructuras, éste método está ligado a los principios establecidos por Castigliano, Maxwell y Muller-Breslau.

## I.2.- EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL Y SU USO

Una estructura en general, cumple con un fin utilitario para el hombre. Su objetivo puede ser limitar un espacio, como es el caso de los distintos tipos de edificios que existen, la unión o comunicación de los puntos por medio de un puente, etc. Ahora bien para la realización de un proyecto estructural se hace uso de la ingeniería estructural que trata sobre tres temas básicos: El Análisis Estructural, El Análisis de esfuerzos y El Diseño Estructural. Todos a pesar de estar interrelacionados, son tan distintos que se estudian independientemente. Mientras que el análisis estructural se basa sobre los principios de la estática, el análisis de esfuerzos se apoya en materias tales como la resistencia y la mecánica de materiales y la teoría de la elasticidad; el diseño de estructuras asegura que en ningún lugar del cuerpo se presenten esfuerzos que excedan sus límites permitidos. Para lograr esto, si es necesario, se modifica el proyecto haciendo que el ciclo se repita nuevamente hasta que no se requiera modificación alguna (ver figura I.2.1).

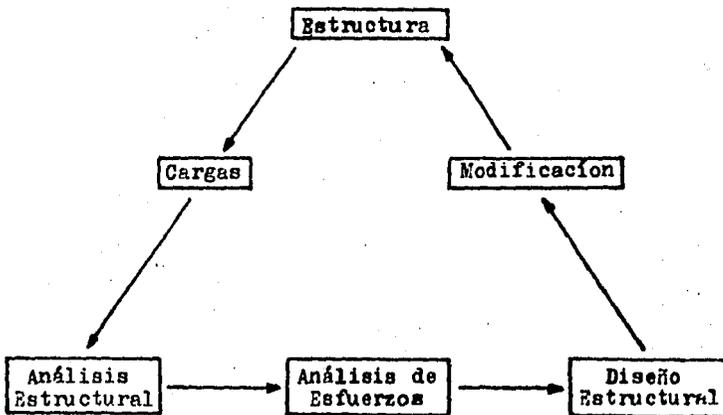


Fig. I.2.1 Ciclo de un proyecto estructural

En este trabajo solo se verá la parte del ANÁLISIS ESTRUCTURAL, ya que por medio de éste se obtendrá la forma de dar solución a las armaduras tridimensionales.

**Definición**

El Análisis Estructural es parte de la Ingeniería Estructural y tiene que ver con el comportamiento de las estructuras, su objetivo es determinar las fuerzas internas y las deflexiones en un punto cualquiera de la estructura (ver figura I.2.2).

Las estructuras se definen como sistemas que soportan cargas y resisten esfuerzos que se originan por el uso que prestan. En cuanto al comportamiento, se entiende como su tendencia a deformarse, pandearse o fluir dependiendo de las condiciones a que estén sometidas.

En el análisis de una estructura se supone que las características geométricas y elásticas, las condiciones de apoyo y los efectos externos que actúan sobre ella están definidos de antemano en forma precisa (ver fig. I.2.2), por lo tanto, los resultados del análisis se usan para determinar la forma de las estructuras y verificar si son adecuadas para soportar las cargas para las cuales se han diseñado (ver fig. I.2.1).

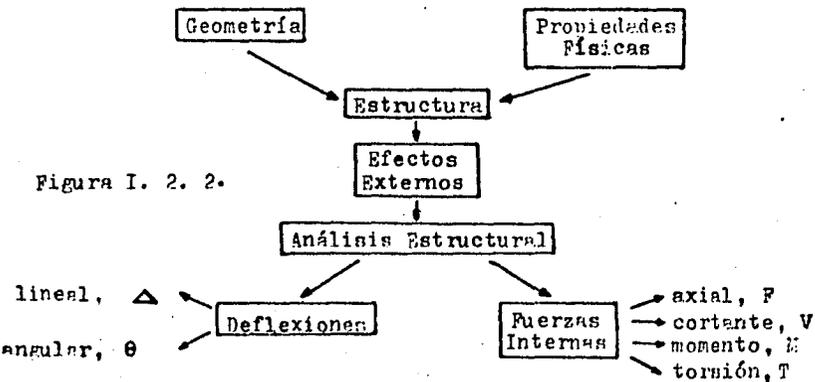


Figura I. 2. 2.

### I.3. CLASIFICACION DE ESTRUCTURAS

Una estructura, en general, está

formada por elementos interconectados, los cuales independientemente de su forma se consideran en una, dos o tres dimensiones. En realidad un elemento tiene siempre tres dimensiones: Longitud, Anchura y Espesor; sin embargo, si la anchura y el espesor son pequeños en comparación con su longitud, como en el caso de una viga o columna, tales elementos pueden considerarse como unidimensionales. En el caso de placas y cáscaras, el espesor es normalmente más pequeño que la longitud y la anchura del elemento; de ahí que las placas y cáscaras se consideren bidimensionales. Como para las relaciones entre longitud, anchura y espesor no hay una delimitación clara, de acuerdo con la cual los elementos puedan clasificarse como unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales, esto queda enteramente a juicio del ingeniero y a la exactitud esperada de los resultados. Por ejemplo, la viga continua, mostrada en la fig. I.3.1, se considera unidimensional, en cambio la de la fig. I.3.2. es bidimensional, ya que las reacciones en A y C son diferentes de cero. Las magnitudes de estas reacciones no dependen únicamente de la relación Longitud-Altura, sino también de las propiedades de los materiales y del momento de inercia de la viga.

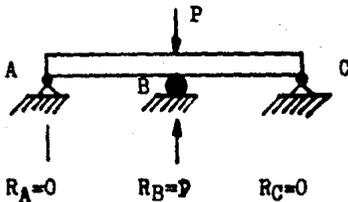


Figura I.3.1

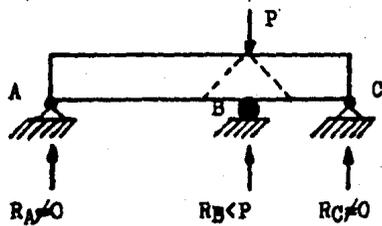


Figura I.3.2

Las estructuras pueden dividirse en los tres categorías siguientes considerando sus elementos como de una, dos, o tres dimensiones:

- 1 Estructuras de esqueleto
- 2 Estructuras laminares
- 3 Sólidos

Este trabajo trata el análisis de aquellas que caen dentro de la primera categoría donde los elementos se consideran como unidimensionales.

La clasificación anterior es el resultado de la idealización de las estructuras reales con ciertas aproximaciones e hipótesis. Por ejemplo, un edificio se idealiza normalmente de tal forma que su entramado, es decir, el conjunto de las vigas y columnas de los pisos se considera como estructura de esqueleto y las placas son de tipo laminar, aunque el sistema completo es realmente la combinación de los tres tipos mencionados anteriormente.

Aún cuando es posible analizar la estructura completa como un sistema integrado de cimientos, pisos y entramados, las dificultades que se encontrarán no justifican el esfuerzo. Considerando otras incertidumbres tales como las propiedades de los materiales, cargas y técnicas de construcción, hay algunas justificaciones para hacer la idealización de las estructuras separando las diferentes partes en diferentes grupos (descomposición), y analizándose luego independientemente.

El tipo de estructuras de esqueleto pueden a su vez dividirse en los siguientes grupos:

- A) Cerchas o Armaduras
- B) Sistemas planos

C) Reticulados

D) Marcos rígidos tridimensionales

En las cerchas, los elementos se unen entre sí por articulaciones sin rozamiento, y las cargas se aplican en los nudos. En consecuencia, los elementos están sometidos únicamente a fuerzas axiales (tensión o compresión). En la práctica, por supuesto, los elementos están unidos entre sí por pernos, tornillos o soldaduras; en lugar de estar unidos por un pasador sin rozamiento y sujetos a cierta flexión y fuerza cortante. Sin embargo, como las rigideces a flexión de los elementos de la cercha son en general muy pequeñas, los errores introducidos por tal idealización son también pequeños. Si se desearan conocer, por ejemplo, los esfuerzos de flexión, normalmente considerados como esfuerzos secundarios en las cerchas, las uniones podrían considerarse como uniones rígidas, y el análisis debería desarrollarse de acuerdo con esto.

En los sistemas planos, los elementos están unidos entre sí por nudos rígidos, lo mismo que por articulaciones sin rozamiento; y las cargas se aplican tanto en los nudos como en los elementos. Las rigideces a flexión de estos elementos normalmente son grandes, comparadas con las de las cerchas. Los elementos no están sujetos a torsión pues la estructura y las cargas están en el mismo plano.

Los reticulados, son los sistemas planos que están sujetos a cargas en diferentes planos. En otras palabras, la estructura y las cargas están en el mismo plano; y como consecuencia de esto los elementos están sujetos tanto a torsión como a flexión. Corresponden a esta categoría los cobertizos, los sistemas de tableros de puentes, los sistemas de pisos en edificios, etc.

Los marcos rígidos tridimensionales son el tipo más general de estructuras de esqueleto. Las cargas es

tán aplicadas en cualquier punto y en cualquier dirección y los elementos pueden estar unidos entre sí en cualquier forma.

Como la finalidad de este trabajo es el de desarrollar un programa que analice una armadura tridimensional, entonces solo se verá el caso de cerchas o armaduras.

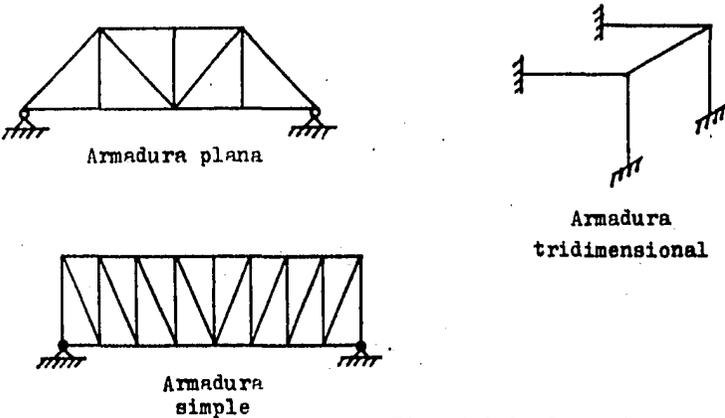


Fig. I.3.3. Tipos de armadura

#### I.4.- TIPOS DE APOYOS

Los apoyos, son elementos encargados de transmitir al suelo las solicitaciones aplicadas a la estructura. Esta transmisión de cargas se realiza limitando de alguna manera los posibles desplazamientos de la estructura en estos puntos (apoyos).

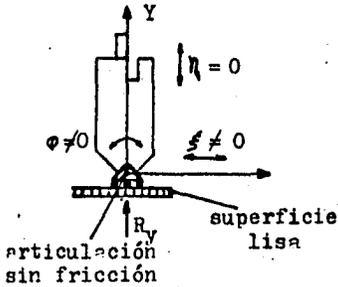
El extremo libre de una barra puede tener tres o seis componentes de desplazamiento según sea el sistema plano o espacial con el cual se este trabajando. Para el sistema plano, le corresponden dos componentes de desplazamiento lineal según un sistema de ejes coplanares y un giro contenido en el mismo plano. Para el sistema espacial son tres las componentes de desplazamiento lineal, según el sistema de ejes y tres giros conteni-

dos en cada plano X, Y o Z. Un apoyo, en estructuras bidimensionales o tridimensionales, limitará en algunos casos uno o varios de estos desplazamientos. A continuación se presentan algunos apoyos más usuales.

**Apoyo Libre**

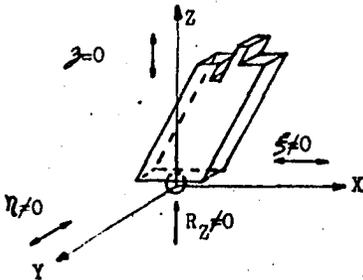
El apoyo libre ó deslizante, permite que el apoyo de la estructura gire y al mismo tiempo se desplace en una o varias direcciones según el sistema. Debe tenerse en cuenta que al impedir un desplazamiento, se presenta una fuerza o reacción que impide ese desplazamiento. Por lo tanto, podemos escribir las siguientes características de deformación y de fuerzas del apoyo libre, indicadas en las siguientes figuras:

En un plano



DESPLAZAMIENTOS	FUERZAS
$\xi \neq 0$	$F_X = 0$
$\eta = 0$	$F_Y \neq 0$
$\phi \neq 0$	$M = 0$

En el espacio



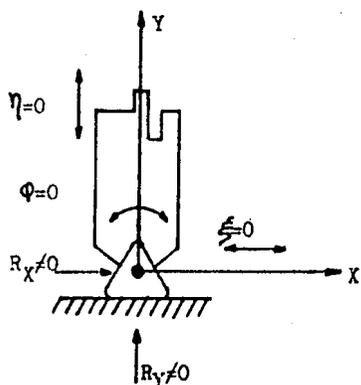
DESPLAZAMIENTOS	FUERZAS
$\xi \neq 0$	$F_X = 0$
$\eta \neq 0$	$F_Y = 0$
$\zeta = 0$	$F_Z \neq 0$
$\phi_1 \neq 0$	$M_X = 0$
$\phi_2 \neq 0$	$M_Y = 0$
$\phi_3 \neq 0$	$M_Z = 0$

El sistema de reacciones, está formado por las fuerzas que se desarrollan en los apoyos de una estructura. Para su determinación, deben considerarse las condiciones de compatibilidad, equilibrio y de deformación de la estructura. El apoyo libre, presenta una incógnita en el momento de determinar el sistema de reacciones.

### Apoyo fijo del tipo de articulación o rótula

Este tipo de apoyo tiene la característica de presentar dos o tres restricciones al movimiento del apoyo, según sea el sistema bidimensional o tridimensional, en efecto: la articulación impide los desplazamientos lineales, permitiendo exclusivamente giros, uno para el plano y tres para el espacio en dicho apoyo. A continuación se presentan las propiedades de la articulación mediante las figuras siguientes:

En un plano



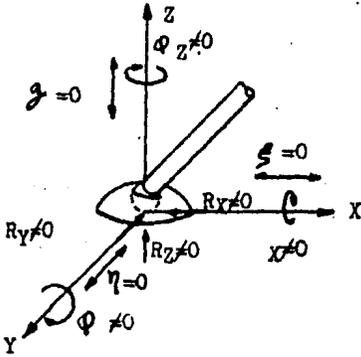
desplazamientos

$$\begin{aligned} \xi &= 0 \\ \eta &= 0 \\ \Phi &\neq 0 \end{aligned}$$

fuerzas

$$\begin{aligned} F_X &\neq 0 \\ F_Y &\neq 0 \\ M &= 0 \end{aligned}$$

En el espacio

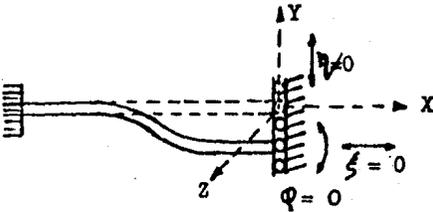


desplazamientos	fuerzas
$\xi = 0$	$F_x \neq 0$
$\eta = 0$	$F_y \neq 0$
$\zeta = 0$	$F_z \neq 0$
$\phi_x \neq 0$	$M_x = 0$
$\phi_y \neq 0$	$M_y = 0$
$\phi_z \neq 0$	$M_z = 0$

Como se observa, la articulación presenta dos y tres incógnitas según los casos plano o espacial.

### Apoyo guiado

Este tipo de apoyo tiene un solo grado de libertad. permite el desplazamiento del extremo de la barra en una sola dirección, impidiendo al mismo tiempo su gira. Las características se indican en la figura siguiente:



En un plano

desplazamientos	fuerzas
$\xi = 0$	$F_x \neq 0$
$\eta \neq 0$	$F_y = 0$
$\phi = 0$	$M \neq 0$

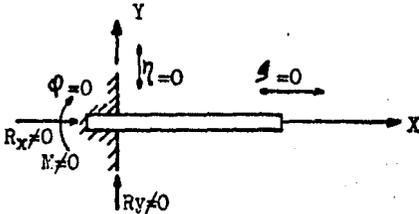
En el espacio

desplazamientos	fuerzas
$\xi = 0$	$F_x \neq 0$
$\eta \neq 0$	$F_y = 0$
$\zeta \neq 0$	$F_z = 0$
$\phi_x \neq 0$	$M_x = 0$
$\phi_y = 0$	$M_y \neq 0$
$\phi_z = 0$	$M_z \neq 0$

### Empotramiento

Este apoyo se caracteriza porque impide cualquier tipo de desplazamiento del nudo en un empotramiento dependiendo del sistema bidimensional o tridimensional, tendrá tres o seis incógnitas respectivamente. Ver figuras siguientes:

En un plano



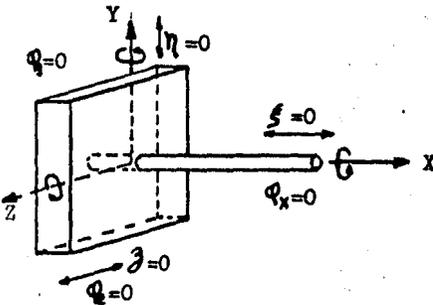
desplazamientos

$$\begin{aligned} \xi &= 0 \\ \eta &= 0 \\ \phi &= 0 \end{aligned}$$

fuerzas

$$\begin{aligned} F_x &\neq 0 \\ F_y &\neq 0 \\ M &\neq 0 \end{aligned}$$

En el espacio



desplazamientos

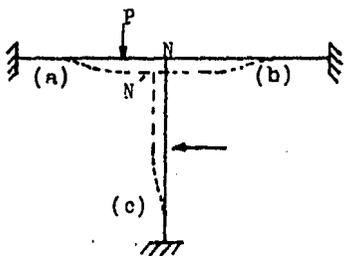
$$\begin{aligned} \xi &= 0 \\ \eta &= 0 \\ \zeta &= 0 \\ \phi_x &= 0 \\ \phi_y &= 0 \\ \phi_z &= 0 \end{aligned}$$

fuerzas

$$\begin{aligned} F_x &\neq 0 \\ F_y &\neq 0 \\ F_z &\neq 0 \\ M_x &\neq 0 \\ M_y &\neq 0 \\ M_z &\neq 0 \end{aligned}$$

### Nudo o apoyo elástico

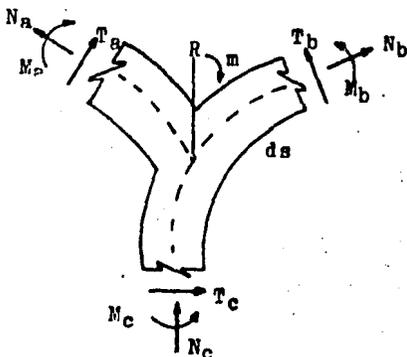
Este se presenta cuando se unen dos o mas barras entre sí, sin estar ligadas en este punto al suelo. La característica del nudo, es que cualquier desplazamiento o giro que tenga el mismo, es común a todos los extremos de la barra que concurren a él, por estar ligadas todas ellas rígidamente en este punto. En consecuencia en el nudo no se tiene desplazamientos o giros relativos entre las distintas barras concurrentes.



$$\begin{aligned}
 (\xi_n)_a &= (\xi_n)_b = (\xi_n)_c \neq 0 \\
 (\eta_n)_a &= (\eta_n)_b = (\eta_n)_c \neq 0 \\
 (\phi_n)_a &= (\phi_n)_b = (\phi_n)_c \neq 0
 \end{aligned}$$

Nudo elástico

El nudo tendrá un desplazamiento lineal en cualquier dirección, y un giro, siendo comunes a las barras concurrentes en el nudo. Estos desplazamientos no son ilimitados como ocurre, por ejemplo, en una articulación, ya que están limitados por la rigidez de cada una de las barras. En efecto, al desplazarse el nudo, en cada una de las barras se desarrollan fuerzas; proporcionales a la rigidez de las mismas, que en un momento dado mantendrán en equilibrio al nudo; pero después que se ha realizado el desplazamiento. Al llegar a esta posición de equilibrio, en el nudo deben verificarse las ecuaciones de la siguiente figura.



$$\begin{aligned}
 \sum_{i=a}^n M_i + m &= 0 \\
 \sum_{i=a}^n (F_i)_x R_x &= 0 \\
 \sum_{i=a}^n (F_i)_y + R_y &= 0
 \end{aligned}$$

Condiciones de equilibrio en el nudo elástico.

Como en este trabajo también se trata de determinar las incógnitas de una estructura cualesquiera, una forma fácil sería que el número de ecuaciones, sea igual al número de reacciones más el número de barras, o sea,  $r+b$ . Esto es tanto para el sistema bidimensional como para el tridimensional (estructura isostática).

### I.5.- CARGAS

Recordando lo dicho en el inciso anterior, de que a las armaduras sólo se les aplica cargas concentradas en los nudos, a continuación veremos una estructura completa, formada por sus elementos; tales como: barras, apoyos, nudos y, por supuesto las cargas para el caso bidimensional y tridimensional

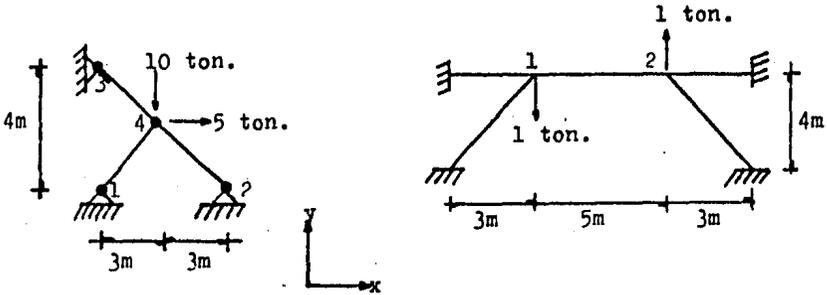


Fig. I.5.1 Armaduras planas (bidimensionales)

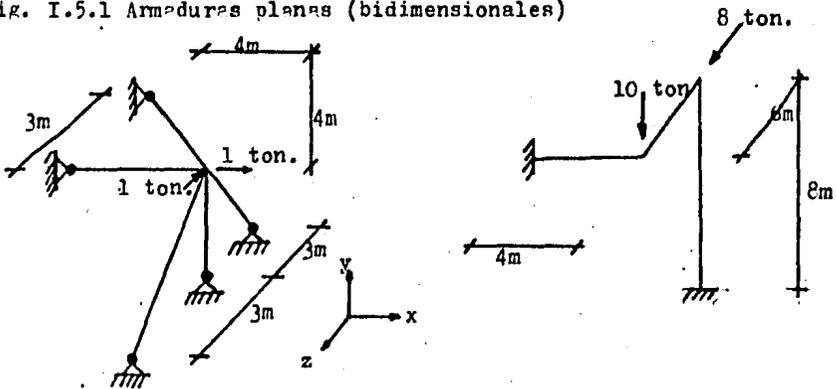


Fig. I.5.2 Armaduras espaciales (tridimensionales)

Por ejemplo, la figura siguiente nos muestra una estructura en el espacio sujeta a fuerzas externas y que ademas esta en equilibrio. Si separamos parte de ella, por ejemplo, un nudo; observemos que este se encuentra tambien en equilibrio.

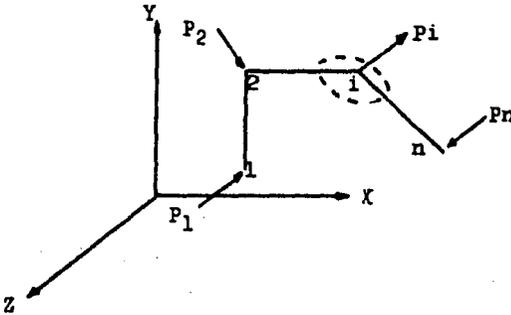


Fig. Estructura en equilibrio estático

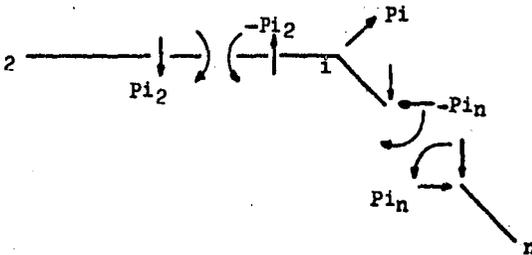


Fig. Nudo en equilibrio

En resumen el principio del equilibrio establece que:

- 1.- La estructura está en equilibrio
- 2.- Los nudos están en equilibrio
- 3.- Los elementos están en equilibrio

## I.6.- FUNCIONES Y CONSTANTES

Hay cuatro tipos de cantidades básicas que son esenciales para el análisis, a saber:

- a).- Cantidades geométricas (coordenadas, segmentos, ángulos y características de las secciones transversales).
- b).- Cantidades Estáticas (cargas, reacciones y esfuerzos).
- c).- Deformaciones (desplazamientos lineales y angulares del eje centroidal y los apoyos).
- d).- Constantes de los materiales (módulo de elasticidad y de la rigidez del material estructural y coeficientes de cambio volumétrico).

## I.7.- PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Los métodos para la solución de armaduras presentados en este trabajo se aplican a aquellas estructuras cuyos principios son válidos o se suponen como tales

1.- Equilibrio entre fuerzas internas y externas en todos los elementos de la estructura.

2.- Compatibilidad de deformación (principio de continuidad) de todos los elementos estructurales.

### I.7.1. EQUILIBRIO ENTRE FUERZAS INTERNAS Y EXTERNAS

Una estructura, sujeta a un sistema de fuerzas externas y a un sistema de reacciones, estará en equilibrio

Si cumple con las condiciones de equilibrio siguientes:

En el espacio:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \sum M_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad \sum M_z = 0$$

En un plano:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

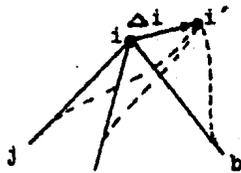
El decir que una estructura esté en equilibrio, implica que cualquier punto de ella también lo está. Por ejemplo, los nudos, entrepisos, vigas, columnas, etc; estos miembros al separarlos individualmente deberán estar en equilibrio

## I.7.2.- COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

Este principio supone que la deformación y consecuentemente el desplazamiento de cualquier punto particular de la estructura, es "continuo" y tiene un solo valor. Normalmente ésta condición se emplea al igual que las condiciones de equilibrio, para satisfacer que los desplazamientos son únicos en los extremos de los elementos que concurren a un nudo.

Supongamos que unos pocos elementos están rígidamente unidos entre sí, en el nudo  $i$ , como se muestra en la figura. Después de aplicar las

cargas sobre el sistema, supongamos que el nudo  $i$  se desplaza una cantidad  $i$ . La condición de compatibilidad requiere que

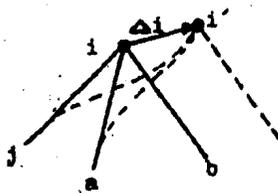


$$\Delta_{ij} = \Delta_{ia} = \Delta_{ib} = i \quad \text{Ec. I.7.1}$$

(a)

donde  $ij$  representa el desplazamiento del extremo  $i$  del elemento  $ij$ . La ecuación (I.7.1) es válida, siempre y cuando los elementos estén unidos entre sí rígidamente, y no se produzca fluencia ni falla en el nudo.

Si los elementos están unidos entre sí por uniones semirígidas o por articulaciones sin rozamiento, entonces algunas de las componentes de la condición de compatibilidad dadas en la ecuación (I.7.1) no se cumplirán.



(b)

Por ejemplo, si suponemos que la unión en el nudo  $i$  está construida de tal manera que el elemento  $ib$  está unido a los otros por una articulación sin rozamiento, mientras que los elementos  $ija$ , permanecen rígidamente unidos, la compatibilidad rotacional del ele -

mento  $i_b$  no se cumple; esto es

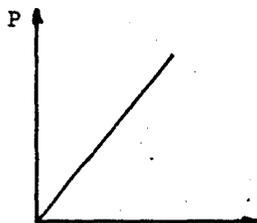
$$i = i_j = i_a \neq i_b$$

sin embargo la ecuación (I.7.1) se mantiene aún para todas las otras componentes de los desplazamientos.

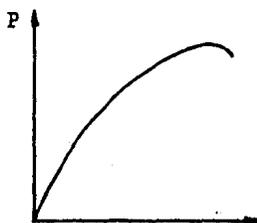
### RELACION FUERZA DESPLAZAMIENTO

De acuerdo con los objetivos mencionados del análisis estructural, es necesario conocer para una estructura de geometría definida, la relación que existe entre las fuerzas y los desplazamientos.

Si se observa la siguiente gráfica, se deduce que la relación entre fuerzas y desplazamientos puede ser lineal o no serlo.



Relación lineal



Relación no lineal

En general, se plantea la hipótesis de que la relación entre fuerzas y desplazamientos es lineal, por lo que se puede aplicar a las estructuras el principio de superposición

Dicho principio establece que los efectos que produce un sistema de fuerzas aplicado a una estructura son equivalentes a la suma de los efectos producidos por cada una

de las fuerzas del sistema actuado independientemente.

Las condiciones que debe cumplir una estructura para que se aplique el principio de superposición son:

- a) Que exista proporcionalidad entre esfuerzo y deformaciones, es decir, que se cumpla la ley de Hooke.
- b) Que no haya interacción entre efectos debidos a fuerzas axiales y momentos flexionantes (efectos de esbeltez).
- c) Que las deformaciones en la estructura sean relativamente pequeñas, evitando así que se afecten en forma importante el sistema de fuerzas internas y de reacciones

Si la estructura en estudio cumple con las tres condiciones mencionadas, se trata de una estructura con comportamiento elástico y lineal.

I.8.- CONDICIONES DE ESTABILIDAD Y DETERMINACION ESTATICA Y  
CINEMATICA EN ESTRUCTURAS

Estructuras que se consideran en su conjunto como cuerpos rígidos, con relación a sus apoyos y componentes;

Estructura geoméricamente estable. Una estructura es geoméricamente estable, si para cualquier movimiento incipiente se desarrolla una resistencia a este movimiento; esto requiere la presencia de por lo menos tres elementos de reacciones no paralelas, no concurrentes y no colineales, por ejemplo:

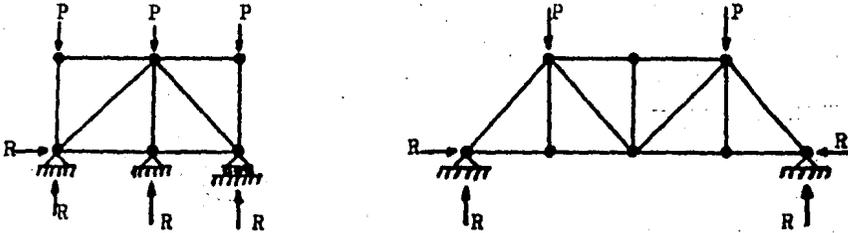


Fig. I.8.1 Estructuras geoméricamente estables

Estructura geoméricamente inestable. Es aquella que tiene un número suficiente de reacciones ubicadas de tal forma que resultan paralelas, concurrentes y colineales, ejemplo:

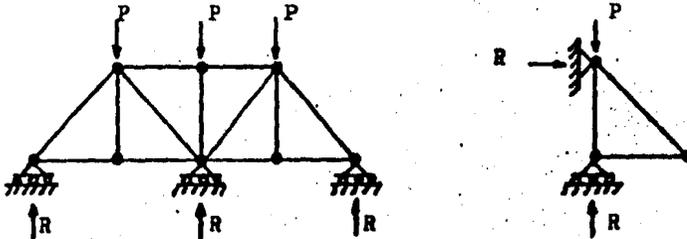


Fig. I.81 Estructuras geoméricamente inestables

Estructura estáticamente determinada.- Es aquella estructura en la cual se pueden calcular sus reacciones a partir de las ecuaciones de equilibrio estático

Estructura estáticamente indeterminada.- A estas estructuras, sus reacciones no se pueden calcular a partir de las ecuaciones de equilibrio solamente, sino se debe considerar las condiciones de de formación

Una forma de determinar cuando una estructura es estable, inestable, isostática o hiperestática no generalizada es la siguiente

Criterio numérico

si  $r+b < 2N$  Estructura inestable

si  $r+b = 2N$  Estructura estable e isostática

si  $r+b > 2N$  Estructura estable e hiperestática

Si no hay inestabilidad geométrica externa o interna

A continuación se presenta un ejemplo para visualizar la relación que existe entre los principios de:

- Compatibilidad de deformaciones
- Relación fuerza - desplazamiento
- Equilibrio

Ejemplo I.1 en la fig. 1 que se muestra a continuación determinar las frías  $P_a$  y  $P_c$  en los materiales acero y cobre. Al aplicarles una carga  $P$ .

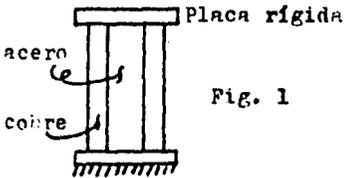


Fig. 1

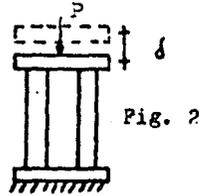


Fig. 2



De la figura se tiene que:

$$r = 1$$

$$b = 2$$

$$n = 1 \quad \text{entonces} \quad r + b = 3 \quad \text{y} \quad 2N=2$$

$$G.H. = 3 - 2 = 1$$

De lo anterior, la estructura resulta ser estable e hiperestática que no solo se resuelve por estática (equilibrio), si no que deben tomarse en cuenta las deformaciones y la ley de Hooke.

Así, mediante la compatibilidad de deformaciones se tiene que la deformación que sufre el cobre es igual a la deformación del acero (fig. 2), por lo tanto.

$$\delta_c = \delta_a \quad \text{-----Ec. 1}$$

De la ley de Hooke tenemos que

$$\delta = \frac{PL}{EA} \text{ ----- II}$$

y del equilibrio resulta

$$P_a + P_c = P \text{ ----- II}$$

Si sustituimos II en I se tiene

$$\frac{P_a L}{E_a A_a} = \frac{P_c L}{E_c A_c}$$

Despejando a  $P_a$

$$P_a = P_c \frac{E_c A_c}{E_a A_a} = P_c n \frac{A_c}{A_a}$$

Sustituyendo en II

$$P_c n \frac{A_c}{A_a} + P_c = P$$

$$P_c = \frac{P}{n \frac{A_c}{A_a} + 1} = P \text{ Sustituyendo en III}$$

Tenemos

$$P_a + \frac{P}{n \frac{A_c}{A_a} + 1} = P$$

$$P_a = P - \frac{P}{n \frac{A_c}{A_a} + 1} = P \left( 1 - \frac{1}{n \frac{A_c}{A_a} + 1} \right)$$

Así

$$P_a = P \left( 1 - \frac{1}{n \frac{A_c}{A_a} + 1} \right)$$

Como se vió, primero se determinó si la estructura era esostática o hiperstática la cual resultó ser de esta ultima, para luego resolverla utilizando los principios antes mencionados.

EQUACIONES DE CONTINUIDAD, LEY DE HOOKE Y EQUILIBRIO

Estas ecuaciones se aplicarán en la parte tres de este trabajo para la solución de armaduras tridimensionales, por medio de un programa para computadora, por lo tanto, en este capítulo se verá la forma de obtener cada una de ellas y algunas consideraciones.

Para aplicar estas ecuaciones se supone que:

- 1.- El medio es continuo
- 2.- El material de la estructura es:
  - Elástico lineal
  - Homogéneo
  - Isotrópico
- 3.- La estructura está en equilibrio antes y después de aplicar los cargas

Convención local de signos

Deformaciones ( $e$ ) en las barras:

Los alargamientos serán (+)

Los acortamientos serán (-)

Fuerzas ( $p$ ) en las barras:

Las tensiones serán (+)

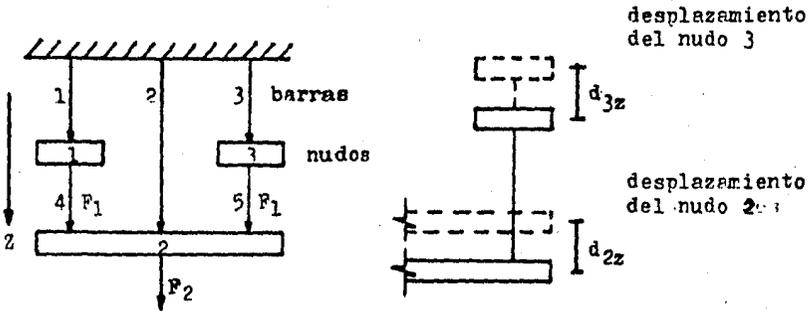
Las compresiones serán (-)

## II.1 ECUACION DE CONTINUIDAD

Aprovechando lo expuesto en el capítulo anterior (ver I.7.2), se observa que la continuidad de un conjunto nos proporciona un sistema de ecuaciones que nos relaciona los alargamientos o acortamientos de las barras con los desplazamientos posibles de los nudos.

$$\Delta_{ij} = \Delta_{bj} = \Delta_{aj} = \Delta_i \quad \text{Ec. 1.7.1}$$

Por ejemplo, la figura siguiente -- muestra una estructura formada por barras y nudos, sujeta a un sistema de fuerzas externas; si separamos una barra cualquiera, en este caso la barra 5, como se muestra en la figura adjunta, se observa que los nudos 2 y 3 se desplazan una cierta distancia  $d_2$  y  $d_3$ .



Estructura unidimensional Barra sujeta a sus extremos por nudos

respectivamente, por lo tanto, de acuerdo a la compatibilidad de deformaciones nos resulta:

$$e_5 = d_{2z} - d_{3z}$$

o sea que la deformación de la barra es igual al desplazamiento relativo de los nudos 2 y 3.

Ahora bien, para todas las barras de la estructura (forman un sistema de ecuaciones) se tiene:

$$\begin{aligned} e_1 &= d_{1z} \\ e_2 &= d_{2z} \\ e_3 &= d_{3z} \\ e_4 &= -d_{1z} + d_{2z} \\ e_5 &= d_{2z} - d_{3z} \end{aligned}$$

o en la forma

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1z} \\ d_{2z} \\ d_{3z} \end{Bmatrix}$$

quedando representada en forma general como:

$$\{e\} = [a] \{d\} \quad \text{Ecuación de continuidad}$$

Donde

[a] Matriz de continuidad

{e} Vector columna que en forma ordenada representa la deformación de cada una de las barras.

{d} Vector columna que en forma ordenada representa las componentes de desplazamiento paralelas a los ejes de referencia correspondientes a cada uno de los nudos de la barra.

Ahora bien para el sistema unidimensional tenemos:

$$\begin{aligned} \{e\} &= [a] \{d\} \\ Nb \times 1 &= Nb \times Nb \quad Nb \times 1, \end{aligned}$$

sistema bidimensional

$$\begin{matrix} \{e\} & = & [a] & \{d\} \\ \text{NoX1} & = & \text{NbX2Nn} & \text{2NnX1} & \text{y} \end{matrix}$$

sistema tridimensional

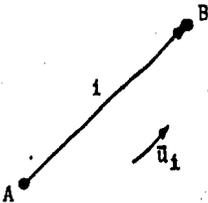
$$\begin{matrix} \{e\} & = & [a] & \{d\} \\ \text{NbX1} & = & \text{NbX3Nn} & \text{3NnX1} \end{matrix}$$

donde

Nb = No. de barras  
Nn = No. de nudos

Una forma de obtener la matriz [a] de continuidad es la siguiente:

1.- Se orientan las barras en cualquier sentido a fin de definir para cada una, su extremo inicial denominado (A) y su final de nominado (B).



2.- Se define un vector  $\bar{u}_i$ , unitario en dirección de la barra i. Por supuesto, cada vector unitario podrá descomponerse en una, dos o tres componentes paralelas al sistema de referencia usado en cada caso.

3.- Se forma la matriz [a] por renglones como sigue:

El renglón "i", correspondiente a la "iésima" barra, la cual tendrá todos sus elementos nulos excepto los localizados en las columnas de los extremos (A) y (B) de la misma. En la columna del nudo (A) aparecerán las componentes del vector  $-\{u_i\}$  y en la del nudo (B) las de  $\{u_i\}$

Ejemplo. Veamos la estructura unidimensional de la figura (II.1). Si orientamos las barras en dirección al eje de referencia "Z" entonces los vectores unitarios de cada barra son:

$$\{\bar{u}_1\} = \{\bar{u}_2\} = \{\bar{u}_3\} = \{\bar{u}_4\} = \{\bar{u}_5\} = \{1\} \text{ ya que se trata de un sistema unidimensional}$$

Ahora bien para formar la matriz  $[a]$  se procede de la siguiente manera:

- El número de renglones es igual al número de barras (Nb)
- El número de columnas es igual al número de nudos (Nn) por ser unidimensional.

Por lo tanto observando la figura (II.1) se tiene como matriz  $a$ , el siguiente arreglo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [a] \quad (Nb \times Nn)$$

Resultado igual a la obtenida mediante la ecuación de continuidad que nos relaciona las deformaciones con los desplazamientos.

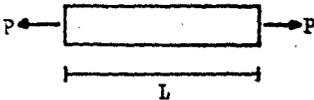
II.2 LEY DE HOOKE

( Relación carga-deformación )

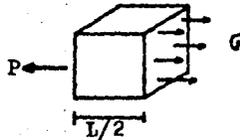
Concepto de esfuerzo

Supongamos un material a tensión.

figura II.2.1



barra de longitud,  
L y Área, A

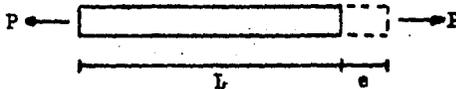


Si cortamos la barra a una cierta distancia L/2 se observa que la fuerza p se distribuye en toda el área, y por lo tanto nos produce un esfuerzo igual a:

$$\sigma = \frac{P}{A} \text{ --- II.2.1.}$$

Concepto de deformación unitaria

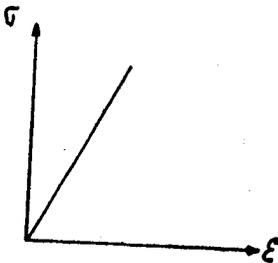
Si aplicamos una fuerza p a una barra de longitud L, ésta se deforma una cierta distancia e. Así, la deformación unitaria resulta ser el cociente de la deformación entre la longitud L.



$$\epsilon = \frac{e}{L} \text{ --- II.2.2}$$

co lineal resulta que:

Ahora bien, para un material elástico



$$\sigma = E \epsilon \quad \text{--- II.2.3.}$$

Donde

$E$  = Módulo de elasticidad o de young (depende del tipo de material)

de Hooke resulta de:

Por lo tanto la ecuación de la ley

Despejando a  $p$  de (II.2.1)

$$P = \sigma A \quad \text{--- (II.2.4)}$$

Sustituyendo (II.2.3) en (II.2.4)

$$P = E \epsilon A \quad \text{--- II.2.5}$$

Sustituyendo (II.2.2) en (II.2.5)

$$P = \frac{EA}{L} e \quad \text{--- (II.2.6)}$$

Donde

$$k = \frac{EA}{L} \quad \text{Rigidez de la barra}$$

Así

$$P = ke$$

Ley de Hook.

Donde

$p$  = carga

$e$  = deformación

En forma matricial generalizada para armaduras ya sea unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales resulta

$$\{p\} = [k] \{e\}$$

Donde

$\{p\}$  = Vector de fuerzas axiales

$[k]$  = Matriz de rigidez de las barras

siendo  $k_i = \frac{EIA_i}{L_i}$  rigidez de cada barra

$\{e\}$  = Vector de deformaciones

donde  $e_i$  = deformación de cada barra

Para el ejemplo anterior de 5 barras ( $N_b = 5$ ) aplicamos la ley de Hooke, y nos resulta un sistema como el siguiente:

$$P_1 = k_1 e_1$$

$$P_2 = k_2 e_2$$

$$P_3 = k_3 e_3$$

$$P_4 = k_4 e_4$$

$$P_5 = k_5 e_5$$

Donde vector  $\{p\}$  resulta de  $(N_b \times 1)$  y el vector  $\{e\}$  es de  $(N_b \times 1)$ , por lo tanto la matriz  $[k]$  resulta de  $(N_b \times N_b)$  y en diagonal:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & & & & \\ & k_2 & & & \\ & & k_3 & & \\ & & & k_4 & \\ & & & & k_5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{pmatrix}$$

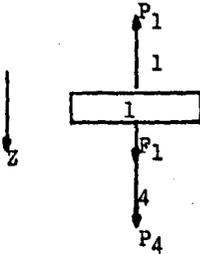
$(Nb \times 1) = (Nb \times Nb) (Nb \times 1)$

Donde

Nb = No. de barras

II.3. ECUACION DE EQUILIBRIO

De acuerdo al principio de equilibrio (visto en el capítulo I) que establece; La estructura y elementos (barras , apoyos y nudos) deben de estar en equilibrio, entonces, de la figura II.1 si separamos el nudo (1), este debe de estar en equilibrio, veamos:



Las fuerzas internas en las barras se suponen a tensión

$$F_z = 0$$

Porque se trata de un sistema unidimensional

sional

$$F_1 + P_4 - P_1 = 0$$

$$F_1 = P_1 - P_4$$

O sea que el nudo (1) está en equilibrio, ahora bien, para todos los nudos de la estructura se tiene:

Nudo 2

$$F_2 = P_2 + P_4 + P_5$$

Nudo 3

$$F_3 = P_3 - P_5$$

Ordenando estas ecuaciones como sigue nos queda

$$\begin{matrix} F_1 = & P_1 & & - & P_4 \\ F_2 = & & P_2 & & P_4 + P_5 \\ F_3 = & & & P_3 & - P_5 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{cases} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{cases}$$

Que en forma general queda como:

$$\{P\} = [b] \{p\} \quad \text{Ecuación de equilibrio}$$

Donde

[b] Matriz de equilibrio que relaciona las fuerzas externas con las internas.

{P} Vector de fuerzas "En los nudos".

{p} Vector de fuerzas axiales en las barras.

Obsérvese que

$$[b] = [a]^T$$

Y una forma de demostrarlo es la siguiente

De la continuidad de la estructura y de la condición de equilibrio en forma matricial condensada se tienen las dos ecuaciones siguientes.

$$\begin{array}{ll} \text{continuidad} & ; \{e\} = [a] \{d\} \\ \text{equilibrio} & ; \{f\} = [b] \{p\} \end{array}$$

Y tomando en cuenta que el trabajo efectuado por las fuerzas externas puede ser expresado como:

$$[w] = 1/2 [f]^T [d]$$

y el trabajo realizado por las fuerzas internas, calculado mediante la expresión de la energía de deformación, se expresa como:

$$[u] = 1/2 [v]^T [e]$$

veamos, también, que el trabajo externo y la energía de deformación, son iguales. Por lo tanto:

$$[f]^T [d] = [v]^T [e]$$

substituyendo las ecuaciones de continuidad y equilibrio en ésta última ecuación, se tiene:

$$[v]^T [b]^T [d] = [v]^T [a] [d]$$

y como se cumple para toda  $d$ , se tiene finalmente:

$$[b]^T = [a]$$

o bien

$$[b] = [a]^T$$

II.4 SOLUCION DE ARMADURAS TRI-DIMENSIONALES POR EL METODO DE RIGIDEZES O DE LOS DESPLAZAMIENTOS.

De las ecuaciones de continuidad y ley de Hooke substituyendo la primera en la segunda se obtiene:

$$\{p\} = [k] [a] \{d\} \text{----- II.4.1}$$

Substituyendo la ecuacion II.4.1 en la ecuación de equilibrio nos resulta:

$$\{f\} = [r]^T [k] [a] \{d\} \text{----- II.4.2}$$

o bien 
$$\{f\} = [k] \{d\} \text{----- II.4.3}$$

donde  $[k] = [a]^T [k] [a]$  Matriz de rigidez de la estructura (EC. de Navier).

Por lo tanto, el problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones simultáneas de  $(3Nn \times 3Nn)$ . (ténase en cuenta que también se utiliza éste método para armaduras u nidimensionales o bidimensionales).

Para éste método tenemos como datos

:"

- $\{f\}$  Vector de fuerzas en los nudos
- $[k]$  Matriz de rigidez de la estructura

y como incógnitas a :

- $\{d\}$  Desplazamiento en los nudos
- $\{e\}$  Deformaciones en las barras
- $\{p\}$  Fuerzas axiales en las barras

La ecuación II.4.3 se puede resolver

de dos maneras:

1) Despejando  $\{d\}$

$$\{d\} = [K]^{-1} \{r\}$$

Nótese que se debe de invertir la matriz  $K$  de rigideces para luego multiplicarla por el vector  $F$  de las fuerzas externas, y así, obtener como primer resultado a los desplazamientos de los nudos.

2) Resolviéndola como sistema de ecuaciones lineales. (Metodos de Gauss Jordan y Seidez)

$$\{r\} = [K] \{d\}$$

Una vez obtenido el vector de los desplazamientos  $d$ , se procede a obtener el vector de las deformaciones  $e$  mediante:

$$\{e\} = [a] \{d\}$$

Por último, se obtiene el vector de fuerzas axiales de tensión y compresión  $p$  en las barras.

$$\{p\} = [K] \{e\}$$

Como para todo trabajo se debe comprobar que esté bien ejecutado, una forma de checar éste, es la siguiente:

$$\{r\} = [a]^T \{p\}$$

Este método no toma en cuenta si la estructura es isostática o hiperestática, ya que funciona tanto para una como para la otra.

## II.5 ISOSTATICIDAD, HIPERESTATICIDAD, ESTABILIDAD E INESTABILIDAD DE LAS ESTRUCTURAS

Para que la estructura sea estable se requiere que el rango de la matriz de equilibrio  $b$  sea igual a  $2Nn$  ( $Rb=2Nn$ ) o sea que para cualquier valor de  $P$  existen valores de  $P$  que satisfacen las ecuaciones de equilibrio.

### COROLARIO

I.- Si  $Nb = 2Nn$   $[b]$  es cuadrada (no singular)  
y  $Rb = 2Nn$

La estructura es "Isostática" estable

II.- Si  $Nb > 2Nn$   $[b]$  es rectangular  
y  $Rb = 2Nn$

La estructura es "Hiperestática" estable

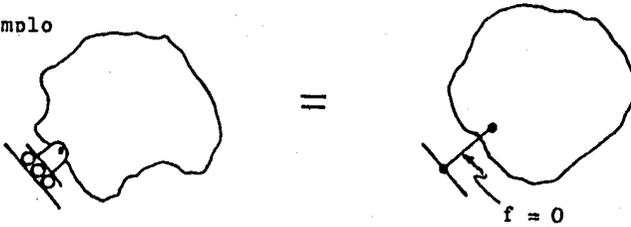
### NOTA

Cuando  $Rb < 2Nn$  la estructura es inestable

## II.6 APOYOS COMPLETOS E INCOMPLETOS

Quando un apoyo está incompleto, (por lo menos tiene un grado de libertad), se puede sustituir por un sistema de barras de rigidez infinita (flexibilidad nula), unidas a apoyos completos

Ejemplo



Si el apoyo es completo, no es necesario, ni se debe hacer ésta sustitución.

## II.7 METODO DE LAS FUERZAS O FLEXIBILIDAD

Este método también toma en cuenta las ecuaciones de continuidad, ley de Hook y equilibrio, con un enfoque distinto al de rigideces.

### II.7.1 EQUILIBRIO

De la ecuación de equilibrio la matriz  $[b]$  se puede dividir en :

$$\left[ \begin{array}{c} b_o \\ b_R \end{array} \right]$$

Donde

$b_o$  Matriz no singular de la estructura primaria isostática y estable (no toma en cuenta las redundantes).

$b_R$  Matriz que sólo toma en cuenta las redundantes.

Luego entonces

$$\{F\} = \left[ \begin{array}{c} b_o \\ b \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} P_o \\ P_R \end{array} \right\} \text{ --- II.7.1}$$

Despejando a  $\{P\}$

$$\{P\} = [b_o] \{F\} + [b_R] \{R\} \text{ --- II.7.2}$$

Nos queda

### II.7.2 LEY DE HOOK

Teniendo en cuenta la relación lineal existente entre fuerza y deformación, se puede plantear la ecuación de Hooke en la forma siguiente.

$$\{e\} = [f]\{P\} \text{----- II.7.3.}$$

donde  $[f] = [k]^{-1}$  Matriz de flexibilidad.

### II.7.3 CONTINUIDAD

También de la ecuación de continuidad y por la contragradiencia se puede representar como:

$$\begin{Bmatrix} d \\ u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_o & T \\ b_R & T \end{bmatrix} \{e\} \text{----- II.7.4.}$$

Donde

$\{u\}$  Son los desplazamientos relativos en cada uno de los cortes imaginarios de las barras redundantes.

Como los cortes de las barras redundantes en la práctica no son ciertos entonces

$$\{u\} = \{0\} \text{----- II.7.5.}$$

Por lo tanto

$$[b_R]^T \{e\} = \{0\} \text{----- II.7.6.}$$

Tomando en cuenta las tres condiciones anteriores, se procede como sigue:

sustituyendo (II.7.2) en (II.7.3)

$$\{e\} = [f][b_o]\{P\} + [f][b_R]\{R\} \text{----- II.7.7.}$$

sustituyendo (II.7.7) en (II.7.6)

$$[b_R]^T [f] [b_0] \{F\} + [b_R]^T [f] [b_R] \{R\} = 0 \text{ ----- II.7.8.}$$

6

$$[b_R] [f] [b_R] \{R\} = -[b_R] [f] [b_0] \{F\} \quad \text{Ec. de Flexibilidades}$$

Donde

$$[b_0] = \begin{bmatrix} [f]^{-1} \\ [C] \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [b_R] = \begin{bmatrix} [f_0^T]^{-1} [a_R^T] \\ [I] \end{bmatrix}$$

6  $\{P_0\} = [b_0] \{F\}$  se puede obtener directamente como vector de fuerzas axiales en las barras de la estructura isostática, (estructuras sin barras y/o apoyos redundantes).

$[b_R]$  También se obtiene directamente como una matriz de fuerzas internas, provocadas por fuerzas unitarias aplicadas en cada una de las redundantes.

DESARROLLO DE UN PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA  
ANALIZAR ARMADURAS TRIDIMENSIONALES

Desde el final de la segunda guerra mundial el análisis estructural ha estado en un proceso de rápidos cambios, debido especialmente al espectacular desarrollo de las computadoras y a la introducción del álgebra matricial y el cálculo vectorial como lenguajes generales del razonamiento simbólico. En base a esto, en este libro se desarrolla un programa para resolver armaduras tridimensionales, relacionandolo con el álgebra matricial y por supuesto el análisis estructural avanzado (materia que se imparte en la Facultad de Ingeniería como aplicación de las computadoras al análisis estructural). De este último se hace uso del método de los rigideces o de los desplazamientos visto en el capítulo II. Este método relaciona las ecuaciones de continuidad, ley de Hooke y equilibrio, que para dar solución debe pasar por una serie de operaciones matriciales como son:

- Multiplicación de matrices
- Multiplicación de una matriz por un vector
- Inversión de una matriz
  
- Métodos de solución a sistemas lineales :

Gauss Seidel

Gauss Jordan

Ahora bien para la creación del programa, primero se desarrolló independientemente cada una de las operaciones antes mencionadas e inmediatamente se procedió a integrarlas junto con un programa principal el cual ordena la ejecu -

ción de las operaciones en secuencia según el método de las rigideces. Las operaciones matriciales (multiplicación, inversión, etc.) método de Gauss Jordan y Seidel, dentro del programa general forman parte como sub-rutinas ( subprogramas ) los cuales son llamados por el programa principal.

El programa cuya codificación se presentará mas adelante consta de un programa principal y seis sub-rutinas las cuales son:

- Sub-rutina Leer                    Su función es leer los arreglos matriciales.
- Sub-rutina Mult                    Su función es el de multiplicar matrices o matriz por vector.
- Sub-rutina Inv                    Cuya función es el de invertir matrices.
- Sub-rutina Sum                    Cuya función es sumar matrices.
- Sub-rutina GS                    Método de Gauss Seidel para solución de sistemas lineales.
- Sub-rutinas GJ                    Método de Gauss Jordan para solución de sistemas lineales.

Como se observa el programa principal puede modificarse a conveniencia del usuario o sea que se puede transformar de tal forma a que se utilice como el método de las flexibilidades o de las fuerzas. Ya que contiene las operaciones necesarias para cada uno de ellos. Para el método de rigideces utilizado en este programa se hace uso de las subrutinas Eult y GJ para dar solución a un problema dado, observando que el sistema queda como:

$$\{P\} = [K] \{d\}$$

o

$$\bar{b} = A \bar{x}$$

cuyo sistema se resuelve con los métodos de Gauss Jordan o Seidel.

Otra forma sería el de utilizar la subrutina INV, vemos

De la ecuación anterior.

$$[K]^{-1} \{P\} = [K]^{-1} [K] \{d\}$$

$$[K]^{-1} \{P\} = [I] \{d\}$$

Por lo tanto

$$\{d\} = [K]^{-1} \{P\}$$

Observese que surge la inversa de  $K_{eona}$  (matriz de rigides de la estructura).

### 3.2 CODIFICACION DEL PROGRAMA

1	0001	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
2	0002	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
3	0003	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
4	0004	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
5	0005	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
6	0006	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
7	0007	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
8	0008	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
9	0009	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
10	0010	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
11	0011	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
12	0012	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
13	0013	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
14	0014	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
15	0015	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
16	0016	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
17	0017	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
18	0018	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
19	0019	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
20	0020	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
21	0021	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
22	0022	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
23	0023	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
24	0024	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
25	0025	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
26	0026	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
27	0027	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
28	0028	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
29	0029	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
30	0030	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
31	0031	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
32	0032	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
33	0033	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
34	0034	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
35	0035	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
36	0036	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
37	0037	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
38	0038	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
39	0039	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
40	0040	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
41	0041	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
42	0042	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
43	0043	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
44	0044	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
45	0045	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
46	0046	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
47	0047	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
48	0048	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
49	0049	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
50	0050	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
51	0051	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
52	0052	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
53	0053	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
54	0054	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
55	0055	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
56	0056	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
57	0057	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
58	0058	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
59	0059	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						
60	0060	C	UNIVERSITY OF CALIFORNIA						

48.

49

0090		
0091		
0092		
0093		
0094		
0095		
0096		
0097		
0098		
0099		
0100		
0101		
0102		
0103		
0104		
0105		
0106		
0107		
0108		
0109		
0110		
0111		
0112		
0113		
0114		
0115		
0116		
0117		
0118		
0119		
0120		
0121		
0122		
0123		
0124		
0125		
0126		
0127		
0128		
0129		
0130		
0131		
0132		
0133		
0134		
0135		
0136		
0137		
0138		
0139		
0140		
0141		
0142		
0143		
0144		
0145		
0146		
0147		
0148		
0149		
0150		
0151		
0152		
0153		
0154		
0155		
0156		
0157		
0158		
0159		
0160		
0161		
0162		
0163		
0164		
0165		
0166		
0167		
0168		
0169		
0170		
0171		
0172		
0173		
0174		
0175		
0176		
0177		
0178		
0179		
0180		
0181		
0182		
0183		
0184		
0185		
0186		
0187		
0188		
0189		
0190		
0191		
0192		
0193		
0194		
0195		
0196		
0197		
0198		
0199		
0200		





0001	STATE OF TEXAS
0002	COUNTY OF DALLAS
0003	NO. 1741
0004	NO. 1742
0005	NO. 1743
0006	NO. 1744
0007	NO. 1745
0008	NO. 1746
0009	NO. 1747
0010	NO. 1748
0011	NO. 1749
0012	NO. 1750
0013	NO. 1751
0014	NO. 1752
0015	NO. 1753
0016	NO. 1754
0017	NO. 1755
0018	NO. 1756
0019	NO. 1757
0020	NO. 1758
0021	NO. 1759
0022	NO. 1760
0023	NO. 1761
0024	NO. 1762
0025	NO. 1763
0026	NO. 1764
0027	NO. 1765
0028	NO. 1766
0029	NO. 1767
0030	NO. 1768
0031	NO. 1769
0032	NO. 1770
0033	NO. 1771
0034	NO. 1772
0035	NO. 1773
0036	NO. 1774
0037	NO. 1775
0038	NO. 1776
0039	NO. 1777
0040	NO. 1778
0041	NO. 1779
0042	NO. 1780
0043	NO. 1781
0044	NO. 1782
0045	NO. 1783
0046	NO. 1784
0047	NO. 1785
0048	NO. 1786
0049	NO. 1787
0050	NO. 1788
0051	NO. 1789
0052	NO. 1790
0053	NO. 1791
0054	NO. 1792
0055	NO. 1793
0056	NO. 1794
0057	NO. 1795
0058	NO. 1796
0059	NO. 1797
0060	NO. 1798
0061	NO. 1799
0062	NO. 1800
0063	NO. 1801
0064	NO. 1802
0065	NO. 1803
0066	NO. 1804
0067	NO. 1805
0068	NO. 1806
0069	NO. 1807
0070	NO. 1808
0071	NO. 1809
0072	NO. 1810
0073	NO. 1811
0074	NO. 1812
0075	NO. 1813
0076	NO. 1814
0077	NO. 1815
0078	NO. 1816
0079	NO. 1817
0080	NO. 1818
0081	NO. 1819
0082	NO. 1820
0083	NO. 1821
0084	NO. 1822
0085	NO. 1823
0086	NO. 1824
0087	NO. 1825
0088	NO. 1826
0089	NO. 1827
0090	NO. 1828
0091	NO. 1829
0092	NO. 1830
0093	NO. 1831
0094	NO. 1832
0095	NO. 1833
0096	NO. 1834
0097	NO. 1835
0098	NO. 1836
0099	NO. 1837
0100	NO. 1838
0101	NO. 1839
0102	NO. 1840
0103	NO. 1841
0104	NO. 1842
0105	NO. 1843
0106	NO. 1844
0107	NO. 1845
0108	NO. 1846
0109	NO. 1847
0110	NO. 1848
0111	NO. 1849
0112	NO. 1850
0113	NO. 1851
0114	NO. 1852
0115	NO. 1853
0116	NO. 1854
0117	NO. 1855
0118	NO. 1856
0119	NO. 1857
0120	NO. 1858
0121	NO. 1859
0122	NO. 1860
0123	NO. 1861
0124	NO. 1862
0125	NO. 1863
0126	NO. 1864
0127	NO. 1865
0128	NO. 1866
0129	NO. 1867
0130	NO. 1868
0131	NO. 1869
0132	NO. 1870
0133	NO. 1871
0134	NO. 1872
0135	NO. 1873
0136	NO. 1874
0137	NO. 1875
0138	NO. 1876
0139	NO. 1877
0140	NO. 1878
0141	NO. 1879
0142	NO. 1880
0143	NO. 1881
0144	NO. 1882
0145	NO. 1883
0146	NO. 1884
0147	NO. 1885
0148	NO. 1886
0149	NO. 1887
0150	NO. 1888
0151	NO. 1889
0152	NO. 1890
0153	NO. 1891
0154	NO. 1892
0155	NO. 1893
0156	NO. 1894
0157	NO. 1895
0158	NO. 1896
0159	NO. 1897
0160	NO. 1898
0161	NO. 1899
0162	NO. 1900
0163	NO. 1901
0164	NO. 1902
0165	NO. 1903
0166	NO. 1904
0167	NO. 1905
0168	NO. 1906
0169	NO. 1907
0170	NO. 1908
0171	NO. 1909
0172	NO. 1910
0173	NO. 1911
0174	NO. 1912
0175	NO. 1913
0176	NO. 1914
0177	NO. 1915
0178	NO. 1916
0179	NO. 1917
0180	NO. 1918
0181	NO. 1919
0182	NO. 1920
0183	NO. 1921
0184	NO. 1922
0185	NO. 1923
0186	NO. 1924
0187	NO. 1925
0188	NO. 1926
0189	NO. 1927
0190	NO. 1928
0191	NO. 1929
0192	NO. 1930
0193	NO. 1931
0194	NO. 1932
0195	NO. 1933
0196	NO. 1934
0197	NO. 1935
0198	NO. 1936
0199	NO. 1937
0200	NO. 1938
0201	NO. 1939
0202	NO. 1940
0203	NO. 1941
0204	NO. 1942
0205	NO. 1943
0206	NO. 1944
0207	NO. 1945
0208	NO. 1946
0209	NO. 1947
0210	NO. 1948
0211	NO. 1949
0212	NO. 1950
0213	NO. 1951
0214	NO. 1952
0215	NO. 1953
0216	NO. 1954
0217	NO. 1955
0218	NO. 1956
0219	NO. 1957
0220	NO. 1958
0221	NO. 1959
0222	NO. 1960
0223	NO. 1961
0224	NO. 1962
0225	NO. 1963
0226	NO. 1964
0227	NO. 1965
0228	NO. 1966
0229	NO. 1967
0230	NO. 1968
0231	NO. 1969
0232	NO. 1970
0233	NO. 1971
0234	NO. 1972
0235	NO. 1973
0236	NO. 1974
0237	NO. 1975
0238	NO. 1976
0239	NO. 1977
0240	NO. 1978
0241	NO. 1979
0242	NO. 1980
0243	NO. 1981
0244	NO. 1982
0245	NO. 1983
0246	NO. 1984
0247	NO. 1985
0248	NO. 1986
0249	NO. 1987
0250	NO. 1988
0251	NO. 1989
0252	NO. 1990
0253	NO. 1991
0254	NO. 1992
0255	NO. 1993
0256	NO. 1994
0257	NO. 1995
0258	NO. 1996
0259	NO. 1997
0260	NO. 1998
0261	NO. 1999
0262	NO. 2000
0263	NO. 2001
0264	NO. 2002
0265	NO. 2003
0266	NO. 2004
0267	NO. 2005
0268	NO. 2006
0269	NO. 2007
0270	NO. 2008
0271	NO. 2009
0272	NO. 2010
0273	NO. 2011
0274	NO. 2012
0275	NO. 2013
0276	NO. 2014
0277	NO. 2015
0278	NO. 2016
0279	NO. 2017
0280	NO. 2018
0281	NO. 2019
0282	NO. 2020
0283	NO. 2021
0284	NO. 2022
0285	NO. 2023
0286	NO. 2024
0287	NO. 2025
0288	NO. 2026
0289	NO. 2027
0290	NO. 2028
0291	NO. 2029
0292	NO. 2030
0293	NO. 2031
0294	NO. 2032
0295	NO. 2033
0296	NO. 2034
0297	NO. 2035
0298	NO. 2036
0299	NO. 2037
0300	NO. 2038
0301	NO. 2039
0302	NO. 2040
0303	NO. 2041
0304	NO. 2042
0305	NO. 2043
0306	NO. 2044
0307	NO. 2045
0308	NO. 2046
0309	NO. 2047
0310	NO. 2048
0311	NO. 2049
0312	NO. 2050
0313	NO. 2051
0314	NO. 2052
0315	NO. 2053
0316	NO. 2054
0317	NO. 2055
0318	NO. 2056
0319	NO. 2057
0320	NO. 2058
0321	NO. 2059
0322	NO. 2060
0323	NO. 2061
0324	NO. 2062
0325	NO. 2063
0326	NO. 2064
0327	NO. 2065
0328	NO. 2066
0329	NO. 2067
0330	NO. 2068
0331	NO. 2069
0332	NO. 2070
0333	NO. 2071
0334	NO. 2072
0335	NO. 2073
0336	NO. 2074
0337	NO. 2075
0338	NO. 2076
0339	NO. 2077
0340	NO. 2078
0341	NO. 2079
0342	NO. 2080
0343	NO. 2081
0344	NO. 2082
0345	NO. 2083
0346	NO. 2084
0347	NO. 2085
0348	NO. 2086
0349	NO. 2087
0350	NO. 2088
0351	NO. 2089
0352	NO. 2090
0353	NO. 2091
0354	NO. 2092
0355	NO. 2093
0356	NO. 2094
0357	NO. 2095
0358	NO. 2096
0359	NO. 2097
0360	NO. 2098
0361	NO. 2099
0362	NO. 2100

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60

0001  
 0002  
 0003  
 0004  
 0005  
 0006  
 0007  
 0008  
 0009  
 0010  
 0011  
 0012  
 0013  
 0014  
 0015  
 0016  
 0017

SUBJECT: [Illegible]  
 DIRECTOR, FBI  
 DIVISION [Illegible]  
 [Illegible]  
 2 [Illegible]  
 [Illegible]  
 [Illegible]  
 [Illegible]  
 [Illegible]  
 [Illegible]  
 4 [Illegible]  
 [Illegible]  
 3 [Illegible]  
 1 [Illegible]  
 RETURN  
 END



0001  
0002  
0003  
0004  
0005  
0006  
0007  
0008  
0009  
0010  
0011  
0012  
0013  
0014  
0015  
0016  
0017  
0018  
0019  
0020  
0021  
0022  
0023  
0024  
0025  
0026  
0027  
0028  
0029  
0030  
0031  
0032  
0033  
0034  
0035  
0036  
0037  
0038  
0039  
0040  
0041  
0042  
0043  
0044  
0045  
0046  
0047  
0048  
0049  
0050  
0051  
0052  
0053  
0054  
0055  
0056  
0057  
0058  
0059  
0060  
0061  
0062  
0063  
0064  
0065  
0066  
0067  
0068  
0069  
0070  
0071  
0072  
0073  
0074  
0075  
0076  
0077  
0078  
0079  
0080  
0081  
0082  
0083  
0084  
0085  
0086  
0087  
0088  
0089  
0090  
0091  
0092  
0093  
0094  
0095  
0096  
0097  
0098  
0099  
0100

0001  
0002  
0003  
0004  
0005  
0006  
0007  
0008  
0009  
0010  
0011  
0012  
0013  
0014  
0015  
0016  
0017  
0018  
0019  
0020  
0021  
0022  
0023  
0024

56

COMPLEXION STATISTICS

FOR THE YEAR 1954  
 (1) 100% (2) 90% (3) 80% (4) 70% (5) 60% (6) 50% (7) 40% (8) 30% (9) 20% (10) 10% (11) 5% (12) 0%

COMPLEXION STATISTICS

NO. 1001 9,270 860,000  
 NO. 1002 14,511 1,340,000,000  
 PAGE 1001 1929  
 DATE 10 10 11 111 10000

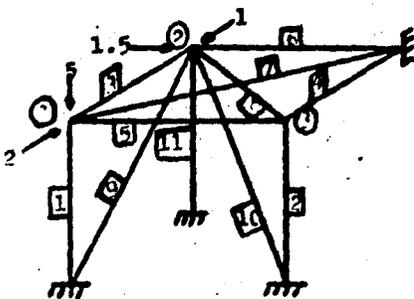
### 3.3 APLICACION

En el ejemplo siguiente las matrices  $K$  y  $A^t$  se formaron como se indica en el capítulo II, se presenta también el vector de fuerzas externas aplicadas a la estructura. Se considera a  $EA = CTE = 3 \text{ ton.}$  o sea que las barras tienen las mismas condiciones.

#### APLICACION DE LAS COMPUTADORAS AL A. ESTRUCTURAL

Prof.: Ing. Dany Ríos

Alumno : Ríos Vilchis Gregorio



De la armadura que se muestra en figura, determine por el método de rigideces:

- A).- D Desplazamientos
- B).- E Deformaciones
- C).- P Pzas. de tensión y compresión

donde  $EA = 3 \text{ ton}$

$$\left( \frac{EA}{L_i} \right) = ?$$

$$i = 1, \dots, 11$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ - \\ 1 \\ 1.5 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En las paginas siguientes se obtubie--

rón las matrices de:

- Continuidad
- Rigides
- Equilibrio

Como resultado final al cálculo por el método de las rigideces, también se obtienen los desplazamientos, deformaciones y las fuerzas normales de tensión y compresión.



2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60

09

0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.710 0.000 0.000 0.000 0.710

TABLE (A) FOR CALCULATIONS

0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.710	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	0.000	-0.710	0.000	0.000	0.000	0.000
1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.710	-0.710	-0.500	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	0.000	-0.710	0.000	-0.500	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.710	0.500	1.000
0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.710	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.710	0.000	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

TABLE (B) FOR CALCULATIONS

- 2.000
- 0.000
- 5.000
- 1.000
- 1.000
- 0.000
- 0.000
- 0.000

2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61

61

0.000	0.000	0.000	0.000	-0.750	0.000	-0.375	0.000	0.000	0.000	0.000
0.750	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	-0.750	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.375	-0.375	-0.250	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.750	0.000	-0.375	0.000	-0.250	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.375	0.250	0.000
0.000	0.000	0.000	0.750	0.000	0.000	0.000	0.375	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.750	0.000	0.000	0.375	0.000	0.000	0.000
0.000	0.750	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

UNIT 2 (A) DE DEPENDS ON THE DISTRIBUTION

1.017	-0.267	0.000	-0.750	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.267	1.017	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.750	0.000	0.000
0.000	0.000	0.750	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.750	0.000	0.000	1.430	0.413	-0.413	-0.267	-0.267	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.413	1.163	-0.146	-0.267	-0.267	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	-0.413	-0.146	1.163	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	-0.267	0.000	0.000	1.017	0.267	0.000	0.000
0.000	-0.750	0.000	0.267	-0.267	0.000	0.267	1.017	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.750	0.000

LOS DEPENDENSIAS DE LOS NODOS SON

- D 1 = -0.267
- D 2 = -0.000
- D 3 = 0.000

3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100

D 4# -4.370  
D 5# 1.750  
D 6# -1.333  
D 7# 0.512  
D 8# -1.077  
D 9# 0.000

LOS DEFENSIVOS (S) EN LAS DARRAS BONS

E 1# 0.007 (S)  
E 2# 0.000  
E 3# -2.155 (S)  
E 4# 0.512  
E 5# 0.512 (D)  
E 6# -1.140  
E 7# -1.020 (D)  
E 8# -1.020  
E 9# 2.150  
E10# 0.152  
E11# -1.333

LOS FORTES DE TAMBOR I DE CUBIPLICIEN EN LAS DARRAS BONS

F 1# 0.000  
F 2# 0.000  
F 3# -1.010  
F 4# 0.304  
F 5# 0.104

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63

F 14 = 1.000  
F 15 = 1.000

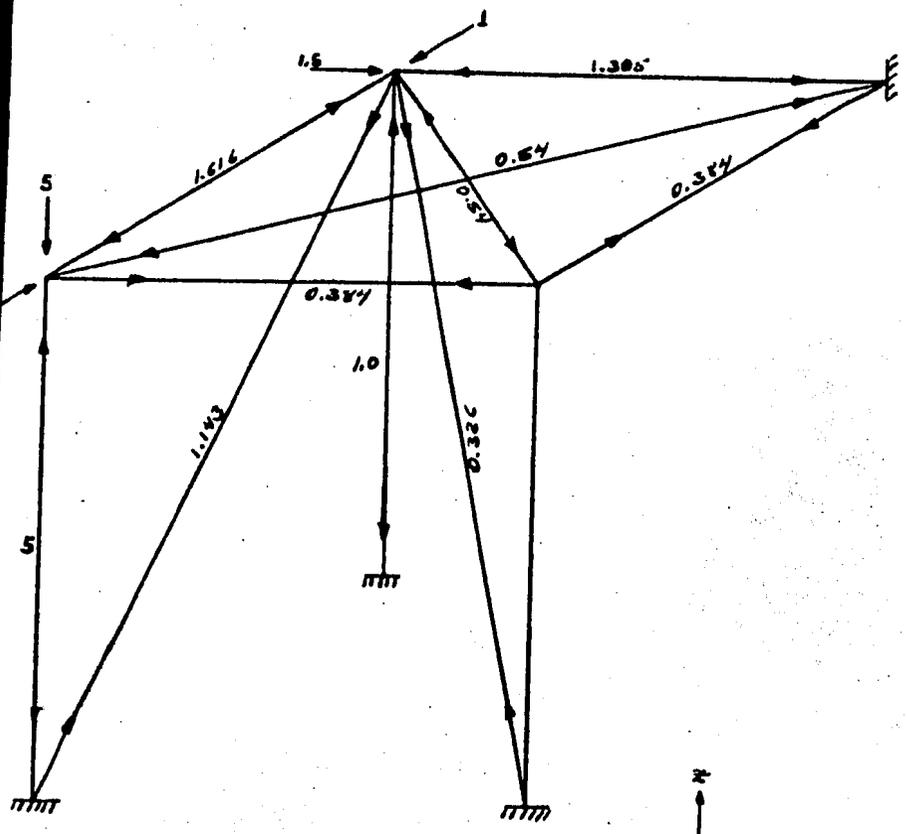
F 16 = 1.000  
F 17 = 1.100  
F 18 = 1.200  
F 19 = 1.300

Control

F 20 = 2.000  
F 21 = 3.000  
F 22 = 4.000  
F 23 = 5.000  
F 24 = 6.000  
F 25 = 7.000  
F 26 = 8.000  
F 27 = 9.000  
F 28 = 10.000  
F 29 = 11.000  
F 30 = 12.000

53

La siguiente figura nos muestra los resultados finales de las fuerzas internas ,



## BIBLIOGRAFIA

- 1.- Apuntes de aplicación de las computadoras al análisis estructural de la clase del Ing. Julio Damy Ríos.

Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. 1983

- 2.- Y Curso Internacional de Ingeniería Sísmica

Ing. Julio Damy Ríos

- 3.- Introduction to matrix methods of structural analysis

H. C. Martin

- 4.- Introducción al análisis estructural con matrices.

Hayrettin Kardestunger