Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE ECONOMIA

ENSAYOS SOBRE ALGUNOS METODOS RECIENTES DEL ANALISIS DE LAS EMPRESAS.

T E S I S

Que para obtener el Titulo de

LICENCIADO EN ECONOMIA

P r e s e n t a

RYO ITO

1984

INDICE

INTRODUCCION

Este pequeño trabajo es un ensayo sobre unos métodos de análisis de empresas, cuya característica consiste fundamentalmente en el uso de considerable cantidad de datos y en la aplicación de métodos estadísticos.

El método tradicional del análisis de empresas se ha ido refinando a través de prácticas en el último medio siglo. Y por su característica, para obtener resultados convincentes, se requieren sustanciales conocimientos, experiencias y perspicacia para un analizador de empresas. Por lo anterior se puede esperar "un carácter hecho a mano" de cada uno de los analizadores en los resultados del análisis, sin embargo, estos métodos siempre han tenido problemas de objetividad de análisis y de valuación que han sido discutidos con frecuencia, ya que cada analizador utiliza distintos métodos y su criterio.

Los métodos recientes de los cuales se presentarán algunos posteriormente en este ensayo, tienen como objetivo superar estas "disparidades" causadas por los analizadores, utilizando los métodos de análisis estadísticos multivariables que se han evolucionado con celeridad en forma paralela con la difusión del uso de las computadoras. En comparación con los métodos tradicionales, se puede decir que los recientes rechazan "matices delicados" y detalles que se pueden esperar de las manos de analizadores expertos, a cambio de obtener objetividad científica.

De este modo, podemos decir que para un análisis más sustancioso, es recomendable combinar los dos tipos de métodos con el fin de que se suplan mutuamente sus vulnerabilidades.

La característica más destacada de estos métodos es la aplicación de métodos de análisis multivariable, pues efectivamente éstos tratan de ubicar la empresa de una manera relativa dentro de un conjunto de empresas, es decir, en contraste con los métodos tradicionales cuyos indicadores con mayor frecuencia están en cuestión de signo positivo o negativo, éstos recientes cuestionan las variables relativas. Además de lo anterior, cabe señalar que algunos de estos métodos se aplican para comparar no solamente una empresa con las demás, sino un conjunto de ellas con otro. De este modo se pueden observar las diferencias relativas existentes entre conjuntos. Por ejemplo entre la industria textil y la automotriz con respecto al ritmo de crecimiento y al nivel de tasa de utilidades.

Por algunas limitaciones, en este ensayo, no se expondrán todos los métodos en cuestión, y además no se podrá tratar cada método a fondo. Empero, lo más esencial se encontrará y seguramente servirá como una introducción a estos métodos.

En el capítulo 1 se examina el fundamento teórico y método de aplicación de la distancia cuadrada de Mahalanobis.

En el siguiente capítulo se presenta la función de discriminación cuyo objetivo es separar (o como indica el nombre "discriminar") un conjunto de empresas en dos o más subconjuntos, o bien si son dos conjuntos con concatenación (tienen parte encimada), tratar de distinguir en dos conjuntos bien definidos mutuamente.

Lo que se desarrolla en el capítulo III es el método PCA (Principal Component Analysis) cuyo nombre se traduce en español "Análisis de Compo-- nente Principal".

Como se ha mencionado anteriormente, éstos métodos se han desarro-- llado e introducido en el campo del análisis de las empresas, paralelamen- te con el progreso y la difusión de las computadoras electrónicas. Así - pues, éstos requieren el uso de ellas para mayor precisión y sobre todo - rapidez del cálculo, ya que se utiliza un número abundante de los datos. - Por lo cual se agregarán unos programas de computadora como ejemplos de - aplicación de estos métodos.

Dentro de los métodos de análisis multivariable, se comprenden, - aparte de los mencionados, el análisis de factor, el análisis de regresión múltiple, el análisis de enjambre entre otros.

Por diversas razones, éstos no están contenidos en este ensayo. Por ejemplo, el análisis de factor considera varias tendencias de aplicación y sus métodos, sin embargo, no existe uno definitivo para un análisis de las empresas. Por otro lado el método PCA se puede concebir como un método - particular del análisis de factor y probablemente es el método que tenga - mayor persuasiva. Por consiguiente, este método PCA está considerado, en este texto, como un método útil para el análisis de empresas, y aunque - existen otros acercamientos a la aplicación en el estudio que nos interesa, se omite exponerlos.

En cuanto al método de regresión múltiple, se podría afirmar que es un tanto popular y conocido ampliamente. De hecho, consuetudinariamente se utiliza este análisis y por lo tanto no será desarrollado.

El análisis de enjambre es la traducción literal de "cluster analysis" y tiene como objetivo clasificar los elementos en varios grupos (o "enjambres") sin embargo, con respecto a la aplicación del mismo, aún comprende el problema respecto a la selección de 8 métodos existentes. En otra expresión, no se puede afirmar cuál de estos 8 métodos sea más efectivo, lo cual nos podría llevar a una confusión y a un caos de números al aplicarlo prácticamente en los estados empresariales. Y ésta es la razón por la cual no aparece en este ensayo.

Si la finalidad de un análisis empresarial es obtener los resultados efectivos y persuasivos con base en la objetividad de datos y por supuesto de método utilizado, la importancia no es tratar los datos con todos los métodos analíticos que se le ocurran al analizador, sino definir con claridad los objetivos y el nivel del análisis y elegir el método que tenga mayor congruencia con sus objetivos. En otras palabras el resultado del análisis no necesariamente depende de aplicar los métodos de última moda o someter algún programa complejísimo a la computadora, sino de la capacidad y experiencia de quien los aplique.

Considerando este punto, los métodos que se presentan en este sencillo texto, se comprenderán que no son definitivos, ni armas omnipotentes, sino simplemente otra alternativa para acercarse a la realidad de las empresas que con frecuencia está oculta tras una gran cantidad de índices y datos estadísticos.

CAPITULO I

LA DISTANCIA CUADRADA DE MAHALANOBIS

1) DEFINICION DE LA DISTANCIA CUADRADA DE MAHALANOBIS

El uso de la distancia cuadrada de Mahalanobis fue propuesto por primera vez, por el fallecido profesor P.C. Mahalanobis (1890-1965), quien fue el director del Instituto Indú de las Estadísticas.

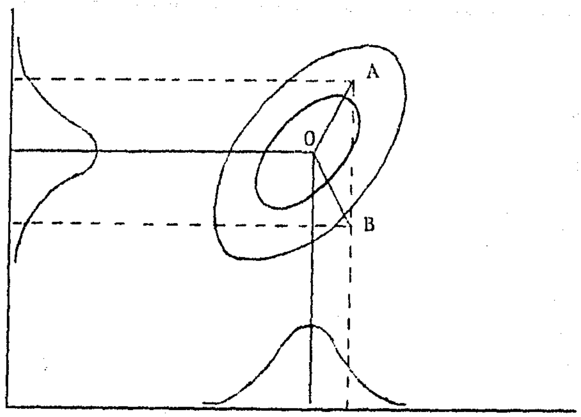
Se podría decir que la distancia cuadrada de Mahalanobis es una estadística que mide qué tanto está alejado un dato interesado del centro de gravedad del conjunto de los datos tomando en cuenta la correlación de los conjuntos de variables.

La raíz cuadrada de esta estadística tiene nombre de "distancia generalizada de Mahalanobis (Mahalanobis' generalized distance)" o simplemente "distancia de Mahalanobis (Mahalanobis' distance)".

Por ejemplo, suponemos que existe un conjunto de datos recolectados sobre dos variables x, y y. Entonces podemos observar este conjunto de datos gráficamente en las coordenadas x y y (gráfica 1-1).

$\bar{x}$ y $\bar{y}$ indican las medias para sus respectivas variables con conjunto. A y B son dos datos que nos interesan para estudiar, y tienen las mismas distancias del centro O. Esto significa que los dos datos tienen las mismas desviaciones de las medias $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Ahora, la pregunta es la siguiente: ¿Se puede saber la diferencia relativa con respecto a las medias $\bar{x}$ y $\bar{y}$ entre A y B? Para la variable x, A y b tienen el mismo valor y no se puede diferen---

Gráfica 1-1



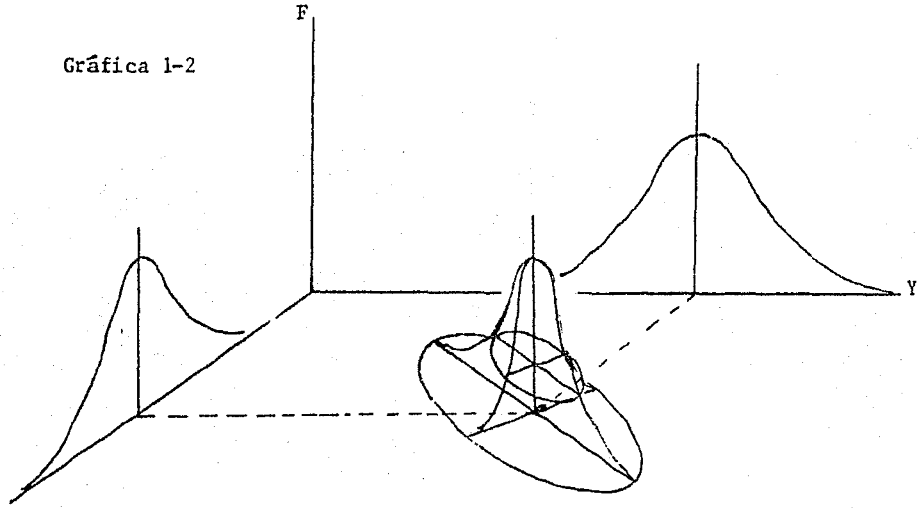
ciar. En cuanto a la variable y, A y B se sitúan en lados opuestos teniendo en el punto medio de su distancia la media $\bar{y}$, lo cual quiere decir que no se puede juzgar si A es más anormal que B o viceversa. Sin embargo, este con-- junto de datos muestra una correlación positiva entre las variables x y y, - lo cual se puede apreciar por la forma elíptica de la gráfica. Entonces también tenemos que tomar en consideración esta correlación que existe entre - estas variables. Así, encontramos el dato represntado por el punto A considerablemente propíncuo a la elipse interior, y el punto B situado fuera de - la elipse mayor lo cual nos indica que el punto A tiene un comportamiento más natural del conjunto en cuanto a las variables x y y y el B no tanto como A.

De este modo podemos considerar que un punto localizado dentro de una elipse es más normal que otro punto que se ubica en el exterior, aunque los dos puntos tengan las mismas distancias euclidianas del centro O.

Las elipses aparecidas en la gráfica tienen nombre de "elipses de misma probabilidad" porque sobre la línea de una misma elipse, cualquier punto tiene una misma frecuencia, o bien como confín de una misma probabilidad - para cualquier dirección.

Esto es un concepto derivado de que esta gráfica es originalmente de tercera dimensión (ver gráfica 1-2) y estas elipses son proyeccion de las cortaduras de la gráfica hacia el plano x-y, cuando se cercena paralelamente con el plano x y y.

Gráfica 1-2



Ahora, nos podemos dar cuenta de la similitud de esta gráfica proyectada al plano de x y y con un mapa donde aparecen cuotas de nivel. Así en la gráfica 1-1, del punto B, para llegar a 0, hay que atrevesar 2 "cuotas de nivel", y del punto A sólo una. Precisamente en el libro de "Métodos de Análisis Multivariable (Tahenryokaiseki-ho)" escrito por Tadaichi Okuno, Toshiro Haga y otros, dá definición de la distancia de Mahalanobis como lo siguiente: La distancia de Mahalanobis D se puede comprender como una distancia sobre una superficie curva de distribución de probabilidades tomando en su declive. (P.264).

La definición matemática de la distancia cuadrada de Mahalanobis se dá como

$$D_p^2 = \sum_{i,j=1}^{p}\sum \sigma^{ij} (x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j) \qquad \ldots(1\text{-}1)$$

donde la media $\mu' = (\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_p)$, σ^{ij} es la matriz inversa de la matriz - varianza-covarianza σ^{ij} y el punto interesado $x = (x_1, x_2 \ldots x_p)$en un conjunto de p variables.

Aquí, si las variables de número p son independientes entre sí (covarianza es cero), se deriva que $\sigma^{ii} = 1/\sigma_{ii}$, $\sigma^{ij} = 0$ ($i = j$) y posteriormente:

$$D_p^2 = \sum_{i=j}^{p} (x_i - \mu_i)^2 / \sigma_{ii} \qquad \ldots(1\text{-}2)$$

Y evidentemente esto indica que si dos puntos tienen la misma distancia del centro de gravedad, tendrán mismo valor de D^2.

2) OBJETIVOS DE LA APLICACION DE LA DISTANCIA CUADRADA DE MAHALANOBIS.

La mayoría de los casos en los cuales discernimos que "algo anda mal" cuando analizamos las tablas de estados financieros o índices financieros, - son los siguientes:

1).- Cuando valores de algunos índices financieros son más grandes o reducidos del lindero considerado experimentalmente.

2).- Cuando se observa alguna correlación distinta a las conocidas - empíricamente.

3).- Cuando se descubren variaciones incongruentes con la tendencia general de la vicisitud en serie de tiempo.

4).- Si hay análisis o investigaciones preliminares y existe una evaluación general, cuando los hechos reales difieren sustancialmente de ésta.*

Hay que mencionar que estos discernimientos se realizan basándose en "juicios experimentales" y por ello existen diferencias dependiendo de los analizadores.

Aunque se utilicen los mismos índices financieros, surgen distintas - soluciones en evaluación es porque según cada uno de los analizadores se - - aplican diferentes escalas de evaluación y manera de revisar proporcionalidades entre los índices. Esto nos hace comprender que si nos toca casualmente un analizador experto y brillante, todo saldrá bien, sin embargo, la pregunta es ¿cómo se puede saber si él sabe?

Además de lo anterior, sería conveniente reflexionar que apesar de que tenga el analizador bastante experiencia en evaluación empresarial, si el número de los índices llega a ser bastante grande, es casi imposible deliberar al mismo tiempo todas las relaciones interdependientes entre los índices. Por consiguiente, surge la necesidad de determinar una base objetiva para la revisión de proporcionalidades entre los índices, la cual adjudica un mismo resultado sin depender de quien investigue.

La determinación de los índices financieros y de la proporcionalidad - entre éstos se puede efectuar por medio de la distancia cuadrada de Mahalano-- bis que se definió en el inciso anterior. Es decir, las empresas ubicadas en el exterior de la "elipse de denegación", la cual debe de ser establecida por

* "Johoka Jidai No Keieibunseki" T. Okuno, F. Yamada, Tokyo 1978.

las estadísticas del conjunto determinado en la manera pertinente, muestran poseer algunas irregularidades en cuanto a la proporcionalidad entre los índices que no deben ocurrir en la normalidad, y consiguientemente se juzga - que es alta la probabilidad de que éstas sean empresas de anormalidad.

Aunque en este ensayo no vamos a tocar con minuciosidad, será aprovechable mencionar que para un análisis más profundo, es necesario examinar - por medio de la distancia cuadrada de Mahalanobis en una serie de tiempo y no sólo de un momento determinado, puesto que siempre una empresa está sometida a sufrir influencias de peripecias en la situación económica. Esto es, verbigracia una empresa tiene concordancia excelente entre los índices, en el tiempo t, mas posiblemente se haya transpuesto del punto en el tiempo - t-1 al punto en el t dentro de la gráfica de las "elipses de igual probabilidad", recorriendo una distancia cuadrada de Mahalanobis inusitada. Dicho de otro modo, la variación precipitada o algún desequilibrio en la alteración constitucional, se pueden manifestar en la magnitud de la distancia - cuadrada de Mahalanobis como el recorrido que ejecutó la empresa en custión del tiempo t-1 al t. Y si es considerablemente grande este recorrido, se - aprecia que ha existido alguna causa anómala.

Desde luego estos discernimientos son revisiones de carácter preliminar cuya base es de naturaleza externa y por esta razón, tomando éstas como agarradera, hay que someterse a un análisis circunstanciado sobre la relación de causa y efecto de la substancia financiera.

Asi, siguiendo este método se podrá evitar que por descuido una empresa con características insólitas sea ignorado.

Por otro lado, con la ayuda de aplicación de este método en una forma más expandida, es posible clasificar un conjunto de empresas en estratos según el grado de requerimiento de atención en cuanto al estado financiero.

Puesto que cada elipse de igual probabilidad es la línea donde cualquier punto sobre ella tiene una misma distancia cuadrada de Mahalanobis, - se puede clasificar un conjunto de empresas en varios grupos según la dis-- tancia cuadrada de Mahalanobis que tenga cada una, y esto es precisamente, en cuanto a la gráfica, dividir en varias "elipses de la misma probabilidad" (como se señala en el inciso 4).

3) PUNTOS DE SIGNIFICACION Y EXTRACCION DE EMPRESAS ANORMALES.

De modo que en la práctica, se utilizan $\bar{x}' = (\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_p)$, (S_{ij}) obtenidos por muestreo en lugar de μ y σ_{ij}, la ecuación (1-1) se convierte en:

$$D_p^{*2} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} S^{ij} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \qquad \ldots(1\text{-}3)$$

Y una vez calculada la distancia cuadrada de Mahalanobis en esta forma, podemos obtener la probabilidad en la tabla de χ^2 con el número de las variables p como el grado de libertad, lo cual es análogo al caso de sólo - una variable donde la distancia cuadrada (u^2) se comporta como la distribución χ^2.

Empero, esto es, cuando el número de los datos es suficientemente - grande, y en otro caso se tiene que aplicar una ecuación de estimación.

Por ejemplo, cuando se trata de que el valor máximo de D^2 que rebase el límite de confianza d_0 sea igual o menor de 5%, este valor se estima con la siguiente ecuación:

$$\Pr\left[\max D^2 \geq d_0\right] = 0.05,$$

$$d_0 \doteq \frac{(n-1)^2 p \quad F0.05/n}{n(n-P-1) + np \; F0.05/n} \qquad \ldots(1\text{-}4)$$

Aquí los grados de libertad de F son p y n-p-1. Sin embargo, aquí no vamos a profundizar este punto y solamente se presenta la tabla de límites de confianza de D^2 calculados con la ecuación (1-4).

LIMITES DE CONFIANZA DE 5% EN D^2 (TABLA 1-1)

n \ p	1	2	4	8	20
50	9.06	11.10	14.12	18.77	29.31
100	10.04	13.62	17.29	23.14	36.88
200	13.20	15.90	20.06	26.82	41.32
300	14.35	17.16	21.52	28.68	44.79
400	15.09	17.96	22.44	29.84	47.99
600	16.14	19.07	23.69	31.35	50.29
800	16.97	19.92	24.62	32.50	51.86
1000	17.50	20.47	25.22	33.15	52.87

Fuente: Tadakazu Okuno, Bundo Yamada "Johokajidai No Keieibunseki" Tokyo, Japón, 1978.

Así, podríamos decir que cuando una empresa tenga la distancia cuadrada de Mahalanobis mayor que la señalada del nivel de significación de 0.05 en la tabla de χ^2 según el número de las variables como el grado de libertad, ésta tiene alguna anomalía.

Por otro lado, es posible que se presente un caso en el cual el grado de libertad (o es lo mismo el número de las variables) sea superior al grado máximo que aparece en la tabla. En este caso, será recomendable realizar una estimación de la desviación típica. Esta estimación se efectúa por medio de cualquiera de las dos ecuaciones que se presentan enseguida.

$$u = \sqrt{2\ D^2} - \sqrt{2p-1} \quad \text{(estimación de Fisher)} \qquad \ldots(1\text{-}5)$$

$$u = \left\{ \sqrt[3]{\frac{D^2}{p}} + \frac{2}{(9p)} - 1 \right\} \sqrt{2/(9p)} \quad \text{(estimación de Wilson-Hilferty)} \qquad \ldots(1\text{-}6)$$

Y una vez obtenido u que tiene comportamiento de la distribución normal tipificada, se puede consultar la tabla de la distribución normal tipificada.

Por ejemplo, si tenemos $p = 13$ y $D^2 = 22.36$, según la estimación de Fisher nos dá:

$$u = \sqrt{2 \times 22.36} - \sqrt{2 \times 13 - 1} = 1.69$$

y la probabilidad de $u \gtrsim 1.69$ es de 0.0455. Ahora sometiendo los mismos datos a la estimación de Wilson-Hilferty, el resultado es el siguiente:

$$u = \left\{ \sqrt[3]{22.36/13} + 2/(9 \times 13) - 1 \right\} \sqrt{2/(9 \times 13)} = 1.65$$

y la probabilidad de $u \gtrsim 1.65$ resulta 0.0495. Ya que el valor exacto es orden de 0.05, se afirma que la estimación de Wilson-Hilferty nos conduce a un valor mejor estimado que la de Fisher. Apesar de lo anterior, cabe mencionar que en el sentido pragmático, la estimación de Fisher será suficiente concibiendo la complejidad del cálculo de la otra.

De esta manera, podemos establecer una "elipse de rechazamiento" el cual limita a 95%, es decir, la probabilidad de que se localice sobre este óvalo o exterior de ésta sea igual o menos de 5%. Y las empresas que se encuentran en tal caso, serán rechazadas con la consideración de que no pertenecen a la -

misma población o expresado en otra forma no son representativas del conjunto.

4) ADMINISTRACION POR ESTRATOS DIVIDIDOS SEGUN DISTANCIAS CUADRADAS DE MAHALANOBIS.

Como se ha mencionado escasamente en el inciso 2, un conjunto de empresas puede ser clasificado en varios estratos dependiendo de los valores de las distancias cuadradas de Mahalanobis.

Se ha mostrado que la D^2 calculada de cada una de las empresas, representa qué tanto se aleja de las medias, su constitución financiera interpretada por los índices financieros que han sido sometidos al análisis. Consecuentemente las empresas con D^2 relativamente reducida poseen los índices no distantes de las medias y además carecen de disturbios considerables en lo que concierne a las proporcionalidades entre los mismos. Atribuyendo a lo anterior, estas empresas se denominan como "las empresas de composición de promedio". Ahora, conforme se vaya perdiendo el equilibrio entre los índices, el valor de D^2 se va acrecentado hasta en dado momento, emerge de la "elipse de rechazamiento". Dividir el conjunto de las empresas de acuerdo con valores de D^2 en varias clases tiene mérito en cuanto a poder efectuar estudios de las empresas con menores valores de D^2 hasta cierto punto en forma general y tan sólo las de ingentes valores de D^2 con mayor minuciosidad. Pues, de esta forma se puede distribuir los recursos para el análisis con mayor eficiencia. No obstante existe una cuestión que el analizador debe de tomar en consideración. Esta es debidamente por la naturaleza de la distancia cuadrada de Mahalanobis, que los estratos no son desunidos procediendo del estado financiero. Es decir, cuando se trata de una empresa extraordinariamente sublime, ésta tendrá los valores de los índices exorbitantes (o sumamente homeopáticos según la índole de los índices), y como consecuencia natural, manifestará su D^2 sustancialmente grande a pesar de que no exteriorice desordenación en la proporcionalidad entre los índices.

Por consiguiente, es probable que dentro del grupo de las empresas cuyas D^2 son grandes, exista promiscuidad de las empresas excelentes con las deficientes. Y aquí surge la necesidad de combinar el análisis y administración por estratos con otros métodos por ejemplo el método PCA el cual será estudiado en el Capítulo 3.

Bien, suponemos que tenemos muestreo de numerosas empresas. Un ejemplo de separar esta agrupación en varias clases es el siguiente:

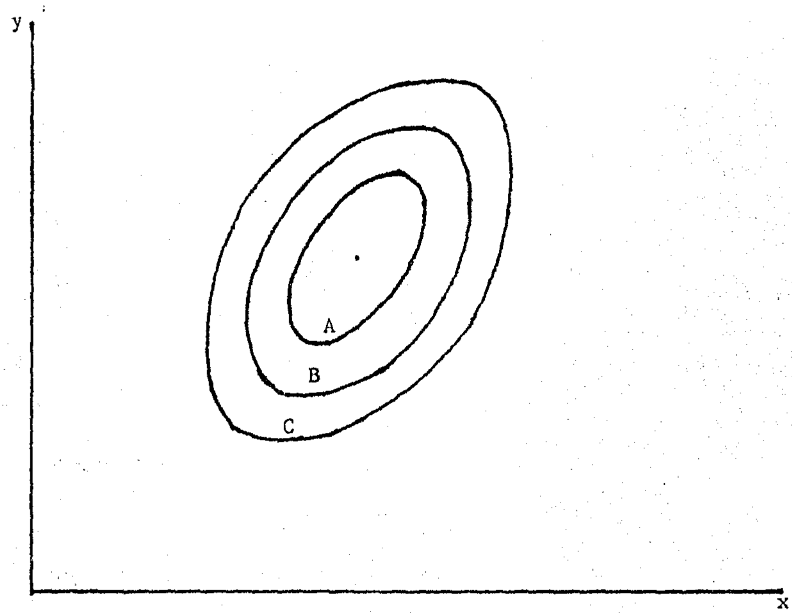
Grupo A: Las empresas que relativamente carecen de desviaciones de las medias y gozan de buena proporcionalidad entre las variables (50% de la totalidad).

Grupo B: Las que se distan relativamente de la complexión característica de promedio y también conciben algún problema en proporcionalidad entre los índices por lo cual deben de someterse a un examen para determinar su causa (30% de la totalidad).

Grupo C: Las que comprenden distancias vastas de la composición característica del conjunto y están desprovistas de una proporcionalidad entre los índices, y por consecuente es justamente necesario realizar un análisis detallado (20% de la totalidad).

En este ejemplo, se requieren los valores de χ^2 de 20% y 50% para trazar dos "elipses de las mismas probabilidades" y una vez establecidas estas elipses, se puede ubicar cada empresa en el grupo correspondiente y conocer su condición relativa dentro del conjunto.

Gráfica 1-3



La gráfica 1-3 representa estas dos elipses mencionadas en párrafos anteriores y además la de rechazamiento, cuando el número de variables es sólo - dos y el de estratos es tres. Cabe hacer referencia aquí al número de los estratos de que se puede dividir el conjunto en más de tres estratos si se desea, no obstante no sería muy conveniente puesto que el resultado generaría más complejidad en consideraciones.

5) EJEMPLO DE CALCULO DE DISTANCIA CUADRADA DE MAHALANOBIS

La obtención de valores de D^2 es el cálculo con carácter de efectuar por medio de computadoras electrónicas puesto que se trata de gran número de datos y variables.

Sin embargo en el caso de dos variables (o dos índices mejor dicho), se puede realizar el cálculo manualmente, como se indica enseguida.

Se supone que se ha extraido un muestreo de 600 empresas y estudiado con base en la tasa de utilidad sobre el capital total utilizado *1 y la tasa de utilidad ordinaria *2. Posteriormente se obtienen los siguientes resultados.

	MEDIAS	DESVIACION TIPICA
Tasa de utilidad sobre el capital total utilizado	$\mu_1 = 2.5\%$	$\sigma_1 = 4.6\%$
Tasa de utilidad ordinaria	$\mu_2 = 2.8\%$	$\sigma_2 = 4.7\%$

Ahora dos empresas A y B de las cuales se interesa investigar, tienen valores de estos índices como se presentan a continuación:

	A	B
Tasa de utilidad sobre el capital total utilizado	15.8%	15.8%
Tasa de utilidad ordinaria	10.3%	- 4.7%

*1 $$\frac{\text{utilidad bruta} + \text{dividendos recibidos}}{\text{promedio del capital total de inicio y fin del ejercicio}} \times 100$$

*2 $$\frac{\text{utilidad corriente}}{\text{venta total}} \times 100$$

Las distancias tipificadas que tienen estas dos empresas de la media se obtienen por:

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad \ldots(1\text{-}7)$$

Donde μ : media aritmética, σ : desviación típica. Y de este modo - obtenemos la tabla siguiente:

TABLA 1-2

DISTANCIA DE LA MEDIA

	EMPRESA A	EMPRESA B
Tasa de utilidad sobre el capital total utilizado	$u_{1A} = \frac{15.8 - 7.5}{4.6} = 1.8$	$u_{1B} = \frac{15.8 - 7.5}{4.6} = 1.8$
Tasa de utilidad ordinaria	$u_{1B} = \frac{10.3 - 2.8}{4.7} = 1.6$	$u_{2B} = \frac{4.7 - 2.8}{4.7} = -1.6$

Como se puede observar en la tabla, ambas empresas distan la misma - longitud de cada una de las medias, aunque con respecto a la utilidad ordinaria, la empresa A registra un valor mayor que la media y la B menor, de tal - forma que éstas se ubican en direcciones contrapuestas insertando la media en la mitad de la distancia yaciente entre éstas.

Si suponemos que estos índices tienen comportamiento como el de la - distribución normal, se tiene que: 1) la probabilidad de que la tasa de utilidad sobre el capital total utilizado se aleja más de 8.3% (15.8% - 7.5%) de la media, es del orden de 0.0359,2) la probabilidad de que la tasa de utilidad ordinaria se diste más de 7.5% (10.3% - 2.8% ó -4.7% -2.8%) de la media es de 0.0548. Lo anterior significa que ambas empresas son muestras considerablemente distantes de las medias.

Aunque las empresas A y B se situen a las mismas distancias de las medias, en cuanto a la A, se observan las tasas sustancialmente superiores que las medias, por otro lado, la empresa B supera la media del mismo modo que la A sobre la tasa de utilidad sobre el capital total utilizado, mas marca una tasa de utilidad con el signo negativo y bastante inferior a la media.

Digamos que entre estos índices, existe una correlación positiva $\rho = 0.90$. Esto nos indica que si un índice es grande, el otro también debería de serlo.

Tomando en consideración esta correlación, se puede decir que la empresa A se caracteriza por un estado más equilibrado como debe de ser, y se sospecha que la B posee alguna anormalidad con relación a alguna de estas tasas o posiblemente a las dos.

Esta suspicacia se cuantifica por medio de la distancia cuadrada de Mahalanobis con la ecuación siguiente:

$$D^2 = \frac{(u1 + u2)^2/2}{1+\rho} + \frac{(u1 - u2)^2/2}{1-\rho} \quad *1 \qquad \ldots(1\text{-}8)$$

Sustituyendo los datos que tenemos:

La empresa A: $D_A^2 = \frac{(1.8 + 1.6)^2/2}{1 + 0.9} + \frac{(1.8 - 1.6)^2/2}{1 - 0.9} = 3.24$

*1 El proceso de obtención de esta ecuación es mostrado con minuciosidad en el libro "Tahenryokaiseki-ho" de T. Okuno, H. Kume, T. Haga y T. Yoshizawa. Tokyo, Japón 1971.

La empresa B: $D_B^2 = \frac{(1.8 - 1.6)^2/2}{1 + 0.9} + \frac{(1.8 + 1.6)^2/2}{1 - 0.9} = 57.84$

De este modo se conoce qué tan distanciada está la empresa B del centro. Con estos resultados, podemos obtener la probabilidad de que el valor iguala o rebase estos resultados.

Para la empresa A, según la tabla de χ^2, se tiene que la probabilidad es orden de 0.198. También por medio de ecuaciones de estimación típica, resultaron valores similares (por medio de la estimación de Fisher: 0.209 y de la de Wilson-Hilferty: 0.195).

Con respecto a la D_B^2, es inútil calcular y buscar en las tablas, puesto que es superior en la forma desorbitada del punto de significación de 5% que es orden de 19.07. Y por lo tanto, la empresa B se debe considerar que no pertenece a este conjunto de las empresas. O bien, si es la empresa que debe de examinar, y además por el tipo de actividad debería de pertenecer a éste; se ve obligada a someterse en un análisis de carácter circunstanciado con el fin de desentrañar la causa de su anomalía.

CAPITULO 2

FUNCION DE DISCRIMINACION

1) DEFINICION DE LA FUNCION DE DISCRIMINACION

Sintetizando los resultados de análisis desde varios puntos de vista, se suele decir: la empresa A es una empresa excelente, pero la B es una empresa desorganizada, o también: la empresa C tiene parecido a una que se ha ido a la quiebra en cuanto a la composición financiera y por lo tanto puede haber peligro de quiebra. Sin embargo, los contenidos de los datos y métodos los cuales son aplicados dentro del proceso de análisis para conseguir evaluaciones finales tales como las mencionadas anteriormente, no serán necesariamente iguales para todos los analizadores de empresas, o más bien serán distintos en la mayoría de los casos. De modo preciso, surge aquí velis nolis el problema de subjetividad de análisis convencional efectuado con base en experiencias.

La Función de Discriminación de la cual se trata en el presente capítulo, es un método que no utiliza los índices separada y respectivamente, sino que trata de elaborar una función de primer grado que ajuste en la forma óptima para separar un conjunto en dos subconjuntos para mejor sindéresis de la empresa la cual se define como objeto del análisis. Se denomina esta función del primer grado como "Función de Discriminación (Discriminant Function)".

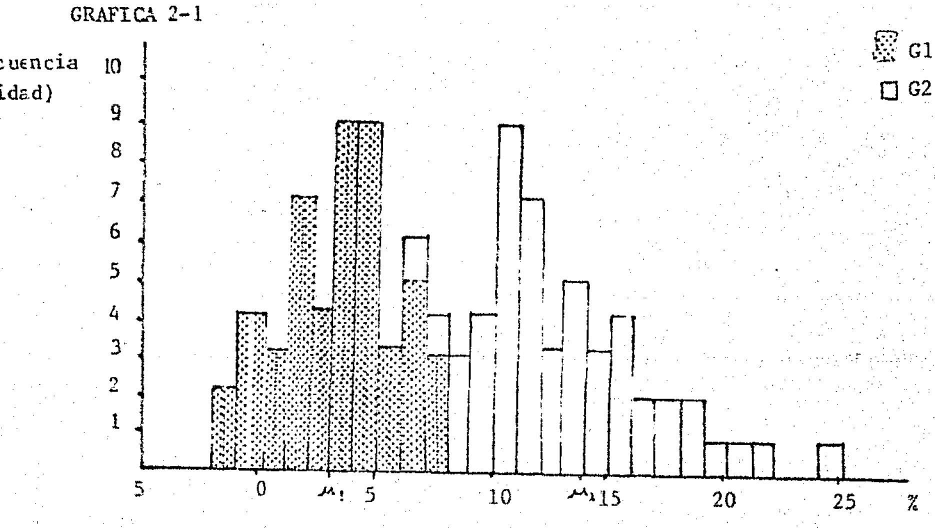
Así, la Función de Discriminación se trata de discernir (pronosticar) utilizando p variables explicativas, a qué grupo pertenece la muestra.

Un ejemplo práctico y fácil de entender, es el caso de los bancos en - el cual se disclerne si son "clientes de calidad superior" o "clientes de calidad inferior" en el oficio de prestaciones. Una vez instituida esta función, las personas aún sin experiencia pueden arbitrar si se concede la prestación o no. Aunque es un sistema bastante sencillo que tiene fundamento de valuar la suma de los puntos adjudicados según; ocupación, composición de familia, objetivo de su préstamo, etc., y que es distinto a la Función de Discriminación - tratada en este capítulo.

Otro ejemplo conocido es la obra de E. Altman, que fue construcción - de una función de discriminación basándose en el muestreo de treinta y tres - empresas que resultaron en quiebra dentro del intervalo de 1946 a 1965 y del mismo número de empresas prósperas, investigando sobre 5 índices. Y con la - aplicación de ésta, se pudo discernir con 95% de exactitud según los datos del año anterior a la quiebra y 72% según los de 2 años atrás.

Ahora, supondremos que un analizador experto eligió 50 empresas medradas (G2) y 50 degradadas (G1). El histograma de estos dos grupos (G1,G2) con respecto a la tasa de utilidad sobre el capital total utilizado es la gráfica 2-1.

GRAFICA 2-1



El grupo de las empresas desmedradas, G_1, registró la media $\mu 1$ con el valor de 3.0 y la de G_2, $\mu 2$ fue de 13.8, como se aprecian en la gráfica.

Acerca de la varianza σ^2, se supone que es común para ambos grupos y es del orden de 20.25.

Digamos que se interesa clasificar una nueva empresa con la tasa de utilidad sobre el capital total utilizado que asciende a 7.5%. ¿Esta empresa se clasificaría dentro del grupo G_1 o G_2?

$$\text{como; } D_1^2 = (x - \mu 1)^2 / \sigma^2 = (7.5 - 3.0)^2/20.25 = 1.0$$

$$\text{y, } D_2^2 = (x - \mu 2)^2 / \sigma^2 = (7.5 - 13.8)^2/20.25 = 1.9$$

se puede discernir que esta empresa en cuestión pertenece al G_1, ya que $D_1^2 > D_2^2$

Sin embargo, como se aprecia en la gráfica 2-1, dentro de las empresas clasificadas como las del G_2, existen varias que también comprenden las tasas menores de 9.0.

Si el promedio de las medias, $\bar{\mu}$ se designa como el punto de linde, unas empresas de G_1 se conciben dentro de G_2 y viceversa. Así puede cometerse un error de clasifiación por haber una región común para ambos grupos. Si se supone la distribución normal, la probabilidad de considerar como G_2 aunque es del G_1 se da por: $\Pr\left\{u > (\bar{\mu} - \mu_1)/\sigma\right\}$ y el error inverso: $\Pr\left\{u < (\bar{\mu} - \mu_2)/\sigma\right\}$ Las dos probabilidades son iguales. Según los datos que se utilizaron en este ejemplo ($\mu 1 = 3.0$, $\mu 2 = 13.8$, $\bar{\mu} = 8.4$, $\sigma = 4.5$) la probabilidad es la siguiente:

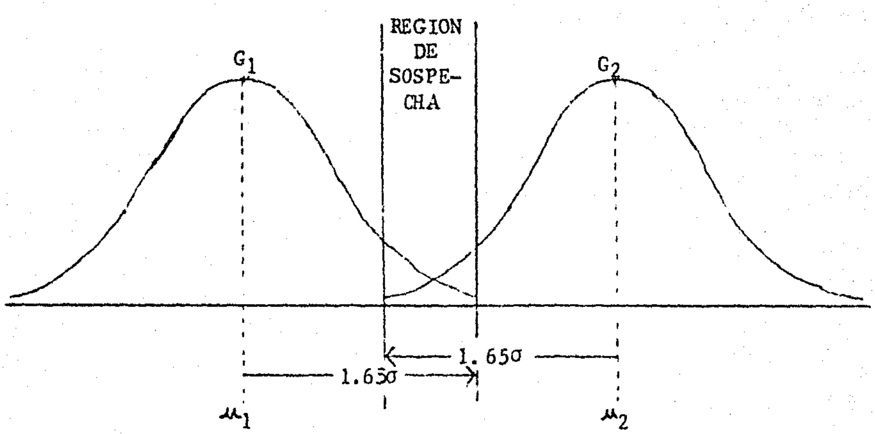
$u = (8.4 - 3)/4.5 = 1.2$

$Pr \left\{ u > 1.2 \right\} = 0.115$

Y así se obtiene el valor de 12% aproximados. Si este valor de 12%, como la probabilidad de error de clasificación, se figura muy grande, es conveniente definir una región para retener clasificación o sea una "región dudosa (doubtful region)".

Sería recomendable admitir la manera de discernimiento, como se muestra en la gráfica 2-2, para que la probabilidad de errar G_1, como G_2 y la de errar G_2 como G_1 sean igualmente 5% o menos.

GRAFICA 2-2



El límite de que la parte superior sea de 5%,es de 1.65. Por lo - - tanto si $x > ({}_1 + 1.65\sigma)$, x G_2 (según el ejemplo si $x > 10.4$), ésta es incorruputa, y si $x < ({}_2 - 1.65\sigma)$, x G_1 (según el ejemplo, si $x < 6.4$) - ésta está deteriorada. Entonces si $\mu_1 + 1.65\sigma > x > \mu_2 - 1.65\sigma$ la clasifi cación de esta empresa será reservada. Pues, el valor de la empresa que se ha tratado del ejemplo, como es de 7.5%, no podrá ser calificada como elemento de alguno de estos dos grupos, y por lo consecuente será evaluada como una empresa de carácter intermedio.

Cuando se trata de discriminar en dos grupos utilizando sólo una variable, no es de mayor complejidad. No obstante, por la necesidad de evaluar los estados empresariales considerando factores esparcidos, surge el requerimiento de discernimiento multivariable.

Aún tratándose de la función de discriminación multivariable, los criterios fundamentales son los mismos, empero en el espacio de p-ésima dimensión se usufructúa la distancia cuadrada de Mahalanobis ya antes mencionada, como distancia entre puntos.

Sigamos con el mismo ejemplo, mas ahora suponiendo que tenemos datos sobre la tasa de capital propio (x_2)*. Denominando x_1 a los datos que observamos anteriormente, se elabora la tabla 2-1. Aquí los supuestos son los siguientes: 1) la varianza de x_1 es común para los dos grupos, 2) la varianza de x_2 es también común para los dos, y 3) la coeficiente de correlación entre x_1 y x_2, (coeficiente de correlación) es igual para los dos grupos.

TABLA 2-1

	x_1		x_2		
	μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	ρ
G_1	3.0	4.5	12	12	0.5
G_2	13.8	4.5	40	12	0.5

* $\frac{\text{Capital propio}}{\text{Capital total}}$ x 100, es un índice de seguridad.

Si se presenta una empresa con los datos, $x_1 = 7.5$, $x_2 = 28$, ésta tiene distancias tipificadas u_1 y u_2, que se muestran en la siguiente Tabla 2-2.

TABLA 2-2

	Distancias de G_1	Distancias de G_2
Para x_1	$u_{11} = (7.5 - 3)/4.5 = 1$	$u_{12} = (7.5 - 13.8)/4.5 = 1.4$
Para x_2	$u_{21} = (28 - 12)/12 = 1.3$	$u_{22} = (28 - 40)/12 = -1$

Estas distancias se comprenden como distancias cuadradas de Mahalanobis para respectivas variables. Dadas estas distancias, se clasifica como perteneciente a G_1 con respecto a x_1, y para x_2 como miembro de G_2.

Y así resulta que el analizador se queda perplejo en discriminar ésta si quiere apreciar estos dos factores. Con el objetivo de sintetizar estos resultados, se usufructúa la distancia cuadrada de Mahalanobis D^2 calculada ya en condición de dos variables juntas no en la forma respectiva. Se obtienen las distancias cuadradas de Mahalanobis de las medias de G_1 y G_2, $D^2{}_1$ y $D^2{}_2$ por medio de la fórmula siguiente:

$$D^2 = \frac{u_1^2 + u_2^2 - 2\rho u_1 u_2}{1 - \rho^2} \qquad \ldots(2\text{-}1)*$$

Sustituyendo los valores en (2-1), tenemos:

$$D_1^2 = \frac{1^2 + 1.3^2 - 2 \times 0.5 \times 1 \times 1.3}{1 - (0.5)^2} = \frac{1.39}{0.75} = 1.85$$

$$D_2^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-1)^2 - 2 \times 0.5 \times (-1.4) \times (-1)}{1 - (0.5)^2} = \frac{1.56}{0.75} = 2.08$$

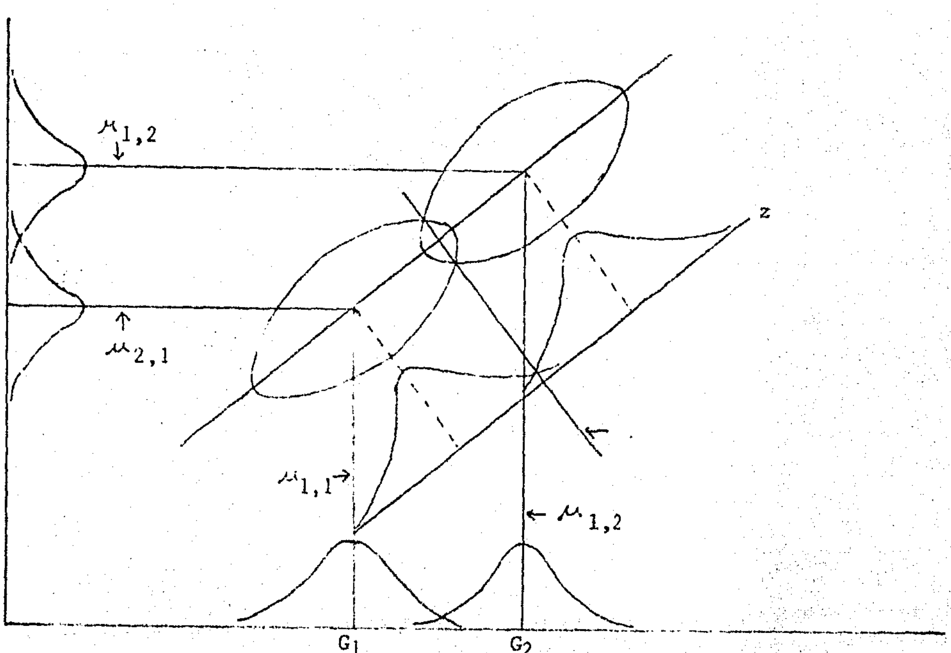
* Es la misma ecuación que la (1-8), sólo convertida en una forma diferente, sin embargo, cualquiera de las dos es indiferentemente utilizable.

De estos resultados, por ser $D_2^2 > D_1^2$, esta empresa se ubica en el punto más próximo a G_1, que a G_2.

La línea de confín de estos grupos se consigue como conjunto de puntos equidistantes de sus medias. Esta trayectoria donde $D_1 = D_2$ aparece como una recta transversal entre estos dos grupos, y por lo consiguiente una vez establecida esta línea de aledaño, se logra discriminar cualquier empresa que se intenta clasificar.

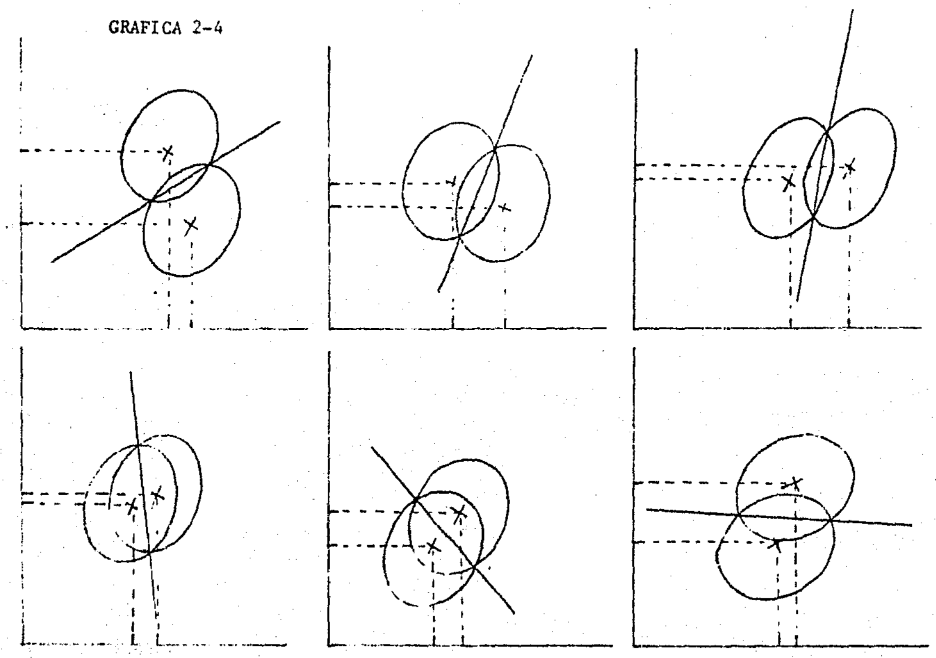
Esta línea de aledaño, por ser establecida en la manera que la parte común de los grupos sea mínima cuando estas distribuciones se proyectan sobre la coordenada de z intersectada rectangularmente con ella, varía dependiendo según las ubicaciones relativas de los grupos. En la gráfica (2-3) se muestra la fijación de ésta y el discernimiento en caso de dos variables.

GRAFICA 2-3



Y en la gráfica (2-4) se presentan los casos ejemplares de variación de esta línea.

GRAFICA 2-4



Por ser z, una recta en el plano, es expresada como la ecuación siguiente:

$$z = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \qquad \ldots (2\text{-}2)$$

Fijando a_0 en el modo que $z = 0$, cuando un punto (x_1, x_2) está sobre la línea de confín, para poder discernir cualquier punto observando sólo el signo de z.

La ecuación (2-2) se puede expresar en la forma indicada a continuación, utilizando el punto de medio $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2)$ de las medias de ambos grupos $(\mu_{1.1}, \mu_{2.1})$, $(\mu_{1.2}, \mu_{2.2})$:

$$z = a_1 (x_1 - \bar{\mu}_1) + a_2 (x_2 - \bar{\mu}_2) \qquad \ldots (2\text{-}3)$$

donde $\bar{\mu}_1 = (\mu_{1.1} + \mu_{1.2})/2$, $\bar{\mu}_2 = (\mu_{2.1} + \mu_{2.2})/2$

Esta ecuación se denomina como Función de Discriminación (Discriminant Function).

En general, podemos determinar estos coeficientes a_i $(i = 1,2,\ldots p)$, mediante el proceso que indica en lo posterior, tomando los datos en consideración en la forma de la tabla (2-3).

TABLA 2-3 DATOS Y ESTADISTICAS PARA EL COMPUTO DE LA FUNCION DE DISCRIMINACION:

Nº	x1	$x_2 \ldots$	$x_i \ldots$	x_p	Nº	x_1	$x_2 \ldots$	$x_i \ldots$	x_p
1	$x_{11}^{(1)}$	$x_{12}^{(1)}$	$x_{1i}^{(1)}$	$x_{1p}^{(1)}$	1	$x_{11}^{(2)}$	$x_{12}^{(2)}$	$x_{1i}^{(2)}$	$x_{1p}^{(2)}$
2	$x_{21}^{(1)}$	$x_{22}^{(1)}$	$x_{2i}^{(1)}$	$x_{2p}^{(1)}$	2	$x_{21}^{(2)}$	$x_{22}^{(2)}$	$x_{2i}^{(2)}$	$x_{2p}^{(2)}$
⋮					⋮				
α	$x_{\alpha 1}^{(1)}$	$x_{\alpha 2}^{(1)}$	$x_{\alpha i}^{(1)}$	$x_{\alpha p}^{(1)}$	β	$x_{\beta 1}^{(2)}$	$x_{\beta 2}^{(2)}$	$x_{\beta i}^{(2)}$	$x_{\beta p}^{(2)}$
⋮					⋮				
n_1	$x_{n_1 1}^{(1)}$	$x_{n_1 2}^{(1)}$	$x_{n_1 i}^{(1)}$	$x_{n_1 p}^{(1)}$	n_2	$x_{n_2 1}^{(2)}$	$x_{n_2 2}^{(2)}$	$x_{n_2 i}^{(2)}$	$x_{n_2 p}^{(2)}$
MEDIA	$\bar{x}_1^{(1)}$	$\bar{x}_2^{(1)}$	$\bar{x}_i^{(1)}$	$\bar{x}_p^{(1)}$	MEDIA	$\bar{x}_1^{(2)}$	$\bar{x}_2^{(2)}$	$\bar{x}_i^{(2)}$	$\bar{x}_p^{(2)}$

Por medio de la tabla (2-3), se observa que $x_{\alpha i}^{(1)}$ concierne al valor del dato número $\alpha (\alpha = 1,2,3,\ldots n)$ del Grupo G_1 con respecto a la variable i $(i = 1,2,\ldots,p)$. En forma semejante $x_{\beta i}^{(2)}$ es el dato del número β del Grupo G_2 para la variable i.

De esta tabla, se obtienen las siguientes estadísticas:

La media del G_1:

$$\bar{z}^{(1)} = a_i \, (\bar{x}_i^{(1)} - \bar{\bar{x}}_i)$$

La media del G_2

$$\bar{z}^{(2)} = a_i \, (\bar{x}_i^{(2)} - \bar{\bar{x}}_i) \qquad \ldots(2\text{-}4)$$

donde $\bar{\bar{x}}_i = (\bar{x}_i^{(1)} + \bar{x}_i^{(2)})/2$

La suma de cuadrados del G_1:

$$S_1 = \sum_{\alpha=1}^{n_1} (z_\alpha^{(1)} - \bar{z}^{(1)})^2 = \sum \sum a_i a_i \, S_{ij}^{(1)}$$

donde $S_{ij}^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^{n_1} (x_{\alpha i}^{(1)} - \bar{x}_i^{(1)}) \, (x_{\alpha j}^{(1)} - \bar{x}_j^{(1)})$

La suma de cuadrados del G_2:

$$S_2 = \sum_{\beta=1}^{n_2} (z_\beta^{(2)} - \bar{z}^{(2)})^2 = \sum \sum a_i a_j \, S_{ij}^{(2)} \qquad \ldots(2\text{-}5)$$

donde $S_{ij}^{(2)} = \sum_{\beta=1}^{n_2} (x_{\beta i}^{(2)} - \bar{x}_i^{(2)}) \, (x_{\beta j}^{(2)} - \bar{x}_j^{(2)})$

Y la varianza es:

$$V_z = (S_1 + S_2)/\,(n_1 + n_2 - 2) = \sum \sum a_i a_j V_{ij}$$

donde $V_{ij} = (S_{ij}^{(1)} + S_{ij}^{(2)})/\,(n_1 + n_2 - 2)$ $\qquad \ldots(2\text{-}6)$

Los coeficientes a_i se asignan en tal modo que $\theta = d_z^2/V_z$ sea máximo, o es lo mismo decir, que la eficiencia de discriminación sobre z sea máxima:

$$\theta = \frac{d_z^2}{V_z} = \frac{(\sum a_i d_i)^2}{\sum\sum a_i a_j V_{ij}} \qquad \ldots(2\text{-}7)$$

Según el cómputo de punto de máximo mediante la derivada de esta ecuación se dilucida que a_i son soluciones del sistema de ecuaciones siguientes:

$$\sum_{j=1}^{p} a_j V_{ij} = d_i, \; (i = 1,2,\ldots p) \qquad \ldots(2\text{-}8)$$

Denominando V^{ij} como elemento de la matriz inversa de la varianza-covarianza $\mathbf{V} = (V_{ij})$, tenemos:

$$a_i = \sum_{j=i}^{p} V^{ij} d_j \qquad \ldots(2\text{-}9)$$

Aquí, podemos expresar d_z y V_z como:

$$d_z = \sum a_i d_i = \sum\sum a_i a_j V_{ij} = \sum\sum d_i d_j V^{ij} = D_p^2$$

$$V_z = \sum\sum a_i a_j V_{ij} = D_p^2$$

Por consecuente, aplicando la desviación típica, $s_z = \sqrt{V_z} = D_p$, la probabilidad de discriminación errónea es:

$$u = \frac{d_z/2}{s_z} = D_p/2 \qquad \ldots(2\text{-}10)$$

De esta forma, en la tabla de distribución normal tipificada, N (0,1), es la misma probabilidad de que u rebase $D_p/2$. Y en este caso la eficiencia de discriminación es indicada por:

$$\theta = \frac{d_z^2}{V_z} = D_p^2 \qquad \ldots(2\text{-}11)$$

Este procedimiento se aplica cuando los parámetros no son conocidos, o en otra forma de decirlo, desde los datos muestrales recolectados; a pesar de ello, cabe mencionar que también se obtiene el mismo resultado por medio del procedimiento a partir de los parámetros como las medias $(\mu_{1.1}, \mu_{2.1})$, - - - $(\mu_{2.1}, \mu_{2.2})$.

Este procedimiento, aunque no lo trataremos, está dilucidado con detalle en los libros "Tahenryo-Kaiseki-ho" de T. Okuno, H. Kume y otros, y "Multivariate Statistical Methods" de Donald F. Morrison.

A pesar de que este método es considerablemente utilizable, no se despoja de algunas cuestiones que un analizador debe de considerar al aplicarlo. - Estas cuestiones son: (1) Objetivo del análisis y determinación de los grupos muestrales, (2) elección de las variables; las cuales serán desarrolladas en los párrafos siguientes:

(1) Objetivo del análisis y determinación de los grupos muestrales. En el caso de contemplar la discriminación de dos grupos, se deben de haber recolectado las muestras de dos grupos aptos al objetivo del análisis y datos sobre las variables las cuales son utilizadas para la discriminación de ésas.

Por ejemplo, si se desea diagnosticar si un paciente padece úlcera - estomacal o cáncer estomacal, primeramente se deben de examinar muestras - evidentemente conocidas de ambas enfermedades mediante operaciones u otros métodos. Una vez obtenidos los datos de exámenes médicos de estos pacien-- tes, se investiga cuál es la combinación eficaz de éstos para la clasificación, y posteriormente con esta combinación se clasificación los pacientes nuevos, de los cuales no se sabe qué tipo de enfermedad padezcan.

Sin embargo, en caso de análisis de empresas es más frecuente que sea difícil definir dos grupos expresamente divididos. Por ejemplo, en el caso de ejecutar la discriminación de las empresas de buena condición y las degradadas, la definición de estos grupos es un tanto lóbrega. Las muestras que se usufructúan para la determinación de funciones de discriminación en el campo de prestaciones públicas, no serán idénticas para todas las instituciones bancarias.

Por otro lado, tenemos la cuestión de la determinación de los grupos muestrales. Un ejemplo incomplexo es lo que dilucida la tabla 2-4.

TABLA 2-4 EQUIPARACION DE CLASIFICACIONES REALIZADAS CON GRUPOS DE DIFERENTES DIMENSIONES.

	$n_1 = n_2 = 50$		$n_1 = n_2 = 100$	
	G_1	G_2	G_1'	G_2'
MEDIA μ	3.0	13.8	3.6	11.2
VARIANZA σ^2	4.5^2	4.5^2	5.5^2	5.5^2
NUEVA MUESTRA	$x = 7.5$		$x = 7.5$	
$D^2 = (x - \mu)^2/\sigma^2$	$D_1^2 = 1.0$, $D_2^2 = 1.9$		$D_1^2 = 0.50$, $D_2^2 = 0.45$	
	$x \in G_1$		$x \in G_2$	

Como se contempla en esta tabla, por la diferencia de las medias, esta nueva muestra x se clasifica en grupos contrapuestos.

Para la aplicación a casos concretos, por lo consiguiente, se retendrá el discernimiento de una muestra como ésta con el establecimiento de región de sospecha; sin embargo, un analizador debe de considerar siempre la probabilidad de que variando el modo de determinar los grupos, se alteren los valores de medias en una forma sustancial y que esto se puede reflejar en los resultados de clasificaciones. Consiguientemente, se debe de conocer la inmutación de las estadísticas elementales, según el modo de determinar grupos.

(2) Elección de las variables.- La condición apetecible es cuando se utiliza un número de variables cuanto menos posible, adquiriéndose una efectividad de discriminación más elevada posible. Cuando se desea obtener una función de discriminación con el fin de análisis de empresa, es conveniente repulsar desde un principio las variables que son infructuosas para clasificación. No obstante como existe una diversidad en los índices financieros, se encuentran repeticiones de informaciones en los datos; y atribuyendo a lo anterior, no será eficaz ni práctico probar todas las combinaciones posibles atolondradamente. La problemática se resuelve seleccionando las variables en dos fases. En la fase primaria se eligen las variables en una forma preliminar y después de someter el resultado de ésta en un ensayo de clasificación se efectúa la elección de la fase secundaria con pruebas repetidas de significancia. La secundaria se puede efectuar hasta cierto grado maquinalmente siguiendo las reglas de procedimiento estadístico, empero como es normalmente una indagación limitada por la elección de la fase primaria, esta primaria tiene suma importancia. Para esta elección primaria de las variables destinadas a la aplicación con el fin de obtener fun--

ciones de discrminación se requieren conocimientos exuberantes y experiencia en el campo de análisis de empresas, y además es necesaria una inquisición suficiente de las estadísticas básicas. Esta inquisición de las estadísticas básicas se puede ejecutar basándose en la lógica de la función de discriminación.

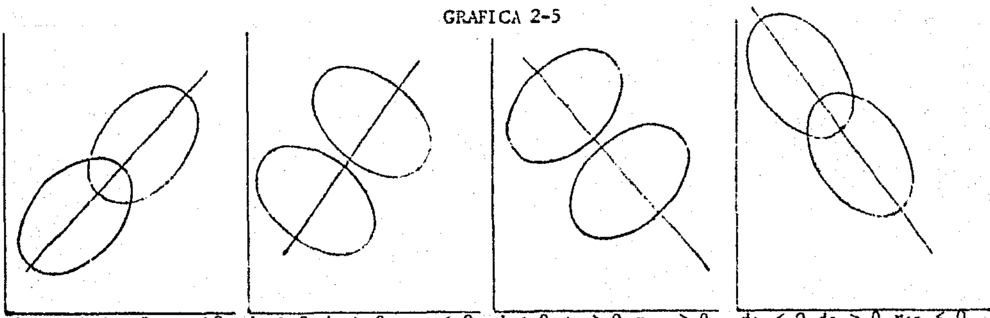
i) La eficiencia de clasificar en dos grupos sobre una variable es grande, mientras que la distancia entre dos medias tipificadas de los grupos sea más grande. Y tales variables generalmente son variables encarecidas en cuanto a su importancia dentro del análisis de empresas convencional, también.

ii) En el caso de dos variables, no sólo de la magnitud de la distancia entre las medias tipificadas, sino depende la eficiencia de clasificación también del signo y del grandor del coeficiente de correlación. Aunque no vamos a tratar el procedimiento, aquí se presenta la ecuación para averiguar la eficiencia de clasificación en dos grupos de dos variables.

$$D_p^2 = \sum_i \sum_j d_i d_j V^{ij} = \frac{d_1^2 + d_2^2 - 2r_{12}d_1d_2}{1 - r_{12}^2} \qquad \ldots(2\text{-}12)$$

De esta ecuación, d_1, d_2 son diferencias entre las medias tipificadas. Se observa que para que D_p^2 sea grande, no solamente d_1^2, d_2^2 deben de ser grandes, sino también $r_{12}d_1d_2$ deben de ser grandes con el signo negativo, como se señala en la gráfica 2-5.

GRAFICA 2-5



$d_1 > 0, d_2 > 0, r_{12} > 0$, D_p^2 pequeña; $d_1 > 0, d_2 > 0, r_{12} < 0$ D_p^2 grande; $d_1 < 0, d_2 > 0, r_{12} > 0$ D_p^2 grande; $d_1 < 0, d_2 > 0, r_{12} < 0$ D_p^2 pequeña

iii) Cuando aparecen varianzas y coeficientes de correlaciones de los grupos sumamente desemejantes, hay posibilidad de que la composición de la función de discriminación pierda su aptitud. Si se observa esta tendencia para todas las variables, es más aceptable tratar como unproblema de extracción de empresas anormales por medio de la elipse de rechazamiento, que se expuso en el capítulo anterior, y no como problema de la función de discriminación.

2) PRONOSTICO DE LAS EMPRESAS CON DEFICIT EN EL FUTURO

Los análisis de productividad, estabilidad y otros aspectos desde - tiempo pasado hasta el momento presente tienen mérito, no sólo para evaluar la situación de la empresa en el presente, sino también y quizá con mayor - importancia, en establecer una base de pronóstico de posibles situaciones en el futuro considerando las problemáticas y superioridades que se rele-- van en estos análisis.

Dentro del pronóstico empresarial existen diversos tipos y métodos, sin embargo, en este inciso trataremos de desarrollar la posibilidad de - aplicación de la función de discriminación dentro de este campo. La aplicación de ésta es, por sus características teóricas, clasificar una empresa - como objeto de análisis, en uno de dos grupos discriminados por esta función y utilizar el resultado para pronóstico en un futuro no remoto.

Los argumentos en los cuales se base este tipo de aplicación son los siguientes:

1) En tiempo de inactividad económica general, los índices financieros muestran desmejoramiento en un sentido general, sin embargo, es incontes

table que existen empresas con mayor resitencia en estas circunstancias y las de menor resistencia. Por lo tanto debemos de tomar como supuesto de que las empresas que se convierten en deficitarias en tiempo de inactividad económica tienen factores latentes para esta conversión, reflejadas en sus índices financieros desde un tiempo anterior a este evento.

2) Construir una función de discriminación utilizando la muestra de las empresas convertidas en deficitarias. La combinación de los índices debe de ser adecuada también para su interpretación analítica.

3) El objetivo de la aplicación de la función de discriminación no sólo para el pronóstico de empresas convertidas en deficitarias. Por medio de dilucidar la complexión de las empresas que tienen alta probabilidad de convertirse en las deficitarias, también se debe de utilizar el resultado para una política financiera pintiparada para su situación.

Como ejemplo, se escogen 37 empresas que habían registrado superávit hasta 1964 y que recibiendo la influencia de depreciación de 65 se convirtieron en las de números rojos. Por otro lado, se elige arbitrariamente el mismo número de empresas de las que ejercen con superávit. (*)

El resultado del parangón de estos dos grupos es lo que muestran la tabla 2-5 y la gráfica 2-6.

Se pueden indicar los siguientes puntos, deduciendo de este resultado, como características de las empresas que se convierten en las deficitarias.

(*) La mayor parte de este ejemplo depende de "Johoka-jidai No Keiei-bunseki" de T. Okuno y B. Yamada, por lo tanto estas empresas no se refieren a las mexicanas.

TABLA 2-5

		1961		1962		1963		1964	
		A	B	A	B	A	B	A	B
VENTA $x10^6$ yenes	MEDIA	31,919	16,212	36,479	14,655	42,983	17,202	50,360	19,672
	DESV. TIPICA	37,461	16,589	41,521	16,018	49,613	18,034	57,442	21,346
	C.V. *6	1.17	1.02	1.13	1.09	1.15	1.05	1.14	1.09
TASA DE UTILIDAD ORDINA. (%)	MEDIA	10.5	6.0	9.4	2.2	9.8	4.1	9.7	2.3
	DESV. TIPICA	6.4	5.7	5.5	6.8	4.1	3.8	4.6	2.3
	C.V.	0.61	0.94	0.58	2.86	0.42	0.91	0.47	0.99
TASA DE UTILIDAD SOBRE EL CAPITAL TOTAL UTI.	MEDIA	15.2	10.2	12.9	6.4	13.0	7.3	12.9	6.2
	DESV. TIPICA	8.0	6.8	5.3	4.7	4.6	2.9	5.1	1.4
	C.V.	0.53	0.66	0.41	0.74	0.35	0.39	0.40	0.23
RAZON DE PASIVO*1 (%)	MEDIA	192	265	195	277	203	318	198	346
	DESV. TIPICA	86	124	82	120	82	124	83	149
	C. V.	0.45	0.47	0.42	0.43	0.41	0.39	0.42	0.43
INDICE DE SOLVENCIA *2 (%)	MEDIA	123	105	125	104	125	105	127	102
	DESV. TIPICA	42	25	46	29	41	25	41	27
	C. V.	0.34	0.24	0.37	0.28	0.33	0.24	0.32	0.26
TASA DE ROTACION DE ACTIVO FIJO *3 (%)	MEDIA	465	367	414	286	416	294	440	307
	DESV. TIPICA	270	174	243	115	256	104	293	102
	C. V.	0.58	0.49	0.59	0.40	0.62	0.35	0.67	0.33
PRODUCTIVIDAD DEL VALOR AGREGADO BRUTO *4 (1000 yenes por hombre)	MEDIA	1,544	1,147	1,585	1,010	1,759	1,180	2,003	1,222
	DESV. TIPICA	638	425	621	397	710	398	849	345
	C. V.	0.41	0.37	0.39	0.39	0.40	0.34	0.42	0.28
TASA DE REPARTO AL CAPITAL AJENO (%) *5	MEDIA	9.9	17.6	11.9	24.2	12.4	21.4	13.1	24.3
	DESV. TIPICA	5.8	7.5	6.9	13.9	7.0	8.0	7.4	8.6
	C.V.	0.59	0.42	0.58	0.57	0.57	0.37	0.57	0.35

*1. Razón de pasivo $= \dfrac{\text{pasivo}}{\text{capital propio}} \times 100$

*2. Indice de solvencia $= \dfrac{\text{activo circulante}}{\text{pasivo circulante}} \times 100$, llamado también "razón de corriente" (traducción de "current ratio") o "razón de banquero" ("banker's ratio")

*3. Tasa de rotación de activo fijo $= \dfrac{\text{venta total}}{\text{activo fijo promedio}} \times 100$

*4. Productividad de valor agregado bruto $= \dfrac{\text{valor agregado bruto}}{\text{número promedio de empleados}}$

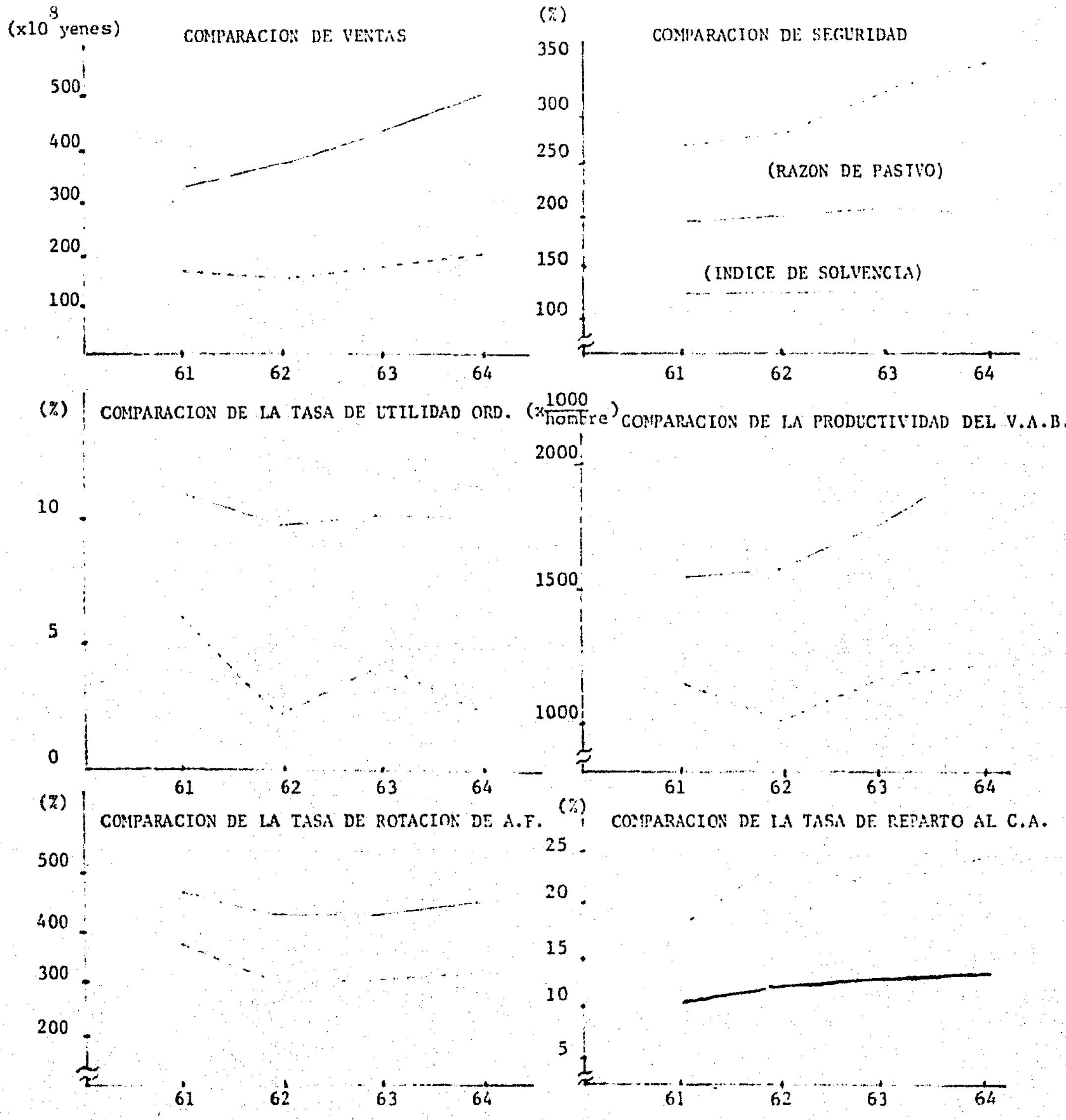
*5. Tasa de reparto al capital ajeno $= \dfrac{\text{intereses pagados y descuentos}}{\text{valor agregado}} \times 100$

*6. Abreviación de coeficiente de variación

GRAFICA 2-6

COMPARACION DE LAS EMPRESAS SUPERAVITARIAS Y
LAS QUE SE CONVIERTEN EN LAS DEFICITARIAS

(- SUPERAVITARIAS, ---- LAS QUE SE CONVIERTEN EN DEFICITARIAS)



1) Estas empresas tienen magnitudes relativamente reducidas y la tasa de crecimiento baja de la venta.

2) Las empresas convertidas en las deficitarias, consideran baja utilidad y son inestables recibiendo fuertemente la influencia de oscilación de la actividad económica general.

3) Las razones de pasivo de estas empresas son grandes y además éstas muestran tendencia en acrecentar el grado de dependencia del exterior. Por otro lado tienen fluidez financiera (solvencia) inferior, también.

4) La efectividad del activo de éstas se aprecia baja y la productividad del valor agregado bruto también es desmedrada. Por otra parte, como es grande la dependencia del exterior, su tasa de reparto al capital ajeno es mayor también.

Con respecto a éstos 8 índices, se ha realizado una prueba de la probabilidad de acertar la conversión de las empresas en las deficitarias en el año 1965, del pronóstico utilizando los datos de años anteriores a éste.

Se debe de efectuar esta prueba en diferentes años con el propósito de obtener la probabilidad de error de clasificación según los años de los cuales provienen los datos. Así, en cuanto a este ejemplo, el resultado de la prueba en 3 casos, los cuales se consideran; 3 años anterior('62), 2 años anterior('63) y 1 año anterior('64); es como se muestra en la tabla 2-6.

En ésta, aparecen los coeficientes de las 8 variables que se utilizan para las funciones de discriminación z y las D^2 como eficiencia de discriminación al final de la tabla para sus respectivos casos.

TABLA 2-6 FUNCION DE DISCRIMINACION z PARA EL PRONOSTICO DE LAS EMPRESAS CONVERTIDAS EN LAS DEFICITARIAS

CASOS	I	II	III
	- 3 AÑOS	- 2 AÑOS	- 1 AÑO
	('62)	('63)	('64)
VENTA TOTAL (L)*	0.0183	0.0175	0.0217
TASA DE UTILIDAD SOBRE EL CAPITAL TOTAL UTILIZADO	0.0038	0.0006	0.0004
TASA DE UTILIDAD ORDINARIA	-0.0003	0.0022	0.0049
TASA DE REPARTO AL CAPITAL AJENO	-0.0009	-0.0010	-0.006
RAZON DE PASIVO	0.0026	-0.0430	-0.0279
INDICE DE SOLVENCIA	-0.0002	-0.0002	0.0000
ROTACION DE ACTIVO FIJO (L)	-0.0192	-0.0124	-0.0216
PRODUCTIVIDAD DE VALOR AGREGADO BRUTO (L)	0.0123	0.0300	0.0449
D^2	3.0	3.7	6.7

37 empresas es como señala en lo siguiente:

* (L) indica valores convertidos en log.

	I	II	III
Clasificar empresas superavitarias como las convertidas - en deficitarias	16.2%	13.5%	10.8%
Clasificar las empresas con-- vertidas en deficitarias como superavitarias	16.2%	18.9%	5.4%

Suponiendo que estas distribuciones son normales, la probabilidad de error de clasificación con z = O es del orden de 19.2% en 3 años anterior, 16.9% en 2 años anterior y 9.8% en el año anterior. Efectivamente mientras que sean de años más próximos al año de pronóstico, se desciende la probabilidad del error de clasificación como también se puede observar en la tabla 2-6 que los valores de D^2 que se elevan del caso I al caso III.

En dado caso que se interese clasificar una empresa cuyos ocho índices registran en el año '64 los siguientes valores:

Venta total:	3.0×10^{10}
Tasa de Utilidad Ordinaria:	7.2
Tasa de Utilidad Sobre el Capital Total Utilizado	8.4
Razón de Pasivo:	297
Indice de Solvencia:	110
Tasa de Rotación de Activo Fijo:	396
Productividad de Valor Agregado Bruto:	1,482
Tasa de Reparto al Capital Ajeno	20.6

Con estos datos, al sustituir la fórmula, podremos discernir si esta empresa pertenece al grupo de las que se convertirían en las deficitarias - al recibir la influencia de la inactividad económica general de '65, o al - grupo de las que seguirían sin registrar números rojos.

De manera que z se calcula:

$$z = 0.0217\ (10.477 - 10.544) + 0.0004\ (8.40 - 9.55)$$
$$+ 0.0049\ (7.2 - 6.0) - 0.0006\ (20.6 - 18.7)$$
$$- 0.0279\ (2.473 - 2.435) + 0.0\ (110 - 114.5)$$
$$- 0.0216\ (2.598 - 2.572) + 0.0449\ (3.171 - 3.207)$$
$$= - 0.0004 < 0$$

Consiguientemente esta empresa se ubica ligeramente más próxima al grupo de las empresas que se convertirían en las deficitarias. Sin embargo, también es recomendable que se establezca una región de sospecha en casos de más de dos variables, y así posiblemente esta empresa que tomamos como ejemplo esté en dicha región.

Por otro lado, tenemos la cuestión de eficiencia de discriminación de esta función. En la tabla 2-6, aparecen los valores D^2 representando eficiencia de discriminación de cada caso. Empero hasta ahora no tenemos base de criterio para determinar si esta función es eficiente o no con respecto a la clasificación.

En varios textos del análisis multivariable, aparece la prueba de T^2 de Hotelling o estadística T^2 de Hotelling (Donald F. Morrison "Multivariate Statistical Methods", 1976; T. Okuno, T. Haga y otros "Tahenryo-Kaiseki-ho" 1971, edición revisada 1982).

Según D.F. Morrison, la T^2 es análoga a t^2, la estadística comunmente conocida, y T. Okuno y otros en el segundo libro, mencionan que T^2 es la adaptación de t al análisis multivariable (en forma cuadrada).

En este ensayo no trataremos el procedimiento para obtener la fórmula de T^2, sin embargo, se puede mencionar que para alguien que tiene interés en profundizar este punto, es recomendable el texto de Morrison.

Se conoce que cuando es sólo una variable se utiliza el comportamiento de t^2 que somete en la distribución F, y análogamente en el análisis multivariable se utiliza el valor de F calculado con base en T^2 en la forma siguiente:

$$F = \frac{N-p}{p(n-1)} \quad T^2 = \frac{N-p}{p(N-1)} \cdot \frac{n_1 n_2 D^2}{n_1 + n_2} \qquad \ldots(2\text{-}13)$$

donde N y p son tamaño de muestra y número de variables.

Como se observa, si p = 1, la ecuación (2-13) se convierte en $F = T^2$ y es precisamente la cuadrada de t que se utiliza para el caso de sólo una variable. Y T^2 se da en la ecuación (2-14).

$$T^2 = t' \, R^{-1} t \qquad \ldots(2\text{-}14)$$

Aquí, t es el vector columna de las diferencias entre medias divididas entre las raíces cuadradas de los elementos de la matriz varianza-covarianza o en otra forma

$$t_i = d_i / \sqrt{V_{ij}} \qquad \ldots(2\text{-}15)$$

y t' es el vector renglón de los mismos elementos t_i.

De modo que se puede comparar este valor de F con los valores que aparecen en la tabla F con grados de libertad p y N-p. En nuestro ejemplo, tenemos tres casos I, II y III; y podemos calcular manualmente utilizando los valores de D^2.

Caso I: $F_1 = \dfrac{37 + 37 - 8}{8\ (37+37-1)} \cdot \dfrac{37^2}{37 + 37} \cdot (3.0)$

$= \dfrac{271062}{43216} = 6.27$

Caso II: $F_2 = \dfrac{37 + 37 - 8}{8\ (37+37-1)} \cdot \dfrac{37^2}{37 + 37} \cdot (3.7)$

$= \dfrac{334309.8}{43216} = 7.74$

Caso III: $F_3 = \dfrac{37 + 37 - 8}{8\ (37+37-1)} \cdot \dfrac{37^2}{37 + 37} \cdot (6.7)$

$= \dfrac{605371.8}{43216} = 14.01$

Si comparamos estos valores con $F_{0.05;8,66}$ que es aproximadamente 2.1, son notablemente superiores y por consiguiente se acepta que estos dos grupos no son de un mismo conjunto o en otra expresión se discriminan mutuamente con una evidencia relativamente alta (sobre todo el caso III).

Hemos visto los aspectos fundamentales de la función de discriminación en aplicación al análisis de empresas. Aunque en esta obra no se desarrolla, se podría pensar su utilidad en una aplicación más extendida. Un ejemplo es la introducción de variaciones dentro de serie de tiempo en construcción de este tipo de funciones. Más concretamente, podemos considerar los tres casos que hemos estado examinando, en una forma sintetizada, y utilizando los datos de estos tres años y las distancias que corrieron los puntos en estos tres años. De esta medida podríamos obtener una función de discriminación con las variaciones en serie de tiempo consideradas.

O con el propósito de averiguar el grado de certidumbre de los títulos valores, se puede aplicar este método de análisis sobre las empresas - emisoras de éstos.

Por último, cabe señalar un punto de cierta importancia que concierne a la aplicación de estas funciones.

Se ha hecho manifiesto que una función de discriminación (con eficiencia de discriminación suficiente) puede, hasta ciero nivel, pronosticar estados futuros de las empresas. Sin embargo, un analizador debe de tener - presente la consideración de que la función de discriminación no es precisamente para predecir lo futuro, o es lo mismo decir, lo importante no es la cuestión de acertar o no situaciones futuras empresariales.

La importancia y lo aprovechable de la aplicación de este método multivariable es conocer los niveles de la peligrosidad con respecto a la caida de utilidades, etc. y posteriormente usufructuar los resultados de éste para un refortalecimiento complexional o un análisis más circunstancial y - profundo.

3) EVALUACION DE IDONEIDAD DE LAS EMPRESAS EN LA EPOCA DE CONTRACCION

En este inciso, se va a tratar una forma de aplicación de la función de discriminación con el propósito de conocer hasta qué grado se puede adaptar una empresa a la situación de contracción económica.

Estamos al corriente de que cuando se da una contracción general económica, se observan las empresas afectadas de cualquier manera, por este fenómeno económico. Sin embargo, también estamos enterados de que existen empresas que demuestran una resistencia contra los efectos causados por la contracción, y por otro lado las que no pueden registrar números positivos en sus utilidades y que reponen estos números rojos substrayendo su propio capital acumulado. Se puede pensar que esta desemejanza se atribuye a dos razones principales. Una es la diferencia en cuanto a la fuerza básica de carácter latente que se había adquirido en un tiempo anterior a la contracción. Una segunda razón sería disparidad que concierne a la efectividad de las políticas adaptadas de forma provisional al encontrarse ya en una situación de inactividad económica. Aquí sería conveniente aclarar que la primera de estas razones sobre todo, es de considerable importancia, puesto que juega un papel de condición para la segunda y tendrá influencia en las resultas de los ejercicios posteriores, también.

Entonces, tenemos que empezar construyendo las hipótesis siguientes:

1) Hay diferencia en niveles de deterioración en el tiempo de contracción económica y su causa debe de encontrarse dentro de las complexiones empresariales.

2) Se pueden tomar en cuenta varios factores tales como el grado de dominio del mercado, composición de productos (por ejemplo si son duraderos o no), etc., para la valorización de complexiones empresariales. Sin embargo, son factores difíciles de cuantificar y por lo tanto supondremos que la complexión de una empresa se refleja dentro de sus índices financieros.

3) Para poder comparar las complexiones empresariales utilizando los índices financieros, es necesario observar relaciones de interdependencia y concordancias entre los índices, por la razón de que debe de haber alguna diferencia manifestada en estos conceptos.

Para verificar estas hipótesis, se lleva el siguiente procedimiento metodológico.

1) Dividir las empresas comparando los indicadores financieros en dos grupos, los cuales se consideran; G_1 como grupo de empresas que manifiestan resistencia en tiempo de contracción aunque registren caida de utilidades y G_2 como grupo de las que muestran bajas considerables de las utilidades y dejan ver una resistencia sustancialmente inferior.

2) Se trata de clasificar las empresas en alguno de estos dos grupos al año anterior de la contracción.

3) Se eligen los indicadores financieros de los 10 años con antelación de la clasificación.

Se pueden esperar, de un análisis de discriminación de este carácter, las siguientes perspectivas:

1) Si se verifican la propiedad y la persuasiva de la función, se podría expandir la aplicación de ésta en otras industrias u otras situaciones.

2) La gravedad de cada índice financiero y las relaciones de interdependencia entre estos índices serán dilucidados cuantitativamente por medio de interpretación de la función de discriminación. Estos conocimientos adquiridos en este análisis serán utiles en los análisis de carácter convencional, también.

Se eligen 18 empresas eliminando las empresas anormales de 37 que - poseen datos de 10 años anteriores al año del análisis y además que no han mostrado circunstancias especiales tales como fusión con otra empresa o cambio en término de liquidación. Estas condiciones son para que los índices tengan posibilidad de comparar entre los mismos y continuidad en el transcurso.

La razón por la cual se establece este transcurso de diez años para construir la función de discriminación, es que se puede pensar que es necesario considerar los factores que contribuyen en la formación de la complexión empresarial en un largo lapso.

Primeramente, tenemos que establecer dos grupos G_1 y G_2 con estas 18 empresas.

Se utilizan los siguientes 4 índices para esta división.

1) Tasa de utilidad sobre el capital total utilizado
2) Tasa de utilidad ordinaria
3) Tasa de capital propio
4) Tasas de crecimiento de la venta total, el valor agregado bruto, el capital total y el capital propio, tomando el primer año como añc base.

Con estos índices, se fija la base de división en la forma que se muestra en la tabla 2-7.

TABLA 2-7

	G_1	G_2
Tasa de utilidad sobre el capital total	Las empresas que mantuvieron 3 años de superávit y siempre fueron superiores al promedio	Las que registraron déficit durante dos o más años y siempre fueron inferiores al promedio.
Tasa de utilidad ordinaria	Las que tuvieron superávit en los últimos dos años y fueron superiores al promedio.	Las que registraron con números rojos en 3 años consecutivos.
Tasa de capital propio.	Las que tienen superiores al promedio.	Las que tienen inferiores al promedio.
Tasas de crecimiento.	Las que tienen estas 4 tasas de crecimiento superiores al promedio.	Las que tienen dos o más tasas de crecimiento inferiores del promedio.

De las 18 empresas mencionadas, se consideran 6 en el Grupo G_1, y las 12 restantes en el G_2.

Aunque la mayoría de estas empresas no satisfacen perfectamente ninguno de estos dos tipos de condiciones, se clasifican tomando en cuenta la tendencia a alguno de estos grupos.

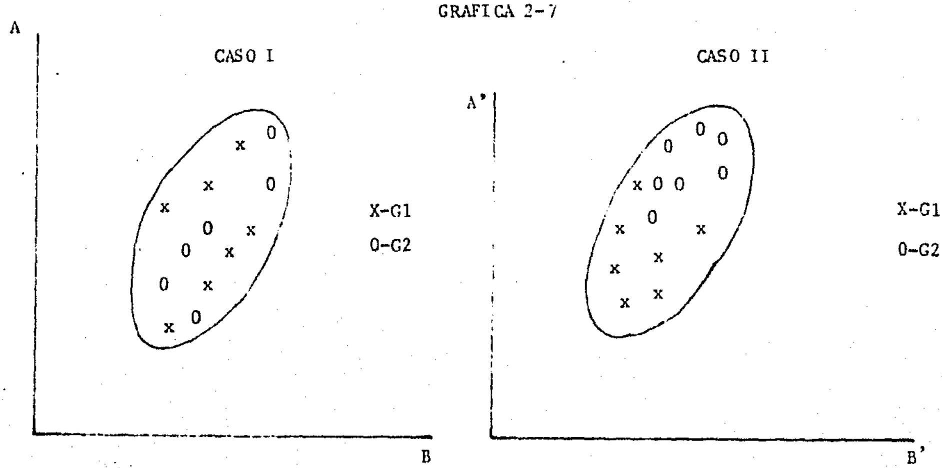
Es difícil elegir los índices que serán utilizados para la construcción de la función de discriminación. Por lo consiguiente se tienen que someter varios indicadores para probar la eficiencia de discriminación, y esto evidentemente es una labor que lleva consigo "pruebas y errores".

Será relativamente sencillo elegir en forma preliminar unos indicadores considerando ciertas características que éstos poseen. Como ejemplo, podemos mencionar de las tasas de crecimiento del valor agregado, del capital propio y del activo fijo tangible. Sin embargo, no necesariamente cuando es grande la tasa de crecimiento del valor agregado, sea grande la tasa de crecimiento del capital propio. Si el cargo de salarios y sueldos es oneroso, la razón de reparto a la fuerza de trabajo será substancial, y se reduce el reparto para el capital propio en una forma relativa.

Para evitar la complicación de ir probando la eficiencia de discriminación de la función para cada índice, sería recomendable contemplar sobre las tendencias. Se ejemplifica este paso en la gráfica 2-7.

En ambos casos se observan correlaciones positivas, empero en el Caso I, no se aprecia una tendencia de las muestras y por lo tanto estos indicadores (o por lo menos la combinación de éstos) no servirían para separar este conjunto muestral en dos grupos. Por otro lado, tenemos la combinación de los indicadores A' y B', y medidas y expresadas las muestras en éstos, manifiestan cierta claridad en desunirse, o en otra forma de decirlo, los del G_1 tienden a registrar cifras superiores medidas tanto en A' como en B' que el Grupo G_2. Y como consecuencia de lo demostrado anteriormente, se recomendaría utilizar los indicadores A' y B' así rechazando A y B.

GRAFICA 2-7



Después de la elección, ahora sí es necesario probar construyendo - las funciones de discriminación. Si se consigue una vez una eficiencia de discriminación de magnitud satisfactoria comparando con el nivel de F, ésta será utilizada para la aplicación en la clasificación de las empresas que - nos interesan. La sugerencia que se podría dar en este punto sería empezar a probar con pocos indicadores e ir viendo qué tanto acrecienta la eficiencia de discriminación al agregar uno de los indicadores ya seleccionados - preliminarmente hasta obtener una eficiencia satisfactoria. Apesar de lo - anterior, cuando la eficiencia asciende en una magnitud muy limitada aún - agregando un indicador, por lo general será inconveniente incluir éste en el análisis y se tiene que seguir probando otros indicadores desde la fase anterior de que se probara éste por la razón de evadir posible caos de indicadores y esplamar causalidad de los indicadores fundamentales.

Por otra parte, se puede sacar la eficiencia de discriminación de cada uno de los indicadores bajo el supuesto de que si un indicador sin - combinar con otros posee una eficiencia de discriminación considerable, - será también alta al combinar éste con algún otro indicador. Por el mismo razonamiento, es útil calcular la probabilidad del error de la clasificación para cada uno de los indicadores.

En la Tabla 2-8, se muestran las estadísticas principales de la - muestra que estamos tratando en cuanto a los índices financieros seleccionados en forma preliminar.

Dado que se utiliza el valor de F para la prueba de significancia, es debido comparar los valores de F_i de nuestra Tabla con $F(1,16;0.01 = 8.53$. Eliminando los indicadores que no presentan valores de F_i más de 8.53, nos quedan sólo 6 indicadores que son: tasa de reparto al capital propio - - - ($F_{10} = 25.80$), tasa de reparto al trabajo ($F_8 = 16.24$), tasa de utilidad - sobre el capital total utilizado ($F_4 = 12.00$), razón del capital propio - ($F_5 = 10.33$), productividad del valor agregado ($F_6 = 8.90$) y razón del valor agregado ($F_7 = 8.63$).

Se dan casos con frecuencia de que utilizando q variables de p variables ($q < p$; en nuestro ejemplo $p = 10$) para obtener funciones de discriminación, la eficiencia de discrminación puede llegar a un nivel satisfactorio.

TABLA 2-8

I N D I C E S		VALOR MAX.	VALOR MIN.	MEDIA $\bar{x}_i$	DESV. TIP s_i	S	D^2_i	F_i	$\bar{\bar{x}}_i = \frac{\bar{x}_i^{(1)} + \bar{x}_i^{(2)}}{2}$
Tasa de crecimiento del valor agregado x1	G_1	4.68	1.84	3.01	0.99	0.865	0.003	0.012	2.99
	G_2	4.90	1.96	2.96	0.80				
Tasa de crecimiento del Cap. Prop. x2	G_1	3.69	1.67	2.41	0.69	0.645	1.767	7.07	1.98
	G_2	2.83	0.83	1.55	0.62				
Tasa de crecimiento de Act. Fij.Tang. x3	G_1	4.87	0.93	2.14	1.42	1.056	0.170	0.68	1.92
	G_2	4.12	0.82	1.70	0.84				
Tasa de Util. sobre el Cap. Total utilizado x4	G_1	14.4	6.7	9.97	3.51	2.213	3.001	12.00	8.05
	G_2	8.0	4.0	6.13	1.24				
Razón del Cap. Prop. x5	G_1	48.7	20.7	31.2	10.10	7.842	2.582	10.33	24.9
	G_2	32.8	9.0	15.6	6.56				
Productividad del valor agregado x6	G_1	3,911	1,956	2,814	866	575.0	2.226	8.90	2,385
	G_2	2,653	1,351	1,956	374				
Razón del valor agregado*1 x7	G_1	34.8	20.8	26.0	4.91	4.175	2.158	8.63	22.92
	G_2	25.9	14.2	19.9	3.50				
Tasa de reparto al trabajo*2 x8	G_1	51.3	38.2	45.5	5.36	6.411	4.059	16.24	51.98
	G_2	71.0	45.5	58.4	6.83				
Tasa de reparto al capital ajeno x9	G_1	24.9	6.5	15.6	6.26	6.478	0.594	2.38	18.10
	G_2	34.3	9.9	20.6	6.58				
Tasa de reparto cal capital propio x10	G_1	39.7	26.5	34.6	5.76	6.198	6.450	25.80	26.76
	G_2	30.1	9.1	18.9	6.39				

*1 Razón del Valor Agregado $= \dfrac{\text{Valor agregado}}{\text{Venta neta}}$

Tasa de reparto al trabajo $= \dfrac{\text{Sueldos y salarios}}{\text{Valor agregado}} \times 100\%$, "De modo que la tasa de reparto al trabajo es lo que indica la proporción que ocupa el gasto para personales dentro del valor agregado. Observe que esta tasa empezó a llamar la atención dentro del análisis de la productividad desde que A.W. Ricker de los E.U. propuso su uso como plan de Rucker para la fijación de sueldos" (E. Furukawa "Keiei-Bunseki" Tokyo, Japón 1980).

En el caso que estamos tratando, entonces es fácil de suponer que las 6 variables mencionadas en el párrafo anterior que muestran valores de F superiores al límite de significancia; F = 8.53 sean utilizadas para la obtención de la función de discriminación cuya eficiencia sea máxima - de todas las combinaciones posibles de las variables. Sin embargo, es - preciso recordar que estos valores de F están calculados con base en los valores respectivos de D^2 que, a su vez, fueron obtenidos en forma separada, o es lo mismo decir, sin combinar con otra variable. Y ya que estamos enterados de que las variables que en forma respectiva registran eficiencias relativamente altas, no necesariamente son mejores para combinarse con el fin de obtener una función de discriminación con máxima eficiencia de discriminación.

Los métodos que recomienda el profesor Tadakazu Okuno para la determinación de las variables en su libro "Tahenryo-Kaiseki-Ho" (escrito en - colaboración con H. Kume. T. Haga y T. Yoshizawa; Tokyo, Japón 1971), son "regresión escalonada delante" ("Stepwise Backward Regression"). Como los nombres lo indican, son métodos para la regresión múltiple. Por ejemplo, dentro de p variables posibles como variables explicativas, se busca una - que tenga más el coeficiente de correlación más grande con la variable dependiente y, después de las p-1 variables que quedan, se elige una que al combinar con la primera dé la máxima correlación múltiple, o sea el coeficiente de correlación entre los valores estimados y los datos observados - de la variable dependiente. Sin embargo, se dan casos de que en este proceso alguna variable resulte casi inútil para la explicación del comportamiento de la variable dependiente, aunque esta variable explicativa se haya sleccionado anteriormente, y en dado caso esta variable se debe de rechazar de la selección de las variables. Esto ocurre precisamente por la razón de que una variable explicativa, aunque por sí sola tenga algo coeficiente de correlación (simple), no siempre contribuye al comportamiento de la variable dependiente dentro del análisis múltiple. Este proceso de selección con repetición de escoger y rechazar según el fundamento que se mostrará en párrafos posteriores, hasta que no halle ninguna variable para ser selecta ni la que debe ser rechazada aunque se haya escogido anteriormente.

Este procedimiento de selección se le denomina como regresión escalonada delante. Y la regresión escalonada retrógrada es un proceso similar al otro, sólo la diferencia consiste en que éste empieza con todas las variables explicativas posibles y se va rechazando cada una que contribuye menos al comportamiento de la variable dependiente, aún con la posibilidad de reelegir las que se hayan rechazado.

El fundamento de elegir o rechazar consiste en que cuando una variable explicativa más o una menos, se varía el valor de F para la prueba de significancia de las variables calculada por la variación de la suma de cuadrados de los residuos dividida entre la varianza de la variación no explicada.

Si tenemos resultados de una regresión efectuada con las variables x_1, x_2,...,x_p, y le agregamos otra variable x_r ($r = p + 1$) para realizar nueva regresión, evidentemente tendremos diferentes resultados en los coeficientes parciales, la matriz de suma de cuadrados y productos, etc., y también es fácil de imaginar que se difieren los resultados con una variable menos. En este trabajo no vamos a tratar a fondo, qué diferencia puede resultar si se le agrega una variable más o se le resta una variable, puesto que no es un punto preciso que nos interesa desarrollar. Sin embargo, sería conveniente señalar que este tema es tratado con una minuciosidad en el libro "Tahenryo-Kaiseki-Ho (Métodos de Análisis Multivariable)" de T. Okuno, H. Kume y otros, publicado en Tokyo, Japón 1971 (edición revisada en 1982).

Ahora, si b_i representa el coeficiente parcial de regresión de la variable i, $S^{ii'}$ representa el elemento del i-ésimo renglón y de la i'-ésima columna de la matriz inversa de la suma de cuadrados y productos, y S_e representa la suma de cuadrados de residuos y los símbolos que tienen asterisco son los que se refieren al caso de regresión realizada con una variable más (x_r); tenemos la siguiente relación entre la suma de cuadrados de residuos con r-1 variables y la de r variables:

$$S_e^{*} = S_e - \frac{b_r^{*2}}{S_*^{rr}} \qquad \text{...(2-16)}$$

Esta relación muestra que cuando se le añade una variable más a una regresión, se disminuye la suma de errores cuadrados restando el cuadrado del último coeficiente parcial de regresión obtenido por la variable x_r dividido entre el último elemento de la matriz inversa de la matriz de suma de cuadrados y productos.

La prueba de hipótesis de significancia con respecto a esta última variable x_r se da por la división de esta diferencia con el signo positivo entre la varianza de la variación no explicada con los grados de libertad (1, n-r-1) y supuestamente se comporta como la distribución F, o sea:

$$F = \frac{{b_r}^{*2}}{S_*^{rr}. Ve^*} \qquad \ldots(2\text{-}17)$$

donde Ve es la varianza de la variación no explicada o de los residuos.

Por lo tanto, si este valor es superior al punto de 5% en la distribución F o algún valor preestablecido, se escoge esta variable x_r.

De mismo modo, si se tienen las variables $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_r$, el nivel de significancia F para la variable x_i se da por la siguiente fórmula:

$$F = \frac{{b_i}^2}{S^{ii}\ Ve} \qquad \ldots(2\text{-}18)$$

Una vez dado el valor de F de esta forma, si éste es inferior al punto de 5% o el valor prefijado, aunque esta variable se había elegido anteriormente, se excluye del análisis.

Para estos valores como base para incluir o excluir variables, el libro de "Tahenryo-Kaiseki-Ho (Método de análisis multivariable)" de T. Okuno y otros, nos proporciona una sugerencia con cierta importancia; "Fin y Fout*

* Fin y Fout son valores que prefijan para incluir y excluir variables respectivamente.

se fijan normalmente 2.0 ó 2.5. Si se utiliza el punto de 5% en la distribución F, es molesto porque se debe estar cambiando los grados de libertad según el cambio del número de variables". (P. 139).

"Cuando se aplica este método a lo real, es muy importante la manera de determinar Fin y Fout. Depende de ello, se dan los resultados siguientes:

1) Cuando se fijan Fin > Fout - Es drástica la condición de incluir y también es drástica la de excluir (cuesta trabajo excluir)".

2) Cuando se fijan Fin = Fout - Basado en la experiencia de los autores, parece ser más adecuado establecerlo así. La condición de incluir se iguala con la excluir..."

3) Cuando es Fin < Fout - Nunca se debe de adoptar esto, puesto que si el valor calculado de la ecuación (8.15) o la de (8.16) * está entre Fin y Fout, es incluido por ser superior que Fin y es excluido por ser inferior que Fout y resulta que esa variable repite siempre entrar y salir. La computadora queda efectuando cálculos infinitamente.

Entonces, siendo Fin = Fout = Fo, ¿cómo se debería de definir este valor?

1) Si se determina Fo muy elevado (por ejemplo, igual o más de 4.00), sólo se incluyen las variables de coeficientes de determinación muy altos. Por lo consiguiente, nada más con unas pocas variables que se incluyan, se detiene el cálculo. En el caso de que cada coeficiente de correlación simple de x_i con y es bajo, pero uniendo varias x_i se obtiene un coeficiente de co-

* En nuestro caso son ecuaciones (2-17), (2-18)

rrelación múltiple considerablemente alto; si Fo es grande, por incluirse solamente pocas variables, no asciende el coeficiente de correlación múltiple. Se incluyen variables de los coeficientes de determinación por sí mismos altos, sin embargo, resulta "no siguen las demás".

2) Si se define Fo muy reducido, se incluirán hasta las de coeficientes de determinación de semejante magnitud con componentes de errores. Por lo tanto se utilizarán casi todas de p variables, así resulta que no cumple el papel de selección de variables efectivamente.

3) Basado en la experiencia de los autores, aún 2.5 es alto para Fo = Fin = Fout, entonces es adecuado alrededor de 2.0. En este caso, se incluye un número considerable de las variables y además el coeficiente de correlación llega hasta de 10 a 20 por ciento menos que cuando se utilizan todas las variables". (P. 140 - 141).

Este método de la selección de las variables tiene bastante aplicación a los análisis multivariables, aunque no sea precisamente análisis de regresión.

Del ejemplo que hemos estado tratando, resulta que se incluye primeramente x_{10} y posteriormente las variables x_5, x_6 y en el último la variable x_4 sin excluir ninguna de estas variables una vez incluidas, y se detuvo el cómputo en el cuarto paso (al incluir x_4).

Es muy razonable que se eligió x_{10} en primer lugar por tener alto valor de D_1^2. Sin embargo, en el segundo paso, aún siendo x_8 el valor de D_1^2

que sigue a x_{10}, se incluyó al análisis x_5 que casi no tiene correlación - con x_{10}. Esto ocurre por la razón de que las distribuciones de x_{10} y x_8 - tienen parte sobrepuesta, sin embargo entre las de x_{10} y x_5 casi no existe confusión.

La función de discriminación resultante de esta selección de variables se muestra en lo siguiente:

$$z = 0.190\ x_{10} + 0.309\ x_5 + 9.694\ x_6{}^* + 2.073\ x_4 - 52.594$$

Sustituyendo los valores de la muestra que tenemos, se obtiene el resultado siguiente:

	Promedio de z	Valor máx. de z	Valor mín. de z
G_1	11.57	16.46	1.79
G_2	-11.57	- 6.18	-21.51

La distancia de los promedios de estos dos grupos en cuanto a z se - calcula 11.57 - (-11.57) = 23.14 y este valor es casi igual a la distancia cuadrada de Mahalanobis $D_4{}^2$**.

La clasificación que se efectúa para esta muestra según esta función de discriminación, como se indica en la siguiente tabla, no conduce a ningún elemento al grupo equivocado.

		GRUPOS CORRECTOS	
		G_1	G_2
GRUPOS CLASIFICADOS	G_1	6	0
	G_2	0	12

* Se utilizaron los valores convertidos en 1/1000 de los datos originales para sólo x_6.

** Calculada con 4 variables selectas.

Aún considerando la cuestión de suficiencia con respecto al tamaño de muestra, es indiscutible que este análisis nos proporciona una sugerencia útil y hasta cierto punto efectiva para una realización del análisis de evaluación de empresas que concierne a la problemática de idoneidad de las mismas en el tiempo de contracción económica.

Es posible que parezca obvio, sin embargo debemos tener conciencia de que este análisis de ninguna manera predice lo verdaderamente futuro. No hay que decir que por utilizar la computadora, el cálculo es exacto y por eso es muy cierto. Nos acordamos que estos análisis deben de tomarse como herramientas que sirven para buscar una imagen de las empresas cuyo objetivo es conocer los eventos posibles en un futuro limitado con tanto valor de probabilidad, ya que en el campo de ciencias relativamente exactas como ciencia física, también es sumamente difícil predecir (sobre todo después de conocer el principio de indeterminación).

Apesar de lo anterior, no hay que ignorar la utilidad de este tipo de análisis. Con los datos de un número suficientemente grande y además de lo más reciente posible, y con una mejora en los modos de definir los dos grupos a los cuales se clasifican y de seleccionar las variables; es posible desarrollar un sistema de revisión del estado financiero y administrativo y/o sistema de alarma para una circunstancia empresarial peligrosa.

CAPITULO 3 EL METODO PCA
(PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS)

1) EL OBJETIVO DEL ANALISIS PCA

En el presente capítulo, se tratará el método PCA que es uno de los métodos en cierto sentido básicos, por la razón de que dicho método tiene el objetivo de sintetizar la información que se obtiene de las variables - por las cuales se representan las características cuantificadas y que tienen correlación, en unos pocos valores característicos globales que no tengan correlación entre los mismos.

Como indica el título del capítulo, PCA es abreviatura de "PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS" que significa en español "ANALISIS DE COMPONENTE PRINCIPAL". Y este nombre se da por el propósito de encontrar un componente principal o unos componentes principales dentro del grupo de datos característicos con el fin de examinar en una forma sintetizada.

Como sabemos que el número de índices financieros fácilmente se suma más de 20 (un sistema frecuentemente utilizado en Japón para el análisis empresarial consta de 61 índices)*, y además entre éstos mismos existen correlaciones sumamente complexas; por ende el globalizar las evaluaciones efectuadas particularmente para todos éstos en una evaluación sintetizada nunca es una labor fácil.

Cuando todos los índices representan un estado financiero favorable, la evaluación global es relativamente fácil, empero si por ejemplo la empresa que está en cuestión prospera en cuanto a la fluidez financiera, aunque

* Listados en el libro; E. Furukawa "Keieibunseki" (Tercera edición revisada, 1980, Tokyo, Japón), P. 72 - 75.

sus tasas de rotación indican desmejoramiento, o aunque su tasa de utilidad sobre la venta va ascendiendo, la de utilidad sobre el capital puede mostrar la tendencia descendiente; no se puede evaluar con facilidad esta empresa - en una forma global cuestionando si ésta se encuentra en una circunstancia financiera favorable o no.

Un intento de la evaluación global sintetizando las evaluaciones realizadas de diferentes aspectos es el método de síntesis de proporciones ponderadas que ha sido usado con bastante frecuencia. Este método consiste en multiplicar los puntos de evaluación de los índices por las ponderaciones - expresdas en porcentaje.

La tabla 3-1 muestra un caso ejemplar de dicho método.

Sin embargo, este método tiene sus limitaciones. Los puntos que han sido destacados como problemática de éste, son los que aparecen en los párrafos posteriores.

(1) La puntuación evaluada resulta influida según el número de los - índices. La selección de los índices se realiza por la importancia de cada índice que se ha conocido en una forma experimental, sin embargo, si el número es reducido, hay desasosiego de que la evaluación no represente efectiva y suficientemente la esencia financiera y si es demasiado exuberante, se - pierde el enfoque de la evaluación. Por lo consiguiente, el número de los índices no debe de ser demasiado grande ni exaltadamente reducido, empero - no existe una base objetiva para determinar éste.

Tabla 3-1

INDICES	Evaluación de Escala de 100 puntos	Ponderación (%)	Evaluación Ponderada
1. Capacidad Ganancial			
Tasa de utilidad sobre el capital total	73	20	14.6
Tasa de utilidad ordinario sobre el capital total	79	20	15.8
2. Estabilidad			
Razón del capital propio	52	20	10.4
Razón de activo fijo al valor neto *1	46	5	2.3
Razón de activo fijo al capital a largo plazo *2	66	5	3.3
Indice de solvencia	68	5	3.4
3. Capacidad de Crecimiento			
Tasa de crecimiento de la utilidad de operación	42	10	4.2
Tasa de crecimiento de la venta	50	5	2.5
4. Escala (tamaño)			
El capital total	35	10	3.5
TOTAL	-	100	60.0

*1 Traducción de "Fixed assets to net worth ratio" que se calcula

$$\frac{\text{activo fijo}}{\text{capital propio}} \times 100$$

*2 Esta proporción se calcula como: $\frac{\text{activo fijo}}{\text{pasivo fijo} + \text{capital propio}} \times 100$

(2) La manera de conceder la ponderación varía dependiendo en una - forma considerable de la política de evaluación. Por ejemplo, habrá diversas opiniones acerca de la evaluación en cuanto a la magnitud de la empresa. También se ha visto que, después de la crisis mundial petrolera, la tendencia cambió, de darle importancia al crecimiento a considerar la gravedad de la estabilidad empresarial. Reflejar este tipo de cambios en "el sentido - de evaluación" en la ponderación para cada uno de los indicadores es más difícil, cada vez que se acreciente el número de ellos.

(3) Aún cuando se hayan establecido de algún modo los índices y la - ponderación de evaluación para éstos con una persuasiva, no necesariamente su resultado de evaluación tenga congruencia con la política de evaluación. La suma total de los puntos evaluados tiene supuesto de que estos indicadores son independientes entre sí, sin embargo éstos se conciben con (sin importar su magnitud) correlaciones, y por consiguiente, puede resultar una - suma repetida o contrarresto entre algunos índices. Este efecto que deviene del supuesto anteriormente mencionado, nos revela la posibilidad de que al finalizar la evaluación, nos dé un resultado que no se ha previsto.

Solucionar estas cuestiones en una forma persuasiva no es un estudio fácil, empero existe la necesidad de perseguir algún método por el cual se efectúa la evaluación empresarial de una medida global y además le concede una propiedad objetiva.

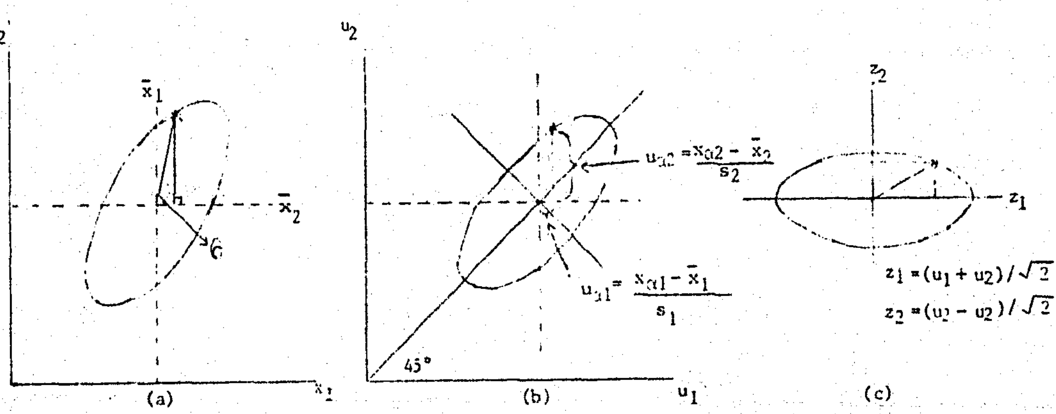
Cuando se tienen datos medidos sobre p indicadores de n empresas, si no existe ninguna correlación entre estos p indicadores, sólo basta establecer la base estudiando la dispersión de cada uno de ellos y posteriormente evluar las empresas con base en ella. Sin embargo, en realidad como existe alguna correlación entre estos indicadores, no es prudente seguir este método sencillo para realizar una evaluación efectiva sin sumar la información reiterativa.

El método de análisis de componente principal tiene como objetivo la remoción de este efecto de la suma de información reiterativa, transformando los indicadores en los componentes que no conciben correlaciones.

Un ejemplo sencillo es el caso en el cual existen solamente dos indicadores medidos y se trata de analizar las empresas con respecto a estos - dos indicadores.

Si éstos tienen más de 0.8 de correlación, la representación gráfica será a grandes rasgos, como se observa en la Gráfica 3-1(a). Por su alto - nivel de correlación, la suma de las evaluaciones de estos dos indicadores x1 y x2 inevitablemente significa una suma reiterada de informaciones, y - además por la razón de que x1 y x2 representan conceptos diferentes (por - ejemplo, la tasa de utilidad sobre el capital total utilizado y la tasa de utilidad ordinaria), no se puede tomar un solo indicador como representativo de ambos.

GRAFICA 3-1



La gráfica 3-1(b) muestra las distribuciones de x_1 y x_2 tipificados. No se nota gran cambio, empero x_1 y x_2 medidos en u_1 y u_2 tienen 1 como sus varianzas, y en consecuencia el eje mayor de la elipse tiene la inclinación de 45°. La correlación de estos u_1 y u_2 sigue siendo evidentemente igual a la de x_1 y x_2.

Si determinamos el eje focal (eje mayor) como z_1 y eje menor como z_2 y giramos la elipse como se observa en la gráfica 3-1(c), indudablemente en las coordenadas nuevas de z_1 y z_2 desaparece la correlación. Además comparando con cualquier eje posible de coordenadas en este plano, la varianza llega al máximo sobre el eje z_1 y al mínimo sobre el eje z_2.

En este caso, la transformación es únicamente giratoria y por lo tanto la variación de n puntos no se ha cambiado, en otras palabras, la suma de cuadrados de las distancias de n puntos medidas desde el centro de gravedad en dos sistemas de coordenadas son los dos miembros de la siguiente ecuación (3-1) y con congruentes.

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \sum_{\alpha=1}^{n} (x_2 - \bar{x}_2)^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (z_1 - \bar{z}_1)^2 + \sum_{\alpha=1}^{n} (z_2 - \bar{z}_2)^2 \qquad \ldots(3\text{-}1)$$

El primer término del miembro derecho es el primer componente principal y el segundo es el segundo componente principal y éstos son expresados en la siguiente forma.

El primer componente principal:

$$z_1 = \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 = x_1 \cos\theta + x_2 \operatorname{sen}\theta \qquad \ldots(3\text{-}2)$$

donde $\ell_1^2 + \ell_2^2 = 1$

utilizando u_1 y u_2, o en otras palabras, los valores tipificados de x_1 y x_2:

$$z_1 = u_1 \cos 45° + u_2 \operatorname{sen} 45° = (u_1 + u_2)/\sqrt{2} \qquad \ldots(3\text{-}3)$$

Asimismo el segundo componente principal:

$$z_2 = m_1 x_1 + m_2 = -x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta \qquad \ldots(3\text{-}4)$$

donde $m_1^2 + m_2^2 = 1$

utilizando u_1, u_2 tipificados:

$$z_2 = -u_1 \operatorname{sen} 45° + u_2 \cos 45° = (u_2 - u_1)/\sqrt{2} \qquad \ldots(3\text{-}5)$$

En la gráfica 3-1(b), la varianza total es de 2, por la tipificación de u_1 y u_2, en contraste a ello, z_1 tiene varianza de $1 + r$ y z_2 tiene de - $1 - r$, es decir, si el coeficiente de correlación del caso que tratamos es del orden de 0.88 la varianza de z_1 es $1 + 0.88 = 1.88$ y la de z_2 es $1 - 0.88 = 0.12$. La proporción de varianza de z_1 con respecto a la varianza total - (se conoce como "tasa de contribución") es de $1.88/2 = 0.94$ y la de $z_2 = 0.12/2 = 0.06$. En un caso como éste, la información sobre el eje de z_2 es considerablemente reducida y por lo tanto se considera únicamente la variación sobre z_1 ignorando z_2. Lo que está haciendo aquí se dice: "La información de $p = 2$ índices x_1 y x_2 se sintetizó en un índice global z_1 con la - pérdida de 6%".

Lo que suele ocurrir con los métodos tradicionales es que por las - causas anteriormente mencionadas, aún utilizando los mismos datos, el resultado de una evaluación varía según el analizador. Con la política de evaluación (establecida por la gerencia, la junta de ejecutivos, etc.) una vez proporcionada, lo ideal sería que el resultado de una evaluación empresarial no variara cualquiera que fuese el analizador.

Las ventajas de la aplicación del método PCA para sintetizar la información contenida en los índices financieros y en lo subsecuente analizar la empresa con estos indicadores globales son las que siguen.

1) Se pueden utilizar los indicadores de unidades diferentes por ejemplo, cantidades absolutas como la venta total, el capital contable y proporciones como tasa de utilidad, rotación etc., tipificando con la media y desviación estándar.

2) Los indicadores sintetizados (componentes principales) se obtienen con la ponderación evitando el mínimo posible de pérdidas de información con la consideración de correlaciones existentes entre los indicadores originales.

3) Por no guardar correlaciones entre los componentes principales, éstos se pueden sumar, si así requiere la política de evaluación.

4) Una vez obtenidos los coeficientes de cada componente principal para ponderar los índices, por sustituir los datos x_i de cada empresa, por z , se adquiere la puntuación por componentes principales. Y con esta puntuación se puede evaluar cada empresa en una forma cuantitativa.

5) La evaluación por el método PCA se puede considerar como una evaluación relativa dentro de la muestra a la cual se le aplicó el método PCA.

2) DEFINICION DEL METODO PCA

(1) Componentes Principales Obtenidos de dos Variables

Como se ha observado, cuando son 2 variables que tienen correlación, la desviación del conjunto va a tener gráficamente la forma de una elipse. Al tipificar todos los datos, es decir, dividir la diferencia de cada dato con su respectiva media entre su desviación estándar, este conjunto muestral consigue cero como la media y 1 como la desviación estándar en cada desviación, y su eje focal intersecta con los dos ejes u_1 y u_2 en el punto de origen y tiene 45° de declive (pendiente = 1).

Como se ha señalado en los párrafos anteriores, este eje focal de 45° de inclinación es el primer componente principal y el eje menor es el segundo.

La transformación lineal que convierte de las coordenadas u_1 y u_2 a las de z_1 y z_2 es como se conoce popularmente, la multiplicación por la matriz de transformación giratoria que señala en lo siguiente:

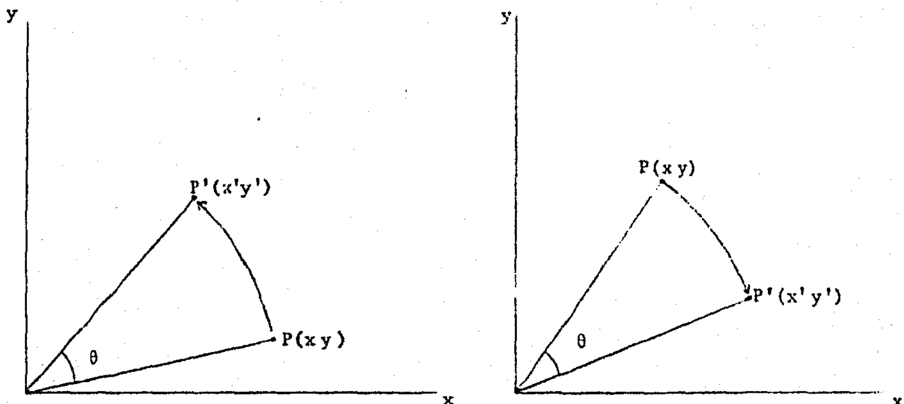
$$R\ (\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Sabemos que el producto de esta matriz multiplicado por un vector de dos elementos da el resultado de una transformación giratoria del sentido - opuesto de las manecillas del reloj, y si se cambian $-\operatorname{sen}\theta$ por $\operatorname{sen}\theta$ de - la misma matriz o bien, multiplicando el vector renglón por esta matriz original efectúa esta transformación en el sentido contrario, o es lo mismo - decir, en el mismo sentido que las manecillas del reloj (gráfica 3-2).

Bien, el caso que nos interesa es el del mismo sentido de las manecillas del reloj, puesto que el primer componente principal, o sea, el eje focal de la elipse se debe de quedar como abscisa.

Así tenemos las siguientes fórmulas:

GRAFICA 3-2



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o o

$$(x'y') = (x\ y) \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (x'y') = (x\ y) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1\cos\theta + u_2\operatorname{sen}\theta \\ -u_1\operatorname{sen}\theta + u_2\cos\theta \end{pmatrix} \\ \text{o} \\ (z_1\ z_2) = (u_1\ u_2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = (u_1\cos\theta + u_2\operatorname{sen}\theta \quad -u_1\operatorname{sen}\theta + u_2\cos\theta) \end{array}\right\} \quad \ldots(3\text{-}6)$$

De cualquier modo, z_1 y z_2 quedan:

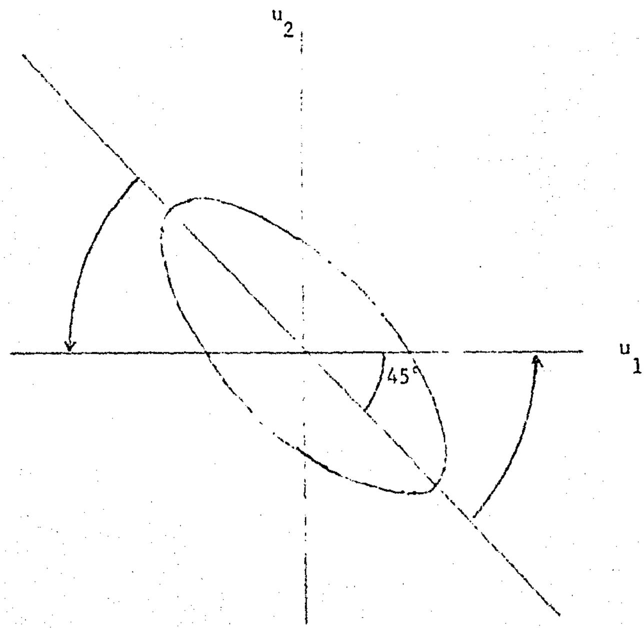
$$\left.\begin{array}{l} z_1 = u_1\cos\theta + u_2\operatorname{sen}\theta \\ z_2 = -u\operatorname{sen}\theta + u_2\cos\theta \end{array}\right\} \quad \ldots(3\text{-}7)$$

Dado que sen 45° = cos 45° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= (u_1 + u_2)\frac{1}{\sqrt{2}} = (u_1 + u_2)/\sqrt{2} \\ z_2 &= (-u_1 + u_2)\frac{1}{\sqrt{2}} = (u_2 - u_1)/\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3\text{-}8)$$

Estas fórmulas son aplicables solamente cuando $r > o$, es decir, cuando el coeficiente de correlación es positivo, y si el coeficiente de correlación es negativo, sólo hay que cambiar z_1 por z_2 y u_1 por u_2, ya que esta vez se trata de una transformación giratoria del sentido contrario como se demuestra en la gráfica 3-3 y en las ecuaciones (3-9) y (3-10).

GRAFICA 3-3



$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1\cos\theta & -u_1\text{sen}\,\theta \\ u_1\text{sen}\,\theta + & u_2\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \ldots(3\text{-}9)$$

Dado que sen45° = cos45° = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z_1 = (u_1 - u_2)/\sqrt{2}$$
$$z_2 = (u_1 + u_2/\sqrt{2} \qquad \ldots(3\text{-}10)$$

Las propiedades de estos componentes principales son las siguientes*:

i) Las coordenadas de los n puntos en el eje z_1 tienen máxima dispersión, o en otras palabras, z_1 está elegido en tal forma que la varianza sea máxima:

ii) La dispersión en las coordenadas del eje z_2 es mínima, estos implica que es el eje en el cual la suma de cuadrados de las coordenadas es menor que cualquier otro eje posible de escoger.

Si representamos las coordenadas de n puntos en dos planos como - - - $(u_{\alpha 1}, u_{\alpha 2})$ y $(z_{\alpha 1}, z_{\alpha 2})$ donde $\alpha = 1,2,\ldots n$; la suma de cuadrados S se escribirá:

$$S = \sum_{\alpha=1}^{n} (z_{\alpha 1}{}^2 + z_{\alpha 2}{}^2) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ (u_{\alpha 1} + u_{\alpha 2})^2 + (u_{\alpha 2} - u_{\alpha 1})^2 \right\} =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (u_{\alpha 1}{}^2 + u_{\alpha 2}{}^2) \qquad \ldots(3\text{-}11)$$

* La mayor parte de la descripción acerca de estas propiedades se tomó de - "Johokajidai no Keiei-bunseki" de T. Okuno y B. Yamada editado en Tokyo,- 1978.

En esta ecuación, el último miembro es un valor que se fija sólo obteniendo los datos de n puntos y es la suma de cuadradas de las distancias de n puntos medidas del centro de gravedad (0,0). Por consiguiente, maximizar $\sum_{\alpha=1}^{n} z_{\alpha 1}^{2}$ que es (n-1) veces de la varianza de z_1 es lo mismo que minimizar $\sum_{\alpha=1}^{n} z_{\alpha 2}^{2}$ que es (n-1) veces de la dispersión de z_2.

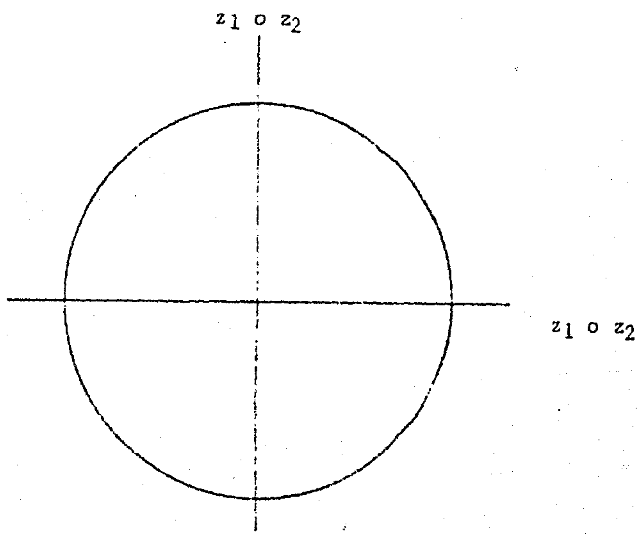
iii) El coeficiente de correlación entre z_1 y z_2 es cero (es evidente en la gráfica 3-1(c).

iv) Si es positiva la correlación entre x_1 y x_2, la varianza de z_1 (denominaremos λ_1) es $1 + r$ y la de z_1 (λ_2) es $1 - r$).

Retomando el ejemplo anterior, r era 0.88 y por lo tanto $\lambda_1 = 1.88$. y $\lambda_2 = 0.12$. Como la suma de las varianzas de los dos componentes es igual al número de variables (p=2), las tasas de contribución de la información de z_1 y z_2 son respectivamente $\lambda_1/2 = 0.94$ y $\lambda_2/2 = 0.06$. Esto implica que el 94% de toda la información recogida por estos dos componentes principales está contenida dentro de z_1 y la de z_2 es sólo del orden de 6%. En realidad se puede pensar que mientras más grande sea la varianza es mayor la información contenida sobre la diferencia entre las empresas ya que si la varianza es igual a cero, no nos proporciona ninguna diferencia entre las empresas cualesquiera. En este sentido, se puede ignorar el componente z_2, que contiene tan poca información que es 6% de la totalidad, y se puede considerar únicamente el primer componente principal z_1. Este es un índice sintetizado de x_1 y x_2 y la pérdida de la información por considerar únicamente en éste es de 6%.

En un caso general de tomar sólo el primer componente principal e ig nogar el segundo, si se trata de dos variables en total, la pérdida de in-- formación es (1 - r)/2. Si r es igual a $\pm$ 0.9, la pérdida será sólo de - 5%, si r es $\pm$ 0.5, 25% de la información se pierde y si no existe correla-- ción, es decir, si r = 0, la información de cada componente es de 50% y no hay diferencia de que quede z1 en la abscisa o en la ordenada y viceversa - (gráfica 3-4), lo cual significa que en tal caso no se puede escoger un solo

GRAFICA 3-4



componente. Esto es indiscutible, puesto que si no existe ninguna correla-- ción entre dos indicadores, es porque éstos son independientes entre sí y por consiguiente cada uno de ellos debe de ser tratado independientemente. Y si es así, la suma de las evaluaciones en cuanto a estos indicadores no tiene - problema de una suma repetida de informaciones.

Por razones expuestas en párrafos anteriores, la aplicación del método PCA se efectúa solamente cuando hay correlación entre variables.

Sin embargo, es necesario aclarar que se pueden obtener los componentes principales partiendo de la matriz de varianza-covarianza, en diferencia de lo anteriormente mostrado que se utilizan los valores tipificados de los datos.

Cuando se utilicen los datos originales sin tipificarlos, la obtención del primer componente principal, por su definición de maximizar su varianza, es maximizar la siguiente ecuación:

$$\mathrm{Var}\,[z_1] = \sum_{\alpha=1}^{n} (z_{\alpha 1} - z_1)^2/(n-1) = \sum_{\alpha=1}^{n} \quad \sum_{i=1}^{p} \ell_{1i}\ (x_{\alpha i} - \bar{x}_i)\ ^2/(n-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \quad \sum_{i'=1}^{p} \ell_{1i}\, \ell_{1i'} \sum_{\alpha=1}^{n} (x_{\alpha i} - \bar{x}_i)\ (x_{\alpha i'} - \bar{x}_{i'})/(n-1) = \sum_{i=1}^{p} \quad \sum_{i'=1}^{p} \ell_{1i}\, \ell_{1i'} V_{ii'} \qquad \ldots(3\text{-}12)$$

Donde $V_{ii'}$ es la covarianza de x_i y $x_{i'}$ (si $i = i'$ es la varianza de x_i)

Esta es la forma general, empero nuestro caso es de dos variables y entonces tenemos:

$$\mathrm{Var}\ z_1 = \ell_{11}^{\ 2}\ V_{11} + 2\ell_{11}\ \ell_{12}\ V_{12} + \ell_{12}^{\ 2}\ V_{22} \qquad \ldots(3\text{-}13)$$

Maximizar esta ecuación bajo restricción de $\ell_{11}^{\ 2} + \ell_{12}^{\ 2} = 1$, se utiliza el famoso multiplicador de Lagrange y queda como sigue:

$$Q = \ell_{11}^{\ 2} + V_{11} + 2\ell_{11}\ \ell_{12}\ V_{12} + \ell_{12}^{\ 2}\ V_{22} - \lambda\,(\ell_{11}^{\ 2} + \ell_{12}^{\ 2} - 1) \qquad \ldots(3\text{-}14)$$

Las derivadas parciales con respecto a ℓ_{11} y ℓ_{12} igualando a cero, se quedan:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \ell_{11}} &= 2(\ell_{11} V_{11} + \ell_{12} V_{12} - \lambda \ell_{11}) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \ell_{12}} &= 2(\ell_{12} V_{22} + \ell_{11} V_{12} - \lambda \ell_{12}) = 0 \end{aligned}\right\}$$

por lo tanto

$$\left.\begin{aligned} (V_{11} - \lambda)\, \ell_{11} + V_{12}\, \ell_{12} = 0 \\ V_{12}\, \ell_{11} + (V_{22} - \lambda)\, \ell_{12} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3\text{-}15)$$

La solución trivial para este sistema de ecuaciones es $\ell_{11} = \ell_{12} = 0$, sin embargo, esta solución no tiene sentido y además no cumple con $\ell_{11}^2 + \ell_{12}^2 = 1$, por lo tanto para que tenga solución diferente a cero, estas dos ecuaciones no deben ser linealmente independientes y los coeficientes de una son proporcionales a los de otra. De esta manera;

$$\frac{V_{11} - \lambda}{V_{12}} = \frac{V_{12}}{V_{22} - \lambda} \qquad \ldots(3\text{-}16)$$

$$\therefore (V_{11} - \lambda)(V_{22} - \lambda) - V_{12}^2 = 0$$

$$\therefore \lambda^2 - (V_{11} + V_{22})\lambda + (V_{11} V_{22} - V_{12}^2) = 0 \qquad \ldots(3\text{-}17)$$

Resolviendo la ecuación (3-17), tenemos:

$$\lambda = \frac{(V_{11} + V_{22}) \pm \sqrt{(V_{11} + V_{22})^2 - 4\,(V_{11} V_{22} - V_{12}^2)}}{2}$$

$$= \frac{(V_{11} + V_{22}) \pm \sqrt{(V_{11} - V_{22})^2 + 4V_{12}^2}}{2} \qquad \ldots(3\text{-}18)$$

Denominaremos a lo que esté contenido en la raíz cuadrada como Δ, - entonces como $\Delta > 0$, esta ecuación siempre tiene solución real no negativa, es decir:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0 \qquad \ldots(3\text{-}19)$$

Para obtener ℓ_{11} y ℓ_{12}, se sustituye λ_1 en (3-15), entonces (3-15) - queda:

$$\ell_{12} = -(V_{11} - \lambda_1)\ell_{11}/V_{12} = -\left\{(V_{11} - V_{22} + \sqrt{\Delta}\right\} \ell_{11}/2V_{12} \qquad \ldots(3\text{-}20)$$

Recordamos que $\ell_{11}^2 + \ell_{12}^2 = 1$, y por lo tanto:

$$\ell_{11}^2 + \ell_{12}^2 = \ell_{11}^2 \left\{1 + \frac{(V_{11} - \lambda_1)^2}{V_{12}^2}\right\} = 1$$

$$\therefore \ell_{11}^2 = \left\{1 + \frac{(V_{11} - V_{22} - \sqrt{\Delta})^2}{4V_{12}^2}\right\}^{-1}$$

$$= 4V_{12}^2 / \left\{4V_{12}^2 + (V_{11} - V_{22})^2 + \Delta - 2\,(V_{11} - V_{22})\sqrt{\Delta}\right\}$$

$$= 2V_{12}^2 \left\{\Delta + (V_{11} - V_{22})\sqrt{\Delta}\right\} / \left\{\Delta^2 - (V_{11} - V_{22})^2\ \sqrt{\Delta}\right\}$$

$$= \left\{1 - (V_{11} - V_{22})/\sqrt{\Delta}\right\}/2 \qquad \ldots(3\text{-}21)$$

Como un caso particular, si $V_{11} = V_{22}$, se tiene que $\ell_{11}^2 = 1/2$ y esto coincide con el caso de los datos tipificados y a su vez, es lo mismo, - que obtener los componentes principales partiendo de la matriz de correlación. Esto es, por la razón de que si $V_{11} = V_{22}$, su eje focal del conjunto de los datos se sitúa a 45°(o 135°) de la abscisa y lo que necesita es girar ± 45° para que su eje focal coincida con la abscisa. Y por otro lado,- la matriz de correlación se puede considerar como la matriz de varianza-covarianza de los datos tipificados (con la varianza = r y sin duda $R_{11} = R_{22} = 1$, y por lo tanto también $\ell_{11} = 1/\sqrt{2}$.

También es importante mencionar que se puede aplicar el método PCA - teniendo como punto de partida, la matriz de sumas de cuadrados y productos. Es indiscutiblemente cierto que maximizar la varianza de z_1 es lo mismo que maximizar (n-1) veces de la varianza de z_1. Esto es lo que señalan las - ecuaciones (3-22) y (3.23).

$$V_{ij} - S_{ij}/(n-1) \qquad \ldots(3\text{-}22)$$

la ecuación (3-12) se convierte en:

$$(n-1)\ \mathrm{Var}\ [z_1] = \ell_{11}^2\ S_{11} + \ell_{12}^2\ S_{22} + 2\ell_{11}\ell_{12}\ S_{12} \qquad \ldots(3\text{-}23)$$

Y como se observa en (3.23), la única diferencia es que se sustituyó $S_{ii'}$ por $V_{ii'}$, por lo cual el resultado para ℓ_{11} tiene la diferencia de - - $S_{ii'}$ por $V_{ii'}$:

$$\ell_{11}^2 = \left\{ 1 + (S_{11} - S_{22})/\sqrt{\Delta} \right\}/2 \qquad \ldots(3\text{-}24)$$

donde $\Delta = (S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2$

En este caso, también si $S_{11} = S_{22}$, ℓ_{11} queda $1/\sqrt{2}$ y esto es obvio, ya que si $S_{11} = S_{22}$:

$$S_{11}/(n-1) = S_{22}/(n-1) = V_{11} = V_{22}$$

Lo que fue demostrado acerca del caso de los datos tipificados (o de la matriz de la correlación), era que si $r = 0$, es decir, si no existe correlación alguna entre las dos variables, no se podría escoger cuál sería z_1.

En el caso del método PCA teniendo como punto de partida la matriz de varianza-covarianza, o bien la matriz de sumas de cuadrados y productos, sí es posible fijar z_1 y z_2 aunque no haya correlación a menos que sea $V_{11} = V_{22}$ (o $S_{11} = S_{22}$), como se señala en lo siguiente:

Cuando $r = 0$, también $V_{12} = V_{21} = 0$ y a su vez $S_{12} = S_{21} = 0$, por la definición de que $r = S_{12}/\sqrt{S_{11}S_{22}} = V_{12}/\sqrt{V_{11}V_{22}}$.

Ahora, si tenemos una matriz de varianza-covarianza donde $V_{12} = V_{21} = 0$ y $V_{11} \neq V_{22}$ (como se mostró anteriormente, que si $V_{11} = V_{22}$ resulta lo mismo que el caso de partir de la matriz de correlación), (3-18) se convierte en:

$$\lambda = \frac{(V_{11} + V_{22}) \pm \sqrt{(V_{11} - V_{22})^2}}{2} = \frac{V_{11} + V_{22} \pm (V_{11} - V_{22})}{2} \qquad \ldots(3\text{-}25)$$

En el segundo miembro de (3-25), como $\Delta > 0$ dado que $V_{11} \neq V_{22}$, esta ecuación tiene dos soluciones para λ (λ_1 y λ_2) y no hay más necesidad que denominar como λ_1 al mayor valor entre los valores de λ.

Un ejemplo sencillo es el caso en el cual tenemos la matriz de varianza-covarianza siguiente:

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces $\lambda = \dfrac{6 \pm 4}{2} = 3 \pm 1$

$\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 2$

Los valores para ℓ_{11} y ℓ_{12} para λ_1 y ℓ_{21} y ℓ_{22} para λ_2 se pueden obtener como eigenvector de V como se expondrá en los párrafos posteriores, por consiguiente:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} \\ \ell_{12} \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \ell_{11} \\ \ell_{12} \end{pmatrix} \qquad \ldots(3\text{-}26)$$

Resolviendo esta ecuación para ℓ_{11} y ℓ_{12},

$$\left.\begin{aligned} 4\ell_{11} &= 4\ell_{11} \\ 4\ell_{12} &= 4\ell_{12} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3\text{-}27)$$

(3-27) implica que ℓ_{11} puede ser cualquier número (solución indeterminada) y ℓ_{12} es igual a cero. Bajo la restricción de $\ell_{11}^2 + \ell_{12}^2 = 1$, $\ell_{11}^2 = 1$ y $\ell_{11} = \pm 1$.

Sustituyendo este valor en el segundo miembro de (3-2) tenemos:

$$z_1 = \pm x_1 \qquad \ldots(3\text{-}28)^*$$

Análogamente podemos adquirir los valores de ℓ_{21} y ℓ_{22}:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{21} \\ \ell_{22} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \ell_{21} \\ \ell_{22} \end{pmatrix} \qquad \ldots(3\text{-}29)$$

$$\begin{aligned} 4\ \ell_{21} &= 2\ell_{21} \\ 2\ \ell_{22} &= 2\ell_{22} \end{aligned} \qquad \ldots(3\text{-}30)$$

Esta vez, tenemos: $\ell_{21} = 0$ y ℓ_{22} es indefinido, sin embargo, como - $\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = 1, \ell_{22} = \pm 1$.

y así z_2 queda:

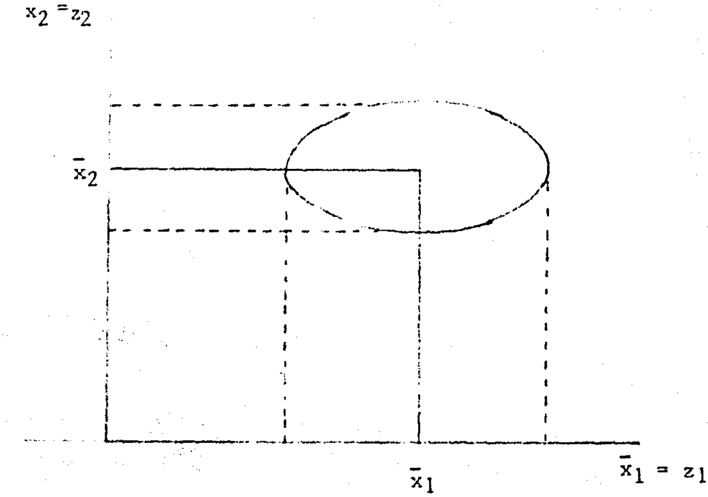
$$z_2 = \pm x_2 \qquad \ldots(3\text{-}31)$$

Obviamente (3-28) y (3-31) no ejecutan ninguna transformación girato-ria por una razón también obvia de que si entre las variables no existe co-rrelación, no es relevante aplicar el método PCA que se trata de eliminar la correlación y por ende, los valores originales no sufren ninguna alteración.

* Matemáticamente no se puede determinar el signo, empero dentro del marco de aplicación práctica, se escoge el signo positivo para conservar el signo de x. Esto se puede generalizar para todos los casos. Por ejemplo, el caso - de la gráfica 3-1, ¿por qué no girar la figura de (b) a 135°hacia el sentido opuesto de las manecillas del reloj? Obviamente, es posible, y también se elimina la correlación, sin embargo, por la conveniencia de que se con-serve el signo de las variables originales, no tiene aceptación.

Se puede observar este caso en la Gráfica 3-5.

GRAFICA 3-5



Lo que concluye de lo que se ha expuesto hasta aquí, es que partiendo de la matriz de cuadrados y productos o de la matriz de varianza-covarianza, se puede fijar z_1 como el primer componente principal, aunque no tengan x_1 y x_2 una correlación, sin embargo, si el análisis PCA trata de eliminar la correlación entre las variables, no existe mérito en aplicarlo en un caso sin correlación.

Por otra parte, no debemos de olvidar que existe una diferencia entre partir de la matriz de varianza-covarianza y de los datos tipificados, que concierne a la tasa de contribución.

Se había mencionado que la tasa de contribución, o en otras palabras la proporción de la información contenida en un componente principal es $\lambda/2 = (1 \pm r)/2$ si se utilizan los datos tipificados. En el caso general, esta tasa de contribución se expresa como el cociente de entre la suma de V_{11} y V_{22}, o en expresiones matemáticas:

$$\text{tasa de contribución de } z_1 = \lambda_1/(V_{11} + V_{22})$$

$$\text{tasa de contribución de } z_2 = \lambda_2/(V_{11} + V_{22}) \qquad \ldots(3\text{-}32)$$

como $\lambda_1 + \lambda_2 = V_{11} + V_{22}$,

$$\text{tasa total de contribución} = \lambda_1/(V_{11} + V_{22}) + \lambda_2/(V_{11} + V_{22})$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2)/(V_{11} + V_{22}) = 1 \qquad \ldots(3\text{-}33)$$

Lo que resulta en el ejemplo que se estaba tratando es:

$$\text{contribución de } z_1 = 4/(4 + 2) = \frac{2}{3}$$

$$\text{contribución de } z_2 = 2/(4 + 2) = \frac{1}{3} \qquad \ldots(3\text{-}34)$$

(3-34) demuestra que aunque no tengan las variables una correlación, si $V_{11} = V_{22}$, siempre la información es mayor en la variable con una varianza superior; algo que concuerda con el argumento señalado anteriormente de que mientras sea mayor varianza, contiene más información acerca de diferencias entre las empresas.

Se puede decir que el caso de utilizar datos tipificados es un caso particular ya que la suma de los elementos en la diagonal principal de la -

matriz de correlación es $R_{11} + R_{22} = 1 + 1 = 2$, y entonces tenemos lo mencionado ya anteriormente.

Ahora lo que hace falta es esclarecer la relación que existe entre el eigenproblema y el método PCA.

Se decía que la expresión (3-16) representaba la condición de que las ecuaciones (3-15) no eran independientes entre sí para que tengan la solución no trivial, y esta condición se puede expresar en la manera siguiente usufructuando el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} V_{11}-\lambda & V_{12} \\ V_{21} & V_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(3\text{-}35)$$

Esta, a la vez se puede expresar:

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \lambda\cdot 1 & V_{12} - \lambda\cdot 0 \\ V_{21} - \lambda\cdot 0 & V_{22} - \lambda\cdot 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(3\text{-}36)$$

Por lo tanto, con los símbolos de matrices:

$$|\mathbf{V} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \qquad \ldots(3\text{-}37)$$

Donde $\mathbf{I}$ es la matriz de identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Como se puede apreciar, (3-37) es la ecuación para obtener soluciones de λ en un eigen-problema en el que se plantea:

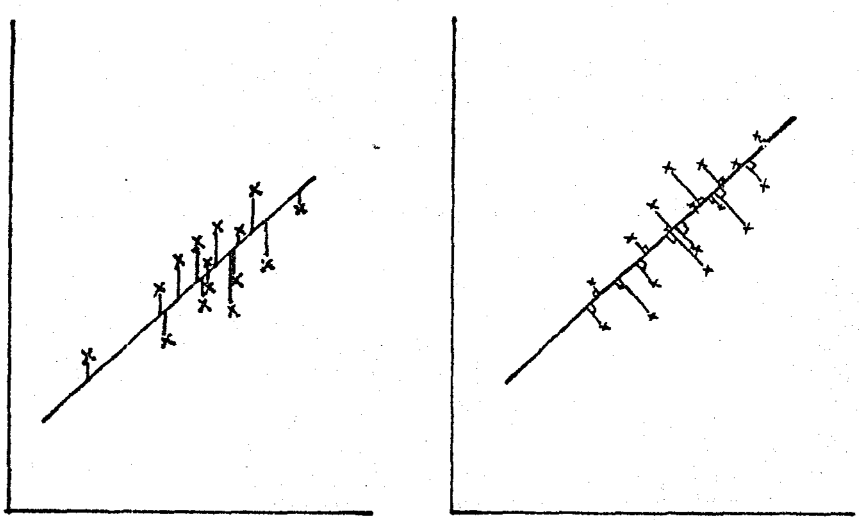
$$\mathbf{V}\,\ell = \lambda\,\ell \qquad \ldots(3\text{-}38)$$

Por lo tanto obtener los coeficientes de los componentes principales es resolver un eigen-problema de una matriz ya sea de sumas de cuadrados y productos o de varianza-covarianza o bien la de correlación.

Por otra parte, se puede cuestionar si el primer componente z_1 es el mismo que la línea de regresión, puesto que z_1 como el eje focal de la elipse del conjunto de datos pasa por el centro de ésta y estamos enterados de que la línea de regresión, también.

Pues, efectivamente los dos coinciden con respecto a minimizar la dispersión de los n puntos para establecer la línea, sin embargo, existe una diferencia en el método de minimizarla. La fijación de la línea de regresión se realiza al minimizar la suma de cuadrados de las diferencias de n puntos con la línea medidas en la ordenada, y en contraste a ello, en el método PCA lo que se trata de minimizar es la dispersión medida en distancias euclidianas de los puntos de la línea z_1 (o en otra expresión, las longitudes de las líneas fijadas de los n puntos al eje z_1 de tal modo que tengan ángulo recto con el eje z_1), como se representa en la Gráfica 3-6.

GRAFICA 3-6

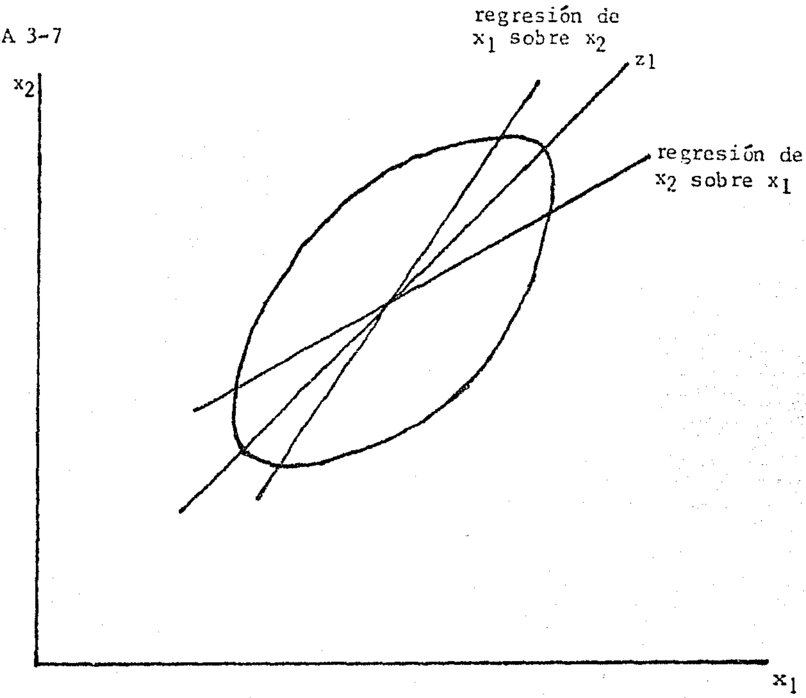


a) Línea de regresión

b) Primer componente principal (z_1)

Matemáticamente existen dos líneas de regresión, una es la de x_2 sobre x_1 y otra es la de x_1 sobre x_2 (aunque prácticamente se utiliza sólo una dándole alguna significación según el análisis del cual se trate), y como se muestra en la Gráfica 3-7, siempre z_1 pasa por medio de las dos rectas de regresión.

GRAFICA 3-7



Sería conveniente aclarar algunos puntos acerca de esta relación con líneas de regresión: Primero, si la varianza de x_1 es igual a la varianza de x_2 (o bien, si se parte el análisis de la matriz de correlación), el eje z_1 divide el ángulo que forman las dos líneas de regresión en dos partes -

iguales, Segundo , si $r = 1$, como esto quiere decir que no hay ninguna dispersión, estas tres rectas se coinciden y además pasan sobre todos los n puntos. Y por último, si $r = 0$, la recta de regresión de x_2 sobre x_1 será paralela a la abscisa (eje de x_1) y la de x_1 sobre x_2 será paralela a la ordenada (eje de x_2) y ya hemos visto que si la varianza de x_1 es igual a la de x_2, (o utilizando los datos tipificados), z_1 es indefinido, sin embargo, si son distintas las dos varianzas, z_1 se determina para la variable que tenga mayor varianza.

Para finalizar esta sección cabe señalar un concepto que se llama "cargo de factor (factor loading)" el cual se refiere a la correlación existente entre x_i y z_k, y esto se computa por medio de las siguientes ecuaciones:

$$r(z_k, x_i) = \frac{\text{Cov}\left[z_{k1}, x_i\right]}{\text{Var}\left[x_k\right] \cdot \text{Var}\left[x_i\right]} = \frac{\sum \ell_{ki'} V_{ii'}}{\sqrt{\lambda_k V_{ii}}} = \frac{\lambda_k \ell_{ki}}{\sqrt{\lambda_k V_{ii}}} = \frac{\sqrt{\lambda_k}\, \ell_{ki}}{s_i} \quad \ldots (3\text{-}39)$$

donde $s_i = \sqrt{V_{ii}}$ que es la desviación estándar de i-ésima variable.

La ecuación (3-39) se convierte en (3-40) si el análisis se parte de la matriz de correlación, puesto que V_{ii} se sustituye por $R_{ii} = 1$:

$$r(z_k\, x_i') = \frac{\lambda_k \ell_{ki}}{\sqrt{\lambda_k \cdot 1}} = \sqrt{\lambda_k}\, \ell_{ki} \quad \ldots (3\text{-}40)$$

donde x_i' es la variable tipificada de x_i.

Entonces, en el caso ejemplar que tratabamos donde se utilizan los datos tipificados y que la coeficiente de correlación era de 0.88, tenemos que:

$r(z_1, x_1) = 0.96953597, \quad r(z_1, x_2) = 0.96953597$

$r(z_2, x_1) = 0.24495, \quad r(z_2, x_2) = 0.24495$

Y se conoce que la suma total de los cuadrados de los cargos de factor con respecto a un componente principal z_k es equivalente a la cantidad de información contenida por el mismo componente principal, lo cual se expresa en forma de ecuación:

$$\sum_{i=1}^{p} r^2(z_k, x_i) = \lambda_k \qquad \ldots(3\text{-}41)$$

(2) Componentes principales con más de dos variables (p > 2)

Cuando se trata de variables de un número mayor que dos, también el método PCA es aplicable. En dado caso, los componentes principales se expresan en modo análogo al caso de dos variables, como se señalan a continuación:

$$\left.\begin{array}{l}
z_1 = \ell_{11}x_1 + \ell_{12}x_2 + \ldots. + \ell_{1p}x_p = \sum \ell_{1i}x_i \\
z_2 = \ell_{21}x_1 + \ell_{22}x_2 + \ldots. + \ell_{2p}x_p = \sum \ell_{2i}x_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_k = \ell_{k1}x_1 + \ell_{k2}x_2 + \ldots. + \ell_{kp}x_p = \sum \ell_{ki}x_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_k = \ell_{k1}x_1 + \ell_{m2}x_2 + \ldots. + \ell_{mp}x_p = \sum \ell_{mi}x_i
\end{array}\right\} \qquad \ldots(3\text{-}42)$$

donde;

$$\left.\begin{array}{l}
\ell_{11}^2 + \ell_{12}^2 + \ldots.. + \ell_{1p}^2 = \sum \ell_{1i}^2 = 1 \\
\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 + \ldots.. + \ell_{2p}^2 = \sum \ell_{2i}^2 = 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ell_{k1}^2 + \ell_{k2}^2 + \ldots.. + \ell_{kp}^2 = \sum \ell_{ki}^2 = 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ell_{m1}^2 + \ell_{m2}^2 + \ldots.. + \ell_{mp}^2 = \sum \ell_{mi}^2 = 1
\end{array}\right\} \qquad \ldots(3\text{-}43)$$

Lo que está expresado por (3-42) y (3-43) es que todos los componentes se determinan por medio de las ecuaciones del primer grado de las x_i ($i = 1,2,\ldots,p$), y la suma de cuadrados de los coeficientes de cada ecuación es siempre 1.

La obtención de los coeficientes ℓ_{ki} es la ampliación del caso de dos variables. Esto es maximizar:

$$\mathrm{Var}\ [z_1] = \sum_{\alpha=1}^{n} (z_{\alpha 1} - \bar{z}_1)^2/(n-1) = \sum_{\alpha=1}^{n} \quad \sum_{i=1}^{p} \ell_{1i}(x_i - \bar{x}_i) \quad ^2/(n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{p} \ \sum_{i'=1}^{p} \ell_{1i}\ell_{1i'} \ \sum_{\alpha=1}^{n} (x_{\alpha i} - \bar{x}_i)\ (x_{\alpha i} - \bar{x}_i)/(n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{p} \ \sum_{i'=1}^{p} \ell_{1i}\ell_{1i'}\ V_{ii'} \qquad \ldots(3\text{-}44)$$

bajo la restricción de (3-43) utilizando el multiplicador de Lagrange, entonces:

$$Q = \sum_{i=1}^{p} \ \sum_{i'=1}^{p} \ \ell_{1i}\ell_{1i'}\ V_{ii'} - \lambda_1 \ \left(\sum_{i=1}^{p} \ \ell_{1i}{}^2 - 1\right) \Rightarrow \mathrm{Max.} \qquad \ldots(3\text{-}45)$$

La derivada de esta última se queda:

$$\frac{\partial Q}{\partial \ell_{1i}} = 0 \ \rightarrow \ \sum_{i'=1}^{n} \ \ell_{1i}\ V_{ii'} - \lambda\ell_{1i} = 0 \ (i = 1,2,\ldots,p) \qquad \ldots(3\text{-}46)$$

En realidad, la ecuación (3-46) es un conjunto de ecuaciones para $i = 1,2,\ldots,p$, por lo tanto estas ecuaciones se pueden expresar para distintas i es como siguen:

$$\left.\begin{array}{l}(V_{11}-\lambda)\,\ell_{11}+V_{12}\ell_{12}+\ldots\ldots+V_{1p}\ell_{1p}=0\\ V_{12}\ell_{11}+(V_{22}-\lambda)\ell_{12}+\ldots\ldots+V_{2p}\ell_{1p}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ V_{1p}\ell_{11}+V_{2p}\ell_{12}+\ldots\ldots+(V_{pp}-\lambda)\ell_{1p}=0\end{array}\right\} \qquad \ldots(3\text{-}46)'$$

Como esto es un sistema de p ecuaciones del primer grado para ℓ_{11}, $\ell_{12}, \ldots\ldots, {}_{1p}$ y todos los consosantes son ceros, lo cual proporciona como solución trivial, $\ell_{11} = \ell_{12} = \ldots = \ell_{1p} = 0$. Sin embargo, ésta no tiene sentido y además no cumple con (3-43) y en consecuencia, las p ecuaciones deben de ser linealmente dependientes, lo cual se puede expresar:

$$|\mathbf{V} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} V_{11}-\lambda & V_{12} \ldots\ldots & V_{1p} \\ V_{12} & V_{22}-\lambda \ldots & V_{2p} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ V_{1p} & V_{2p} \ldots\ldots & V_{pp}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(3\text{-}47)$$

La expresión (3-47) es un polinomio del grado p y por la matriz V que es de signo no negativo, las p soluciones son todos reales no negativos. Entonces se colocan en el orden descendente y se denominan en la siguiente forma:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots\ldots \geq \lambda_p \geq 0 \qquad \ldots(3\text{-}48)$$

Estas λ_k donde $k = 1,2,\ldots,p$ se conocen como eigen-valores (o valores propios) de la matriz **V**.

Sustituyendo una λ_k en el sistema de ecuaciones (3-46) para que por lo menos una de estas p ecuaciones sea linealmente independiente, se resuelven (p-1) ecuaciones restantes con la condición (3-43) y entonces se obtienen ℓ_{ki} donde $k = 1,2,\ldots,p$. Estos valores para ℓ_{ki} se conocen como eigenvectores (o vectores propios) de correspondientes a λ_k.

De esta forma se obtienen p soluciones para λ_k y p x p soluciones - para ℓ_{ki}, sin embargo, todavía queda la cuestión de cuáles serán las que maximicen (3-45). Con el fin de determinar λ_k y ℓ_{ki} que maximicen (3-45), se sustituyen λ_k y ℓ_{ki} en (3-44), empero esta soluciones satisfacen (3-46), - por lo tanto se tiene:

$$\mathrm{Var}\,[z_k] = \sum_i \sum_{i'} \ell_{ki}\,\ell_{ki'}\,V_{ii'} = \sum_i \ell_{ki}\,(\lambda_k \ell_{ki}) \qquad \ldots(3\text{-}49)$$
$$= \lambda_k \sum \ell_{ki}{}^2 = \lambda_k$$

Lo cual significa que las soluciones que maximizan la varianza de z_k es el valor máximo de λ_k (denominado como λ_1 en (3-48). Así se ha obtenido el primer componente principal z_1.

Para la obtención del segundo componente principal z_2, como la covarianza de z_1 y z_2 debe de ser cero (para que no exista correlación entre sí);

$$\mathrm{Cov}\,[z_1,z_2] = \sum_i \sum_{i'} \ell_{1i}\ell_{2i'}V_{ii'} = \sum_{i'} \ell_{2i'}\,(\,\lambda\ell_{1i'}\,) = 0$$

$$\therefore \sum_i \ell_{1i}\ell_{2i} = 0 \qquad \ldots(3\text{-}50)$$

La ecuación correspondiente a (3-45), bajo esta condición es:

$$Q = \sum_{i} \sum_{i'} \ell_{2i}\ell_{2i'} V_{ii'} - \lambda\left(\sum_{i} \ell_{2i}^{2} - 1\right) - 2\mu\left(\sum_{i} \ell_{1i}\ell_{2i}\right) \Rightarrow \text{Max.} \quad \ldots(3\text{-}51)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \ell_{2i}} = 0 \rightarrow \sum_{i} \ell_{2i} V_{ii} - \lambda \ell_{2i} - \mu \ell_{1i} = 0 \quad \ldots(3\text{-}52)$$

A ésta se le multiplica $_{1i}$ y se suman en cuanto a i;

$$\sum_{i} \ell_{1i}\left(\sum_{i'} \ell_{2i} V_{ii'} - \lambda \ell_{2i} - \mu \ell_{1i}\right) = 0 \quad \ldots(3\text{-}53)$$

Al ordenar (3-53) haciendo referencia con (3-46), (3-50) y (3-43), queda:

$$\sum_{i'} \ell_{2i}\, \lambda_1 \ell_{1i} - \lambda \sum_{i} \ell_{1i}\ell_{2i} - \mu = 0$$

$$= 0 \quad \ldots(3\text{-}54)$$

Sustituyendo ésta en (3-53), se obtiene la ecuación exactamente igual a (3-46), por la cual los valores para ℓ_{2i} también se obtienen como un eigenvector de la matriz , sin embargo, como se han utilizado ℓ_{1i} que maximizan (3-44), se elige el eigenvector que corresponde a λ_2 que está en el segundo lugar en cuanto a su magnitud, como indica (3-48).

Por todo lo expuesto anteriormente, podemos concluir que los coeficientes de m componentes principales se calculan como eigenvectores de la matriz de varianza-covarianza correspondientes a los valores de λ_k $(k = 1,2,\ldots,m)$ elegidos en el orden descendente. Esto se aplica en la forma exactamente igual para aquel caso de análisis que comienza utilizando la matriz de cuadrados y productos o bien la de correlación.

La ventaja de comenzar con la matriz de correlación es que no recibe influencia de la diferencia en unidades de medidas. Esto se revela sencillamente con un ejemplo. Supongamos que tenemos una matriz de varianza-covarianza de las variables x_1, x_2 y x_3 donde x_1 está expresada en cm y x_2 y x_3 en gramos. Ahora si utilizando la misma muestra y las mismas variables pero x_1 medida en milímetros, como todos los valores de x_1 se van a multiplicar por 10, la varianza de x_1 será de 100 veces y las covarianzas de x_1 con x_2 y de x_1 con x_3 serán de 10 veces. En este caso, aunque la muestra es la misma, los eigenvalores y eigenvectores de las dos matrices de varianza-covarianza será desmesuradamente distintas. Esto muestra que el método PCA que parte de la matriz de varianza-covarianza o de la de cuadrados y productos, está definitivamente subordinado a las unidades de medida. Y el problema es que no existe método para averiguar si los centímetros de la variable x_1 y los gramos de x_2 y x_3 se balancean bien. Por tanto cuando existen variables de caracteres diferentes, es recomendable tipificar los datos para que se liberen de la diferencia de unidades de medida, y como se ha mencionado anteriormente, esto es lo mismo partir de la matriz de correlación. En efecto, si V_{ii} es covarianza de los datos tipificados entre variables x_i y x_{i}, se tiene que:

$$V_{ii'}' = \sum_{\alpha} \frac{x_{\alpha i} - \bar{x}_i}{\sqrt{V_{ii}}} \frac{x_{\alpha i'} - \bar{x}_{i'}}{\sqrt{V_{i'i'}}} /(n-1)$$

$$= \frac{V_{ii'}}{\sqrt{V_{ii} V_{i'i'}}} = r(x_i, x_{i'}) \qquad \ldots (3\text{-}55)$$

A pesar de lo anterior, si no existe este problema de las unidades - de medida utilizando las variables del mismo carácter, y además las varianzas son distintas, se recomienda utilizar la matriz de varianza-covarianza o la de cuadrados y productos, ya que la diferencia de las varianzas refleja la diferencia de cantidad de información en las variables.

Lo que revela la diferencia de las varianzas es, por el argumento - presentado en la secución anterior, una cantidad superior de información en la variable que representa la varianza superior, y viceversa.

A continuación se muestran algunas propiedades de los componentes - principales que se obtienen de esta forma.

1) La varianza de z_k es igual a λ_k por ecuación (3-49), si se tiene la matriz de varianza-covarianza como punto de partida, y si se comienza - con la matriz de cuadrados y productos, como λ_k maximiza (n-1) veces de la varianza de z_k, la varianza de z_k es 1/(n-1) veces de λ_k. La varianza de - z_k en caso de comenzar con la matriz de correlación, ésta por ser considerada como la matriz de varianza-covarianza de los datos tipificados, también es igual a λ_k.

2) La suma total de los eigenvalores es igual a "trace" (suma de los elementos de la diagonal principal) de la matriz inicial (nota 1) Esto es:

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = \text{trace}\ (\mathbf{V}) = \sum_{i=1}^{p} v_{ii} \qquad \text{...(3-56)}$$

Si se trata de un caso de PCA por medio de matriz de cuadrados y productos, se cambia por y V_{ii} por S_{ii}. Además por lo anterior, la tasa de contribución de m componentes principales se da por

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Big/ \sum_{i=1}^{p} V_{ii} \text{ (caso de la matriz de varianza-covarianza)} \qquad \ldots(3\text{-}57)$$

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Big/ \sum_{i=1}^{p} S_{ii} \text{ (caso de la matriz de cuadrados y productos)} \qquad \ldots(3\text{-}57)'$$

Cuando un método PCA se parte de la matriz de correlación, (3-56) se convierte en (3-56)'

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = \text{trace } (\mathbf{R}) = p \qquad \ldots(3\text{-}56)'$$

por lo tanto la tasa de contribución de m componentes es:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k/p \qquad \ldots(3\text{-}57)''$$

3) Cada componente principal carece de correlación con cualquier otro.

$$\text{Cov } [z_k, z_{k'}] = 0 \quad (k \neq k') \qquad \ldots(3\text{-}58)$$

4) El cargo de factor se calcula por medio de la ecuación siguiente (nota 2):

$$r(z_k, x_i) = \frac{\text{Cov } [z_k, x_i]}{\sqrt{\text{Var } [z_k] \cdot \text{Var } [x_i]}} = \frac{\sum_{i'} \ell_{ki'} V_{ii'}}{\sqrt{\lambda_k V_{ii}}}$$

$$= \frac{\lambda_k \ell_{ki}}{\sqrt{\lambda_k V_{ii}}} = \frac{\sqrt{\lambda_k}\, \ell_{ki}}{s_i} \qquad \ldots(3\text{-}59)$$

donde s_i es la desviación estándar de la variable x_i. Y si se parte el análisis de la matriz de sumas de cuadrados y productos, (3-59) se convierte en

$$r(z_k,x_i) = \frac{\sum_{i'} \ell_{ki'} V_{ii'}}{\sqrt{\lambda_k/(n-1)\cdot V_{ii}}}$$

$$= \frac{\lambda_k/(n-1)\cdot \ell_{ki}}{\sqrt{\lambda_k/(n-1)}\cdot s_i} = \frac{\sqrt{\lambda_k}\ \ell_{ki}}{s_i\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{\lambda_k(n-1)}\,\ell_{ki}}{s_i(n-1)} \quad \text{...(3-59)'}$$

En el caso de utilizar la matriz de correlación analógicamente;

$$r(z_k,x_i') = \frac{\sum_{i'} \ell_{ki'} r_{ii'}}{\sqrt{\lambda_k\cdot 1}} = \frac{\lambda_k \ell_{ki}}{\sqrt{\lambda_k}} = \sqrt{\lambda_k}\ \ell_{ki} \quad \text{...(3-59)''}$$

5) Si se parte de la matriz de varianza-covarianza, la suma de cuadrados de estas correlaciones con respecto a i, teniendo como ponderación V_{ii} se iguala a λ_k.

$$\sum_{i=1}^{p} V_{ii}\cdot r^2(z_k,x_i) = \sum_{i=1}^{p} s_i^2\cdot r^2(z_k,x_i) = \lambda_k \sum_{i=1}^{p} \ell_{ki}^2 = \lambda_k \quad \text{...(3-60)}$$

Si se utiliza la matriz de cuadrados y productos, se tiene (n-1) veces de λ_k como se observa en (3-60)'

$$\sum_{i=1}^{p} V_{ii}\cdot r^2(z_k,x_i) = \lambda_k(n-1) \sum_{i=1}^{p} \ell_{ki}^2 = \lambda_k \cdot (n-1) \quad \text{...(3-60)'}$$

Y en el caso de la matriz de correlación, simple suma de cuadrados proporciona λ_k, de modo que:

$$\sum_{i=1}^{p} r^2(z_k,x_i') = \sum_{i=1}^{p} \lambda_k \ell_{ki}^2 = \lambda_k \quad \text{...(3-60)''}$$

6) El coeficiente de determinación ν_i de m componentes principales z_k (k = 1,2,...,m donde m > p) con respecto a x_i que significa qué tanto es expresada la x_i por m componentes principales, se da por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\nu = \sum_{k=1}^{m} r^2(z_k, x_i) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \ell_{ki}^2 / V_{ii} \quad \text{(caso de matriz de varianza-covarianza)} \qquad \ldots(3\text{-}61)$$

Analógicamente:

$$\nu = \sum_{k=1}^{m} r^2(z_k, x_i) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k \ell_{ki}^2}{V_{ii}(n-1)} \quad \text{(de la matriz de cuadrados y productos)} \qquad \ldots(3\text{-}61)'$$

Y si es del caso de la matriz de correlación:

$$\nu = \sum_{k=1}^{m} r^2(z_k, x_i') = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \ell_{ki}^2 \qquad \ldots(3\text{-}61)''$$

De esta última, se conoce que si se toman todos los componentes principales como m (p = m), esta sumatoria se iguala a 1 (nota 3).

$$\nu = \sum_{k=1}^{m} r^2(z_k, x_i') = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \ell_{ki}^2 = 1 \qquad \ldots(3\text{-}62)$$

Cabe señalar que la tasa de contribución señalada en 2) representa la tasa de los m componentes principales con respecto a todas las p variables, sin embargo, este coeficiente de determinación es, aunque también implica una tasa de contribución de la información, se refiere a una sola variable x_i. - Por consiguiente, aquella x_i cuyo coeficiente de determinación no crece satisfactoriamente, aunque se tome m considerablemente grande, puede ser considerada como un indicador que no opera en forma sustancial con otros indicado res para determinar los m componentes principales, por lo cual con frecuencia debe de ser rechazada y ser tratada independientemente.

Al aplicar el método PCA a un conjunto de datos, se pueden obtener - con relativa facilidad los eigenvalores λ_k, los eigenvectores ℓ_{ki}, la tasa de contribución, los cargos de factor, etc. Sin embargo, es erróneo pensar que estos resultados proporcionan explicaciones explícitas en el sentido común, o en el sentido de la técnica tradicional del análisis empresarial. - La confusión de esta naturaleza se puede atribuir en la mayoría de los casos. a las razones siguientes:*

1) Por falta de conocimientos o de experiencias, no es posible evaluar los resultados con una propiedad.

2) La combinación de los indicadores no es apta (por ejemplo tiene cierta tendencia hacia un flanco).

3) Los componentes principales se expresan en ecuaciones del primer grado, sin embargo, no se forma un modelo con tal carácter.

4) No es adecuado el conjunto muestral.

En consecuencia un analizador tiene necesidad de considerar a fondo los puntos siguientes, al aplicar el método PCA para un mejor aprovechamiento de las informaciones que proporciona el conjunto muestral y evidentemente las posibilidades que ofrece el mismo método.

---

* Estas razones son tomadas de "Tahenryo-Kaiseki Ho" por T. Okuno, H. Kume y otros, publicado en Tokyo, 1982. P. 193

1. Con respecto a la elección del muestreo, no hay que olvidar su importancia, aunque no es solamente en el caso de aplicar el PCA, sino para todos los métodos de análisis. Apesar de que el resultado de una sola ocasión de someter los datos en el PCA sea como se haya presupuesto, no necesariamente signifique que sean los componentes principales aplicables para casos generales. Para garantizar la efectividad del análisis, será conveniente cambiar algunos elementos de la muestra y confrontar los resultados para averiguar si se expone alguna característica común en distintos resultados.

2. La selección de las variables es igualmente importante, puesto que las variables que se tomaron para la aplicación del PCA si tienen inclinación hacia un cierto flanco, o si contienen alguna variable que no represente alguna característica común en el conjunto, no proporciona un resultado deseado. Para evitar tal efecto, no se debe de esperar que salga un resultado meritorio por la primera vez que se aplique el PCA en un conjunto muestral, sino repetir el método cambiando la combinación de variables. En general, es recomendable utilizar las variables representativas en cuanto a las características del conjunto. Por otra parte, si no es muy necesario, no hay que aplicar los datos cuyas distribuciones tienen torcimientos sustanciales.

3. Transformación de variables en algunos casos es necesario por la misma razón que el caso de aplicar la regresión lineal. Como los componentes principales se expresan en función de las ecuaciones lineales, debe de existir tal modelo. Para este propósito, en algunos casos, en lugar de someter los datos "crudos" (o sea valores de los elementos del conjunto sin ser transformados), es conveniente aplicar alguna transformación adecuada -

a los datos. Por ejemplo si la distribución es asimétrica, posiblemente sea acertado ejecutar la transformación logarítmica a los valores de la misma variable, según el caso, elaborar $x_i + x_{i'}$, $x_i - x_{i'}$ o $x_i/x_{i'}$ también puede mejorar el resultado. Sin embargo, es importante destacar que con frecuencia es más difícil dar significado al resultado del análisis con las variables transformadas, y por lo tanto un analizador debe conceder mayor atención para no caerse en la trampa de juegos numéricos.

Por otro lado, lo que siempre un analizador debe de recordar, es la diferencia de usar una matriz a otra. Retomando lo anteriormente demostrado se encuentran casos en los cuales el utilizar la matriz de varianza-covarianza o la de sumas de cuadrados y productos proporciona mejor resultado que la de correlación y viceversa. Y sin duda ya que estén elegidos los indicadores y sus formas de aplicación (con alguna transformación o no), el analizador debe de escoger una matriz por la cual se inicia el método PCA.

Lo óptimo sería probar cada matriz de éstas, comparando los resultados de una con otra, aunque por lo general dentro del análisis empresarial es recomendable utilizar la matriz de correlación, por la razón de que el conjunto de los indicadores financieros es una mezcla de unidades de medida.

4. También es importante inquirir la variación de los componentes principales sobre el transcurso del tiempo, no solamente de un período. La indagación de esta variación de las etapas de contracción económica y de prosperidad, nos puede ofrecer algunos conocimientos nuevos.

5. Como una posibilidad de obtener los resultados que concuerdan con

los objetivos del análisis es combinar los componentes principales con alguna variable. Si algún factor importante en el sentido del análisis puede ser representado por una variable y además ésta no tiene una correlación sustancial con los componentes principales, combinarlos es una manera posible de mejorar el aprovechamiento de los datos y del método.

(nota 1) Con respecto a esta propiedad, Morrison en su obra ("Multivariate Statistical Methods") menciona solamente (en caso de utilizar la matriz de cuadrados y productos); "La varianza muestral de j-simo componente es ℓ_j, y por lo tanto la varianza total del sistema es

$$\ell_1 + \ldots + \ell_p = \operatorname{tr} S \text{ "}$$

donde las letras ℓ_j corresponden a λ_k en nuestro caso. Sin embargo, quizá sea conveniente esclarecer la razón de este concepto.

Los eigenvectores extraidos de una matriz pueden formar una matriz, donde cada columna de ésta es un eigenvector. Esto es:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ldots\ldots & \ell_{1p} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ldots\ldots & \ell_{2p} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \ell_{p1} & \ell_{p2} & \ldots\ldots & \ell_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \ldots(3\text{-}63)$$

o es lo mismo

$$\mathbf{z} = \mathbf{L}'\mathbf{x} \qquad \ldots(3\text{-}63)'$$

Y por las definiciones siguientes:

$$\sum_{i=1}^{p} \ell_{ki}^{2} = 1 \qquad \ldots(3\text{-}64)$$

$$\sum_{i=1}^{p} \ell_{ki}\ell_{k'i} = 0 \qquad (k \neq k') \qquad \ldots(3\text{-}65)$$

la matriz $\mathbf{L}$ es ortogonal

$$\therefore \quad \mathbf{L'L} = \mathbf{I} \qquad \ldots(3\text{-}66)$$

Ahora si correspondemos la muestra de tamaño n a esta matriz, y para simplificar, suponemos que las medias de x_i y z_k son iguales a cero, se tiene la relación siguiente:

$$\mathbf{Z'} = \mathbf{L'X'} \qquad \ldots(3\text{-}67)$$

donde:

$$\mathbf{Z'} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} & \cdots & z_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ z_{1p} & z_{2p} & \cdots & z_{np} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X'} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

Además,

$$\mathbf{X'X} = \mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \qquad \ldots(3\text{-}68)$$

$$\mathbf{Z'Z} = (n-1)\,\mathbf{\Lambda} = (n-1)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_p \end{pmatrix} \qquad \ldots(3\text{-}69)$$

$\mathrm{Var}\,[z_k] = \lambda_k$, $\mathrm{Cov}\,[z_k, z_{k'}] = 0 \quad (k \neq k')$

Por lo consiguiente

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Z'Z}/(n-1) = \mathbf{L'X'XL}/(n-1) = \mathbf{L'VL} \qquad \ldots(3\text{-}70)$$

Lo que implica (3-70) es que se obtiene la matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$ por la transformación ortogonal de la matriz $\mathbf{S}$ (o $\mathbf{V}, \mathbf{R}$). De esta relación se puede demostrar:

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{\Lambda}) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = \mathrm{tr}\,(\mathbf{L'VL})$$

$$= \mathrm{tr}\,(\mathbf{VLL'}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{V}) \quad (\because \mathbf{LL'} = \mathbf{I})$$

$$= \sum_{i=1}^{p} v_{ii} \qquad \ldots(3\text{-}71)$$

Por lo tanto si los eigenvalores se extraen de $\mathbf{V}$, (3-56), y si se extraen de $\mathbf{R}$, (3-56)' quedan demostrados.

(nota 2) El denominador del cociente está demostrado en la primera propiedad y por la definición de la varianza de x, sin embargo, con respecto al numerador, es posible que no quede muy clara la conversión de un miembro a otro. Y por lo tanto aquí trataremos de demostrar este punto.

Por la definición de covarianza de dos variables, se puede escribir:

$$\mathrm{Cov}\,[z_k, x_i] = \frac{\sum_{\alpha}(z_{\alpha k} - \bar{z}_k)(x_{\alpha i} - \bar{x}_i)}{n-1} \qquad \ldots(3\text{-}72)$$

como

$$z_{\alpha k} = \ell_{ki}\, x_{\alpha 1} + \ell_{k2}\, x_{\alpha 2} + \ldots + \ell_{kp}\, x_{\alpha p} = \sum_{i'} \ell_{ki'}\, x_{\alpha i'} \qquad \ldots(3\text{-}42)'$$

y además:

$$\bar{z}_k = \frac{\sum_{\alpha} z_{\alpha k}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha} \sum_{i'} \ell_{ki'}\, x_{\alpha i'} \qquad \ldots(3\text{-}73)$$

$$\therefore \mathrm{Cov}\,[z_k, x_i] = \frac{\sum_{\alpha}\left(\sum_{i'} \ell_{ki'}\, x_{\alpha i'} - \frac{1}{n}\sum_{\beta}\sum_{i'} \ell_{ki'}\, x_{\beta i'}\right)(x_{\alpha i} - \bar{x}_i)}{n-1}$$

$$= \frac{\sum_{\alpha}\left\{\sum_{i} \ell_{ki}\, (x_{\alpha i} - \bar{x}_i)\right\}(x_{\alpha i} - \bar{x}_i)}{n-1} \qquad \ldots(3\text{-}72)'$$

donde $\left\{\sum_{i'} \ell_{ki'}\,(x_{\alpha i'} - \bar{x}_{i'})\right\}(x_{\alpha i} - \bar{x}_i)$

$$= \ell_{ki}\,(x_{\alpha i} - \bar{x}_i)\,(x_{\alpha i} - \bar{x}_i) + \ell_{k2}\,(x_{\alpha 2} - \bar{x}_2)\,(x_{\alpha i} - \bar{x}_i) + \ldots$$

$$+ \ell_{kp}\,(x_{\alpha p} - \bar{x}_p)\,(x_{\alpha i} - \bar{x}_i)$$

$$= \sum_{i'} \ell_{ki'}\,(x_{\alpha i'} - \bar{x}_{i'})\,(x_{\alpha i} - \bar{x}_i) \qquad \ldots(3\text{-}74)$$

Por lo consiguiente:

$$\mathrm{Cov}\,[z_k, x_i] = \frac{\sum_{\alpha}\sum_{i'} \ell_{ki'}\,(x_{\alpha i'} - \bar{x}_{i'})(x_{\alpha i} - \bar{x}_i)}{n-1}$$

$$= \sum_{i'} \ell_{ki'}\, v_{ii'} \qquad \ldots(3\text{-}72)''$$

(nota 3) Si se extraen los eigenvalores de la matriz de correlación, por la relación (3-70)

$$\Lambda = L'RL \quad \rightarrow \quad L\Lambda L' = R \qquad \ldots(3\text{-}75)$$

Al expresar en forma explícita cada elemento de la diagonal de (3-75), tenemos:

$$\sum_k \lambda_k \ell_{ki}^{\,2} = 1 \qquad \ldots(3\text{-}62)$$

Y si se utiliza la matriz de varianza-covarianza,

$$L\Lambda L' = V$$

por lo tanto

$$\sum_k \lambda_k \ell_{ki}^{\,2} = V_{ii} \qquad \ldots(3\text{-}62)'$$

Para el caso de la matriz de cuadrados y productos, el resultado es análogamente S_{ii}.

3) EVALUACION

Como se ha expuesto, los objetivos de aplicar el método PCA son - principalmente extracción de índices globales y fijación de una base común para la evaluación. Sin embargo, según el caso, difiere la manera de seleccionar el conjunto muestral y los índices. Por ejemplo, si se desea obtener unos índices globales y la base de evaluación para todo el tipo - de actividad de empresas, los índices originales serán reducidos en los - que no representan diferencias entre las actividades y también el objetivo del análisis será generalizado. En contraste, si la pretendencia es - aplicar el método especialmente a un conjunto de las empresas de una cierta actividad, será más efectivo utilizar los índices financieros en los - cuales se reflejan las características de esa actividad. La equiparación tiene varios niveles jerárquicos, los que se comprenden por ejemplo; toda la actividad económica -industria manufacturera- industria siderúrgica- aceros especiales. Una comparación en un nivel superior significa necesariamente ciertas pérdidas de detalles del nivel inferior e inversamente un estudio comparativo dentro de un nivel inferior trae como consecuencia el requerimiento de colocación desde un cierto nivel superior. De cualquier modo, no es posible cubrir todos los niveles de estudios con una sola base de evaluación.

Los objetivos de la aplicación del método PCA serán los que son - expuestos a continuación:

i) Evaluación cuantitativa de gran cantidad de empresas con una misma base y clasificación de complexiones empresariales.

ii) Revisión mutua con la evaluación subjetiva o un estudio comparativo en el sentido global.

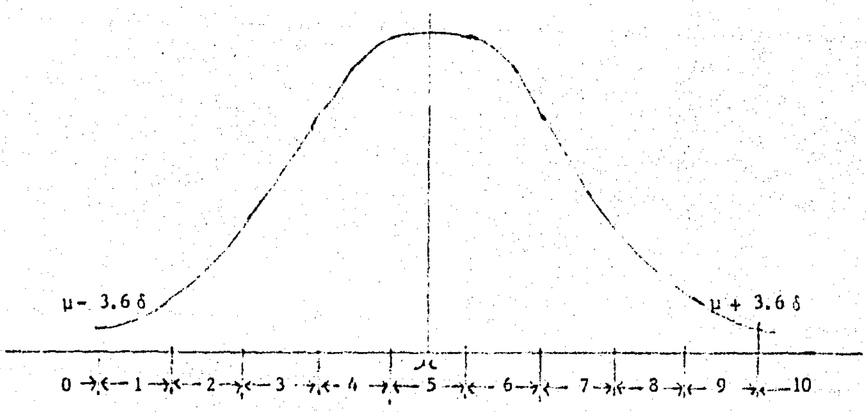
iii) Evaluación previa con el fin de encontrar problemática o para obtener agarradero para un análisis de mayor minuciosidad.

iv) Preparación de datos con el fin de un análisis estadístico con eficiencia.

Para cualquiera de estos casos, el analizador debe de tener siempre vigente la atención a los puntos de consideración anteriormente mencionado con el objeto de realizar un análisis efectivo y persuasivo.

Al realizar una evaluación, realizar los valores obtenidos por medio de los componentes principales sin modificarlos es considerablemente confuso. Por consiguiente, es recomendable transformar estos valores $z_{\alpha k}$ - - - (α = 1,2,...n y k = 1,2,...m donde $m \leq p$) en las puntuaciones con el objeto de esclarecer las diferencias existentes entre las empresas y facilitar la evaluación, como se indica en la Gráfica 3-8.

GRAFICA 3-8



Esta gráfica indica que el intervalo de $\mu - 3.6\sigma$ a $\mu + 3.6\sigma$ de una distribución está dividido en nueve partes iguales, y según la parte a la - cual le corresponda un valor, se le asigna el punto respectivo, y así todas las empresas tendrán puntuaciones de 0 a 10. Sin embargo, este método no - es el definitivo y dependiendo de la política de evaluación o de la forma - de distribución, puede averiarse. Otro ejemplo es dividir el intervalo de $\mu - 3.6\sigma$ a $\mu + 3.0\sigma$ en 11 partes iguales y asignar los puntos de 0 a 10. - En este último, es posible que alguna empresa exceda de $\mu + 3.0\sigma$ ó $\mu - 3.0\sigma$, empero en tal caso, se le puede asignar 10 ó 0 respectivamente.

De cualquier modo, ya teniendo las puntuaciones según los componentes, se puede obtener puntuación global multiplicando cada una de ellas con peso de ponderación y sumando estos productos. Verbigracia, si z_1 se considera como indicador principal de la capacidad ganancial, z_2 y z_3 representan en mayor parte la magnitud de la empresa y z_4 indica el crecimiento; por otro lado se decide como política de evaluación global que se concibe 60% a la capacidad ganancial, 20% y 20% a la magnitud de la empresa y al crecimiento respectivamente. Pues la puntuación global se obtiene por medio de:

$$P = 0.6\bar{z}_1 + 0.2(\bar{z}_2 + \bar{z}_3)/2 + 0.2\bar{z}_4 \qquad \ldots(3\text{-}76)$$

donde $\bar{z}_k$ es la puntuación tipificada, la cual se obtiene por medio de (3-77), (3-77)', (3-77)" según la matriz que se utilice.

Denominaremos el coeficiente de correlación entre z_k, x_i como a_{ik}, y utilizando este símbolo:

$$\bar{z}_k = \frac{\sum_{i=1}^{p} a_{ik}\, x_{\alpha i}}{\lambda_k} \qquad \frac{\lambda_k \sum_{i=1}^{p} \ell_{ki}\, x_{\alpha i}}{\lambda_k} \qquad \ldots(3\text{-}77)$$

Como se indica x_i' que es el valor tipificado de x_i, (3-68) es aplicable al caso de la matriz de correlación y la varianza de esta relación - es:

$$\mathrm{Var}\,[\bar{z}_k] = \mathrm{Var}\left[\frac{\lambda_k \sum_{i=1}^{p} \ell_{ki}\, x'_{\alpha i}}{\lambda_k}\right] = \frac{\lambda_k \cdot \lambda_k}{\lambda_k^{\,2}} = 1 \qquad \ldots(3\text{-}78)$$

Del mismo modo, se puede obtener z_k tipificada utilizando el coeficiente de correlación (cargo del factor), a_{ik} para los casos de las matrices de sumas de cuadrados y productos y de varianza-covarianza.

$$\bar{z}_k = \frac{\sqrt{\lambda_k} \sum_{i=1}^{p} \ell_{ki}\, x_{\alpha i}}{\lambda_k} = \frac{\sum_{i=1}^{p} a_{ik} x_{\alpha i}\, s_i}{\lambda_k}$$

...(matriz de varianza-covarianza) ...(3-77)'

$$\bar{z}_k = \frac{\sqrt{\lambda_k} \sum_{i=1}^{p} \ell_{ki}\, x_{\alpha i}}{\lambda_k} = \frac{\sqrt{n-1}}{\lambda_k} \sum_{i=1}^{p} s_i a_{ik}\, x_{\alpha i}$$

...(caso de la matriz de sumas de cuadrados y productos) ...(3-77)"

Aunque con las puntuciones por los componentes principales, se podría captar algunas diferencias relativas entre las empresas, frecuentemente no se puede dar el significado explícito a cada componente principal, puesto que un componente principal se obtiene por medio de la suma de las variables originales multiplicadas con ponderación. Un ejemplo es que se obtiene un - componente principal cuyos cargos de factor con respecto a x_1 y x_2 son altos y por lo tanto se puede decir que este componente es un indicador sintetizado de x_1 y x_2.

Y con respecto a x_3 y x_4, los cargos de factor son relativamente reducidos, sin embargo no tan reducidos como para ignorarlos. Por otro lado, z_2 tiene cargos de factor con x_3 y x_4 relativamente altos y con x_1 y x_2 un tanto bajos. Aquí, todo lo que se puede describir es que z_1 representa lo que representan x_1 y x_2 en grandes rasgos y z_2 tiende a representar x_3 y x_4.

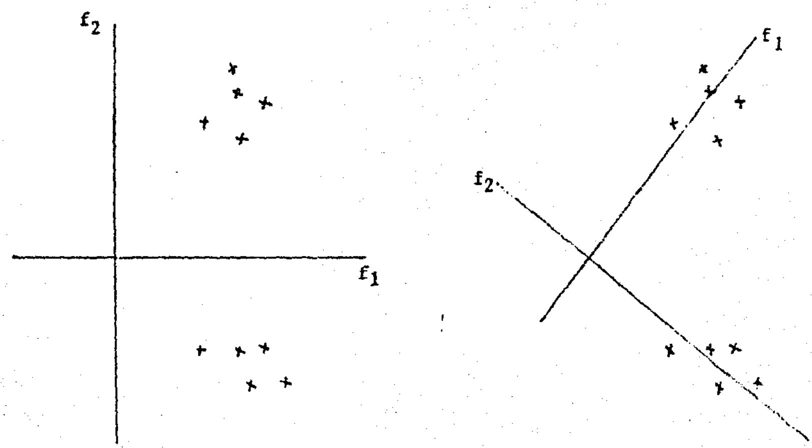
A pesar de que es sencillo y claro expresar una evaluación empresarial en una puntuación global, esto omite las explicaciones de por qué se ha dado esa puntuación. Dentro de la práctica del análisis de empresas, evaluar con diferentes puntos de vista con respecto a la capacidad ganancial, estabilidad, magnitud de la empresa, etc., tiene mayor aceptación.

Para separar los factores que determinan un componente principal, es considerablemente útil efectuar la rotación de ejes de factor.

La rotación de los ejes de factor es una técnica utilizada dentro del análisis de factor y tiene utilidad para esclarecer el significado de cada factor común (en el caso del análisis de componente principal, es el componente principal). Dado que el método PCA es también uno de los métodos que comprenden dentro del análisis de factor (aunque es peculiar por la razón de que dentro del método PCA no se suponen los factores especiales), se puede aplicar esta técnica.

La rotación de los ejes se realiza como cambio de la base donde se encuentran n puntos manteniendo las posiciones relativas de los mismos (gráfica 3-9).

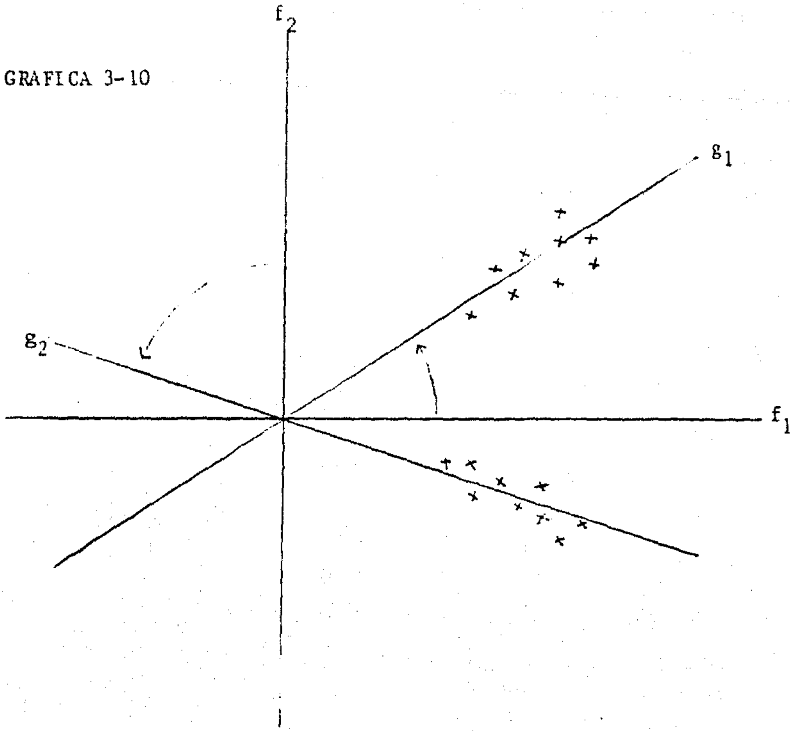
GRAFICA 3-9



a) Antes de rotación b) Después de rotación

La gráfica 3-9 muestra un caso de rotación ortogonal por medio de la matriz rotatoria antes señalada, y como se puede observar, los puntos que se ubicaban en el primer cuadrante registran mayor cuantía en f_1 y menor en f_2. Desarrollando esto, hasta podemos decir que no necesariamente debe de ser ortogonal la rotación que se va a efectuar. Si esta transformación sirve para acrecentar unos valores y decrecer los otros de los mismos puntos, en la mayoría de los casos la rotación oblicua es de mayor efectividad como se aprecia en la gráfica 3-10.

GRAFICA 3-10



Si sólo existen 2 componentes principales, se puede efectuar esta rotación manualmente, que ya sea ortogonal u oblicua, puesto que los puntos que representan los cargos de factor se distribuyen en un plano, como los ejemplos gráficos que se observan en la gráfica 3-9, y la gráfica 3-10.

Sin embargo, cuando los componentes son más de 2, se requiere de un método por medio del cual se puede realizar la rotación de los ejes. Existen diversos métodos para efectuar estas rotaciones, y en la práctica, se sugiere probar varios de éstos para escoger el que proporcione nuevos cargos de factor los cuales hacen que la interpretación de los componentes sea más clara. A pesar de ello, se expondrá en este texto solamente el método Vari-max Normal (Normal Vari-max Method), el cual se utiliza más comunmente.

El argumento del método Vari-max Normal es separar en la medida - más posible los cargos de factor cercanos a 1 ó -1, y los cercanos a 0, - por cada columna de la matriz de los cargos de factor después de la rotación

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots\cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} \cdots\cdots & b_{2m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{p1} & b_{p2} \cdots\cdots & b_{pm} \end{pmatrix} \qquad \ldots(3\text{-}79)$$

donde b_{ik} se obtiene como cociente de la raíz cuadrada del cargo de factor entre la tasa de contribución:

$$b_{ik} = a_{ik} / \sqrt{\upsilon_i} \quad (i = 1,2,\ldots,p;\ k = 1,2,\ldots,m) \qquad \ldots(3\text{-}80)$$

y después encontrar la matriz ortogonal que maximice la suma de cuadrados de $b_{ik}^{\ 2}$ por cada columna.

$$Q = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (b_{ik}^{\ 2})^2 - \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{p} (b_{ik}^{\ 2})^2 \right\} \qquad \ldots(3\text{-}81)$$

para realizar la rotación ortogonal y obtener la nueva matriz de cargos de factor $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{AT} \qquad \ldots(3\text{-}82)$$

Donde $\mathbf{A}$ es la matriz de cargos de factor (a_{ik}).

El procedimiento concreto es como sigue:

i) Una vez calculados los cargos de factor ponderados por $1/\sqrt{\cdot_i}$, se determina el ángulo t donde $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ por medio del siguiente cómputo:

$$t = \frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{\delta - 2\,\alpha\beta/p}{\gamma - (\alpha^2 - \beta^2)/p} \qquad \ldots(3\text{-}83)$$

donde:

$$\alpha = \sum_i (b_{ik} + b_{ir})(b_{ik} - b_{ir})$$

$$\beta = 2 \sum_i b_{ik} b_{ir}$$

$$\gamma = \sum_i \left[(b_{ik} + b_{ir})(b_{ik} - b_{ir}) + 2b_{ik}\, b_{ir}\right]\left[(b_{ik} + b_{ir})(b_{ik} - b_{ir}) - 2b_{ir}\, b_{ir}\right]$$

$$\delta = 4 \sum_i (b_{ik} + b_{ir})(b_{ik} - b_{ir})\, b_{ik} b_{ir} \qquad \ldots(3\text{-}84)$$

Es importante dilucidar que este cómputo se realiza seleccionando dos componentes, o en otras palabras, sobre dos columnas r y k de la matriz obtenida por (3-80).

ii) Realizar la rotación de dos columnas

$$(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_r) = (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_r) \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \qquad \ldots(3\text{-}85)$$

Un ciclo de rotaciones consta de m(m-1)/2 veces de esta rotación, ya que este valor es la combinación de 2 en m. Y después de ℓ ciclos de estas rotaciones, si cumple $|Q_{\ell-1} - Q_\ell| < 10^{-6}$, indica que tiene convergencia y se detiene el cómputo.

iii) Después de realizar todas estas rotaciones, se regresa cada valor de b_{ki}.

$$b_{ik} = b_{ik}\sqrt{\nu_i} \quad (i = 1,2,..,p; \quad k = 1,2,...,m) \qquad ...(3\text{-}86)$$

iv) Calcular la matriz rotatoria (m x m) por medio de la siguiente fórmula:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{A'V}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A'V}^{-1}\mathbf{B} \qquad ...(3\text{-}87)$$

Utilizando los cargos de factor obtenidos de esta rotación, se pueden calcular las nuevas puntuaciones de componentes, las cuales se llaman puntuaciones de factor.

$$\mathbf{F} = \mathbf{X}\tilde{\mathbf{A}} \qquad ...(3\text{-}88)$$

Donde $\tilde{\mathbf{A}}$ equivale a $\mathbf{B}$ del ejemplo del método Var-max Normal y $\mathbf{X}$ es - la matriz de los datos originales tipificacos.

Sin embargo, en contraste de las puntuaciones de los componentes, - las puntuaciones obtenidas de esta forma adquieren correlaciones entre sí, y para evitar ello, en lugar de utilizar la matriz $\mathbf{X}$ y la $\tilde{\mathbf{A}}$, es recomendable transformar la matriz $\tilde{\mathbf{Z}}$ que es la matriz de los componentes principales tipificados con la matriz ortogonal (nota). Y de esta manera, la relación (3-88) se convierte en (3-88)'.

$$\mathbf{F}_1 = \tilde{\mathbf{Z}}\mathbf{T} \qquad ...(3\text{-}88)'$$

Con las puntuaciones calculadas en esta forma, se pueden obtener - las puntuaciones globales con base en F.

$$P = w_1 F_1 + w_2 F_1 + \ldots + w_m F_m \qquad \ldots(3\text{-}89)$$

donde w_i es la ponderación establecida según la política de evaluación y

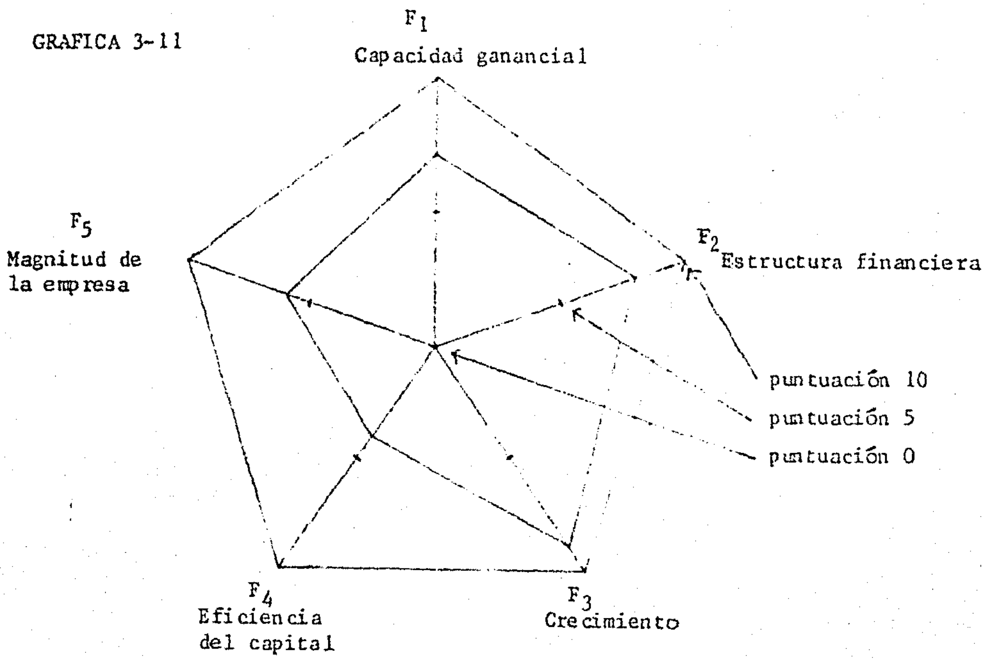
$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$. Y para que esta puntuación global sea de escala de 0 a 10, se utiliza el método de conversión mencionado anteriormente.

Además de clasificar por la puntuación global, las puntuaciones F_k sirven para demostrar las complexiones empresariales en la forma visual - (gráfica 3-11), ya que es necesario con suma frecuencia, aparte de dar a - conocer la puntuación global, proporcionar la razón por la cual resulta la puntuación global.

Como se puede apreciar en la gráfica, cada eje que se traza del centro a la esquina mide un concepto a escala de 0 a 10, y uniendo los puntos de puntuaciones se obtiene un pentágono que representará la complexión de la empresa, y obviamente la empresa representada en un pentágono de superficie mayor, tendrá una complexión superior (la óptima sería obtener 10 puntos en todos los conceptos y así tendrá el mismo pentágono que el exterior) y viceversa.

Cabe destacar aquí que la visualización de la complexión empresarial no necesariamente debe de ser pentagonal. La gráfica 3-11 muestra - sencillamente un ejemplo que podría ser, empero si verbigracia se toman - en consideración seis componentes principales y las puntuaciones de F_k correspondientes a esos componentes, la visualización será hexagonal, y - -

GRAFICA 3-11



también depende de la política de evaluación que determina los conceptos en los cuales de deben de analizar las puntuaciones. Otro aspecto importante es que de igual manera, se puede obtener este tipo de visualización utilizando las puntuaciones de los componentes principales, o en otra expresión, sin aplicar la transformación rotatoria, lo cual podría conducir a un resultado un tanto diferente. Aún ello, por la razón de que la tendencia de reflejar la situación financiera debe de ser la misma, el analizador puede elegir la forma que tenga más persuasiva. Probablemente sea un tanto obvio sin embargo, sería conveniente esclarecer que si el analizador elige una de estas dos alternativas para adquirir la puntuación global y la visualización debe de ser la misma para otras empresas, también con el fin de mantener la propiedad comparativa que concierne a todas las empresas.

(nota) El libro de T. Okuno y otros "Tahenryo-Kaiseki-Ho" demuestra la manera en la cual el producto de la matriz de datos originales multiplicado por la matriz de los cargos de factor después de la transformación rotatoria, llega a tener correlación, en el caso de iniciar con la matriz de correlación. Aquí citaremos su demostración en forma sintetizada y posteriormente averiguaremos para los casos en los cuales se utilizan las matrices de varianza-covarianza y de sumas de cuadrados y productos.

A) Caso de la matriz de correlación.

Si la matriz $\mathbf{X}$ es de los datos tipificados, entonces la matriz de correlación se expresa como $\mathbf{R} = \mathbf{X}'\mathbf{X}$ /(n-1). Se toman los m eigenvalores en el orden descendente y sus respectivos eigenvectores se expresan en la siguiente forma.

$$\underset{m\times m}{\mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad \underset{p\times m}{\mathbf{L}} = (\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_m),$$

Si expresamos la transformación rotatoria por medio del método Vari-max Normal, en la matriz ortogonal $\mathbf{T}$, la matriz de los cargos de factor se expresa:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{T} \qquad \ldots(a)$$

donde

$$\mathbf{T'T} = \mathbf{I}_m \qquad \ldots(b)$$

entonces, la matriz de las puntuaciones de factor $\mathbf{F}_0$ se obtiene:

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{X\tilde{A}} = \mathbf{XAT} = \mathbf{Z\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T} \qquad \ldots(c)$$

por la definición del cargo de factor (3-59)". Y su matriz de varianza-covarianza es:

$$\frac{1}{n-1}\mathbf{F}_0'\mathbf{F} = \frac{1}{n-1}\mathbf{T'\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Z'Z\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T} = \mathbf{T'\Lambda}^2\mathbf{T} \qquad \ldots(d)$$

$\because$ $\mathbf{Z'Z} = (n-1)\mathbf{\Lambda}$ (por la definición de la varianza-covarianza de - los componentes principales). Y obviamente la expresión (d) nos muestra que sí tiene varianza, a su vez implica la presencia de correlación. Sin embargo, si aplicamos la transformación ortogonal $\mathbf{T}$ a los componentes tipificados $\tilde{\mathbf{Z}}$, como $\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z\Lambda}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{XA\Lambda}^{-1}$ (por la definición de $\tilde{z}$ (3-77), se obtiene la matriz de puntuaciones de factor $\mathbf{F}_1$:

$$\mathbf{F}_1 = \tilde{\mathbf{Z}}\mathbf{T} = \mathbf{Z\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T} \qquad \ldots(e)$$

por lo tanto su matriz de varianza-covarianza resulta:

$$\frac{1}{n-1}\mathbf{F'F} = \frac{1}{n-1}\mathbf{T'\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Z'Z\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T} \quad \mathbf{T\overset{0}{\Lambda}T} = \mathbf{T'T} = \mathbf{I} \qquad \ldots(f)$$

donde no contiene covarianza, y por consiguiente las puntuaciones de factor adquiridas de esta forma se pueden sumar sin problema de suma reiterativa de información ya que sea sin ponderación o con ponderación.

B) Caso de la matriz de varianza-covarianza.

Cuando el análisis parte de la matriz de varianza-covarianza, la matriz $\tilde{Z}$ se expresa:

$$\tilde{Z} = Z\Lambda^{-\frac{1}{2}} = XS_tA\Lambda^{-1} \qquad \ldots(a)$$

donde S_t es la matriz diagonal de la desviación estándar:

$$S_t = \begin{pmatrix} s_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{V_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{V_{mm}} \end{pmatrix} \qquad \ldots(b)$$

utilizando la relación (a) podemos expresar la matriz de las puntuaciones de factor F_0, como sigue:

$$F_0 = X\hat{A} = XAT = Z\Lambda^{\frac{1}{2}} S_t^{-1}T \qquad \ldots(c)$$

y su matriz de varianza-covarianza resulta como:

$$\frac{1}{n-1}F_0'F_0 = \frac{1}{n-1}T'S_t^{-1}\Lambda^{\frac{1}{2}}Z'Z\Lambda^{\frac{1}{2}}S_t^{-1}T = T'S_t^{-2}\Lambda^2T \qquad \ldots(d)$$

efectivamente con covarianza. En cambio si calculamos las puntuaciones de factor como sigue:

$$F_1 = \tilde{Z}T = Z\bar{\Lambda}^{\frac{1}{2}}T = XS_tA\Lambda^{1}T \qquad \ldots(e)$$

su matriz de varianza-covarianza es:

$$\frac{1}{n-1}F_1'F_1 = \frac{1}{n-1}T'\tilde{Z}'\tilde{Z}T = T'IT = I \qquad \ldots(f)$$

y así queda demostrado de que en el caso de utilizar la matriz de varianza-covarianza, también las puntuaciones de factor computadas de esta manera, - carecen de correlación.

C) Caso de la matriz de sumas de cuadrados y productos.

Análogamente cuando el análisis parte de la matriz de sumas de cuadrados y productos, se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\tilde{Z} = (n-1)\, X\, S_t\, A\, \Lambda^{-1} = (\sqrt{n-1})\, Z\, \Lambda^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots (a)$$

(por la definición de $\tilde{Z}$ (3- 77)")

$$\therefore F_0 = X\hat{A} = XAT = (n-1)^{-\frac{1}{2}}\, Z\, \Lambda^{\frac{1}{2}}\, S_t^{-1}\, T \qquad \ldots (b)$$

$\therefore$ la matriz de varianza-covarianza de estas puntuaciones de factor:

$$\frac{1}{n-1} F_0' F_0 = \frac{1}{n-1} T' S_t^{-1} \Lambda^{\frac{1}{2}} Z' \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1} Z\, \Lambda^{\frac{1}{2}}\, S_t^{-1} T$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2} T' \Lambda^2\, S_t^{-2}\, T \qquad \ldots (c)$$

Y así, (c) demuestra la existencia de la covarianza, Por otro lado, si adquirimos la matriz de las puntuaciones de factor transformando la $\tilde{Z}$:

$$F_1 = \tilde{Z}T = (\sqrt{n-1}) Z \Lambda^{-\frac{1}{2}}\, T \qquad \ldots (d)$$

Al obtener la matriz de varianza-covarianza de estas puntuaciones:

$$\frac{1}{n-1} F_1' F_1 = \frac{1}{n-1} T' \Lambda^{-\frac{1}{2}} Z' (\sqrt{n-1}) \quad (\sqrt{n-1}) Z \Lambda^{-\frac{1}{2}} T$$

$$= T' \Lambda^{-\frac{1}{2}}\, \Lambda\, \Lambda^{-\frac{1}{2}}\, T = T' \Lambda^0 I = T' I T = I \qquad \ldots (e)$$

lo cual demuestra que tampoco en el caso de utilizar la matriz de sumas de cuadrados y productos, las puntuaciones de factor conservan correlaciones.

CAPITULO 4

APLICACION EN LAS EMPRESAS MEXICANAS

En este capítulo, se trata de la aplicación de los métodos estudiados en los capítulos anteriores en cuanto a la programación en computadoras, utilizando los datos reales de 45 empresas mexicanas, con el propósito de esclarecer algunos conceptos señalados anteriormente, y que este capítulo sirva de ejemplo para aquellos que tengan interés en diseñar algunos programas de computadoras electrónicas para aplicar estos métodos.

Sin embargo, sería conveniente aclarar que estos programas posteriormente presentados, definitivamente no pueden igualr con los elaborados por las personas que se dedican a la programación y por esta razón, éstos deben ser, no como ejemplo de "buenos programas" sino como "ejemplo sencillo". - O símplemente que sirvan como "agarradera" para aquellos principiantes en - la programación y que tienen interés en aplicar estos métodos.

Por otra parte, cabe señalar que normalmente la muestra debe de ser del tamaño de más de 100, o si se puede aún mayor de 200 empresas para un - caso de estudio serio, y también el número de los indicadores será mayor de 10; lo que no se puede esperar en este texto por varias limitaciones (la mayor limitación ha sido fuente de datos, ya que no hay suficiente publicación sobre este tipo de datos empresariales).

Para este ejemplo de aplicación, se tomaron sólo 45 empresas de la actividad manufacturera representadas en 7 indicadores, lo cual indica que la matriz de datos originales es el orden de 45 x 7.

Estos datos están mostrados en la Tabla 4-1. Las 7 variables son:

x_1: Tasa de utilidad sobre la venta = $\dfrac{\text{utilidad neta}}{\text{ventas netas}} \times 100$

x_2: Tasa de utilidad sobre el capital contable =

$$\frac{\text{utilidad neta + participación a los trabajadores en las utilidades}}{\text{Capital Contable}} \times 100$$

x_3: Razón del capital propio = $\dfrac{\text{capital propio}}{\text{capital (activo total)}} \times 100$

x_4: Razón de activo fijo al valor neto: $\dfrac{\text{activo fijo}}{\text{capital propio}} \times 100$

x_5: Indice de solvencia = $\dfrac{\text{activo circulante}}{\text{pasivo circulante}} \times 100$

x_6: Tasa de crecimiento del capital contable =

$$\left(\sqrt[5]{\text{capital contable (80)/capital contable (75)}} - 1\right) \times 100$$

x_7: El capital total (activo total) = log(activo total)

Estos cálculos de los indicadores fueron efectuados utilizando como fuente, "Información Financiera de Empresas Mexicanas 1975/80" de la Secretaría de Programación y Presupuesto editado en 1982 en la ciudad de México. Todos los datos que se utilizaron son del año 1980, excepto x_6 que es la combinación de los de 1975 y los de 1980.

Con respecto a la tasa de crecimiento, la idea inicial era obtener la tasa de crecimiento de la utilidad, sin embargo, por la razón de que existen algunas empresas que registran utilidades con signo negativo en el ejercicio de 1975 o en el caso de 80, no fue posible calcular la tasa promedio de crecimiento.

TABLA 4-1: LOS DATOS DE 45 EMPRESAS

Nº	NOMBRE	TASA DE UTILIDAD SOBRE LA VENTA (x1)	TASA DE UTILIDAD SOBRE EL CAPITAL CONTABLE (x2)	RAZON DE CAPITAL PROPIO (x3)	RAZON DE ACTIVO FIJO AL VALOR NETO (x4)	INDICE DE SOLVENCIA (x5)	TASA DE CRECIMIENTO DEL CAPITAL CONTABLE (x6)	EL CAPITAL TOTAL (x7)
1	Eaton Manufacturera, S.A.	8.8	26.0	44.3	81.4	180.3	55.6	9.35
2	Spicer, S.A.	10.1	24.1	43.7	124.5	141.2	57.2	9.79
3	Transmisiones y Equipos Mecánicos, S.A.	9.1	15.3	57.4	93.8	158.1	55.9	9.78
4	Motores y Refacciones, S.A.	7.4	17.3	52.7	68.4	242.9	39.3	9.19
5	Anderson Clayton Co., S.A.	3.8	30.8	40.6	24.0	164.8	6.8	9.44
6	Cervecería Moctezuma, S.A.	7.3	13.8	46.4	137.1	91.4	49.0	10.11
7	Bacardí y Compañía, S.A.	7.9	23.0	61.8	16.5	232.7	3.6	8.85
8	Martell de México, S.A.	10.9	12.7	66.6	66.8	184.4	37.7	9.01
9	Cigarros La Tabacalera, S.A.	1.3	2.9	52.7	71.8	182.0	34.6	9.37
10	Fábricas de Papel Loreto	8.2	18.2	55.6	67.1	170.0	21.0	9.12
11	Celulosa de Chihuahua, S.A.	7.2	8.2	64.0	103.7	417.8	18.8	9.39
12	Cía. Industrial San Cristóbal, S.A.	10.7	10.4	68.2	104.1	171.2	59.5	9.75
13	Cementos Apasco, S.A.	19.2	15.8	51.9	165.2	49.6	76.1	9.86
14	Ladrillera Monterrey, S.A.	7.3	8.1	61.0	119.9	106.7	46.3	9.12
15	Cementos Tolteca, S.A.	8.0	7.7	57.0	150.6	116.0	13.9	9.86
16	Vidriera Monterrey, S.A.	7.2	14.7	53.4	122.7	179.9	33.4	9.47
17	Vidrio Plano, S.A.	9.6	13.6	64.6	87.4	162.8	29.7	8.98
18	Asbestos de México, S.A.	4.5	5.8	79.0	91.0	142.2	30.3	9.05
19	Teleindustria Ericsson, S.A.	4.6	11.8	45.4	91.8	152.0	33.3	9.43
20	Industria de Telecomunicación, S.A.	7.7	25.0	48.6	62.3	165.2	47.5	9.28
21	Iem, S.A.	1.8	3.3	53.4	80.1	159.6	37.3	9.53
22	General Electric de México, S.A.	5.3	12.2	55.8	83.0	126.9	38.1	9.61
23	General Popo, S.A.	5.5	46.5	22.8	137.3	157.8	11.6	9.14
24	Editorial Diana, S.A.	14.9	18.0	59.7	33.2	170.8	38.8	8.52
25	Aluminio, S.A.	13.2	18.8	81.5	58.2	292.3	31.0	9.23
26	Industria Nacobre, S.A.	9.5	21.9	49.2	102.0	159.8	44.9	9.72
27	Reynolds Aluminio, S.A.	7.4	23.8	46.3	61.9	153.1	30.9	8.91
28	Fundidora de Monterrey, S.A.	1.4	1.0	47.8	138.0	279.2	40.4	10.38
29	Tubos de Acero de México, S.A.	11.5	10.7	69.4	88.0	230.5	60.5	10.03
30	Tubacero, S.A.	5.8	21.1	31.3	100.7	172.2	32.3	9.68
31	Altos Hornos de México, S.A.	4.0	2.9	50.8	137.7	185.4	56.3	10.73
32	Industria Minera de México, S.A.	2.0	33.4	35.7	151.4	245.1	18.2	9.97
33	Industrias Peñoles, S.A.	13.6	52.6	40.4	120.7	56.9	35.8	10.20
34	Minería Frisco, S.A.	29.7	22.7	78.4	57.3	275.5	46.6	9.57
35	Cía. Minera Autlán, S.A.	- 2.9	- 8.7	14.3	410.7	98.5	28.9	9.79
36	Cía. Minera de Cananea, S.A.	- 6.2	-19.5	17.0	456.2	111.1	3.8	9.79
37	Minas de San Luis, S.A.	34.8	37.3	72.4	56.0	222.2	76.1	9.20
38	Industrias Resistol, S.A.	7.7	16.0	53.8	106.3	156.9	43.4	9.84
39	Unión Carbide Mexicana, S.A.	9.8	34.7	35.1	147.1	141.5	22.9	9.58
40	Celanese Mexicana, S.A.	9.4	11.4	60.0	118.6	202.9	36.3	10.22
41	Cydsa, S.A.	8.7	11.0	47.2	150.5	193.5	20.2	10.21
42	Negromex, S.A.	9.4	15.6	53.4	139.3	151.4	42.1	9.37
43	Petrocel, S.A.	13.8	12.1	65.2	123.3	77.7	44.5	9.63
44	Cannon Mills, S.A.	12.2	32.5	41.8	97.0	150.1	32.6	9.98
45	Puritan, S.A.	21.5	41.9	75.3	11.3	642.5	33.2	8.57

1 ANALISIS DE LA DISTANCIA CUADRADA DE MAHALANOBIS

Los datos presentados en la Tabla 4-1 fueron sometidos al análisis de distancias cuadradas de Mahalanobis cuyo programa se muestra en el programa 1-1, utilizando la fórmula:

$$D^2 = \sum_i \sum_j \sigma^{ij} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \qquad \ldots(1\text{-}1)$$

La cual se expresa como sigue, utilizando los símbolos de la álgebra matricial:

$$D^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \, \mathbf{V}^{-1} \, (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \qquad \ldots(1\text{-}1)'$$

Este programa, aparte de obtener D^2, calcula también la matriz de sumas de cuadrados y productos $\mathbf{S}$ y la matriz de varianza-covarianza $\mathbf{V}$, puesto que éstas son necesarias para el cómputo de D^2.

Por otra parte, también cabe mencionar que en este programa utiliza un subprograma del paquete de IMSL, el cual está a disposición de los estudiantes universitarios en el Programa Universitario de Cómputo.

El resultado del programa se muestra en el Programa 1-2. Como se observa, estos resultados están expresados con FORMAT (1PE15.7), salvo las medias de x.

Con respecto a las matrices de varianza-covarianza y de sumas de cuadrados y productos, se observa que la mayoría de los datos encierra la correla-

```
           BURROUGHS LARGE SYSTEMS FORTRAN COMPILATION    MARK 3.3.320 THURSDAY, 05/17/84    04:59 PM
               L A / D I S T A N C I A / C U A D R A D A / D E / M A H A L A N O B I S _ O N _ D I S K
               = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = =

C CASO DE LAS EMPRESAS MEXICANAS 1                                                       (  000:0000:5
C LA DISTANCIA CUADRADA DE MAHALANOBIS                                                   (  000:0000:5
                                                                                         START OF SEGMENT 002
      DIMENSION X (45, 7), S (7, 7), XMED (7), SUMX (7), V (7, 7), VINV                  (  002:0000:0
     1(7, 7), WKAREA (75), D2 (45)                                                       (  002:0000:0
C LECTURA DE X                                                                           (  002:0000:0
      READ (5, /) ((X(I, J), J = 1, 7), I = 1, 45)                                       (  002:0000:0
                                                                                              FIB IS 0006 LONG
      002:0015:1  IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 002:0000
      DO 10 I = 1, 7                                                                     (  002:0015:2
   10 SUMX (I) = 0.0                                                                     (  002:0016:0
C CALCULO DE MEDIAS                                                                      (  002:001A:1
      DO 30 J = 1, 7                                                                     (  002:001A:1
      DO 20 I = 1, 45                                                                    (  002:001A:5
      SUMX (J) = SUMX (J) + X (I, J)                                                     (  002:001B:3
      XMED (J) = SUMX (J) / 45                                                           (  002:001F:4
   20 CONTINUE                                                                           (  002:0022:4
   30 CONTINUE                                                                           (  002:0025:2
      DO 40 I = 1, 7                                                                     (  002:0028:0
      DO 40 J = 1, 7                                                                     (  002:0028:4
      S (I, J) = 0. 0                                                                    (  002:0029:2
   40 CONTINUE                                                                           (  002:002C:0
C CALCULO DE LA MATRIZ DE CUADRADOS Y PRODUCTOS.                                         (  002:0031:2
      DO 70 K = 1, 7                                                                     (  002:0031:2
      DO 60 L = 1, 7                                                                     (  002:0032:0
      DO 50 M = 1, 45                                                                    (  002:0032:4
      S(K, L) = S(K, L) + (X(M, K) - XMED(K)) * (X(M, L) - XMED(L))                      (  002:0033:2
   50 CONTINUE                                                                           (  002:003D:5
   60 CONTINUE                                                                           (  002:0040:3
   70 CONTINUE                                                                           (  002:0043:1
C OBTENCION DE LA MATRIZ DE VARIANZA_COVARIANZA                                          (  002:0045:5
      DO 90 I = 1, 7                                                                     (  002:0045:5
      DO 80 L = 1, 7                                                                     (  002:0046:3
      V(I, L) = S(I, L) / 44                                                             (  002:0047:1
   80 CONTINUE                                                                           (  002:004C:3
   90 CONTINUE                                                                           (  002:004F:1
      WRITE (6, 100)(XMED(I), I =1, 7)                                                   (  002:0051:5
                                                                                              FIB IS 0006 LONG
  100 FORMAT(1H1, 1X, 'MEDIAS DE X=', 7(F10.3), /)                                       (  002:005E:2
      WRITE(6, 150) ((S(J, K), K =1, 7), J =1, 7)                                        (  002:005E:2
      WRITE (6, 160) ((V(I, J), I = 1, 7), J = 1, 7)                                     (  002:0071:2
C LLAMAR AL PAQUETE DE LA INVERSION DE UNA MATRIZ                                        (  002:0084:2
      IA = 7                                                                             (  002:0084:2
      IDGT = 3                                                                           (  002:0085:1
      N = 7                                                                              (  002:0086:0
      CALL LINV2F (V, N, IA, VINV, IDGT, WKAREA, IER)                                    (  002:0086:5
      DO 101 I = 1, 45                                                                   (  002:008E:3
  101 D2 (I) = 0.0                                                                       (  002:008C:1
C CALCULO DE LAS DISTANCIAS CUADRADAS DE MAHALANOBIS.                                    (  002:0090:2
      DO 130 K = 1, 45                                                                   (  002:0090:2
      DO 120 I = 1, 7                                                                    (  002:0091:0
      DO 110 J = 1, 7                                                                    (  002:0091:4
      D2 (K) = D2 (K) + VINV (I, J) * (X(K, I) - XMED(I)) * (X(K, J) -                   (  002:0092:2
     1XMED(J))                                                                           (  002:009C:2
  110 CONTINUE                                                                           (  002:009F:1
  120 CONTINUE                                                                           (  002:00A0:5
  130 CONTINUE                                                                           (  002:00A3:3
      WRITE (6,170) ((VINV(J, K), K = 1, 7), J = 1, 7)                                   (  002:00A6:1
C IMPRIMIR LOS RESULTADOS DE LAS DISTANCIAS CUADRADAS DE MAHALANOBIS                     (  002:00B8:2
      WRITE (6, 140)(D2(I), I = 1, 45)                                                   (  002:00B8:2
  140 FORMAT (///, 3X, 'LAS DISTANCIAS CUADRADAS DE MAHALANOBIS DE 45 EM                 (  002:00C5:2
     1PRESAS =', T60, 1PE15.7, //, 44(T60, 1PE15.7, //))                                 (  002:00C5:2
  150 FORMAT (///, 3X, 'LA MATRIZ DE CUADRADOS Y PRODUCTOS =', ///, 7(14                 (  002:00C5:2
     1X, 1P7E15.7, //))                                                                  (  002:00C5:2
  160 FORMAT (///, 3X, 'LA MATRIZ DE VARIANZA-COVARIANZA =', ///, 7(14X,                 (  002:00C5:2
     1 1P7E15.7, //))                                                                    (  002:00C5:2
  170 FORMAT (///////, 3X, 'LA MATRIZ INVERSA DE V =', ///, 7(14X, 1P7E1                 (  002:00C5:2
     15.7, //))                                                                          (  002:00C5:2
      STOP                                                                               (  002:00C5:2
      END                                                                                (  002:00C6:1
                                                                                   SEGMENT 002 IS 00F9 LONG
```

MEDIAS DE X= 8.991 17.298 52.747 111.464 184.991 36.804 9.527

LA MATRIZ DE CUADRADOS Y PRODUCTOS =

2.2185564E+03	2.1983091E+03	2.8057369E+03	-1.1958234E+04	8.6968764E+03	2.6641018E+03	-3.6044333E+01
2.1983091E+03	8.0155988E+03	2.0437422E+02	-2.4811664E+04	1.4685279E+04	2.4136044E+02	-7.7434333E+01
2.8057369E+03	2.0437422E+02	1.0045770E+04	-3.3957462E+04	2.5245727E+04	3.8059916E+03	-9.2330667E+01
-1.1958234E+04	-2.4811664E+04	-3.3957462E+04	2.8076696E+05	-1.2027839E+05	-1.0789963E+04	7.0807167E+02
8.6968764E+03	1.4685279E+04	2.5245727E+04	-1.2027839E+05	3.8753454E+05	-8.3002382E+03	-5.0445033E+02
2.6641018E+03	2.4136044E+02	3.8059916E+03	-1.0789963E+04	-8.3002382E+03	1.2256079E+04	7.3899667E+01
-3.6044333E+01	-7.7434333E+01	-9.2330667E+01	7.0807167E+02	-5.0445033E+02	7.3899667E+01	9.8206000E+00

LA MATRIZ DE VARIANZA-COVARIANZA =

5.0430828E+01	4.9961571E+01	6.3766747E+01	-2.7177805E+02	1.9765628E+02	6.0547768E+01	-8.1918939E-01
4.9961571E+01	1.8217249E+02	4.6448687E+00	-5.6390144E+02	3.3375634E+02	5.4854646E+00	-1.7598712E+00
6.3766747E+01	4.6448687E+00	2.2831295E+02	-7.7176051E+02	5.7376652E+02	8.6550717E+01	-2.0984242E+00
-2.7177805E+02	-5.6390144E+02	-7.7176051E+02	6.3810673E+03	-2.7335999E+03	-2.4522643E+02	1.6092538E+01
1.9765628E+02	3.3375634E+02	5.7376652E+02	-2.7335999E+03	8.8076031E+03	-1.8864178E+02	-1.1464780E+01
6.0547768E+01	5.4854646E+00	8.6550717E+01	-2.4522643E+02	-1.8864178E+02	2.7945634E+02	1.6795379E+00
-8.1918939E-01	-1.7598712E+00	-2.0984242E+00	1.6092538E+01	-1.1464780E+01	1.6795379E+00	2.2319545E-01

LA MATRIZ INVERSA DE V =

9.1482530E-02	-3.4107693E-02	-3.0990065E-02	-3.7833741E-03	-1.4336370E-05	-1.3787721E-02	1.5127008E-01
-3.4107693E-02	2.3493752E-02	1.7903906E-02	2.8375578E-03	-3.5979761E-04	3.7666107E-03	-2.3026294E-02
-3.0990065E-02	1.7903906E-02	2.3465453E-02	2.8977830E-03	-5.8610149E-04	1.2413016E-03	-3.3472481E-04
-3.7833741E-03	2.8375578E-03	2.8977830E-03	6.4837080E-04	-1.9812925E-05	5.1743010E-04	-1.5927347E-02
-1.4336370E-05	-3.5979761E-04	-5.8610149E-04	-1.9812925E-05	1.6484142E-04	2.8977643E-04	-6.8465031E-04
-1.3787721E-02	3.7666107E-03	1.2413016E-03	5.1743010E-04	2.8977643E-04	7.2760868E-03	-8.6409606E-02
1.5127008E-01	-2.3026294E-02	-3.3472481E-04	-1.5927347E-02	-6.8465031E-04	-8.6409606E-02	6.6143077E+00

LAS DISTANCIAS CUADRADAS DE MAHALANOBIS DE 45 EMPRESAS = 4.9092649E+00
3.1260180E+00
2.0568453E+00
2.3276509E+00
8.8128992E+00
2.3422813E+00
7.2863460E+00

2.1613315E+CC
4.7230431E+CC
2.2991656E+CC
8.6221777E+CC
4.0193611E+CC
9.0615626E+CC
4.4765467E+CC
8.0169909E+CC
2.4806339E-C1
2.8618736E+CC
1.4100401E+C1
2.3762905E+CC
3.0157135E+CC
3.6009971E+CC
1.5214099E+CC
1.0808115E+C1
8.1319678E+CC
7.1469773E+CC
7.0612789E-C1
3.3749622E+CC
8.8005722E+CC
4.6233613E+CC
6.4848032E+CC
9.0124862E+CC
8.6235356E+CC
1.5694584E+C1
1.5217242E+C1
1.6562822E+C1
2.2468793E+C1
1.5741449E+C1
8.5810923E-C1
4.3106974E+CC
5.9075921E+CC
7.6713661E+CC
1.0869085E+CC
4.4055288E+CC
3.2725720E+CC
2.7122926E+C1

PROGRAMA 1-2 (CONT.)

ción positiva, aunque x_4 registra covarianza negativa con todas otras variables menos con x_7. Es razonable acerca de la x_4, por la razón de que es un indicador que mientras sea inferior, implica que la empresa se encuentra en mejor situación. Lo que no se puede explicar es lo que concierne a la última variable x_7, ya que ésta refleja la magnitud de la empresa y por lo tanto supuestamente mientras que sea más grande ésta, debe de estar mejor la empresa, empero nos deja ver una correlación negativa con x_1, x_2, x_3 y x_5, de tal modo que hasta hace sospechar a uno que en México, las empresas con menos capital posible, llegan a tener la tasa de utilidad exuberante.

Con el resultado de distancias cuadradas de Mahalanobis de 45 empresas mostrado en esta manera, no es muy claro para calificar las empresas, y por consecuente, en la Tabla 4-2, se aprecian las clasificaciones y por otra parte la visualización de la distribución es como se señala en la gráfica 4-1.

El límite de significancia al cual rebase el valor de D^2 con la probabilidad de 0.05 se puede considerar como χ^2, cuando el tamaño de la muestra es suficientemente grande. Sin embargo, en este ejemplo que estamos tratando, como es de un tamaño reducido, se utiliza la estimación de $F_{0.05/n}$ para obtener el límite d_o.

$$F_{0.05/n}\ (p,n-p-1) = \left\{1 - \frac{2}{9p} + u_{0.05/n}\sqrt{\frac{2}{9p}}\right\}^3 \qquad \ldots(4-1)$$

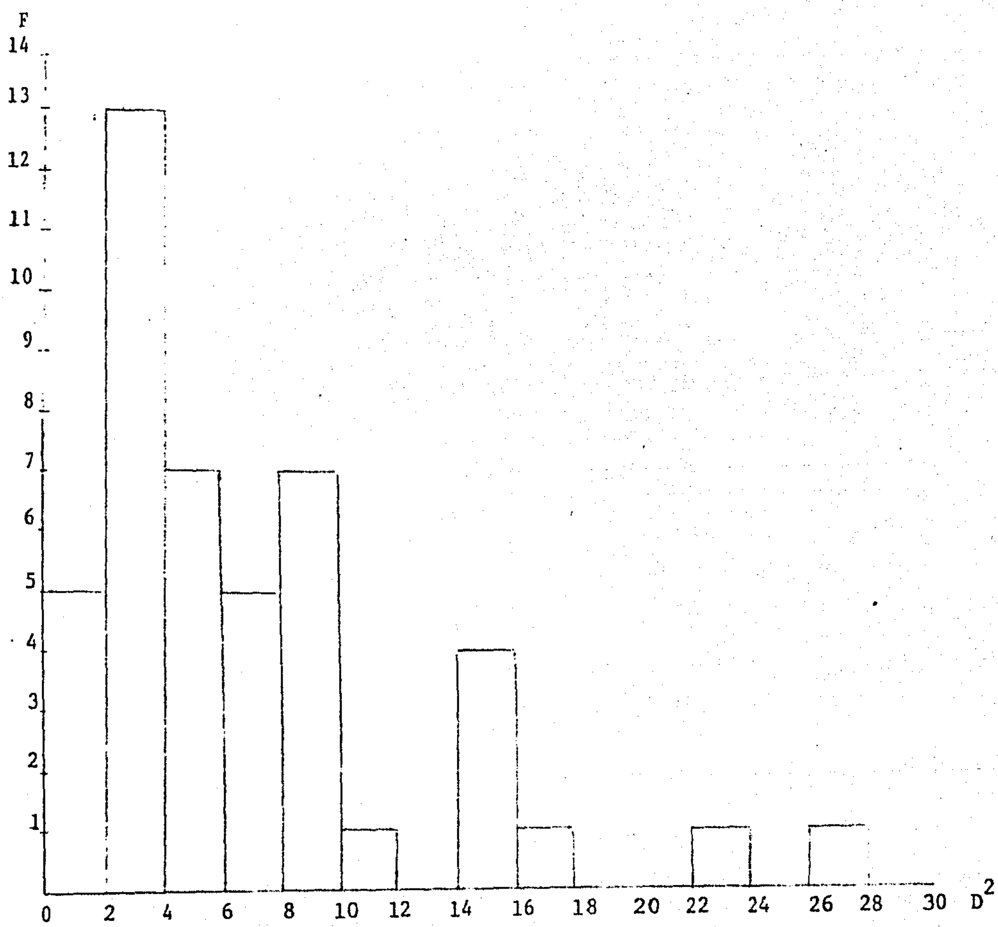
Retomando la relación (1-4) que aparece en el capítulo 1:

$$d_o = \frac{(n-1)^2 p \quad F_{0.05/n}}{n(n-p-1) + np \quad F_{0.05/n}} \qquad \ldots(1-4)$$

TABLA 4-2

D2	EMPRESAS (Nº)	Nº (frecuencia)
0-2	16, 22, 26, 38, 42	5
2-4	2,3,4,6,8,10,17,19,20,21,27,40,44	13
4-6	1, 9, 12, 14, 29, 39, 43	7
6-8	7, 15, 25, 30, 41	5
8-10	5, 11, 13, 24, 28, 31, 37	7
10-12	23	1
12-14		0
14-16	18, 33, 34, 37	4
16-18	35	1
18-20		0
20-22		0
22-24	36	1
24-26		0
26-28	45	1
	T O T A L	45

GRAFICA 4-1



Utilizando estas dos fórmulas, establecemos el límite de 5% para - nuestro caso:

$$F_{0.05/n}\ (7,37) = \left\{1 - \frac{2}{9 \times 7} + 3.06 \times \sqrt{\frac{2}{9 \times 7}}\right\}^3$$

$$= 3.46672$$

$$d_\circ = \frac{44^2 \times 7 \times 3.46672}{45 \times 37 + 45 \times 7 \times 3.46672} = 17.0405$$

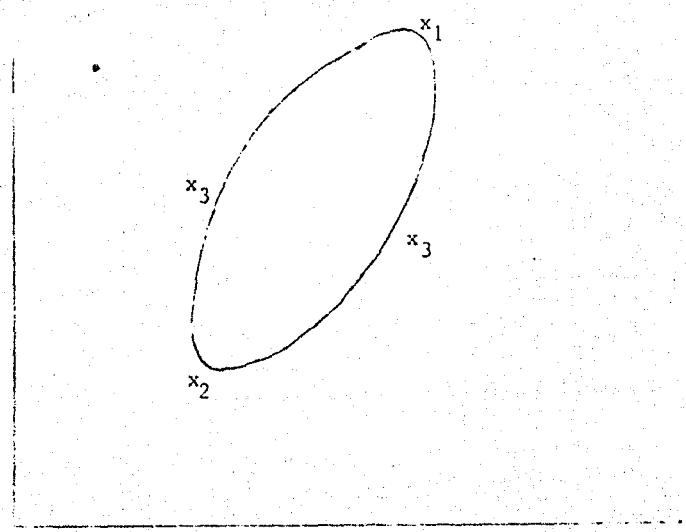
Al comparar los valores de D^2 de 45 empresas con 17.04, se puede - averiguar cuáles son las anormales. Efectivamente aparecen en la Tabla 4-2 dos empresas que registran valores superiores a éste, que son Cía. Minera de Cananea, S.A. y Púritan, S.A.

Aún siendo inferior el valor que registra la empresa Nº 35, es una cifra muy próxima a $d_\circ$ y también se podría sospechar de su situación financiera. Con respecto a estas dos empresas; Nº 35 y 36, se podría afirmar que sus estados financieros son críticos, ya que son las dos únicas empresas que registran utilidades con signo negativo y muestran altas razones de activos fijos al - valor neto. En contraste, la empresa Nº 45 (Púritan) obtiene un valor de D^2 exorbitado por su alta tasa de utilidad, baja razón de activo fijo al valor - neto y excelente índice de solvencia, y por todo esto, no se considera como - una empresa deteriorada, sino al contrario, se considera que se encuentra en una condición extraordinaria en el sentido financiero.

Sería conveniente recordar que la distancia cuadrada de Mahalanobis es una estadística que refleja qué tan alejado está un elemento del centro de gra vedad dentro de un conjunto. Y por lo consecuente, hay tres posibilidades de que una muestra registre considerablemente grande de esta estadística, las cuales son:

1) Cuando el elemento es extraordinariamente superior a otros.
2) El caso contrario de 1), es decir, cuando una está inferior en una forma desmesurada.
3) Cuando el espécimen concibe desequilibrio entre algunas variables entre las cuales existen correlaciones.

GRAFICA 4-2



Digamos que se tratan sólo 2 variables (gráfica 4-2) y éstas tienen una correlación positiva. Además supondremos que mientras que sean mayores estas variables, implica que se encuentra mejor estado financiero. En la gráfica 4-2, las x_1, x_2 y x_3 representan los tres casos mencionados anteriormente. Volviendo a nuestro ejemplo, las empresas Nº 35 y 36 se puede considerar que se encuentran en el segundo caso y la Nº 45 debe ser del primer caso. Probablemente también es importante recordar que estas primeras dos empresas son de la misma actividad (minería) y a pesar de que no comprendemos las situaciones de otras empresas mineras, se podría sospechar de la situación de las empresas mineras de 1980, y comparando con los acontecimientos que pudieron haber influido económica y políticamente a esta actividad en el año 1980 o en unos años anteriores a éste, quizá sea posible explicar sus causas.

Por otra parte, con la ayuda de la gráfica 4-3 que muestra la frecuencia acumulativa porcentual comparada con la distribución de χ^2, se puede clasificar estas 45 empresas en 3 grupos que comprenden:

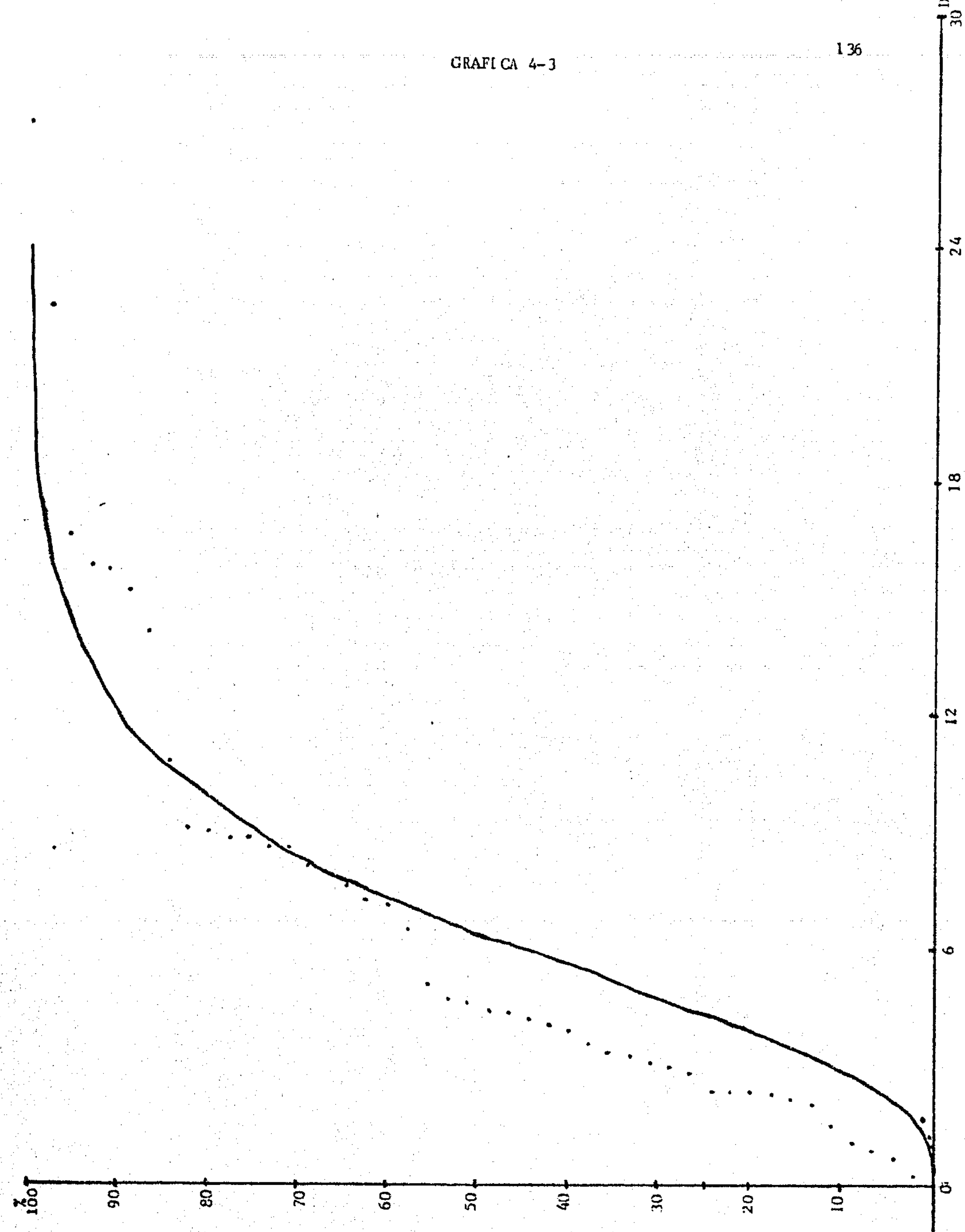
Grupo A: $0 < D^2 < 6$ que comprenden 25 empresas (55.6%), puesto que entre la empresa Nº 1 y la Nº 30 hay una brecha notoria.

Grupo B: $6 < D^2 < 12$, donde se encuentran 13 empresas (aproximadamente 28.9% de la totalidad), puesto que también se aprecia una brecha entre la Nº 23 y la Nº 18.

Grupo C: Las restantes 7 empresas que comprenden con D^2 mayor que 12.

Como se ha expuesto en el capítulo 1, las empresas del Grupo A son de complexión promedia, las que se encuentran dentro del Grupo B muestran tener

GRAFICA 4-3



complexiones un tanto alejadas de la normal y se deben de someter a un examen para hallar sus causas, y por último las que se consideran en el Grupo C requieren un examen profundo (aunque en el caso de la empresa Nº 45, está alejada por su excelente estado financiero).

Si se divide este conjunto de 45 empresas de acuerdo con este criterio, la Tabla 4-2 se convierte en la Tabla 4-3.

TABLA 4-3

	E M P R E S A S (Nº)
GRUPO A	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 26, 27, 29, 38, 39, 40, 42, 43, 44
GRUPO B	5, 7, 11, 13, 15, 23, 24, 25, 28, 30, 31, 32, 41
GRUPO C	18, 33, 34, 35, 36, 37, 45

Algunas observaciones que se pueden hacer con respecto a esta clasificación de los 3 grupos son:

a) Las 4 empresas de autopartes se encuentran en el Grupo A (Nº 1, Nº 2, Nº 3 y Nº 4).

b) Igualmente las 4 empresas de electrónica están en el mismo grupo (del Nº 19 al Nº 22).

c) De 6 empresas con la actividad química, (Nº 38-43), se encuentran 5 dentro del Grupo A, de modo que solamente la empresa Nº 41 se encuentra dentro del Grupo B.

d) En cuanto a otras actividades, la mayoría de las empresas se distribuyen entre el Grupo A y el B, y no se aprecia alguna tendencia de separar estas actividades, salvo la minería.

e) De la minería, se encuentra sólo una empresa(Nº 32) en el Grupo B y las demás Nº(33-37) se consideran como las del Grupo C. Sin embargo, dentro de éstas existen empresas, que, al parecer registran D^2 relativamente alto por su superioridad en la situación financiera (por ejemplo las Nº 34 y Nº 37), la cual se puede observar en la Tabla 4-1.

f) A pesar de que la empresa Nº 18 se ubique dentro del Grupo C, no tiene registrados los indicadores insólitamente superiores o reducidos, y por consecuencia, únicamente se puede sospechar la existencia de la incongruencia entre algunos indicadores.

En resumen, se podría decir que este análisis no mostró satisfactoriamente la tendencia de cada actividad, aunque para algunas, sí se pudieron apreciar sus tendencias. La razón de este resultado podría atribuirse al tamaño reducido del conjunto muestral.

Sin embargo, como ejemplo de aplicación de la distancia cuadrada de Mahalanobis, seguramente ha servido en el sentido de cómo aplicarla y qué se puede observar por medio de su aplicación.

Y por último, se puede sugerir que, aún utilizando los mismos datos de la Tabla 4-1 y su resultado de las distancias cuadradas de Mahalanobis, se hagan las gráficas de las distribuciones combinando 2 de estos 7 indica dores con el fin de aclarar posibles tendencias de las actividades comparando con los valores D^2. Además, por ejemplo en cuanto al caso de la empresa Nº 18, se desconoce cuáles son los indicadores que no concuerdan, empero cambiando la cifra de cada indicador y obteniendo su respectiva distancia cuadrada de Mahalanobis, posiblemente se encuentre el indicador que no concuerde con otros.

2) LA FUNCION DE DISCRIMINACION

De las mismas 45 empresas del inciso 1), se eligieron 10 empresas que se pueden considerar de mejor situación financiera y 10 de un estado financiero decaido, y se asignan las primeras del grupo 1 y las últimas como del grupo 2 con el fin de establecer una función de discriminación. -- Estas 20 empresas están mostradas en la Tabla 4-4.

TABLA 4-4

G_1		G_2	
Nº	N O M B R E	Nº	N O M B R E
7	Bacardí y Compañía, S.A.	5	Anderson Clayton Co., S.A.
8	Martell de México, S.A.	6	Cervecería Moctezuma, S.A.
12	Cía. Industrial San Cristóbal, S.A.	9	Cigarros La Tabacalera, S.A.
		14	Ladrillera Monterrey, S.A.
24	Editorial Diana, S.A.	15	Cementos Tolteca, S.A.
25	Aluminio, S.A.	21	Iem, S.A.
29	Tubos de Acero de México, S.A.	23	General Popo, S.A.
33	Industrias Peñoles, S.A.	28	Fundidora de Monterrey, S.A.
34	Minería Frisco, S.A.	35	Cía. Minera Autlán, S.A.
37	Minas de San Luis, S.A.	36	Cía. Minera de Cananea, S.A.
45	Púritan, S.A.		

Es importante aclarar que esta selección de 20 empresas fue ejecutada en la forma independiente de sus distancias cuadradas de Mahalanobis; aunque también se podrían utilizar éstas, ya que se considera que tanto las empresas de mejor situación financiera como las de un estado relativamente vencido, -

deben de registrar cifras mayores en sus distancias cuadradas de Mahalanobis. Sin embargo, existe una problemática que es la ponderación. Dentro de un análisis empresarial, normalmente se considera una política de evaluación que debe de quedar reflejada en la ponderación entre los indicadores, lo cual ha sido expuesto ya dentro del capítulo anterior. Y por esta razón, se puede utilizar la puntuación por medio del análisis PCA para seleccionar las empresas, de las cuales los datos se someten a la fijación de la función de discriminación, aunque en el caso de nuestro ejemplo tampoco fue de este modo, sino la selección fue un tanto "manual" observando directamente los datos aparecidos en la Tabla 4-1.

Tomando las cifras que aparecen en la Tabla 4-1 acerca de estas 20 empresas, como datos se realizó un análisis de función de discriminación por medio del programa que se muestra como Programa 2-1. Es un programa simple, mas se puede utilizar para otros datos de otras muestras solamente cambiando "DIMENSION" las proposiciones "DO" que aparecen varias veces, las proposiciones "WRITE" y "READ" y sus respectivos "FORMAT".

Dentro de este programa aparece de nuevo "CALL LINV2F" que efectúa la inversión de la matriz de varianza-covarianza. El paquete IMSL cuenta con varias subrutinas para la inversión de una matriz, y anteriormente se utilizó "LINV1F" que es de memoria economizada, sin embargo, no obtuvo la convergencia y por lo tanto en el final la inversión de la matriz de varianza-covarianza fue ejecutada por medio de "LINV2F" que es de alta precisión.

Como se observa, hasta la inversión de la matriz de varianza-covarianza es prácticamente igual al programa 1-1, sólo que éste va tratando los dos grupos independientemente, aunque la matriz de varianza-covarianza es común para ambos, o es lo mismo decir, que esta matriz que se obtiene aquí su-- puestamente es del conjunto. Posteriormente, una vez calculada la matriz inversa de la de varianza-covarianza, se computa cada coeficiente de la - función de discriminación con base en la siguiente fórmula:

$$a_i = \sum_{j=1}^{p} V^{ij} d_j \qquad \ldots(2\text{-}9)$$

Y como su última fase, se calcula la eficiencia de discriminación - la cual es lo mismo que la distancia cuadrada de Mahalanobis entre los centros de gravedad de los dos grupos.

El resultado de este programa con los datos de 20 empresas ya men-- cionadas en la Tabla 4-4, está mostrado como Programa 2-2. De los 14 renglones que se aprecian después de "LAS MATRICES DE SUMAS DE CUADRADOS Y - PRODUCTOS =", los primeros 7 renglones corresponden a la matriz de suma de cuadrados y productos del grupo 1, y los siguientes 7 renglones correspon-- den a la del grupo 2.

En la matriz de varianza-covarianza, se aprecia un cambio de signos, la covarianza de x_2 y x_3, y la de x_2 y x_6, aunque fueron positivos en la matriz que se obtuvo para el análisis de la distancia cuadrada de Mahalanobis, aquí aparecen con signo negativo. Esto se puede atribuir al cambio del tamaño de la muestra.

La prueba de hipótesis para la eficiencia de discriminación de nuestro ejemplo, se puede efectuar por la siguiente ecuación:

$$F = \frac{N-P}{P(N-1)}\, Tp = \frac{N-P}{P(N-1)} \cdot \frac{n_1\, n_2}{n_1 + n_2} \cdot D^2 \qquad \ldots(2\text{-}13)$$

Por consiguiente, sustituyendo los valores en esta ecuación, se tiene:

$$F = \frac{10+10-7}{7(10+10-1)} \cdot \frac{10 \cdot 10}{10+10} \cdot 6{:}83677 = 3{:}3642$$

```
C CASO DE LAS EMPRESAS MEXICANAS 2                                          C   000:0000:5
C LA FUNCION DE DISCRIMINACION                                              C   000:0000:5
                                                                          START OF SEGMENT 002
      DIMENSION XG1 (10, 7), XG2 (10, 7), XME1 (7), XME2 (7), XSUM1 (7),    C   002:0000:0
     1XSUM2 (7), S1 (7, 7), S2 (7, 7), V (7, 7), VINV (7, 7), WKAREA        C   002:0000:0
     1(75), COEF (7)                                                        C   002:0000:0
      N = 7                                                                 C   002:0000:0
      IA = 7                                                                C   002:0000:5
      IDGT = 3                                                              C   002:0001:4
C LECTURA DE LAS X                                                          C   002:0002:3
      READ (5, /) ((XG1(I, J), J =1, 7), I = 1, 10), ((XG2(I, J), J = 1,    C   002:0002:3
                                                                              FIB IS 0006 LONG
     1 7), I = 1, 10)                                                       C   002:0019:1
      002:0025:1 IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 002:0019.
      DO 10 I = 1, 7                                                        C   002:0025:2
      XSUM1 (I) = 0. 0                                                      C   002:0026:0
      XSUM2 (I) =0.0                                                        C   002:0027:3
   10 CONTINUE                                                              C   002:0029:0
C CALCULO DE MEDIAS                                                         C   002:0029:4
      DO 30 I = 1, 7                                                        C   002:002B:4
      DO 20 J = 1, 10                                                       C   002:002C:2
      XSUM1 (I) = XSUM1(I) + XG1 (J, I)                                     C   002:002D:0
      XSUM2 (I) = XSUM2 (I) + XG2 (J, I)                                    C   002:0031:1
      XME1 (I) = XSUM1 (I) / 10                                             C   002:0035:2
      XME2 (I) = XSUM2 (I) / 10                                             C   002:0038:2
   20 CONTINUE                                                              C   002:003B:2
   30 CONTINUE                                                              C   002:003F:0
C CALCULO DE LAS MATRICES DE CUADRADOS Y PRODUCTOS                          C   002:0040:4
      DO 40 I = 1, 7                                                        C   002:0040:4
      DO 40 J = 1, 7                                                        C   002:0041:2
      S1 (I, J) = 0.0                                                       C   002:0042:0
      S2 (I, J) = 0.0                                                       C   002:0044:4
   40 CONTINUE                                                              C   002:0047:2
      DO 70 K = 1, 7                                                        C   002:004C:4
      DO 60 L = 1, 7                                                        C   002:004D:2
      DO 50 M = 1, 10                                                       C   002:004E:0
      S1(K, L) = S1(K, L) + (XG1(M, K) - XME1(K)) * (XG1(M, L) - XME1(L)    C   002:004E:4
     1)                                                                     C   002:0058:3
      S2(K, L) = S2(K, L) + (XG2(M, K)- XME2(K)) * (XG2(M, L) - XME2(L))    C   002:0059:1
   50 CONTINUE                                                              C   002:0063:4
   60 CONTINUE                                                              C   002:0066:2
   70 CONTINUE                                                              C   002:0069:0
C OBTENCION DE LA MATRIZ DE VARIANZA_COVARIANZA                             C   002:006B:4
      DO 80 I = 1, 7                                                        C   002:006B:4
      DO 80 J = 1, 7                                                        C   002:006C:2
      V (I, J) = (S1 (I, J) + S2 (I, J)) / 18                               C   002:006D:0
   80 CONTINUE                                                              C   002:0074:5
      WRITE (6, 190) (XME1(I), I =1, 7), (XME2(I), I = 1, 7)                C   002:007A:1
                                                                              FIB IS 0006 LONG
      WRITE (6, 140)                                                        C   002:008E:2
      WRITE (6, 150) ((S1(I, J), J = 1, 7), I = 1, 7)                       C   002:0092:2
      WRITE (6, 150) ((S2(I, J), J = 1, 7), I = 1, 7)                       C   002:00A5:2
      WRITE (6, 160) ((V (I, J), J = 1, 7), I = 1, 7)                       C   002:00B8:2
C LA INVERSION DE LA MATRIZ V POR PAQUETE                                   C   002:00CB:2
      CALL LINV2F (V, N, IA, VINV, IDGT, WKAREA, IER)                       C   002:00CB:2
C OBTENCION DE LOS COEFICIENTES DE LA FUNCION DE DISCRIMINACION             C   002:00D0:0
      DO 90 K = 1, 7                                                        C   002:00D0:0
      COEF (K) = 0.0                                                        C   002:00D0:4
   90 CONTINUE                                                              C   002:00D2:1
      DO 110 I = 1, 7                                                       C   002:00D4:5
      DO 100 J = 1, 7                                                       C   002:00D5:3
      COEF (I) = COEF (I) + VINV (I, J) * (XME1(J) - XME2(J))               C   002:00D6:1
  100 CONTINUE                                                              C   002:00DD:0
  110 CONTINUE                                                              C   002:00DF:4
C CALCULO DE LA EFICIENCIA DE LA DISCRIMINACION                             C   002:00E2:2
      D2 = 0.0                                                              C   002:00E2:2
      DO 130 I = 1, 7                                                       C   002:00E3:0
      DO 120 J = 1, 7                                                       C   002:00E3:4
      D2 = D2 + (XME1(I) - XME2(I)) * (XME1(J) - XME2(J)) * VINV(I, J)      C   002:00E4:2
  120 CONTINUE                                                              C   002:00ED:0
  130 CONTINUE                                                              C   002:00EF:4
C IMPRESION DE LOS RESULTADOS                                               C   002:00F2:2
      WRITE (6, 170) ((VINV(I, J), J = 1, 7), I = 1, 7)                     C   002:00F2:2
      WRITE (6, 180) (COEF(I), I = 1, 7)                                    C   002:0105:2
      WRITE (6, 250) D2                                                     C   002:0112:2
  140 FORMAT (///, 3X, 'LAS MATRICES DE CUADRADOS Y PRODUCTOS DE RESIDUO    C   002:0119:2
     1S =')                                                                 C   002:0119:2
  150 FORMAT (///, 7(14X, 1P7E16.8, //))                                    C   002:0119:2
  160 FORMAT (///, 3X, 'LA MATRIZ DE VARIANZA-COVARIANZA =', ///, 7(14X,    C   002:0119:2
     11P7E16.8, //))                                                        C   002:0119:2
  170 FORMAT (///////, 3X, 'LA MATRIZ INVERSA DE V =', ///, 7(14X, 1P7E1    C   002:0119:2
     16.8, //))                                                             C   002:0119:2
  180 FORMAT (//, 3X, 'LOS COEFICIENTES DE LA FUNCION DE DISCRIMINACION     C   002:0119:2
     1=', ///, 14X, 1P7E16.3)                                               C   002:0119:2
  190 FORMAT (1H1, 3X, 'LAS MEDIAS DE DOS GRUPOS DE X =', T35, 7F12.3,      C   002:0119:2
     1//, T35, 7F12.3)                                                      C   002:0119:2
  250 FORMAT (///, 3X, 'LA EFICIENCIA DE DISCRIMINACION D2 =', T55, 1PE1    C   002:0119:2
     16.8, ///, T55, 'CALCULO DE LA FUNCION DE DISCRIMINACION TERMINADO'    C   002:0119:2
     2)                                                                     C   002:0119:2
      STOP                                                                  C   002:0119:2
      END                                                                   C   002:011A:1
                                                                          SEGMENT 002 IS 0149 LONG
```

PROGRAMA 2-1

LAS MEDIAS DE LOS GRUPOS DE A 16.[illegible] [illegible] 67.[illegible] 61.010 257.900 42.280 9.293
2.130 8.59[illegible] 41.300 172.570 148.710 27.260 9.[illegible]

LAS MATRICES DE CUADRADOS Y PRODUCTOS DE RESIDUOS =

[illegible]	4.7[illegible]E+02	3.[illegible]714000E+02	-5.43727000E+02	3.08895000E+03	8.59434000E+02	-3.73710000E+00
4.[illegible]E+02	1.46[illegible]09000E+03	-6.19762000E+02	-3.05410000E+01	6.24106000E+03	-2.10218000E+02	3.99872000E+00
3.[illegible]E+02	-6.19762000E+02	1.24029500E+03	-1.02751000E+03	7.20421000E+03	4.63344000E+02	-1.63676000E+01
-5.43727000E+02	-3.05410000E+01	-1.02750200E+03	1.14536070E+04	-2.64873500E+04	2.36648200E+03	1.68854700E+02
3.08895000E+03	6.24106000E+03	7.20421000E+03	-2.64873500E+04	1.82777120E+05	-4.75479000E+03	-3.24168000E+02
8.59434000E+02	-2.10218000E+02	4.63344000E+02	2.36648200E+03	-4.75479000E+03	3.57195600E+03	4.18686000E+01
-3.73710000E+00	3.99872000E+00	-1.63676000E+01	1.68854700E+02	-3.24168000E+02	4.18686000E+01	3.06061000E+00

1.[illegible]E+02	5.16993000E+02	[illegible]E+02	-4.37266100E+03	-1.96623000E+02	2.13642000E+02	-3.34793000E+00
5.16993000E+02	3.16450900E+03	2.07270000E-02	-1.35537630E+04	1.14022100E+03	-4.26254000E+02	-3.11947000E+01
[illegible]E+02	2.07270000E+02	2.64114000E+03	-1.64210200E+04	1.31620000E+03	1.39661000E+03	-2.29700000E+00
-4.37266100E+03	-1.35537630E+04	-1.64210200E+04	1.40342010E+05	-2.92435070E+04	-6.27409200E+03	1.43294900E+02
-1.96623000E+02	1.14022100E+03	1.31620000E+03	-2.92435070E+04	2.56107490E+04	7.87974000E+02	5.34137000E+01
2.13642000E+02	-4.26254000E+02	1.39661000E+03	-6.27409200E+03	7.87974000E+02	2.55785400E+03	1.26642000E+01
-3.34793000E+00	-3.11947000E+01	-2.29700000E+00	1.43294900E+02	5.34137000E+01	1.26642000E+01	1.50561000E+00

LA MATRIZ DE VARIANZA-COVARIANZA =

5.[illegible]E+01	5.50447773E+01	4.05336667E+01	-2.73136000E+02	1.80683722E+02	5.96153333E+01	-3.96322839E-01
5.50447773E+01	2.79564333E+02	-2.01384444E+01	-3.64794667E+02	4.10071167E+02	-3.92475333E+01	-1.51133333E+00
4.05336667E+01	-2.01384444E+01	2.17657070E+02	-1.01158456E+03	5.01133389E+02	1.02784333E+02	-1.14814444E+00
-2.73136000E+02	-3.64794667E+02	-1.01158456E+03	1.99276561E+04	-3.09615872E+03	-1.85422778E+02	1.73416444E+01
1.80683722E+02	4.10071167E+02	5.01133389E+02	-3.09615872E+03	1.17437705E+04	-2.19267556E+02	-1.50419056E+01
5.96153333E+01	-3.92475333E+01	1.02784333E+02	-1.85422778E+02	-2.19267556E+02	3.40541111E+02	3.02960000E+00
-3.96322839E-01	-1.51133333E+00	-1.14814444E+00	1.73416444E+01	-1.50419056E+01	3.02960000E+00	2.53678889E-01

LA MATRIZ INVERSA DE V =

[illegible]	[illegible]	-2.95199374E-02	-3.56273130E-03	4.03259878E-04	-9.91769118E-03	1.95451632E-01
[illegible]	1.99440013E-02	2.03346570E-02	2.82762612E-03	-4.98766041E-04	3.06897618E-03	-9.21398855E-02
-2.95199374E-02	2.03340570E-02	3.15962091E-02	3.72338172E-03	-7.77726325E-04	2.64341969E-04	-8.57797900E-02
-3.56273130E-03	2.82762612E-03	3.72338172E-03	5.86711360E-04	-7.42539374E-05	2.72013857E-04	-1.96284183E-02
4.03259878E-04	-4.98766041E-04	-7.77726225E-04	-7.42539374E-05	1.19023274E-04	9.74218622E-05	5.10872700E-03
-9.91769118E-03	3.06897619E-03	2.64341970E-04	2.72013353E-04	9.74213632E-05	5.35849292E-03	-7.88011147E-02
1.95431632E-01	-9.21398855E-02	-8.57797900E-02	-1.96284183E-02	5.10872700E-03	-7.88011147E-02	5.59613133E+00

LOS COEFICIENTES DE LA FUNCION DE DISCRIMINACION =

-1.44213222E-02 1.70216770E-01 2.71452354E-01 3.03012048E-02 -1.57486418E-03 1.33511321E-02 -1.52320945E+00

LA EFICIENCIA DE DISCRIMINACION D2 = 6.84677234E+00

CALCULO DE LA FUNCION DE DISCRIMINACION TERMINADO

PROGRAMA 2-2 (CONT.)

Si se compara este valor con el valor de la Tabla F con grados de - libertad 7 y 13, es del orden de 2.83 para $\alpha = 0.05$, por lo tanto se rechaza la hipótesis de que $D^2 = 0$ (no se puede discriminar en dos grupos) con el - nivel de significancia de 95%.

De esta manera se establece la función de discriminación:

$z = -0.0144\ (x_1 - \bar{\bar{x}}_1) + 0.1702\ (x_2 - \bar{\bar{x}}_2) + 0.2715\ (x_3 - \bar{\bar{x}}_3) + 0.0303\ (x_4 - \bar{\bar{x}}_4)$
$- 0.0016\ (x_5 - \bar{\bar{x}}_5) + 0.0134\ (x_6 - \bar{\bar{x}}_6) - 1.5232\ (x_7 - \bar{\bar{x}}_7)$

o quitando los paréntesis y sustituyendo $\bar{\bar{x}}_i = (\bar{x}_i^{(1)} + \bar{x}_i^{(2)})/2$;

$z = -0.0144x_i + 0.1702x_2 + 0.2715x_3 + 0.0303x_4 - 0.0016x_5 + 0.0134x_6 -$
$1.5232x_7 - 6.7156.$

Con esta ecuación, se pueden clasificar todas las empresas según el - signo que tenga z correspondiente. No obstante, como se ha señalado en el - capítulo 2, es frecuente que aparezcan las muestras que conciben un valor absoluto de z sumamente reducido y que esto implique ubicar dentro de la parte - común de ambos grupos. Para reducir la probabilidad de error de clasificación, se establece una región de sospecha, y la empresa que se encuentra dentro de esta región, será abstenida en clasificarse.

En efecto, el programa 2-3 muestra un ejemplo de obtener los valores - de z y clasificar en Grupo 1, Grupo 2 y las empresas de la región de sospecha.

Lo que realizan las proposiciones que se comprenden desde "DO 20 I = 1, 45" hasta "20 CONTINUE", es calcular los valores de z. Por otro lado, "ZMED1" y"ZMED2" son medias de los dos grupos con respecto a z, y "S" es la desviación estándar de z, con la cual se obtiene la "U" que es la unidad tipificada de la distribución normal.

```
BURROUGHS LARGE SYSTEMS FORTRAN COMPILATION   MARK 3.3.320WEDNESDAY, 05/23/84   04:11 PM
 [illegible] / [illegible] / D I S C R I M I N A C I O N   O N   D I S K
 = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = =
C CASO DE LAS EMPRESAS [illegible] 2-11                                     C   000:0000:5
C LA FUNCION DE DISCRIMINACION [illegible]                                   C   000:0000:5
C  CLASIFICACION DE LAS EMPRESAS POR LA FUNCION DE DISCRIMINACION           C   000:0000:5
                                                                       START OF SEGMENT 002
      DIMENSION X(45, 7), COEF(7), XMED1(7), XMED2(7), Z(45), N1(45), Z1     C   002:0000:0
     1(45), NDP(45), ZDP(45), N2(45), Z2(45)                                C   002:0000:0
C LECTURA DE Y                                                               C   002:0000:0
      READ (5, /) ((X(I, J), J = 1, 7), I = 1, 45)                          C   002:0000:0
                                                                       FIB IS 0006 LONG
      002:0015:1  IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 002:0000
      READ (5, /) (COEF(K), K = 1, 7), (XMED1(I), I = 1, 7), (XMED2(K),     C   002:0015:2
     1K = 1, 7)                                                             C   002:0028:2
      002:0035:1  IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 002:0028
      DO 20 I = 1, 45                                                       C   002:0035:2
      Z(I) = 0.0                                                            C   002:0036:0
      DO 10 J = 1, 7                                                        C   002:0037:3
      Z(I) = Z(I) + COEF(J) * (X(I, J) - (XMED1(J) + XMED2(J)) / 2)         C   002:0038:1
   10 CONTINUE                                                              C   002:0040:5
   20 CONTINUE                                                              C   002:0043:3
      WRITE (6, 30) (Z(K), K = 1, 45)                                       C   002:0046:1
                                                                       FIB IS 0006 LONG
   30 FORMAT (1H1, ///, 'LOS VALORES DE Z PARA 45 EMPRESAS =', ///, 45(T    C   002:0052:2
     155, 1PE15.2, //))                                                     C   002:0052:2
      ZMED1 = 0.0                                                           C   002:0052:2
      DO 40 I = 1, 7                                                        C   002:0053:0
   40 ZMED1 = ZMED1 + COEF (I) * (XMED1(I) - XMED2(I)) / 2                  C   002:0055:4
      ZMED2 = -1.0 * ZMED1                                                  C   002:0058:4
      S = SQRT(2.0 * ZMED1)                                                 C   002:005D:0
      U = (0.0 - ZMED1) / S                                                 C   002:005F:0
      WRITE (6, 50) ZMED1, ZMED2, U                                         C   002:0060:4
   50 FORMAT (///, 5X, 'LA MEDIA DE Z1 =', T30, F10.5, //, 5X, 'LA MEDIA    C   002:006A:2
     1 DE Z2 =', T30, F10.5, //, 5X, 'U PARA LA PROBABILIDAD DE ERROR ='    C   002:006A:2
     2, 3X, 1PE15.5)                                                        C   002:006A:2
      C1 = ZMED1 - 1.65 * S                                                 C   002:006A:2
      C2 = ZMED2 + 1.65 * S                                                 C   002:006D:1
      I = 0                                                                 C   002:0070:1
      J = 0                                                                 C   002:0070:5
      K = 0                                                                 C   002:0071:3
      L = 0                                                                 C   002:0072:1
   60 I = I + 1                                                             C   002:0072:5
      IF(Z(I) .LT. C2) GO TO 70                                             C   002:0074:1
      IF (Z(I) .LE. C1) GO TO 80                                            C   002:0076:0
      J = J + 1                                                             C   002:0078:1
      ZDP (J) = Z(I)                                                        C   002:0079:3
      NDP(J) = I                                                            C   002:007A:4
      GO TO 90                                                              C   002:007D:2
   70 K = K + 1                                                             C   002:007D:5
      Z1(K) = Z(I)                                                          C   002:007F:1
      N1(K) = I                                                             C   002:0081:2
      GO TO 90                                                              C   002:0083:0
   80 L = L + 1                                                             C   002:0083:3
      Z2(L) = Z(I)                                                          C   002:0084:5
      N2(L) = I                                                             C   002:0087:0
   90 IF (I - 45) 60, 100, 100                                              C   002:0088:4
  100 WRITE (6, 110)                                                        C   002:008A:0
  110 FORMAT (//////, 11X, 'LAS EMPRESAS DEL GRUPO 1', T53, 'LAS EMPRESA    C   002:008E:2
     1S DE LA REGION [illegible]', T[illegible], 'LAS EMPRESAS DEL GRUPO 2', /, T63, 'SOSP   C   002:008E:2
     2ECHA', //, [illegible], 14X))                                         C   002:008E:2
      II = 0                                                                C   002:008E:2
  120 II = II + 1                                                           C   002:008E:0
      WRITE (6, 130) N1(II), Z1(II), NDP(II), ZDP(II), N2(II), Z2(II)       C   002:0099:2
  130 FORMAT ([illegible], 1PE17.5, 8X))                                    C   002:00A3:2
      IF(II .LT. J .AND. II .LT. K .AND. II .LT. L) GO TO 120               C   002:00A3:2
      IF (II - J) 140, 220, 220                                             C   002:00A6:4
  140 IF (II - K) 150, 220, 221                                             C   002:00A8:0
  150 II = II + 1                                                           C   002:00A8:2
      WRITE (6, 160) N1(II), Z1(II), NDP(II), ZDP(II)                       C   002:00AA:4
  160 FORMAT ([illegible], 1PE17.5, 8X))                                    C   002:00B3:2
      IF (II .LT. J .AND. II .LT. K) GO TO 150                              C   002:00B9:2
      IF (II - J) 170, [illegible], [illegible]                             C   002:00B9:4
  170 II = II + 1                                                           C   002:00B9:0
      WRITE (6, 180) NDP(II), ZDP(II)                                       C   002:00BE:2
  180 FORMAT ([illegible], 1PE17.5)                                         C   002:00C8:2
      IF (II - J) 170, 220, 220                                             C   002:00C8:2
  190 IF (II - K) 200, 220, 220                                             C   002:00CA:1
  200 II = II + 1                                                           C   002:00CB:3
      WRITE (6, 210) N1(II), Z1(II)                                         C   002:00CC:5
  210 FORMAT ([illegible], 1PE17.5)                                         C   002:00D6:2
      GO TO 190                                                             C   002:00D6:2
  220 IF (II - L) 230, [illegible], 120                                     C   002:00D6:5
  230 II = II + 1
```

```
      WRITE (6, 240) [illegible](II), Z[illegible](II), N2(II), Z2(II)
240   FORMAT ('[illegible]', [illegible], [illegible], I2, 1PE17.8, [illegible])
      IF (II .LT. J .[illegible]. II .LT. L) GO TO 230
      IF (II - J) 1[illegible], [illegible], [illegible]
250   IF (II - L) 2[illegible], [illegible], [illegible]
260   II = II + 1
      WRITE (6, 270) N[illegible](II), Z[illegible](II)
270   FORMAT ('0', [illegible], I2, [illegible], 1PE17.8)
      GO TO 250
280   IF (II - K) [illegible], [illegible], [illegible]
290   IF (II - L) 30[illegible], 2[illegible], 2[illegible]
300   II = II + 1
      WRITE (6, 310) N1(II), Z1(II), N2(II), Z2(II)
310   FORMAT ('0', [illegible], [illegible], [illegible], 1PE17.8, 59X, I2, 8X, 1PE17.8)
      IF (II .LT. K .[illegible]. II .LT. L) GO TO 300
      IF (II - K) 28[illegible], 2[illegible], 25[illegible]
320   STOP
      END
```

```
C     002:00D7:5
C     002:00E3:2
C     002:00E8:2
C     002:00EA:4
C     002:00EC:0
C     002:00ED:2
C     002:00EF:4
C     002:00F3:2
C     002:00F8:2
C     002:00F8:5
C     002:00FA:3
C     002:00FB:3
C     002:00FC:5
C     002:0103:2
C     002:0108:2
C     002:010D:4
C     002:010F:3
C     002:0110:2
SEGMENT 002 IS 0142 LONG
```

Aquí, cabe destacar que existe un supuesto fundamental que consiste en que las variables x_i ($i = 1,2,\ldots 7$) tienen comportamientos de distribución normal dentro de cada grupo. Por lo tanto esta "U" se puede utilizar con el fin de obtener la probabilidad de error de clasificación.

Las variables "C1" y "C2" son límites de intervalos de confianza, - cuando cada probabilidad de error de clasificación sea igual o menos que - 5%. De esta forma, como se observa en el proceso desde la proposición - - "IF (Z(I).GE.C2) GO TO 70" que aparece inmediatamente posterior a la proposición Nº 60, se pueden clasificar las 45 empresas de nuestro ejemplo, en 3 grupos, o sea el grupo 1 que comprende las empresas con estados financieros prósperos, el grupo 2 que contiene las que muestran estados financieros decaídos, y el grupo de las empresas que, por su carácter intermedio, no - se pueden clasificar ni en el grupo 1 ni en el grupo 2 y se reservan sus - clasificaciones.

Aunque este programa no opera para imprimir los valores de C1 y C2, - éstos se pueden obtener fácilmente, puesto que tenemos los valores de las - medias de z de dos grupos, los cuales aparecen en el resultado de este programa (Programa 2-4) y que son del orden de 4.32579 y -4.32579.

Por la razón de que la varianza de cada grupo es igual a la distancia entre las dos medias, la desviación estándar se puede expresar:

$$s_z = \sqrt{\mathrm{Var}\,[z]} = \sqrt{2 \times \bar{z}_1} = \sqrt{2 \times 4.32579} = 2.941356829$$

Por lo tanto, C1 es:

$$C1 = 4.32579 - 1.65 \times 2.941356829 = -0.527$$

Asimismo, C2 = 0.527

De esta manera, las empresas cuya clasificación es retenida, son las que tienen valores de z mayores que -0.527 y menores de 0.527.

En el resultado que se puede observar en el programa 2-4, aparecen primeramente los valores de z para las 45 empresas y enseguida, las dos medias de z y el valor de la u para obtener la probabilidad de error de clasificación.

Al referirnos a la tabla de la curva normal tipificada con el valor de u, que en nuestro caso es igual a -1.4707 (es lo mismo 1.4707), obtenemos el valor de 0.5 - 0.4292 = 0.0708 como la probabilidad del error de clasificación tanto con respecto a G1 en G2, como a G2 en G1. Y podríamos decir que 7% como la probabilidad del error de clasificación es un tanto reducido.

Al último, se puede apreciar el resultado de la clasificación en forma de una tabla. Como muestran los encabezados de las columnas, desde el lado izquierdo, aparecen las empresas del grupo 1, las de la región de sospecha y las del grupo 2.

Indudablemente, las empresas con la clasificación abstenida son menos de 10% de la totalidad, lo cual indica que la clasificación de este ejemplo ha resultado hasta cierto punto efectiva.

Según los números de las empresas que se exponen en el programa 2-4, tenemos nuestra Tabla 4-5.

Recordando lo que se ha comentado en el inciso anterior acerca de las empresas Nos. 35, 36 y 45, evidentemente estas dos primeras se encuentran dentro del grupo de las empresas con estados financieros desmejorados y la última registra el valor máximo de z, y esto concuerda con lo expuesto anteriormente.

TABLA 4-5

Nº	NOMBRE	Nº	NOMBRE	Nº	NOMBRE
	GRUPO 1		REGION DE SOSPECHA		GRUPO 2
1	Eaton Manufacturera, S.A.	20	Industria de Telecomunicación, S.A.	4	Motores y Refacciones, S.A.
2	Spicer, S.A.	26	Industria Nacobre, S.A.	5	Anderson Clayton Co., S.A.
3	Transmisiones y Equipos Mecánicos, S.A.	38	Industrias Resistol, S.A.	6	Cervecería Moctezuma, S.A.
8	Martell de México, S.A.	40	Celanese Mexicana, S.A.	7	Bacardí y Compañía, S.A.
12	Cía. Industrial San Cristóbal, S.A.			9	Cigarros La Tabacalera, S.A.
13	Cementos Anasco, S.A.			10	Fábricas de Papel Loreto
14	Ladrillera Monterrey, S.A.			11	Celulosa de Chihuahua, S.A.
17	Vidrio Plano, S.A.			15	Cementos Tolteca, S.A.
18	Asbestos de México, S.A.			16	Vidriera Monterrey, S.A.
24	Editorial Diana, S.A.			19	Teleindustria Ericsson, S.A.
25	Aluminio, S.A.			21	Iem, S. A.
29	Tubos de Acero de México, S.A.			22	General Electric de México, S.A.
33	Industrias Peñoles, S.A.			23	General Popo, S.A.
34	Minería Frisco, S.A.			27	Reynolds Aluminio, S.A.
37	Minas de San Luis, S.A.			28	Fundidora de Monterrey, S.A.
42	Negromex, S.A.			30	Tubacero, S.A.
43	Petrocel, S.A.			31	Altos Hornos de México, S.A.
45	Púritan, S.A.			32	Industria Minera de México, S.A.
				35	Cía. Minera Antlán, S.A.
				36	Cía. Minera de Cananea, S.A.
				39	Unión Carbide Mexicana, S.A.
				41	Cydsa, S.A.
				44	Cannon Mills, S.A.

Ahora, con relación a las 20 empresas que se habían escogido para establecer esta función de discriminación, se pueden encontrar 2 empresas que fueron clasificadas erróneamente, que son la empresa Nº 7 (Bacardí y Compañía, S.A.) y la Nº 14 (Ladrillera Monterrey, S.A.).

La primera fue elegida para el análisis como una de las empresas prósperas, no obstante fue clasificada como deteriorada según el resultado del análisis, y el caso de la segunda fue inverso.

Se puede decir, con respecto a Bacardí y Compañía, S.A., que se había elegido como una empresa próspera, considerando su baja razón de activo fijo al valor neto (x_4) y su alto índice de solvencia, aparte de que ésta goza de la tasa de utilidad sobre el capital contable (x_4) mayor que el promedio. Sin embargo, parece ser que el hecho de tener baja la razón de activo al valor neto al valor agregado no ayuda a que la empresa en cuestión esté en el grupo 1, al contrario, por su coeficiente correspondiente dentro de la función de discriminación que es positivo, contribuye a que el producto de este coeficiente multiplicado por la diferencia entre el promedio y el valor de este índice (si éste último es menor al promedio), se mantenga con el signo negativo. En el caso particular de Bacardí y Compañía, S.A., este producto, o sea 0.0303 (16.5 - 116.89) resulta ser del orden de -3.04, e indiscutiblemente, al sumar, contribuye considerablemente, a que ésta pertenezca en el grupo 2.

Por otra parte, la tasa de crecimiento reducida del capital contable de esta empresa colaboró en una forma más destacada para que ésta se encontrara en el segundo grupo.

En lo que concierne a la empresa Nº 14 que es Ladrillera Monterrey, - S.A., se podría percibir como un caso contrario hasta cierto punto, del caso de Bacardí y Compañía, S.A., por la consideración de que esta empresa se había escogido como una empresa inferior por la razón de que sufre de x_1, x_2 y x_5 bajas y x_4 alta, no obstante su alta tasa de crecimiento del capital contable contribuyó a que su valor z fuera positivo. Aparte de lo anterior, - los productos de los coeficientes por las diferencias entre sus índices y - los promedios muestran que la superioridad en x_3 (razón de capital propio) - jaló, en una medida más de la cuenta, su valor de z hacia el lado positivo.

Aparte de lo mencionado con respecto a x_4, se puede apreciar que - una tasa de utilidad alta sobre la venta opera, por el contrario a la lógica, a favor de que la empresa se encuentre en el grupo 2, por el signo negativo que lleva el coeficiente correspondiente. Y esto mismo sucede con x_5, que - representa el índice de solvencia.

Lo anterior nos lleva a considerar que en ciertos casos los signos de los coeficientes de la función de discriminación no concuerdan con la lógica, sin embargo, en la totalidad de la función operan conjuntamente para - clasificar, en una medida más evidente posible, los elementos en dos grupos.

Cabe mencionar, como referencia de cierta importancia, que esta función de discriminación es un ejemplo de la aplicación del método teórico expuesto en el capítulo 2 y también del uso de la computadora para la misma - aplicación, y es incontestable que carece de números suficientes de las em-- presas y de los indicadores para que ésta sea una función de discriminación definitiva, sin embargo, con la ayuda de ésta, se puede obtener una idea sobre el estado financiero de alguna empresa que se interesa estudiar.

Dentro del Programa 3-1, hasta la proposición Nº 60 es para obtener la matriz de correlación múltiple, y desde la proposición "DO 80 I = 1, 7" hasta la Nº 380 es la parte correspondiente a la obtención de los eigenvectores y los eigenvalores de la matriz de correlación. Posteriormente 16 - posiciones que comprenden desde "CD = 0.0" escogen los eigenvalores en orden descendente hasta que su tasa de contribución acumulada sea más de 90%, y también calculan los cargos de factor los cuales son impresos obedeciendo a la proposición "WRITE /6,470) I, (FL(J,I), J = 1,7)" y su correspondiente "FORMAT".

Por último, las proposiciones que comprenden desde "WRITE (6,490)" hasta el final del programa operan para el cálculo de los valores de z, la puntuación de cada empresa según estos valores y también para la impresión de los mismos.

El resultado de este programa se muestra en el Programa 3-2.

Como se puede observar, el eigenvalor más grande es el segundo del - lado izquierdo con un valor de 2.99209465 y el segundo es el tercero con un valor de 1.44350259.

Son dos únicos eigenvalores mayores de 1, y hasta aquí la tasa de - contribución acumulada asciende a 63.4%. Al seguir eligiendo los eigenvalores en el orden descendiente hasta que la tasa de contribución acumulada - sea superior a 90%, encontramos el sexto del lado izquierdo, el último y el quinto, y estos son 0.981487639, 0.738393739 y 0.480874271 respectivamente.

E indiduablemente "los coeficientes de z" que aparecen a continuación son exactamente los mismos que los eigenvectores correspondientes a estos - eigenvalores.

Y el cociente de la suma de estos cinco eigenvalores dividida entre 7 que es el número de variables, aparece como la tasa de contribución acumulada que es del orden de 0.948 o sea un 94.8% y como rebasó el límite preestablecido de 90%, otros dos eigenvalores restantes y sus correspondientes eigenvectores no fueron ya elegidos.

Lo que se aprecia posteriormente es una tabla donde están registrados los cargos de factor, con los cuales se puede interpretar los conceptos que representa cada componente.

Las interpretaciones de los componentes según esta tabla sería lo siguiente:

z_1: Con x_1, x_3 y x_4 muestra correlaciones superiores a 0.707, es decir sus coeficientes de determinación superiores a 0.50 aunque con x_4 la correlación es negativa. Y también con otras x tiene correlaciones relativamente grandes, ya que el valor absoluto de cada cargo de factor supera a 0.5 (0.25 como coeficiente de determinación), salvo con x_6. Con la observación anterior se puede decir que este primer componente es un indicador hasta cierto punto global que representa a todas las x menos el crecimiento, y sobre todo las empresas que tienen altas tasas de utilidad y reducidos valores en la razón de activo fijo al valor neto tendrán una puntuación favorable en este componente.

z_2: Este componente sólo muestra una correlación superior a 0.707 que es con la x_6 y mayor que 0.5 con x_7. De esto se deduce que la mayor parte del valor de este componente depende especialmente de la tasa de crecimiento en el capital contable y también del tamaño de la empresa.

Algo que es importante destacar es que, éste tiene una correlación positiva con x_7, es decir, mientras sea más grande la empresa, será mayor - la puntuación en este componente. Es una observación que concuerda con la naturaleza de este concepto, mas no encaja con lo que se ha visto en los incisos anteriores.

La razón de ello puede ser que los eigenvectores (o es lo mismo decir, los cargos de factor, puesto que éstos últimos son productos de los primeros y multiplicados respectivamente por las raíces cuadradas de los eigenvalores) no siempre representan la naturaleza de los indicadores originales, ya que - con respecto al primer componente este indicador que representa el tamaño de la empresa muestra una correlación negativa, lo contrario que sucede con este segundo componente.

Además, cabe aclarar que un componente principal (y obviamente la puntuación que se obtiene basándose en éste) puede representar las diferencias de los tipos de actividad. Por ejemplo, si un componente tiene correlaciones positivas con el activo fijo tangible y el pasivo fijo, y las negativas con el activo circulante y el pasivo circulante. Entonces las empresas que tienen pasivo fijo y activo fijo tangible altos (las empresas con carácter de - concentración en el capital fijo), tandrán puntuaciones inferiores que las - empresas cuyos activos y pasivos circulantes más altos que los fijos (o sea, empresas de concentración en la fuerza de trabajo, por ejemplo la industria ligera, el comercio).

z_3: Tiene una correlación positiva mayor que 0.707 con x_2 y una correlación negativa cuyo valor absoluto rebasa 0.5 con x_3, y por lo tanto este - componente representa, en su mayoría, la tasa de utilidad sobre el capital - contable y la razón del capital propio, aunque la correlación con x_3 implica por su signo negativo, que las empresas que tienen esta tasa más elevada, se reduzcan sus puntuaciones.

z_4: Dentro de los cargos de factor que representan las correlaciones de z_4, se destaca el que corresponde a x_5 con el signo positivo y luego el de x_7, y sus valores son 0.633 y 0.538 respectivamente, por lo cual este componente sintetiza, hasta cierto grado, las evaluaciones sobre el crecimiento y el tamaño de la empresa.

z_5: Hasta ahora se han encontrado los cargos de factor que superan el nivel de 0.5 para 4 componentes principales, sin embargo para este último (z_5) ninguno es superior a 0.5 y es imposible dar una interpretación clara y convincente de este componente. Precisamente ésta es la razón por la cual, surge la necesidad de efectuar una rotación de la matriz de los cargos de factor.

A pesar de esta necesidad de aclarar lo que representa un componente con la tasa de contribución reducida (en el caso de z_5 es del orden de 6.87% que se da por el cociente $0.480874 \div 7$), el grado de la complexidad del programa cuyo propósito es obtener la matriz ortogonal de la rotación, es mayor y por esta razón en este contexto no trataremos sobre la rotación de la matriz de los cargos de factor.

Dadas las puntuaciones que se pueden apreciar en el programa 3-2 y las interpretaciones de los componentes, se pueden evaluar estas empresas.

Las empresas que tienen altos puntos en z_1, se pueden considerar como empresas prósperas, por la razón de que este componente es un indicador casi global y éstas son mostradas en la Tabla 4-6.

TABLA 4-6 LAS EMPRESAS CON ALTO z_1

z_1	Nº	NOMBRE
10	45	Püritan, S.A.
9	37	Minas de San Luis, S.A.
8	34	Minería Frisco, S.A.
7	24	Editorial Diana, S.A.
	25	Aluminio, S.A.
6	4	Motores y Refacciones, S.A.
	7	Bacardí y Compañía, S.A.
	8	Martell de México, S.A.
	11	Celulosa de Chihuahua, S.A.
	12	Cía. Industrial San Cristóbal, S.A.
	17	Vidrio Plano, S.A.
	20	Industria de Telecomunicaciones, S.A.
	29	Tubos de Acero de México, S.A.
	44	Cannon Mill, S.A.

Efectivamente, enumerando las empresas que tienen puntuaciones mayor que 6 (son 5 empresas), se aprecia que éstas fueron clasificadas como las del grupo 1 en el análisis de la función de discriminación. Sin embargo, al abarcar hasta las empresas con z1 igual a 6, nos encontramos con las que fueron clasificacadas como las que pertenecen en el segundo grupo y una que se ubicó dentro de la región de sospecha (en la tabla: 4, 7, 11 y 44 son las del grupo 2, y 20 es - de la región de sospecha).

Recordemos que z_1 tiene correlaciones relativamente altas con todas las x salvo con x_6, y para complementar, serviría z_2 puesto que este componente registra el cargo de factor más alto de todos, con respecto a x_6. Y al examinar las puntuaciones en z_1 y z_2 de nuestras 45 empresas, podemos establecer la Tabla 4-7 donde aparecen las empresas con las puntuaciones superiores a 6 tanto en z_1 como en z_2.

TABLA 4-7 LAS EMPRESAS CON ALTOS z_1 Y z_2

Nº	z_1	z_2
12	6	7
29	6	8
34	8	7
37	9	8

Aquí nos damos cuenta de que las empresas Nº 12 y 29, aunque tienen 6 de puntuación en z_1, se clasificaron en el grupo 1 en el análisis anterior, lo que coincide con el hecho de aparecer en esta tabla.

Se ha mencionado sobre la importancia de z_1 como indicador casi global y de z_2 como complementario de z_1, no obstante, la tasa de contribución acumulada llega sólo a 63.37% (se obtiene por el coeficiente: (2.992095 + 1.443503) /7), y es lógico pensar que la pérdida de 36.63% es sustancial. Pues aquí surge la necesidad de obtener, en una manera persuasible, una puntuación global de cada empresa considerando otros componentes también.

A pesar de que se había mencionado en el capítulo anterior que la ponderación de las puntuaciones es una decisión con un carácter ejecutivo, de alguna manera tenemos que ponderar estas puntuaciones, puesto que cada componente aporta diferente cantidad de información y no se puede calcular simple una media aritmética para cada empresa.

El método quizá más racional es ponderar de acuerdo con la importancia de cada x, y considerando las correlaciones (los cargos de factor), empero éste es el método que precisamente está en las manos de los que deciden la política de evaluación, y en este ensayo, trataremos por lo tanto dos métodos de carácter (por decirlo así) matemático .

Uno es tomar en consideración los eigenvalores o es lo mismo decir, las tasas de contribución ya que estos representan la cantidad de información contenida en los componentes.

Repetiremos a presentar los eigenvalores en la Tabla 4-8, donde también se encuentran las tasas de contribución.

TABLA 4-8 LOS EIGENVALORES

	z1	z2	z3	z4	z5
	2.9921	1.4435	0.9815	0.7385	0.4809
/7	0.427	0.206	0.140	0.1055	0.0687

Por lo consiguiente la puntuación global sería obtenida mediante la siguiente fórmula:

$$Pg = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \; P_i \qquad \ldots(4\text{-}2)$$

donde Pg es la puntuación global y P_i es la puntuación de cada componente.

Será conveniente aclarar que el miembro derecho de esta expresión - está dividido entre 7 por el número de los indicadores x, mas sin embargo, una empresa imaginaria que tuviera 10 en todos los componentes de puntua-- ción, no tendría la puntuación global de 10 mediante este método, puesto - que la pérdida de la información está cargada dentro de la expresión (4-2) al dividir entre 7.

Por lo tanto, en lugar de dividir entre 7, que es la suma de todos - los eigenvalores, se debe de efectuar el cálculo dividiendo entre la suma - de los cinco eigenvalores que es igual a 6.6365, y así la información se - completará 100% dentro de los cinco componentes, es decir la pérdida de 5.2% fue considerada al desamparar el sexto y séptimo componentes y para la ponderación, no deben de ser considerados de nuevo.

Por lo anterior, la expresión (4-2) se convierte en (4-3).

$$Pg = \frac{1}{6.64} \sum_{i=1}^{5} \lambda_i P_i \qquad \ldots (4\text{-}3)$$

y en general, se puede expresar en la siguiente forma.

$$Pg = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i\right) / \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \qquad \ldots (4\text{-}3)'$$

Otro método consiste en tomar en consideración los cargos de factor, clasificando los mismos según la siguiente regla: los que registran valores absolutos mayores que 0.707 tienen información doble de los que registran - valores absolutos mayores que 0.5 y menores o iguales a 0.707.

Para mayor claridad en la explicación de este método, retomamos los cargos de factor en la Tabla 4-9.

TABLA 4-9 LOS CARGOS DE FACTOR

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
x_1	0.8619	0.3280	0.1990	0.0461	0.3204
x_2	0.5913	-0.2539	0.7392	0.1350	-0.0626
x_3	0.7662	0.2278	-0.5298	-0.0737	-0.1021
x_4	-0.8397	0.1067	-0.0068	0.1427	0.4904
x_5	0.5551	-0.3745	-0.3130	0.6327	0.1386
x_6	0.3376	0.8667	0.0794	-0.0520	0.0883
x_7	-0.5109	0.5629	0.1026	0.5379	-0.3104
Nº DE	3	1	1	0	0
Nº DE	3	1	1	2	0

En esta tabla los valores marcados con rectángulos de línea continua son de valores absolutos mayores que 0.707 y los que están dentro de los - rectángulos con línea punteada son de valores absolutos mayores que 0.5 y menores que 0.707.

Y aparecen los números de los cargos de factor marcados con línea continua y con línea punteada en los últimos dos renglones de la tabla.

Según la regla antes propuesta, los cargos de factor marcados con la línea continua valen el doble de los marcados con la línea punteada y entonces el componente z_1 vale 9, mientras el z_2 vale 3 en cuanto a la importancia de contener información extraída de los indicadores x.

Así, tenemos la Tabla 4-10 donde aparecen estos puntos con la suma total de 17. Por tanto se puede considerar que el componente z_1 aporta 9 de 17 en cuanto a la información contenida, es decir 52.9 por ciento de la totalidad y del mismo modo z_2 contribuye aproximadamente 17.6% de la totalidad. Mediante este método se establece la siguiente fórmula:

TABLA 4-10 PUNTOS SEGUN LOS CARGOS DE FACTOR

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	SUMA
3x2+3 = 9	1x2+1 = 3	1x2+1 = 3	0x2+2 = 2	0x2+0 = 0	17

$$Pg = \frac{9}{17} P_1 + \frac{3}{17} P_2 + \frac{3}{17} P_3 + \frac{2}{17} P_4 \qquad \ldots(4\text{-}4)$$

Las puntuaciones globales como el resultado de estos dos métodos se encuentran en la Tabla 4-11, y como se puede observar, aunque éstos tienen argumentos distintos, son valores aproximados entre sí.

Y el segurdo método apesar de no ser un método sofisticado, por ser un método simple para aplicar y suficiente en la aproximación, es útil.

TABLA 4-11 PUNTUACION GLOBAL

Nº DE LAS EMPRESAS	POR EL METODO 1	POR EL METODO 2
1	5.40	5.41
2	5.73	5.71
3	5.36	5.35
4	5.09	5.18
5	4.43	4.82
6	5.06	5.00
7	4.25	4.53
8	5.08	5.12
9	3.78	3.82
10	4.38	4.53
11	4.99	5.00
12	5.74	5.71
13	6.20	5.94
14	4.81	4.65
15	4.33	4.29
16	5.00	5.00
17	4.86	4.94
18	4.15	4.12
19	4.15	4.18
20	5.42	5.59
21	4.00	4.00
22	4.60	4.71
23	4.49	4.65
24	5.42	5.53
25	5.50	5.65
26	5.29	5.35
27	4.49	4.59
28	4.77	4.76
29	6.11	6.12
30	4.67	4.76
31	4.72	4.65
32	4.67	4.82
33	6.00	6.24
34	7.04	7.06
35	3.11	2.35
36	2.49	1.76
37	8.04	8.00
38	5.15	5.18
39	4.78	4.82
40	5.22	5.24
41	4.70	4.71
42	4.96	4.88
43	5.21	5.12
44	5.49	5.59
45	6.93	7.18

Según este resultado de la puntuación global, podemos recoger las empresas con un buen estado financiero y las que sufren de la falta de prosperidad.

Las empresas que registran en esta tabla las puntuaciones mayores que 6 son 13, 29, 33, 34, 37 y 45, aunque en el caso de la empresa Nº 13 registra un valor levemente inferior a 6 por el segundo método, y por otro lado tenemos las empresas con puntuaciones menores que 4 que son 9, 35 y 36, lo que concuerda completamente con el análisis anterior que se trata de la función de discriminación. Especialmente la empresa Nº 37 se destaca como única empresa que registra la puntuación mayor que 8 tanto por el primer método como por el otro.

De esta manera, se ha expuesto la aplicación de los métodos multivariables, en el campo del análisis empresarial, tratados teóricamente en los capítulos anteriores.

Como se había referido anteriormente, los programas presentados en este ensayo carecen de carácter que poseen los programas elaborados por manos de expertos en computación, y por ende es muy probable que se encuentren partes que se pueden simplificar o modificar con el fin de mejorarlos para obtener los mismos resultados con mayor rapidez.

Por otra parte, aunque también es algo ya mencionado en páginas atrás, este conjunto muestral estudiado sobre 7 variables es insuficiente para averiguar el estado financiero de cierta empresa dentro del marco de la totalidad de las empresas mexicanas, no obstante esta parte del ensayo que se dedica a la aplicación, servirá seguramente como ejemplo de un intento del uso práctico de estos métodos relativamente recientes y también será útil para que (aunque son sólo 45 empresas) se puedan tener ideas de cada empresa en una manera relativa dentro de las mismas.

Por último, la persona que intente aplicar cualesquiera de estos métodos, debe de recordar que la elección del conjunto muestral y de los indicadores tiene suma importancia, ya que éstos deben de ser bien definidos de acuerdo con el objetivo del análisis.

CONCLUSION

De lo que se ha explicado en una forma concisa dentro de este ensayo, se podría afirmar los siguientes puntos, a pesar de que algunos de ellos son repetición de las aclaraciones que se han hecho en diversas ocasiones:

i) Estos métodos tratados en este texto son útiles para esclarecer la ubicación relativa de una empresa dentro de un conjunto muestral.

ii) La ventaja principal de la aplicación de éstos es la supresión de las disparidades subjetivas causadas por los analizadores al aplicar los métodos tradicionales.

iii) Por la misma razón, existe la perspectiva de que la evaluación global obtenida por estos métodos (especialmente por el método PCA) tenga una persuasiva con mayor objetividad.

iv) Sin embargo, la aplicación de éstos requiere los conocimientos (aunque sólo hasta cierto nivel) sobre la estadística avanzada y la programación en computadoras.

v) Por otro lado, también existe el problema de determinar el tamaño de la muestra y el número de variables.

vi) Por los puntos iv) y v), de ninguna manera se puede afirmar que la aplicación de estos métodos sea más fácil que la de métodos convencionales.

vii) A pesar de lo anterior, una vez perfeccionado el programa de la computadora, se puede aplicar estos métodos multivariables las veces que se desee y para las empresas a las cuales se necesite aplicarlos.

viii) Por último, y con respecto al anterior, en México también se irán difundiendo los conocimientos y el uso de estos métodos, y por ende habrá necesidad más urgente que el momento actual, de "soft ware" para aplicar estos métodos en el campo del análisis empresarial, con el fin de que sea utilizado por cualquier estudiante o analizador que desee aplicarlos.

Con base en estos puntos, se puede sintetizar las ventajas y los problemas que se consideran para estos métodos, como conclusión, en lo siguiente:

Es un tanto difícil y laborioso aplicar estos métodos, empero tiene sus ventajas de objetividad científica aunque no conceda el matiz personal que un análisis elaborado por un analizador experto. No obstante, ¿cómo se puede saber si un analizador sea experto o no? En este sentido, la aplicación de los métodos multivariables para el análisis empresarial debe de ser aceptada más ampliamente con la ayuda de la difusión de los medios tales como publicaciones sobre estos métodos (tanto teóricas como de aplicaciones), realización de cursos, facilidad de "soft ware", etc., y así se pueden esperar análisis efectuados combinando las ventajas de estos métodos y los convencionales.