UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE INGENIERIA CIVIL, TOPOGRAFICA Y GEODESICA

T I T U L O

ANALISIS E INTERPRETACION DE LA PROGRAMACION LINEAL

TESIS PROFESIONAL

ELABORADA PARA OBTENER EL

TITULO DE INGENIERO CIVIL

P O R

PACHECO VARELA ENRIQUE

MEXICO, D. F. JULIO - 1984

Universidad Nacional Autónoma

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-1-197

Señor ENRIQUE PACHECO VARELA
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Jaime Francisco Gómez Vega, para que lo desarrolle como TESIS para su Examen Profesional de la carrera de INGENIERO CIVIL.

"ANALISIS E INTERPRETACION DE LA PROGRAMACION LINEAL"

I. Introducción.
II. Proceso de formulación y planteo de problemas mediante el modelo de progrmación lineal.
III. Ejemplos de aplicación de la programación lineal.
IV. Determinación e interpretación de la solución optima de un proceso de programación lineal.
V. Proceso de solución algebraica e interpretación de soluciones.
VI. Proceso solución simplex.
VII. Modelo de asignación.
VIII. Conclusiones.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 30 de septiembre de 1983
EL DIRECTOR

Rascón Ch.

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ.

OARCH/RCCH/sho.

ANALISIS E INTERPRETACION DE LA PROGRAMACION LINEAL

PAGINA

I.- INTRODUCCION.

I.I.- INVESTIGACION DE OPERACIONES. MODELOS MATEMATICOS PARA TOMA DE DECISIONES Y MODELO DE PROGRAMACION LINEAL.

El concepto de investigación de operaciones (operations - research) comenzó a utilizarse en Inglaterra duranta la - segunda guerra mundial, cuando fueron organizados grupos - interdisciplinarios de científicos para el análisis y solución de problemas de estrategia militar. El éxito obtenido en el campo de operaciones militares, hizo tiempo propicio después de la aplicación de este enfoque de análisis y solución de problemas al campo de la toma de decisiones.

Esta nueva disciplina I.O. (investigación de operaciones) tuvo notable impulso en los Estados Unidos, cuando GEORGE - B. DANTZING en 1947 implementó el modelo de programación lineal a través de la técnica de la solución simplex, que hoy es uno de los modelos de mayor difusión dentro de la I.O.

Hasta la fecha existen muchas definiciones acerca de la I.O. pero todas ellas encierran el mismo significado; se presentan ahora una serie de definiciones:

La I.O. es la ciencia que permite encontrar las relaciones óptimas que operen del mejor modo un sistema, dado un objetivo específico.

La I.O. es la aplicación de la metodología científica a través de modelos, primero para representar al problema real que se quiere resolver en un sistema y segundo para resolverlo. Los modelos que utiliza la I.O. son matemáticos.

En general el objetivo de la I.O. es optimizar la estructura, el funcionamiento y los resultados de los sistemas, por grupos interdisciplinarios.

En la hipótesis que nuestro interés presente se halla en la aplicación de la I.O., la definiremos como:

" UN ENFOQUE CIENTIFICO PARA LA TOMA DE DECISIONES ". Es decir, como herramienta o material disponible del cual haremos uso, para resolver un problema específico.

Para el análisis de los problemas de la I.O. se representan por medio de modelos matemáticos, entendiéndose simplemente que un modelo matemático, es un conjunto de constantes y variables asociadas por operaciones algebraicas, de tal manera que a través de una expresión matemática, se es tablece la representación de un fenómeno empírico.

En base a lo anteriormente expuesto, podemos concluir que la I.O. ha generado un conjunto de modelos matemáticos para la formulación de problemas empíricos específicos; así como las técnicas de solución relativa a los modelos. Dentro de este conjunto pueden citarse:

1.- Modelos de inventario.

2.- Modelos de espera o modelos de colas.

3.- Modelos de programación matemática, que incluyen a su vez a:

- Modelo de programación lineal.
- Modelo de asignación y transporte.
- Modelo de programación no lineal.
- Programación dinámica.

4.- Modelo de redes.

5.- Modelo de simulación.

6.- Modelo heurísticos.

Por lo que podemos asentar que el modelo de programación lineal (P.L) es un elemento del conjunto de los modelos generados por la I.O.

I.2.- ESTRUCTURA DE UN MODELO MATEMATICO.

El modelo matemático en su forma más simple, está constituído por un conjunto de: CONSTANTES (denominadas parámetros) y VARIABLES (varialbes de decisión), asociadas o -- agrupadas por operadores algebráicos, de tal forma que a- través de una expresión algebráica se establece la representación de un fenómeno empírico.

a) VARIABLES DE DECISION Y PARAMETROS.

Donde las variables de decisión se consideran -- las incógnitas que deben ser determinadas en la- solución del modelo y los parámetros, representan los datos conocidos (denominados variables con-- trolables).

Variables de decisión: "X_j", $j=1,2,3...n$

Parámetros: "C_j, $a_{i,j}$, b_i" $i=1,2,3...m$

$j=1,2,3...n$

b) FUNCION OBJETIVO.

Establecer el criterio básico en función del cual deberá obtenerse la solución del modelo. Dentro-- de este aspecto, el criterio simplemente es de -- maximización o minimización.

Función objetivo "Z"

Optimizar: (Maximizar o minimizar) Z

$$Z = \sum_{j=i}^{n} C_j X_j$$

c) RESTRICCIONES.

Las restricciones constituídas por las limitaciones bajo las cuales se deducirá la solución del modelo. Se utilizan algunas " desigualdades " para expresar el hecho de que algunas variables controlables o todas, solamente pueden manejarse dentro de ciertos límites.

3.1.- CONJUNTO DE RESTRICCIONES

$$\sum_{i=I}^{n} a_{i,j} X_j \geq b_1$$

$$\sum_{i=I}^{n} a_{i,j} X_j \leq b2$$

$$\sum_{i=I}^{n} a_{i,j} X_j = b_3$$

3.2.- CONDICION DE LAS VARIABLES.

$x_j \geq 0 \qquad j=1,2,3...n$

Con la principal característica que todas -- las relaciones albegráicas postuladas son lineales.

II.- PROCESO DE FORMULACION Y PLANTEO DE PROBLEMAS MEDIANTE EL MODELO - DE PROGRAMACION LINEAL.

2.1.- EL MODELO DE PROGRAMACION LINEAL.

El modelo de la programación lineal lo podemos considerar como la aplicación de técnicas en la búsqueda para optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo, matemáticamente el modelo de programación lineal está constituído por los siguientes elementos:

1.- Función objetivo: maximizar o minimizar Z

$Z = \sum_j C_j X_j$ $\qquad J=1,2,3 \ldots n$

2.- Conjunto de restricciones: Optimizar la función objetivo sujeto a las relaciones:

$\sum_j a_{i,j} X_j \leq b_i$ $\qquad J=1,2,3 \ldots n$

$J=1,2,3 \ldots n$

Y la condición que: $X_j \geq 0 \quad j=1,2,3 \ldots n$

donde: X_j= Variables de decisión (incógnitas del - problema).

C_j= Coeficientes de la función objetivo (beneficios o costos unitarios) (datos).

$a_{i,j}$=Coeficientes del sistema de restricciones - - (Coeficientes de insumo/producto) (datos).

b_i= Términos constantes del sistema de restricciones (recursos, necesidades, oportunidades). (datos).

3.- Y la condición de que:

$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \ldots X_n \geq 0$

El conjunto de restricciones están constituídos generalmente por inecuaciones, así como por ecuaciones. En resumen el modelo de programación lineal está constituído por:

1.- Una función objetivo lineal sujeta a optimización.

2.- Conjunto de restricciones lineales, postulada por inecuaciones o ecuaciones.

3.- Condición de las variables: No negativas.

Siendo todas las relaciones matemáticas expuestas lineales (requisito fundamental al referirnos al modelo de programación lineal), por lo que todo problema que pueda representarse bajo estas características es un modelo de programación lineal.

2.2.-PROCESO DE FORMULACION Y PLANTEO DE UN PROBLEMA COMO MODELO DE PROGRAMACION LINEAL.

Denominaremos proceso debido a que propondremos un procedimiento básico para el planteo.

1.- Formulación de la información relacionada con el problema, exposición de los datos generales.

2.- Análisis de la información; establecimiento del -- criterio de optimización, maximización o minimización.

3.- Definición de las variables de decisión Xj.

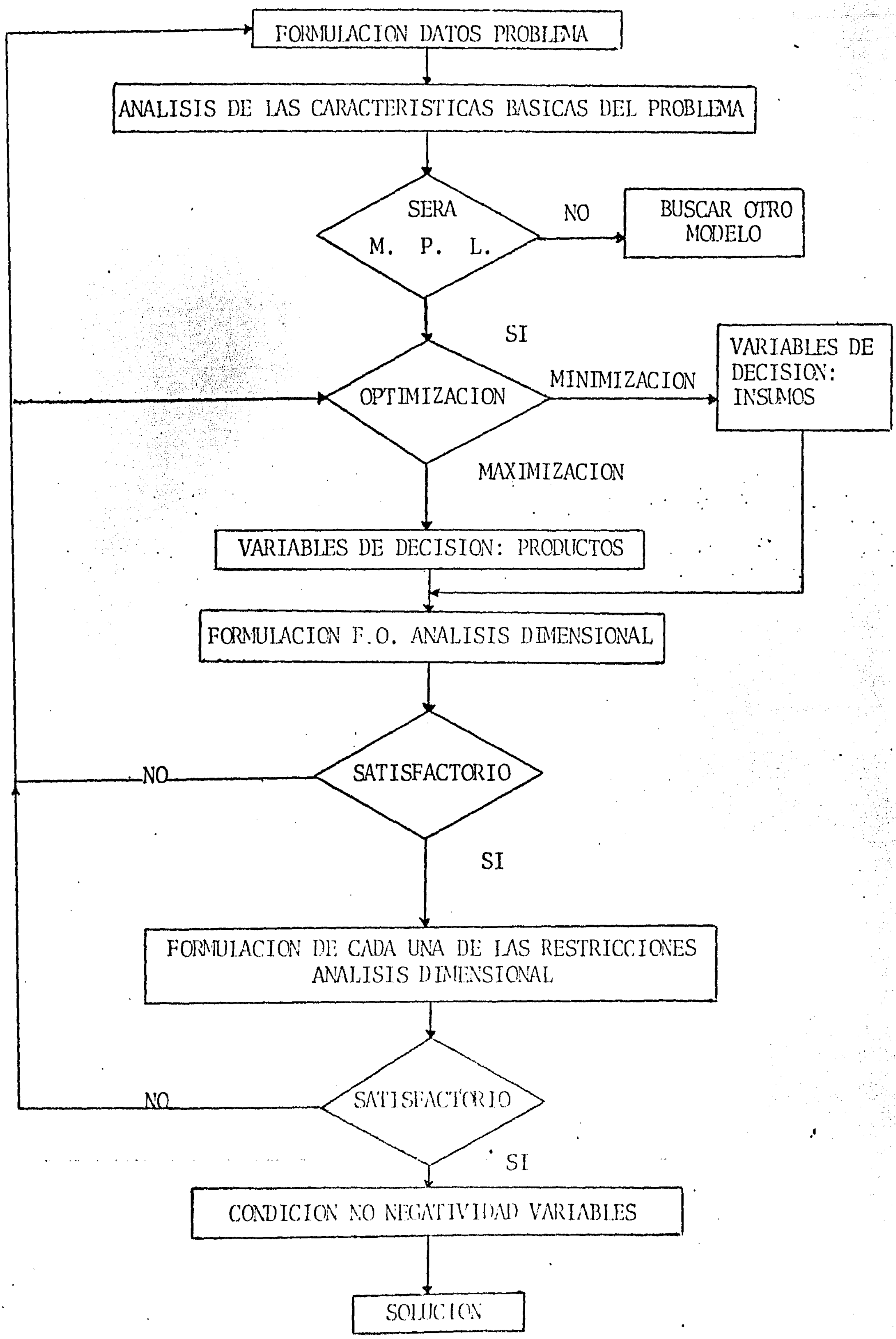
4.- Formulación de la función objetivo.

5.- Formulación de las restricciones.

6.- Expecificación de la condición de no negatividad - de las variables.

Este procedimiento básico y general, ampliado en forma-sistemática se desarrolla en la figura 2.I., en la cual se enfatiza en la verificación de la postulación de la-función objetivo y restricciones mediante un análisis -dimensional, que simplemente dirá si la expresión matemática tiene validez racional.

DIAGRAMA DE BLOQUES DEL PROCESO DE FORMULACION Y PLANTEO DE UN PROBLEMA COMO MODELO DE PROGRAMACION LINEAL



2.3.- APLICACION DEL PROCESO DE PLANTEO.

EJEMPLO No. 1.- " FUNDICION ACERIA "

Formulación datos del problema.

Acería tiene la posibilidad de producir acero al carbono y acero aleado. Su capacidad total es de 10,000 toneladas mensuales. El gerente de ventas estima que el período actual es de baja coyuntura y que no se pueden vender más que 5,000 toneladas mensuales de acero aleado u 8,000 toneladas al mes, de acero al carbono.

La política de la empresa es de no aumentar los stocks, por lo tanto, deberá limitar su producción a 5,000 toneladas al mes de acero aleado y a 8,000 toneladas de acero al carbono.

El acero al carbono se vende a 8,000 \$/t y el acero aleado a 12,000 \$/t. El costo directo de estos aceros, es-decir sin contar los gastos generales, tal como ha sido calculado por el Departamento de Contabilidad de costos, se eleva a 6,000 \$/t para el acero al carbono y a 8,500 \$/t para el acero aleado, por lo tanto, la contribución unitaria a los beneficios es:

2,000 \$/t para acero al carbono.

3,500 \$/t para acero aleado.

Análisis del problema:

La observación de la información presentada, deja entrever que se requiere determinar qué programa de fabricación debe adoptar la empresa. Esquemáticamente se plantea, (Fig. 2.2.).

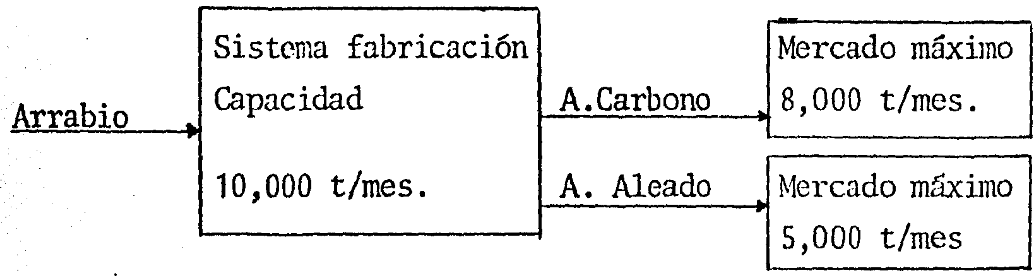


Fig. 2.2. Esquema gráfico del ejemplo No. 1.

Es decir, qué cantidad deberá producirse de cada uno de los productos de tal manera de obtener el mayor beneficio mensual para la compañía.

Variables de decisión:

X_1= Toneladas de acero al carbono a producir por mes (t/mes).
X_2= Toneladas acero aleado a producir por mes (t/mes).

Es importante observar que las variables están definidas en t/mes, debido a que la capacidad de planta y las condiciones de mercado se refieren al período mensual.

Función objetivo.

Maximizar el beneficio deducido por la producción y venta de ambos productos.

$$\text{Maximizar: } Z=2{,}000\ \left[\frac{\$\ B}{t.a.c.}\right]\ X_I\ \left[\frac{t.a.c.}{mes}\right]+3{,}500\ \left[\frac{\$\ B}{t.a.a.}\right]\ X_2\ \left[\frac{t.a.a.}{mes}\right]$$

$$Z=2{,}000\ X_I\ \left[\frac{\$\ B}{mes}\right] + 3{,}500\ X_2\ \left[\frac{\$\ B}{mes}\right]$$

$$Z = (2{,}000\ X_I + 3{,}500\ X_2)\ \left[\frac{\$\ B}{mes}\right]$$

La función $Z=f\ (X_I,\ X_2)$ es de beneficios y se demostró que dimensionalmente es compactible la suma de los términos 2,000 X_I (beneficio por la producción y venta de X_I t/mes de acero al carbono) y 3,500 X_2 (beneficio de la producción y venta - de X_2 t/mes de acero aleado).

Restricciones.

1.- La capacidad de producción limitada a 10,000 t/mes.

2.- El mercado potencial de acero al carbono limitado en el período actual a 8,000 t/mes.

3.- El mercado potencial de acero aleado limitado a un máximo de 5,000 t/mes.

Restricción capacidad planta.

Aclaramos en este caso, que si la capacidad de la planta esta limitada a 10,000 t/mes, ambos productos utilizarán 1 tonelada de capacidad por tonelada de producto fabricado.

$$I\,[\frac{t.\ cap.}{mes}]\ X_I\ [\frac{t.a.c.}{mes}] + I\ [\frac{t.\ cap.}{t.a.a.}]\ X_2\ [\frac{t.a.a.}{mes}] \leq 10{,}000\ [\frac{t.\ cap.}{mes}]$$

$$X_I\ [\frac{t.\ cap.}{mes}] + X_2\ [\frac{t.\ cap.}{mes}] \leq 10{,}000\ [\frac{t.\ cap.}{mes}]$$

$$X_I + X_2\ [\frac{t.\ cap.}{mes}] \leq 10{,}000\ [\frac{t.\ cap.}{mes}]$$

El primer miembro de la inecuación planteada (verificada dimensionalmente) establece la capacidad de fabricación utilizada para la producción de ambos productos, el segundo miembro establece la capacidad total disponible.

Ahora el signo de desigualdad " $\leq$ " (menor o igual que) establece que la capacidad utilizada podrá ser menor que la total disponible, implicando también que la capacidad utilizada podrá ser igual a la total disponible.

En el caso de que esta restricción se postulará como $X_I + X_2 = 10{,}000$, esto implicaría que necesariamente la fabricación de ambos productos debe consumir la totalidad de la capacidad. De hecho simplemente se desea mostrar la diferencia conceptual entre un signo de desigualdad y una igualdad.

Restricción mercado acero al carbono.

La producción mensual de acero al carbono, esta limitado - por la demanda que se halla fijada en 8,000 t/mes, pero en - este caso nos referimos a una relación dada por una tonelada de acero al carbono demandada es equivalente a una tonelada de acero al carbono producida, para dar una idea clara a la formulación de restricción, esto es:

$$I \left[\frac{\text{t.a.c. demandada}}{\text{t.a.c. producida}}\right] X_I \left[\frac{\text{t.a.c.}}{\text{mes}}\right] \leq 8{,}000 \left[\frac{\text{t.a.c. demandada}}{\text{mes}}\right]$$

$$X_I \left[\frac{\text{t.a.c. demandada}}{\text{mes}}\right] \leq 8{,}000 \left[\frac{\text{t.a.c. demandada}}{\text{mes}}\right]$$

$$X_I \leq 8{,}000$$

Basicamente lo que se buscaba postular con esta restricción era simplemente el hecho que la producción de acero al carbo no debería ajustarse a las condiciones de su mercado, es decir, su producción no sobrepasará el nivel de demanda y al - establecer el signo de desigualdad " $\leq$ ", indica que la producción podrá satisfacer en parte ($<$) o totalmente (=) la - demanda.

Restricción mercado acero aleado.

Bajo los mismos argumentos de la restricción anterior, la producción mensual de acero aleado esta postulada por:

$X_2 \leq 5,000$

Condición . de las variables.

Las variables de decisión en este caso implican niveles de producción y por la interpretación racional del mismo problema no podríamos hablar de niveles negativos de producción en este caso deberán ser no negativos.

$X_I \geq 0$ (podemos producir cero t.a.c. o más)
$X_2 \geq 0$ (podemos producir cero t.a.a. o más)

Resumiendo: El modelo matemático del problemas será:

1.- Función objetivo: $Z = 2,000\ X_1 + 3,500\ X_2$

2.- Sujeto a las restricciones:

Capacidad productiva mensual $X_1 + X_2 \leq 10,000$
Mercado del acero al carbono $X_1 \leq 8,000$
Mercado del acero aleado $X_2 \leq 5,000$

3.- Condición de las variables: $X_I \geq 0$; $X_2 \geq 0$

EJEMPLO No. 2.- "PROBLEMA MINERIA"

La compañía minera, opera dos minas de carbón de piedra -- con diferentes capacidades de producción. La gerencia de la compañía tiene los siguientes datos acerca de la producción diaria en toneladas:

CALIDAD CARBON DE PIEDRA	MINA "A"	MINA "B"
Alta Calidad	8	2
Calidad Mediana	3	3
Calidad Baja	4	10

Esta compañía ha firmado un acuerdo con una planta de acero, para proporcionar semanalmente un mínimo de 44 toneladas de carbón de piedra de alta calidad, 30 toneladas de calidad mediana y 64 toneladas de carbón de calidad baja. El costo directo de operación de la mina "A" es de $ 120 y de la mina "B" $ 160 por día.

Análisis del problema.

En base a los datos del problema expuesto, podemos plantearlo en términos de determinar el plan óptimo de explotación de ambas minas, satisfaciendo los requerimientos del acuerdo de tal menera de minimizar los costos de operación deducidos por el plan.

Variables de decisión.

En base a que los costos de producción están establecidos por día, el plan de explotación se determinará en función -- del número de días de operación de cada mina. Entonces las variables de decisión las definimos:

X_I = No. de días de operación mina "A"/semana.

X_2 = No. de días de operación mina "B"/semana.

Función objetivo.

Minimización de la función de costos de operación de semana.

$$\text{Minimizar } Z = 120\ [\tfrac{\$}{D}]\ X_I\ [\tfrac{D}{S}] + 160\ [\tfrac{\$}{D}]\ X_2\ [\tfrac{D}{S}]$$

$$Z = 120\ X_I + 160\ X_2\ [\tfrac{\$}{S}]$$

Restricciones.

Restricciones entrega semanal carbón piedra alta calidad

$$8\ [\tfrac{t}{D}]\ X_I\ [\tfrac{D}{S}] + 2\ [\tfrac{t}{D}]\ X_2\ [\tfrac{D}{S}] \geq 44\ [\tfrac{t}{S}]$$

$$8\ X_I + 2\ X_2 \geq 44$$

Restricción entrega semanal carbón piedra calidad mediana

$$3 \left[\frac{t}{D}\right] X_I \left[\frac{D}{S}\right] + 3 \left[\frac{t}{D}\right] X_2 \left[\frac{D}{S}\right] \geq 30 \left[\frac{t}{S}\right]$$

$$3 X_I + 3 X_2 \geq 30$$

Restricción entrega semanal carbón calidad baja

$$4 \left[\frac{t}{D}\right] X_I \left[\frac{D}{S}\right] + 10 \left[\frac{t}{D}\right] X_2 \left[\frac{D}{S}\right] \geq 64 \left[\frac{t}{S}\right]$$

$$4 X_I + 10 X_2 \geq 64$$

Condición de las variables.

No se interpretarán valores negativos para las variables de decisión.

$$X_I \geq 0; \qquad X_2 \geq 0$$

Resumiendo el planteo del ejemplo No. 2, tendríamos:

Minimizar $Z = 120 X_1 + 160 X_2$

Sujeto a:

$8 X_I + 2 X_2 \geq 44$

$3 X_I + 3 X_2 \geq 30$

$4 X_I + 10 X_2 \geq 64$

Condición variable: $X_I \geq 0$; $X_2 \geq 0$.

III.- EJEMPLO DE APLICACION DE LA PROGRAMACION LINEAL.

3.I.- "MEZCLA DE ALIMENTOS"

Una granja avícola desea formular una dieta para pollos. Supongase que el lote diario requerido de la mezcla sean 100 libras. La dieta debe contener:

1.- Al menos 0.8% pero no más de 1.2% de calcio.
2.- Al menos 22% de proteínas.
3.- A lo más 5% de fibras crudas.

Suponga además, que los principales ingredientes utiliza-- dos incluyen maíz, soya y caliza (carbonato de calcio), el - contenido nutritivo de estos ingredientes se resumen a continuación:

Libras por libras de ingrediente				
INGREDIENTE	CALCIO	PROTEINA	FIBRA	COSTO ($) POR LIBRA.
PIEDRA CALIZA	0.380	0.00	0.00	0.0164
MAIZ	0.001	0.09	0.02	0.0463
ALIMENTO SOYA	0.002	0.50	0.08	0.1250

PLANTEO DEL PROBLEMA.

Variables de decisión:

X_I = Contenido en libras de caliza.

X_2 = Contenido en libras de máiz.

X_3 = Contenido en libras de soya.

Función objetivo.

Minimizar $Z = 0.0164\ X_I + 0.0463\ X_2 + 0.1250\ X_3$

Sujeto a:

(1) $X_I + X_2 + X_3 = 100$

(2) $0.380\ X_I + 0.001\ X_2 + 0.002\ X_3 \leq (0.012)\ (100)$

(3) $0.380\ X_I + 0.001\ X_2 + 0.002\ X_3 \geq (0.08)\ (100)$

(4) $0.09\ X_2 + 0.50\ X_3 \geq (0.22)\ (100)$

(5) $0.02\ X_2 + 0.08\ X_3 \leq (0.05)\ (100)$

Restricciones:

(1) El tamaño del lote.

(2), (3) Especifican los requerimientos máximos y mínimos de calcio.

(4) Demanda mínima de proteína.

(5) Estipula necesidad máxima de fibra cruda.

3.2.- EJEMPLO "AVIACION"

Supongamos que una línea aérea considera la compra de aviones de pasajeros; los avios cubrirán distancias largas, medianas y cortas y serán del tipo A, B. y C, respectivamente. El precio por cada avión de tipo A es de \$ 6'700,000.00, por cada avión del tipo B es de \$ 5'000,000.00 y \$ 3'500,000.00 por el avión del tipo C, los directores de la compañía autorizaron un máximo de \$ 150 millones de esas compras.

Se estima que estos aviones se utilizarán a máxima capacidad y que las ganancias por cada tipo de avión serían de - - \$ 420,000 por cada avión del tipo A, \$ 300,000 por el tipo B y \$ 230,000 por el tipo C.

Se calcula que habrá suficientes pilotos entrenados para volar 30 aviones nuevos, si se compran aviones de tipo C solamente, el equipo y personal de mantenimiento actual podrían mantener sólo 40 aviones nuevos.

Sin ambargo, cada avión de tipo B equivale a 4/3 de tipo A, y cada avión de tipo C equivale a 5/3 de tipo A en lo que respecta al uso requerido de equipo y personal de mantenimiento.

PLANTEO DEL PROBLEMA.

Variables de decisión.

X_1 = No. de aviones de tipo A comprados.

X_2 = No. de aviones de tipo B comprados.

X_3 = No. de aviones de tipo C comprados.

Función objetivo.

Maximizar $Z = .42\ X_1 + .30\ X_2 + .23\ X_3$

Sujeto a:

(1) $6.7\ X_1 + 5.0\ X_2 + 3.5\ X_3 \leq 150$

(2) $X_1 + X_2 + X_3 \leq 30$

(3) $X_1 + 4/3\ X_3 + 5/3\ X_3 \leq 40$

Restricciones:

(1) Limitación económica.

(2) Disponibilidad de pilotos.

(3) Limitaciones de equipo y personal de mantenimiento.

3.3.- EJEMPLO "PRODUCCION"

Una compañía produce válvulas y pistones. Ambos productos deben ser maquinados en un torno y luego en una máquina lijadora. Los pistones, además, deben pulirse. Cada válvula y cada pistón requieren una cierta cantidad de acero.

La siguiente tabla resume las cantidades de cada recurso usado en la manufactura de cada válvula y de cada pistón, así como la utilidad por cada producto y el total de cada recurso disponible en unidades/semana.

La compañía desea determinar los valores de las variables de decisión (número de válvulas y pistones que maximizan la utilidad, sujetándose a las restricciones de hr/máquinas y lb. de acero).

	TORNO hr.	LIJADO hr.	PULIDO hr.	ACERO lb.	$/UTIL UNIDAD.
CADA VALVULA REQUIERE	1.0	0.3	0.0	1.0	3
CADA PISTON REQUIERE	1.5	0.5	0.5	1.0	4
RECURSOS DISPONIBLES (unidades/semana)	750	300	200	600	

PLANTEO DEL PROBLEMA.

Variables de decisión.

X_I = Válvula/semana.

X_2 = Pistón/semana.

Función objetivo.

Maximizar $Z = 3\,X_I + 4\,X_2$

Sujeto a:

(1) $1.0\,X_I + 1.5\,X_2 \leq 750$

(2) $0.3\,X_I + 0.5\,X_2 \leq 300$

(3) $0.0\,X_I + 0.5\,X_2 \leq 200$

(4) $1.0\,X_I + 1.0\,X_2 \leq 600$

(5) $X_I,\ X_2 \geq 0$

Restricciones:

(1) Restricción departamento torno.

(2) Restricción departamento lijado.

(3) Restricción departamento pulido.

(4) Restricción acero.

(5) Condición no negatividad.

3.4.- EJEMPLO "TRANSPORTE"

Una compañía constructora, explota dos tipos de minerales de cobre-óxidos y sulfuros. El mineral de óxido que se encuentra en el fondo del tajo debe ser acerreado utilizando camiones de 85 toneladas debido a la pendiente adversa en el terreno, el mineral de sulfuro que se encuentra en la parte superior del tajo, es acarreado utilizando camiones de 40 toneladas.

La mina debe producir al menos 4,000 toneladas de mineral combinado por turno. Un camión de 85 toneladas acarrea 1,000 toneladas/turno y un camión de 40 toneladas acarrea 500 toneladas/turno. La compañía esta restringida financieramente, así que los cargos de depreciación por hora por el uso de todos los camiones no pueden excederse de 36 $/hora y los costos de operación por hora (sin depreciación) no pueden excederse de 54 $/hora. El cargo de depreciación por hora y el costo de operación para un camión de 85 toneladas son respectivamente 9 $/hora y mientras que para aquellos de 40 toneladas son 4 $/hora y 8 $/hora.

Si la compañía puede obtener una utilidad de $150 por turno de un camión de 85 toneladas y $ 100 por un turno de camión de 40 toneladas, ¿Cuantos turnos de cada camión debe utilizarse para poder satisfacer los requerimientos necesarios, al mismo tiempo que se maximize la utilidad?

PLANTEO DEL PROBLEMA.

Variables de decisión:

X_1 = No. de turnos de camión de 85 toneladas.

X_2 = No. de turnos de camión de 40 toneladas.

Función objetivo.

Maximizar $Z = 150\ X_1 + 100\ X_2$

Sujeto a:

(1) $1{,}000\ X_1 + 500\ X_2 \geq 4{,}000$

(2) $9\ X_1 + 8\ X_2 \leq 54$

(3) $9\ X_1 + 4\ X_2 \leq 36$

(4) $X_1,\ X_2 \geq 0$

Restricciones:

(1) Requerimiento de producción

(2) Requerimiento costos de operación

(3) Requerimiento cargos de depreciación.

(4) Condición no negatividad de las variables.

PLANTEO DEL PROBLEMA.

Variables de decisión:

X_1 = No. de turnos de camión de 85 toneladas.

X_2 = No. de turnos de camión de 40 toneladas.

Función objetivo.

Maximizar $Z = 150\ X_1 + 100\ X_2$

Sujeto a:

(1) $1{,}000\ X_1 + 500\ X_2 \geq 4{,}000$

(2) $9\ X_1 + 8\ X_2 \leq 54$

(3) $9\ X_1 + 4\ X_2 \leq 36$

(4) $X_1, X_2 \geq 0$

Restricciones:

(1) Requerimiento de producción

(2) Requerimiento costos de operación

(3) Requerimiento cargos de depreciación.

(4) Condición no negatividad de las variables.

IV.- DETERMINACION E INTERPRETACION DE LA SOLUCION OPTIMA DE UN PROCESO DE PROGRAMACION LINEAL.

PROCEDIMIENTO GRAFICO.

4.1.-PROCESO BASICO DE BUSQUEDA DE LA SOLUCION OPTIMA DE UN MODELO DE PROGRAMACION LINEAL.

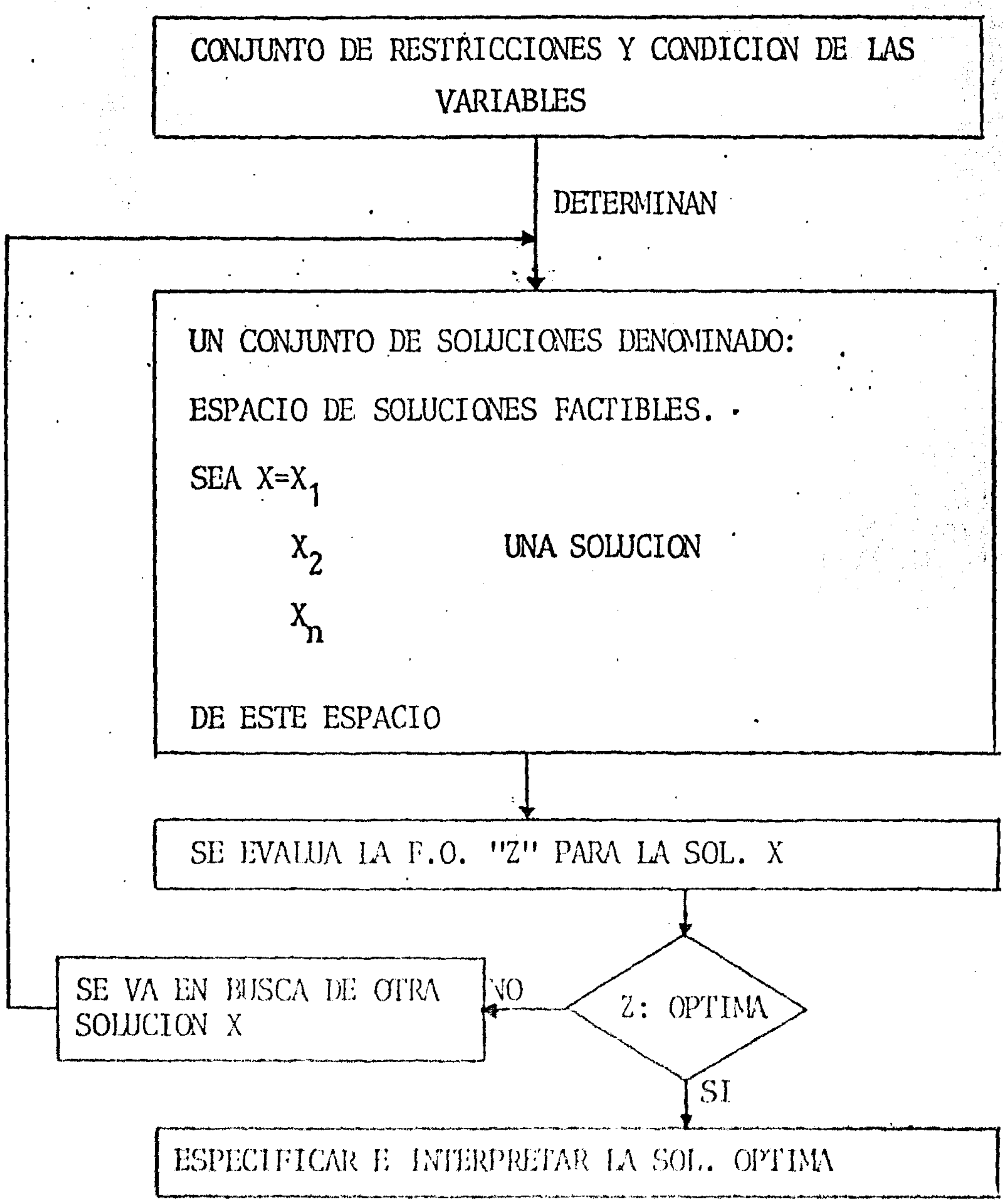


Fig. 4.1.- PROCESO BASICO DE BUSQUEDA DE UNA SOLUCION OPTIMA EN PROGRAMACION LINEAL.

El procedimiento gráfico no es un método práctico para solucionar programas lineales, ya que generalmente los problemas incluyen gran número de variables.

El proceso gráfico tiene aplicación práctica cuando hay dos-variables, con tres variables es posible, pero más laborioso, su aplicación para más de tres es imposible.

La idea del método gráfico es dibujar el espacio de soluciones factibles, el cual se define como: El espacio encerrado-por el conjunto de restricciones y la condición de las variables.

4.2.- PROCESO GRAFICO PARA LA DETERMINACION DE LA SOLUCION-OPTIMA.

Para la explicación del método gráfico se considera el ejemplo No. 1, postulado por: Maximizar $Z=2,000\ X_1+3,500\ X_2$.

Sujeto a las restricciones:

(1) Capacidad productiva $X_1+X_2 \leq 10,000$

(2) Mercado A. al carbono $X_1 \leq 8,000$

(3) Mercado A. aleado $X_2 \leq 5,000$

(4) Condición variables $X_1 \geq 0$

(5) Condición variables $X_2 \geq 0$

Donde:

X_1 y X_2 son volúmenes a producir por mes de acero al carbono--y acero aleado respectivamente.

PRIMER PASO:

Representación de cada restricción en un plano cartesiano, representaremos gráficamente una a una cada restricción.

Primero haremos la representación de las restricciones (4) y (5), ambas relaciones implican que los valores X_1 y X_2 deben ser no negativos, es decir considerar únicamente los puntos del plano cartesiano en su primer cuadrante.

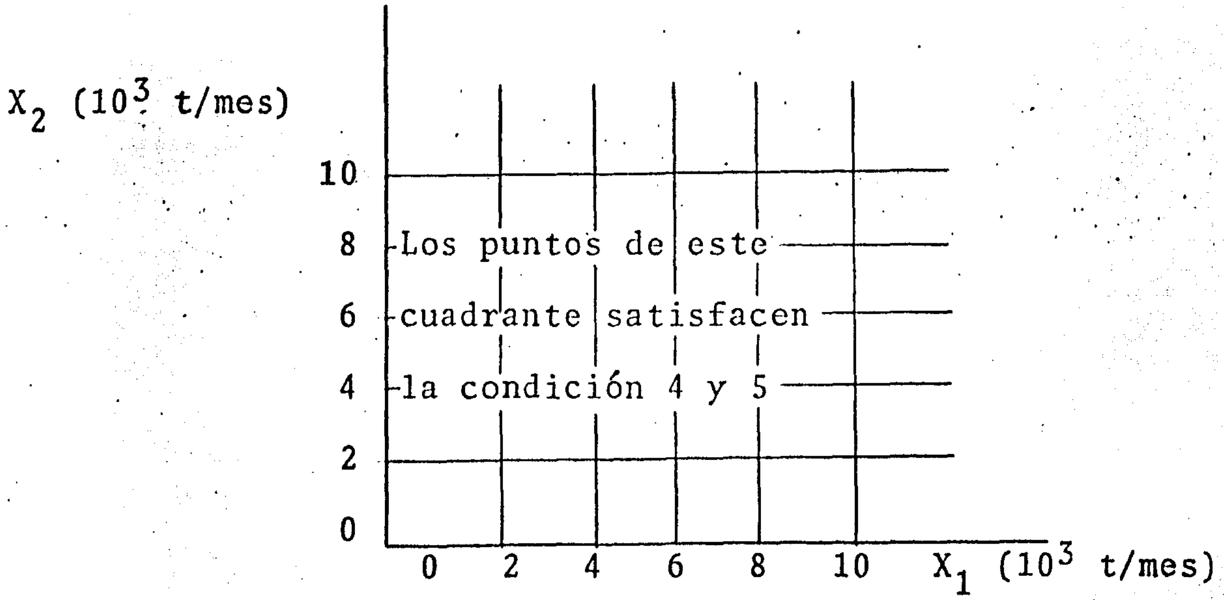


Fig. 4.2.- Representación de la restricción 4 y 5

Representación de la restricción (1).

Sea la inecuación $X_1 + X_2 \leq 10{,}000$ a representarse y el procedimiento a seguir será:

a).- Transformar la inecuación en una ecuación.

$X_1 + X_2 = 10,000$ (ecuación de una línea recta).

b).- Determinar dos puntos que satisfacen la ecuación.

En $X_1 + X_2 = 10,000$;

Si $X_1 = 0$; entonces $X_2 = 10,000$ y tenemos un punto cuyas coordenadas son ($X_1 = 0$, $X_2 = 10,000$) o simplemente (0,10,000).

Ahora en $X_1 + X_2 = 10,000$:

Si $X_2 = 0$; entonces $X_1 = 10,000$ y el punto será (10,000,0) y tendremos de esta forma dos puntos de la recta $X_1 + X_2 = 10,000$, que son (0, 10,000)y (10,000, 0) y su representación será:

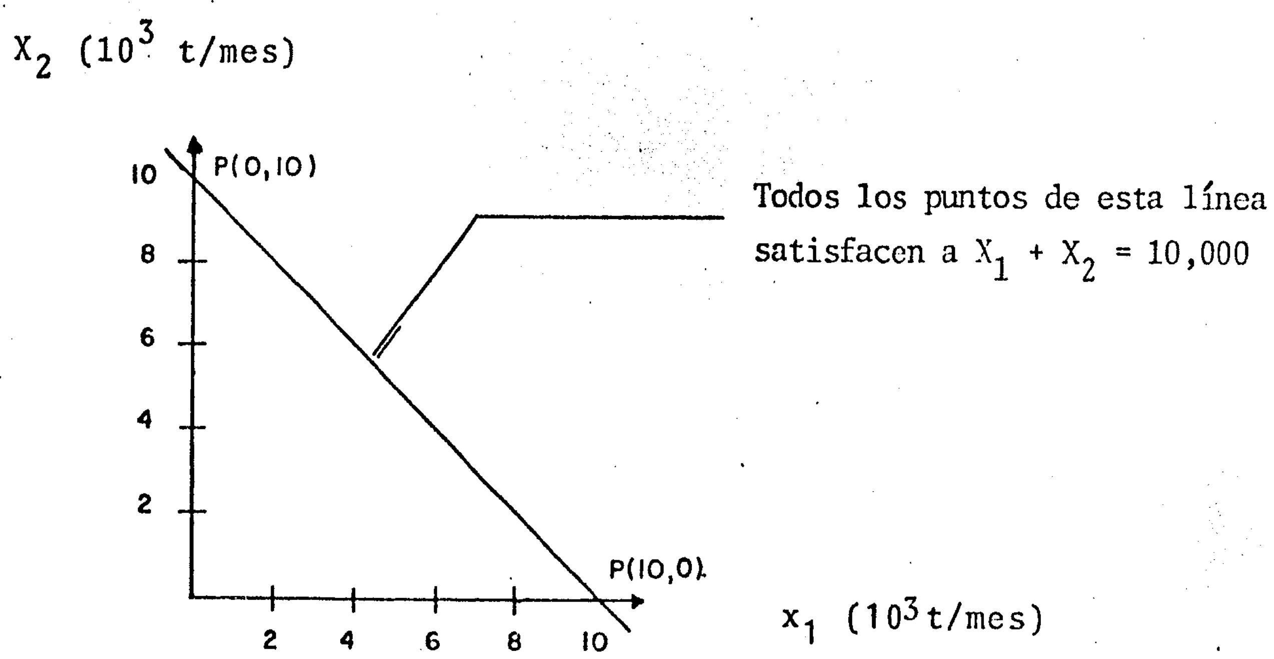


Fig. 4.3.- Representación de la restricción 1.

c).- Determinar puntos que satisfacen una inecuación.

El punto P_1 = (2,000, 2,000) satisface $X_1 + X_2 \leq 10{,}000$?

Sustituyendo las coordenadas del punto P_1 en la inecuación tenemos:

$$2{,}000 + 2{,}000 \leq 10{,}000$$
$$4{,}000 \leq 10{,}000$$

Que constituye una proposición verdadera luego el punto P_1 (2,000, 2,000) satisface $X_1 + X_2 \leq 10{,}000$; esto es la línea $X_1 + X_2 = 10{,}000$ se desplazará paralelamente en dirección del punto P_1 y todos los puntos que toque en este recorrido safisfacerán la inecuación $X_1 + X_2 \leq 10{,}000$.

Esto gráficamente sería:

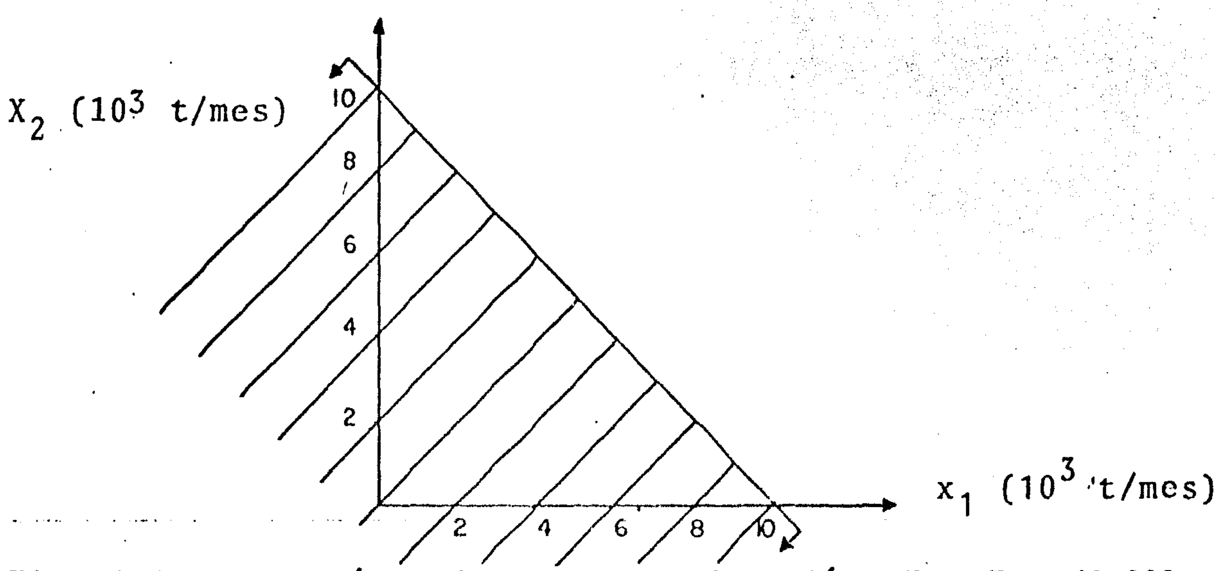


Fig. 4.4.- Dirección de desplazamiento de la línea $X_1 + X_2 = 10{,}000$

Una forma práctica para determinar la dirección del desplazamiento de una línea, y de esta forma establecer los puntos -- que satisfacen una inecuación, es la de observar si las coordenadas del origen del plano coordenado satisfacen o no la -- proposición de la inecuación.

Para $X_1 + X_2 \leq 10,000$ sustituimos las coordenadas del origen - (0,0), lo cual tendríamos:

$$0 + 0 \leq 10,000$$

$$0 \leq 10,000$$

Proposición verdadera y el desplazamiento de la recta $X_1 + X_2 = 10,000$ será en la dirección al origen. Si la proposición fuera falsa, el desplazamiento sería contraria al origen.

d).- Conjunto de puntos que satisfacen más de una condición - simultánea.

Si ahora representamos las condiciones 1, 4 y 5 en un mismo - plano:

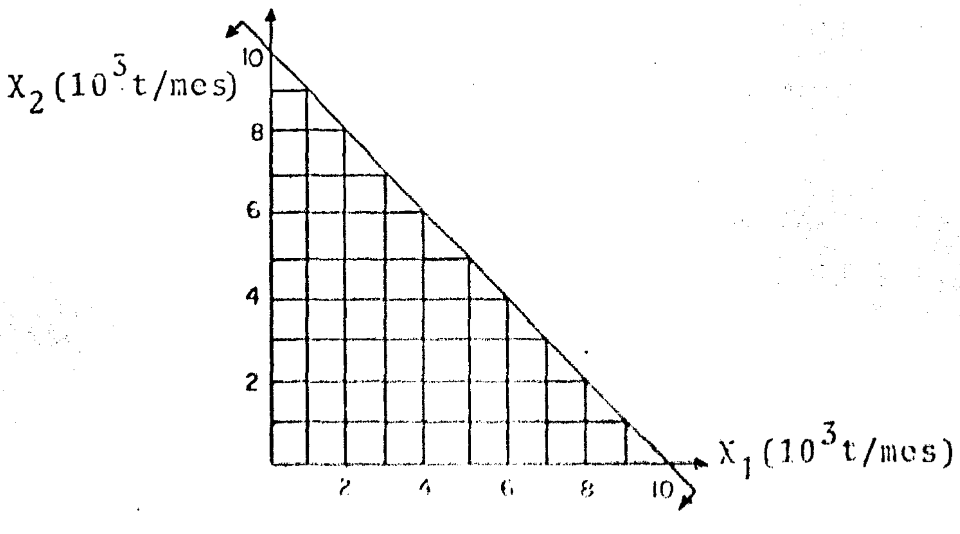


Fig. 4.5.- Area ///Conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente las condiciones 1, 4 y 5.

Representación de la restricción 2.

La condición 2 es $X_1 \leq 8{,}000$ siguiendo el procedimiento expuesto para la restricción 1 tenemos:

a) $X_1 = 8{,}000$

b) $X_1 = 8{,}000$ es la ecuación de una línea recta vertical que pasa por el punto (8,000 , 0)

c) En $X_1 = \leq 8{,}000$ sustituimos (0,0) y tendremos : $0 \leq 8{,}000$ y la recta $X_1 = 8{,}000$, se desplazará en dirección al origen.

d) Ahora el espacio determinado por las condiciones 1, 2, 4 y 5 será:

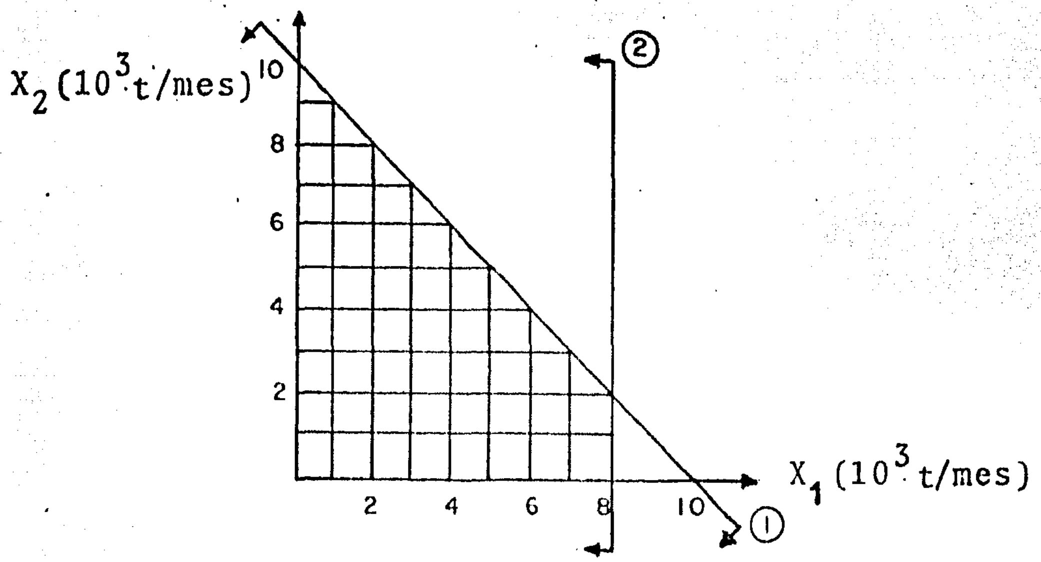


Fig. 4.6.- Area ## conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente las condiciones 1, 2, 4 y 5.

Representación de la restricción 3.

La condición 3 es $X_2 \leq 5{,}000$

a) $X_2 = 5{,}000$

b) $X_2 = 5{,}00$ ecuación de una línea horizontal que pasa por el punto (0, 5,000)

c) En $X_2 \leq 5{,}000$ Sustituimos (0,0) y obtenemos:

$0 \leq 5{,}000$ y la recta $X_2 = 5{,}000$ se desplazará en dirección al origen.

d) Representada la condición 3 conjuntamente con 1,2,4 y 5 - obtendremos un área que satisfacerá todas y cada una de - las restricciones:

SEGUNDO PASO.

Determinación del plano de soluciones factibles.

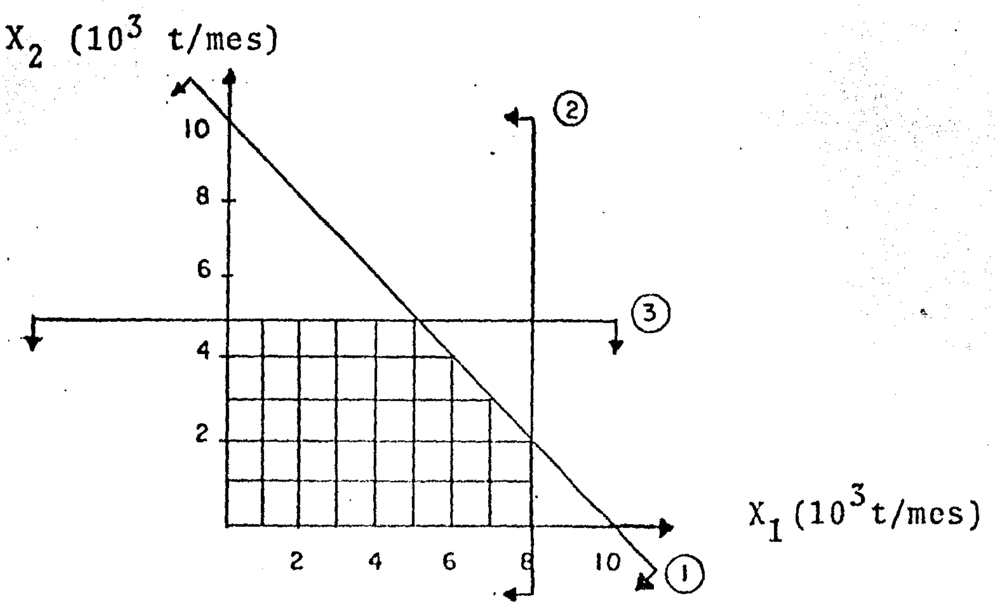


Fig. 4.7.- Plano de soluciones factibles.

El plano de soluciones factibles (o espacio de soluciones factibles) constituye el conjunto de puntos que satisfacen - la totalidad de las restricciones, así como la condición de signo de las variables.

Como se puede ver en la figura 4.7., el conjunto de puntos que satisfacen las restricciones en número es infinito, es decir, que hay gran número de soluciones factibles. Ahora, con relación al espacio de soluciones factibles de un modelo de programación lineal, expondremos un importante teorema básico en la solución del modelo de programación lineal.

TEOREMA 1.- El conjunto de soluciones que satisfacen todas las restricciones de un modelo de programación lineal, es un espacio convexo (o plano convexo, cuando tenemos únicamente dos variables de desición).

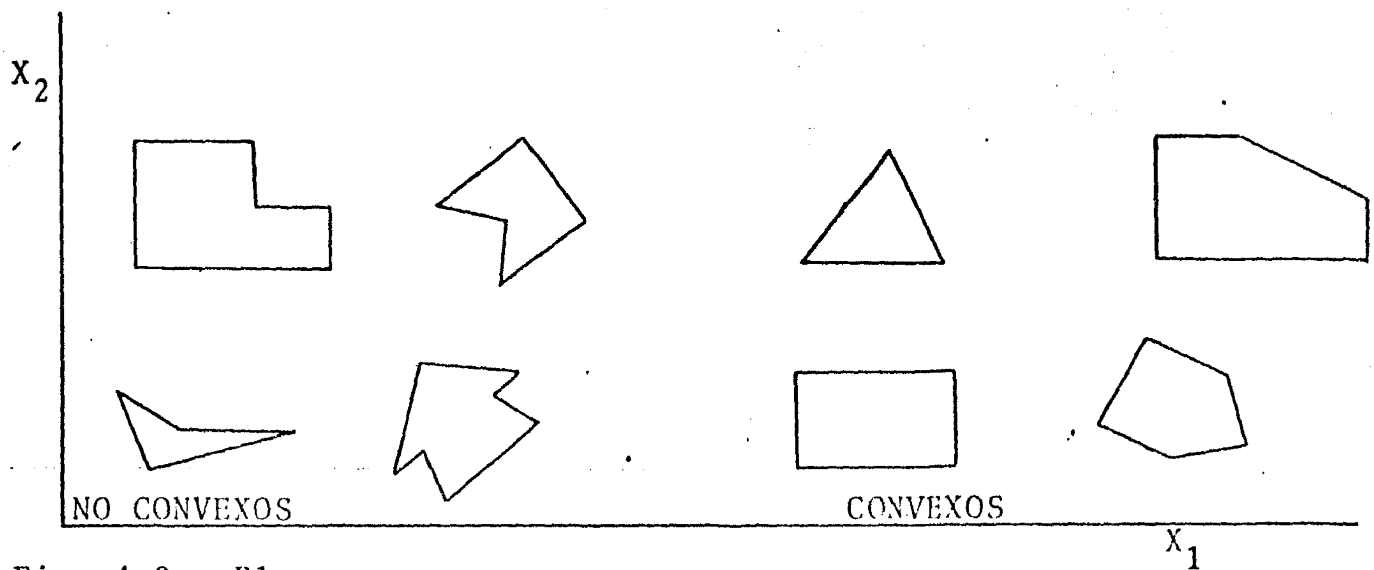


Fig. 4.8.- Planos no convexos y convexos.

TERCER PASO.

Determinación de los puntos extremos del plano.

TEOREMA II.- En los puntos extremos del plano de soluciones -- Factibles, se hallan las mejores soluciones.

Aplicando el teorema II, identificamos sobre el plano de soluciones factibles del ejemplo I, los puntos extremos o vértices A, B, C, D, E y sabemos que en ellos se hallan las mejores soluciones.

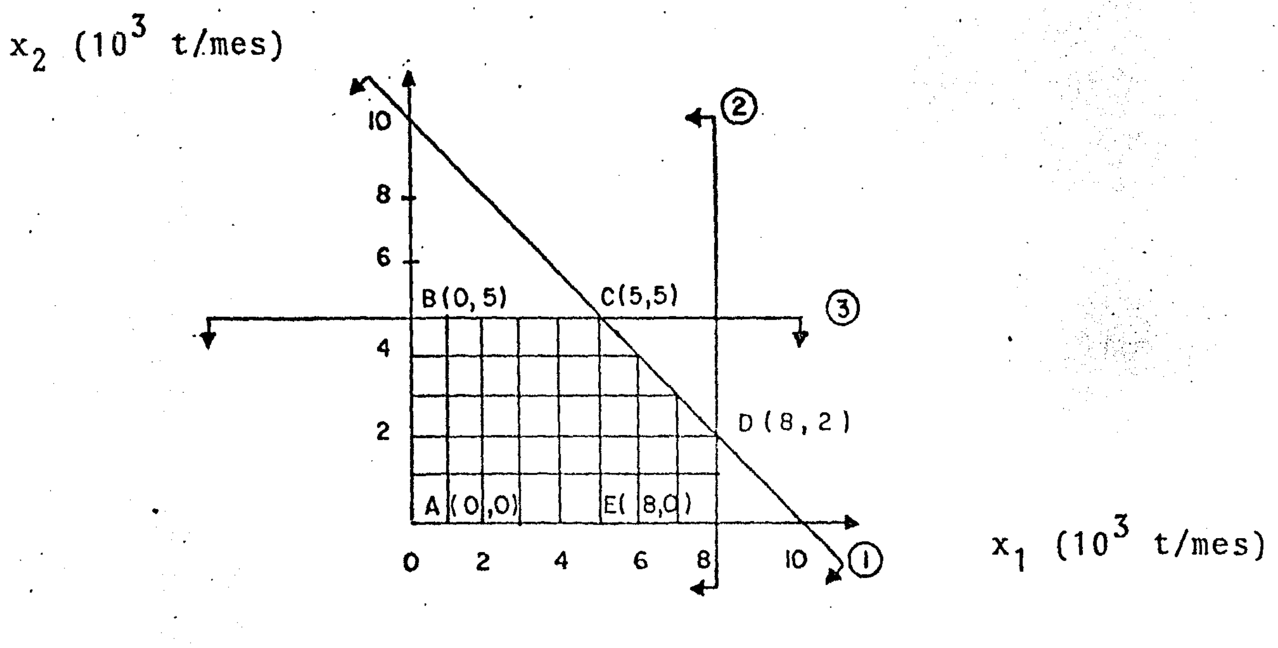


Fig. 4.9.- Identificación de los puntos extremos del plano convexo.

CUARTO PASO.

Evaluar cada uno de los puntos extremos en la función objetivo.

Al evaluar cada punto extremo en la función objetivo, simplemente sustituimos sus coordenadas en la expresión de la función objetivo. "Z"

PUNTO EXTREMO (VERTICE)	COORDENADAS X_1	X_2	SUSTITUCION EN Z $Z=2,000\ X_1+3,500\ X_2$	VALOR "Z" (MILLONES DE $)
A	0	0	2,000(0)+3,500(0)	0.0
B	0	5,000	2,000(0)+3,500(5,000)	17.5
C	5,000	5,000	2,000(5,000)+3,500(5,000)	27.5
D	8,000	2,000	2,000(8,000)+3,500(2,000)	23.0
E	8,000	0	2,000(8,000)+3,500(0)	16.0

CUADRO 4.1.- Evaluación puntos extremos en la función "Z".

Observando los valores de la columna Z en el cuadro 4.1., La función objetivo Z toma su máximo valor en el punto extremo "C" donde $X_1=5,000$; $X_2=5,000$ y de esta forma deducimos que la solución óptima del modelo se halla en el vértice "C".

QUINTO PASO.

Especificación de la solución del modelo en los términos interpretativos planteados.

Solución óptima del problema.

Programa de fabricación de acería.

Producir: X_1 =5,000 toneladas acero al carbono / mes.

X_2 =5,000 toneladas acero aleado / mes.

Para obtener una ganancia máxima de Z= 27.5 millones / mes.

RESUMEN DEL PROCESO GRAFICO DE SOLUCION DEL MODELO DE PROGRAMACION LINEAL.

1.- En un plano cartesiano representar cada una de las restricciones.

2.- Determinar el plano de soluciones factibles.

3.- Determinar los puntos extremos del plano de soluciones factibles.

4.- Evaluar la función objetivo para cada uno de los puntos extremos y seleccionar como punto extremo óptimo aquel para el cual la función objetivo tome su valor óptimo.

5.- Especificar la solución en los términos interpretativos planteados.

V.- PROCESO DE SOLUCION ALGEBRAICA E INTERPRETACION DE SOLUCIONES.

Desarrollaremos un proceso a seguir para la solución algebraica:

PRIMER PASO: Formular el modelo matemático.

SEGUNDO PASO: Formular las restricciones (excepto condición variables), como igualdades, mediante la introducción de variables de holgura.

TERCER PASO: Resolver un sistema de ecuaciones, de m ecuaciones y n incógnitas, donde $m < n$.

CUARTO PASO: Determinar las soluciones básicas factibles.

QUINTO PASO: Evaluación de las soluciones básicas factibles en la función objetivo.

SEXTO PASO: Especificación de la solución básica óptima del modelo en los términos interpretativos planteados.

Para la explicación de este procedimiento lo haremos a través del ejemplo No. 1.

PRIMER PASO: Formular el modelo matemático.

El modelo matemático del ejemplo No. 1 se formulaba como:

Maximizar $Z = 2{,}000\ X_1 + 3{,}500\ X_2$

Sujeto a:

$$(1)\quad X_1 + X_2 \leq 10{,}000$$
$$(2)\quad X_1 \leq 8{,}000$$
$$(3)\quad X_2 \leq 5{,}000$$

Condición variables $X_1 \geq 0;\ \ X_2 \geq 0$

El conjunto de restricciones del modelo esta formado como un sistema de inecuaciones, completándose con la condición de variables.

SEGUNDO PASO: Formular las restricciones (excepto condición variables) como igualdades, mediante la introducción de variables de holgura.

La transformación de un sistema de inecuaciones a ecuaciones se logra mediante la introducción de variables nuevas diferentes a X_1 y X_2. Estas nuevas variables se conocen como variables de holgura, y se suman si la restricción es ($\leq$) o se restan si la restricción es ($\geq$).

Sea el sistema transformado:

Capacidad productiva.	(1) $X_1 + X_2 + S_1$	$= 10{,}000$
Mercado A. carbono.	(2) $X_1 + S_2$	$= 8{,}000$
Mercado A. aleado.	(3) $X_2 + S_3$	$= 5{,}000$

Sean S_1, S_2 y S_3 la denominación de 3 variables de holgura. El significado empírico de las variables de holgura será determinado conforme a la interpretación de cada restricción.

En este caso:

S_1=No. de toneladas capacidad productiva no utilizada/mes.
S_2=No. de toneladas mercado A. carbono no satisfecho/mes.
S_3=No. de toneladas mercado A. aleado no satisfecha/mes.
donde: $S_1 \geq 0$; $S_2 \geq 0$; $S_3 \geq 0$

TERCER PASO: Resolver un sistema de ecuaciones, de m ecuaciones y n incógnitas, donde $m < n$.

Para determinar la solución de un conjunto de restricciones de un modelo de programación lineal, expresado como ecuaciones (igualdades) de tamaño m por n $(m \cdot n)$ donde $m < n$. Es decir, hay menos ecuaciones que incógnitas, debemos recurrir al concepto de solución básica.

Si en un sistema de m (No. ecuaciones) ecuaciones y n -- (No. de incógnitas) incógnitas, en la que $m < n$ (existen menos ecuaciones que incógnitas); hacemos que un número de incógnitas n-m, tomen el valor de cero y resolvemos al sistema de ecuaciones en función de las restantes incógnitas.

La solución generada se denomina básica, a las n-m variables que tomaron el valor de cero, se les denomina variables no básicas (o variables cero) y las restantes variables en - términos de los cuales se resolvió el sistema, se les conoce como variables básicas (o variables no cero).

En un sistema de ecuaciones ($m \times n$; $m < n$) como el que se esta tratando, podemos generar tantas soluciones básicas como la expresión matemática:

$$m\,C_n \text{ ó } C_m^n \text{ ó } \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)\,!}$$

formula matemática para el cálculo de combinaciones.

(en nuestro caso m = 3; n=5; el número de soluciones básicas será):

$$3\,C_5 \text{ ó } C_3^5 \text{ ó } \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!2!}$$

$$\frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10 \text{ soluciones básicas.}$$

GENEREMOS LAS 10 SOLUCIONES BASICAS DE NUESTRO SISTEMA.

1a. SOLUCION BASICA.

Para generar una solución básica, recordemos que un número de variables dado por n-m, debe tomar valor de cero y resolver el sistema de ecuaciones en función de las restantes variables.

Por ejemplo:

X_1 y $X_2 = 0$

Sea el sistema:

$$X_1 + X_2 + S_1 = 10{,}000$$
$$X_1 + S_2 = 8{,}000$$
$$X_2 + S_3 = 5{,}000$$

El sistema se transforma a:

$$0 + 0 + S_1 = 10{,}000$$
$$0 + S_2 = 8{,}000$$
$$0 + S_3 = 5{,}000$$

Y la solución será inmediata, es decir:

$S_1 = 10{,}000$	S_1	$X_1 = 0$
$S_2 = 8{,}000$	S_2	$X_2 = 0$
$S_3 = 5{,}000$	S_3	
SOL. BASICA	VAR.BASICAS (VAR.NO CERO)	VAR. NO BASICAS (VAR. CERO)

2a. SOLUCION BASICA.

Si X_1 y $S_1 = 0$ el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} 0 + X_2 + 0 &= 10{,}000 \\ 0 \quad + S_2 &= 8{,}000 \\ X_2 \quad + S_3 &= 5{,}000 \end{aligned} \quad \text{Resolviendo} \quad \begin{aligned} X_2 &= 10{,}000 \\ S_2 &= 8{,}000 \\ S_3 &= -5{,}000 \end{aligned}$$

En esta segunda solución básica, las variables no básicas son X_1 y S_1, las variables básicas X_2, S_2, S_3.

3a. SOLUCION BASICA.

Sea X_1 y $S_2 = 0$; el sistema a resolver será:

$$\begin{aligned} X_2 + S_1 &= 10{,}000 \\ 0 &= 8{,}000 \\ X_2 + S_3 &= 5{,}000 \end{aligned}$$

Sistema incompatible porque elimina la Segunda ecuación.

Consiguientemente X_1 y S_2 no pueden ser variables no básicas simultáneamente, porque en tal caso el sistema no tiene solución.

4a. SOLUCION BASICA.

Sea $X_1 = S_3 = 0$;

$$\begin{aligned} 0 + X_2 + S_1 &= 10{,}000 \\ 0 \quad + S_2 &= 8{,}000 \\ X_2 \quad + 0 &= 5{,}000 \end{aligned} \quad \text{Sól. básica} \quad \begin{aligned} S_1 &= 5{,}000 \\ S_2 &= 8{,}000 \\ X_2 &= 5{,}000 \end{aligned}$$

5a. SOLUCION BASICA.

Sea $X_2 = S_1 = 0$

$$\begin{aligned} X_1 + 0 + 0 &= 10,000 \\ X_1 \quad + S_2 &= 8,000 \\ 0 \quad + S_3 &= 5,000 \end{aligned} \qquad \text{Sól. básica} \qquad \begin{aligned} X_1 &= 10,000 \\ S_2 &= -2,000 \\ S_3 &= 5,000 \end{aligned}$$

6a. SOLUCION BASICA.

Sea $X_2 = S_2 = 0$

$$\begin{aligned} X_1 + 0 + S_1 &= 10,000 \\ X_1 \quad + 0 &= 8,000 \\ 0 \quad + S_3 &= 5,000 \end{aligned} \qquad \text{Sól. básica} \qquad \begin{aligned} S_1 &= 2,000 \\ X_1 &= 8,000 \\ S_3 &= 5,000 \end{aligned}$$

7a. SOLUCION BASICA.

Sea $X_2 = S_3 = 0$

$$\begin{aligned} X_1 + 0 + S_1 &= 10,000 \\ X_1 \quad + S_2 &= 8,000 \\ 0 \quad + 0 &= 5,000 \end{aligned}$$

Sistema incompatible sin solución para $X_2 = S_2 = 0$

8a. SOLUCION BASICA.

Sea $S_1 = S_2 = 0$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + 0 &= 10,000 \\ X_1 \quad + 0 &= 8,000 \\ X_2 + S_3 &= 5,000 \end{aligned} \qquad \text{Sól. básica} \qquad \begin{aligned} X_2 &= 2,000 \\ X_1 &= 8,000 \\ S_3 &= 3,000 \end{aligned}$$

9a. SOLUCION BASICA.

Sea $S_1 = S_3 = 0$

$$\begin{array}{llll} X_1 + X_2 + 0 = 10,000 & & X_1 = 5,000 \\ X_1 + S_2 = 8,000 & \text{Sól. básica} & S_2 = 3,000 \\ X_2 + 0 = 5,000 & & X_2 = 5,000 \end{array}$$

10a. SOLUCION BASICA.

Sea $S_2 = S_3 = 0$

$$\begin{array}{llll} X_1 + X_2 + S_1 = 10,000 & & S_1 = -3,000 \\ X_1 + 0 = 8,000 & \text{Sól. básica} & X_1 = 8,000 \\ X_2 + 0 = 5,000 & & X_2 = 5,000 \end{array}$$

CUARTO PASO: Determinar las soluciones básicas factibles.

Una vez generadas las 10 soluciones básicas, que implica - la solución de nuestro sistema, verificaremos si satisfacen las condiciones de las variables. Las cuales establecen que $X_1 \geq 0$ y $X_2 \geq 0$, posteriormente al introducir las variables de holgura, éstas debían cumplir las condiciones:
$S_1 \geq 0$; $S_2 \geq 0$ y $S_3 \geq 0$.

Al analizar la 3a. y 7a. solución básica, éstas hacen incompatibles la solución del sistema, por lo cuál tales soluciones las descartamos.

La 2a. solución básica al establecer $S_3 = -5,000$, falta a la condición que postulaba $S_3 \geq 0$ y consiguientemente esta - solución es no factible. La 5a. solución básica establece - que $S_2 = -2,000$, lo cuál contradice la condición $S_2 \geq 0$; y - por lo cuál también esta 5a. solución básica se considera no factible. Finalmente en la 10a. solución básica, $S_1 = -3,000$ faltando a la condición $S_1 \geq 0$, por lo cuál debe considerarse como solución básica no factible.

Entonces de las 10 soluciones básicas generadas, solamente son factibles: 1a., 4a., 6a., 8a. y 9a. (es decir estas soluciones básicas satisfacen todas las restricciones y las -- condiciones de las variables).

Haciendo un resumen de las solución básicas factibles del ejemplo No. 1 (CUADRO 5.1).

CUADRO 5.1.- Soluciones básicas factibles, ejemplo No. 1.

SOL.BASICA No.	VAR.No. BASICA.	VAR.BASICAS	SOL.BASICA.	SOL.BASICA EN TERMINOS X_1, X_2.
1a.	X_1 X_2	S_1 S_2 S_3	S_1 = 10,000 S_2 = 8,000 S_2 = 5,000	X_1 = 0 X_2 = 0. =
4a.	X_1 S_3	S_1 S_2 X_2	S_1 = 5,000 S_2 = 8,000 X_2 = 5,000	X_1 = 0 X_2 = 5,000
6a.	X_2 S_2	S_1 X_1 S_3	S_1 = 2,000 X_1 = 8,000 S_3 = 5,000	X_1 = 8,000 X_2 = 0
8a	S_1 S_2	X_2 X_1 S_3	X_2 = 2,000 X_1 = 8,000 S_3 = 3,000	X_1 = 8,000 X_2 = 2,000
9a.	S_1 S_3	X_1 S_2 X_2	X_1 = 5,000 S_2 = 3,000 X_2 = 5,000	X_1 = 5,000 X_2 = 5,000

Si estas soluciones básicas las relacionamos con la solución gráfica realizado para este problema, en el capítulo anterior, podemos observar (fig. 4.9) que estas soluciones básicas factibles, no constituyen otra cosa que los puntos extremos del plano de soluciones factibles.

Por lo que remarcamos que los puntos extremos del espacio (o plano) de soluciones factibles de un modelo de programación lineal esta determinado por soluciones básicas.

QUINTO PASO: Evaluación de las soluciones básicas factibles en la función objetivo.

Consistirá en sustituir los valores en términos de X_1 y X_2, de las soluciones básicas factibles, en la expresión de la función objetivo. Este paso generará los resultados que se dedujeron y se hallan en el cuadro 4.1., y que establece que la 9a. solución básica (punto extremo o vértice "C") es la solución óptima.

SEXTO PASO: Especificación de la solución básica óptima del modelo en los términos interpretativos planteados

Dado que en este caso las variables de holgura forman parte de la solución básica en la especificación de la solución debemos considerarla:

Programa óptimo de fabricación "acería"

Producir: X_1 = 5,000 (toneladas acero al carbono/mes).

X_2 = 5,000 (toneladas acero aleado/mes).

INFORMACION COMPLEMENTARIA.

S_1 = 0 (toneladas capacidad no utilizada/mes) toda la capacidad disponible será utilizada por este programa.

S_2 = 3,000 (toneladas mercado acero carbono no satisfecho/mes) 3,000 toneladas de acero al carbono/mes requerido por su mercado no serán satisfechos.

S_3 = 0 (toneladas A. aleado no satisfecho/mes), el mercado de acero aleado/mes, será satisfecho totalmente.

VI.- PROCESO DE SOLUCION SIMPLEX.

Supongamos, que se desea resolver mediante el proceso alge--- braico un problema que cuente con 11 variables de decisión y- 14 restricciones, todas propuestas como inecuaciones. Al introducir las variables de holgura (una por cada inecuación) tendríamos que las restricciones formarían un sistema de ecuaciones de 14 ecuaciones y 25 incógnitas (11+14) y el número de soluciones posibles a generar de 4,457,400 (un número estratosférico), y esto nos lleva a pensar que es necesario contar -- con otro método de solución más eficiente que el algebráico -- propuesto.

El método de solución que expondremos tiene la característica- de eficiente para resolver problemas que gráficamente no po--- drían solucionarse.

6.1.- GENERALIDADES DEL PROCESO SIMPLEX.

El proceso simplex es un algoritmo de búsqueda dirigida a la - solución básica óptima de un modelo de programación lineal.

Para iniciar el proceso de cómputo simplex, se requiere fundamentalmente cubrir dos aspectos.

a) Contar con una solución básica inicial en la que los coe-- ficientes de las variables básicas deben formar una matríz identidad o matriz unitaria, cuando las restricciones se - postulan como ecuaciones (excepto las condiciones de va-- riables).

b) Esta primera solución básica debe ser positiva, aunque no sea factible, debido a que exista un variable artificial básica tomando un valor mayor que cero.

Estos aspectos son logrados precisamente por el algoritmo simplex, mismo que para tal efecto cuenta con los siguientes componentes principales:

a) La condición de optimidad asegura que nunca se encontrará una solución inferior (relativa al punto de solución actual).

b) La condición de factibilidad garantiza que partiendo de una solución básica factible, únicamente se encontrarán durante el cálculo soluciones básicas factibles.

6.2.- DESARROLLO DEL PROCESO SIMPLEX.

Para explicar el desarrollo del proceso simplex, consideraremos, dos fases, que denominaremos: FASE PRELIMINAR Y FASE DE COMPUTO SIMPLEX.

6.2.1.- FASE PRELIMINAR DEL PROCESO SIMPLEX.

Su objetivo será el generar una primera solución básica positiva, mediante el diagrama de bloques de la fig. 6. 1.-

A continuación, ilustraremos el procedimiento a seguir, dentro de esta fase.

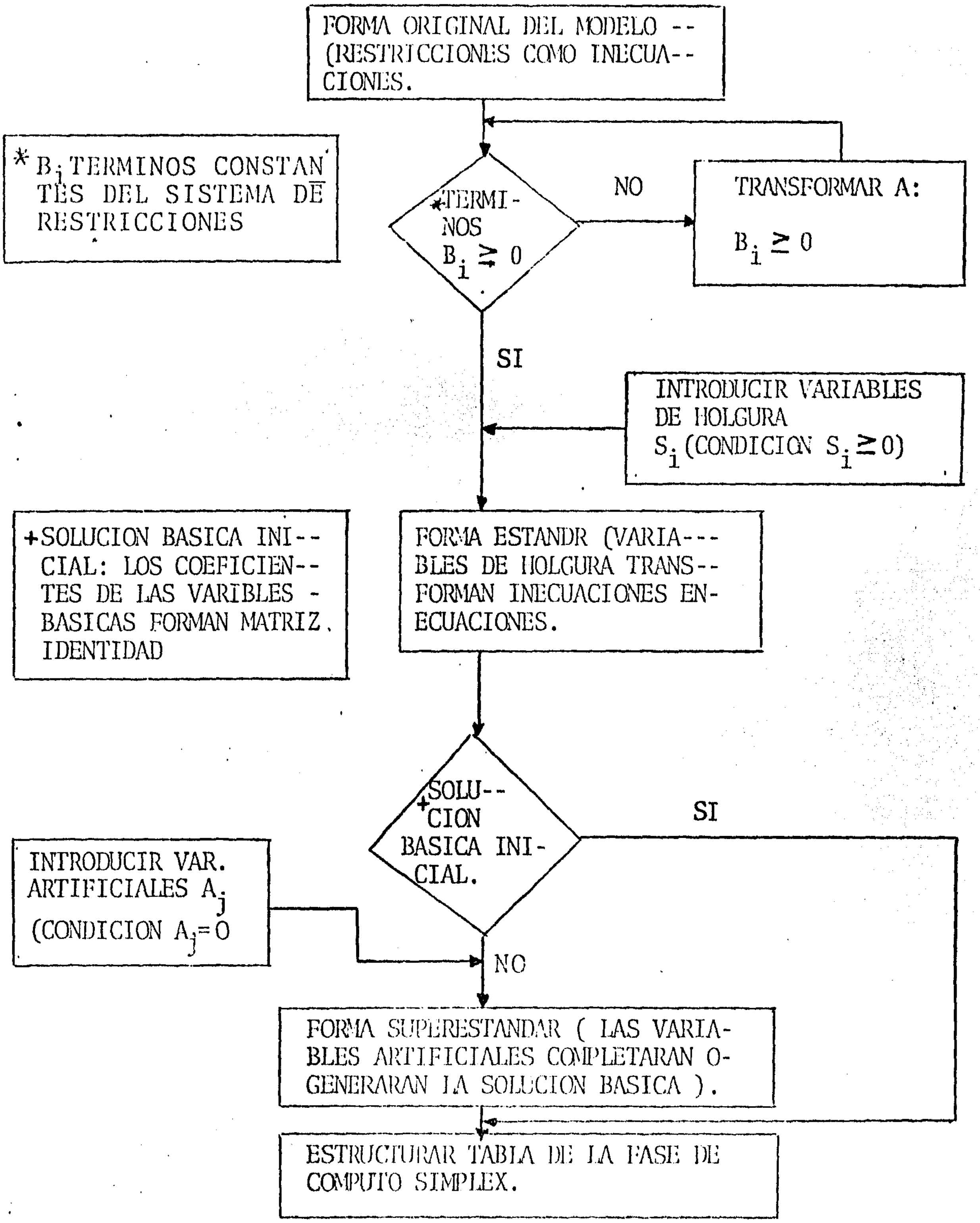


Fig. 6.1.- Fase preliminar del simplex, generación de la primera solución básica positiva.

Forma original del modelo.- Denominaremos al modelo matemático original del problema, cuya particularidad principal - constituirá el hecho que las restricciones (o algunas de ellas) se plantean como inecuaciones.

Variables decisión reales.- Denominaremos a las variables en términos de las cuales se postula la forma original del modelo.

Términos b_i.- Denominaremos a los términos constantes o independientes del conjunto de restricciones del modelo, donde el subíndice i, hace referencia al término b correspondiente a la i-esima restricción.

Forma estándar del modelo.- Denominaremos a la expresión del conjunto de restricciones (excepto condición de variables) como ecuaciones. La generación de la forma estandar se realiza mediante la introducción de las variables de holgura al -- sistema de restricciones.

Variables de holgura.- Su introducción a la forma original del modelo, permite la transformación de las inecuaciones a ecuaciones, es decir, la generación de la forma estándar.

Toda variable de holgura se introduce bajo la condición -

que puedan tomar valor cero o mayor que cero. Cada variable de holgura esta relacionada con una determinada restricción.

Denominaremos por S_i ($S_i \geq 0$) a la variable de holgura relacionada con la i-esima restricción.

Las variables de holgura son de dos tipos, deducidas en función del tipo de inecuación.

TIPOS DE INECUACIONES Y TIPOS DE VARIABLES DE HOLGURA.

Inecuación tipo I (" $\leq$ ").- Si el signo de desigualdad es menor o igual que (" $\leq$ "). Se emplea generalmente en restricciones en la que se habla de un recurso limitado.

Inecuación tipo II (" $\geq$ ").- Si el signo de desigualdad es mayor o igual que (" $\geq$ "). Se emplea generalmente en restricciones en las que se postula la satisfacción de una necesidad o el aprovechamiento de una oportunidad.

Variable de holgura de coeficiente positivo (slack).- Las que se introducen a una inecuación tipo I ($\leq$). Se interpretan como la cantidad del recurso no utilizado y se añaden al primer miembro de la inecuación con signo positivo (es decir, su coeficiente es +1).

Variable de holgura de coeficiente negativo (surplus).- Las que se introducen a una inecuación tipo II ($\geq$), se interpretan como la cantidad de necesidad y oportunidad satisfecha o lograda con relación a un límite inferior deseados. Y se añaden al primer miembro de la inecuación con signo negativo (es decir, su coeficiente es -1).

En la forma estándar las variables de holgura introducidas, se consideran dentro de la expresión de la función objetivo pero afectadas por el coeficiente cero. Debido a que las variables de holgura no contribuyen a la optimización de la función objetivo (a menos que se especifique lo contrario, dentro de la formulación del problema), entonces, el coeficiente de toda variable de holgura en la función objetivo de la forma estándar será siémpre cero.

La solución básica inicial a la que nos referimos debe estar integrada por variables básicas cuyos coeficientes forman una matriz identidad.

Forma superestandar del modelo.- Denominaremos a la expresión del conjunto de restricciones (excepto condiciones de signo) como ecuaciones en las que se han añadido variables artificiales, "A_i" al primer miembro de la ecuación. La generación de la forma superestandar, se realiza partiendo de la forma estándar.

Variables artificiales "A_i".- La introducción de estas - - variables al primer miembro de una ecuación constituye un artificio mediante el cual:

a) Complementaremos una matriz identidad de coeficiente o

b) Generaremos una matriz identidad, con el expreso propósito de formar la primera solución basica.

El hecho artificioso de añadir variables artificiales al -- primer miembro de la ecuación, se realiza bajo la condición que tales varibles tomen valor cero, es decir $A_i = 0$; para todo i,- las variables básicas no tienen interpretación económica.

Una solución básica que contenga a una o más variables ar-- tificiales como variables básicas y que no cumpla con la condición $A_i = 0$: se denominará solución básica no factible.

Como la forma superestandar implicará siempre la introduc-- ción de variables artificiales, entonces: Toda solución básica inicial generada en la forma superestandar es no factible.

Existen 2 tipos de restricciones en las que necesitaremos - introducir variables artificiales:

a) Toda restricción propuesta originalmente como una inecua-- ción tipo II ($\geq$) ; requerida la introducción de una va-- riable de holgura de coeficiente negativo y la introducción de otra varialbe artificial.

b) Toda restricción originalmente como una ecuación requerida de la introducción de una variable artificial.

Si la función objetivo es de maximización; las variables artificiales figuran en la expresión de la función objetivo - afectados de un coeficiente negativo, representado por el carácter -M (donde M es un valor númerico muy grande).

Si la función objetivo es de minimización; las variables artificiales figuran en la expresión de la función objetivo - afectados de un coeficiente positivo, representado por el carácter +M (donde M es un valor númerico muy grande).

6.2.2. PROCESO DE COMPUTO SIMPLEX.

1er. PASO: ESTRUCTURAR LA PRIMERA TABLA SIMPLEX.

La tabla simplex tiene un formato específico para el registro de los cálculos iterativos del algoritmo.

FORMATO BASE DE LA PRIMERA TABLA SIMPLEX.

Los coeficientes del modelo sea en su forma estándar o superestandar se registrarán en el siguiente formato. $\bar{C}_j$ listado de los coeficientes de la F.O. de todas las variables en -

la forma estándar o superestandar.

$\overline{C_b}$	X_b	$\overline{b}$	Listado variables nó básicas (variables - reales y tal vez holgura.	Lista variables básicas (holgura y/o artificiales).	θ
coef. var. básicas en la F.O.	listado var. básicas.	valores sol. inicial	coeficientes sistema de restricciones de la forma estándar o- superestandar.	Coeficientes variables básicas, solución inicial (matriz identidad)	
Z_j					
$C_j - Z_j$					

Los términos $\overline{C}_b$, $\overline{X}_b$, $\overline{b}$, $\overline{C}_j$, Z_j, $C_j - Z_j$, θ son letreros de identificación de las columanas o renglones de la tabla.

El registro de los coeficientes de la forma estándar o superestandar (según se halla deducida la solución inicial), se inicia con el listado de las variables no básicas , continuando con las variables básicas. Seguidamente de la columna $\bar{X}_b$ se registra de arriba hacía abajo las variables cuyos coeficientes integran la matriz identidad en el mismo orden que -- guardan.

En la columna $\overline{b}$ se registrarán prácticamente los términos constantes del sistema de restricciones, que constituyen el - valor de la solución básica inicial.

En términos generales esto constituye simplemente el registro de los coeficientes del modelo en su forma estándar o superestandar, dentro del formato establecido para la tabla simplex.

2o. PASO: CALCULO Y REGISTRO DE LOS ELEMENTOS DEL RENGLON Z_j

Los valores del renglón Z_j se deducirán por la sumatoria de los productos de una determinada columna.

Así por ejemplo para determinar el elemento Z_j de la columna $\bar{b}$ tendremos:

$$(Z_j)\ b = \sum_{i=I}^{m} C_{bi} \cdot b_i$$

El valor del elemento Z_j, en la columna $\bar{b}$ constituye el valor de la función objetivo, evaluado para la solución básica generada y contenida en las columnas $\bar{X}_b$ y $\bar{b}$.

El cálculo de los restantes elementos de Z_j se deducirá por la expresión genérica:

$Z_j = \sum_{i=1}^{m} C_{bi} \cdot A_{i,j}$; para un valor j que representa una columna como X_1, X_2 ...A_3

y a_i,j son coeficientes del sistema de restricciones de la variable identificada por el subíndice j.

3er. PASO: CALCULO Y REGISTRO DE LOS ELEMENTOS DEL RENGLON $C_j - Z_j$:

Los elementos $C_j - Z_j$, se deducen en la forma como lo expresa esta relación; es decir, constituyen las diferencias de los coeficientes de la función objetivo "C_j" menos los elementos "Z_j" (determinados en el paso anterior), para cada una de las columnas de variables incluidas en la tabla.

Los elementos del renglón C_j-Z_j se denominan costos de oportunidad, precios ocultos, o márgenes de contribución unitaria, debido a que establecen la magnitud con la que podrían contribuir al valor de la función objetivo por cada unidad que tome la variable con la que están relacionadas.

Si el valor C_j-Z_j es positivo se interpretará como un incremento al valor de la función objetivo (caso favorable en maximización).

Si el valor C_j-Z_j es negativo se interpretará como una reducción al valor de la función objetivo (caso favorable en minimización).

4o. PASO: PRUEBA DE OPTIMILIDAD.- VERIFICAR SI SE HA LLEGADO A DETERMINAR LA SOLUCION BASICA OPTIMA.

Esta prueba se realiza mediante los valores del renglón C_j-Z_j, en los siguientes términos.

Caso de maximización:

Se determinó la solución óptima en la iteración (tabla --

simplex) en la cual todos los valores $C_j - Z_j$ son negativos o cero:

$C_j - Z_j \leq 0$; para todo elemento del renglón.

Caso de minimización:

Se determinó la solución óptima en la iteración en la cual todos los valores $C_j - Z_j$ son positivos o cero:

$C_j - Z_j \geq 0$; para todo elemento de tal renglón.

Si se cumplen estas características, el proceso iterativo finaliza y la última tabla contendrá la solución básica y de otra manera tendría que ocurrir lo siguiente:

Caso maximización:

Algún valor $C_j - Z_j$ es positivo; algún $C_j - Z_j > 0$; la solución básica contenida en la tabla simplex, no es óptima y es necesario seguir iterando, es decir, seguiremos con el 5o. paso.

Caso minimización:

Si algún valor $C_j - Z_j$ es negativo; algún $C_j - Z_j < 0$; la solución básica generada no es óptima y será necesario seguir iterando, es decir, continuamos con el 5o. paso.

5o. PASO: SELECCIONAR LA VARIABLE QUE ENTRARA A FORMAR PARTE DE LA SOLUCION BASICA.

Dado el significado de los elementos C_j-Z_j, que constituyen los márgenes de contribución unitaria de las variables al valor de la función objetivo, un elemento positivo de C_j-Z_j, en el caso de maximización indica que el valor de la función objetivo todavía puede incrementarse, entonces para cumplir este cometido, seleccionaremos:

Caso de maximización:

El elemento de C_j-Z_j con mayor valor (el mayor coeficiente positivo), que indicará la variable que entrará a formar parte de la solución básica, e incrementar el valor de la función objetivo.

Caso de minimización:

Seleccionaremos el valor de C_j-Z_j menor (el mayor coeficiente negativo), para indicar la variable que entrará a formar parte de la solución básica y en este caso (decrementará) disminuirá el valor de la función objetivo.

La columna donde se halla la variable seleccionada por estos criterios se le denomina: "columna pivote" y es deseable identificarla en la tabla misma por los símbolos "c.p." o "$\uparrow$" (una flecha con dirección hacía arriba).

En caso de que hubiera dos valores o más valores $C_j - Z_j$ -- iguales para identificar la columna pivote (o la variable que entrará a la base) seleccionaremos indistintamente cualquiera de ellas como c.p.

6o. PASO: SELECCIONAR LA VARIABLE QUE ABANDONARA LA SOLUCION BASICA.

Una vez que seleccionamos una variable que entrará a la - base invariablemente debemos seleccionar una variable que abandone la solución básica (es decir, una variable que siendo básica se transforme a no básica). Para esto utilizaremos la - columna θ, para registrar valores deducidos por las siguientes reglas:

6.I.- Calcular elementos θ_i dado por:

$\theta_i = b_i/a_i$, c.p. con la condición que: a_i, c.p. > 0

θ_i = No determinado si: a_i, c.p. ≤ 0

donde b_i = elementos de la columna pivote, a la altura del renglón i de la tabla.

a_i, c.p. = elementos de la columna pivote, a la altura del renglón i de la tabla (constituyen los coeficientes de la variable que va a entrar a la base).

6.2.- Seleccionar de los elementos θ_i determinados ($\theta_i \geq 0$) el elemento θ_i^* por:

θ^* = mínimo $[\theta_i]$ = mínimo de $[b_i/a_i$, c.p.; a_i, c.p$>0]$;

i = I, m.

Es decir, seleccionar de todos los elementos θ_i, el que sea mínimo.

La variable básica que se halla a la altura del elemento θ_i^*, será la seleccionada para abandonar la base y a este renglón se denomina "renglón pivote" y se le identifica en la tabla por la expresión (r.p.).

7o. PASO: DETERMINACION DE LA SOLUCION BASICA INMEDIATA PROCESO DE ACTUALIZACION DE LA TABLA SIMPLEX.

7.1.- Determinación del elemento pivote.

Denominaremos elemento pivote "E.P." al coeficiente que se halle en la intersección de la columna pivote y del renglón pivote.

Por fines prácticos este único elemento que pertenece a la c.p. y al r.p. lo marcaremos encerrado en un circulo.

7.2.- Elementos semipivotes "S.P.".

Serán los elementos restantes de la columna pivote (todos los elementos de la c.p., excepto el elemento pivote, constituyen los elementos "semipivotes") y existirán tantos elementos "s.p." como el número de renglones menos uno.

Los elementos semipivotes los encerraremos en un cuadro para fines de cálculo práctico.

7.3.- Determinación de las variables básicas de la nueva solución.

En la columna $\overline{X}_b$ de la tabla (una prolongación de la anterior) listamos las mismas variables básicas y en el mismo orden en que se hallaban en la tabla anterior, con la excepción de que la variable que entra a la base sustituirá a la que abandona la base (determinados respectivamente en los pasos 5o. y 6.2).

7.4.- En la columna C_b de la nueva tabla simplex, registraremos los coeficientes de la función objetivo correspondiente a las variables básicas de la nueva solución (es decir, los coeficientes C_j, de las variables listadas en la columna $\overline{X}_b$, efectuada en 7.3).

7.5.- Actualización del "renglón pivote actualizado"

En la nueva tabla al renglón que se halle en la misma posición del r.p. de la anterior tabla se denominará "renglón pivote actualizado" R.P.A. y sus elementos serán determinados por el cociente de los elementos del r.p. divididos entre el elemento pivote "E.P.".

Comenzando por el elemento de la columna hasta terminar con el último elemento del r.p. es decir:

$$\text{Elemento R.P.A.} = \frac{\text{elemento R.P.}}{\text{elemento pivote}}$$

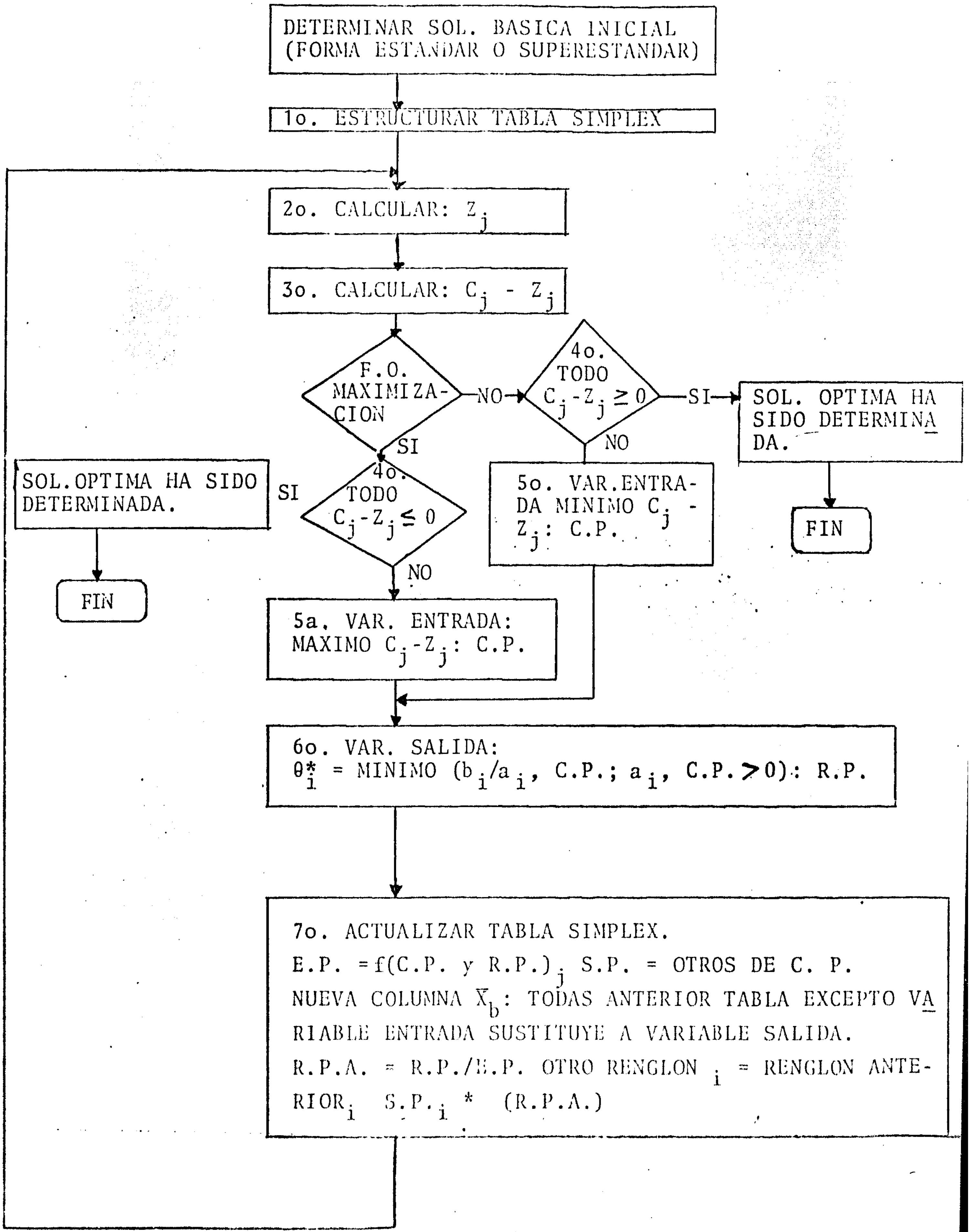
7.6.- Actualización de los renglones diferentes al R.P.

La actualización de todo renglón que no sea el pivote se logra aplicando el método de gauss-jordan (o de operación de renglón).

Terminada la actualización de los renglones correspondientes a las variables básicas, volveremos al paso 2o. continuando con el procedimiento indicado por los pasos siguientes al 2o. hasta llegar a la solución básica óptima.

Para resumir el proceso de cómputo simplex, en la fig. 6.2., se ilustra mediante un diagrama de flujo la secuencia - de cómputo del algoritmo.

Fig. 6.2.- Diagrama de flujo del proceso cómputo del algoritmo-simplex.



EJEMPLO DE APLICACION DEL ALGORITMO SIMPLEX.

Para el desarrollo del algoritmo simplex, utilizaremos un nuevo ejemplo, mismo que será procesado desde la formulación del enunciado.

Ejemplo: A la sección de flotación de una compañía se le ha comunicado la orden de procesar dos minerales identificados por A y B. La información recopilada por el jefe de esta sección se muestra en el cuadro 6.1

CONCEPTO	MINERAL A	MINERAL B	DISPONIBILIDAD
Requerimiento de reactivos en Kgs/t. mral.	0.5	1.0	8 Kgs/día
Horas flotación/t. mral.	1.0	1.0	10 horas/día (capacidad procesamiento)
Requerimiento de procesamiento mínimo.	sin restric.	al menos 4 t/día	
Beneficio/t. mral.	20	30	

En esta compañía existe una tradición implantada desde su fundación que establece que toda capacidad de procesamiento debe ser completamente utilizada.

En base a esta información el problema se formuló mediante el modelo de programación lineal considerando los siguientes aspectos:

Variable de decisión:

X_1 = toneladas de mineral A a procesar.

X_2 = toneladas de mineral B a procesar.

Función objetivo:

Maximizar el beneficio obtenido por el procesamiento diario de ambos minerales.

$$\text{Maximizar } Z = 20\ X_1 + 30\ X_2$$

Sujeto a las restricciones:

Disponibilidad reactivo/día

$$(1)\ 1/2\ X_1 + X_2 \leq 8$$

Disponibilidad de capacidad de flotación en horas/días y consideración de la política de utilización de capacidades de procesamiento.

$$(2)\ X_1 + X_2 = 10$$

Requerimiento de procesamiento del mineral B en t. mineral.

$$(3)\ X_2 \geq 4$$

Condición de las variables X

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$$

Considerando la fase preliminar del proceso simplex, este problema será procesado de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar } Z = 20\ X_1 + 30\ X_2$$

Sujeto a:

(1) $1/2\ X_1 + X_2 \leq 8$

(2) $X_1 + X_2 = 10$

(3) $X_2 \geq 4$

(4) $X_1 \geq 0,;\ X_2 \geq 0$

Los términos b_i son todos positivos.

Forma estandar.

Maximizar $Z = 20\ X_1 + 30\ X_2 + 0\ S_1 + 0\ S_3$

Sujeto a:

(1) $1/2\ X_1 + X_2 + S_1 = 8$

(2) $X_1 + X_2 = 10$

(3) $X_2 - S_3 = 4$

(4) $X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ S_1 \geq 0;\ S_3 \geq 0$

donde:

S_1 = [Kg. reactivo no utilizado/día]

S_3 = [t. mineral B procesado sobre el mínimo establecido/día]

La forma estándar no generan una solución básica inicial y hasta el momento solamente S_1 podrá considerarse como variable básica, para integrar tal solución.

Forma superestandar.

Maximizar $Z = 20\ X_1 + 30\ X_2 + 0\ S_3 + 0\ S_1 - MA_2 - MA_3$

Sujeto a:

$$(1)\quad 1/2\, X_1 + X_2 + S_1 = 8$$

$$(2)\quad X_1 + X_2 + A_2 = 10$$

$$(3)\quad X_2 - S_3 + A_3 = 4$$

var. no básicas　　sol. var. básica inicial no factible.

$$(4)\quad X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ S_1 \geq 0;\ S_3 \geq 0;\ A_2 = 0;\ A_3 = 0$$

Ahora que disponemos de la solución básica inicial, procedemos a la fase del cómputo simplex propiamente.

1o. PASO: ESTRUCTURAR LA PRIMERA TABLA SIMPLEX.

El registro de los coeficientes de la forma superestandar del ejemplo, dá la siguiente configuración a la primera - tabla.

		$\bar{C}_j$	20	30	0	0	-M	-M	
$\bar{C}_b$	$\bar{X}_b$	$\bar{b}$	X_1	X_2	S_3	S_1	A_2	A_3	θ
0	S_1	8	1/2	1	0	1	0	0	
-M	A_2	10	1	1	0	0	1	0	
-M	A_3	4	0	1	-1	0	0	1	
	Z_j								
$C_j - Z_j$									

Primera tabla simplex del ejemplo.

2o. PASO: CALCULO Y REGISTRO DE LOS ELEMENTOS DEL RENGLON Z_j.

Para determinar el elemento Z_j de la columna $\overline{b}$ tendremos: $(Z_j)\ b = \sum_{i=1}^{m} \overline{C}_{bi} * \overline{b}_i$ y su valor específico será calculado como:

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{C}_b & & \overline{b} & & \overline{C}_b * \overline{b} & & \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ -M \end{bmatrix} & * & \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0*8 \\ -M*10 \\ -M*4 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ -10M \\ -4M \end{bmatrix} \end{array}$$

suma = -14M

y el valor de Z_j en la columna $\overline{b}$ será = -14M

Para determinar el elemento Z_j en los restantes elementos se deducirá por la expresión:

$Z_j = \sum_{i=1}^{m} \overline{C}_{bi} * a_i, j$; para un valor j que representa una columna como X_i, $X_2, \ldots A_3$

Ejemplo: Z_j para columna X_1

$$\begin{array}{ccccc} \overline{C}_b & & X_1 & & \overline{C}_b * X_1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ -M \end{bmatrix} & * & \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

suma = -M

Ejemplo: Z_j para columna X_2

$$\overline{C}_b \quad X_2 \quad \overline{C}_b * X_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ -M \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ -M \end{bmatrix}$$

suma = -2M

Ejemplo: Z_j para columna S_3

$$\overline{C}_b \quad S_3 \quad \overline{C}_b * S_3$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ -M \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{bmatrix}$$

suma = M

Bajo este mismo procedimiento calculamos para las columnas restantes de la tabla, los valores Z_j y la tabla a esta - altura quedará en la siguiente forma:

		$\overline{C}_j$	20	30	0	0	-M	-M	
$\overline{C}_b$	$\overline{X}_b$	$\overline{b}$	X_1	X_2	S_3	S_1	A_2	A_3	θ
0	S_1	8	1/2	1	0	1	0	0	
-M	A_2	10	1	1	0	0	1	0	
-M	A_3	4	0	1	-1	0	0	1	
	Z_j	-14M	-M	-2M	M	0	-M	-M	
	$C_j - Z_j$								

3o. PASO: CALCULO Y REGISTRO DE LOS ELEMENTOS DEL RENGLON $C_j - Z_j$

Los elementos $C_j - Z_j$, se deducen en la forma como lo expresa esta relación:

Ejemplo: para columna X_1; $C_j - Z_j = 20 - (-M) = 20 + M$

para columna X_2; $C_j - Z_j = 30 - (-2M) = 30 + 2M$

para columna S_3; $C_j - Z_j = 0 - (M) = -M$

y así sucesivamente, calculados todos estos valores e incluidos en la tabla simplex, ésta quedará ahora de la siguiente manera:

		$\overline{C}_j$	20	30	0	0	-M	-M	
$\overline{C}_b$	$\overline{X}_b$	$\overline{b}$	X_1	X_2	S_3	S_1	A_2	A_3	θ
0	S_1	8	1/2	1	0	1	0	0	
-M	A_2	10	1	1	0	0	1	0	
-M	A_3	4	0	1	-1	0	0	1	
	Z_j	-14M	-M	-2M	M	0	-M	-M	
$C_j - Z_j$			20+M	30+2M	-M	0	0	0	

En el ejemplo considerado el elemento $C_j - Z_j = 20+M$ de la variable X_1; establece que por cada unidad de valor que tome X_1; la función objetivo se incrementará en la magnitud 20+M o con la relación a la variable X_2, considerarse que por cada unidad de valor que tome X_2 la función objetivo se incrementará en 30+2M.

Y con relación a la variable S_3, se dice que por cada - unidad que tome esta variable la función objetivo disminuirá en el valor M.

4o. PASO: PRUEBA DE OPTIMALIDAD

En la tabla anterior podemos observar que algún valor $C_j - Z_j > 0$, y como nuestro ejemplo se trata de un caso de maximización, la solución básica contenida en la tabla simplex no es óptima y es necesario continuar con el 5o. paso.

5o. PASO: SELECCIONAR LA VARIABLE QUE ENTRARA A FORMAR PARTE DE LA SOLUCION BASICA.

En nuestro caso de maximización lo que nos interesa es incrementar el valor de la función objetivo, en nuestra última tabla simplex en la columna X_2, se encuentra el mayor valor $C_j - Z_j$ y X_2, será la variable que entre a la base. Entonces la columna X_2 será la columna pivote.

6o. PASO: SELECCIONAR LA VARIABLE QUE ABANDONARA LA SOLUCION BASICA.

En nuestro ejemplo, la aplicación de este paso se realiza como sigue:

$\bar{X}_b$		X_2 (elemento c.p.)	b_i/a_1,c.p.	θ_i	mínimo θ_i
S_1	$8(b_1)$	1 (a_1, c.p. >0)	8/1	8 (θ_1)	
A_2	$10(b_2)$	1 (a_2, c.p. >0)	10/1	10 (θ_2)	
A_3	$4(b_3)$	1 (a_3, c.p. >0)	4/1	4 (θ_3)	R.P.

Indica la variable que abandona la base

Como θ_3^* es mínimo $[\theta_i]$; entonces la variable del 3o. renglón X_b, abandonará la base (o sea la variable artificial "A_3"). Así también este renglón será identificado como renglón pivote (R.P.).

Volviendo al ejemplo, la aplicación de los pasos 5o. y 6o., dará a la tabla la siguiente configuración.

		$\bar{C}_j$	20	30	0	0	-M	-M	
$\bar{C}_b$	$\bar{X}_b$	$\bar{b}$	X_1	X_2	S_3	S_1	A_2	A_3	θ
0	S_1	8	1/2	1	0	1	0	0	8/1=8
-M	A_2	10	1	1	0	0	1	0	10/1=10
-M	A_3	4	0	1	-1	0	0	-1	4/1=4 ← R.P.
	Z_j	-14M	-M	-2M	M	0	-M	-M	(6o. PASO)
	$C_j - Z_j$		20+M	30+2M	-M	0	0	0	

↑C.P. (5o. paso)

7o. PASO: DETERMINACION DE LA SOLUCION BASICA INMEDIATA.

Este paso representa el proceso de actualización de la tabla simplex (iteración de una tabla). Al realizar el paso 7o. la tabla simplex nos quedará de la siguiente manera:

		$\bar{C}_j$	20	30	0	0	-M	-M	
$\bar{C}_b$	$\bar{X}_b$	$\bar{b}$	X_1	X_2	S_3	S_1	A_2	A_3	θ
0	S_1	8	1/2	$\boxed{1}$	0	1	0	0	8/1=8
-M	A_2	10	1	$\boxed{1}$	0	0	1	0	10/1=10
-M	A_3	4	0	1	-1	0	0	1	4/1=4 ← r.p.
	Z_j	-14M	-M	-2M	M	0	-M	-M	
	$C_j - Z_j$		20+M	30+2M↑	-M	0	0	0	
0	S_1	4	1/2	0	1	1	0	-1	
-M	A_2	6	1	0	1	0	1	-1	
30	X_2	4	0	1	-1	0	0	1	R.P.A.
	Z_j								
	$C_j - Z_j$								

Terminada la actualización de los renglones correspondientes a las variables básicas, volveremos al 2o. paso, continuando con el procedimiento indicado por los pasos siguientes al 2o., hasta llegar a la solución básica óptima.

Con relación al ejemplo que estamos desarrollando, la aplicación del procedimiento hasta llegar a la solución óptima, dá la siguiente estructuración de la tabla simplex:

$\overline{C}_b$	$\overline{X}_b$	$\overline{b}$	X_1	X_2	S_3	S_1	A_2	A_3	Θ
	C_j		20	30	0	0	-M	-M	
0	S_1	8	1/2	$\boxed{1}$	0	1	0	0	8/1=8
-M	A_2	10	1	$\boxed{1}$	0	0	1	0	10/1=10
-M	A_3	4	0	1	-1	0	0	1	4/1=4* (R.P.) ←
	Z_j	-14M	-M	-2M	M	0	-M	-M	
	$C_j - Z_j$		20+M	30+2M ↑	-M	0	0	0	
0	S_1	4	1/2	0	1	1	0	-1	4/1=4* (R.P.) ←
-M	A_2	6	1	0	$\boxed{1}$	0	1	-1	6/1=6
30	X_2	4	0	1	$\boxed{-1}$	0	0	-1	-----
	Z_j	120-6M	-M	30	-30-M	0	-M	30+M	
	$C_j - Z_j$		20+M	0	30+M ↑	0	0	-30-2M	
0	S_3	4	$\boxed{1/2}$	0	1	1	0	-1	4/0.5=8
-M	A_3	2	1/2	0	0	-1	1	0	2/0.5=4* (R.P.) ←
30	X_2	8	$\boxed{1/2}$	1	0	1	0	0	8/0.5=16
	Z_j	240 -2M	15 -1/2M	30	0	-30+M	-M	0	
	$C_j - Z_j$		5+1/2M ↑	0	0	-30-M	0	-M	
0	S_3	2	0	0	1	2	-1	-1	
20	X_1	4	1	0	0	-2	2	0	
30	X_2	6	0	1	0	2	-1	0	
	Z_j	260	20	30	0	20	10	0	
	$C_j - Z_j$		0	0	0	-20	-10-M	-M	

Caso maximización $C_j - Z_j \leq 0$; termina iteraciones.

TABLA SIMPLEX COMPLETA DEL EJEMPLO.

↑ C.P. Columna pivote (mayor valor $C_j - Z_j$; maximización)

← R.P. Renglón pivote (menor $\theta_i = b_i/a_i$,c.p.;a_i,c.p.>0)

○ E.P. Elemento pivote (intersección c.p. y r.p.)

□ S.P. Elemento semipivote (otros elementos de c.p.)

INTERPRETACION DE LA SOLUCION OPTIMA DEL EJEMPLO, DEDUCIDO POR EL SIMPLEX.

En la última tabla simplex del ejemplo, la solución básica óptima determinada será interpretada en la siguiente forma solución básica óptima factible.

$\overline{X}_b$	$\overline{b}$	
S_3	2	: S_3= (t/mral. B, procedado sobre el mínimo establecido/día)
X_1	4	: X_1= 4 (mral. A, a procesar/día)
X_2	6	: X_2= 6 (t/mral. B, a procesar/día)
Z_j	260	: Z= 260 (beneficio máximo/día)

Esta solución esta en función de las variables básicas exclusivamente, las restantes variables: S_1, A_2, A_3, se consideran como variables no básicas, mismas que dentro de la solución del problema, se considera que toman el valor cero: $S_1 = 0$; $A_2 = 0$ y $A_3 = 0$ y bajo estos términos, la solución es factible, ya que cumple todas las restricciones impuestas.

Dentro de la interpretación de la solución, la variable - básica S_1, al tomar el valor cero, $S_1 = 0$ (Kgrs. reactivo no utilizado/día) indicaría que toda la disponibilidad de reactivo ha sido utilizada. Las variables artificiales en este caso (A_2 y A_3) no tienen significado económico.

VII.- MODELO DE ASIGNACION.-

7.1.- INTRODUCCION.

El problema de asignación es un modelo que postula la distribución óptima de un conjunto de "m" recursos a un conjunto de "n" necesidades.

Una condición necesaria y suficiente para que este tipo de problemas tenga una solución, es que estén balanceados, es decir que la oferta total sea igual a la demanda total. Esto es que si hay "m" orígenes y "n" destinos, se requiere que "m" y "n" sean iguales.

EJEMPLO: Se requieren 3 trabajadores para operación de 3 máquinarias. Dadas las características de cada maquinaria y la experiencia de los trabajadores en actividades similares, se estableció el costo de operación / hora de cada maquinaria en función del operador, misma que se resume como:

TABLA 7.1.- COSTO OPERACION/HORA POR OPERARIO.

(RECURSO)	MAQUINARIA (NECESIDAD)		
Trabajador	A	B	C
1	8	4	7
2	5	2	4
3	4	1	5

El problema en cuestión plantea la determinación de la asignación de un trabajador a una maquinaria de tal manera que el -- costo de operación total/hora de las 3 máquinas sea el mínimo.

7.2.- EL MODELO MATEMATICO DE ASIGNACION.

Matemáticamente este problema se plantearía en la siguiente -- forma:

Variables de decisión:

$X_{i,j}$ = variable de asignación del recurso i a la necesidad j.

1.- Función objetivo:

$$\text{Minimizar } Z=\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

Donde:

C_{ij}= Costo de asignación del recurso i a la necesidad j.

2.- Restricciones.

El recurso i solamente puede ser asignado a una única necesidad j.

$$\text{Recurso } i= \sum_{j=1}^{m} X_{i,j} = 1; \quad \text{para } i=1...m$$

La necesidad j solamente será satisfecha por un único recurso i.

$$\text{Necesidad } j= \sum_{i=1}^{m} X_{i,j} = 1; \quad \text{para } j=1...m$$

3.- Condición de las variables.

$X_{i,j} \geq 0$ para $i=1...m$

$j=1...m$

Esto es que la variable de asignación $X_{i,j}$ puede tomar dos únicos valores:

$X_{i,j}= 1$ (el recurso i, es asignado a la necesidad j)

$X_{i,j}= 0$ (el recurso i, no es asignado a la necesidad j)

Dado que un recurso solo puede asignarse a una única necesidad y viceversa.

El esquema matemático del modelo, dado que todas sus relaciones son lineales, postula un modelo de programación lineal, que dadas sus particularidades, recibe el nombre de modelo de asignación.

En base a lo expuesto en el ejemplo, puede modelarse en la siguiente forma:

$X_{i,j}$= Asignación del operador i a la máquinaria j.

Función objetivo: minimizar costo total operación/Hr.

Minimizar $Z=8\ X_{11} + 4X_{12} + 7\ X_{13} + 5X_{21} + 2\ X_{22}$.

$+ 4\ X_{23} + 4\ X_{31} + X_{32} + 5\ X_{33}$

Sujeto a:

operador 1: $X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1$

operador 2: $X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1$

operador 3: $X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$

maquinaria A: $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$

maquinaria B: $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$

maquinaria C: $X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1$

Condición de variables:

$X_{i,j} = 1$ ó $X_{i,j} = 0$; para $i = 1,2,3$
$j = 1,2,3$

Debido a la estructura de los problemas de asignación, -- existen métodos de solución llamados algoritmos de asignación que son más eficientes que el método simplex o que el método de transporte.

7.3.- DETERMINACION DE LA SOLUCION OPTIMA, MEDIANTE LA GENERACION DE TODAS LAS ASIGNACIONES POSIBLES.

El número de soluciones posibles para la asignación de m recursos a n necesidades, esta dado por el factorial de m:

$m\,! = (m(m-1)\ (m-2)\ldots 3.2.1)$

y en nuestro caso el número de asignación será:

$3\,! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$

Generaremos estas asignaciones y su costo total de cada una. (tabla 7.2)

Operadores de máquinas

Asignadas.				Costo Asignación			Costo Total
	A	B	C	A	B	C	
1.-	1	2	3	8	2	5	15
2.-	1	3	2	8	1	4	13
3.-	2	1	3	5	4	5	14
4.-	2	3	1	5	1	7	13
5.-	3	1	2	4	4	4	12
6.-	3	2	1	4	2	7	13

TABLA 7.2.- Asignaciones y costo total del ejemplo.

Este método establece que la asignación óptima constituirá asignar:

Operador 1 a maquinaria B (X_{12} = 1)

Operador 2 a maquinaria C (X_{23} = 1)

Operador 3 a maquinaria A (X_{31} = 1)

Para un mínimo costo/hora de $ 12.00

Este procedimiento es demasiado laborioso cuando el tamaño de la matriz de signación (matriz costo asignación) aumenta de tamaño, por ejemplo si tuvieramos 5 recursos y 5 necesidades, el número de asignaciones serían de 120, y demasiado laboriosa la generación de cada una de ellas.

7.4.- ALGORITMO PARA LA DETERMINACION DE LA SOLUCION OPTIMA DE UN MODELO DE ASIGNACION.

Este algoritmo se fundamenta en el siguiente teorema:

Si en un problema de asignación sumamos una constante para cada elemento de un renglón (o columna) en la matriz de -- efectividad, entonces una asignación que hace mínima la efectividad total en una matriz, también minimiza la efectividad total de la otra matriz.

Caso de minimización.

Sea una nueva matriz de costos de asignación (tabla 7.3)

		Necesidad A	B	C
Recursos	1	8	4	7
	2	5	3	4
	3	4	1	5

TABLA 7.3.- Costos de asignación.

PRIMER PASO: Para cada renglón de la matriz seleccionar el menor de los elementos y restar este valor a cada elemento de tal renglón.

Matriz luego del primer paso:

	A	B	C
1	4	0	3
2	2	0	1
3	3	0	4

Prueba de optimilidad.- Trazar el menor número posible de líneas horizontales y/o verticales que crucen todos los elementos cero de la matriz.

Si existen exactamente m líneas, la solución óptima ha sido determinada y procederemos a su determinación, si tal número de líneas es menor a m, seguiremos con el siguiente paso.

SEGUNDO PASO: En cada columna de la última matriz de asignación, seleccionamos el menor elemento y restamos éste de cada elemento de tal columna y procederemos a la prueba de optimalidad.

Matriz luego del segundo paso:

	A	B	C
1	2	0	2
2	0	0	0
3	1	0	3

No. de líneas = 2
Sol. no óptima.

TERCER PASO: Seleccionaremos en la última matriz el menor elemento de todos los que no se hallan cruzados por una línea, restar éste a todos los elementos no marcados y sumando este elemento a los elementos que se hallen cruzados por 2 líneas y aplicar la prueba de optimalidad.

Matriz luego del tercer paso:

	A	B	C
1	1	0	1
2	0	1	0
3	0	0	2

Mínimo número de líneas = 3 = m
Sól. óptima.

El paso tercero se repite cuantas veces sea necesario hasta que la prueba de optimalidad indique que se ha llegado a la solución óptima.

DETERMINACION DE LA SOLUCION OPTIMA.

Si el mínimo número de líneas que cruzan los elementos cero de una matriz de asignación (m por n) es igual a m, entonces procedemos de la siguiente manera:

a).- En cada renglón en el que exista un solo cero, realizar una asignación marcando la posición de la asignación encerrando el elemento (único cero del renglón) dentro de un cuadro, realizada la asignación en una fila, táche -- los elementos cero de la columna correspondiente a la -- asignación. Si no se completaron las m asignaciones (una asignación por fila y columna) pasamos a:

b).- En cada columna que aun no contenga asignación, asignar en la posición del único elemento cero de tal columna, - táche los elementos cero de la fila en la cuál se realizó la asignación.

Repetiremos este procedimiento hasta hallar la solución - óptima.

	A	B	C
1	1	$\boxed{0}$	1
2	$\cancel{0}$	1	$\boxed{0}$
3	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	2

Asignación óptima.
1o.- Asignación 1 a B
2o.- Asignación 2 a C
3o.- Asignación 3 a A

Si la matriz de asignación estuviera expuesta en términos de beneficios, el procedimiento anterior sólo cambia en una - sola modificación.

Si el modelo es de maximización, se selecciona el mayor - elemento de la matriz, restese de éste todos los elementos de la matriz. Los elementos generados de esta forma, constituirán una matriz de costos de oportunidad y será aplicable el procedimiento para minimización.

Ejemplo: Sea la matriz de asignación de beneficios.

		Necesidad A	B	C
	1	8	4	7
Recurso	2	5	2	4
	3	4	1	5

Mayor de los elementos de la matriz

Restando de 8 todos los elementos de la matriz.

	A	B	C
1	0	4	1
2	3	6	4
3	4	7	3

Costo de oportunidad asignación.

Primer paso y prueba de optimalidad

	A	B	C
1	0	4	1
2	0	3	1
3	1	4	0

No óptima.

Segundo paso y prueba de optimalidad.

	A	B	C
1	0	1	1
2	0	0	1
3	1	1	0

Sól. óptima.

Asignaciones óptimas.

	A	B	C
1	$\boxed{0}$	1	1
2	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	1
3	1	1	$\boxed{0}$

1a. Asignación 1 a A

2a. Asignación 2 a B

3a. Asignación 3 a C

Máximo beneficio
$ 15.00

Resumiendo, tenemos los siguientes pasos para resolver el problema de asignación.

a).- Modifíquese la matriz de efectividad substrayendo el elemento mínimo de cada renglón de todos los elementos del renglón. Modifíquese entonces la matriz que resulte, restándole el elemento mínimo de cada columna de todos los elementos de la columna, para obtener la primera matriz reducida.

b).- Encuéntrese una asignación máxima para la primera matriz reducida, si esta asignación máxima es una solución completa, el procedimiento termina en este punto. Si la --

asignación máxima no es una solución completa, procédase al paso c.

c).- Trácese líneas para cubrir todos los ceros. Réstese al elemento menor no cubierto por una línea de todos los -- elementos no cubiertos; agréguese este elemento mínimo a todos aquellos que están en la intersección de dos líneas, para obtener la segunda matriz reducida.

d).- Repítanse los pasos b y c en la segunda matriz reducida, y así sucesivamente hasta que se obtenga una solución -- completa.

VIII.- C O N C L U S I O N E S :

El propósito de esta tesis es desarrollar el procedimiento -- algebraico para resolver programas lineales, como el método -- simplex y servir como un manual en el cual puedan ayudarse los alumnos de la materia de sistemas I.

Este método es del tipo de ensayo y error, sin embargo, la búsqueda de una solución es por completo metódica, porque garantiza encontrar una solución mejor en cada paso y una solución óptima en un número finito de pasos.

La investigación de operaciones le presenta métodos y modelos- que son el medio para hacer frente a los problemas que se le - presentan y en esencia solucionar adecuadamente estos proble-- mas.

No necesariamente el ingeniero debe ser un gran programador o- analista de sistemas. La verdadera labor consiste en reconocer que su problema puede resolverse mediante programación lineal- y en formular un modelo que permita alcanzar una solución útil.

Esto no debe sorprender, puesto que el objetivo de la investigación de operaciones es proporcionar un método sistemático y- racional para los problemas fundamentales del control de sis-- temas, mediante la toma de decisiones las cuales de alguna for

.....

ma producen los mejores resultados a la luz de toda información que se use ventajosamente.

Los problemas de programación lineal están relacionados con la distribución eficiente de recursos limitados para satisfacer un objetivo. Estos problemas se caracterizan por el gran número de soluciones que satisfacen las condiciones básicas de cada problema. La selección de una solución particular como la mejor solución a un problema, dependerá del objetivo propuesto en el planteamiento de dicho problema.

La programación lineal como técnica de optimización, constituye una herramienta valiosa para el ingeniero moderno ya que se aplica en problemas prototipo de la investigación de operaciones como pueden ser problemas de asignación general, problemas de transporte, programación de la producción, etc.

Actualmente con la ayuda de la computadora, se ha facilitado y estimulado la aplicación de esta herramienta matemática a problemas complejos que involucran el manejo de una gran cantidad de variables.

Este trabajo fue desarrollado con fines didácticos, es por esto que las aplicaciones de la programación lineal y su teoría se han hecho en problemas de distintas disciplinas, tratándose demostrar el gran alcance de esta técnica.

B I B L I O G R A F I A

- HAMDY A. TAHA
  Investigación de operaciones una introducción.
  Representaciones y servicios de ingeniería, S.A., México.

- RUSSELL L. ACKOFF, SASIENI MAURICE W.
  Fundamentos de investigación de operaciones.
  Editorial Limusa, México.

- PRAWDA WITENGERG JUAN
  Métodos y modelos de investigación de operaciones, Vol.I
  Editorial Limusa, México.

- SASIENI MAURICE, YASPAN ARTHUR, FRIDMAN LAWRENCE.
  Investigación de operaciones métodos y problemas.
  Editorial Limusa, México.

- HALL ARTHUR D.
  Ingeniería de Sistemas
  Editorial Continental, S.A., México.

- CARDENAS MIGUEL ANGEL DR.
  La ingeniería de sistemas. Filosofía y Técnicas.
  Editorial Limusa, México.

- GASS SAVI I.
  Programación Lineal, métodos y aplicaciones.
  Editorial Continental, S.A., México.

- GEREZ VICTOR DR. M. EN C. MANUEL GRIJALVA
  El enfoque de sistemas
  Editorial Limusa, México.

- THIERAUF ROBERT J. GROSSE RICHARD A.
  Toma de decisiones por medio de investigación de operaciones.
  Editorial Limusa, México.

- THIERAUF ROBERT J.
  Introducción a la investigación de operaciones
  Editorial Limusa, México.

- Apuntes de la Materia de Ingeniería de Sistemas I
  Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.