



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

103

CONCEPTOS BASICOS DEL METODO  
DEL ELEMENTO FINITO

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO CIVIL  
P R E S E N T A  
FERNANDO ITAMI KATAGIRI

MEXICO, D. F.

1984



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE.

\*\*\*\*\*

I.	INTRODUCCION.	1
1.1.	Conceptos Básicos.	2
1.2.	Proceso de Discretización.	2
II.	MEDIOS HOMOGENEOS.	3
2.1.	Pasos básicos para el Método del Elemento Finito en medios homogéneos.	3
2.1.1.	Discretización y configuración de los elementos elegidos.	3
2.1.2.	Selección del método de la función de aproximación.	5
2.1.3.	Definición de las relaciones de Deformación Unitaria-Desplazamiento, y Esfuerzo-Deformación Unitaria.	6
2.1.4.	Derivación de las ecuaciones del elemento.	6
2.1.5.	Acoplamiento de las ecuaciones del elemento para la obtención de la ecuación global.	16
2.1.6.	Solución para los valores primarios desconocidos.	17
2.1.7.	Solución por derivación o por cantidades secundarias.	17
2.1.8.	Interpretación de resultados.	18
2.2.	Método del Elemento Finito Dinámico	18
2.2.1.	Conceptos fundamentales.	18
2.2.2.	Métodos de aproximación numérica.	21
2.2.3.	Algunas consideraciones teóricas para el Método del Elemento Finito Dinámico.	23
III.	MEDIOS HETEROGENEOS Y ANISOTROPOS.	30
3.1.	Pasos básicos para medios heterogéneos y anisótropos.	30
IV.	APLICACIONES.	33
4.1.	Ejemplos para el caso estático en medios homogéneos.	33
4.2.	Ejemplos para el caso estático en medios heterogéneos y anisótropos.	46

4.3.	Ejemplo para el caso dinámico en medios homogéneos.	59
V.	CONCLUSIONES.	73
A.I.	APENDICE UNO. NOTACION SUBINDICE.	76
A.II.	APENDICE DOS. PROGRAMA PARA EL CASO ESTATICO.	84
A.III.	APENDICE TRES. RESUMEN DE FORMULAS.	98

I. INTRODUCCION.  
\*\*\*\*\*

El presente trabajo muestra los casos más utilizados en la solución de problemas mediante el uso del Método del Elemento Finito.

El capítulo II trata los medios homogéneos. En este capítulo se desglosan los 8 pasos básicos para la solución de problemas estáticos, se dan las demostraciones de las fórmulas más empleadas y una explicación de algunas consideraciones teóricas de importancia, tales como el concepto de trabajo virtual, el de trabajo específico de deformación, entre otros. Así mismo se analiza el caso dinámico, en el cual se emplean métodos de aproximación para conocer los desplazamientos nodales, se estudian los tres elementos de un sistema vibratorio, para la obtención de la matriz de masa consistente se recurre a el principio de D'alambert.

El capítulo III trata el caso de medios heterogéneos y anisótropos, aquí se siguen los mismos pasos básicos que en el capítulo II en el caso estático, solo se presenta un cambio en el cuarto paso. Se lleva a cabo la demostración de la matriz de transformación.

El capítulo IV presenta las aplicaciones de los dos capítulos anteriores mediante la solución de ejemplos sencillos, en los cuales se observa primordialmente el manejo de las ecuaciones involucradas y el comportamiento físico de los materiales ensallados.

En el capítulo V se hacen algunos comentarios sobre el Método del Elemento Finito, y de los resultados de los ejemplos planteados.

El apéndice uno, utiliza un enfoque tensorial ( notación subíndice ) en la demostración de la matriz de transformación de coordenadas.

El apéndice dos proporciona el listado del programa para la HP 41C. El programa es únicamente para el caso estático.

Dentro del apéndice tres se resumen las fórmulas más empleadas en la solución de problemas mediante el uso del Método del Elemento Finito.

### 1.1. Conceptos Básicos.

Los conceptos básicos del Método del Elemento Finito, no son nuevos; el principio de discretización ha sido muy utilizado en muchas y diversas formas por la humanidad através del tiempo.

Es posible que el primer intento del hombre de discretización fue el de dividir la materia del universo en cinco partes básicas o fundamentales, las cuales son: El aire, el agua, la tierra, el fuego y el cielo; otro ejemplo de discretización, lo constituye el llamado sistema coordinado de localización, dado por una subdivisión del globo terráqueo.

### 1.2. Proceso de Discretización.

La discretización implica la aproximación del sistema continuo real. En el proceso de discretización se emplean subdivisiones. La subdivisión, es el dividir una figura cualquiera en otras ( de geometría conocida ) más pequeñas. con el fin de acercarnos a la solución real; por ejemplo, si tenemos una circunferencia y conocemos su área, podemos colocar polígonos circunscritos, y sabemos que mientras más lados tenga el polígono, el área de este se acerca cada vez más al área real, en otras palabras, existe convergencia. Por otro lado podemos decir que el error cometido disminuye cuanto mayor es el número de subdivisiones.

II. MEDIOS HOMOGENEOS.  
\*\*\*\*\*

2.1. Pasos básicos para el Método del Elemento Finito en medios homogéneos.

Las formulaciones y aplicaciones del Método del Elemento Finito están contenidos en 8 pasos básicos. La Ingeniería se interesa por valuar efectos tales como: Deformaciones, esfuerzos, fluidos a presión etc, causados por fuerzas tales como: Presiones, aplicación de cargas, etc.

La forma de la distribución de los diferentes efectos en un cuerpo, depende de las características del sistema de fuerzas, así como también de las características del cuerpo mismo.

Podemos afirmar que la obtención de las deformaciones es en muchos casos, bastante problemática si utilizamos métodos convencionales; para solucionar esto hacemos uso del Método del Elemento Finito, que divide al cuerpo en un número determinado de pequeños componentes, llamados elementos finitos. Estos pequeños elementos, son mucho más fáciles de estudiar que al cuerpo entero.

2.1.1. Primer paso. Discretización y configuración de los elementos elegidos.

Dividimos a el cuerpo en un número conveniente de pequeños segmentos llamados elementos finitos. Las intersecciones de los lados de los elementos, son los puntos nodales, el espacio entre los nodos le llamaremos líneas nodales ( figura 1-a ). Algunas veces requerimos introducir un punto a lo largo de las líneas nodales, llamado punto nodal adicional ( figura 1-b ). El número y el tamaño de los elementos a elegir depende del tipo de elemento a utilizar, y esto a su vez depende de si trabajamos en una, dos o tres dimensiones; así para una dimensión usamos una línea recta, para dos dimensiones tendremos triángulos o cuadriláteros y para tres dimensiones tenemos, polígonos en el espacio ( figura 2 ).

Debemos sin embargo tener cuidado en los casos de límites irregulares, para que la aproximación sea satisfactoria ( figura 3 ).

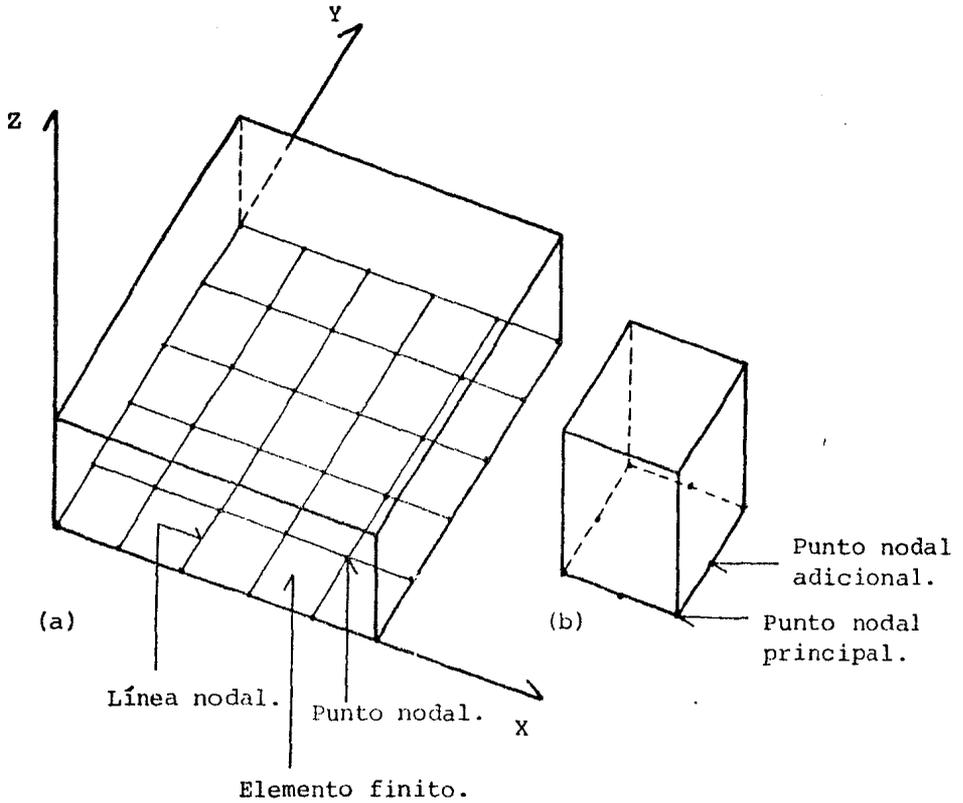


Figura 1

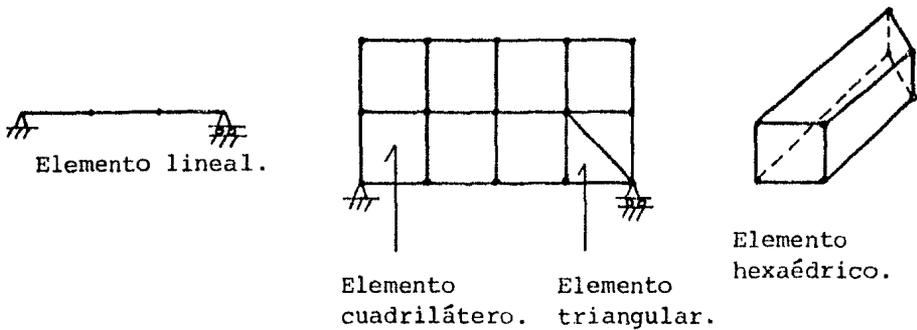


Figura 2

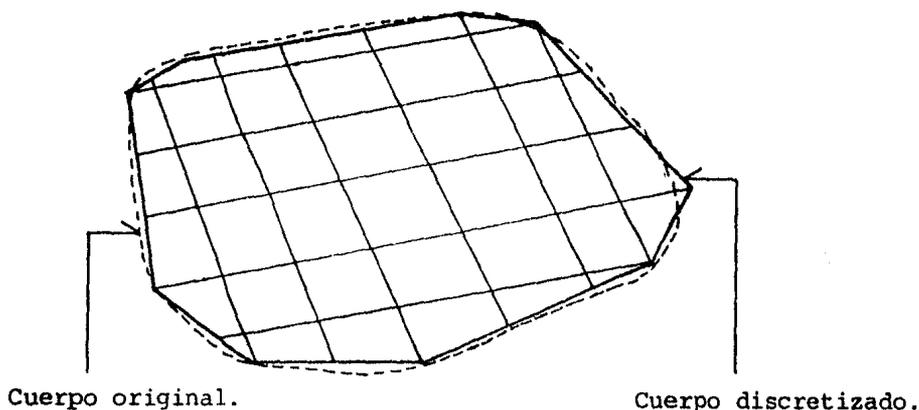


Figura 3

2.1.2. Segundo paso. Selección de el método de la función de aproximación.

Una vez seleccionada la figura a utilizar, podemos conocer los desplazamientos y/o deformaciones de el cuerpo. El punto nodal del elemento nos permite escribir la función matemática más adecuada para describir el fenómeno. La función más utilizada es una función polinomial, por lo sencillo de esta, además de simplificar las formulaciones del Método del Elemento Finito. Por ejemplo una función de interpolación polinomial está expresada por:

$$\mu = N_1\mu_1 + N_2\mu_2 + N_3\mu_3 + \dots + N_m\mu_m$$

en donde:

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_m$  son los valores desconocidos.

$N_1, N_2, N_3, \dots, N_m$  es la función de interpolación.

El grado de libertad se puede definir como un desplazamiento independiente que ocurre en el punto nodal. Para una dimensión, solo tenemos una forma libre de desplazamiento para cada punto; esto es en cada

punto tenemos un grado de libertad. Para dos dimensiones, los desplazamientos o deformaciones, pueden ocurrir solo dentro de el plano de el cuerpo, por esto el punto nodal solo tiene dos formas independientes o libres de desplazamiento; esto es en cada punto tenemos dos grados de libertad.

### 2.1.3. Tercer paso. Definición de las relaciones de Deformación Unitaria - Desplazamiento, y Esfuerzo - Deformación Unitaria.

Para saber qué principio utilizar al derivar las ecuaciones del elemento debemos definir ciertas cantidades, tales que estas cantidades se parezcan en un principio.

Para problemas de Esfuerzo - Deformación; la deformación unitaria es la cantidad parecida. En el caso de que la deformación ocurra solo en una dirección, podemos decir que la deformación unitaria es pequeña, y está dada por:

$$\epsilon_y = \frac{d_y}{d_y}$$

Frecuentemente requerimos agregar una cantidad adicional al problema de deformación unitaria; esta cantidad es el esfuerzo. Con lo cual obtenemos la ley Esfuerzo - Deformación Unitaria, esta es una ley constitutiva que describe las respuestas de un sistema, debido a la aplicación de una fuerza; además esta ley es una parte esencial en el análisis de Elemento Finito.

### 2.1.4. Cuarto paso. Derivación de las ecuaciones de el elemento.

Para el uso de los principios y de las leyes, obtendremos ecuaciones que gobiernen el comportamiento de el elemento. La ecuación así obtenida, en términos generales se puede utilizar para todos los elementos del cuerpo discretizado.

El número de alternativas es posible por la derivación de las

ecuaciones de los elementos. Dos de los métodos más comunmente utilizados son el Método de la Energía y los Métodos Residuales.

El Método de los Residuos Cargados, está basado en la minimización del residual, que antes de tener una aproximación o una solución tentativa es sustituido dentro de la ecuación diferencial que rige el problema.

El Método de la Energía es una de las mejores alternativas en la formulación del Método del Elemento Finito; este procedimiento requiere muy buenos conocimientos del Cálculo Variacional, y está basado en hallar condiciones conecuentes de los cuerpos con valores estacionarios de cantidades escalares para cuerpos cargados.

El uso de cualquiera de los dos métodos nos lleva a ecuaciones que describen el comportamiento del elemento; nosotros haremos uso del Método de la Energía, con el cual obtendremos la siguiente expresión.

$$\underline{K} \underline{\delta} = \underline{f} \quad \dots \text{II.1.}$$

donde:

$\underline{K}$ : Matriz propia del elemento, esto es de las características del elemento.

$\underline{\delta}$ : Vector de los valores nodales desconocidos.

$\underline{f}$ : Vector de los parámetros de fuerza en el elemento.

Para establecer el equilibrio entre las fuerzas nodales y los esfuerzos actuantes, lo hacemos imponiendo un desplazamiento virtual a los nodos, e igualando el trabajo exterior realizado por las fuerzas nodales al que se efectúa interiormente por los esfuerzos distribuidos durante el desplazamiento.

Los desplazamientos y las deformaciones dentro del elemento son respectivamente:

$$\underline{\delta}_{\mu} = \underline{N} \underline{\delta a}^e \quad ; \quad \underline{\delta}_{\epsilon} = \underline{B} \underline{\delta a}^e .$$

donde:

$\underline{\delta a}^e$ : Es un desplazamiento virtualr en los nodos.

El trabajo efectuado por las fuerzas nodales aplicadas gra---

dualmente es igual a la mitad de la suma de los productos de los componentes de cada una de las fuerzas por sus correspondientes desplazamientos, esto es:

$$\frac{1}{2} \delta a^e T q^e \dots \text{II.2.}$$

Así mismo el trabajo interno por unidad de volumen efectuado por las fuerzas y los esfuerzos es:

$$\frac{1}{2} \delta_{\epsilon T} \underline{\underline{\epsilon}} - \frac{1}{2} \delta_{\mu T} \underline{\underline{h}} \quad ; \quad \frac{1}{2} \delta a^e T ( \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{h}} ) \dots \text{II.3.}$$

donde:

$\underline{\underline{\epsilon}}$  : Vector de esfuerzos iniciales.

$\underline{\underline{h}}$  : Vector de fuerzas másicas.

Trabajo de deformación; es el trabajo almacenado en un cuerpo elástico, en el cual los puntos de aplicación de las fuerzas se desplazan; este sistema de fuerzas se aplica en forma gradual ( en incrementos ). Al desaparecer este sistema de fuerzas el cuerpo se recupera utilizando la energía almacenada.

Ahora bien si le aplicamos a un cuerpo una carga P instantáneamente, el trabajo efectuado será:

$$W = P \Delta$$

donde:

P: Carga.

$\Delta$ : Deformación.

Si la carga es ahora aplicada gradualmente, desde cero hasta P , y suponiendo válida la ley de Hooke, tendremos que la deformación es directamente proporcional a la carga, luego entonces el trabajo desarrollado por un incremento de carga es:

$$\delta W = P_i \delta \Delta_i$$

y por la ley de Hooke tenemos:

$$\delta \Delta_i = \frac{L}{AE} \delta P_i$$

Si de aquí hacemos la hipótesis de que A, E y L son constantes, sustituyendo e integrando tenemos que:

$$W = \frac{L}{AE} \int_0^P P_i dP_i$$

$$W = \frac{L}{AE} \frac{P^2}{2}$$

y como:

$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

$$W = \frac{P\Delta}{2} \quad (\text{ley de Clapeyron}).$$

Por la ley de Clapeyron vemos que la energía de deformación cuando la carga se aplica paulatinamente vale la mitad de la energía que cuando la carga se aplica instantáneamente.

Reemplazando valores obtenemos:

$$P = EA$$

$$\delta = \epsilon L$$

Expresando el trabajo de deformación en función de los esfuerzos:

$$W = EA \frac{\epsilon L}{2}$$

$$W = \frac{\Delta \epsilon}{2} v$$

y considerando un volúmen unitario resulta:

$$W = \frac{\epsilon \epsilon}{2} \quad (\text{expresión que define el trabajo específico de deformación}).$$

Si consideramos ahora un estado triaxial de esfuerzos; aplicando el esfuerzo  $E_x$  aparecerá una deformación  $\epsilon_x$ , y por la ley de Clapeyron, el trabajo específico de deformación es:

$$W_x = \frac{1}{2} E_x \epsilon_x$$

análogamente para  $E_y$ ,  $\gamma$ ,  $E_z$  tenemos respectivamente:

$$W_y = \frac{1}{2} E_y \epsilon_y$$

;

$$W_z = \frac{1}{2} E_z \epsilon_z$$

De aquí tenemos que el trabajo específico de deformación total resulta ser:

$$W = \frac{1}{2} ( E_x \epsilon_x + E_y \epsilon_y + E_z \epsilon_z ) = \frac{1}{2} \underline{\epsilon}^T \underline{E}$$

Esta última expresión es la que se emplea en la ecuación II.3.

Ahora bien igualando el trabajo interno total con el trabajo externo, nos queda:

$$\underline{\Delta a}^{eT} \underline{q}_i^e = \underline{\Delta a}^{eT} \left[ \int_V \underline{B}^T \underline{\epsilon} dvol - \int_V \underline{N}^T \underline{h} dvol \right]$$

y siendo válida para cualquier desplazamiento:

$$\underline{q}_i^e = \int_V \underline{B}^T \underline{\underline{\epsilon}} \, dvol - \int_V \underline{N}^T \underline{h} \, dvol$$

donde:

$\underline{q}_i^e$ : Fuerza nodal en el nudo i debido a la fuerza r en el elemento e.

Para una relación Esfuerzo - Deformación y siguiendo una ley lineal la expresión nos resulta:

$$\underline{q}_i^e = \underline{K}^e \underline{a}^e + \underline{r}_i^e$$

donde:

$$\underline{K}^e = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dvol$$

y

$$\underline{r}_i^e = - \int_V \underline{N}^T \underline{h} \, dvol - \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{\epsilon}_0 \, dvol + \int_V \underline{B}^T \underline{\underline{\epsilon}}_0 \, dvol$$

donde los términos de el miembro derecho de la última expresión son respectivamente: 1) Las fuerzas másicas, 2) las deformaciones iniciales y 3) los esfuerzos iniciales.

La ecuación II.1 está en forma general; para problemas específicos de análisis de esfuerzos, sería:

$\underline{K}$ : Matriz de rigidez del elemento.

$\underline{q}$ : Vector de los desplazamientos nodales.

$\underline{f}$ : Vector de las fuerzas externas nodales.

La matriz de rigidez del elemento está dada por la siguiente fórmula:

$$\underline{K} = \iint \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, t \, dx \, dy$$

donde t es el espesor del elemento, dado que trabajamos con una subdivisión de elemento, podemos considerar a t como constante y dado que ninguna de las matrices contienen a x o y, el resultado de la integración queda así:

$$\underline{K} = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, t \Delta$$

donde:

$\Delta$ : Es el área de el triángulo o elemento.

$\underline{B}$ : Es la matriz de función de forma de deformaciones.

D: Matriz de rigidez elástica.

Desarrollo para la obtención de la matriz de función de forma de deformaciones.

Sabemos que:

$$\underline{B} = \underline{L}\underline{N}$$

en donde:

L: Operador de deformaciones.

N: Función de forma de desplazamientos.

Por otro lado tenemos a:

$$\underline{u} = \sum \underline{N}_i \underline{a}_i^e$$

u: Vector de desplazamientos en cualquier punto del elemento.

y así:

$$\underline{N} \underline{a}^e = [ N_i, N_j, \dots ] \begin{bmatrix} a_i \\ a_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \dots \text{II.4.}$$

La función de forma N es una función de posición, mientras que a<sup>e</sup> está en función de los desplazamientos nodales.

Así el vector desplazamiento viene dado por:

$$\underline{u}_i = \begin{bmatrix} \mu_i (x,y) \\ v_i (x,y) \end{bmatrix} \dots \text{II.5.}$$

y el desplazamiento es:

$$\underline{a}_i = \begin{bmatrix} \mu_i \\ v_i \end{bmatrix} \dots \text{II.6.}$$

Con lo que las deformaciones en cualquier punto estan dadas por:

$$\underline{\epsilon} = \underline{L}\underline{u} \dots \text{II.7.}$$

y en consecuencia el vector deformación será:

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{a} \dots \text{II.8.}$$

Por lo tanto lo siguiente queda demostrado:

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N}$$

Ahora bien desarrollando la ecuación II.7. obtenemos:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} ; \quad \underline{L}\underline{u} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0.0 \\ 0.0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ v \end{bmatrix} \quad \dots \text{ II.9.}$$

De la ecuación II.1. tenemos:

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{a}^e$$

de aquí:

$$\underline{u} = \underline{I} [ N_i, N_j, N_m ] \underline{a}^e$$

$\underline{I}$ : Matriz unidad de 2x2.

y:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \mu \\ v \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos horizontales y verticales estan dados por las siguientes fórmulas respectivamente.

$$\underline{\mu} = \frac{1}{2\Delta} \left[ (a_i + b_i x + c_i y) \mu_i + (a_j + b_j x + c_j y) \mu_j + \dots \right]$$

$$\underline{v} = \frac{1}{2\Delta} \left[ (a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + \dots \right]$$

donde a, b y c, están en función de la posición del elemento, definido así:

$$\underline{a}_i = X_j Y_m - X_m Y_j$$

$$\underline{b}_i = Y_j - Y_m$$

$$\underline{c}_i = X_m - X_j$$

De manera análoga se definen los valores para j y m.

Con lo cual resulta:

$$\underline{N}_i = ( a_i + b_i x + c_i y ) \frac{1}{2\Delta} \quad \dots \text{II.10.}$$

$$\underline{N}_i \underline{I} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} N_i$$

$$\underline{N}_i \underline{I} = \begin{bmatrix} N_i & 0.0 \\ 0.0 & N_i \end{bmatrix}$$

Haciendo el desarrollo completo tenemos:

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_i & 0.0 & N_j & 0.0 & N_m & 0.0 \\ 0.0 & N_i & 0.0 & N_j & 0.0 & N_m \end{bmatrix} \quad \dots \text{II.11.}$$

De las ecuaciones II.9. y II.7. obtenemos el siguiente sistema:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0.0 \\ 0.0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0.0 & N_j & 0.0 & N_m & 0.0 \\ 0.0 & N_i & 0.0 & N_j & 0.0 & N_m \end{bmatrix}$$

realizando el producto matricial:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta x} & 0.0 & \frac{\delta N_j}{\delta x} & 0.0 & \frac{\delta N_m}{\delta x} & 0.0 \\ 0.0 & \frac{\delta N_i}{\delta y} & 0.0 & \frac{\delta N_j}{\delta y} & 0.0 & \frac{\delta N_m}{\delta y} \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} & \frac{\delta N_i}{\delta x} & \frac{\delta N_j}{\delta y} & \frac{\delta N_j}{\delta x} & \frac{\delta N_m}{\delta y} & \frac{\delta N_m}{\delta x} \end{bmatrix}$$

y finalmente de la ecuación II.10. obtenemos:

$$\underline{B} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} Y_j - Y_m & 0.0 & Y_m - Y_i & 0.0 & Y_i - Y_j & 0.0 \\ 0.0 & X_m - X_j & 0.0 & X_i - X_m & 0.0 & X_j - X_i \\ X_m - X_j & Y_j - Y_m & X_i - X_m & Y_m - Y_i & X_j - X_i & Y_i - Y_j \end{bmatrix}$$

Desarrollo para la obtención de la matriz de rigidez elástica.

Basándonos en la teoría de la elasticidad:

$$\epsilon_x = E \epsilon_y \quad ; \quad \epsilon_y = E \epsilon_x \quad ; \quad \tau_{xy} = \xi_{y_{xy}}$$

La deformación en y dado un esfuerzo  $\epsilon_y$  está dada por:

$$\epsilon_y = \frac{E_y}{E}$$

y en el otro sentido dado el mismo esfuerzo:

$$\epsilon_{xy} = -\nu \frac{E_y}{E} \quad \text{o} \quad \epsilon_{xy} = -\nu \epsilon_y$$

Visto de esta forma, las deformaciones están dadas por:

$$\epsilon_y = \frac{E_y}{E} - \nu \frac{E_x}{E} \quad \dots \text{II.12.}$$

$$\epsilon_x = \frac{E_x}{E} - \nu \frac{E_y}{E} \quad \dots \text{II.13.}$$

En función de esfuerzos efectivos resulta:

$$E_x^* = E_x - \nu E_y \quad \dots \text{II.14.}$$

$$E_y^* = E_y - \nu E_x \quad \dots \text{II.15.}$$

Escritas de otra forma:

$$E_x^* = E \epsilon_x - \nu E \epsilon_y$$

$$E_y^* = E \epsilon_y - \nu E \epsilon_x$$

despejamos de la ecuación II.14. a  $E_x$ .

$$E_x = \left[ \epsilon_x + \frac{\nu}{E} E_y \right] E$$

sustituyendo este último valor en la ecuación II.12.

$$\epsilon_y = \frac{E_y}{E} - \nu \frac{1}{E} \left[ \epsilon_x + \frac{\nu}{E} E_y \right] E$$

$$\epsilon_y = \frac{E_y}{E} \left[ 1 - \nu^2 \right] - \nu \epsilon_x$$

$$E \begin{bmatrix} \epsilon_y + \nu \epsilon_x \\ \nu \epsilon_x + \epsilon_y \end{bmatrix} = E_y \begin{bmatrix} 1-\nu^2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$E_y = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \nu \epsilon_x + \epsilon_y \end{bmatrix} \dots \text{II.16.}$$

análogamente en el sentido x tenemos:

$$E_x = E \begin{bmatrix} \epsilon_x + \frac{\nu}{E} \frac{E}{1-\nu^2} \nu \epsilon_x + \epsilon_y \end{bmatrix}$$

$$E_x = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \epsilon_x + \nu \epsilon_y \end{bmatrix} \dots \text{II.17.}$$

y para el caso de el cortante:

$$\xi = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{1-\nu}{2} \right] \dots \text{II.18.}$$

En las expresiones II.16. y II.17. tenemos que las deformaciones son unitarias, y por lo tanto la matriz de elasticidad estará dada por:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1.0 & \nu & 0.0 \\ \nu & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Nota: Los ceros dentro de la matriz son debidos a que trabajamos en un estado de esfuerzo plano donde:

$$\epsilon_z = 0.0$$

$$\tau_{xz} = 0.0$$

$$\tau_{yz} = 0.0$$

2.1.5. Quinto paso. Acoplamiento de las ecuaciones del elemento para obtener la ecuación global.

Lo que aquí se busca es obtener al final ecuaciones para todo el elemento o cuerpo, que definan con la suficiente aproximación el comportamiento del mismo. El elemento matricial dado en la ecuación II.1. es genérico, por tanto, podemos generar ecuaciones recursivas para otros elementos diferenciales. De esta forma podemos obtener una matriz global de el elemento en su totalidad, haciendo un acoplamiento de las matrices de los diversos elementos diferenciales.

Dependiendo del tipo y naturaleza del problema, debemos tratar de cumplir con las condiciones de continuidad, en la forma más precisa posible. Así por ejemplo, para problemas en el plano, debemos cumplir con las condiciones de continuidad solo para desplazamientos. Finalmente obtenemos la matriz acoplada dada por la siguiente expresión:

$$\underline{K} \underline{\delta} = \underline{f}$$

donde:

$\underline{K}$  : Matriz acoplada, de las propiedades del elemento.

$\underline{\delta}$  : Vector acoplado, de los valores nodales desconocidos.

$\underline{f}$  : Vector acoplado, de los parámetros de las fuerzas nodales.

Las condiciones de frontera, están dadas por condiciones físicas tales como los apoyos. Las condiciones de frontera, están comunmente especificadas en términos de valores conocidos, de los valores desconocidos sobre una parte de la superficie de la frontera  $S_1$ . o los valores conocidos derivados  $S_2$ , como podemos observar en la figura 4.

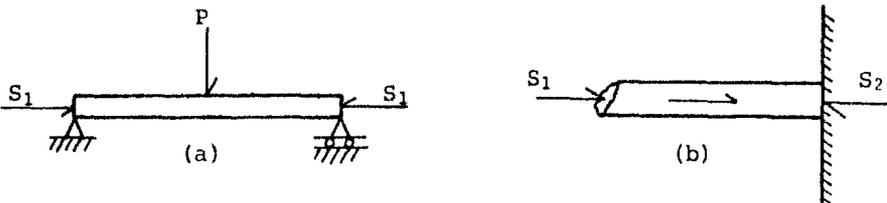


Figura 4

En el caso de una viga simplemente apoyada, la frontera  $S_1$  tiene dos puntos finales donde se puede presentar el desplazamiento, figura 4-a. Este tipo de expresión está dada en términos de los desplazamientos, y es comunmente llamada, condiciones de frontera forzada, geométrica o esencial. En la barra simplemente apoyada el momento es cero; es to es la segunda derivada desaparece, y es conocida como condición de frontera natural.

2.1.6. Sexto paso. Solución para los valores primarios desconocidos.

La siguiente matriz:

$$\underline{K} \underline{\delta} = \underline{f}$$

podemos decir que está colocada en forma lineal o no lineal; son ecuaciones algebraicas simultáneas, las cuales se pueden escribir en forma estandar así:

$$K_{11}\delta_1 + K_{12}\delta_2 + \dots + K_{1n}\delta_n = f_1$$

$$K_{21}\delta_1 + K_{22}\delta_2 + \dots + K_{2n}\delta_n = f_2$$

.

.

.

$$K_{m1}\delta_1 + K_{m2}\delta_2 + \dots + K_{mn}\delta_n = f_m$$

Estas ecuaciones se pueden resolver usando el método de eliminación de Gauss, o bien por métodos iterativos. Al final de este paso tendremos resueltos los desplazamientos  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ .

A estos resultados se les nombra valores desconocidos primarios, dado que aparecen las primeras cantidades básicas buscadas.

2.1.7. Séptimo paso. Solución por derivación o por cantidades secundarias.

Al adicionar cantidades secundarias, debemos de computarlas

con las cantidades primarias. En el caso de problemas de Esfuerzo-Deformación, cantidades parecidas pueden ser; deformación unitaria, esfuerzo, momentos y fuerzas cortantes. De esta forma la obtención de las cantidades secundarias es relativamente fácil; ya conocemos una de las cantidades primarias, esto es desde que hacemos uso de las relaciones entre Deformación Unitaria-Desplazamiento y Esfuerzo-Deformación Unitaria, esta cantidad es conocida.

#### 2.1.8. Octavo paso. Interpretación de resultados.

Al final el punto importante es deducir los resultados para el uso de el procedimiento del Elemento Finito, para poderlo emplear en realidad en el análisis y el diseño, ya que los resultados son los giros, desplazamientos, etc. del cuerpo en estudio.

#### 2.2. Método de el Elemento Finito dinámico.

Para el caso dinámico debemos hacer algunas consideraciones adicionales, dado que las condiciones del elemento varían con el tiempo; por tal razón para la solución dinámica emplearemos métodos de aproximación.

##### 2.2.1. Conceptos fundamentales.

Dado que en los problemas dinámicos, tanto las cargas como las respuestas varían con el tiempo, la solución de problemas por este conducto no presentan una solución única, sino más bien tiene distintas soluciones para cada instante de tiempo.

Supongamos que a una viga le mandamos una carga dinámica, las deformaciones que varían con el tiempo producen aceleraciones, y las aceleraciones, de acuerdo al principio de D'alambert, inducen fuerzas de inercia que resisten al movimiento. Así la viga está sujeta a dos cargas; la fuerza externa, que causa el movimiento, y las fuerzas de iner--

cia, que resisten la aceración inducida. Si las cargas dinámicas se aplican lentamente, las fuerzas de inercia serán pequeñas, por tal razón el problema se podría atacar estáticamente, pero si la carga dinámica se aplica súbitamente, las fuerzas de inercia toman mayor importancia en el análisis. Las fuerzas de inercia se toman en cuenta en la matriz de masa concentrada, que para un elemento es  $m$ , y para el conjunto se escribe  $M$ ; por otra parte si el amortiguamiento es significativo, tendremos análogamente las matrices de amortiguamiento  $c$  y  $C$  respectivamente para un elemento y para el conjunto.

Un sistema se mueve con un grado de libertad cuando en un instante cualquiera, su configuración deformada está determinada por un solo parámetro que es función del tiempo. En general un sistema se mueve con infinitos grados de libertad, cuando un punto en un instante cualquiera, puede tener un desplazamiento independiente de cualquier otro punto. En el sistema de un grado de libertad es posible un modo de vibrar, en el de dos grados de libertad son posibles dos modos de vibrar, en el de  $n$  grados de libertad son posibles  $n$  modos de vibrar. Cuando una estructura vibra lo hace en una combinación de flexión, extensión, torsión, etc., pero aquí solo nos referiremos a la flexión. Tres son los elementos integrantes de los sistemas vibratorios: a) Los elementos inertes o masas, b) los elementos restitutivos, y c) los elementos amortiguadores.

Hipótesis de comportamiento de las masas.

En las masa actúan fuerzas efectivas y de inercia exclusivamente. Como problema de dinámica clásica se aceptarán las leyes de Newton:

La tercera ley dice que a toda acción corresponde una reacción y en conjunto integran un sistema de fuerzas en equilibrio, es decir:

$$\underline{F} - m\underline{a} = 0.0$$

esta ecuación nos dice que la fuerza efectiva de una partícula y la fuerza de inercia de la misma están en equilibrio, que no es más que la se--

gunda ley de Newton, también conocida como principio de D'alambert, y sirve para solucionar problemas de dinámica como si fueran estáticos.

Hipótesis de comportamiento de los elementos restitutivos.

Los elementos restitutivos son de características Hookeanas, además de considerarse despreciables sus masas. Por otra parte estos elementos solo transforman energía de deformación en energía cinética y la fuerza que se genera en uno de esos elementos es función lineal de el desalojamiento relativo de sus extremos, esto es:

$$\underline{F}_R = -\underline{K} \delta$$

K se llama constante del resorte y puede ser llamada rigidez a la torsión, esta constante es una propiedad intrínseca del elemento restitutivo.

Hipótesis de comportamiento de los elementos amortiguadores.

Estos elementos son disipadores de energía del sistema y provocan en la partícula una fuerza directamente proporcional a la velocidad relativa de la masa y en sentido contrario a ella, si llamamos C a esta constante tendremos:

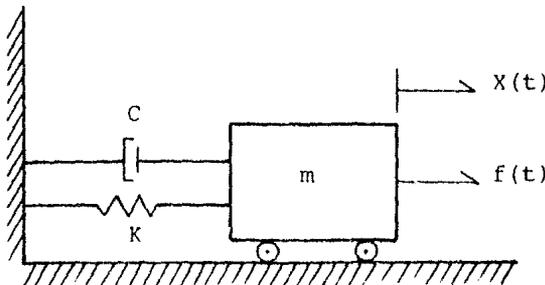
$$\underline{F}_D = -\underline{C} \dot{\delta}$$

esto es lo que constituye el amortiguamiento viscoso o de Newton.

Llamemos R a la fuerza de excitación del sistema, es decir a la fuerza externa que le cause movimiento, fuerza que es función del tiempo.

Sistema de un grado de libertad amortiguado:

Pongamos en equilibrio a el sistema mostrado en la figura.



$$\underline{R} + \underline{F}_I + \underline{F}_D + \underline{F}_R = 0.0$$

$$\underline{R} = \underline{M}\ddot{\delta} + \underline{C}\dot{\delta} + \underline{K}\delta$$

en donde:

M: Matriz de masa concentrada.

C: Matriz de amortiguamiento.

K: Matriz de rigidez.

δ: Vector de desplazamientos nodales.

Tenemos sin embargo que la aceleración provocada por la fuerza de inercia será la componente de la aceleración sísmica, la aceleración propia de la base del sistema o del terreno, esto es:

$$\ddot{X}_T = \ddot{X} + \ddot{X}_0$$

y finalmente tenemos:

$$\underline{M}\ddot{\delta} + \underline{M}\ddot{X}_0 + \underline{C}\dot{\delta} + \underline{K}\delta = 0.0$$

$$\underline{M}\ddot{\delta} + \underline{C}\dot{\delta} + \underline{K}\delta = -\underline{M}\ddot{X}_0$$

### 2.2.2. Métodos de aproximación numérica.

#### Método de Diferencias Finitas:

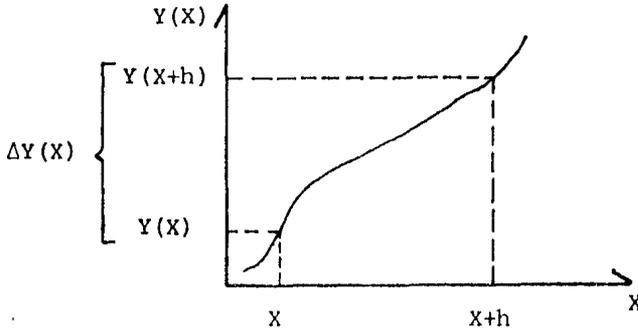
La importancia del estudio de las ecuaciones en diferencias, se debe a que en muchas de las aplicaciones matemáticas las ecuaciones involucradas no dependen de la rapidez de cambio de las variables, sino de la variación finita de las mismas. De aquí que dichas ecuaciones en vez de derivadas contienen diferencias.

Las funciones continuas  $f(X)$ , que trabajamos con frecuencia se caracterizan porque su variable independiente  $X$  es continua dentro de un cierto intervalo. Otro tipo de funciones  $g(X)$ , que aunque no son continuas son importantes, son las llamadas funciones discretas, y se caracterizan porque su variable independiente solamente toma determinados

valores dentro de un intervalo. A diferencia del cálculo infinitesimal que solamente considera funciones continuas, las diferencias finitas nos permiten trabajar con funciones continuas y discretas.

Diferencia de una función; veamos el concepto de diferencia de una función, considerando una función continua.

Sea la función continua  $Y(X)$  de la figura:



Partiendo del punto  $X$  del dominio de la función, lo incrementamos una cantidad finita  $h$ , de tal manera que para  $X+h$  la función correspondiente es  $Y(X+h)$ . Entonces, el incremento que experimenta la función es:

$$\Delta Y(X) = Y(X+h) - Y(X)$$

que se le conoce como primera diferencia de la función.

El cambio de una función  $Y(X)$  debido a un incremento  $h$  de su argumento  $X$ , se llama primera diferencia de la función y se representa por;  $\Delta Y(X)$ .

Así si estamos en el punto  $X+2h$  del dominio de la función, lo incrementamos en  $h$ , la primera diferencia de la función esta dada por:

$$\Delta Y(X+2h) = Y(X+3h) - Y(X+2h)$$

Ahora si en lugar de una función continua, lo que tenemos es una función discreta  $Y(X)$ , definida solamente para  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_K, \dots$

entonces, en el punto  $X_K$  del dominio, le incrementamos una cantidad  $\Delta X_K = X_{K+1} - X_K$ , la primera diferencia de la función queda:

$$\Delta Y(X_K) = Y(X_K + \Delta X_K) - Y(X_K)$$

Si todos los puntos del dominio de la función son equidistantes, cualquiera de ellos se puede incrementar en una misma cantidad  $h$ , siendo la primera diferencia; si  $h=1$  :

$$\Delta Y_K = Y_{K+1} - Y_K$$

la segunda diferencia es:

$$\begin{aligned}\Delta^2 Y_K &= \Delta( \Delta Y_K ) \\ &= ( Y_{K+2} - Y_{K+1} ) - ( Y_{K+1} - Y_K ) \\ &= Y_{K+2} - 2Y_{K+1} + Y_K\end{aligned}$$

y así sucesivamente:

$$\Delta^3 Y_K = Y_{K+3} - 3Y_{K+2} + 3Y_{K+1} - Y_K$$

.

.

.

$$\Delta^m Y_K = \Delta( \Delta^{m-1} Y_K )$$

Para la solución de problemas de dinámica por medio del Elemento Finito; además del método de diferencias centrales, utilizamos el método de Newmark en forma alternativa.

### 2.2.3. Algunas consideraciones teóricas para el Método del Elemento Finito Dinámico.

Los problemas de dinámica estructural están dentro de dos amplias clases, en la primera se pregunta por la frecuencia natural de vibración y de sus correspondientes modos; en la segunda nos preguntamos cómo se mueve la estructura a través de el tiempo bajo una excitación de el terreno.

Los métodos para el análisis estructural dinámico se encuentran rezagados en relación a el análisis por elemento finito, ya que los métodos estructurales suponen la disponibilidad de las matrices de rigidez, de masa concentrada y de amortiguamiento, pero no exigen que las matrices provengan del elemento discretizado.

El principio de D'alambert nos dirige a la definición de la matriz de masa concentrada llevando en sí su significado físico. En la notación usual, y asumiendo el campo de los desplazamientos del elemento  $\underline{X} = (u, v, w)$ , así como sus dos primeras derivadas.

$$\underline{X} = \underline{N} \underline{\delta} \quad ; \quad \dot{\underline{X}} = \underline{N} \dot{\underline{\delta}} \quad ; \quad \ddot{\underline{X}} = \underline{N} \ddot{\underline{\delta}} \quad \dots \text{II.19.}$$

donde  $\dot{\underline{\delta}}$  y  $\ddot{\underline{\delta}}$  son respectivamente la velocidad nodal y la aceleración nodal. El campo de las aceleraciones de D'alambert, produce fuerzas de cuerpo  $\underline{F}$  en dirección opuesta, así  $\underline{F} = -\rho \ddot{\underline{X}}$ , donde  $\rho$  es la densidad de la masa; los nodos cargados asociados con las fuerzas de cuerpo nos dan:

$$\begin{aligned} \underline{f}_p &= \int_v \underline{N}^T \underline{F} \, dv \\ \underline{f}_p &= - \int_v \rho \underline{N}^T \underline{N} \, dv \, \ddot{\underline{\delta}} \\ \underline{f}_p &= -\underline{m} \ddot{\underline{\delta}} \quad \text{donde } \underline{m} \text{ está definida por: } \underline{m} = \int_v \rho \underline{N}^T \underline{N} \, dv \end{aligned}$$

La estructura de la matriz de masa concentrada  $\underline{M}$  está construida para el concepto de expansión de los elementos matriciales  $\underline{m}$  hasta el total del cuerpo en estudio, esto es la matriz global  $\underline{M}$  se obtiene acoplando las matrices de cada elemento  $\underline{m}$ ; el acoplamiento se hace de la misma forma que en el caso de la matriz de rigidez  $\underline{K}$ .

De acuerdo con el principio de D'alambert, la posición de los nodos está en equilibrio, bajo todas las cargas aplicadas, incluyendo las cargas dinámicas, estas últimas incluyen las fuerzas de inercia  $\sum \underline{f}_p$  y las fuerzas de amortiguamiento  $\sum \underline{C} \dot{\underline{\delta}}$ . Así para el movimiento la ecuación que rige la discretización del sistema es:

$$\underline{R} = \underline{K} \underline{\delta} + \underline{C} \dot{\underline{\delta}} + \underline{M} \ddot{\underline{\delta}} \quad \dots \text{II.20.}$$

En la formulación del método directo, la masa a lo largo de el área o volumen tributario, en un nodo en particular, se considera concentrada en el nodo; por ello decimos que la distribución de la masa de el elemento finito es colocada en n masa equivalentes según los nodos que se tengan, con lo cual la matriz de masa concentrada resulta ser diagonal. Las concentraciones no tienen inercia de rotación.

La matriz de masa concentrada es pseudo-positiva si aparecen ceros en su diagonal principal, los ceros pueden provocar que algunas operaciones se dificulten, dependiendo de el tipo de algoritmo; esta matriz requiere de un pequeño espacio para su almacenamiento.

Respuesta dinámica, para su obtención utilizaremos dos procedimientos: 1) El método de las diferencias centrales y 2) el método de Newmark; ambos son métodos numéricos de integración directa.

La integración directa de la ecuación puede ser explícita o implícita, usualmente los métodos explícitos requieren de pequeños incrementos de tiempo y producen ecuaciones fáciles de resolver, mientras que al pasar el tiempo los métodos implícitos permiten ampliar el incremento de tiempo, generando ecuaciones más complejas en su solución. Métodos más explícitos son por necesidad estables; si el incremento de tiempo excede cierta fracción del período de la estructura, los cálculos no tendrán fin, pero si el incremento es demasiado grande y el amortiguamiento es apreciable, el proceso puede seguir establemente, pero es fácil que tenga errores de significancia.

Los elementos finitos estructurales generan las llamadas ecuaciones de rigidez, que caracterizan a estructuras cuya vibración natural es grande, su frecuencia es más bien grande ( $W_{max} \gg W_{min}$ ), por esta razón en las estructuras rígidas se incluyen con estas ecuaciones una red muy fina.

Para la construcción del algoritmo de diferencias centrales iniciamos con expresiones de diferencias finitas con el tiempo, para velocidades y aceleraciones nodales en el tiempo  $t$ .

$$\dot{\delta}_t = \frac{1}{2(\Delta t)} \left[ \delta_{t+\Delta t} - \delta_{t-\Delta t} \right] \quad \dots \text{II.21.}$$

$$\ddot{\delta}_t = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[ \delta_{t+\Delta t} - 2\delta_t + \delta_{t-\Delta t} \right] \quad \dots \text{II.22.}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la II.20., escrita en el tiempo  $t$ , por lo que el método es explícito:

$$\left[ \frac{(\Delta t)}{2} \underline{C} + \underline{M} \right] \delta_{t+ t} = (\Delta t)^2 \underline{R}_t - \left[ (\Delta t)^2 \underline{K} - 2\underline{M} \right] \delta_t - \left[ \underline{M} - \frac{(\Delta t)}{2} \underline{C} \right] \delta_{t- t}$$

... II.23.

Las ecuaciones II.21. y II.22. provienen de las series de Taylor, que nos permiten obtener las fórmulas de interpolación, derivación e integración numérica, además de facilitar la determinación de la magnitud del error en que se incurre al emplearlas.

Así tenemos por series de Taylor las siguientes funciones de derivación numérica:

$$f(t+\Delta t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(\Delta t) + \frac{f''(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{f'''(t)}{3!}(\Delta t)^3 + \dots$$

$$f(t-\Delta t) = f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(\Delta t) + \frac{f''(t)}{2!}(\Delta t)^2 - \frac{f'''(t)}{3!}(\Delta t)^3 + \dots$$

Restando las funciones anteriores, para la primera derivada resulta:

$$f(t+\Delta t) - f(t-\Delta t) = 2\frac{f'(t)}{1!}(\Delta t) + \dots$$

$$f'(t) = \frac{f(t+\Delta t) - f(t-\Delta t)}{2(\Delta t)}$$

esta expresión es la misma dada por la ecuación II.21.; el error que se tiene es del incremento de tiempo elevado a el cubo, a la quinta potencia, etc., error que es poco significativo si el incremento de tiempo es tal que la influencia de el error sea pequeña con relación a  $\Delta t$ .

Ahora bien sumando las funciones dadas por las series de Taylor, para la segunda derivada obtenemos:

$$f(t+\Delta t) + f(t-\Delta t) = 2f(t) + f''(t)(\Delta t)^2 + \dots$$

$$f''(t) = \frac{f(t+\Delta t) - 2f(t) + f(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

que es la misma expresión dada por la ecuación II.22.; el error que se tiene es del incremento de tiempo elevado a la cuarta, a la sexta potencia, etc., error que es poco significativo si el incremento de tiempo

es tal que la influencia de este sea pequeña con relación a  $(\Delta t)^2$

Para seguir el algoritmo de el operador, iniciamos con  $t=0.0$ , las condiciones iniciales  $\underline{\delta}_0$  y  $\dot{\underline{\delta}}_0$  se conocen, con ellas y con la ecuación II.20. obtenemos  $\ddot{\underline{\delta}}_0$ ; de aquí la ecuación II.24. nos da el valor de el desplazamiento  $\underline{\delta}_{-\Delta t}$  necesario para iniciar los cálculos.

$$\underline{\delta}_{-\Delta t} = \underline{\delta}_0 - \Delta t \dot{\underline{\delta}}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\underline{\delta}}_0 \quad \dots \text{II.24.}$$

Las ecuaciones II.21., II.22. y II.23. se emplean repetitivamente. La ecuación II.23. nos da  $\underline{\delta}_{-\Delta t}$ , y las ecuaciones II.21. y II.22.  $\dot{\underline{\delta}}_{-\Delta t}$  y  $\ddot{\underline{\delta}}_{-\Delta t}$ , de la ecuación II.23. obtenemos ahora  $\underline{\delta}_{-2\Delta t}$  y así sucesivamente. La solución de la ecuación II.23. es trivial si  $\underline{M}$  es diagonal y  $\underline{C}$  es diagonal o cero. El método de diferencias centrales es condicionalmente estable.

El método de Newmark está basado en lo siguiente:

$$\underline{\delta}_{-t+\Delta t} = \underline{\delta}_{-t} + (\Delta t) \dot{\underline{\delta}}_{-t} + (\Delta t)^2 \left[ \frac{1}{2}(1-\beta) \ddot{\underline{\delta}}_{-t} + \beta \ddot{\underline{\delta}}_{-t+\Delta t} \right] \quad \dots \text{II.25.}$$

$$\dot{\underline{\delta}}_{-t+\Delta t} = \dot{\underline{\delta}}_{-t} + (\Delta t) \left[ (1-\gamma) \ddot{\underline{\delta}}_{-t} + \gamma \ddot{\underline{\delta}}_{-t+\Delta t} \right] \quad \dots \text{II.26.}$$

donde  $\beta$  y  $\gamma$  son parámetros que durante el análisis pueden cambiar, estos parámetros aceleraran la convergencia de el método. La ecuación II.25. se resuelve para  $\underline{\delta}_{-t+\Delta t}$ , substituyendo este valor en la ecuación II.26. obtenemos  $\dot{\underline{\delta}}_{-t+\Delta t}$ . Substituyendo los valores de la velocidad y de la aceleración obtenidos anteriormente, en la ecuación II.27. obtenos los desplazamientos correspondientes. Substituyendo las ecuaciones II.25. y II.26. en la II.20., escrita para  $t+\Delta t$ , tenemos que el método es implícito y:

$$\left[ \frac{K}{\beta(\Delta t)} + \frac{C}{\beta(\Delta t)^2} + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} M \right] \underline{\delta}_{-t+\Delta t} = \underline{R}_{-t+\Delta t} + \underline{C} \left[ \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)} \underline{\delta}_{-t} + \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\underline{\delta}}_{-t} \right] + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{\delta}}_{-t} + \underline{M} \left[ \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \underline{\delta}_{-t} + \frac{1}{\beta(\Delta t)} \dot{\underline{\delta}}_{-t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{\delta}}_{-t} \right] \quad \dots \text{II.27.}$$

Muchos procedimientos son obtenidos por la integración numérica de la ecuación II.20.

La técnica empleada es simple, pero se pueden obtener muy buenos resultados con relativamente un pequeño trabajo de cálculo.

La solución básica del proceso es que la aceleración varía linealmente durante cada incremento de tiempo, mientras que las propiedades de el sistema permanecen constantes. El movimiento de la masa durante el intervalo de tiempo se ilustra en la figura, con ecuaciones que toman la variación lineal de la aceleración y de la correspondiente variación cuadrática y cúbica de la velocidad y el desplazamiento respectivamente. Evaluando estas últimas expresiones en el final del intervalo, nos dirigimos a las ecuaciones para los incrementos de velocidad y desplazamiento.

$$\dot{v}_{t+\Delta t} = \dot{v}_t + \left[ \ddot{v}_t + \ddot{v}_{t+\Delta t} \frac{(\Delta t)}{2} \right] \dots \text{II.28}$$

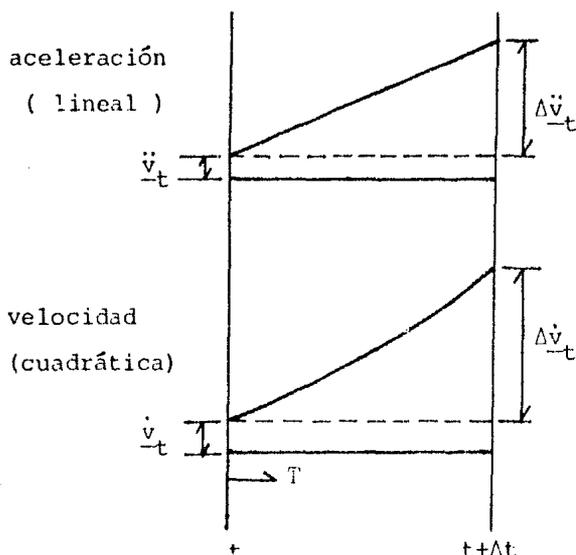
$$v_{t+\Delta t} = v_t + \dot{v}_t (\Delta t) + \ddot{v}_t \frac{(\Delta t)^2}{3} + \ddot{v}_{t+\Delta t} \frac{(\Delta t)^2}{6} \dots \text{II.29.}$$

Las ecuaciones II.25. y II.26. son equivalentes a las ecuaciones II.28. y II.29. respectivamente, dado que  $\underline{v} = \delta$ .

La demostración de las ecuaciones II.28. y II.29., se realizará considerando lo siguiente:

$$\Delta v = v_{t+\Delta t} - v_t$$

$$T = \Delta t \quad (\text{su origen en } t).$$



$$\ddot{v}(T) = \ddot{v}_t + \frac{\Delta \ddot{v}}{\Delta t} T$$

Para obtener la velocidad, integramos la aceleración.

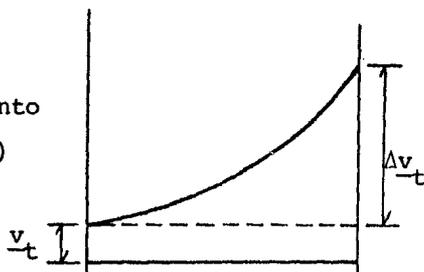
$$\dot{v}(T) = \dot{v}_t + \int_0^T \left[ \ddot{v}_t + \frac{\Delta \ddot{v}}{\Delta t} T \right] dT$$

$$\dot{v}(T) = \dot{v}_t + \ddot{v}_t T + \frac{\Delta \ddot{v}}{\Delta t} \frac{T^2}{2} \dots \text{II.30.}$$

Para obtener ahora los desplazamientos integramos la velocidad.

$$v(T) = v_t + \int_0^T \left[ \dot{v}_t + \ddot{v}_t T + \frac{\Delta \ddot{v}}{\Delta t} \frac{T^2}{2} \right] dT$$

desplazamiento  
( cúbico )



$$\underline{v}(T) = \underline{v}_t + \dot{\underline{v}}_t(T) + \ddot{\underline{v}}_t \frac{T^2}{2} + \frac{\Delta \ddot{\underline{v}}}{\Delta t} \frac{T^3}{6}$$

... II.31.

Reemplazando  $\Delta v$  y  $T$  en las ecuaciones II.30. y II.31.; obtenemos las mismas ecuaciones II.28. y II.29..

Nota: Los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$  para que satisfagan las ecuaciones II.28. y II.29., deben de ser;  $\beta=0.5$  y  $\gamma=1/6$ .

Para seguir el algoritmo de el operador, iniciamos con  $t=0.0$ , las condiciones iniciales  $\underline{\delta}_0$  y  $\dot{\underline{\delta}}_0$  son conocidas, con las condiciones iniciales y la ecuación II.20. encontramos  $\ddot{\underline{\delta}}_0$ . Si  $\ddot{\underline{\delta}}_0$  no es conocido entonces la ecuación II.27. se resuelve para  $\underline{\delta}_{-\Delta t}$ , la ecuación II.25. para  $\dot{\underline{\delta}}_{-\Delta t}$  y la ecuación II.26 para  $\dot{\underline{\delta}}_{-\Delta t}$ ; ahora la ecuación II.27. nos dará  $\underline{\delta}_{2\Delta t}$  y así sucesivamente; en otras palabras, de la ecuación II.20. y las condiciones iniciales obtenemos  $\underline{\delta}_0$ , ahora sustituyendo estos tres valores en la ecuación II.27. tenemos  $\underline{\delta}_{-\Delta t}$ , reemplazando los valores de los desplazamientos en las ecuaciones II.25. y II.26. encontramos  $\dot{\underline{\delta}}_{-\Delta t}$  y  $\dot{\underline{\delta}}_{-\Delta t}$  respectivamente, con los valores de la aceleración, la velocidad y el desplazamiento en  $\Delta t$ , de la ecuación II.27. resulta  $\underline{\delta}_{2\Delta t}$ , y así sucesivamente. La solución de la ecuación II.27. no es trivial, por otro lado solo se requiere de invertir una sola vez a la matriz, si el incremento de tiempo no varía.

El método de Newmark es incondicionalmente estable si  $\gamma \geq 0.5$  y  $\beta \geq (2\gamma + 1)^2 / 16$ . Si introducimos un amortiguamiento artificial, entonces  $\gamma > 0.5$ ; si ahora el amortiguamiento es negativo tendremos  $\gamma < 0.5$ . Si  $\gamma = 0.5$  y  $\beta = 0.0$  el método de Newmark se reduce a el de diferencias centrales. La mejor combinación de parámetros para que un método implícito pueda ser incondicionalmente estable para problemas lineales es cuando,  $\gamma = 0.5$  y  $\beta = 0.25$ , por consiguiente será un método de aceleración promedio constante. Finalmente podemos decir que los métodos implícitos ( Newmark ) son más exactos que los explícitos ( Diferencias Centrales ).

III. MEDIOS HETEROGENEOS Y ANISOTROPOS.

\*\*\*\*\*

3.1. Pasos básicos para el Método del Elemento Finito en medios heterogéneos y anisótropos.

Los pasos básicos para el análisis de medios heterogéneos y anisótropos, corresponden a los vistos en medios homogéneos, con la única variante en el cuarto paso.

Dado que la matriz de función de forma sólo depende de la posición del elemento, esta no varía. La matriz de elasticidad, se ve modificada y está dada por la siguiente expresión:

$$\underline{D} = \underline{T} \underline{D}' \underline{T}^T$$

donde:

$\underline{T}$  : Matriz de transformación de deformaciones.

$\underline{D}'$  : Matriz de elasticidad en los ejes según la estratigrafía (  $x'$ ,  $y'$  ).

Para la obtención de la matriz de transformación, utilizaremos un método algebraico y vectorial. La demostración de la matriz  $D'$  no se llevará a cabo por quedar fuera del alcance del trabajo presente, la última referencia trata el tema con bastante amplitud.

Obtención de la matriz de transformación; siguiendo la notación vectorial tenemos que: Si en un estado de deformación plana sus componentes son perpendiculares a uno de los ejes ortogonales el tensor de deformación no tendrá componentes en la dirección de este eje; para el plano (  $x, y$  ) el tensor de deformación queda:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{E} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y \end{bmatrix}$$

Para la obtención del estado de deformación en un plano

cualquiera perpendicular al plano ( x,y ), su vector unitario es:

$$\underline{e} = \cos \alpha_i + \cos \beta_j$$

En el plano (x,y)  $\alpha + \beta = 90^\circ$  y en consecuencia:

$$\cos \beta = \text{sen } \alpha$$

quedando así el vector unitario:

$$\underline{e} = \cos \alpha_i + \text{sen } \alpha_j$$

Ahora bien el vector deformación se obtiene de multiplicar el tensor deformación por el vector unitario.

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \text{sen } \alpha \end{bmatrix}$$

en forma general para un estado de deformación plana resulta:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & 0.0 \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0.0 \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Para obtener la deformación lineal, realizamos el producto matricial entre la matriz de deformación y la matriz de vectores unitarios.

Procediendo así tenemos:

$$\underline{\epsilon}_x = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \text{sen}^2 \alpha + 2\gamma_{xy} \text{sen } \alpha \cos \alpha$$

$$\underline{\epsilon}_y = \epsilon_x \text{sen}^2 \alpha + \epsilon_y \cos^2 \alpha - 2\gamma_{xy} \text{sen } \alpha \cos \alpha$$

$$\underline{\gamma}_{xy} = \epsilon_x \text{sen } \alpha \cos \alpha - \epsilon_y \text{sen } \alpha \cos \alpha + \gamma_{xy} [\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha]$$

Ahora bien si a el ángulo  $\alpha$  le cambiamos el signo:

$$\begin{bmatrix} \underline{\epsilon}_{-x} \\ \underline{\epsilon}_{-y} \\ \underline{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos \alpha - \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Finalmente de este último sistema expresado en forma más compacta:

$$\underline{\epsilon}'_0 = \underline{T} \underline{\epsilon}_0$$

que también se puede escribir:

$$\underline{\epsilon}_0 = \underline{T}^T \underline{\epsilon}'_0$$

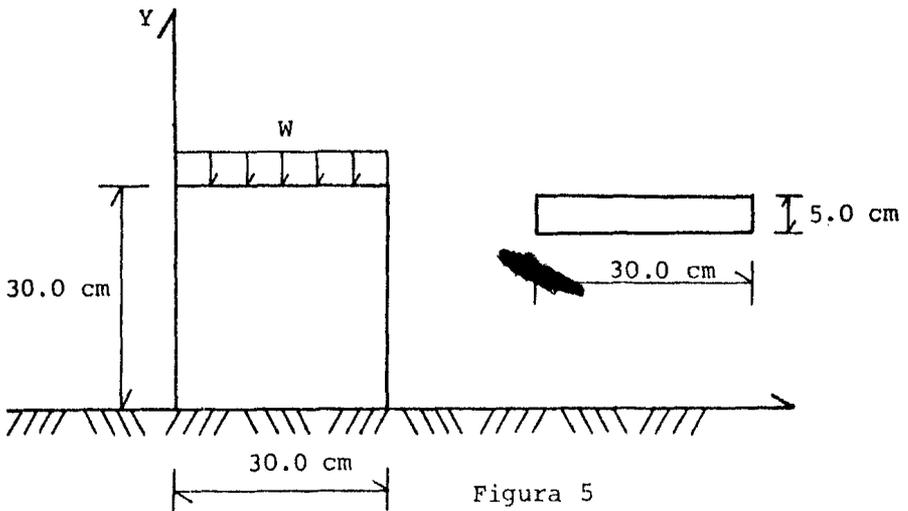
La demostración de la matriz de transformación por medio de la notación sub-índice, esto es un método tensorial, se ve en el apéndice I.

IV. APLICACIONES  
\*\*\*\*\*

En este capítulo realizaremos para cada uno de los tres casos expuestos con anterioridad ( caso estático en medios homogéneos, caso es tático en medios heterogéneos y anisotrópicos y finalmente el caso dinámico para medios homogéneos ), algunos ejemplos, con el fin de mostrar con más claridad la aplicación de el Método de el Elemento Finito.

4.1. Ejemplos para el caso estático en medios homogéneos.

Ejemplo # 1. Obtener la deformación en una placa de acero ( homogénea e isótropa ), sometida a una carga  $W$ , tal como se muestra en la figura 5.



Datos:

$$E = 2 \times 10^6 \text{ k/cm}^2 \quad ; \quad \nu = 0.30 \quad ; \quad W = 1000.0 \text{ k/cm}^2$$

Dividiremos en este caso a la placa metálica en dos elementos finitos, como se muestra en la figura 6., la numeración de los nodos se hará de izquierda a derecha.

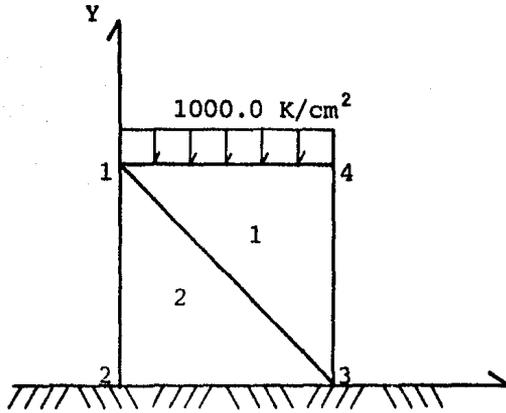


Figura 6

Analicemos el primer elemento ( 1,3,4 ) = ( i,j,m ).

Determinemos el área del triángulo, con la fórmula (A.III.

1.).

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1.0 & X_i & Y_i \\ 1.0 & X_j & Y_j \\ 1.0 & X_m & Y_m \end{vmatrix}$$

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1.0 & 0.0 & 30.0 \\ 1.0 & 30.0 & 0.0 \\ 1.0 & 30.0 & 30.0 \end{vmatrix}$$

$$2\Delta = 900.0 \text{ cm}^2$$

$$\Delta = 450.0 \text{ cm}^2$$

Nota: El sentido del análisis siempre deberá de ser en sentido antiorario.

Obtención de los coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$  y  $c_n$ , que son función de de los desplazamientos nodales, para ello ocuparemos las ecuaciones ( A. III.2.).

$$a_i = (X_j Y_m) - (X_m Y_j) = (30.0 \times 30.0) - (30.0 \times 0.0) = 900.0$$

$$b_i = Y_j - Y_m = 0.0 - 30.0 = -30.0$$

$$\begin{aligned}
 \underline{c}_i &= X_m - X_j &= 30.0 - 30.0 &= 0.0 \\
 \underline{a}_j &= (X_i Y_m) - (X_m Y_i) &= (0.0 \times 30.0) - (30.0 \times 30.0) &= -900.0 \\
 \underline{b}_j &= Y_m - Y_i &= 30.0 - 30.0 &= 0.0 \\
 \underline{c}_j &= X_i - X_m &= 0.0 - 30.0 &= -30.0 \\
 \underline{a}_m &= (X_i Y_j) - (X_j Y_i) &= (0.0 \times 0.0) - (30.0 \times 30.0) &= -900.0 \\
 \underline{b}_m &= Y_i - Y_j &= 30.0 - 0.0 &= 30.0 \\
 \underline{c}_m &= X_j - X_i &= 30.0 - 0.0 &= 30.0
 \end{aligned}$$

Para conocer la función de forma de deformaciones ( $B_n$ ), utilizaremos la ecuación (A.III.3.)

$$\underline{B}_i = L \underline{I} \underline{N}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & 0.0 \\ 0.0 & \frac{\partial N_i}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_i}{\partial X} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0.0 \\ 0.0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}$$

en donde:

L: Operador de deformaciones.

$\underline{I}$ : Matriz unidad.

$\underline{N}$ : Matriz de función de forma de desplazamientos.

$$\underline{B}_i = \frac{1}{900} \begin{bmatrix} -30.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -30.0 \end{bmatrix} \quad \underline{B}_j = \frac{1}{900} \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -30.0 \\ -30.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_m = \frac{1}{900} \begin{bmatrix} 30.0 & 0.0 \\ 0.0 & 30.0 \\ 30.0 & 30.0 \end{bmatrix}$$

Para obtener la función de forma del elemento, solo debemos acoplar las matrices de cada nodo.

$$\underline{B}_1^e = \frac{1}{900} \begin{bmatrix} \partial X_1 & \partial Y_1 & \partial X_3 & \partial Y_3 & \partial X_4 & \partial Y_4 \\ -30.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 30.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -30.0 & 0.0 & 30.0 \\ 0.0 & -30.0 & -30.0 & 0.0 & 30.0 & 30.0 \end{bmatrix}$$

Obtengamos ahora la transpuesta de esta matriz.

$$\underline{B}_1^T = \frac{1}{900} \begin{bmatrix} -30.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -30.0 \\ 0.0 & 0.0 & -30.0 \\ 0.0 & -30.0 & 0.0 \\ 30.0 & 0.0 & 30.0 \\ 0.0 & 30.0 & 30.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \partial X_1 \\ \partial Y_1 \\ \partial X_3 \\ \partial Y_3 \\ \partial X_4 \\ \partial Y_4 \end{matrix}$$

El cálculo de la matriz de rigidez elástica será empleando la ecuación ( A.III.4.).

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1.0 & \nu & 0.0 \\ \nu & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D} = 2197802.198 \begin{bmatrix} 1.0 & 0.30 & 0.0 \\ 0.30 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.350 \end{bmatrix}$$

Finalmente el cálculo de la matriz de rigidez global lo hacemos, utilizando la ecuación ( A.III.5.).

$$\underline{K}^e = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B}^e t \Delta$$

$$\underline{K}_1^e = \begin{bmatrix} -30.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -30.0 \\ 0.0 & 0.0 & -30.0 \\ 0.0 & -30.0 & 0.0 \\ 30.0 & 0.0 & 30.0 \\ 0.0 & 30.0 & 30.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0.30 & 0.0 \\ 0.30 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.350 \end{bmatrix} (6105.01)$$

$$\begin{bmatrix} -30.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 30.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -30.0 & 0.0 & 30.0 \\ 0.0 & -30.0 & -30.0 & 0.0 & 30.0 & 30.0 \end{bmatrix}$$

donde  $6105.010 = \frac{2197802.1980 \times 1.0 \times 5.0 \times 450.0}{900.0 \times 900.0}$

Efectuando operaciones, la matriz de rigidez para el primer elemento, quedará solo para los nodos 1 y 4, ya que los nodos 2 y 3 se consideran empotrados:

$$\underline{K}_1^e = \begin{bmatrix} \partial X_1 & \partial Y_1 & \partial X_4 & \partial Y_4 \\ 5494505.490 & 0.0 & -5494505.490 & -1648351.650 \\ 0.0 & 1923076.920 & -1923076.920 & -1923076.920 \\ -5494505.490 & -1923076.920 & 7417582.420 & 3571428.570 \\ -1648351.650 & -1923076.920 & 3571428.570 & 7417582.420 \end{bmatrix} \begin{matrix} \partial X_1 \\ \partial Y_1 \\ \partial X_4 \\ \partial Y_4 \end{matrix}$$

Análisis del segundo elemento ( 1,2,3 ):

$$2\Delta = 900.0 \text{ cm}^2 \quad \Delta = 450.0 \text{ cm}^2$$

Los coeficientes a, b, y c son:

$$a_i = 0.0 \quad b_i = 0.0 \quad c_i = 30.0$$

$$a_j = -900.0$$

$$b_j = -30.0$$

$$c_j = -30.0$$

$$a_m = 0.0$$

$$b_m = 30.0$$

$$c_m = 0.0$$

La matriz de función de forma de deformaciones es:

$$\underline{B}_2^e = \frac{1}{900} \begin{bmatrix} \partial X_1 & \partial Y_1 & \partial X_2 & \partial Y_2 & \partial X_3 & \partial Y_3 \\ 0.0 & 0.0 & -30.0 & 0.0 & 30.0 & 0.0 \\ 0.0 & 30.0 & 0.0 & -30.0 & 0.0 & 0.0 \\ 30.0 & 0.0 & -30.0 & -30.0 & 0.0 & 30.0 \end{bmatrix}$$

su transpuesta está dada por:

$$\underline{B}_2^T = \frac{1}{900} \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 30.0 \\ 0.0 & 30.0 & 0.0 \\ -30.0 & 0.0 & -30.0 \\ 0.0 & -30.0 & -30.0 \\ 30.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 30.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \partial X_1 \\ \partial Y_1 \\ \partial X_2 \\ \partial Y_2 \\ \partial X_3 \\ \partial Y_3 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez global para el elemento dos, estará dada únicamente por el nodo uno, ya que los nodos 2 y 3 están empotrados:

$$\underline{K}_2^e = \begin{bmatrix} \partial X_1 & \partial Y_1 \\ 1923076.920 & 0.0 \\ 0.0 & 5494505.490 \end{bmatrix} \begin{matrix} \partial X_1 \\ \partial Y_1 \end{matrix}$$

Para obtener ahora la matriz de rigidez de todo el sistema, a coplamos las matrices de rigidez de los dos elementos finitos. La acoplación de matrices se realiza de la siguiente forma: Las matrices de rigidez de ambos elementos son cuadradas, al realizar el acoplamiento, se suman únicamente los elementos comunes en ambas matrices ( los nodos 1 y 3 son comunes ), obteniendo así otra matriz cuadrada, pero como en este caso eliminamos los nudos 2 y 3 nos resulta una matriz rectangular.

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \partial X_4 & \partial Y_4 & \partial X_1 & \partial Y_1 \\ 7417582.420 & 3571428.570 & -5494505.490 & -1923076.920 \\ 3571428.570 & 7417582.420 & -1648351.650 & -1923076.920 \\ -5494505.490 & -1648351.650 & 7417582.420 & 0.0 \\ -1923076.920 & -1923076.920 & 0.0 & 7417582.420 \end{bmatrix} \begin{matrix} \partial X_4 \\ \partial Y_4 \\ \partial X_1 \\ \partial Y_1 \end{matrix}$$

Para la obtención de la matriz de fuerzas externas, tenemos en este caso en particular que; la carga W solo actúa en un solo sentido ( Y ), y dado que su distribución es uniforme, podemos decir que a cada nudo le corresponde la mitad de la carga; pero como la placa de acero tiene de espesor 5.0 cm, en realidad tendremos en cada nudo la mitad de la carga W por el espesor.

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ \frac{5W}{2} \\ 0.0 \\ \frac{5W}{2} \end{bmatrix}$$

Para obtener la deformación en cada nudo, lo hacemos resolviendo el siguiente sistema matricial.

$$\underline{K} \underline{\delta} = \underline{f}$$

en donde  $\underline{\delta}$  son los desplazamientos por determinar.

Al resolver el sistema obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta X_4 &= 0.00310 \text{ cm} & \delta Y_4 &= -0.01530 \text{ cm} \\ \delta X_1 &= -0.00110 \text{ cm} & \delta Y_1 &= -0.01330 \text{ cm} \end{aligned}$$

Comparemos estos resultados con los que obtendremos al utilizar la teoría de la elasticidad.

La deformación unitaria está dada por la siguiente expresión:

$$\epsilon = \frac{1}{E} [ \epsilon_1 - \nu(\epsilon_2 + \epsilon_3) ]$$

Pero por tratarse de un problema en el plano, la deformación unitaria queda como:

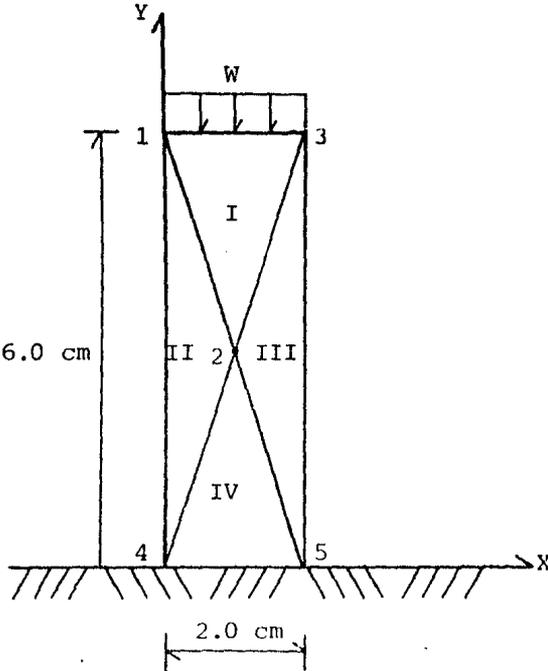
$$\epsilon = \frac{\epsilon_1}{E} \quad \text{donde} \quad \epsilon_1 = \frac{P}{A}$$

Por lo que la deformación estará dada por:

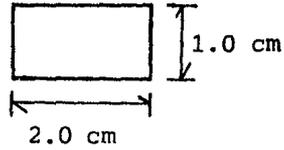
$$\delta = \frac{\epsilon_1 l}{E} \quad \delta = \frac{(-1000.0)(30.0)}{2 \times 10^6} \quad \delta = -0.015 \text{ cm}$$

Luego entonces podemos concluir que las deformaciones obtenidas con ambos procedimientos son comparativamente las mismas.

Ejemplo # 2. Obtener la deformación en una probeta de arcilla homogénea e isótropa, sometida a una carga  $W$  como se muestra en la figura, consideremos a la probeta empotrada en la base.



Datos:



$$\nu = 0.0350$$

$$m_v = 0.0020$$

$$E = \frac{1}{m_v} \quad E = 500.0 \text{ K/cm}^2$$

$$W = 2.0 \text{ K/cm}^2$$

Obtengamos el área, los coeficientes  $a, b$  y  $c$ , así como la matriz de función de forma de deformaciones, para cada uno de los elementos en estudio.

Por tratarse de una figura regular y por la construcción de la red, tenemos que todas las áreas de los elementos son las mismas:

$$2\Delta = 6.0 \text{ cm}^2$$

$$\Delta = 3.0 \text{ cm}^2$$

Para el primer elemento ( 1,2,3 ) tenemos:

$$a_i = 0.0$$

$$a_j = -12.0$$

$$a_m = -6.0$$

$$b_i = -3.0$$

$$b_j = 0.0$$

$$b_m = 3.0$$

$$c_i = 1.0$$

$$c_j = -2.0$$

$$c_m = 1.0$$

$$\underline{B}_I = \begin{bmatrix} -0.50 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.50 & 0.0 \\ 0.0 & 0.16670 & 0.0 & -0.33330 & 0.0 & 0.16670 \\ 0.16670 & -0.50 & -0.33330 & 0.0 & 0.16670 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Para el segundo elemento ( 1,4,2 ) resulta:

$$\begin{array}{lll} a_i = 0.0 & a_j = -6.0 & a_m = 0.0 \\ b_i = -3.0 & b_j = -3.0 & b_m = 6.0 \\ c_i = 1.0 & c_j = -1.0 & c_m = 0.0 \end{array}$$

$$\underline{B}_{II} = \begin{bmatrix} -0.50 & 0.0 & -0.50 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.16670 & 0.0 & -0.16670 & 0.0 & 0.0 \\ 0.16670 & -0.50 & -0.16670 & -0.50 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

De el tercer elemento ( 2,5,3 ) vemos:

$$\begin{array}{lll} a_i = 12.0 & a_j = 0.0 & a_m = -6.0 \\ b_i = -6.0 & b_j = 3.0 & b_m = 3.0 \\ c_i = 0.0 & c_j = -1.0 & c_m = 1.0 \end{array}$$

$$\underline{B}_{III} = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 & 0.50 & 0.0 & 0.50 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.16670 & 0.0 & 0.16670 \\ 0.0 & -1.0 & -0.16670 & 0.50 & 0.16670 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Por último el cuarto elemento( 2,4,5 ) nos resulta:

$$\begin{array}{lll} a_i = 0.0 & a_j = -6.0 & a_m = 0.0 \\ b_i = 0.0 & b_j = -3.0 & b_m = 3.0 \\ c_i = 2.0 & c_j = -1.0 & c_m = -1.0 \end{array}$$

$$B_{-IV} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & -0.50 & 0.0 & 0.50 & 0.0 \\ 0.0 & 0.33330 & 0.0 & -0.16670 & 0.0 & -0.16670 \\ 0.33330 & 0.0 & -0.16670 & -0.50 & -0.16670 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz de rigidez elástica.

$$D = \begin{bmatrix} 569.80060 & 199.43020 & 0.0 \\ 199.43020 & 569.80060 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 185.18520 \end{bmatrix}$$

Cálculo de las matrices de rigidez de cada elemento:

$$K_{-I} = \begin{array}{cccccc} \partial X_1 & \partial Y_1 & \partial X_2 & \partial Y_2 & \partial X_3 & \partial Y_3 & \\ \hline 442.7887 & -96.1731 & -30.8673 & 99.7051 & -411.9122 & -3.5620 & \partial X_1 \\ -96.1731 & 186.3913 & 92.5833 & -94.9763 & 3.5620 & -91.3865 & \partial Y_1 \\ -30.8673 & 92.5833 & 61.7161 & 0.0 & -30.8673 & -92.5833 & \partial X_2 \\ 99.7051 & -94.9763 & 0.0 & 189.8955 & -99.7051 & -94.9763 & \partial Y_2 \\ -411.9122 & 3.5620 & -30.8673 & -99.7051 & 442.7887 & 96.1731 & \partial X_3 \\ -3.5620 & -91.3865 & -92.5832 & -94.9763 & 96.1731 & 186.3913 & \partial Y_3 \end{array}$$

$$K_{-II} = \begin{array}{cccccc} \partial X_1 & \partial Y_1 & \partial X_4 & \partial Y_4 & \partial X_2 & \partial Y_2 & \\ \hline 442.7887 & -96.1731 & 411.9122 & 3.5620 & -854.7009 & 92.6111 & \partial X_1 \\ -96.1731 & 186.3913 & -3.5620 & 91.3865 & 99.7350 & -277.7778 & \partial Y_1 \\ 411.9122 & -3.5620 & 442.7887 & 96.1731 & -854.7009 & -92.6111 & \partial X_4 \\ 3.5620 & 91.3865 & 96.1731 & 186.3913 & -99.7350 & -277.7778 & \partial Y_4 \\ -854.7009 & 99.7350 & -854.7009 & -99.7350 & 1709.4018 & 0.0 & \partial X_2 \\ 92.6111 & -277.7778 & -92.6111 & -277.7778 & 0.0 & 555.5556 & \partial Y_2 \end{array}$$

$$K_{-III} = \begin{bmatrix} \partial X_2 & \partial Y_2 & \partial X_3 & \partial Y_3 \\ 1709.40180 & 0.0 & -854.70090 & -99.7350 \\ 0.0 & 555.55560 & -92.61110 & -277.77780 \\ -854.7009 & -92.61110 & 442.78870 & 96.17310 \\ -99.7350 & -277.77780 & 96.17310 & 186.39130 \end{bmatrix} \begin{matrix} \partial X_2 \\ \partial Y_2 \\ \partial X_3 \\ \partial Y_3 \end{matrix}$$

$$K_{-IV} = \begin{bmatrix} \partial X_2 & \partial Y_2 \\ 61.71610 & 0.0 \\ 0.0 & 189.89550 \end{bmatrix} \begin{matrix} \partial X_2 \\ \partial Y_2 \end{matrix}$$

Acoplando las matrices de cada uno de los elementos, obtenemos la matriz de rigidez global, por condiciones de apoyo los desplazamientos en los nudos 4 y 5 son nulos, quedando la matriz de rigidez global así:

$$K = \begin{bmatrix} \partial X_1 & \partial Y_1 & \partial X_2 & \partial Y_2 & \partial X_3 & \partial Y_3 \\ 885.5774 & -192.3462 & -885.5682 & 192.3162 & -411.9122 & -3.5620 \\ -192.3462 & 372.7826 & 192.3183 & -372.7541 & 3.5620 & -91.3865 \\ -885.5682 & 192.3183 & 3542.2358 & 0.0 & -885.5682 & -192.3183 \\ 192.3162 & -372.7541 & 0.0 & 1490.9022 & -192.3162 & -372.7541 \\ -411.9122 & 3.5620 & -885.5682 & -192.3162 & 885.5774 & 192.3462 \\ -3.5620 & -91.3865 & -192.3183 & -372.7541 & 192.3462 & 372.7826 \end{bmatrix} \begin{matrix} \partial X_1 \\ \partial Y_1 \\ \partial X_2 \\ \partial Y_2 \\ \partial X_3 \\ \partial Y_3 \end{matrix}$$

Con lo cual las deformaciones en los nudos son:

$$\begin{aligned} \delta X_1 &= -0.0018 \text{ cm} & \delta Y_1 &= -0.0230 \text{ cm} \\ \delta X_2 &= -1.72 \times 10^{-11} \text{ cm} & \delta Y_2 &= -0.0110 \text{ cm} \\ \delta X_3 &= 0.0018 \text{ cm} & \delta Y_3 &= -0.0230 \text{ cm} \end{aligned}$$

Comparando los resultados obtenidos con los que resultarán de el análisis elástico vemos que:

$$\delta = \frac{E_1 l}{E}$$

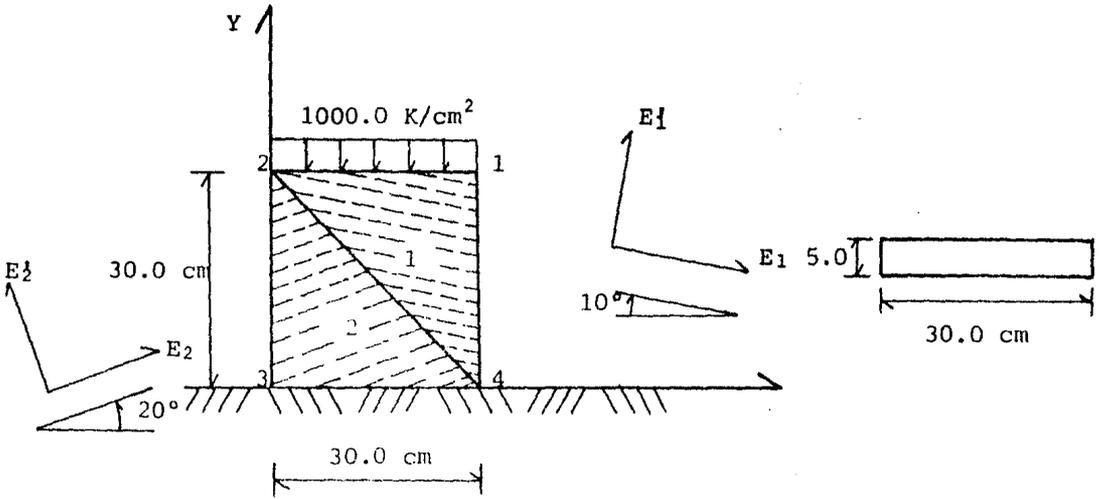
$$\delta = \frac{(2.0)(6.0)}{500.0}$$

$$\delta = -0.0240 \text{ cm}$$

Observamos que los resultados de las deformaciones en los nudos 1 y 3 son practicamente los mismos que se obtuvieron utilizando la teoría de la elasticidad.

4.2. Ejemplos para el caso estático, en medios heterogéneos y anisótropos.

Ejemplo # 3. Obtener la deformación de una placa de acero, cuya estratigrafía se presenta a continuación.



Datos:

$$E_1 = 2.0 \times 10^6 \text{ K/cm}$$

$$E_2 = 1.6 \times 10^6 \text{ K/cm}$$

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.30$$

$$E_1' = 1.0 \times 10^6 \text{ K/cm}$$

$$E_2' = 8.0 \times 10^6 \text{ K/cm}$$

$$E' = \frac{E}{2}$$

Debido a la anisotropía, para la obtención de las deformaciones en el sistema coordenado principal ( X,Y ) es necesario el empleo de la matriz de transformación ( T ). Fórmula ( A.III.6. ).

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -2\sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 2\sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación nos refiere las características del material al sistema principal ( X,Y ), logrando con esto el po--

der trabajar como si se tratara de un material isótropo.

Análisis del primer elemento ( 2,4,1 ).

El área del elemento es:

$$2\Delta = 900.0 \text{ cm}^2$$

$$\Delta = 450.0 \text{ cm}^2$$

El valor de los coeficientes a, b, y c son:

$$a_i = 900.0$$

$$a_j = -900.0$$

$$a_m = -900.0$$

$$b_i = -30.0$$

$$b_j = 0.0$$

$$b_m = 30.0$$

$$c_i = 0.0$$

$$c_j = -30.0$$

$$c_m = 30.0$$

con lo cual obtenemos la matriz  $\underline{B}$ .

$$\underline{B}_1^e = \frac{1}{900} \begin{bmatrix} \partial X_2 & \partial Y_2 & \partial X_4 & \partial Y_4 & \partial X_1 & \partial Y_1 \\ -30.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 30.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -30.0 & 0.0 & 30.0 \\ 0.0 & -30.0 & -30.0 & 0.0 & 30.0 & 30.0 \end{bmatrix}$$

y su transpuesta será:

$$\underline{B}_1^T = \frac{1}{900} \begin{bmatrix} -30.0 & 0.0 & 0.0 & \partial X_2 \\ 0.0 & 0.0 & -30.0 & \partial Y_2 \\ 0.0 & 0.0 & -30.0 & \partial X_4 \\ 0.0 & -30.0 & 0.0 & \partial Y_4 \\ 30.0 & 0.0 & 30.0 & \partial X_1 \\ 0.0 & 30.0 & 30.0 & \partial Y_1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz de rigidez elástica. Por tratarse de un análisis bidimensional y dado que las propiedades de el material son simétricas; tendremos como máximo seis constantes independientes.

Tomando el eje Y perpendicular a los estratos, las relaciones entre esfuerzos y deformaciones son:

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_x}{E_1} - \frac{\nu_2 \epsilon_y}{E_1}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu_2 \epsilon_x}{E_1} + \frac{\epsilon_y}{E_1} - \frac{\nu_2 \epsilon_z}{E_1}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_1 \epsilon_x}{E_1} - \frac{\nu_2 \epsilon_y}{E_1} + \frac{\epsilon_z}{E_1}$$

$$\gamma_{xz} = [ 2(1+\nu_1)/E_1 ] \tau_{xz}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_1} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G_1} \tau_{yz}$$

Utilizando las relaciones anteriores, podemos obtener la matriz de rigidez elástica ( D' ) según la estratigrafía; fórmula ( A.III. 7.).

$$D_1 = \frac{E_1}{[1-n(\nu_1)^2]} \begin{bmatrix} n & n\nu_1 & 0.0 \\ n\nu_1 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & m[1-n(\nu_1)^2] \end{bmatrix}$$

donde:

$$n = \frac{E_1}{E_1}$$

$$m = \frac{G_1}{E_1}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu_1)}$$

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2439024.390 & 731707.317 & 0.0 \\ 731707.317 & 1219512.195 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 384615.3846 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz de rigidez elástica en los ejes princi

pales, recurrimos a la fórmula ( A.III.8. ).

$$\underline{D} = \underline{T} \underline{D}' \underline{T}^T$$

de aquí la matriz de transformación para  $\beta=10^\circ$  resulta:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0.96985 & 0.03015 & -0.34202 \\ 0.03015 & 0.96985 & 0.34202 \\ 0.17101 & -0.17101 & 0.93969 \end{bmatrix}$$

su transpuesta es:

$$\underline{T}^T = \begin{bmatrix} 0.96985 & 0.03015 & 0.17101 \\ 0.03015 & 0.96985 & -0.17101 \\ -0.34202 & 0.34202 & 0.93969 \end{bmatrix}$$

con lo cual podemos obtener la matriz de rigidez elástica en los ejes principales:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 2383048.780 & 750975.60970 & 156951.21950 \\ 750853.65850 & 1237073.1710 & 51585.36590 \\ 156951.21950 & 51585.36590 & 403902.4390 \end{bmatrix}$$

Ahora calculemos la matriz de rigidez global para el primer elemento en los ejes principales, mediante la fórmula ( A.III.5. ).

$$\underline{K}_1^e = \underline{B}_1^T \underline{D} \underline{B}_1 t \Delta$$

$$\underline{K}_1^e = \begin{bmatrix} & \partial X_2 & \partial Y_2 & \partial X_1 & \partial Y_1 & \\ \begin{bmatrix} 5957738.2440 & 392385.7080 & -6350123.9520 & -2269861.380 \\ 392385.7080 & 1009775.8080 & -1402161.5160 & -1138741.740 \\ -6350123.9520 & -1402161.5160 & 7752285.4680 & 3407993.3520 \\ -2269556.4960 & -1138741.740 & 3408298.2360 & 4360450.9680 \end{bmatrix} & \partial X_2 \\ & \partial Y_2 \\ & \partial X_1 \\ & \partial Y_1 \end{bmatrix}$$

Para el segundo elemento ( 2,3,4 ) tenemos:

$$\underline{B}_2^e = \frac{1}{900} \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & -30.0 & 0.0 & 30.0 & 0.0 \\ 0.0 & 30.0 & 0.0 & -30.0 & 0.0 & 0.0 \\ 30.0 & 0.0 & -30.0 & -30.0 & 0.0 & 30.0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_2^T = \frac{1}{900} \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 30.0 \\ 0.0 & 30.0 & 0.0 \\ -30.0 & 0.0 & -30.0 \\ 0.0 & -30.0 & -30.0 \\ 30.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 30.0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_2^l = \begin{bmatrix} 1951219.5120 & 585365.85370 & 0.0 \\ 585365.85370 & 975609.75610 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 307707.31710 \end{bmatrix}$$

con  $\beta=20^\circ$ , la matriz de transformación será:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0.8830 & 0.1170 & -0.64280 \\ 0.1170 & 0.8830 & 0.64280 \\ 0.32140 & -0.32140 & 0.7660 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}^T = \begin{bmatrix} 0.8830 & 0.1170 & 0.32140 \\ 0.1170 & 0.8830 & -0.32140 \\ -0.64280 & 0.64280 & 0.7660 \end{bmatrix}$$

con estas matrices podemos obtener la matriz de rigidez elástica en los ejes principales.

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 1782731.7070 & 639707.31710 & 221463.41460 \\ 639707.31710 & 1035414.6340 & 92097.610 \\ 221463.41460 & 92097.610 & 361951.21950 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_2^e = \begin{bmatrix} \partial X_2 & \partial Y_2 \\ 904959.48690 & 230264.62420 \\ 230264.62420 & 2588769.5510 \end{bmatrix} \begin{matrix} \partial X_2 \\ \partial Y_2 \end{matrix}$$

Acoplando las matrices de ambos elementos, obtenemos la matriz de rigidez global de el conjunto.

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \partial X_1 & \partial Y_1 & \partial X_2 & \partial Y_2 \\ 7752285.4680 & 3408603.120 & -6350123.9520 & -1402161.5160 \\ 3408298.2360 & 4360450.9680 & -2269556.4960 & -1138741.740 \\ -6350123.9520 & -2269861.380 & 1862697.730 & 622650.3320 \\ -1402161.5160 & -1138741.740 & 622650.3320 & 3598545.3590 \end{bmatrix} \begin{matrix} \partial X_1 \\ \partial Y_1 \\ \partial X_2 \\ \partial Y_2 \end{matrix}$$

Con lo cual las deformaciones en los nudos 1 y 2 seran:

$$\delta X_1 = 0.0090 \text{ cm} \qquad \delta X_2 = 0.00130 \text{ cm}$$

$$\delta Y_1 = -0.03140 \text{ cm} \qquad \delta Y_2 = -0.02710 \text{ cm}$$

Comparando los resultados anteriores con los obtenidos al utilizar la teoria de la elasticidad:

$$\delta = \frac{\bar{E}_1 l}{E}$$

El módulo de elasticidad para cada uno de los nudos será, dependiendo de la influencia de un elemento sobre el otro.

Así para el nudo 1, tenemos que la influencia del segundo elemento es prácticamente despreciable, por tal razón tenemos  $E=E_1$ .

$$\delta Y_1 = \frac{(-1000.0)(30.0)}{1 \times 10^6}$$

$$\delta Y_1 = -0.030 \text{ cm}$$

En el caso del nudo 2 el primer elemento contribuye con un 60.0% y el cuerpo dos con el restante 40.0%, estos porcentajes se estimaron en forma cualitativa.

$$E = (1.0 \times 10^6)(0.60) + (8.0 \times 10^5)(0.40)$$

$$E = 9.20 \times 10^5 \text{ K/cm}^2$$

$$\delta Y_2 = \frac{(-1000.0)(30.0)}{9.20 \times 10^5}$$

$$\delta Y_2 = -0.03260 \text{ cm}$$

Como se observa las deformaciones en ambos casos son muy parecidas, por otro lado vemos que el nudo dos se desplaza un poco más, esto es debido a que la estratigrafía favorece este movimiento.

Ejemplo # 4. Resolvamos el ejemplo # 3, considerando en este caso que el material del primer elemento es más rígido que el material del segundo elemento:

Datos:

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.30$$

$$E_1 = 2.0 \times 10^6 \text{ K/cm}^2$$

$$E_1 = 1.60 \times 10^6 \text{ K/cm}^2$$

$$E_2 = 1.90 \times 10^5 \text{ K/cm}^2$$

$$E_2 = 7.0 \times 10^4 \text{ K/cm}^2$$

Los ángulos de la estratigrafía no varían en ninguno de los dos elementos.

Análisis del primer elemento ( 2,4,1 ).

$$\underline{B}_1^e = \begin{bmatrix} -0.0333 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0333 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0333 & 0.0333 & 0.0333 \\ 0.0 & -0.0333 & -0.0333 & 0.0 & 0.0333 & 0.0333 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_1 = \begin{bmatrix} 2253521.1260 & 676056.3380 & 0.0 \\ 676056.3380 & 1802816.90 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 615384.6150 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 0.969850 & 0.030150 & -0.342020 \\ 0.030150 & 0.969850 & 0.342020 \\ 0.171010 & -0.171010 & 0.939690 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_1 = \begin{bmatrix} 2232844.4590 & 683144.26560 & 58039.22920 \\ 683144.06640 & 1809317.6980 & 19035.66420 \\ 58039.26550 & 19035.70050 & 622478.76720 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} \partial X_2 & \partial Y_2 & \partial X_1 & \partial Y_1 \\ 5575971.38 & 144938.48 & -5720909.86 & -1850920.67 & \partial X_2 \\ 144938.48 & 1554485.26 & -1699423.83 & -1602022.17 & \partial Y_2 \\ -5720909.95 & -1699423.74 & 7420333.69 & 3452942.83 & \partial X_1 \\ -1850920.26 & -1602022.07 & 3452942.34 & 6617878.03 & \partial Y_1 \end{bmatrix}$$

Análisis de el segundo elemento ( 2,3,4 ).

$$\underline{B}_2^e = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & -0.0333 & 0.0 & 0.0333 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0333 & 0.0 & -0.0333 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0333 & 0.0 & -0.0333 & -0.0333 & 0.0 & 0.0333 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_2^i = \begin{bmatrix} 251417.76940 & 75425.33080 & 0.0 \\ 75425.33080 & 92627.59930 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 26923.0769 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 0.8830 & 0.1170 & -0.64280 \\ 0.1170 & 0.8830 & 0.64280 \\ 0.32140 & -0.32140 & 0.7660 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_2 = \begin{bmatrix} 224004.57690 & 84260.07350 & 36042.60080 \\ 84260.07350 & 102371.30650 & 14992.55990 \\ 36042.60080 & 14992.55990 & 35753.8960 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_2 = \begin{bmatrix} \partial X_2 & \partial Y_2 \\ 89206.05990 & 37406.47450 & \partial X_2 \\ 37406.47450 & 255414.56770 & \partial Y_2 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez global del conjunto es:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \partial X_1 & \partial Y_1 & \partial X_2 & \partial Y_2 \\ 7420333.690 & 3452942.830 & -5720909.950 & -1699423.740 \\ 3452942.340 & 6167878.030 & -1850920.260 & -1602022.070 \\ -5720909.860 & -1850920.670 & 5665177.440 & 182344.9545 \\ -1699423.830 & -1602022.170 & 182344.9545 & 1809899.8280 \end{bmatrix} \begin{matrix} \partial X_1 \\ \partial Y_1 \\ \partial X_2 \\ \partial Y_2 \end{matrix}$$

Ahora bien las deformaciones en los nudos son:

$$\begin{aligned} \delta X_1 &= -0.15260 \text{ cm} & \delta X_2 &= -0.15540 \text{ cm} \\ \delta Y_1 &= -0.02240 \text{ cm} & \delta Y_2 &= -0.18890 \text{ cm} \end{aligned}$$

Realizando una comparación con los resultados de la teoría elástica resulta:

$$\delta = \frac{\bar{\epsilon}_1 l}{E}$$

Pero el módulo de elasticidad para cada uno de los nudos se ve influenciado por el elemento restante.

Para el primer nudo tenemos:

$$\delta Y_1 = \frac{-30000.0}{1.60 \times 10^6} \qquad \delta Y_1 = -0.01880 \text{ cm}$$

Para el nudo 2 tenemos una influencia de el 10% por el elemento uno.

$$\delta Y_2 = \frac{-30000.0}{2.23 \times 10^5} \qquad \delta Y_2 = -0.134530 \text{ cm}$$

Observamos que en ambos casos las deformaciones son poco variables, además como es evidente el nudo 2 se desplaza más que el nudo 1 cuestión que es lógica.

Ejemplo # 5. Ahora resolvamos el ejemplo # 3, considerando en este caso que el material del segundo elemento es más rígido que el material del primer elemento.

Datos:

$$E_1 = 3.0 \times 10^5 \text{ K/cm}^2$$

$$E_2 = 2.0 \times 10^6 \text{ K/cm}^2$$

$$E_1' = 1.0 \times 10^5 \text{ K/cm}^2$$

$$E_2' = 1.0 \times 10^6 \text{ K/cm}^2$$

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.30$$

Además los ángulos de la estratigrafía de ambos elementos no varían.

Análisis del primer elemento ( 2,4,1 ).

$$\underline{B}_1^e = \begin{bmatrix} -0.0333 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0333 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0333 & 0.0 & 0.0333 \\ 0.0 & -0.0333 & -0.0333 & 0.0 & 0.0333 & 0.0333 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_1^e = \begin{bmatrix} 410958.90420 & 123287.67130 & 0.0 \\ 123287.67130 & 136986.30140 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 38461.53850 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0.969850 & 0.030150 & -0.342020 \\ 0.030150 & 0.969850 & 0.342020 \\ 0.171010 & -0.171010 & 0.939690 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 398357.0386 & 127615.5643 & 35274.7773 \\ 127615.5644 & 140932.3890 & 11574.5377 \\ 35274.7773 & 11574.5377 & 42775.2827 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_1^e = \begin{bmatrix} & \partial X_2 & \partial Y_2 & \partial X_1 & \partial Y_1 & \\ 993901.8076 & 88010.6575 & -1081912.4650 & -406411.8095 & \partial X_2 \\ 88010.6575 & 106724.4373 & -194735.0948 & -135602.9378 & \partial Y_2 \\ -1081912.4650 & -194735.0948 & 1276647.560 & 542014.7472 & \partial X_1 \\ -406411.8097 & -135602.9378 & 542014.7476 & 516108.1011 & \partial Y_1 \end{bmatrix}$$

Análisis del segundo elemento ( 2,3,4 ).

$$\underline{B}_2^e = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & -0.0333 & 0.0 & 0.0333 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0333 & 0.0 & -0.0333 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0333 & 0.0 & -0.0333 & -0.0333 & 0.0 & 0.0333 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_2^1 = \begin{bmatrix} 2439024.390 & 731707.3170 & 0.0 \\ 731707.3170 & 1219512.1950 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 384615.3846 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 0.8830 & 0.1170 & -0.6428 \\ 0.1170 & 0.8830 & 0.6428 \\ 0.3214 & -0.3214 & 0.7660 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_2 = \begin{bmatrix} 2228481.1570 & 799567.62240 & 276808.01110 \\ 799567.62240 & 1294334.8160 & 115143.0830 \\ 276808.01120 & 115143.20820 & 452427.00410 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_2^e = \begin{bmatrix} & \partial X_2 & \partial Y_2 & \\ 1128806.5070 & 287282.59230 & \partial X_2 \\ 287282.29480 & 3229368.6010 & \partial Y_2 \end{bmatrix}$$

Acoplado las matrices de rigidez de ambos elementos, obtenemos la matriz de rigidez global en los nudos 1 y 2, dado a las condiciones de apoyo.

$$\underline{K} = \begin{array}{cccc|c} & \partial X_1 & \partial Y_1 & \partial X_2 & \partial Y_2 & \\ \hline & 1276647.560 & 542014.7472 & -1081912.4650 & -194735.1948 & \partial X_1 \\ & 542014.7475 & 516108.1011 & -406411.8097 & -135602.9378 & \partial Y_1 \\ & -1081912.4650 & -406411.8095 & 2122708.3150 & 375293.2498 & \partial X_2 \\ & -194735.0948 & -135602.9378 & 375292.9523 & 3336093.0380 & \partial Y_2 \end{array}$$

En consecuencia las deformaciones en estos nudos son:

$$\delta X_1 = 0.12480 \text{ cm}$$

$$\delta X_2 = 0.01680 \text{ cm}$$

$$\delta Y_1 = -0.27050 \text{ cm}$$

$$\delta Y_2 = -0.02810 \text{ cm}$$

Obtengamos ahora las deformaciones utilizando la teoría elástica y comparemos los resultados:

El módulo de elasticidad para cada uno de los nudos, se ve afectado por la influencia de un elemento sobre el restante:

Para el nudo 1 tenemos:

$$\delta Y_1 = \frac{-30000.0}{1.0 \times 10^5}$$

$$\delta Y_1 = -0.30 \text{ cm}$$

Para el nudo 2 tomaremos un 10% de influencia del primer elemento.

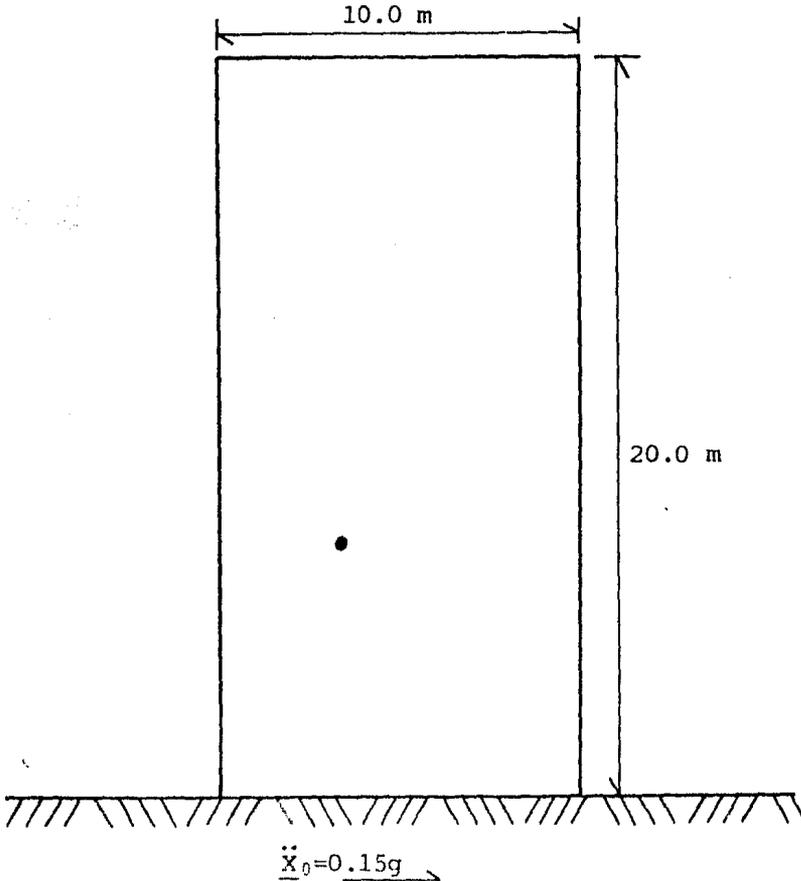
$$\delta Y_2 = \frac{-30000.0}{9.10 \times 10^5}$$

$$\delta Y_2 = -0.032970 \text{ cm}$$

Observamos que en ambos casos las deformaciones son del orden de magnitud; además como es evidente el nudo 2 se desplaza menos que el nudo 1.

4.3. Ejemplo para el caso dinámico en medios homogéneos.

Ejemplo # 6. Para el caso dinámico veamos lo que ocurre en una masa de suelo homogénea e isótropa, sometida a una fuerza horizontal cuya velocidad es de quince centésimas de la gravedad, tal como se muestra en la figura.



Datos:

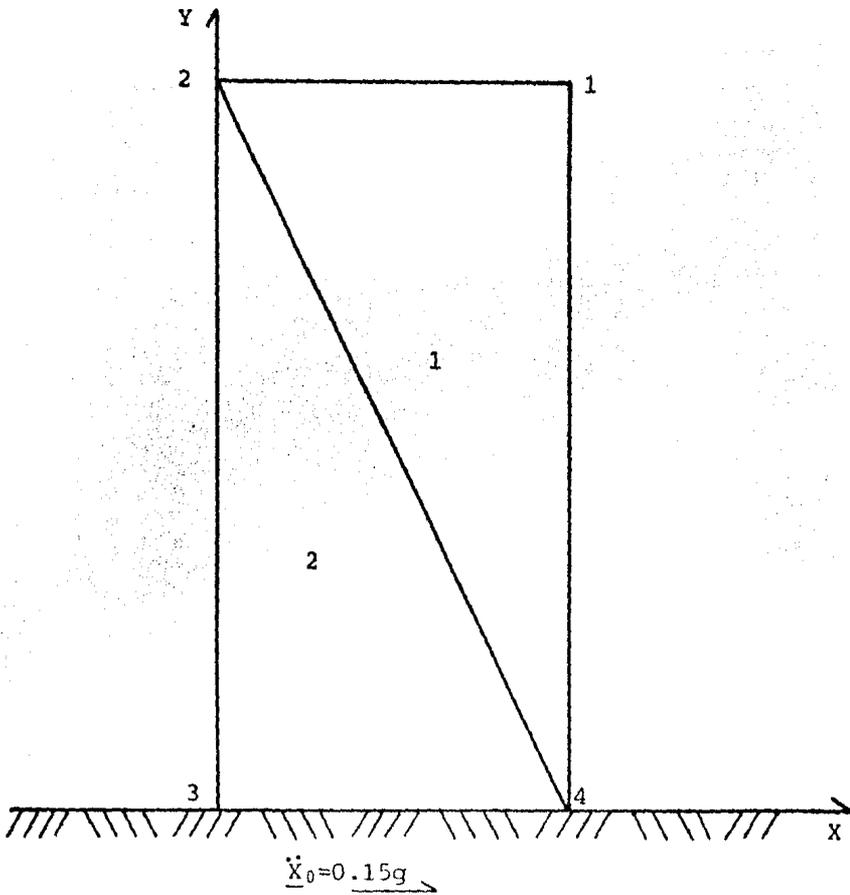
$$m_v = 0.02 \text{ m}^2/\text{T} \quad ; \quad E = 50.0 \text{ T/m}^2$$

$$v = 0.30 \quad ; \quad \gamma = 1.60 \text{ T/m}^3$$

$$\rho = \frac{\gamma}{g} \quad ; \quad \ddot{X}_0 = 0.15g$$

$$\text{Para } t = 0.0 \quad : \quad \underline{\delta}_0 = 0.0$$

$$\underline{\dot{\delta}}_0 = 0.0$$



Analizemos el primer elemento, ( 1,2,4 )  $\odot$ .

$$2\Delta_1 = 200.0 \text{ m}^2 \quad , \quad \Delta_1 = 100.0 \text{ m}^2$$

$$a_i = -200.0 \quad a_j = -200.0 \quad a_m = 200.0$$

$$b_i = -200.0 \quad b_j = -20.0 \quad b_m = 0.0$$

$$c_i = 10.0 \quad c_m = 0.0 \quad c_m = -10.0$$

$$\underline{B}_1^e = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.0 & -0.10 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.05 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.05 \\ 0.05 & 0.10 & 0.0 & -0.10 & -0.05 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 54.9451 & 16.4835 & 0.0 \\ 16.4835 & 54.9451 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 19.2308 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}^e = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B}^e t \Delta$$

$$\underline{K}_1^e = \begin{bmatrix} \delta X_1 & \delta Y_1 & \delta X_2 & \delta Y_2 & \delta X_3 & \delta Y_3 \\ 59.7528 & 17.8572 & -54.9451 & -9.6154 & -4.8077 & -8.2418 & \delta X_1 \\ 17.8572 & 32.9671 & -8.2418 & -19.2308 & -9.6154 & -13.7363 & \delta Y_1 \\ -54.9451 & -8.2418 & 54.9451 & 0.0 & 0.0 & 8.2418 & \delta X_2 \\ -9.6154 & -19.2308 & 0.0 & 19.2308 & 9.6154 & 0.0 & \delta Y_2 \\ -4.8077 & -9.6154 & 0.0 & 9.6154 & 4.8077 & 0.0 & \delta X_3 \\ -8.2418 & -13.7363 & 8.2418 & 0.0 & 0.0 & 13.7363 & \delta Y_3 \end{bmatrix}$$

Analicemos el segundo elemento ( 2,3,4 ) (+.

$$2\Delta_2 = 200.0 \text{ m}^2$$

$$\Delta_2 = 100.0 \text{ m}^2$$

$$a_i = 0.0$$

$$a_j = -200.0$$

$$a_m = 0.0$$

$$b_i = 0.0$$

$$b_j = -20.0$$

$$b_m = 20.0$$

$$c_i = 10.0$$

$$c_j = -10.0$$

$$c_m = 0.0$$

$$\underline{B}_2^e = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & -0.10 & 0.0 & 0.10 & 0.0 \\ 0.0 & 0.05 & 0.0 & -0.05 & 0.0 & 0.0 \\ 0.05 & 0.0 & -0.05 & -0.10 & 0.0 & 0.10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_2^e = \begin{bmatrix} \delta X_2 & \delta Y_2 & \delta X_3 & \delta Y_3 & \delta X_4 & \delta Y_4 \\ 4.8077 & 0.0 & -4.8077 & -9.6154 & 0.0 & 9.6154 & \delta X_2 \\ 0.0 & 13.7363 & -8.2418 & -13.7363 & 8.2418 & 0.0 & \delta Y_2 \\ -4.8077 & -8.2418 & 59.7528 & 17.8572 & -54.9451 & -9.6154 & \delta X_3 \\ -9.6154 & -13.7363 & 17.8572 & 32.9671 & -8.2418 & -19.2308 & \delta Y_3 \\ 0.0 & 8.2418 & -54.9451 & -8.2418 & 54.9451 & 0.0 & \delta X_4 \\ 9.6154 & 0.0 & -9.6154 & -19.2308 & 0.0 & 19.2308 & \delta Y_4 \end{bmatrix}$$

Acoplando las matrices de rigidez de los elementos 1 y 2, únicamente para los desplazamientos horizontales, esto es en el sentido x, dado que para este problema en particular despreciaremos los desplazamientos verticales por ser poco significativos, con lo cual la matriz de rigidez global que obtenemos es:

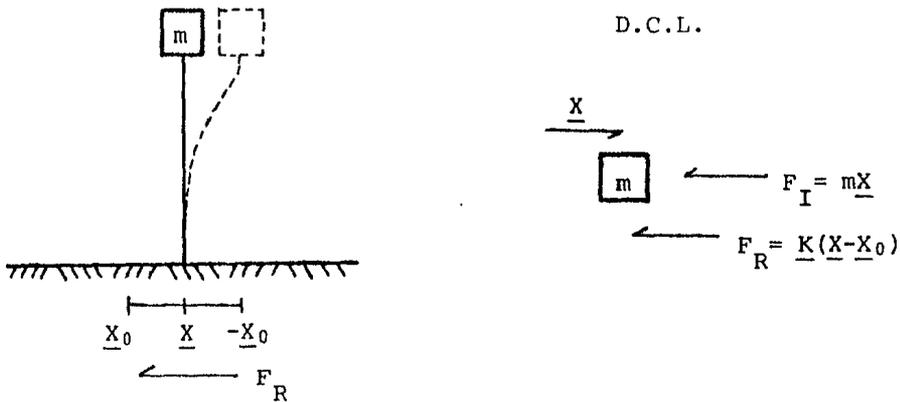
$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ 59.7528 & -54.9451 & -4.8077 & 0.0 \\ -54.9451 & 59.7528 & -4.8077 & 0.0 \\ -4.8077 & -4.8077 & 64.5605 & -54.9451 \\ 0.0 & 0.0 & -54.9451 & 54.9451 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \\ \delta X_3 \\ \delta X_4 \end{matrix}$$

Hasta este paso tenemos lo mismo que en el caso estático, ahora aplicando la ecuación II.20. y despreciando el amortiguamiento tenemos lo siguiente:

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{M} \ddot{\underline{\delta}} = \underline{R} \quad \dots \text{II.20'}$$

De esta ecuación solo conocemos la matriz de rigidez del elemento.

Una forma similar de obtener la ecuación anterior es la siguiente; tenemos una masa como la que se muestra en la figura, al terreno le aplicamos una fuerza  $\underline{F}_R$ , en el diagrama de cuerpo libre de la figura observamos las fuerzas que en ella actúan.



En el diagrama de cuerpo libre tenemos las siguientes componentes:

La fuerza  $\underline{F}_R$  aplicada que es igual a la constante  $K$  del resorte por el desplazamiento de la masa.

La respuesta  $\ddot{\underline{X}}$  de la masa, dada por una aceleración de la misma y en sentido opuesto a la fuerza aplicada.

Por último aparece una fuerza  $\underline{F}_I$  de inercia, dada por la mul-

tiplicación de la masa por la aceleración del cuerpo.

Ahora bien por equilibrio de fuerzas nos resulta:

$$\underline{F}_R + \underline{F}_I = 0.0$$

$$\underline{K}(\underline{X}-\underline{X}_0) + \underline{m}\ddot{\underline{X}} = 0.0$$

Por otro lado vemos que:

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + (\underline{X}-\underline{X}_0) \quad \text{y si llamamos; } \underline{\delta} = (\underline{X}-\underline{X}_0)$$

obtenemos:

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + \underline{\delta}$$

donde;  $\underline{X}$ : Vector de desplazamientos totales.

$\underline{X}_0$ : Vector de desplazamientos virtuales.

finalmente tenemos:

$$\underline{K}\underline{\delta} + \underline{m}\ddot{\underline{\delta}} = 0.0$$

Esto último está dado en forma teórica, pero en realidad tenemos otra fuerza aplicada en el cuerpo, debida a la masa por la aceleración del terreno y en sentido opuesto, por tal razón la expresión final resultante es:

$$\underline{K}\underline{\delta} + \underline{m}\ddot{\underline{\delta}} = -\underline{m}\ddot{\underline{X}}_0$$

la expresión para todo el conjunto será:

$$\underline{K}\underline{\delta} + \underline{M}\ddot{\underline{\delta}} = -\underline{M}\ddot{\underline{X}}_0 \quad \dots \text{ III.1.}$$

en donde;  $\underline{K}$ : Matriz de rigidez global del elemento.

$\underline{\delta}$ : Vector de desplazamientos nodales.

$\underline{M}$ : Matriz de masa concentrada.

$\ddot{\underline{X}}_0$ : Vector de aceleración del terreno.

De las ecuaciones II.20' y III.1. tenemos que los segundos miembros de ambas expresiones son equivalentes, y por tal razón decimos que las expresiones son similares; la ecuación III.1. es para el primer modo de vibrar, mientras que la ecuación II.20' está dada en forma gene-

ral , esto es incluye a los modos superiores de vibrar.

En la diagonal principal de la matriz de masa concentrada dada por los nodos del elemento finito, tenemos repartida en forma equitativa, la masa del elemento finito en estudio. La masa de el elemento que en este caso se trata de un triángulo la obtenemos con la siguiente expresión:

$$m = A\gamma x l$$

donde; A: Area del triángulo.

$\gamma$ ; Peso volumétrico del material.

$$m = 100.0 \times 1.6$$

$$m = 160.0 \text{ T}$$

Nota: La matriz de masa concentrada es una matriz diagonal, por lo cual sus elementos restantes son ceros.

Por equilibrio sabemos que a cada nodo le corresponde un tercio de la masa, esto es, nuestra matriz será de 3x3.

Obtenemos ahora la matriz de masa concentrada para ambos elementos:

$$\underline{M}_1^e = \begin{bmatrix} m/3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & m/3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & m/3 \end{bmatrix} ; \quad \underline{M}_1^e = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ 53.333 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 53.333 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 53.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{matrix}$$

$$\underline{M}_2^e = \begin{bmatrix} n_2 & n_3 & n_4 \\ 53.333 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 53.333 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 53.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{matrix}$$

Observamos que las matrices para ambos elementos son iguales, esto es debido a que el material es homogéneo e isótropo.

Para la obtención de la matriz de masa concentrada global, lo hacemos acoplando las matrices de los elementos, esto se hace de la misma forma que en la matriz de rigidez del elemento.

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ 53.333 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 106.667 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 106.667 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 53.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{matrix}$$

Dado que suponemos la base del bloque empotrada en el terreno, esto es, en esta zona ocurre un movimiento de cuerpo rígido, por tal razón solo tendremos dos desplazamientos virtuales, y en consecuencia solo tendremos desplazamientos nodales en los puntos 1 y 2, que por ser de sentido contrario a los virtuales son negativos. Por tal razón las matrices M y K se verán reducidas a un sistema de 2x2.

Ahora solo nos resta conocer el valor de los desplazamientos nodales, y para ello emplearemos dos métodos:

1.- Método de Newmark; formulado con las siguientes expresiones:

$$\delta_{-t+\Delta t} = \delta_{-t} + \Delta t \dot{\delta}_{-t} + (\Delta t)^2 \left[ \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{\delta}_{-t} + \beta \ddot{\delta}_{-t+\Delta t} \right] \quad \dots \text{II.25.}$$

$$\dot{\delta}_{-t+\Delta t} = \dot{\delta}_{-t} + \Delta t \left[ (1-\gamma) \ddot{\delta}_{-t} + \gamma \ddot{\delta}_{-t+\Delta t} \right] \quad \dots \text{II.26.}$$

$$\left[ \underline{K} + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \underline{M} \right] \delta_{-t+\Delta t} = -\underline{M} \ddot{X}_0 + \underline{M} \left[ \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \delta_{-t} + \frac{1}{\beta(\Delta t)} \dot{\delta}_{-t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\delta}_{-t} \right] \quad \dots \text{II.27.}$$

Para conocer los desplazamientos nodales, resolvemos el sistema anterior, considerando un  $t=0.0$  inicialmente, donde  $\Delta t=0.1s$ ,  $g=10.0m/s^2$ ,  $\beta=0.25$  y  $\gamma=0.5$ ; por condiciones iniciales tenemos que tanto la velocidad como el desplazamiento para  $t=0.0$  son cero.

Sustituyendo las condiciones iniciales en la ecuación II.20', obtenemos la aceleración para  $t=0.0$ .

$$\underline{K} \underline{\delta}_0 + \underline{M} \ddot{\delta}_0 = -\underline{M} \ddot{X}_0 \quad \dots \text{II.20'}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53.333 & 0.0 & 0.1875 & 0.0 \\ 0.0 & 106.667 & 0.0 & 0.009375 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix} \quad (1.5) \quad \begin{matrix} \ddot{\delta}_1 = -1.50 \\ \ddot{\delta}_2 = -1.50 \end{matrix}$$

Sustituyendo valores en la ecuación II.27. resulta:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 4.6745 \times 10^5 & 6.0113 \times 10^8 \\ 6.0113 \times 10^8 & 2.3405 \times 10^5 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -80.0 & 53.333 & 0.0 \\ -160.0 & 0.0 & 106.007 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 400.0 \delta_{-t} + 40.0 \dot{\delta}_{-t} + \ddot{\delta}_{-t} \end{bmatrix} \right\}$$

Para el primer  $\Delta t$ .

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6745 \times 10^5 & 6.0113 \times 10^8 \\ 6.0113 \times 10^8 & 2.3405 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -80.0 - 80.0 \\ -160.0 - 160.0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \delta_{\Delta t,1} = -0.00750 \\ \delta_{\Delta t,2} = -0.00750 \end{array}$$

Sustituyendo los valores del desplazamiento en las ecuaciones II.25. y II.26.:

$$\begin{array}{l} -0.00750 = 0.01 \{ (0.25)(-1.5) + (0.25) \ddot{\delta}_{-t+\Delta t} \} \quad \ddot{\delta}_{\Delta t} = -1.50 \\ \dot{\delta}_{\Delta t} = 0.1 \{ (0.5)(-1.5) + (0.5)(-1.5) \} \quad \dot{\delta}_{\Delta t} = -0.15 \end{array}$$

Para  $2\Delta t$ .

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6745 \times 10^5 & 6.0113 \times 10^8 \\ 6.0113 \times 10^8 & 2.3405 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -80.0 - 160.0 - 32.0 & -80.0 \\ -160.0 - 320.0 - 64.0 & -160.0 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{2\Delta t,1} = -0.02999 \quad \delta_{2\Delta t,2} = -0.02999$$

de las ecuaciones II.25. y II.26.:

$$\begin{array}{l} -0.02999 = -0.00750 + (-0.015) + (0.01) \{ (0.25)(-1.5) + (0.25) \ddot{\delta}_{-t+\Delta t} \} \quad \ddot{\delta}_{2\Delta t} = -1.4960 \\ \dot{\delta}_{2\Delta t} = -0.15 + (0.1) \{ (0.5)(-1.5 - 1.4960) \} \quad \dot{\delta}_{2\Delta t} = -0.29980 \end{array}$$

Para  $3\Delta t$ .

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6745 \times 10^5 & 6.0113 \times 10^8 \\ 6.0113 \times 10^8 & 2.3405 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -80.0 & -639.78267 & -639.56934 & -79.78617 \\ -160.0 & -1279.57733 & -1279.15066 & -159.57383 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{3\Delta t,1} = -0.06745$$

$$\delta_{3\Delta t,2} = -0.06745$$

de las ecuaciones II.25. y II.26.:

$$-0.06745 = -0.02999 + (-0.02998) + (0.01)[(0.25)(-1.49) + (0.25)\ddot{\delta}_{t+\Delta t}]$$

$$\ddot{\delta}_{3\Delta t} = -1.4960$$

$$\dot{\delta}_{3\Delta t} = -0.29980 + (0.1)[(0.5)(-1.5-1.4960)]$$

$$\dot{\delta}_{3\Delta t} = -0.44960$$

Para 4Δt.

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6745 \times 10^{-5} & 6.0113 \times 10^{-8} \\ 6.0113 \times 10^{-8} & 2.3405 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -80.0-1438.92434 & -959.14067 & -79.78617 \\ -160.0-2877.84868 & -1918.29933 & -159.57234 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{4\Delta t,1} = -0.11987$$

$$\delta_{4\Delta t,2} = -0.11989$$

de II.25. y II.26. para los nodos 1 y 2 tenemos respectivamente:

$$\ddot{\delta}_{4\Delta t,1} = -1.4880$$

$$\ddot{\delta}_{4\Delta t,2} = -1.4960$$

$$\dot{\delta}_{4\Delta t,1} = -0.59880$$

$$\dot{\delta}_{4\Delta t,2} = -0.59920$$

Para 5Δt.

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6745 \times 10^{-5} & 6.0113 \times 10^{-8} \\ 6.0113 \times 10^{-8} & 2.3405 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -80.0-2557.21068 & -1277.43202 & -79.35950 \\ -160.0-5115.32265 & -2556.59466 & -159.57383 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{5\Delta t,1} = -0.18718$$

$$\delta_{5\Delta t,2} = -0.18728$$

de II.25. y II.26. tenemos:

$$\ddot{\delta}_{5\Delta t,1} = -1.4840$$

$$\ddot{\delta}_{5\Delta t,2} = -1.4920$$

$$\dot{\delta}_{5\Delta t,1} = -0.74740$$

$$\dot{\delta}_{5\Delta t,2} = -0.7486$$

Para  $6\Delta t$ .

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6745 \times 10^5 & 6.0113 \times 10^8 \\ 6.0113 \times 10^8 & 2.3405 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -80.0-3993.14838-1594.44337 & -79.14617 \\ -160.0-7990.63830-3194.03665 & -159.14716 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{6\Delta t,1} = -0.26932$$

$$\delta_{6\Delta t,2} = -0.26959$$

2.- Método de diferencias centrales; dado por las siguientes expresiones:

$$\dot{\delta}_t = \frac{1}{2(\Delta t)} [\delta_{-t+\Delta t} - \delta_{t+\Delta t}] \quad \dots \text{II.21.}$$

$$\ddot{\delta}_t = \frac{1}{(\Delta t)^2} [\delta_{-t+\Delta t} - 2\delta_t + \delta_{t-\Delta t}] \quad \dots \text{II.22.}$$

$$\underline{M} \dot{\delta}_{-t+\Delta t} = (\Delta t)^2 (-\underline{M} \ddot{X}_0) - [(\Delta t)^2 \underline{K} - 2\underline{M}] \delta_t - \underline{M} \delta_{-t-\Delta t} \quad \dots \text{II.23.}$$

$$\delta_{-t-\Delta t} = \delta_0 - (\Delta t) \dot{\delta}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\delta}_0 \quad \dots \text{II.24.}$$

Resolvemos el sistema anterior, considerando un  $t = -\Delta t$  inicialmente, donde  $\Delta t = 0.1$  s,  $g = 10.0$  m/s<sup>2</sup>,  $\delta_0 = 0.0$  y  $\dot{\delta}_0 = 0.0$ .

Sustituyendo las condiciones iniciales en la ecuación II.20' resulta:

$$\delta_{-\Delta t,1} = -1.50$$

$$\delta_{-\Delta t,2} = -1.50$$

Reemplazando el valor de la aceleración en la ecuación II.24.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{bmatrix}_{-\Delta t} = \begin{bmatrix} -1.50 \\ -1.50 \end{bmatrix} (0.0050) \quad \begin{matrix} \ddot{\delta}_{-\Delta t} = -0.00750 \\ \ddot{\delta}_{-\Delta t} = -0.00750 \end{matrix}$$

Con estos valores iniciamos los cálculos, empleando la ecuación II.23.

Dado que solo nos interesan los desplazamientos de la masa de suelo, no calcularemos las velocidades y aceleraciones del mismo.

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \left\{ \begin{bmatrix} 0.01875 & 0.0 \\ 0.0 & 0.009375 \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} -0.80 \\ -1.60 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.597528 & -0.549451 \\ -0.549451 & 0.597528 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}_t \right\} \\ + \left\{ \begin{bmatrix} 106.667 & 0.0 \\ 0.0 & 213.334 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}_t - \begin{bmatrix} 53.333 & 0.0 \\ 0.0 & 106.667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}_{t+\Delta t} \right\}$$

Para el primer  $\Delta t$ ,  $t=0.0$ .

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01875 & 0.0 \\ 0.0 & 0.009375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.80+0.40 \\ -1.60+0.80 \end{bmatrix} \quad \delta_{\Delta t,1} = -0.00750 \\ \delta_{\Delta t,2} = -0.00750$$

Para  $2\Delta t$ ,  $t=\Delta t$ .

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01875 & 0.0 \\ 0.0 & 0.009375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.80+0.00036-0.80 \\ -1.60+0.00036-1.60001 \end{bmatrix} \quad \delta_{2\Delta t,1} = -0.02999 \\ \delta_{2\Delta t,2} = -0.030$$

Para  $3\Delta t$ .

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01875 & 0.0 \\ 0.0 & 0.009375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.80+0.00144-3.19894+0.40 \\ -1.60+0.00145-6.40002+0.80 \end{bmatrix} \\ \delta_{3\Delta t,1} = -0.06745 \quad \delta_{3\Delta t,2} = -0.06749$$

Para  $4\Delta t$ .

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01875 & 0.0 \\ 0.0 & 0.009375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.80+0.00322 - 7.19469+1.59946 \\ -1.60+0.00327-14.39791+3.20001 \end{bmatrix} \\ \delta_{4\Delta t,1} = -0.11985 \quad \delta_{4\Delta t,2} = -0.11995$$

Para  $5\Delta t$ .

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01875 & 0.0 \\ 0.0 & 0.009375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.80+0.00571-12.78404+3.59731 \\ -1.60+0.00582-25.58941+7.19896 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{5\Delta t,1} = -0.18714$$

$$\delta_{5\Delta t,2} = -0.18736$$

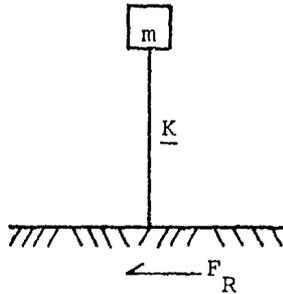
Para  $6\Delta t$ .

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01875 & 0.0 \\ 0.0 & 0.009375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.80+0.00888-19.96166 +6.39196 \\ -1.60+0.00913-39.97026+12.79471 \end{bmatrix}$$

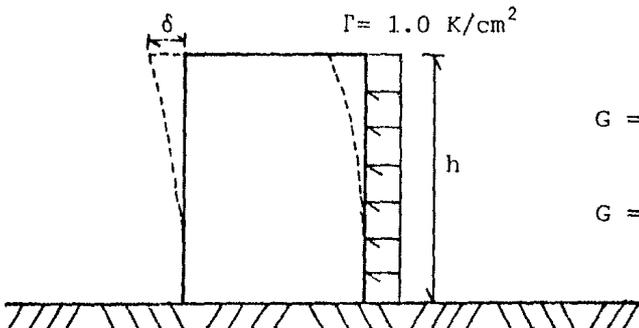
$$\delta_{6\Delta t,1} = -0.26927$$

$$\delta_{6\Delta t,2} = -0.26969$$

Resolvamos este mismo ejemplo pero ahora consideremos a el bloque de suelo como si fuera una masa concentrada y tomemos una rigidez equivalente, tal como se muestra en la figura; comparemos el resultado aquí obtenido con el logrado utilizando la discretización del bloque.



Para obtener  $\delta$  y  $K$  hacemos lo siguiente:



$$G = \frac{E}{2(1+n)}$$

$$G = \frac{500.0}{2(1+0.3)}$$

$$G = 192.30769 \text{ K/cm}^2$$

$$\gamma = \frac{1}{G} \Gamma$$

$$\gamma = \frac{1.0}{192.37769}$$

$$\gamma = 0.00520$$

$$\delta = \frac{1}{2} \gamma h$$

$$\delta = \frac{1}{2} (0.00520) (20.0)$$

$$\delta = 0.0520 \text{ m}$$

$$F = \Gamma A$$

$$F = (1.0) (20.0) (1.0)$$

$$F = 20.0 \text{ k}$$

$$K = \frac{F}{\delta}$$

$$K = \frac{20.0}{0.0520}$$

$$K = 0.38462 \text{ k/m}$$

Tomaremos la mitad de la masa del bloque.

Por el método de Newmark tenemos:

$$\ddot{\delta}_0 = (-53.333) (0.01875) (1.50)$$

$$\ddot{\delta}_0 = -1.50$$

Para el primer  $\Delta t$ .

$$\delta_{\Delta t} = -0.00750$$

$$\dot{\delta}_{\Delta t} = -0.150$$

$$\ddot{\delta}_{\Delta t} = -1.50$$

Para  $2\Delta t$ .

$$\delta_{2\Delta t} = -0.030$$

$$\dot{\delta}_{2\Delta t} = -0.30$$

$$\ddot{\delta}_{2\Delta t} = -1.50$$

Para  $3\Delta t$ .

$$\delta_{3\Delta t} = -0.06750$$

$$\dot{\delta}_{3\Delta t} = -0.450$$

$$\ddot{\delta}_{3\Delta t} = -1.50$$

Para  $4\Delta t$ .

$$\delta_{4\Delta t} = -0.120$$

$$\dot{\delta}_{4\Delta t} = -0.60$$

$$\ddot{\delta}_{4\Delta t} = -1.50$$

Para  $5\Delta t$ .

$$\delta_{5\Delta t} = -0.18750$$

$$\dot{\delta}_{5\Delta t} = -0.750$$

$$\ddot{\delta}_{5\Delta t} = -1.50$$

Para  $6\Delta t$ .

$$\delta_{6\Delta t} = -0.270$$

Por el método de diferencias centrales resulta:

$$\ddot{\delta}_0 = (-53.333)(0.01875)(1.50)$$

$$\ddot{\delta}_0 = -1.50$$

Para el primer  $t = -\Delta t$  resulta:

$$\delta_{-\Delta t} = \frac{0.01}{2}(1.50)$$

$$\delta_{-\Delta t} = -0.00750$$

Para el primer  $\Delta t$ :

$$\delta_{\Delta t} = -0.00750$$

Para  $2\Delta t$ :

$$\delta_{\Delta t} = -0.030$$

Para  $3\Delta t$ :

$$\delta_{\Delta t} = -0.06750$$

Para  $4\Delta t$ :

$$\delta_{\Delta t} = -0.120$$

Para  $5\Delta t$ :

$$\delta_{\Delta t} = -0.18750$$

Para  $6\Delta t$ :

$$\delta_{\Delta t} = -0.270$$

Comparando para ambos casos, y para los dos métodos empleados, los resultados obtenidos son practicamente los mismos; solo podemos mencionar que al considerar la masa concentrada, los dos métodos utilizados no varían en absoluto.

## V. CONCLUSIONES.

\*\*\*\*\*

La finalidad de este trabajo es, el presentar los fundamentos teóricos del Método del Elemento Finito, para su mejor comprensión en la solución de problemas prácticos.

Aquí tratamos con tres casos; 1.- Caso estático en medios homogéneos, 2.- Caso estático en medios heterogéneos y anisótropos, y 3.- Caso dinámico en medios homogéneos: En cada uno de ellos, presentamos las bases teóricas y el desarrollo de las ecuaciones que son empleadas, de la misma forma se realizan ejemplos sencillos, que permiten el manejo de las expresiones, logrando con ello una mejor visualización del fenómeno en estudio.

Así hacemos uso del concepto de trabajo virtual, que consiste en dar un desplazamiento virtual a un nodo, con lo cual obtenemos las relaciones o fuerzas externas que en este nodo actúan, logrando de esta forma establecer el equilibrio, una vez realizado esto, podemos desprestigiar el desplazamiento virtual inducido, en la iniciación de los cálculos de las deformaciones del elemento.

Por medio de la teoría de la elasticidad, llegamos al concepto de trabajo específico de deformación cuando la carga es aplicada gradualmente: así como también llegamos a la demostración de la matriz de rigidez elástica para un estado de esfuerzo plano.

El vector de los parámetros de las fuerzas nodales, se obtiene por equilibrio estático de las diferentes acciones que intervienen, si el sistema es hiperestático, hacemos uso del concepto de trabajo virtual.

La matriz de transformación se requiere para medios heterogéneos y anisótropos, esta matriz nos transfiere las propiedades de cada elemento finito a un eje común, con lo cual podemos determinar la matriz de rigidez elástica de cada elemento y referirla a los ejes principales.

Cabe aclarar que para el caso estático, despreciamos las deformaciones por cambios de temperatura

Para la solución de problemas dinámicos, hacemos uso de métodos numéricos de aproximación; la fuerza dinámica es incorporada como si se tratara de una fuerza másica, esto es se incorpora dentro de la matriz de masa consistente. Uno de los métodos numéricos utilizados es el método de las diferencias centrales, el cual se basa en las series de aproximación de Taylor. El método de Newmark se basa en considerar una variación lineal de la aceleración, manteniendo invariables las propiedades del sistema; para determinar la variación de la velocidad simplemente integramos la función de la aceleración, con lo cual obtenemos una variación cuadrática de la velocidad; para los desplazamientos realizamos la integración de la relación de velocidad ya obtenida, resultándonos una variación cúbica de los desplazamientos. Para acelerar la convergencia del método, Newmark utiliza los parámetros  $\gamma$  y  $\beta$ , estos parámetros realizan la labor de un catalizador en los procesos químicos, por otro lado los parámetros pueden cambiar su valor dependiendo del tipo de problema en estudio.

El trabajo manual en la solución de problemas por medio de elemento finito es exorbitante, por tal razón se requiere de la utilización de una computadora que realice todos los cálculos, quedándole únicamente al Ingeniero la interpretación de los resultados arrojados.

En los ejemplos realizados, vemos claramente que los resultados obtenidos sí representan el comportamiento del cuerpo en estudio bajo las condiciones de carga a las cuales se sometieron.

En los los ejemplos para medios heterogéneos y anisótropos, se observa claramente como varían los resultados al cambiar las propiedades del material.

Para el ejemplo del caso dinámico, se simuló una fuerza unidireccional, además de desprejarse el amortiguamiento y considerar un grado de libertad; la extensión a trabajar con un sismo real, incluir el amortiguamiento y agregar los grados superiores de vibración, no implica mayor problema, dado que ya se tiene comprendido el fenómeno físico y solo restaría la adición de nuevas consideraciones.

Finalmente podemos decir que el Método del Elemento Finito es un instrumento muy eficaz, dada su buena aproximación, ya que comparando lo con los métodos tradicionales, tiene la ventaja de poder trabajar en medios de estratigrafía irregular.

A.I. APENDICE UNO: NOTACION SUBINDICE.

\*\*\*\*\*

Por medio del enfoque tensorial tenemos las siguientes consideraciones;

- 1) Si en cualquier término de una expresión aparece repetido dos veces un sub-índice, entonces existe suma sobre dicho sub-índice.
- 2) Ningun sub-índice debe aparecer más de dos veces en el mismo término.
- 3) Toda ecuación debe de estar balanceada, esto es, todo sub-índice que aparece una sola vez en uno de los miembros ( sub-índice libre ) debe aparecer en el otro miembro. Se llama sub-índice mudo a aquel que aparece repetido dos veces en el mismo término.

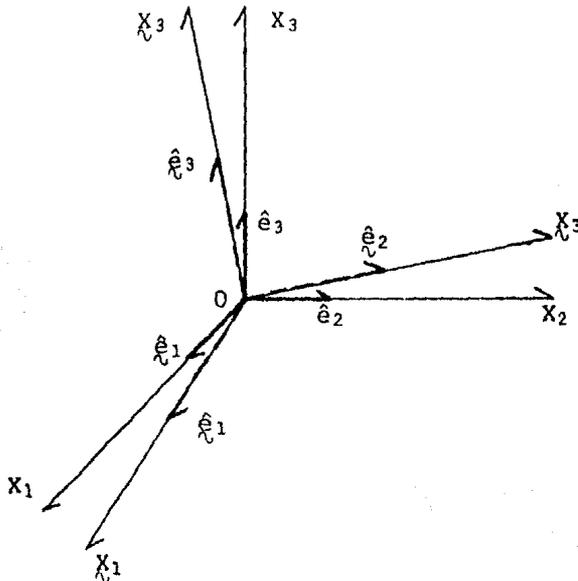
De ello:

$$\underline{a} = a_{11} \hat{e}_1 + a_{22} \hat{e}_2 + a_{33} \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{e}_i$$

o lo que es lo mismo en notación sub-índice:

$$\underline{a} = a_i \hat{e}_i$$

Considerece un sistema coordenado cartesiano rectangular derecho y vectores  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  y  $\hat{e}_3$  formando una nueva base.



El nuevo sistema se define a partir de una rotación de cuerpo rígido alrededor de el punto 0.

Sea  $\underline{a}$  un vector con componentes  $a_i$  respecto de la base  $\{ \hat{e}_i \}$ , y componentes  $\hat{a}_i$  respecto de la nueva base  $\{ \hat{\kappa}_i \}$ ; en consecuencia:

$$\underline{a} = a_i \hat{e}_i \quad ; \quad \underline{a} = \hat{a}_i \hat{\kappa}_i \quad \dots \text{A.I.1.}$$

Ahora construyamos una matriz  $\underline{M} = M_{ij}$  de tal modo que:

$$\underline{M}_{ij} = \cos \chi( \hat{\kappa}_i, \hat{e}_j )$$

donde:

$\chi( \hat{\kappa}_i, \hat{e}_j )$  es el ángulo entre los vectores  $\hat{\kappa}_i$  y  $\hat{e}_j$ .

por lo tanto:

$$M_{ij} = \hat{\kappa}_i \cdot \hat{e}_j = \left| \hat{\kappa}_i \right| \left| \hat{e}_j \right| \cos \chi( \hat{\kappa}_i, \hat{e}_j )$$

Podemos entonces decir que la matriz  $\underline{M}$  es la matriz de los cosenos directores de los vectores de la base.

Nota: Todos los sub-índices representan números naturales menores o iguales a tres.

Así pues:

$$\hat{\kappa}_i = M_{ij} \hat{e}_j \quad \dots \text{A.I.2.}$$

por otra parte:

$$\hat{\kappa}_i \cdot \hat{\kappa}_j = \delta_{ij} \quad \dots \text{A.I.3.}$$

y tambien:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad \dots \text{A.I.4.}$$

donde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1.0 & , i=j \\ 0.0 & , i \neq j \end{cases}$$

de A.I.2., A.I.3. y A.I.4. resulta:

$$\hat{\epsilon}_i \cdot \hat{\epsilon}_j = M_{ip} \hat{\epsilon}_p \cdot M_{iq} \hat{\epsilon}_q = M_{ip} M_{iq} \hat{\epsilon}_p \cdot \hat{\epsilon}_q$$

dado que:

$M_{ip}$ ,  $M_{iq}$  pertenecen a los números reales.

pero:

$$\hat{\epsilon}_p \cdot \hat{\epsilon}_q = \delta_{pq}$$

luego entonces:

$$\hat{\epsilon}_i \cdot \hat{\epsilon}_j = M_{ip} M_{jq} \delta_{pq} = M_{ip} M_{jq} \delta_{qp}$$

pero:

$$M_{jq} \delta_{qp} = M_{jp}$$

por lo cual:

$$\hat{\epsilon}_i \cdot \hat{\epsilon}_j = M_{ip} M_{jp}$$

así:

$$M_{ip} M_{jp} = \delta_{ij}$$

pero tambien:

$$M_{ip} M_{pj}^T = \delta_{ij}$$

dado que  $\underline{M}$  es ortogonal.

En notación vectorial esto puede escribirse como:

$$\underline{M} \underline{M}^T = \underline{I} \quad \dots \text{A.I.5.}$$

Dado que  $\underline{M}$  es una matriz ortogonal; el determinante de  $\underline{M}$  resulta ser uno, y por lo tanto,  $\underline{M}$  es una matriz propia, de la ecuación A. I.2.:

$$M_{ki}^T \hat{\epsilon}_i = M_{ki}^T M_{ij} \hat{\epsilon}_j$$

pero:

$$M_{ki}^T M_{ij} = \delta_{kj}$$

así:

$$M_{ik} \hat{e}_i = \delta_{kj} \hat{e}_i$$

$$M_{ik} \hat{e}_i = \hat{e}_k$$

por esto:

$$\hat{e}_j = M_{ij} \hat{e}_i$$

o tambien:

$$\hat{e}_i = M_{ji} \hat{e}_j \quad \dots \text{A.I.6.}$$

por lo que se concluye que:

$$M_{ij}^T = M_{ji}$$

de las ecuaciones A.I.1. y A.I.6.:

$$a_i \hat{e}_i = a_i \hat{e}_i = a_i M_{ji} \hat{e}_j$$

por lo tanto:

$$\underline{a} = \hat{a}_j \hat{e}_j$$

$$\underline{a} = a_i M_{ji} \hat{e}_j \quad \dots \text{A.I.7.}$$

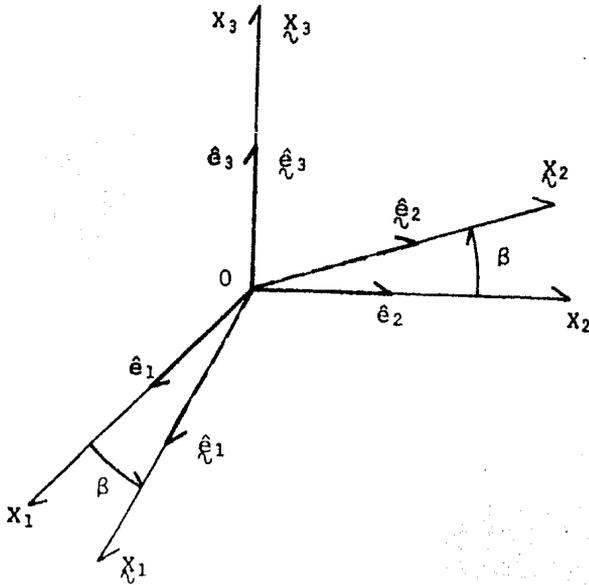
Como las componentes de un vector a con respecto a una base son únicas, se tiene:

$$\hat{a}_j = M_{ji} a_i$$

así mismo:

$$\hat{a}_i = M_{ij} a_j \quad \dots \text{A.I.8.}$$

Para el caso particular de una rotación alrededor de el eje  $X_3$ :



de aquí obtenemos lo siguiente:

$$M_{ij} = \cos \gamma (\hat{e}_i, \hat{e}_j)$$

haciendolo extensivo a cada elemento:

$$M_{11} = \cos \beta$$

$$M_{12} = \cos \left[ \frac{\pi}{2} - \beta \right] = \text{sen } \beta$$

$$M_{13} = \cos \frac{\pi}{2} = 0.0$$

$$M_{21} = \cos \left[ \frac{\pi}{2} + \beta \right] = - \text{sen } \beta$$

$$M_{22} = \cos \beta$$

$$M_{23} = \cos \frac{\pi}{2} = 0.0$$

$$M_{31} = \cos \frac{\pi}{2} = 0.0$$

$$M_{32} = \cos \frac{\pi}{2} = 0.0$$

$$M_{33} = \cos 0.0 = 1.0$$

con estos valores construimos la matriz:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\text{sen } \beta & 0.0 \\ \text{sen } \beta & \cos \beta & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

El producto diádico de dos vectores  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$ , denotado por  $\underline{a} \otimes \underline{b}$  tiene las siguientes propiedades:

$$1) (\alpha \underline{a}) \otimes \underline{b} = \underline{a} \otimes (\alpha \underline{b}) = \alpha (\underline{a} \otimes \underline{b})$$

$$2) \underline{a} \otimes (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} \otimes \underline{b}) + (\underline{a} \otimes \underline{c})$$

donde  $\alpha$  es un escalar.

En términos de las componentes de  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$ ,  $\underline{a} \otimes \underline{b}$  puede escribirse como:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = a_i \hat{e}_i \otimes b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j \quad \dots \text{A.I.9.}$$

en general:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \neq \underline{b} \otimes \underline{a}$$

A los productos diádicos  $\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$  se le llama diadas unitarias.

Se define un tensor cartesiano de segundo orden con una combinación lineal de las diadas unitarias, por consiguiente:

$$\underline{A} = A_{ij} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j \quad \dots \text{A.I.10.}$$

donde  $\underline{A}$  es un tensor cartesiano de segundo orden, y  $A_{ij}$  son sus componentes. De la ecuación A.I.10. se observa que las componentes de un tensor dependen de las diadas unitarias, y en consecuencia de los vectores de la base.

Supóngase que el tensor  $\underline{A}$  tiene componentes  $A_{ij}$  en el sistema  $\hat{e}_i$ , y componentes  $A_{ij}$  en el sistema  $\hat{e}_i$  con lo que:

$$\underline{A} = A_{ij} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j = A_{ij} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j \quad \dots \text{A.I.11.}$$

pero:

$$\hat{e}_i = M_{pi} \hat{e}_p$$

$$\hat{e}_j = M_{qj} \hat{e}_q$$

luego entonces:

$$A_{ij} M_{pi} \hat{e}_p \otimes M_{qj} \hat{e}_q = A_{ij} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$$

$$M_{pi} M_{qj} A_{ij} \hat{e}_p \otimes \hat{e}_q = A_{ij} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$$

cambiando i por p y j por q en el segundo miembro:

$$M_{pi} M_{qj} A_{ij} \hat{e}_p \otimes \hat{e}_q = A_{pq} \hat{e}_p \otimes \hat{e}_q$$

dado que las componentes de un tensor con respecto a una base son únicas:

$$A_{pq} = M_{pi} M_{qj} A_{ij} \quad \dots \text{A.I.12.}$$

Sea  $E$  un tensor cartesiano de segundo orden, tal que:

$$\underline{E} = \epsilon_{ij} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$$

de modo que:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Siendo  $\underline{E}$  el tensor deformación; para el caso de deformación plana tenemos:

$$\epsilon_{ij} = 0.0 \quad \text{si } i=3 \text{ o } j=3$$

Aplicando la transformación definida por:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\text{sen } \beta & 0.0 \\ \text{sen } \beta & \cos \beta & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

si aplicamos esto último al tensor  $\underline{E}$  resulta:

$$\epsilon_{pq} = M_{pi} M_{qj} \epsilon_{ij}$$

$$\epsilon_{pq} = M_{pi} \epsilon_{ij} M_{qj}$$

$$\epsilon_{pq} = M_{pi} \epsilon_{ij} M_{jq}^T$$

lo que en notación matricial equivale a:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{M}}^T$$

es decir:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\text{sen } \beta & 0.0 \\ \text{sen } \beta & \cos \beta & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0.0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \text{sen } \beta & 0.0 \\ -\text{sen } \beta & \cos \beta & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

desarrollando:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \cos^2 \beta + \epsilon_{22} \text{sen}^2 \beta + 2 \text{sen} \beta \cos \beta & -\epsilon_{11} \text{sen} \beta \cos \beta + & \\ -\epsilon_{11} \text{sen} \beta \cos \beta + \epsilon_{22} \text{sen} \beta \cos \beta + \epsilon_{12} (\cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta) & \epsilon_{11} \text{sen} \beta + \epsilon_{22} \cos \beta - & \\ & 0.0 & 0.0 \\ & + \epsilon_{22} \text{sen} \beta \cos \beta + \epsilon_{12} (\cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta) & 0.0 \\ & -\epsilon_{12} 2 \text{sen} \beta \cos \beta & 0.0 \\ & & 0.0 \end{bmatrix}$$

por otro lado sabemos que:

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$$

y cambiando:

$\epsilon_x$  por  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_y$  por  $\epsilon_{22}$  y  $\gamma_{xy}$  por  $\epsilon_{12}$  resulta:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \text{sen}^2 \beta & 2 \text{sen} \beta \cos \beta \\ \text{sen}^2 \beta & \cos^2 \beta & -2 \text{sen} \beta \cos \beta \\ -\text{sen} \beta \cos \beta & \text{sen} \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Ahora bien si al ángulo considerado se le cambia el signo el sistema se verá afectado, esto es girará en sentido opuesto ↻.

Y finalmente obtendremos:

$$\underline{\underline{\epsilon}}_0' = \underline{\underline{T}} \underline{\underline{\epsilon}}_0 \quad \text{que tambien se escribe:} \quad \underline{\underline{\epsilon}}_0 = \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{\epsilon}}_0'$$

A.II. APENDICE DOS. PROGRAMA PARA EL CASO ESTATICO.  
\*\*\*\*\*

El siguiente programa para la HP 41 CV, se encuentra dividido en dos paquetes; este programa es una ayuda en la solución de problemas sencillos, en los cuales se utiliza el Método del Elemento Finito.

El primer paquete contiene los siguientes sub-programas.

- LBL MTX-BN     Matriz de función de forma de deformaciones.
- LBL MTX-D     Matriz de rigidez elástica.
- LBL MTX-TNF   Matriz de transformación.
- LBL MTX-dN    Matriz de rigidez elástica, caso no homogéneo.
- LBL MTX-DN    Matriz de rigidez elástica en los ejes principales.

El segundo paquete nos proporciona la matriz de rigidez para cada elemento ( LBL MTX-K ); el acoplamiento de las matrices de cada elemento, nos lleva a la obtención de la matriz de rigidez global, el acoplamiento se hará en forma manual, así como también la solución del sistema matricial (  $K\delta=f$  ), del cual obtenemos las deformaciones en cada nudo de la red.

Para el llamado de cualquier sub-programa, sólo basta ejecutar lo siguiente en el teclado de la calculadora:

XEQ ALFA ( sub-programa deseado ).

Nota: Para el grabado de cualquiera de los dos paquetes, se requieren de 11 tarjetas magnéticas de programación.

A continuación proporcionaremos los listados de ambos paquetes, el primer paquete que contiene 5 sub-programas se encuentra condensado.

Listado de el primer paquete:

- |     |            |     |        |     |        |
|-----|------------|-----|--------|-----|--------|
| 001 | LBL MTX-BN | 007 | STO 01 | 013 | STO 03 |
| 002 | XI=?       | 008 | XJ=?   | 014 | XM=?   |
| 003 | PROMPT     | 009 | PROMPT | 015 | PROMPT |
| 004 | STO 00     | 010 | STO 02 | 016 | STO 04 |
| 005 | YI=?       | 011 | YJ=?   | 017 | UM=?   |
| 006 | PROMPT     | 012 | PROMPT | 018 | PROMPT |

019	STO 05	052	RCL 05	085	aJ=	118	-
020	RCL 04	053	*	086	ARCL X	119	bM=
021	RCL 01	054	RCL 04	087	AVIEW	120	ARCL X
022	*	055	RCL 03	088	STOP	121	AVIEW
023	RCL 05	056	*	089	RCL 05	122	STOP
024	RCL 02	057	-	090	RCL 01	123	STO 12
025	*	058	aI=	091	-	124	RCL 02
026	+	059	ARCL X	092	bJ=	125	RCL 00
027	RCL 00	060	AVIEW	093	ARCL X	126	-
028	RCL 03	061	STOP	094	AVIEW	127	cM=
029	*	062	RCL 03	095	STOP	128	ARCL X
030	+	063	RCL 05	096	STO 10	129	AVIEW
031	STO 06	064	-	097	RCL 00	130	STOP
032	RCL 03	065	bI=	098	RCL 04	131	STO 13
033	RCL 04	066	ARCL X	099	-	132	RCL 08
034	*	067	AVIEW	100	cJ=	133	RCL 07
035	RCL 01	068	STOP	101	ARCL X	134	/
036	RCL 02	069	STO 08	102	AVIEW	135	BN11=BN32=
037	*	070	RCL 04	103	STOP	136	ARCL X
038	+	071	RCL 02	104	STO 11	137	AVIEW
039	RCL 00	072	-	105	RCL 00	138	STOP
040	RCL 05	073	cI=	106	RCL 03	139	RCL 09
041	*	074	ARCL X	107	*	140	RCL 07
042	+	075	AVIEW	108	RCL 02	141	/
043	CHS	076	STOP	109	RCL 01	142	BN22=BN31=
044	RCL 06	077	STO 09	110	*	143	ARCL X
045	+	078	RCL 00	111	-	144	AVIEW
046	2 AREA=	079	RCL 05	112	aM=	145	STOP
047	ARCL X	080	*	113	ARCL X	146	RCL 10
048	AVIEW	081	RCL 04	114	AVIEW	147	RCL 07
049	STOP	082	RCL 01	115	STOP	148	/
050	STO07	083	*	116	RCL 01	149	BN13=BN34=
051	RCL 02	084	-	117	RCL 03	150	ARCL X

151	AVUEW	008	X <sup>2</sup>	041	END	031	SIN
152	STOP	009	CHS			032	X <sup>2</sup>
153	RCL 11	010	1			033	T21=
154	RCL 07	011	+	001	LBL MTX-TNF	034	ARCL X
155	/	012	RCL 00	002	b=?	035	AVIEW
156	BN24=BN33=	013	X<>Y	003	PROMPT	036	STOP
157	ARCL X	014	/	004	STO 00	037	RCL 00
158	AVIEW	015	STO 02	005	COS	038	COS
159	STOP	016	1	006	X <sup>2</sup>	039	X <sup>2</sup>
160	RCL 12	017	RCL 02	007	T11=	040	T22=
161	RCL 07	018	*	008	ARCL X	041	ARCL X
162	/	019	D11=D22=	009	AVIEW	042	AVIEW
163	BN15=BN36=	020	ARCL X	010	STOP	043	STOP
164	ARCL X	021	AVIEW	011	RCL 00	044	RCL 00
165	AVIEW	022	STOP	012	SIN	045	COS
166	STOP	023	RCL 01	013	X <sup>2</sup>	046	RCL 00
167	RCL 13	024	RCL 02	014	T12=	047	SIN
168	RCL 07	025	*	015	ARCL X	048	2
169	/	026	D12=D21=	016	AVIEW	049	*
170	BN26=BN35=	027	ARCL X	017	STOP	050	*
171	ARCL X	028	AVIEW	018	RCL 00	051	T23=
172	AVIEW	029	STOP	019	COS	052	ARCL X
173	STOP	030	1	020	RCL 00	053	AVIEW
174	END	031	RCL 01	021	SIN	054	STOP
		032	-	022	2	055	RCL 00
		033	2	023	*	056	COS
001	LBL MTX-D	034	/	024	*	057	RCL 00
002	E=?	035	RCL 02	025	CHS	058	SIN
003	PROMPT	036	*	026	T13=	059	*
004	STO 00	037	D33=	027	ARCL X	060	T31=
005	v=?	038	ARCL X	028	AVIEW	061	ARCL X
006	PROMPT	039	AVIEW	029	STOP	062	AVIEW
007	STO 01	040	STOP	030	RCL 00	063	STOP

064	RCL 00	010	STO 02	044	1	078	AVIEW
065	COS	011	RCL 01	045	+	079	STOP
066	RCL 00	012	RCL 02	046	RCL 03	080	RCL 06
067	SIN	013	/	047	X<>Y	081	1
068	*	014	N=	048	/	082	*
069	CHS	015	ARCL X	049	STO 06	083	d22=
070	T32=	016	AVIEW	050	RCL 03	084	ARCL X
071	ARCL X	017	STOP	051	RCL 06	085	AVIEW
072	AVIEW	018	STO 03	052	*	086	STOP
073	STOP	019	RCL 00	053	d11=	087	0
074	RCL 00	020	1	054	ARCL X	088	d23=
075	SIN	021	+	055	AVIEW	089	ARCL X
076	X <sup>2</sup>	022	2	056	STOP	090	AVIEW
077	CHS	023	*	057	RCL 00	091	STOP
078	RCL 00	024	RCL 02	058	RCL 03	092	0
079	COS	025	X<>Y	059	*	093	d31=
080	X <sup>2</sup>	026	/	060	RCL 06	094	ARCL X
081	+	027	GN=	061	*	095	AVIEW
082	T33=	028	ARCL X	062	d12=	096	STOP
083	ARCL X	029	AVIEW	063	ARCL X	097	0
084	AVIEW	030	STOP	064	AVIEW	098	d32=
085	STOP	031	STO 04	065	STOP	099	ARCL X
086	END	032	RCL 02	066	0	100	AVIEW
		033	/	067	d13=	101	STOP
		034	M=	068	ARCL X	102	RCL 00
001	LBL MTX-dN	035	ARCL X	069	AVIEW	103	X <sup>2</sup>
002	vN=?	036	AVIEW	070	STOP	104	RCL 03
003	PROMPT	037	STOP	071	RCL 00	105	*
004	STO 00	038	STO 05	072	RCL 03	106	CHS
005	EN=?	039	RCL 00	073	*	107	1
006	PROMPT	040	X <sup>2</sup>	074	RCL 06	108	+
007	STO 01	041	RCL 03	075	*	109	RCL 05
008	eN=?	042	*	076	d21=	110	*
009	PROMPT	043	CHS	077	ARCL X	111	RCL 06

112	*	026	T33=?	059	RCL 01	092	RCL 03
113	d33=	027	PROMPT	060	RCL 12	093	RCL 09
114	ARCL X	028	STO 08	061	*	094	*
115	AVIEW	029	d11=?	062	+	095	RCL 04
116	STOP	030	PROMPT	063	RCL 02	096	RCL 12
117	END	031	STO 09	064	RCL 15	097	*
		032	d12=?	065	*	098	+
		033	PRPMP	066	+	099	RCL 05
001	LBL MTX-DN	034	STO 10	067	STO 18	100	RCL 15
002	T11=?	035	d13=?	068	RCL 00	101	*
003	PROMPT	036	PROMPT	069	RCL 10	102	+
004	STO 00	037	STO 11	070	*	103	STO 21
005	T12=?	038	d21=?	071	RCL 01	104	RCL 03
006	PROMPT	039	PROMPT	072	RCL 13	105	RCL 10
007	STO 01	040	STO 12	073	*	106	*
008	T13=?	041	d22=?	074	+	107	RCL 04
009	PROMPT	042	PROMPT	075	RCL 02	108	RCL 13
010	STO 02	043	STO 13	076	RCL 16	109	*
011	T21=?	044	d23=?	077	*	110	+
012	PROMPT	045	PROMPT	078	+	111	RCL 05
013	STO 03	046	STO 14	079	STO 19	112	RCL 16
014	T22=?	047	d31=?	080	RCL 00	113	*
015	PROMPT	048	PROMPT	081	RCL 11	114	+
016	STO 04	049	STO 15	082	*	115	STO 22
017	T23=?	050	d32=?	083	RCL 01	116	RCL 03
018	PROMPT	051	PROMPT	084	RCL 14	117	RCL 11
019	STO 05	052	STO 16	085	*	118	*
020	T31=?	053	d33=?	086	+	119	RCL 04
021	PROMPT	054	PROMPT	087	RCL 02	120	RCL 14
022	STO 06	055	STO 17	088	RCL 17	121	*
023	T32=?	056	RCL 00	089	*	122	+
024	PROMPT	057	RCL 09	090	+	123	RCL 05
025	STO 07	058	*	091	STO 20	124	RCL 17

125 *	158 +	191 RCL 18	224 RCL 19
126 +	159 RCL 08	192 RCL 27	225 RCL 32
127 STO 23	160 RCL 17	193 *	226 *
128 RCL 06	161 *	194 RCL 19	227 +
129 RCL 09	162 +	195 RCL 30	228 RCL 20
130 *	163 STO 26	196 *	229 RCL 35
131 RCL 07	164 TT11=?	197 +	230 *
132 RCL 12	165 PROMPT	198 RCL 20	231 +
133 *	166 STO 27	199 RCL 33	232 D13=
134 +	167 TT12=?	200 *	233 ARCL X
135 RCL 08	168 PROMPT	201 +	234 AVIEW
136 RCL 15	169 STO 28	202 D11=	235 STOP
137 *	170 TT13=?	203 ARCL X	236 RCL 21
138 +	171 PROMPT	204 AVIEW	237 RCL 27
139 STO 24	172 STO 29	205 STOP	238 *
140 RCL 06	173 TT21=?	206 RCL 18	239 RCL 22
141 RCL 10	174 PROMPT	207 RCL 28	240 RCL 30
142 *	175 STO #)	208 *	241 *
143 RCL 07	176 TT22=?	209 RCL 19	242 +
144 RCL 13	177 PROMPT	210 RCL 31	243 RCL 23
145 *	178 STO 31	211 *	244 RCL 33
146 +	179 TT23=?	212 +	245 *
147 RCL 08	180 PROMPT	213 RCL 20	246 +
148 RCL 16	181 STO 32	214 RCL 34	247 D21=
149 *	182 TT31=?	215 *	248 ARCL X
150 +	183 PROMPT	216 +	249 AVIEW
151 STO 25	184 STO 33	217 D12=	250 STOP
152 RCL 06	185 TT32=?	218 ARCL X	251 RCL 21
153 RCL 11	186 PROMPT	219 AVIEW	252 RCL 28
154 *	187 STO 34	220 STOP	253 *
155 RCL 07	188 TT33=?	221 RCL 18	254 RCL 22
156 RCL 14	189 PROMPT	222 RCL 29	255 RCL 31
157 *	190 STO 35	223 *	256 *

257	+	290	*	323	ARCL X
258	RCL 23	291	+	324	AVIEW
259	RCL 34	292	D31=	325	STOP
260	*	293	ARCL X	326	END
261	+	294	AVIEW		
262	D22=	295	STOP		
263	ARCL X	296	RCL 24		
264	AVIEW	297	RCL 28		
265	STOP	298	*		
266	RCL 21	299	RCL 25		
267	RCL 29	300	RCL 31		
268	*	301	*		
269	RCL 22	302	+		
270	RCL 32	303	RCL 26		
271	*	304	RCL 34		
272	+	305	*		
273	RCL 23	306	+		
274	RCL 35	307	D32=		
275	*	308	ARCL X		
276	+	309	AVIEW		
277	D23=	310	STOP		
278	ARCL X	311	RCL 24		
279	AVIEW	312	RCL 29		
280	STOP	313	*		
281	RCL 24	314	RCL 25		
282	RCL 27	315	RCL 32		
283	*	316	*		
284	RCL 25	317	+		
285	RCL 30	318	RCL 26		
286	*	319	RCL 35		
287	+	320	*		
288	RCL 26	321	+		
289	RCL 33	322	D33=		

Listado de el segundo paquete.

001	LBL MTX-K	033	PROMPT	065	D21=?	097	RCL 27
002	BT11=?	034	STO 10	066	PROMPT	098	*
003	PROMPT	035	BT43=?	067	STO 21	099	STO 28
004	STO 00	036	PROMPT	068	D22=?	100	RCL 00
005	BT12=?	037	STO 11	069	PROMPT	101	RCL 19
006	PROMPT	038	BT51=?	070	STO 22	102	*
007	STO 01	039	PROMPT	071	D23=?	103	RCL 01
008	BT13=?	040	STO 12	072	PROMPT	104	RCL 22
009	PROMPT	041	BT52=?	073	STO 23	105	*
010	STO 02	042	PROMPT	074	D31=?	106	+
011	BT21=?	043	STO 13	075	PROMPT	107	RCL 02
012	PROMPT	044	BT53=?	076	STO 24	108	RCL 25
013	STO 03	045	PROMPT	077	D32=?	109	*
014	BT22=?	046	STO 14	078	PROMPT	110	+
015	PROMPT	047	BT61=?	079	STO 25	111	RCL 27
016	STO 04	048	PROMPT	080	D33=?	112	*
017	BT23=?	049	STO 15	081	PROMPT	113	STO 29
018	PROMPT	050	BT62=?	082	STO 26	114	RCL 00
019	STO 05	051	PROMPT	083	TA=?	115	RCL 20
020	BT31=?	052	STO 16	084	PROMPT	116	*
021	PROMPT	053	BT63=?	085	STO 27	117	RCL 01
022	STO 06	054	PROMPT	086	RCL 06	118	RCL 23
023	BT32=?	055	STO 17	087	RCL 18	119	*
024	PROMPT	056	D11=?	088	*	120	+
025	STO 07	057	PROMPT	089	RCL 01	121	RCL 02
026	BT33=?	058	STO 18	090	RCL 21	122	RCL 26
027	PROMPT	059	D12=?	091	*	123	*
028	STO 08	060	PROMPT	092	+	124	+
029	BT41=?	061	STO 19	093	RCL 02	125	RCL 27
030	PROMPT	062	D13=?	094	RCL 24	126	*
031	STO 09	063	PROMPT	095	*	127	STO 30
032	BT42=?	064	STO 20	096	+	128	RCL 03

129	RCL 18	162	+	195	RCL 27	228	*
130	*	163	RCL 05	196	*	229	RCL 10
131	RCL 04	164	RCL 26	197	STO 35	230	RCL 22
132	RCL 21	165	*	198	RCL 06	231	*
133	*	166	+	199	RCL 20	232	+
134	+	167	RCL 27	200	*	233	RCL 11
135	RCL 05	168	*	201	RCL 07	234	RCL 25
136	RCL 24	169	STO 33	202	RCL 23	235	*
137	*	170	RCL 06	203	*	236	+
138	+	171	RCL 18	204	+	237	RCL 27
139	RCL 27	172	*	205	RCL 08	238	*
140	*	173	RCL 07	206	RCL 26	239	STO 38
141	STO 31	174	RCL 21	207	*	240	RCL 09
142	RCL 03	175	*	208	+	241	RCL 20
143	RCL 19	176	+	209	RCL 27	242	*
144	*	177	RCL 08	210	*	243	RCL 10
145	RCL 04	178	RCL 24	211	STO 36	244	RCL 23
146	RCL 22	179	*	212	RCL 09	245	*
147	*	180	+	213	RCL 18	246	+
148	+	181	RCL 27	214	*	247	RCL 11
149	RCL 05	182	*	215	RCL 10	248	RCL 26
150	RCL 25	183	STO 34	216	RCL 21	249	*
151	*	184	RCL 06	217	*	250	+
152	+	185	RCL 19	218	+	251	RCL 27
153	RCL 27	186	*	219	RCL 11	252	*
154	*	187	RCL 07	220	RCL 24	253	STO 39
155	STO 32	188	RCL 22	221	*	254	RCL 12
156	RCL 03	189	*	222	+	255	RCL 18
157	RCL 20	190	+	223	RCL 27	256	*
158	*	191	RCL 08	224	*	257	RCL 13
159	RCL 04	192	RCL 25	225	STO 37	258	RCL 21
160	RCL 23	193	*	226	RCL 09	259	*
161	*	194	+	227	RCL 19	260	+

261	RCL 14	294	*	327	RCL 16	360	+
262	RCL 24	295	STO 42	328	RCL 23	361	RCL 30
263	*	296	RCL 15	329	*	362	RCL 05
264	+	297	RCL 18	330	+	363	*
265	RCL 27	298	*	331	RCL 17	364	+
266	*	299	RCL 16	332	RCL 26	365	K12=
267	STO 40	300	RCL 21	333	*	366	ARCL X
268	RCL 12	301	*	334	+	367	AVIEW
269	RCL 19	302	+	335	RCL 27	368	STOP
270	*	303	RCL 17	336	*	369	STO 47
271	RCL 13	304	RCL 24	337	STO 45	370	RCL 28
272	RCL 22	305	*	338	RCL 28	371	RCL 06
273	*	306	+	339	RCL 00	372	*
274	+	307	RCL 27	340	*	373	RCL 29
275	RCL 14	308	*	341	RCL 29	374	RCL 07
276	RCL 25	309	STO 43	342	RCL 01	375	*
277	*	310	RCL 15	343	*	376	+
278	+	311	RCL 19	344	+	377	RCL 30
279	RCL 27	312	*	345	RCL 30	378	RCL 08
280	*	313	RCL 16	346	RCL 02	379	*
281	STO 41	314	RCL 22	347	*	380	+
282	RCL 12	315	*	348	+	381	K13=
283	RCL 20	316	+	349	K11=	382	ARCL X
284	*	317	RCL 17	350	ARCL X	383	AVIEW
285	RCL 13	318	RCL 25	351	AVIEW	384	STOP
286	RCL 23	319	*	352	STOP	385	STO 48
287	*	320	+	353	STO 46	386	RCL 28
288	+	321	RCL 27	354	RCL 28	387	RCL 09
289	RCL 14	322	*	355	RCL 03	388	*
290	RCL 26	323	STO 44	356	*	389	RCL 29
291	*	324	RCL 15	357	RCL 29	390	RCL 10
292	+	325	RCL 20	358	RCL 04	391	*
293	RCL 27	326	*	359	*	392	+

393 RCL 30	426 RCL 17	459 *	492 +
394 RCL 11	427 *	460 +	493 K24=
395 *	428 +	461 K22=	494 ARCL X
396 +	429 K16=	462 ARCL X	495 AVIEW
397 K14=	430 ARCL X	463 AVIEW	496 STOP
398 ARCL X	431 AVIEW	464 STOP	497 STO 55
399 AVIEW	432 STOP	465 STO 53	498 RCL 31
400 STOP	433 STO 51	466 RCL 31	499 RCL 12
401 STO 49	434 RCL 31	467 RCL 06	500 *
402 RCL 28	435 RCL 00	468 *	501 RCL 32
403 RCL 12	436 *	469 RCL 32	502 RCL 13
404 *	437 RCL 32	470 RCL 07	503 *
405 RCL 29	438 RCL 01	471 *	504 +
406 RCL 13	439 *	472 +	505 RCL 33
407 *	440 +	473 RCL 33	506 RCL 14
408 +	441 RCL 33	474 RCL 08	507 *
409 RCL 30	442 RCL 02	475 *	508 +
410 RCL 14	443 *	476 +	509 K25=
411 *	444 +	477 K23=	510 ARCL X
412 +	445 K21=	478 ARCL X	511 AVIEW
413 K15=	446 ARCL X	479 AVIEW	512 STOP
414 ARCL X	447 AVIEW	480 STOP	513 STO 56
415 AVIEW	448 STOP	481 STO 54	514 RCL 31
416 STOP	449 STO 52	482 RCL 31	515 RCL 15
417 STO 50	450 RCL 31	483 RCL 09	516 *
418 RCL 28	451 RCL 03	484 *	517 RCL 32
419 RCL 15	452 *	485 RCL 32	518 RCL 16
420 *	453 RCL 32	486 RCL 10	519 *
421 RCL 29	454 RCL 04	487 *	520 +
422 RCL 16	455 *	488 +	521 RCL 33
423 *	456 +	489 RCL 33	522 RCL 17
424 +	457 RCL 33	490 RCL 11	523 *
425 RCL 30	458 RCL 05	491 *	524 +

525 K26=	558 ARCL X	591 AVIEW	624 STOP
526 ARCL X	559 AVIEW	592 STOP	625 STO 63
527 AVIEW	560 STOP	593 STO 61	626 RCL 37
528 STOP	561 STO 59	594 RCL 34	627 RCL 00
529 STO 57	562 RCL 34	595 RCL 12	628 *
530 RCL 34	563 RCL 06	596 *	629 RCL 38
531 RCL 00	564 *	597 RCL 35	630 RCL 01
532 *	565 RCL 35	598 RCL 13	631 *
533 RCL 35	566 RCL 07	599 *	632 +
534 RCL 01	567 *	600 +	633 RCL 39
535 *	568 +	601 RCL 36	634 RCL 02
536 +	569 RCL 36	602 RCL 14	635 *
537 RCL 36	570 RCL 08	603 *	636 +
538 RCL 02	571 *	604 +	637 K41=
539 *	572 +	605 K35=	638 ARCL X
540 +	573 K33=	606 ARCL X	639 AVIEW
541 K31=	574 ARCL X	607 AVIEW	640 STOP
542 ARCL X	575 AVIEW	608 STOP	641 STO 64
543 AVIEW	576 STOP	609 STO 62	642 RCL 37
544 STOP	577 STO 60	610 RCL 34	643 RCL 03
545 STO 58	578 RCL 34	611 RCL 1%	644 *
546 RCL 34	579 RCL 09	612 *	645 RCL 38
547 RCL 03	580 *	613 RCL 35	646 RCL 04
548 *	581 RCL 35	614 RCL 16	647 *
549 RCL 35	582 RCL 10	615 *	648 +
550 RCL 04	583 *	616 +	649 RCL 39
551 *	584 +	617 RCL 36	650 RCL 05
552 +	585 RCL 36	618 RCL 17	651 *
553 RCL 36	586 RCL 11	619 *	652 +
554 RCL 05	587 *	620 +	653 K42=
555 *	588 +	621 K36=	654 ARCL X
556 +	589 K34=	622 ARCL X	655 AVIEW
557 K32=	590 ARCL X	623 AVIEW	656 STOP

657	STO 65	690	RCL 37	723	RCL 00	756	*
658	RCL 37	691	RCL 12	724	*	757	RCL 41
659	RCL 06	692	*	725	RCL 41	758	RCL 07
660	*	693	RCL 38	726	RCL 01	759	*
661	RCL 38	694	RCL 13	727	*	760	+
662	RCL 07	695	*	728	+	761	RCL 42
663	*	696	+	729	RCL 42	762	RCL 08
664	+	697	RCL 39	730	RCL 02	763	*
665	RCL 39	698	RCL 14	731	*	764	+
666	RCL 08	699	*	732	+	765	K53=
667	*	700	+	733	K 51=	766	ARCL x
668	+	701	K45=	734	ARCL X	767	AVIEW
669	K43=	702	ARCL X	735	AVIEW	768	STOP
670	ARCL X	703	AVIEW	736	STOP	769	STO 72
671	AVIEW	704	STOP	737	STO 70	770	RCL 40
672	STOP	705	STO 68	738	RCL 40	771	RCL 09
673	STO 66	706	RCL 37	739	RCL 03	772	*
674	RCL 37	707	RCL 15	740	*	773	RCL 41
675	RCL 09	708	*	741	RCL 41	774	RCL 10
676	*	709	RCL 38	742	RCL 04	775	*
677	RCL 38	710	RCL 16	743	*	776	+
678	RCL 10	711	*	744	+	777	RCL 42
679	*	712	+	745	RCL 42	778	RCL 11
680	+	713	RCL 38	746	RCL 05	779	*
681	RCL 39	714	RCL 17	747	*	780	+
682	RCL 11	715	*	748	+	781	K54=
683	*	716	+	749	K52=	782	ARCL X
684	+	717	K46=	750	ARCL X	783	AVIEW
685	K44=	718	ARCL X	751	AVIEW	784	STOP
686	ARCL X	719	AVIEW	752	STOP	785	STO 73
687	AVIEW	720	STOP	753	STO 71	786	RCL 40
688	STOP	721	STO 69	754	RCL 40	787	RCL 12
689	STO 67	722	RCL 40	755	RCL 06	788	*

789 RCL 41	822 RCL 01	855 *	888 +
790 RCL 13	823 *	856 +	889 RCL 45
791 *	824 +	857 RCL 45	890 RCL 14
792 +	825 RCL 45	858 RCL 08	891 *
793 RCL 42	826 RCL 02	859 *	892 +
794 RCL 14	827 *	860 +	893 K65=
795 *	828 +	861 K63=	894 ARCL X
796 +	829 K61=	862 ARCL X	895 AVIEW
797 K55=	830 ARCL X	863 AVIEW	896 STOP
798 ARCL X	831 AVIEW	864 STOP	897 STO 80
799 AVIEW	832 STOP	865 STO 78	898 RCL 43
800 STOP	833 STO 76	866 RCL 43	899 RCL 15
801 STO 74	834 RCL 43	867 RCL 09	900 *
802 RCL 40	835 RCL 03	868 *	901 RCL 44
803 RCL 15	836 *	869 RCL 44	902 RCL 16
804 *	837 RCL 44	870 RCL 10	903 *
805 RCL 41	838 RCL 04	871 *	904 +
806 RCL 16	839 *	872 +	905 RCL 45
807 *	840 +	873 RCL 45	906 RCL 17
808 +	841 RCL 45	874 RCL 11	907 *
809 RCL 42	842 RCL 05	875 *	908 +
810 RCL 17	843 *	876 +	909 K66=
811 *	844 +	877 K64=	910 ARCL X
812 +	845 K62=	878 ARCL X	911 AVIEW
813 K56=	846 ARCL X	879 AVIEW	912 STOP
814 ARCL X	847 AVIEW	880 STOP	913 STO 81
815 AVIEW	848 STOP	881 STO 79	914 END
816 STOP	849 STO 77	882 RCL 43	
817 STO 75	850 RCL 43	883 RCL 12	
818 RCL 43	851 RCL 06	884 *	
819 RCL 00	852 *	885 RCL 44	
820 *	853 RCL 44	886 RCL 13	
821 RCL 44	854 RCL 07	887 *	

A.III. APENDICE TRES. RESUMEN DE FORMULAS.  
 \*\*\*\*\*

En este apéndice se resumen las fórmulas más utilizadas en la solución de problemas mediante el uso del Método del Elemento Finito; se dan las fórmulas de los tres casos estudiados.

Para la obtención del área de un triángulo se emplea:

$$2\Delta = \begin{bmatrix} 1.0 & X_i & Y_i \\ 1.0 & X_j & Y_j \\ 1.0 & X_m & Y_m \end{bmatrix} \quad \dots(\text{A.III.1.})$$

Los coeficientes, que son función de los desplazamientos nodales están dados por:

$$\begin{aligned} a_i &= (X_j Y_m) - (X_m Y_j) & b_i &= Y_j - Y_m & c_i &= X_m - X_j \\ a_j &= (X_i Y_m) - (X_m Y_i) & b_j &= Y_m - Y_i & c_j &= X_i - X_m & \dots(\text{A.III.2.}) \\ a_m &= (X_i Y_j) - (X_j Y_i) & b_m &= Y_i - Y_j & c_m &= X_j - X_i \end{aligned}$$

La matriz de función de forma de deformaciones es:

$$\underline{B} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} Y_j - Y_m & 0.0 & Y_m - Y_i & 0.0 & Y_i - Y_j & 0.0 \\ 0.0 & X_m - X_j & 0.0 & X_i - X_m & 0.0 & X_j - X_i \\ X_m - X_j & Y_j - Y_m & X_i - X_m & Y_m - Y_i & X_j - X_i & Y_i - Y_j \end{bmatrix} \quad \dots(\text{A.III.3.})$$

La matriz de rigidez elástica en un material homogéneo es la siguiente:

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1.0 & \nu & 0.0 \\ \nu & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \dots(\text{A.III.4.})$$

La matriz de rigidez global del elemento está dada por:

$$\underline{K}^e = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B}^e t \Delta \quad \dots (A.III.5.)$$

La matriz de transformación de coordenadas viene dada por:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -2\sin\beta\cos\beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 2\sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & -\sin\beta\cos\beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix} \quad \dots (A.III.6.)$$

La matriz de rigidez elástica según la estratigrafía en los materiales heterogéneos y anisótropos es:

$$\underline{D}^i = \frac{E'}{[1-n(\nu_i)^2]} \begin{bmatrix} n & n\nu_i & 0.0 \\ n\nu_i & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & m[1-n(\nu_i)^2] \end{bmatrix} \quad \dots (A.III.7.)$$

Para obtener la matriz de rigidez elástica en los ejes principales, se emplea la siguiente fórmula.

$$\underline{D} = \underline{T} \underline{D}' \underline{T}^T \quad \dots (A.III.8.)$$

**BIBLIOGRAFIA.**

\*\*\*\*\*

- I. O.C. Zienkiewicz.  
El Método de los Elementos Finitos.  
Reverté S.A., España, 1980.
  
- II. Robert D. Cook.  
Concepts and Applications of Finite Element Analysis.  
John Wiley, Canada, 1981, Second Edition.
  
- III. Chandrakant S. Desai.  
Elementary Finite Element Method.  
Prentice-Hall, New Jersey.
  
- IV. Chandrakant S. Desai and John F. Abel.  
Introduction to the Finite Element Method.  
Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1977.
  
- V. A.J.M. Spencer.  
Continuum Mechanics.  
Nottingham, 1979.
  
- VI. Rodolfo Luthe, Antonio Olivera y Fernando Schultz.  
Métodos Numéricos.  
Limusa, México, 1980.

- VII. R.W. Clough and J. Penzien.  
Dynamics of Structures.  
McGraw-Hill, New York, 1975.
- VIII. Rafael Colindres Selva.  
Dinámica de Suelos y Estructuras.  
Limusa, México, 1983.
- IX. S.P. Timoshenko and J.N. Goodier.  
Theory of Elasticity.  
McGraw-Hill, Tokyo, 1982, Third Edition.
- X. Eduardo A. Rukos.  
Continuous Finite Elements.  
Institute of Engineering, N.U.M., 1975.
- XI. Bernardo Cambou.  
Método del Elemento Finito. Análisis de Incertidumbre de Primer  
Orden.  
Instituto de Ingeniería U.N.A.M., 1974.
- XII. Ricardo Chicurel.  
Uso de Elementos Finitos Espacio-Tiempo en Problemas de Dinámica.  
Instituto de Ingeniería U.N.A.M., 1972.

XIII. S.G. Lekhnitskii.

Theory of Elasticity of an Anisotropic Body.

Mir Publishers, Moscow, 1981.