UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE INGENIERIA CIVIL, TOPOGRAFICA Y GEODESICA

29
26

ANALISIS DE ESTABILIDAD DE TALUDES EN MACIZOS ROCOSOS

TESIS PROFESIONAL

ELABORADA PARA OBTENER EL
TITULO DE INGENIERO CIVIL
POR

FRITZ BIELER ANTOLIN

MEXICO, D. F. SEPTIEMBRE - 1984

I N D I C E

CAPITULO I

INTRODUCCION

El presente trabajo consiste en la exposición de los métodos para analizar la estabilidad estática de taludes en macizos rocosos que contienen una red tridimensional de discontinuidades. La utilización del análisis vectorial para resolver estos problemas analíticamente es descrita, y también se expone un método que utiliza los llamados estereogramas para resolver este tipo de problemas gráficamente. Se presenta para ambos métodos, el gráfico y el analítico, un análisis general de taludes que contienen uno, dos o tres planos de discontinuidad; en estos se toma en cuenta la presión del agua que actúa en las discontinuidades y además la acción de fuerzas externas sobre el talud así como su peso propio. Se presentan ejemplos detallados para ilustrar los métodos de análisis gráfico y analítico.

El diseño y análisis de taludes en roca depende de la configuración de las discontinuidades en la masa de roca. La orientación espacial de estas discontinuidades y la fuerza resistente debido a la fricción en estas determina la estabilidad de los taludes en macizos rocosos. Así el método de análisis utilizado debe tomar en cuenta la intersección tridimensional de las familias de juntas con cada una de las otras familias que contenga la masa de roca, además de la intersección de estas discontinuidades con la cara o superficie del talud en el macizo rocoso.

En este trabajo se explicarán los métodos de análisis para el caso límite de equilibrio para así resolver este tipo de problemas en tres dimensiones. En todos los métodos de análisis al límite, la forma o modo de falla potencial se supone de antemano, analizando la factibilidad de cada una de las alternativas. No obstante los deslizamientos son ignorados en estos métodos de equilibrio al límite, basta con comprobar cinemáticamente que los desplazamientos son posibles en la dirección supuesta sobre la superficie de falla escogida. El sistema potencial de falla debe ser revisado para definir las posibles direcciones y superficies en las cuales es físicamente posible que ocurra el deslizamiento.

Después de que la superficie potencial de falla es supuesta, el siguiente paso en el método de equilibrio al límite es calcular la resistencia por fricción sobre el plano probable de falla que es requerida para mantener en equilibrio la masa que puede deslizar.

Después de que la resistencia debida a la fricción requerida para mantener el equilibrio ha sido determinada, se compara con la resistencia máxima disponible que pueden proporcionar los planos potenciales de falla debido a las fuerzas friccionantes que se generan en ellos. Esta comparación se expreza en términos de un factor de seguridad, que debe ser definido muy cuidadosamente. Finalmente la superficie de deslizamiento que proporciona el menor factor de seguridad, es encontrada. Para taludes en macizos rocosos, solo puede haber algunas cuñas de roca que potencialmente pueden fallar, cada una teniendo diferente forma y gobernada por varias familias de discontinuidades que se intersectan.

El presente trabajo se ha elaborado con la intención de que por sí mismo sea autosuficiente, es decir, que el lector no requiera consultar ninguna otra bibliografía para poder leer la totalidad del trabajo sin ninguna dificultad, con la misma intención se dedujeron paso a paso todas y cada una de las ecuaciones y resultados presentados con el fin de que además de presentar los resultados se conozcan las hipótesis y orígenes de estos, evitando así el hecho que se presenta en muchos otros textos de dar por sabidos los resultados presentándolos sin mayor trámite.

El capítulo dos tiene su justificación en el párrafo anterior, ya que presenta las operaciones vectoriales que se requeriran en la aplicación del método analítico, presentando así las operaciones requeridas para la resolución de fuerzas, momento respecto a un eje, obtención del volumen y centroide de un tetraedro, etc. Además de presentar la notación utilizada en este trabajo para representar rumbos y echados de planos de debilidad en términos de vectores. También se presentan algunos ejemplos resueltos para que el lector ejercite la teoría.

El capítulo tres presenta el análisis de taludes en macizos rocosos por el método vectorial. El objetivo de este capítulo es exponer la teoría necesaria para llegar a obtener el factor de seguridad contra deslizamiento o contra rotación de una cuña de roca susceptible de fallar; dicha cuña de roca incluye taludes cortados por una, dos o tres familias de planos de debilidad. Para alcanzar el objetivo satisfactoriamente se empieza por exponer el análisis de estabilidad para un talud que contiene un plano de debilidad llegando a calcular el factor de seguridad en función del ángulo de fricción de dicho plano y del echado de este. Posteriormente se expone la teoría del análisis para taludes que contienen dos familias de planos de debilidad, haciendo una descripción de la geometría y de las cargas aplicadas, para luego determinar el modo de falla por deslizamiento y finalmente tener el factor de seguridad; el siguiente desarrollo consiste en determinar las condiciones cinemáticas necesarias para que se produzca una rotación de la cuña de roca y obtener el factor de seguridad de este concepto, presentando ejemplos resueltos detalladamente. Después se analizan los taludes que contienen tres familias de juntas que se intersectan, definiendo los posibles modos de falla y las pruebas cinemáticas correspondientes para después obtener el factor de seguridad contra deslizamiento, presentando también los ejemplos pertinentes.

En el capítulo cuatro se presenta el método estereográfico para el análisis de estabilidad. En este capítulo se exponen las propiedades de las proyecciones esféricas, es decir, en tres dimensiones, con esta base se explica como obtener la proyección de líneas en el espacio y el ángulo que forman entre ellas, así como la proyección de planos y la obtención de la orientación de la línea de intersección de tales planos. Posteriormente se aplica el estereograma para evaluar las fuerzas actuante y resistente sobre la cuña que potencialmente puede deslizar, realizando estos estudios para uno, dos y tres familias de planos de debilidad, una vez obtenida la orientación de esta fuerza se puede calcular fácilmente el factor de seguridad. También se expone un método para obtener la magnitud mínima y la dirección óptima de la fuerza de anclaje necesaria para obtener un factor de seguridad predeterminado, así como la obtención de la fuerza mínima requerida para producir la falla. Todo lo anterior se presenta con abundantes ejemplos para hacer más clara la exposición.

El capítulo cinco presenta las conclusiones que se deducen a partir del trabajo expuesto siendo este capítulo de importancia relevante, ya que resume las ideas principales teniendo esto la ventaja de poder apreciar de manera general la totalidad del trabajo, concentrando la atención en los conceptos que nunca se deben perder de vista durante el proceso de análisis de estabilidad en roca.

En el apéndice A se proporcionan los listados de siete programas de calculadora de bolsillo que resuelven diversas operaciones como el producto cruz de dos vectores, la obtención de las componentes del vector rumbo y el vector echado de un plano de debilidad, la obtención del volumen de un tetraedro, etc. Para dos de estos programas se han presentado ejemplos de aplicación tomando los datos de los ejemplos desarrollados en el capítulo dos; la idea de este apéndice es mostrar que el método vectorial se puede programar en su totalidad, y a pesar de que en el presente trabajo esto no se lleva a cabo, sí se ilustra de manera clara.

CAPITULO 2

FUNDAMENTOS DE ANALISIS VECTORIAL

2.1 GENERALIDADES

En este capítulo se revisan los conceptos de cálculo-vectorial utilizados en el análisis tridimensional de estabilidad de taludes en roca, sirviendo como una referencia rápida al lector. Posteriormente se expone el sistema utilizado en esta tesis para representar la orientación en el espacio de planos de debilidad, la línea de intersección de dos planos probables de falla, y la resolución de fuerzas en términos de notación vectorial.

2.2 OPERACIONES VECTORIALES UTILIZADAS EN EL ANALISIS TRIDIMENSIONAL DE TALUDES EN MACIZOS ROCOSOS

2.2.1 Vectores Unitarios que Definen la Orientación de Planos de Debilidad y Obtención del Vector que Representa la Intersección de dos Planos Probables de Falla.

La orientación de planos de dibilidad es reportada generalmente por el geólogo en términos del rumbo y echado. En esta tesis se utilizará el sistema propuesto por Wittke (1964), para describir la orientación de las discontinuidades estudiadas con relación a la cara del talud. De acuerdo a este sistema, como se muestra en la fig. 2.1, el eje X es horizontal y paralelo al rumbo de la superficie del talud, el eje Y es horizontal y su sentido positivo es hacia adentro del macizo rocoso, y el eje Z es vertical positivo hacia arriba.

El rumbo de un plano de debilidad está dado por el ángulo β, medido en un plano horizontal en sentido antihorario a partir de la parte positiva del eje X como se muestra en la figura 2.2. El valor β está comprendido entre 0 y 180°. El echado de un plano se denota por el ángulo γ. El echado γ, está comprendido entre 0 y 180°. Este es un ángulo medido en sentido vertical, entonces se debe plantear un plano vertical cuya normal es paralela a la dirección del rumbo del plano de debilidad, ahora bien, a partir de la traza que define la intersección de este plano vertical y un plano horizontal se mide el ángulo γ, del echado hacia abajo, dicha traza como se puede observar es una línea horizontal y forma un ángulo con la parte positiva del eje X igual a $\Psi = \beta - 90°$.

El vector rumbo y el vector echado son representados por los vectores unitarios $\bar{u}$ y $\bar{v}$ respectivamente, y son escritos en términos de los ángulos β y γ como se muestra en la figura 2.2.

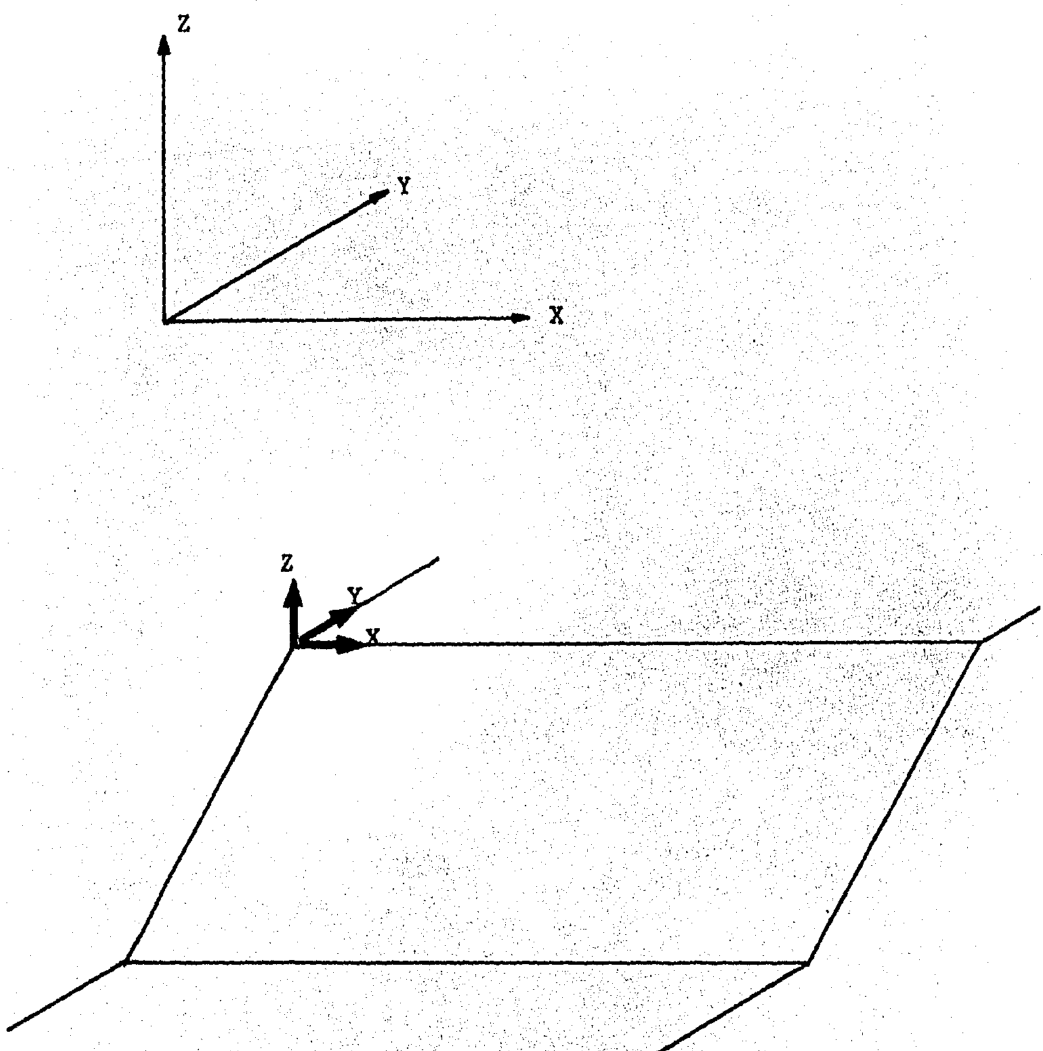
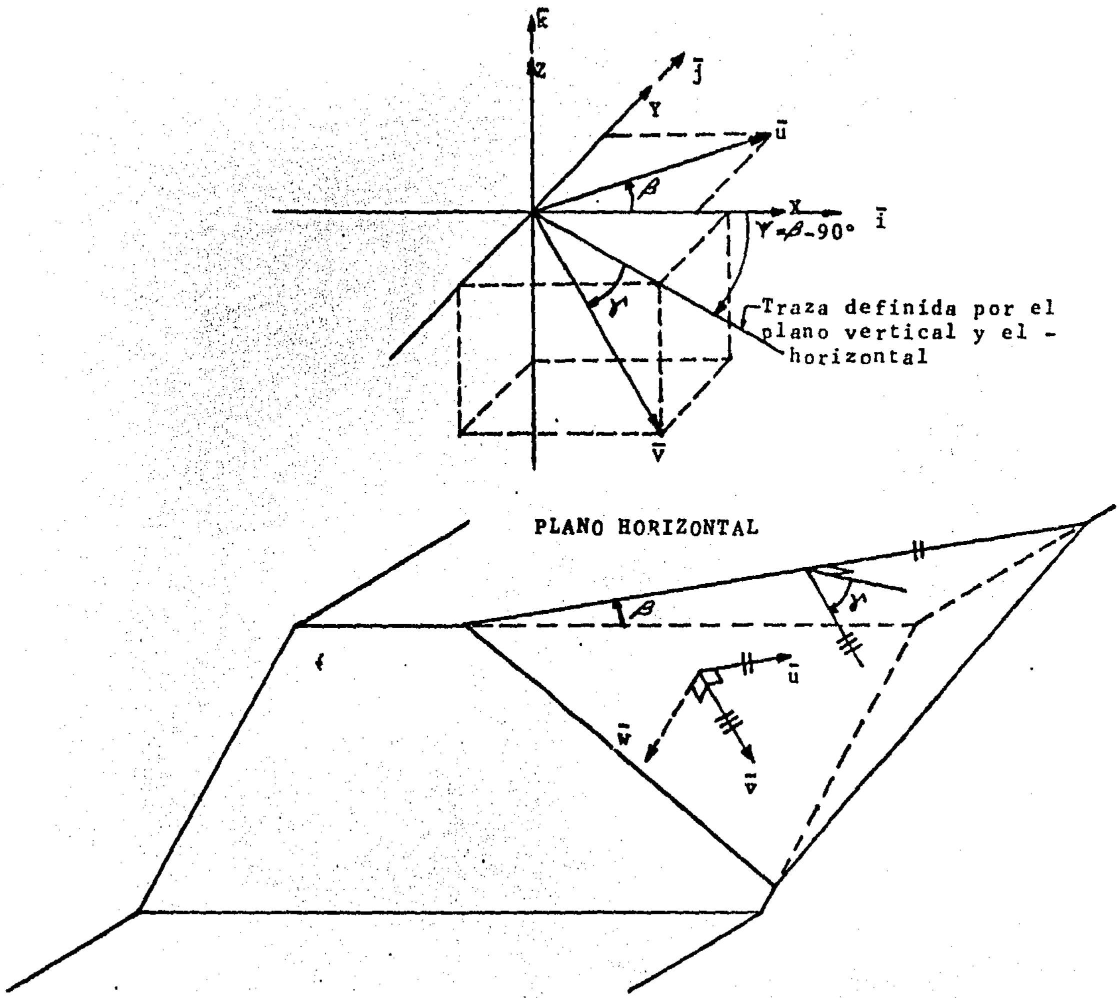


FIG. 2.1 Estandarización de ejes coordenados.



$$\bar{u} = \cos\beta\,\bar{i} + \operatorname{sen}\beta\,\bar{j}$$

$$\bar{v} = \cos\gamma\operatorname{sen}\beta\,\bar{i} - \cos\gamma\cos\beta\,\bar{j} - \operatorname{sen}\gamma\,\bar{k}$$

$$\bar{w} = \bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left[u_y v_z - v_y u_z\right]\bar{i} + \left[v_x u_z - u_x v_z\right]\bar{j} + \left[u_x v_z - u_z v_x\right]\bar{k}$$

FIG. 2.2. Orientación de un plano en notación vectorial

Deducción de las expresiones $\bar{u}$ y $\bar{v}$:

$$\bar{u} = u_x \bar{i} + u_y \bar{j} \qquad (2.a)$$

Referido a la Fig. 2.3

$$\cos\beta = \frac{u_x}{u} ; \; \text{sen}\,\beta = \frac{u_y}{u}$$

como $u = 1 \Rightarrow$

$$\cos\beta = u_x \qquad (2.b)$$

$$\text{sen}\,\beta = u_y \qquad (2.c)$$

Sustituyendo 2.b y 2.c en 2.a

$$\bar{u} = \cos\beta\,\bar{i} + \text{sen}\,\beta\,\bar{j} \qquad (2.1)$$

Ahora bien $\bar{v} = v_x \bar{j} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$ (2.d)

Referido a la Fig. 2.4

$\cos\gamma = \frac{a}{v}$ pero $v = 1 \Rightarrow \cos\gamma = a$

$$\cos(\beta - 90°) = \frac{v_x}{a} = \frac{v_x}{\cos\gamma}$$

$$\therefore \quad v_x = \cos\gamma \left[\cos(\beta - 90°)\right]$$

Sabemos que

$$\cos(X - Y) = \cos X \cos y + \text{sen}\,X\,\text{sen}\,y$$

Entonces

$$\cos(\beta - 90°) = \cos\beta \cos 90° + \text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,90°$$

$$\cos(\beta - 90°) = \text{sen}\,\beta \Rightarrow$$

$$v_x = \cos\gamma\;\text{sen}\,\beta \qquad (2.e)$$

Por otro lado $\delta = 180° - \beta$

$$\cos(180° - \beta) = -\cos\beta$$

$$-\cos\beta = \frac{v_y}{a}$$

$$-\cos\beta = \frac{v_y}{\cos\gamma} \Rightarrow v_y = -\cos\beta\,\cos\gamma \qquad (2.f)$$

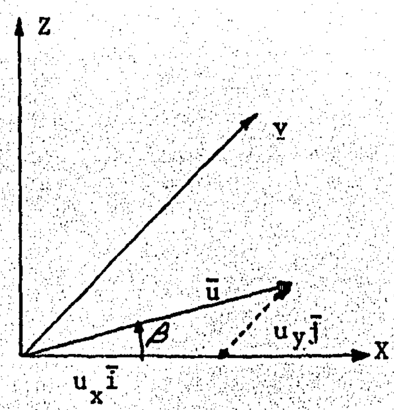


FIG. 2.3 Obtención de $\bar{u}$

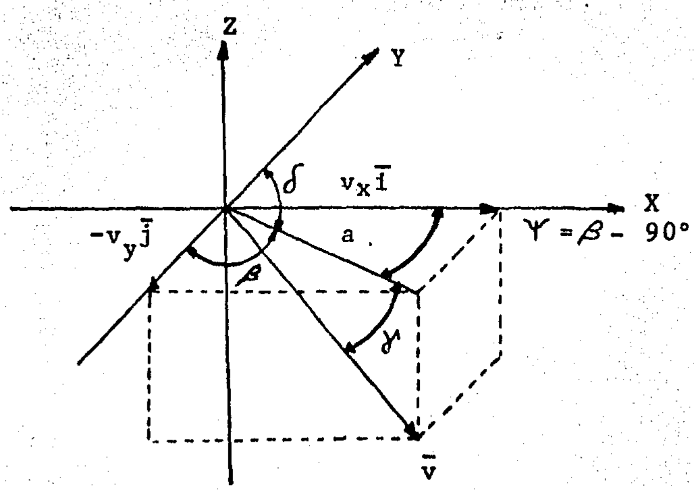


FIG. 2.4 Obtención de v_x y v_y

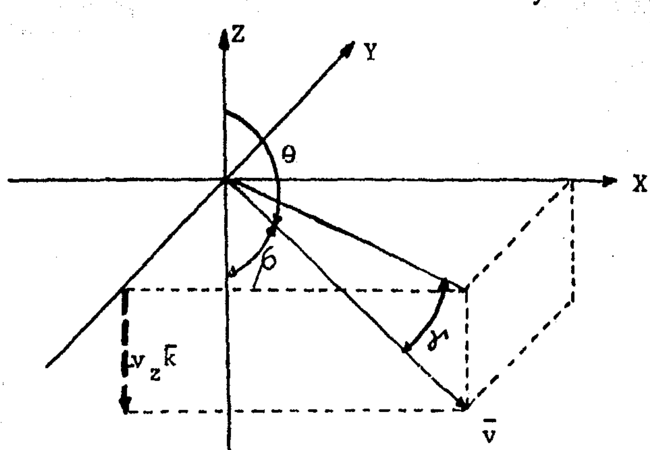


FIG. 2.5 Obtención de v_z

Además

$$\theta = 90° - \gamma$$

$$\beta = 180° - \theta$$

$$\cos\theta = -\cos\beta$$

$$-\cos\beta = \frac{v_z}{v} \quad \text{pero} \quad v = 1 \Rightarrow -\cos\beta = v_z$$

$$\therefore \quad v_z = -\cos(180° - \theta) = \cos(180° - 90° - \gamma)$$

$$v_z = -\cos(90° - \gamma)$$

$$v_z = -(\cos 90° \cos\gamma + \operatorname{sen} 90° \operatorname{sen}\gamma)$$

$$v_z = -\operatorname{sen}\gamma \qquad (2.g)$$

Sustituyendo (2.e) , (2.f) y (2.g) en (2.d)

$$\bar{v} = \cos\gamma \operatorname{sen}\beta\,\bar{i} - \cos\beta \cos\gamma\,\bar{j} - \operatorname{sen}\gamma\,\bar{k} \qquad (2.2)$$

Como el rumbo y el echado tienen 90° entre sí, $\bar{u}$. -- $\bar{v}$ = 0.

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \cos\beta \cos\gamma \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\gamma \cos\beta = 0$$

Cumpliendo con la condición de ortogonalidad necesaria para vectores que representan el rumbo y echado de un plano. Un ejemplo del uso de esta notación para describir la orientación de dos planos se muestra en la fig. 2.6.

El producto cruz de $\bar{u}$ y $\bar{v}$, da el vector unitario $\bar{w}$ que es perpendicular a $\bar{u}$ y $\bar{v}$ simultaneamente y por lo tanto normal al plano descrito por tales vectores y está dado por:

$$\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - v_y u_z)\,\bar{i} + (v_x u_z - u_x v_z)\,\bar{j} + (u_x v_y - v_x u_y)\,\bar{k} \qquad (2.3)$$

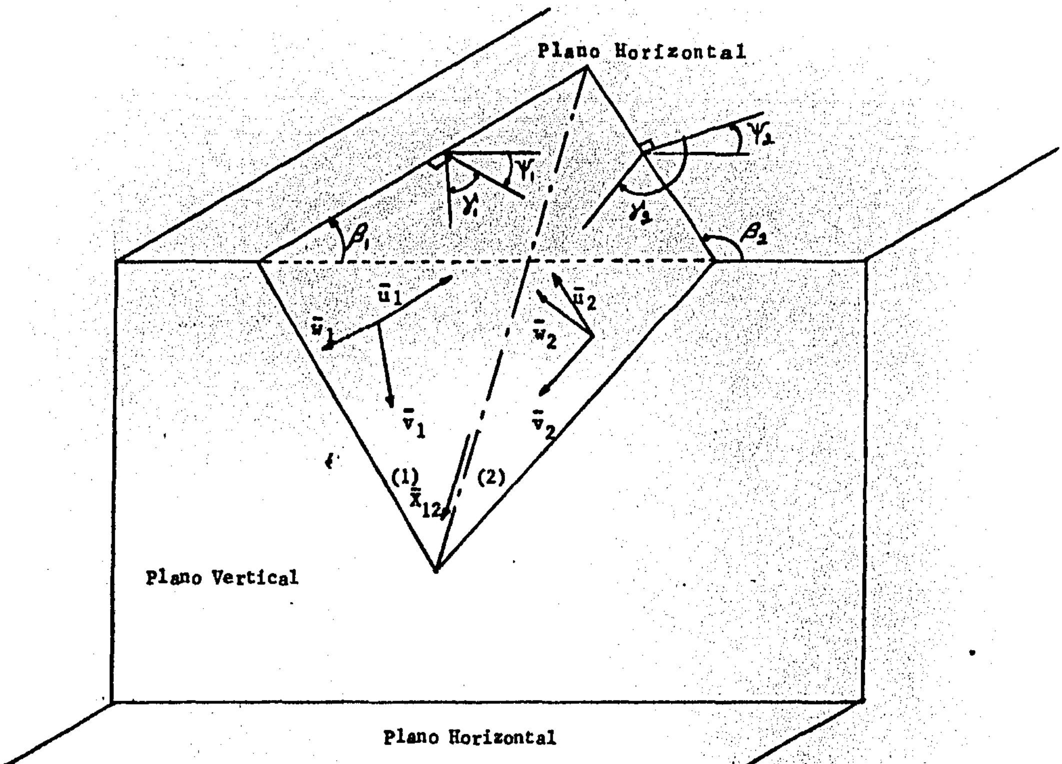


FIG. 2.6 Sistema coordenado para describir rumbos y echados

nes obtenidas.

El sentido de $\bar{w}$ lo determina el avance de un tornillo de tuerca derecha girando de $\bar{u}$ a $\bar{v}$ a través del menor ángulo que formen (menor 180°).

El vector $\bar{w}$ es unitario ya que:

$$w = u\ v\ \text{sen}\ \theta$$

como $u = v = 1$ y $\theta = 90°$

$$w = 1$$

El sentido $\bar{w}$ para los dos planos se muestra en la figura 2.6. Nótese que para el plano uno el sentido de $\bar{w}_1$ es hacia adentro del macizo rocoso y el de $\bar{w}_2$ es en sentido hacia afuera del macizo rocoso. La definición del vector unitario $\bar{w}$ es suficiente para representar la orientación de cualquier plano.

La dirección de la línea de intersección de dos planos (planos 1 y 2), está dada por el vector $\bar{x}_{12}$, que se obtiene efectuando el producto cruz de los vectores normales a dichos planos.

$$\bar{X}_{12} = \bar{w}_2 \times \bar{w}_1 \qquad (2.4)$$

Donde el sentido de $\bar{x}_{12}$ es hacia abajo a lo largo de la línea de intersección, como se muestra en la figura 2.6.

Ejemplos:

2.1.- Sea un talud cuyo rumbo es N 25° E y buza al SE 30°. Cuanto valen β y γ de un plano de debilidad cuyo rumbo es N 20° E y cuyo echado es 70° al SE.

Solución:

En este caso el eje X coincide con la línea N 25° E, ver figura del ejemplo 2.1.

Solución: $\beta = 25° - 20° = 5°$
$\gamma = 70°$

2.2.- Suponiendo el mismo talud que en problema 1, tenemos ahora un dique cuyo rumbo es N 50° W y su echado es 20° SW. Obtener γ y β ver figura del ejemplo 2.2.

2.3.- Se tiene un talud cuyo rumbo es N 50° W y buza al NE 45°.

a) Cuanto valen β y γ de un plano de estratifica

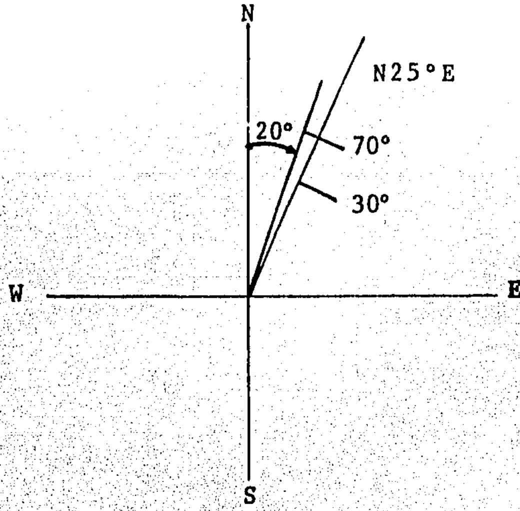
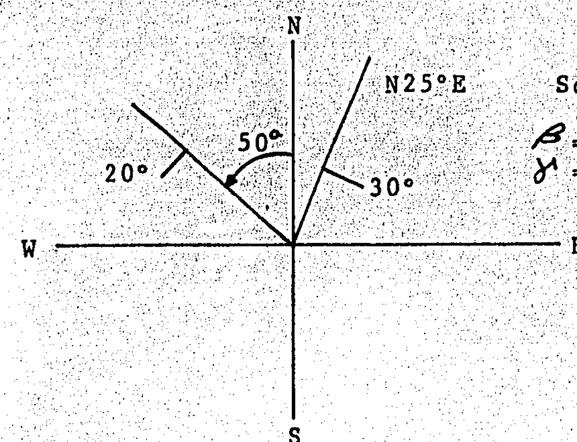


FIG. Del Ejemplo 2.1



Solución

$\beta = 50° + 25° = 75°$

$\gamma = 180° - 20° = 160°$

FIG. Del Ejmplo 2.2

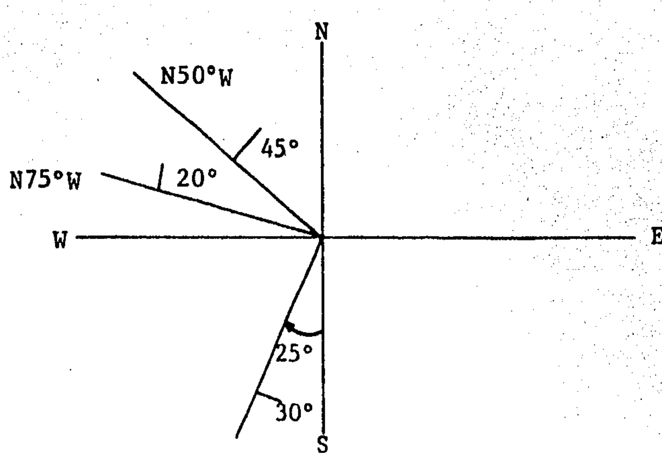


FIG. Del Ejemplo 2.3

ción, cuyo rumbo es S 25° W y su echado es 30° al SE (llamenos a este plano 2).

b) Obtener los vectores unitarios $\bar{u}_2$ y $\bar{v}_2$ del plano-2.

c) Demostrar que $\bar{u}_2$ y $\bar{v}_2$ son ortogonales.

d) Obtener el vector normal al plano de estratificación $\bar{w}_2$ y demostrar que es unitario.

e) Suponiendo otro plano de debilidad que llamaremos 1, cuyo rumbo es N 75° W y su echado es 20° al NE. Obtener la línea de intersección de los dos planos $\bar{x}_{12}$.

Solución:

a) Plano 2

$$\beta = 180° - 50° - 25° = 105°$$

$$\gamma = 180° - 30° = 150°$$

b) De acuerdo a lo expuesto

$$\bar{u}_2 = \cos 105° \,\bar{i} + \operatorname{sen} 105° \,\bar{j}$$

$$\bar{u}_2 = -.2588 \,\bar{i} + .9659 \,\bar{j}$$

$$\bar{v}_2 = \cos 150° \operatorname{sen} 105° \,\bar{i} - \cos 150° \cos 105° \,\bar{j} - \operatorname{sen} 150° \,\bar{k}$$

$$\bar{v}_2 = -.8365 \,\bar{i} - .2241 \,\bar{j} - .5 \,\bar{k}$$

c) $\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_2 = (-.2588)(-.8365) + (.9659)(-.2241) = 0$

d) $\bar{w}_2 = \bar{u}_2 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -.2588 & .9659 & 0 \\ -.8365 & -.2241 & -.5 \end{vmatrix} = [.9659(-.5)]\bar{i} + [-(-.2588)(-.5)]\,\bar{j} + [(-.2588)(-.2241) - (-.8365)(.9659)]\,\bar{k}$

$$\bar{w}_2 = -.4829 \,\bar{i} - .1294 \,\bar{j} + .8659 \,\bar{k}$$

$$|\bar{w}_2| = \sqrt{(-.4829)^2 + (-.1294)^2 + (.8659)^2} = 1$$

e) Para el plano 1

$\beta = 75° - 50° = 25°$

$\gamma = 20°$

$\bar{u}_1 = \cos 25° \ \bar{i} + \text{sen } 25° \ \bar{j}$

$\bar{u}_1 = .9063 \ \bar{i} + .4226 \ \bar{j}$

$\bar{v}_1 = \cos 20° \ \text{sen } 25° \ \bar{i} - \cos 20° \cos 25° \ \bar{j} - \text{sen } 20° \ \bar{k}$

$\bar{v}_1 = .3971 \ \bar{i} - .8516 \ \bar{j} - .342 \ \bar{k}$

$$\bar{w}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ .9063 & .4226 & 0 \\ .3971 & -.8516 & -.342 \end{vmatrix} = [(.4226)(-.342)] \ \bar{i} + [-(.9063)(-.342)] \ \bar{j} + [.9063 \ (-.8516) - (.3971)(.4226)] \ \bar{k}$$

$\bar{w}_1 = -.1445 \ \bar{i} + .3099 \ \bar{j} - .9396 \ \bar{k}$

$$\bar{X}_{12} = \bar{w}_2 \times \bar{w}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -.4829 & -.1294 & .8659 \\ -.1445 & .3099 & -.9396 \end{vmatrix} = [(-.1294)(-.9396) - (.3099)(.8659)] \ \bar{i} + [(-.1445)(.8659) - (-.4829)(-.9396)] \ \bar{j} + [(-.4829)(.3099) - (-.1445)(-.1294)] \ \bar{k}$$

$\bar{X}_{12} = -.1467 \ \bar{i} - .5788 \ \bar{j} - .1683 \ \bar{k}$

2.2.2. Resolución de Fuerzas

La componente de una fuerza $\bar{R}$ es dirección de un vector unitario $\bar{n}$ se expresa por:

$$\bar{R} \cdot \bar{n} = R \cos \theta \qquad (2.5)$$

Donde θ es el ángulo entre $\bar{R}$ y $\bar{n}$. Así por ejemplo, la componente de una fuerza $\bar{R}$ normal a un plano está dada por:

$$R_N = \bar{R} \cdot \bar{w} = R_x \; w_x + R_y \; w_y + R_z \; w_z \qquad (2.6)$$

Similarmente la componente de $\bar{R}$ en la dirección de la línea de intersección de dos planos es:

$$R_{12} = \bar{R} \cdot \frac{\bar{X}_{12}}{X_{12}} \qquad (2.7)$$

Donde $\frac{\bar{X}_{12}}{X_{12}}$ es un vector unitario en dirección de la línea de intersección de dichos planos.

La oblicuidad de una fuerza $\bar{R}$ respecto a un plano es el ángulo $\emptyset'$, que forma dicha fuerza con la normal al plano $\bar{w}$ como se muestra en la figura 2.7.

$$\tan \emptyset' = R_T / R_N$$

Donde R_N y R_T son las componentes de $\bar{R}$ normal y tangencial al plano respectivamente. Notese que

$$R_N = \bar{R} \cdot \bar{w} = R_x \; w_x + R_y \; w_y + R_z \; w_z = R \cos \emptyset'$$

y

$$\bar{R}_t = |\bar{R} \times \bar{w}| = R \operatorname{sen} \emptyset' = [(R_y w_z - R_z w_y)^2 + (R_z w_x - R_x w_z)^2 + (R_x w_y - R_y w_x)^2]^{1/2}$$

$$(2.8)$$

Por lo tanto la oblicuidad de una fuerza respecto a un plano está dada por

$$\operatorname{Tan} \emptyset' = \frac{R_T}{R_N} = \frac{[(R_y w_z - R_z w_y)^2 + (R_z w_x - R_x w_z)^2 + (R_x w_y - R_y w_x)^2]^{1/2}}{(R_x w_x + R_y w_y + R_z w_z)} \qquad (2.9)$$

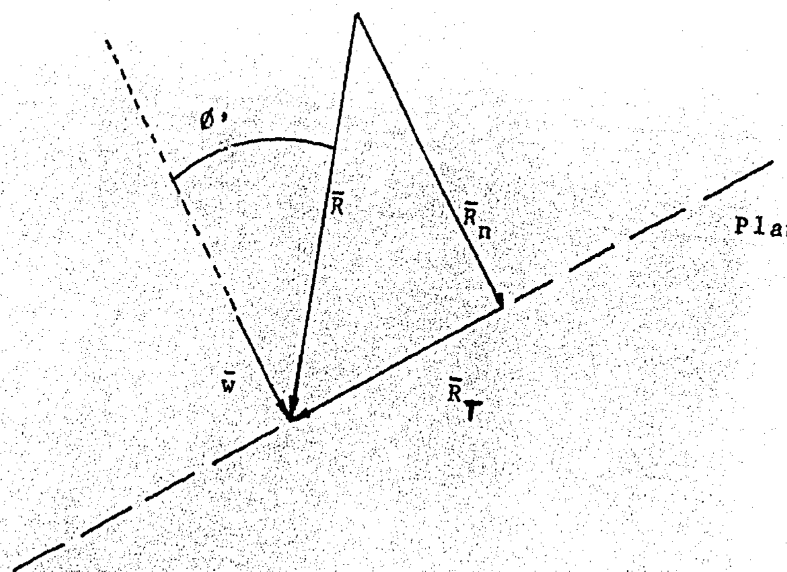


FIG. 2.7 Descomposición de una fuerza en sus componentes normal y tangecial a un plano.

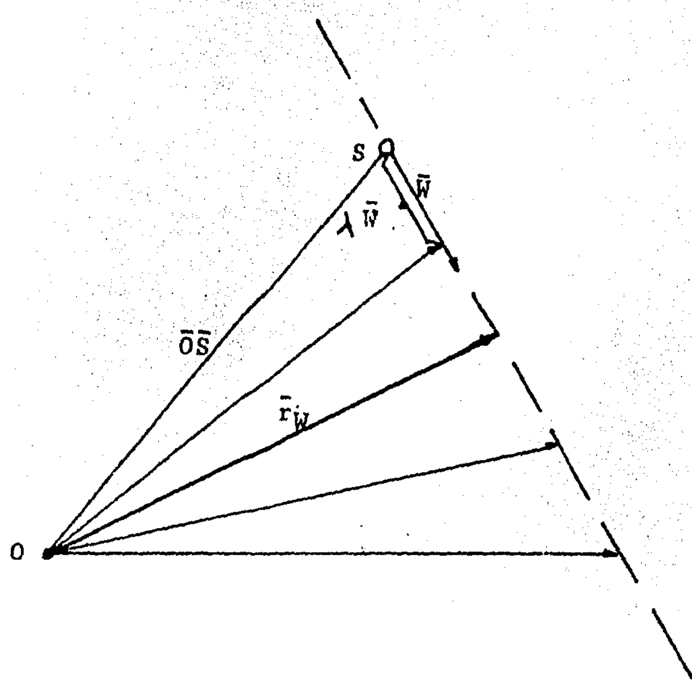


FIG. 2.8 Ecuación de la línea en notación vectorial

El vector $\bar{R}_T$ también se puede escribir como $\bar{R} - R_N \bar{w}$ que desarrollado tenemos:

$$\bar{R}_T = (R_x - R_N\, w_x)\,\bar{i} + (R_y - R_N\, w_y)\,\bar{j} + (R_z - R_N\, w_z)\,\bar{k}$$

Debido a que

$$R_N\,\bar{w} = R_n\, w_x\,\bar{i} + R_N\, w_y\,\bar{j} + R_z\, w_z\,\bar{k}$$

Así la oblicuidad se puede escribir como:

$$\tan \phi' = \frac{\left[(R_x - R_N w_x)^2 + (R_y - R_N\, w_y)^2 + (R_z - R_z\, w_z)^2\right]^{1/2}}{R_x\, w_x + R_y\, w_y + R_z\, w_z} \qquad (2.10)$$

2.2.3 Línea de Acción de una Fuerza y Punto de Intersección de 2 fuerzas.

Para poder analizar la estabilidad por rotación, debemos conocer el punto de aplicación y la dirección de una fuerza. Si se conoce el vector $\overline{OS}$ que va de un origen de coordenadas determinado hasta un punto S sobre la línea de acción de la fuerza $\bar{W}$, la línea de acción de dicha fuerza puede ser expresada como la línea que une los extremos finales del conjunto de radios vectores, expresados como

$$\bar{r}_w = \overline{OS} + \lambda \bar{W} \qquad (2.11)$$

Como se muestra en la figura 2.8.

En un problema tridimensional el conjunto de fuerzas aplicadas en general no se intersectan, y el momento de cada una de las fuerzas respecto a un eje de rotación dado, puede ser considerado separadamente, o las fuerzas pueden ser desplazadas paralelamente al eje de rotación respecto al cual se están sumando los momentos, hasta que las fuerzas se intersecten. Por ejemplo, si consideramos que la cuña mostrada en la fig. 2.9 puede rotar alrededor del eje definido por el vector unitario d, para la fuerza externa $\bar{p}$ aplicada en punto N y el peso propio $\bar{W}$ aplicado en el centro de gravedad de la cuña S. Donde cualquiera de estas fuerzas puede ser desplazada cualquier distancia k paralelamente a $\bar{d}$ sin cambiar el momento respecto a este eje de rotación, entonces las fuerzas pueden ser movidas hasta que sus líneas de acción se intersecten. Si la línea de acción de $\bar{W}$ se define como

$$\bar{r}_w = \overline{OS} + \lambda \bar{W} \qquad (\lambda = \text{constante}) \qquad (2.12)$$

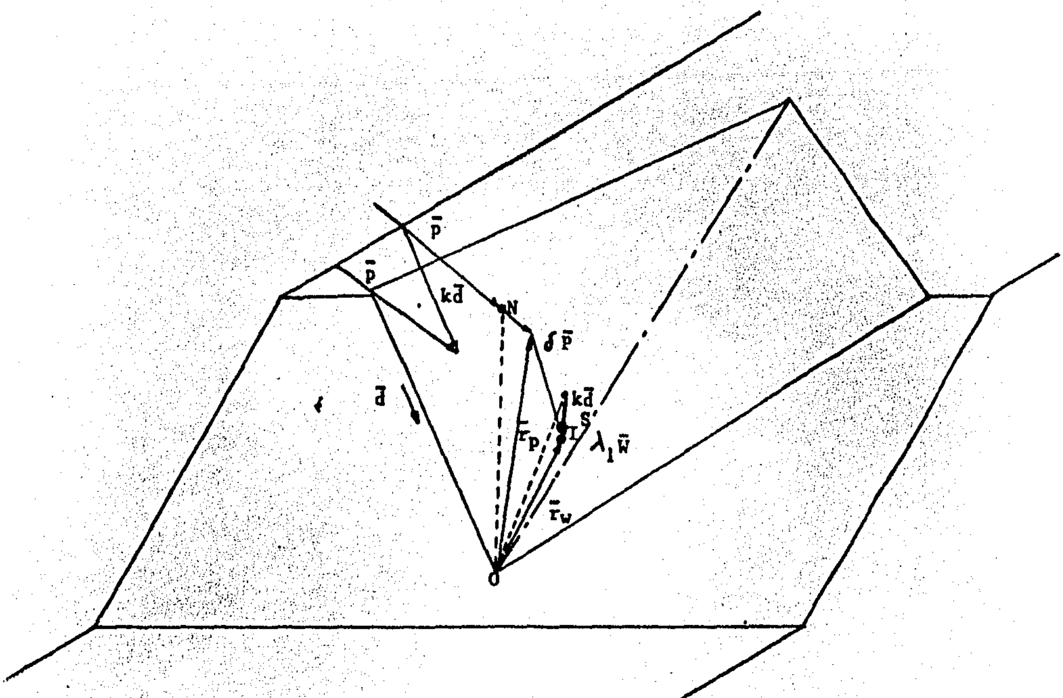


FIG. 2.9 Momento provocado por dos fuerzas con dfferentes puntos de aplicación respecto a un eje dado.

nes obtenidas.

Y la línea de acción de $\bar{P}$ se define como

$$\bar{r}_p = \overline{ON} + \delta \bar{P} \qquad (\delta = \text{constante}) \qquad (2.13)$$

La resultante $\bar{R}$ de la suma vectorial de $\bar{P}$ y $\bar{W}$ puede - ser considerada actuando en un punto de intersección I de la - siguiente manera:

$$\bar{r}_w = \bar{r}_p = K \bar{d} \qquad (2.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.12) y (2.13) en (2.14) tenemos:

$$\overline{OS} + \lambda \bar{W} = \overline{ON} + \delta \bar{P} + K \bar{d} \qquad (2.15)$$

Si escribimos 3 ecuaciones a partir de (2.15) en términos de las componentes X, Y, Z de $\bar{P}$ y $\bar{W}$ pueden ser resueltas simultaneamente para obtener:

$$\lambda = \lambda_1 \;, \quad \delta = \delta_1 \;\; \text{y} \;\; K = K_1$$

Que localiza el punto de intersección I. El vector - que va del origen O al punto I que es el punto de aplicación - de $\bar{R}$ es por lo tanto

$$\overline{OI} = \overline{OS} + \lambda_1 \bar{W} \qquad (2.16)$$

2.2.4. <u>Momento respecto a un eje.</u>

Como se muestra en la figura 2.10, la magnitud del momento respecto a un eje $\bar{d}$ y auxiliandonos del punto A, causado por la fuerza $\bar{R}$ que actúa en el punto I es:

$$M_d = (\overline{AI} \times \bar{R}) \cdot \bar{d} \qquad (2.17)$$

donde:

$$\overline{AI} = \overline{AO} + \overline{OI}$$

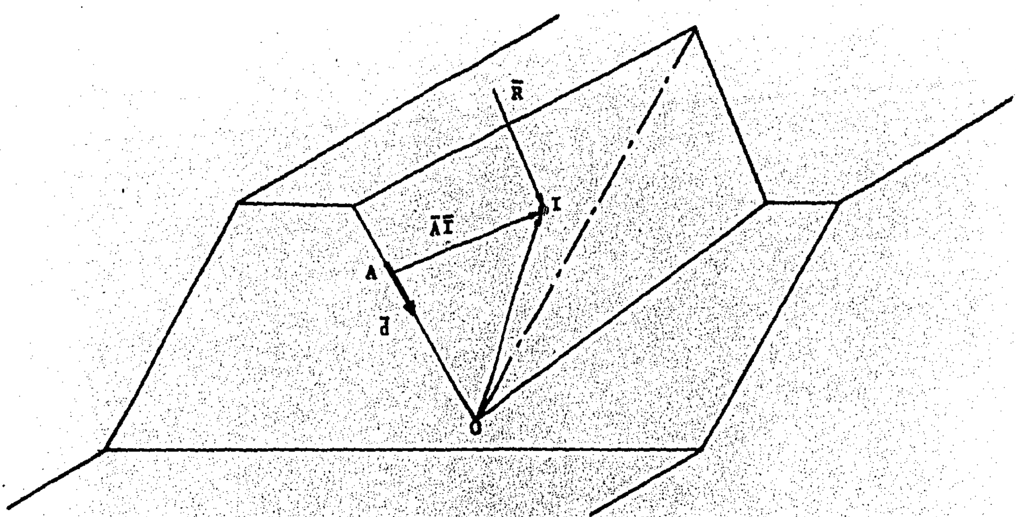


FIG. 2.10 Momento de una fuerza respecto a un eje dado.

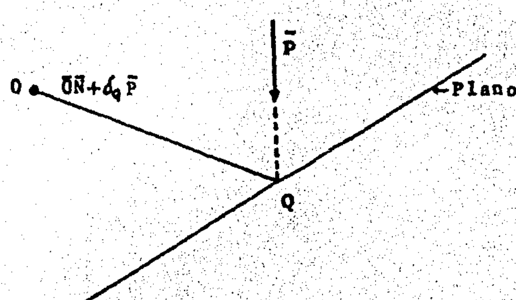


FIG. 2.11 Intersección de la línea de acción de una fuerza y un plano

2.2.5. Punto de Intersección de una Fuerza y un Plano de Debilidad.

El punto de intersección de una fuerza y un plano de-debilidad se encuentra igualando la ecuación de la línea de acción de la fuerza y la ecuación del plano.

La ecuación de plano es:

$$\bar{r}_p . \bar{w} = \text{constante} \qquad (2.18)$$

Donde:

$\bar{r}_p$: es el radio vector desde el origen hasta un punto del plano.

$\bar{w}$: es el vector unitario normal al plano.

Si el vector $\overline{OF}$ que va del origen a cualquier punto F del plano es conocido, entonces la constante de la ecuación es determinada, siendo la ecuación del plano:

$$\bar{r}_p . \bar{w} = (\overline{OF} . \bar{w})$$

El punto donde la fuerza $\bar{P}$ intersecta al plano es por lo tanto el resultado de resolver simultaneamente la ecuación-de la línea de acción de la fuerza y la ecuación del plano obteniéndose:

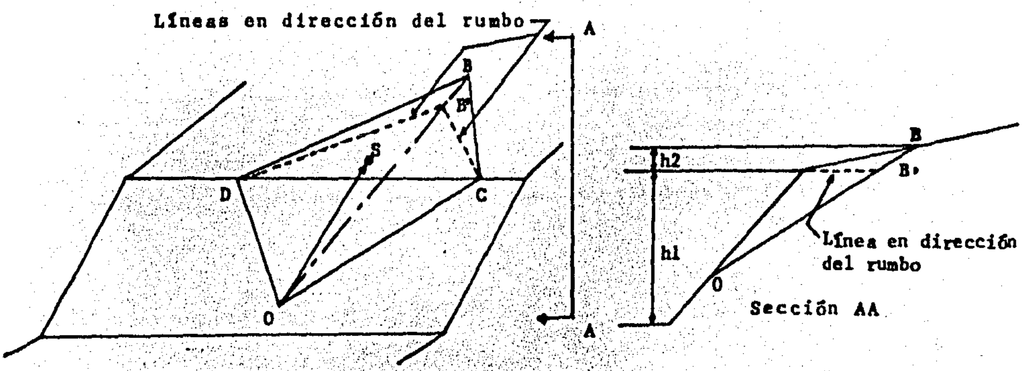
$$(\overline{ON} + \delta \bar{P}) . \bar{w} = (\overline{OF} . \bar{w}) \qquad (2.19)$$

La solución arroja como resultado δ_Q, el valor de δ define el punto Q sobre el plano donde la línea de acción de - la fuerza $\bar{P}$ lo intersecta, como se muestra en la figura 2.11.

2.2.6. Geometría de un Tetraedro

El volumen de un tetraedro como en el que se muestra-en la fig. 2.12, está dado por:

$$V = 1/6 \; |\overline{DB}' \times \overline{DC}| (h_1 + h_2) \qquad (2.20)$$



2.12 Geometría de un Tetraedro

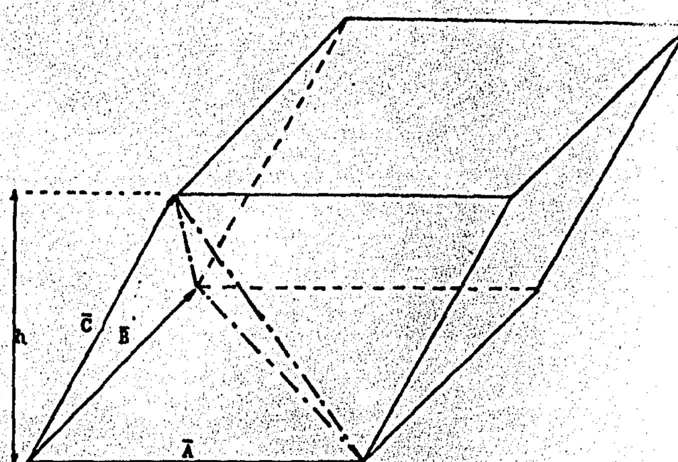


FIG. 2.13 Volumen de un paralelepipedo

El centroide S, puede ser ubicado por el vector $\overline{OS}$ -- que parte del origen y es:

$$\overline{OS} = 1/4\ (\overline{OD} + \overline{OC} + \overline{OB}) \qquad (2.21)$$

Las componentes de $\overline{OS}$ son por lo tanto las coordenadas del centroide referidas a un sistema de ejes coordenados - cuyo origen es O.

Deducción de 2.20

En primer término se descompone la cuña de roca en -- dos tetraedros, uno es DOCB', y el otro es DCBB'. El volumen - de un tetraedro es igual a la sexta parte del volumen de un paralelepipedo que tiene 3 aristas concurrentes comunes al tetraedro, entonces se debe encontrar el volumen de cada uno de- los tetraedros por separado y luego sumarlos.

Volumen de DOCB' es:

$$V_{DOCB'} = \frac{1}{6}\ |\overline{DB'} \times \overline{DC}|\ h_1$$

Volumen de DCBB':

$$V_{DCBB'} = \frac{1}{6}\ |\overline{DB'} \times \overline{DC}|\ h_2$$

Entonces:

$$V = \frac{1}{6}|\overline{DB'} \times \overline{DC}|\ h_1 + \frac{1}{6}\ |\overline{DB'} \times \overline{DC}|\ h_2 = \frac{1}{6}|\overline{DB'} \times \overline{DC}|(h_1+h_2)$$

La anterior deducción tiene sus bases en que la interpretación geométrica del producto cruz es la siguiente:

Sean los vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$ (ver figura 2.13), entonces - la magnitud del vector obtenido del producto cruz de $\bar{A}$ y $\bar{B}$, es decir, $|\bar{A} \times \bar{B}|$ representa el área del paralelogramo formado- por dichos vectores, ahora bien, dicha área multiplicada por - h, que es la altura del paralelepípedo formado por los tres -- vectores da como resultado el volumen de dicho paralelepípedo, entonces el volumen del tetraedro que posee 3 arístas concu- - rrentes que son $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$ es la sexta parte del volumen del paralelepípedo que posee las mismas arístas comunes.

CAPITULO TRES

ANALISIS DE TALUDES EN MACISOS ROCOSOS POR METODOS VECTORIALES

3.1 GENERALIDADES

En este artículo se exponen métodos analíticos para determinar el factor de seguridad estático para taludes en roca. Los casos examinados incluyen taludes cortados por una, dos o tres familias de planos de debilidad, se dan ejemplos resueltos de tales métodos con el objeto de hacer más clara la explicación.

3.2 CALCULO DE ESTABILIDAD PARA DESLIZAMIENTO EN UN PLANO POR MEDIO DE ANALISIS VECTORIAL

3.2.1. Cálculo del Factor de Seguridad para Cargas Estáticas.

El caso particular más simple de un problema de estabilidad de taludes en roca, es cuando el rumbo de alguno de los planos de debilidad es paralelo al rumbo de la cara del talud, como se muestra en la fig. 3.1. Para el sistema coordenado expuesto en el capítulo 2 esta condición puede ser expresada cuando las componentes Y y Z del vector rumbo ($\bar{u}$) son iguales a cero.

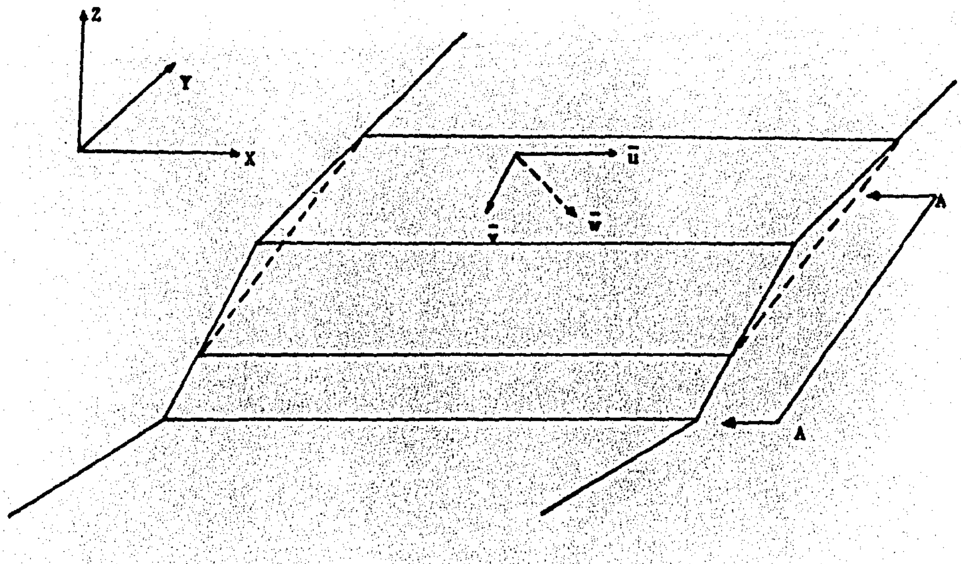
$$\bar{u} = (u_x, u_y, u_z) = (1,0,0)$$

Entonces el vector echado ($\bar{v}$) tiene su componente X igual a cero.

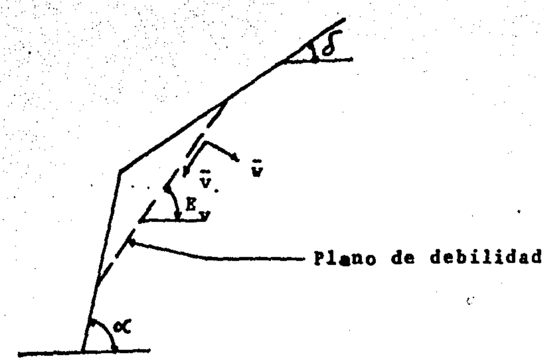
$$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z) = (0, v_y, v_z)$$

La inclinación del plano respecto a la horizontal, E_v, determinará la posibilidad cinemática del deslizamiento. El ángulo E_v está dado por:

$$\text{Tan } E_v = \frac{v_z}{v_y} = \tan \gamma \tag{3.1}$$



(a)



(b)

FIG. 3.1 Deslizamiento sobre un plano cuyo rumbo es paralelo al rumbo de la cara del talud.

donde γ es el echado del plano. Para que el deslizamiento sea cinemáticamente posible, E_v debe ser menor que α si $0 < \alpha < \pi$ como se muestra en la fig. 3.1 (b). Si $\alpha = \pi$ entonces E_v debe -- ser menor que δ para que el deslizamiento sea posible.

Para un talud en el cual sólo actúa la atracción de - la gravedad y el plano de debilidad tiene un rumbo paralelo al de la cara del talud, el deslizamiento será paralelo al vector $\bar{v}$ y en el mismo sentido que el echado. La magnitud de la componente T del peso $\bar{W}$ que actúa paralelamente a $\bar{v}$ se puede obtener a partir de:

$$T = \bar{W} \cdot \bar{v} \tag{3.2}$$

donde $\bar{W} = (0,0-w)$. El vector $\bar{T}$ esta dado por:

$$\bar{T} = T\,\bar{v} \tag{3.3}$$

La magnitud de la componente de $\bar{W}$ normal a la dirección del -- deslizamiento es:

$$N = \bar{W} \cdot \bar{w} \tag{3.3}$$

donde $\bar{w}$ es el vector unitario normal al plano de deslizamiento dado por $\bar{u} \times \bar{v}$. La magnitud de la fuerza que resistirá al deslizamiento está dada por N tan $\emptyset$, donde $\emptyset$ es el ángulo de fric-- ción entre las superficies de la junta en dirección del deslizamiento.

El factor de seguridad para deslizamiento se define - como el cociente de la fuerza resistente entre la fuerza ac- - tuante en la dirección del deslizamiento, y esta dada por:

$$F.S. = \frac{N \tan \emptyset}{T} = \frac{(\bar{W} \cdot \bar{w}) \operatorname{Tan} \emptyset}{(\bar{W} \cdot \bar{v})} \tag{3.4}$$

Para el caso mostrado en la fig. 3.1 el vector unitario en la dirección del rumbo esta dado por $\bar{u} = \bar{i}$; $u_x = 1$ - y el echado esta dado por $\bar{v} = v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$. El vector unitario $\bar{w}$ normal al plano de debilidad será entonces:

$$\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & v_y & v_z \end{vmatrix} = -\,v_z\,\bar{j} + v_y\,\bar{k}$$

Por lo tanto la magnitud de la componente del peso en dirección del deslizamiento es:

$$T = \bar{W} \cdot \bar{v} = - w\, v_z \qquad (3.5)$$

y la componente del peso normal al plano de debilidad será:

$$N = \bar{W} \cdot \bar{w} = - W\, v_y \qquad (3.6)$$

Por lo tanto el factor de seguridad de acuerdo a la ecuación - 3.4 es:

$$F.S. = \frac{- W\, v_y \tan \phi}{- W\, v_z} = \frac{v_y}{v_z} \tan \phi$$

$$\text{como } \frac{v_z}{v_y} = \tan \gamma \; ; \text{ entonces } \frac{v_y}{v_z} = \frac{1}{\tan \gamma}$$

$$\therefore \quad F.S. = \frac{\tan \phi}{\tan \gamma} \qquad (3.7)$$

que es una expresión del factor de seguridad para taludes po-- tencialmente capaces de deslizarse en la dirección y sentido - del vector echado $\bar{v}$ bajo la acción del peso propio solamente.

Si sobre un talud actúan el peso propio $\bar{W}$, y una fuer za debida a la presión del agua $\bar{U}$ actuando en el plano poten-- cial de falla en la dirección del vector unitario $-\bar{w}$, entonces en factor de seguridad está dado por:

$$F.S. = \frac{N-U}{T} \operatorname{Tan} \phi = \frac{(\bar{W} \cdot \bar{w}) - U}{(\bar{W} \cdot \bar{v})} \tan \phi \qquad (3.8)$$

cuando la magnitud de la fuerza producida por la presión del - agua está dada por $U = KW$, la ecuación 3.8 se convierte en:

$$F.S. = \frac{(N-U) \tan \phi}{T} = \frac{(-W\, v_y - KW)}{- W\, v_z} \tan \phi$$

$$F.S. = \frac{v_y}{v_z} \frac{W}{W} \tan \phi + \frac{KW}{v_z W} \tan \phi$$

$$F.S. = \frac{\tan \phi}{\tan \gamma} + \frac{K \tan \phi}{v_z}$$

$$\text{como } \operatorname{Sen}\gamma = \frac{-v_z}{v} \Longrightarrow \operatorname{Sen}\gamma = -v_z$$

$$F.S. = \frac{\tan \phi}{\tan \gamma} - K \frac{\tan \phi}{\operatorname{sen} \gamma} \tag{3.9}$$

donde γ es el echado del plano potencial de falla y $v_z = -\operatorname{Sen}\gamma$. El problema también puede ser considerado cuando el deslizamiento tiene posibilidad de ocurrir en una junta o fractura como las mostradas en la figura 3.2 (a) o 3.2 (b). En el caso general, la cuña que potencialmente puede deslizar, puede estar sujeta a la acción de su peso propio $\bar{W}$, la fuerza que produce la presión del agua $\bar{U}$ actuando normal y en el plano de deslizamiento y una fuerza $\bar{Q}$ que puede ser aplicada por una estructura, como por ejemplo una presa. En muchos casos en que se involucran grandes taludes, el peso propio $\bar{W}$ será muy grande en compración de $\bar{Q}$. En el caso del análisis por deslizamiento sobre un plano con las fuerzas $\bar{W}$, $\bar{U}$ y $\bar{Q}$ actuando en la cuña, las fuerzas se suman vectorialmente obteniéndose una resultante $\bar{R}$ que está dada por:

$$\bar{R} = \bar{W} + \bar{U} + \bar{Q} \tag{3.10}$$

La fuerza resistente en el plano abc mostrado en la figura 3.3 es $\bar{R}'$ y es igual y de sentido contrario a $\bar{R}$. Por lo tanto la dirección en que ocurre el deslizamiento está dada por la dirección de la proyección de $\bar{R}$ sobre el plano abc y no necesariamente en la dirección del echado.

Por lo tanto el factor de seguridad para este caso se obtiene de la siguiente manera:

Para el caso general:

$$\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

$$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

La magnitud de la componente T de la resultante de fuerzas $\bar{R}$ que actuan sobre la cuña, en dirección del deslizamiento es:

$$T = |\bar{R} X \bar{w}| = [(R_y w_z - R_z w_y)^2 + (R_z v_x - R_x w_z)^2 + (R_x w_y - R_y w_x)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{3.a}$$

T: Fuerza tangente al plano de debilidad

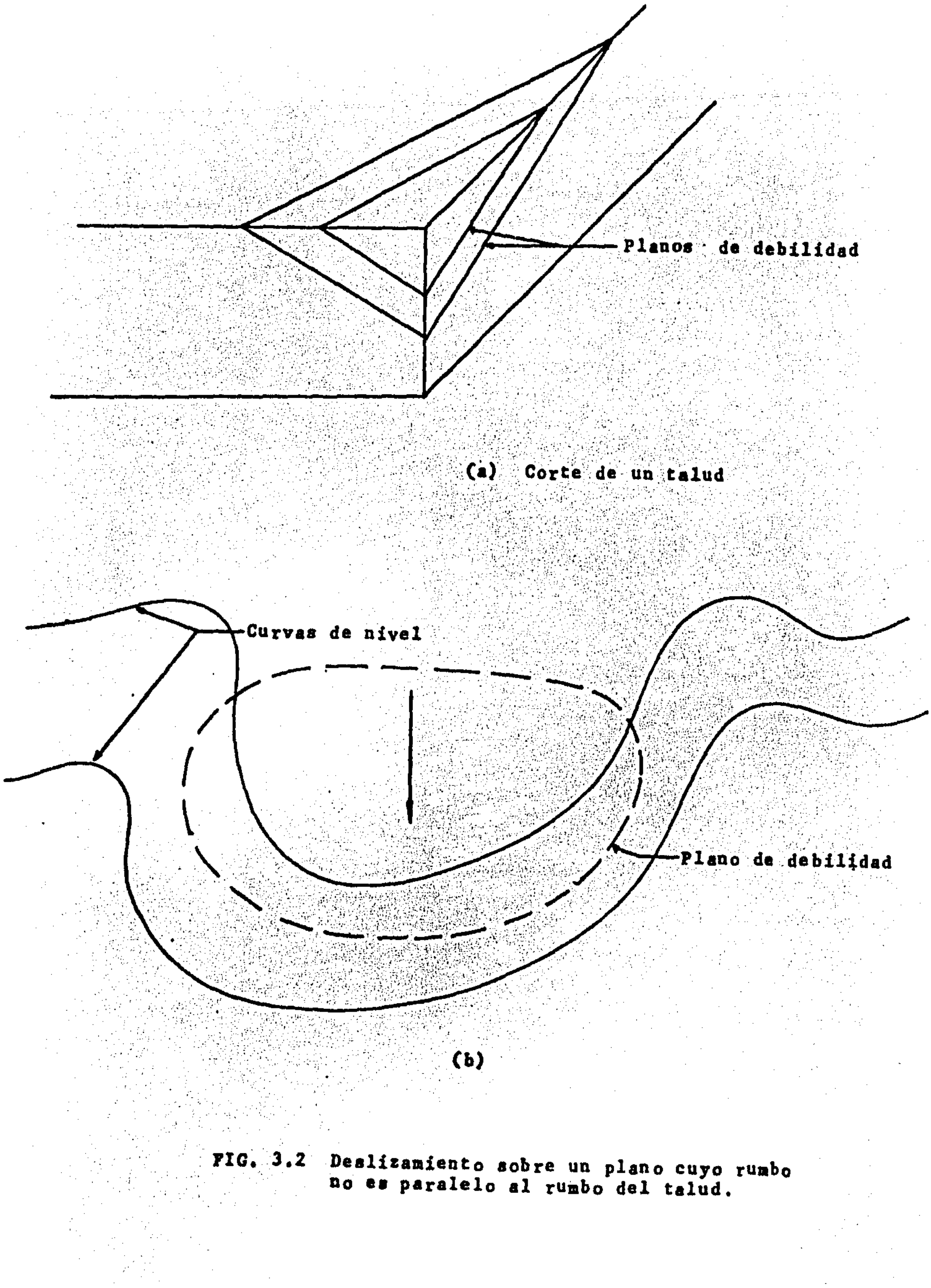


FIG. 3.2 Deslizamiento sobre un plano cuyo rumbo no es paralelo al rumbo del talud.

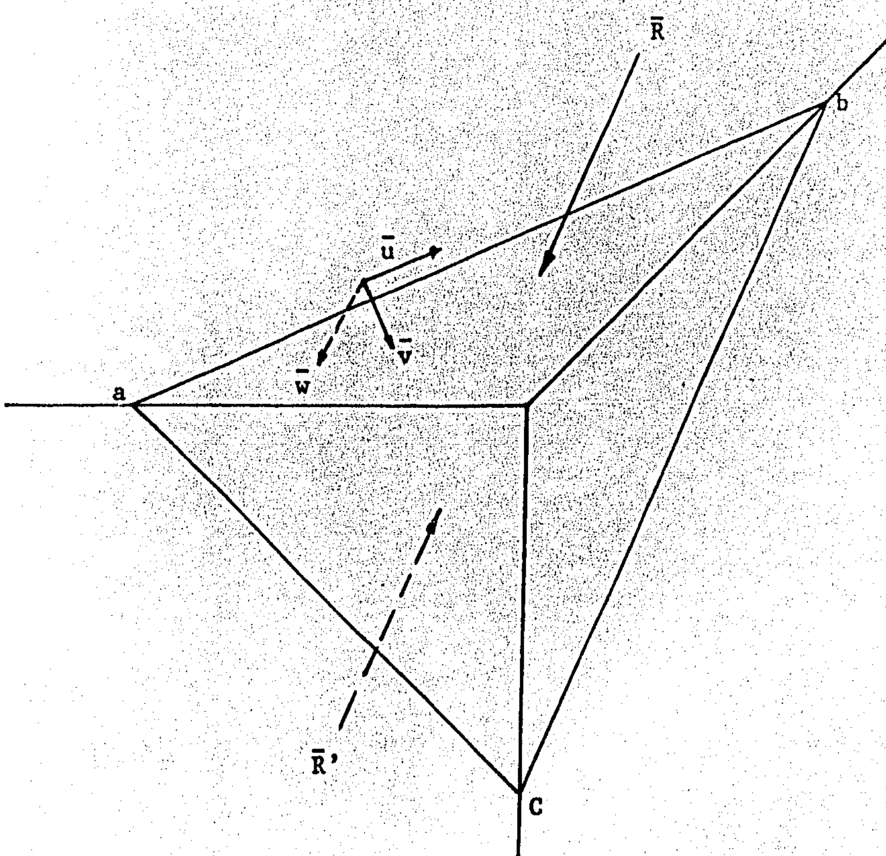


FIG. 3.3 Deslizamiento sobre un plano

La magnitud de la componente de $\bar{R}$ normal a la dirección de deslizamiento es:

$$N = \bar{R} \cdot \bar{w} = R_x w_x + R_y w_y + R_z w_z \qquad (3.b)$$

La magnitud de la fuerza resistente disponible está dada por Ntan ϕ.

El factor de seguridad para deslizamiento será entonces.

$$F.S. = \frac{N \tan \phi}{T} = \frac{(\bar{R} \cdot \bar{w}) \tan \phi}{|\bar{R} x \bar{w}|} \qquad (3.c)$$

sustituyendo 3.a y 3.b en 3.c

$$F.S. = \frac{(R_x w_x + R_y w_y + R_z w_z) \operatorname{Tan} \phi}{[(R_y w_z - R_z w_y)^2 + (R_z w_x - R_x w_z)^2 + (R_x w_y - R_y w_x)^2]^{1/2}}$$

observando la fig. 2.7 y a partir de la ecuación 3.9 se obtiene el siguiente resultado:

$$F.S. = \frac{\tan \phi}{\tan \phi'} \qquad (3.11)$$

3.3 EJEMPLOS DE ANALISIS POR DESLIZAMIENTO SOBRE UN PLANO POR MEDIO DEL CALCULO VECTORIAL

En esta sección se hacen cálculos sobre estabilidad de taludes por medio del análisis vectorial para cinco diferentes casos en los que el deslizamiento ocurre sobre un plano.

Ejemplo 3.1. Considerando una cuña de roca que se desliza sobre un plano cuyo rumbo es Este-Oeste, y tiene un echado de 30° hacia el Sur y tiene un ángulo de fricción de 40°.

Se tiene que la dirección positiva del eje X es hacia el Este, la dirección positiva de Y es hacia el Norte, y la di rección positiva de Z apunta hacia arriba. El vector unitario en la dirección del rumbo es: $\bar{u} = (1,0,0)$.

El vector unitario en la dirección del echado es:

como $\beta = 0°$; $\gamma = 30°$

$$\bar{v} = \text{Cos}\,\gamma\ \text{Sen}\,\beta\ \bar{i} - \text{Cos}\,\gamma\ \text{Cos}\,\beta\ \bar{j} - \text{Sen}\,\gamma\ \bar{k}$$

$$\bar{v} = \text{Cos}\ 30°\ \text{Sen}\ 0°\bar{i} - \text{Cos}\ 30°\ \text{Cos}\ \bar{j} - \text{Sen}\ 30°\ \bar{k}$$

$$\bar{v} = (0, -.866, -.5)$$

Y el vector unitario normal al plano es:

$$\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -.886 & -.5 \end{vmatrix}$$

$$\bar{w} = (0, .5, -.866)$$

El sentido de $\bar{w}$ es hacia adentro del macizo rocoso.

CASO I

Primero consideremos el factor de seguridad de la cuña cuando solo actúa sobre ella el peso propio. En este caso la resultante $\bar{R}$ es igual al peso $\bar{W}$.

$$\bar{R} = \bar{W} = (0, 0, -W)$$

La magnitud de la componente $\bar{R}$ normal al plano es:

$$N = \bar{R} \cdot \bar{w} = (0)(0)+(0)(.5) + (-W)(-.866) = .866\ W$$

Entonces

$$\bar{N} = .866W\ \bar{w} = .866W(.5\ \bar{j} - .866\bar{k}) = .433W\ \bar{j} - .75\ W\ \bar{k}$$

La componente de $\bar{R}$ tangencial al plano de deslizamiento es:

$$\bar{T} = \bar{R} - \bar{N} = (0-0)\ \bar{i} + (0-.433W)\bar{j} + (-W-.75W)\bar{k}$$

$$\bar{T} = -.433W\bar{j} - .25W\bar{k}$$

La magnitud de $\bar{T}$ está dada por:

$$T = [T_x^2 + T_y^2 + T_z^2]^{\frac{1}{2}} = [(-.433W)^2 + (-.25\ W)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$T = W[(-.433)^2 + (-.25)^2]^{\frac{1}{2}} = .5W$$

Entonces

$$F.S. = \frac{N \tan \phi}{T} = \frac{.866W \tan 40°}{.5W} = 1.455$$

Ahora si corroboramos el resultado por medio de la ecuación -- 3.7

$$F.S. = \frac{\tan 40°}{\tan 30°} = 1.455$$

CASO II

Consideremos ahora que una fuerza $\bar{A}$ actúa sobre la cuña además del peso propio. La fuerza $\bar{A}$ actua paralelamente al rumbo (hacia el Este) y tiene una magnitud de $\bar{A}$= .2W

Por lo tanto $\bar{R} = \bar{A}+\bar{W} = (.2W,0,0)+(0,0-W)=(.2W,0,-W)$

$$N = \bar{R}.\ \bar{w} = (.2W)(0)+(0)(0)+(-W)(-.866) = .866W$$

Y $$\bar{N} = N\ \bar{w} = (0,\ .433\ W,\ -.75\ W)$$

La componente de $\bar{R}$ tangencial al plano es:

$$\bar{T} = \bar{R} - \bar{N} = (.2W - 0, 0 - .433\ W, - W + .75\ W) = (.2W, - .43W, -.25\ W)$$

$$T = [.2W^2 + (-.43W)^2 + (-.25W)^2]^{1/2} = W\ [.2^2 + .43^2 + .25^2\ ]^{1/2} = .54W$$

$$\therefore\ F.S. = \frac{N\ \tan \phi}{T} = \frac{.866\ W\ \tan 40°}{.54\ W} = 1.35$$

Nótese que en este caso el deslizamiento no ocurre en la dirección del echado, sino que en la dirección del vector $\bar{T}$.

CASO III

Considérese ahora que sobre la cuña actúa su peso propio y una fuerza $\bar{A}$ que tiene una magnitud de $A = .2W$ y que actúa en la dirección del vector unitario que representa el echado $\bar{v}$.

En este caso la componente normal al plano sigue siendo, $N = W.\bar{w} = .866\ W$ como en el caso I. La magnitud de la fuerza que produce el deslizamiento, $\bar{T}$, es la suma de las magnitudes de $\bar{A}$ mas la proyección del peso propio sobre el plano. Entonces el factor de seguridad está dado por:

$$F.S. = \frac{.866W\ \tan 40°}{.5W + .2W} = 1.04$$

CASO IV

Supongamos ahora que sobre el plano de deslizamiento- actua una fuerza debida a la presión del agua $\bar{U}$, la cual aumenta mientras que el factor de seguridad decrece de 1.455 a 1. - La fuerza debida a la presión del agua no afecta a la fuerza - actuante $\bar{T}$, por lo tanto como en el caso I, $T = .5W$.

El peso de la cuña sigue siento $\bar{W}$.

La magnitud de la fuerza normal al plano, N, se reduce debido a la fuerza que proporciona el agua U entonces:

$$N = .866\ W - U$$

$$F.S. = 1 = \frac{.866\ W - U}{.5W}\ \tan 40°$$

despejando U.

$$U = .866\ W - \frac{.5W}{\tan 40°} = .866W - .596W = .27W$$

Comprobando con la ecuación (3.9)

$$F.S. = 1 = \frac{\tan \phi}{\tan \gamma} - \frac{K \tan \phi}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{\tan 40°}{\tan 30°} - \frac{K \tan 40°}{\operatorname{sen} 30°}$$

despejando K

$$K = \frac{\frac{\tan 40°}{\tan 30°} - 1}{\frac{\tan 40°}{\operatorname{sen} 30°}} = \frac{1.453 - 1}{1.678} = .27$$

y como $U = KW \Longrightarrow$

$$U = .27\ W$$

CASO V

Supongamos la misma cuña, sobre la cual actua el peso propio, una fuerza debida a la presión del agua de magnitud -- U=.44 W cuya dirección es normal al plano de deslizamiento y - una fuerza $\bar{A}$ que tiene una magnitud de A=.6W que actúa en una dirección S 45° W con un echado de 10° entonces:

$$\bar{W} = (0,\ 0,\ -\ w)$$

$$\bar{U} = .44W(-\bar{w}) = (0,\ -.22W,\ .381\ W)$$

El vector unitario $\bar{a}$ en la dirección de la fuerza $\bar{A}$ esta dado- por la ecuación 2.2 donde:

$\gamma = 170°$ y $\beta = 135°$, por lo tanto

$$\bar{a} = (\cos 170° \operatorname{sen} 135°)\,\bar{i} - (\cos 135° \cos 170°)\,\bar{j} - \operatorname{sen} 170°\,\bar{k}$$

$$\bar{a} = (-.696,\ -.696,\ -.174)$$

Para la obtención de la fuerza $\bar{A}$ en términos del vector unitario $\bar{a}$ lo que se hizo fue considerar este vector como si se tratara del vector $\bar{v}$ contenido en un plano imaginario cuyo rumbo es N 45° W para así obtener β y γ y poder calcular su dirección a partir de la ecuación 2.2.

Por lo tanto.

$$\bar{A} = A\bar{a} = .6W\ (-.696,\ -.696,\ -.174) = (-.418W,\ -.418W,\ -.104W)$$

y

$$\bar{R} = \bar{W} + \bar{U} + \bar{A} = (-.418W,\ -.22W -.418W,\ -W + .318W -.104W)$$

$$\bar{R} = (-.418W,\ -.638W,\ -.723W)$$

La magnitud de la componente de $\bar{R}$ normal al plano de deslizamiento es:

$$N = \bar{R}.\bar{w} = -.319W + .626\ W = .307W.$$

$$\therefore\quad \bar{N} = N\ \bar{w} = .307W\ (0,\ .5,\ -.866) = (0,\ .154W,\ -.266W)$$

La componente tangencial de $\bar{R}$ sobre el plano de deslizamiento es:

$$\bar{T} = \bar{R} - \bar{N} = (-.418W,\ -.638W -.\ 154W,\ -.723W + .266W)$$

$$\bar{T} = (-.418W,\ -.792W,\ -.457W).$$

$$T = W\ [(-.488)^2 + (-.792)^2 + (-.457)^2]^{1/2} = 1.005W$$

$$F.S. = \frac{N \tan \emptyset}{T} = \frac{.307W \tan 40°}{1.005W}$$

$$F.S. = .256.$$

3.4 ANALISIS VECTORIAL DE ESTABILIDAD DE TALUDES QUE CONTIENEN 2 FAMILIAS DE PLANOS DE DEBILIDAD.

3.4.1 Cálculo del factor de seguridad para cargas estáticas.

3.4.1.1 Descripción de la geometría y de las cargas.

El caso general de dos sistemas de planos de debilidad se muestra en la figura 3.4, donde los planos 1 y 2 denotan las juntas, los planos 3 y 4 definen las caras del talud, γ_1 y γ_2 denotan el echado de los planos 1 y 2, β_1 y β_2 denotan el rumbo de los planos 1 y 2 medidos en sentido antihorario a partir de la rama positiva del eje X, y α y δ denotan la inclinación de los planos 3 y 4 respecto a la horizontal. Los vectores unitarios en dirección del rumbo de los planos 1 y 2 están dados por la ecuación 2.1

$$\bar{u}_1 = (\cos\beta_1 , \quad \operatorname{sen}\beta_1, \quad 0)$$

$$\bar{u}_2 = (\cos\beta_2 , \quad \operatorname{sen}\beta_2 , \quad 0)$$

y los vectores unitarios en la dirección del echado para los planos 1 y 2 están dados por la ecuación 2.2

$$\bar{v}_1 = (\cos\gamma_1 \quad \operatorname{sen}\beta_1, \ -\cos\gamma_1 \quad \cos\beta_1, \ -\operatorname{sen}\gamma_1)$$

$$\bar{v}_2 = (\cos\gamma_2 \quad \operatorname{sen}\beta_2, \ -\cos\gamma_1 \quad \cos\beta_1, \ -\operatorname{sen}\gamma_1)$$

Los vectores unitarios normales a cada plano son:

$$\bar{w}_1 = \bar{u}_1 \times \bar{v}_1$$

$$\bar{w}_2 = \bar{u}_2 \times \bar{v}_2$$

Nótese en la figura 3.4 que el sentido de $\bar{w}_1$ es hacia adentro del macizo rocoso y $\bar{w}_2$ tiene un sentido hacia afuera del macizo rocoso. También nótese que el plano designado como 1 es aquel que tiene el menor valor de β . En el caso en que el rumbo de 2 planos sea igual, el plano que se designará como 1 es quel con el menor valor de γ . <u>Esta convención es necesaria para mantener la convención de signos establecida para las siguientes operaciones vectoriales</u>.

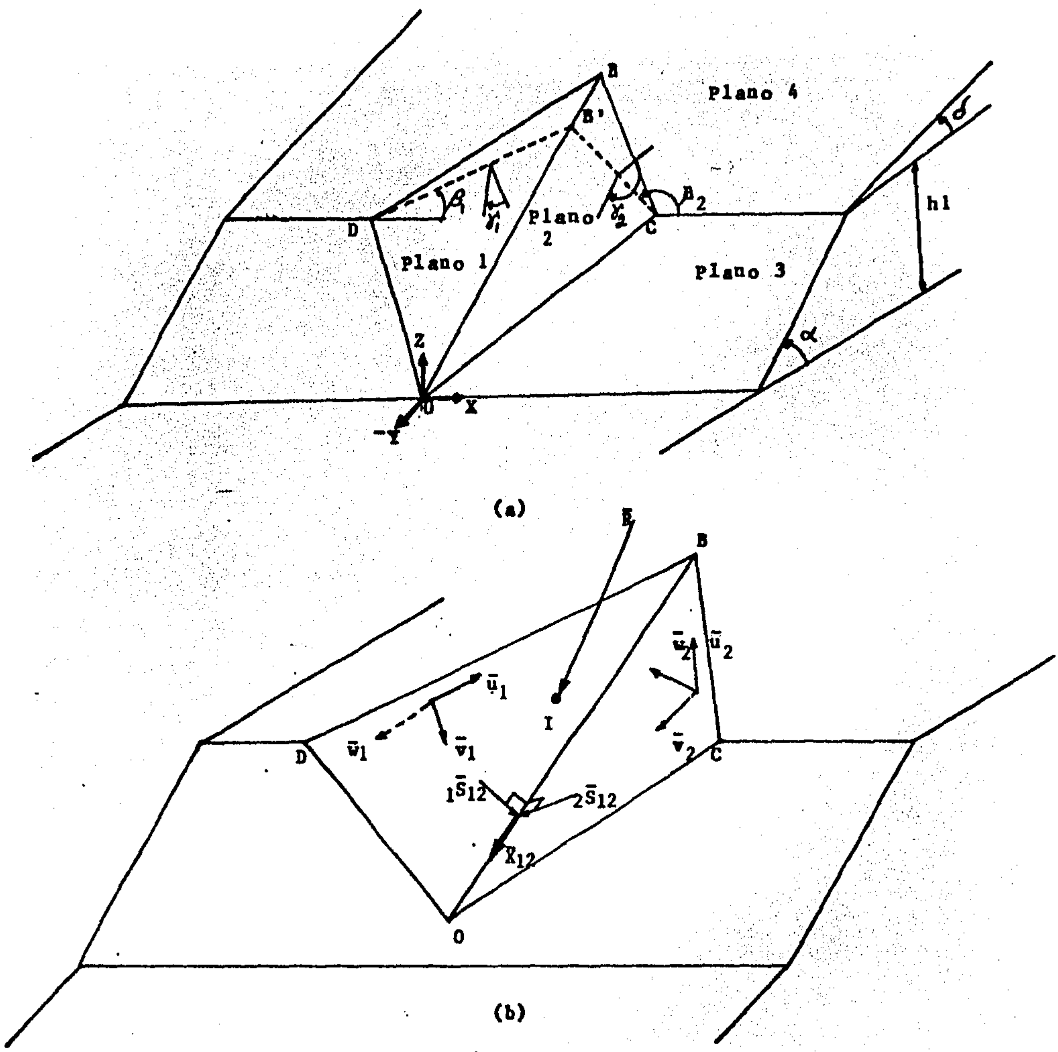


FIG. 3.4 Estabilidad de una cuña limitada por 2 planos de debilidad.

Las fuerzas actuantes son (1) peso propio $\bar{W}$ aplicado en el centro de gravedad de la cuña considerada, (2) alguna carga viva $\bar{Q}$ aplicada en cualquier punto (3) fuerzas debidas a la presión del agua en las juntas $\bar{U}_1$ y $\bar{U}_2$ actuando en los planos 1 y 2 respectivamente.

La resultante $\bar{R}$ de las fuerzas actuantes se puede determinar cualquiera que sea el caso, y cuyo punto de aplicación será el punto I.

3.4.1.2. Determinación del modo de falla por deslizamiento.

Para el caso de un tetraedro delimitado por dos planos sobre los cuales descansa, que pueden ser familias de juntas que se intersectan, la falla puede ocurrir mediante un deslizamiento a lo largo de la línea de intersección de los 2 planos o por deslizamiento sobre uno u otro de ellos.

El primer paso para determinar el modo de falla es checar si las fuerzas actuantes tienden a levantar el tetraedro de alguno o de ambos planos de soporte. Por lo tanto considerando la cuña de roca OBCD (fig. 3.4), la resultante $\bar{R}$ tiende a romper el contacto entre el tetraedro y los planos 1 y 2 si se cumplen las siguientes expresiones simultaneamente.

$$\left.\begin{array}{l} \bar{R} \cdot \bar{w}_1 \quad < 0 \\ \text{y} \\ \bar{R} \cdot \bar{w}_2 \quad > 0 \end{array}\right\} \qquad (3.12)$$

respectivamente. Si se cumplen estas desigualdades la interpretación física es que existe una componente de $\bar{R}$ normal al plano que tiende a separar al tetraedro del macizo rocoso en el plano de estudio.

Si las ecuaciones 3.12 muestran que la fuerza resultante $\bar{R}$ tiende a levantar el tetraedro de ambos planos de soporte, entonces el equilibrio no es posible a menos que las juntas tengan resistencia a la tensión o se coloquen anclas para tomar la tensión calculada.

Normalmente esto no ocurre para taludes grandes sobre los que actúa su peso propio y la presión de poro, pero si puede ocurrir para tetraedros pequeños cercanos a la superficie de taludes muy inclinados. Si las ecuaciones 3.12 demuestran que al tetraedro se separa de uno de los planos de soporte entonces podemos decir categóricamente que el deslizamiento no ocurrirá sobre ese plano.

Si las ecuaciones 3.12 muestran que no ocurre separación de la cuña respecto a los planos de soporte

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{R} \cdot \bar{w}_1 & > 0 \\ \bar{R} \cdot \bar{w}_2 & < 0 \end{array}\right\} \qquad (3.12a)$$

entonces debemos realizar otros estudios cinemáticos para conocer si el modo de deslizamiento será solamente sobre el plano 1 o sobre el plano 2 o sobre la línea de intersección de ambos.

Para poder evaluar el modo de deslizamiento es necesario definir 2 nuevos vectores ${}_1\bar{S}_{12}$ y ${}_2\bar{S}_{12}$ de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} {}_1\bar{S}_{12} = \overline{X_{12}} \times \bar{w}_1 \\ {}_2\bar{S}_{12} = \overline{X_{12}} \times \bar{w}_2 \end{array}\right\} \qquad (3.13)$$

Estos vectores se muestran en la figura 3.4 b. El vector ${}_1\bar{S}_{12}$ está contenido en el plano 1 perpendicular a la línea de intersección $\bar{X}_{12}$ y el vector ${}_2\bar{S}_{12}$ está contenido en el plano 2 y también es perpendicular a $\bar{X}_{12}$.

Si el deslizamiento ocurre sobre la línea de intersección $\bar{X}_{12}$, entonces las ecuaciones 3.14, 3.15 y 3.16 deberán cumplirse simultáneamente.

$$\bar{R} \cdot {}_1\bar{S}_{12} > 0 \qquad (3.14)$$

$$\bar{R} \cdot {}_2\bar{S}_{12} > 0 \qquad (3.15)$$

$$E_x < \alpha \text{ si } 0 < \alpha < \pi \quad \text{y} \quad E_x < \delta \text{ si } \alpha = \pi \qquad (3.16)$$

donde

$$E_x = \tan^{-1} \left(\frac{X_{12z}}{X_{12y}} \right) \qquad (3.17)$$

X_{12y} : Es la componente en la dirección $\bar{j}$ del vector $\bar{X}_{12}$.

X_{12z} : Es la componente en la dirección $\bar{k}$ del vector $\bar{X}_{12}$.

El vector $\bar{X}_{12}$ en dirección de la línea de intersección de los 2 planos se define en el capítulo 2 y está dado por la ecuación 2.4

$$\overline{X_{12}} = \overline{w_2} \times \overline{w_1} \qquad (2.4)$$

Si el deslizamiento ocurre solamente sobre el plano 1, entonces las siguientes desigualdades se deben satisfacer simultáneamente:

$$\overline{R} \cdot \bar{w}_1 > 0 \qquad (3.18)$$

y

$$\overline{R} \cdot {}_1\bar{S}_{12} < 0 \qquad (3.19)$$

Similarmente si el deslizamiento solamente ocurre en el plano 2, entonces las desigualdades 3.20 y 3.21 se deben satisfacer simultáneamente:

$$\overline{R} \cdot \bar{w}_2 < 0 \qquad (3.20)$$

y

$$\overline{R} \cdot {}_2\bar{S}_{12} < 0 \qquad (3.21)$$

La interpretación física de las ecuaciones 3.14 a 3.21 es la siguiente.

La ecuación 3.14 solo se satisface si la fuerza resultante $\bar{R}$ tiene una componente que tienda a empujar la cuña sobre el plano 1 hacia la línea de intersección $\bar{X}_{12}$. Similarmente la ecuación 3.15 se satisface solo si existe una componente de la resultante $\bar{R}$ empujando la cuña sobre el plano 2 hacia la línea de intersección $\bar{X}_{12}$.

Por lo tanto las ecuaciones 3.14 y 3.15 aseguran que la resultante $\bar{R}$ induce al tetraedro a deslizarse entre los 2 planos, así el deslizamiento solo puede ocurrir sobre ambos planos a lo largo de la línea de intersección. Para que el deslizamiento a lo largo de la línea de intersección sea cinemáticamente posible, también se debe checar que dicha línea no tenga una dirección tal que vaya hacia adentro del talud y esta revisión se efectúa por medio de la ecuación 3.16. Por lo tanto cuando las condiciones cinemáticas establecidas por las ecuaciones 3.14 a 3.16 se cumplen simultáneamente, el deslizamiento puede ocurrir sobre la línea de intersección. La tendencia al deslizamiento será hacia abajo si $\bar{R} \cdot \bar{X}_{12} > 0$ y hacia arriba si $\bar{R} \cdot \bar{X}_{12} < 0$, figura 3.4.

La ecuación 3.19 indica que existe una componente de $\bar{R}$ sobre el plano 1 que tiende a mover el bloque alejándolo del plano 2, para así deslizarse sobre el plano 1 y la ecuación 3.18 establece la condición que asegura el contacto de la cuña con el plano 1. Por lo tanto las ecuaciones 3.18 y 3.19 son condiciones necesarias y suficientes para que el deslizamiento ocurra sobre el plano 1. Similarmente las ecuaciones 3.20 y 3.21 establecen las condiciones para que el deslizamiento ocurra sobre el plano 2.

3.4.1.3. Cálculo del factor de seguridad para deslizamiento.

Si los cálculos cinemáticos arriba expuestos indican que el deslizamiento se produce únicamente sobre el plano 1 o solo sobre el plano 2, entonces el factor de seguridad puede ser calculado a partir de la ecuación 3.4 para deslizamiento sobre un plano. Por lo tanto para el deslizamiento sobre el plano 1 el factor de seguridad es:

$$F.S. = \frac{N_1 \tan \phi_1}{T_1} = \frac{\overline{R} \cdot \bar{w}_1 \tan \phi_1}{T_1} \qquad (3.22)$$

donde

$$\bar{T}_1 = \bar{R} - \bar{N}$$

$$\bar{T}_1 = \bar{R} - (\overline{R} \cdot \bar{w}_1)\,\bar{w}_1 = T_{1x}\,\bar{i} + T_{1y}\,\bar{j} + T_{1z}\,\bar{k}$$

por lo tanto la ecuación 3.22 se convierte en:

$$F.S. = \frac{(\bar{R} \cdot \bar{w}_1) \tan \phi_1}{(T_{1x}^2 + T_{1y}^2 + T_{1z}^2)^{1/2}} \qquad (3.23)$$

$$T = R \text{ sen } \theta$$

Como $\quad w = 1$

Entonces

$$T = Rw \text{ sen } \theta = |\bar{R} \times \bar{w}|$$

desarrollando el producto cruz tenemos:

$$T = \left[(R_y\ w_{1z} - R_z\ w_{1y})^2 + (R_z w_{1x} - R_x\ w_{1z})^2 + (R_x\ w_{1y} - R_y\ w_{1x})^2 \right]^{1/2}$$

que se puede escribir como:

$$F.S. = \frac{\tan \phi_1 (R_x\ w_{1x} + R_y\ w_{1y} + R_z\ w_{1z})}{\left[(R_y\ w_{1z} - R_z\ w_{1y})^2 + (R_z\ w_{1x} - R_x\ w_{1z})^2 + (R_x w_{1y} - R_y w_{1x})^2 \right]^{1/2}} \tag{3.24}$$

Para el deslizamiento sobre el plano 2 solamente, el factor de seguridad es:

$$F.S. = \frac{N_2 \tan \phi_2}{T_2} = \frac{-(\bar{R} \cdot \bar{w}_2) \tan \phi_2}{T_2} \tag{3.25}$$

El signo menos que aparece en el numerador de la ecuación 3.25 es debido a la dirección del vector unitario normal al plano,- $\bar{w}_2$, como se ve en la figura 3.4. Similarmente a la ecuación - 3.22, la ecuación 3.25 se puede escribir como:

$$F.S. = \frac{\tan \phi_2 (-R_x\ w_{2x} - R_y\ w_{2y} - R_z\ w_{2z})}{\left[(R_y\ w_{2z} - R_z\ w_{2y})^2 + (R_z\ w_{2x} - R_x\ w_{2z})^2 + (R_x\ w_{2y} - R_y\ w_{2x})^2 \right]^{1/2}} \tag{3.26}$$

Si los estudios cinemáticos de las ecuaciones 3.14, 3.15 y - - 3.16 se satisfacen y el deslizamiento ocurre sobre los planos- 1 y 2 a lo largo de la línea de intersección $\bar{X}_{12}$, entonces el- factor de seguridad se puede calcular de la siguiente manera:

El primer paso es calcular la componente de la fuerza $\bar{R}$ en la dirección del deslizamiento, siendo $\bar{T}_{12}$, como se muestra en la figura 3.5.

$$T_{12} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{X}_{12}}{X_{12}} \tag{3.27}$$

donde X_{12} representa la magnitud del vector $\bar{X}_{12}$. El vector --

$\overline{T}_{12}$ tiene la misma dirección que $\overline{X}_{12}$ y está dado por:

$$\overline{T_{12}} = \frac{T_{12}\ \overline{X_{12}}}{X_{12}} \tag{3.28}$$

Es conveniente definir el vector $\overline{N}_{12}$, normal a la línea de intersección:

$$\overline{N_{12}} = \overline{R} - \overline{T_{12}} \tag{3.29}$$

Para poder evaluar la fuerza de fricción resistente en los planos 1 y 2, es necesario determinar las componentes $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$ de $\overline{N}_{12}$ que actúan normalmente a los planos 1 y 2 respectivamente.

La relación de los vectores $\overline{R}$, $\overline{T_{12}}$, $\overline{N_{12}}$, $\overline{N_1}$ y $\overline{N_2}$ se muestra en los cortes AA y BB de la fitura 3.5. De tal figura se obtiene:

$$\overline{N_{12}} = N_1 \cdot \bar{w}_1 + N_2\ (-\ \bar{w}_2) \tag{3.30}$$

Donde N_1 y N_2 representan las magnitudes de los vectores $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$ respéctivamente, que son las componentes de $\overline{N}_{12}$. Por lo tanto a partir de 3.30 tenemos:

$$N_{12x} = N_1\ w_{1x} - N_2\ w_{2y} \tag{3.31}$$

$$N_{12y} = N_1\ w_{1y} - N_2\ w_{2y} \tag{3.32}$$

$$N_{12z} = N_1\ w_{1z} - N_2\ w_{2z} \tag{3.33}$$

Tomando cualesquiera dos ecuaciones de las 3 anteriores podemos determinar N_1 y N_2 y la tercera ecuación se puede utilizar para checar los valores numéricos de N_1 y N_2. Después de que estos valores son obtenidos, el factor de seguridad para deslizamiento sobre ambos planos se puede determinar a partir de:

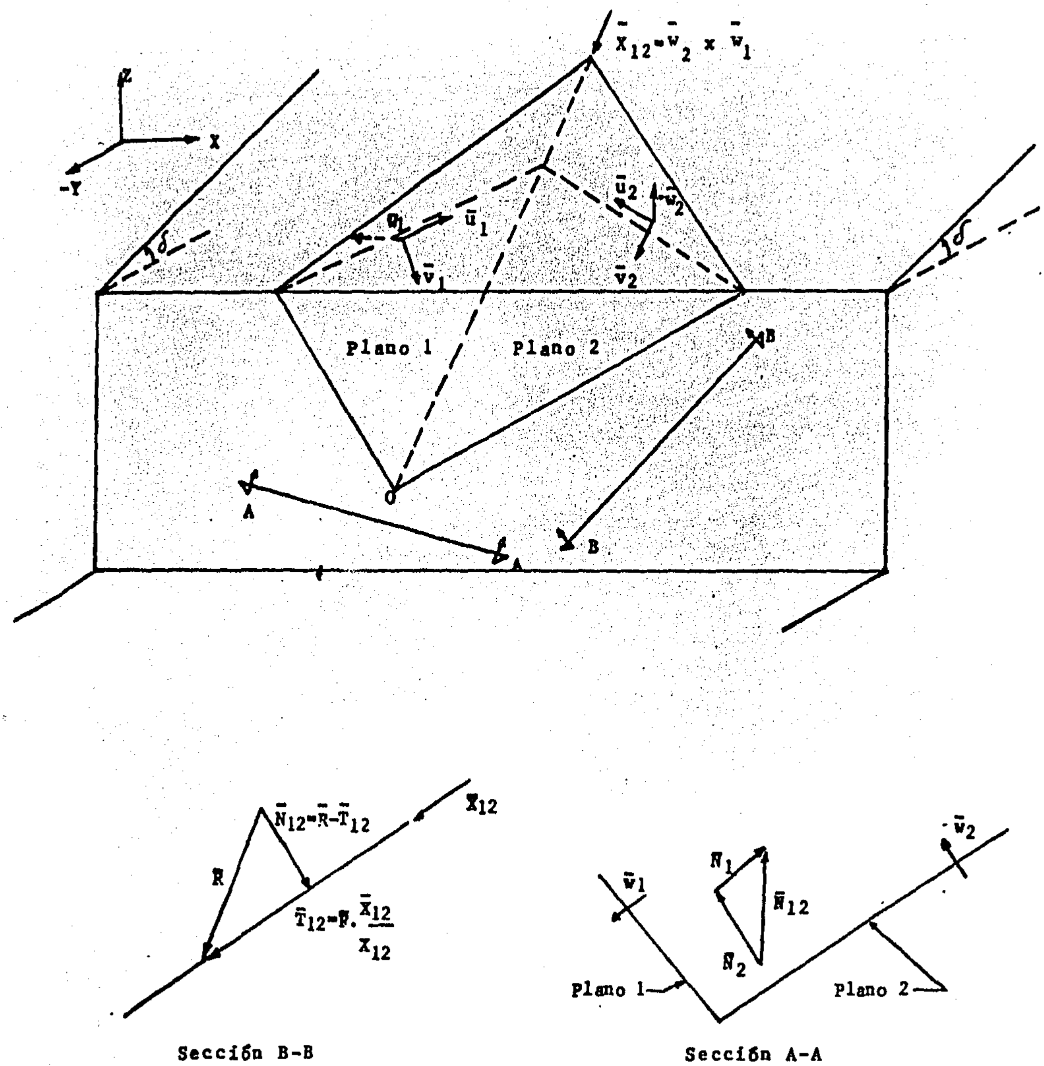


FIG. 3.5 Deslizamiento en dos planos simultaneamente.

$$F.S. = \frac{N_1 \tan \phi_1 + N_2 \tan \phi_2}{T_{12}} \qquad (3.34)$$

3.4.1.4. Cálculo del factor de seguridad estático para rotación.

Además del movimiento probable por deslizamiento antes estudiado que pone en peligro la estabilidad de la cuña de roca OBCD, puede sufrir un movimiento de rotación respecto de los extremos $\overline{OC}$ u $\overline{OD}$ o respecto de los ejes que pasan por el punto 0 perpendiculares a los planos 1 y 2, cuando la fuerza resultante produce un momento respecto a estos ejes (fig. 3.6).

A pesar de que todos los modos de fallar debido a una rotación expuestos arriba son posibles, bajo condiciones normales los ejes más probables de rotación son $\bar{d}_{10}$ y $\bar{d}_{20}$ (fig. 3.6) y por ello solo se exponen estos casos.

La rotación respecto a $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\bar{d}_{1B}$ o $\bar{d}_{2B}$ es similar y no se desarrolla en esta tesis.

Los ejes de rotación $\bar{d}_{10}$ y $\bar{d}_{20}$ pasan por 0 y son perpendiculares a los planos 1 y 2 respectivamente. En el caso de una rotación supongamos respecto al eje $\bar{d}_{10}$, todos los puntos de la cuña en la región del área ODB se mueven tangencialmente al plano 1, mientras que la superficie OCB de la cuña se separa del plano 2.

Las ecuaciones de los ejes $\bar{d}_{10}$ y $\bar{d}_{20}$ son las siguientes:

$$\bar{d}_{10} = -\bar{w}_1 \qquad (3.35)$$

$$\bar{d}_{20} = -\bar{w}_2 \qquad (3.36)$$

En este análisis por rotación, es necesario conocer el punto de aplicación de las distintas fuerzas que actúan sobre la cuña OBCD, entonces el punto de aplicación I (fig. 2.9) de la resultante $\bar{R}$ puede ser determinado. El peso propio donde $\overline{W}$ actúa verticalmente hacia abajo y en el centro de gravedad de la cuña S, como se presenta en la figura 2.9. El vector $\overline{OS}$ se puede obtener por medio de la geometría como sigue:

$$\overline{OS} = 1/4\ (\overline{OD} + \overline{OC} + \overline{OB}) \qquad (3.37)$$

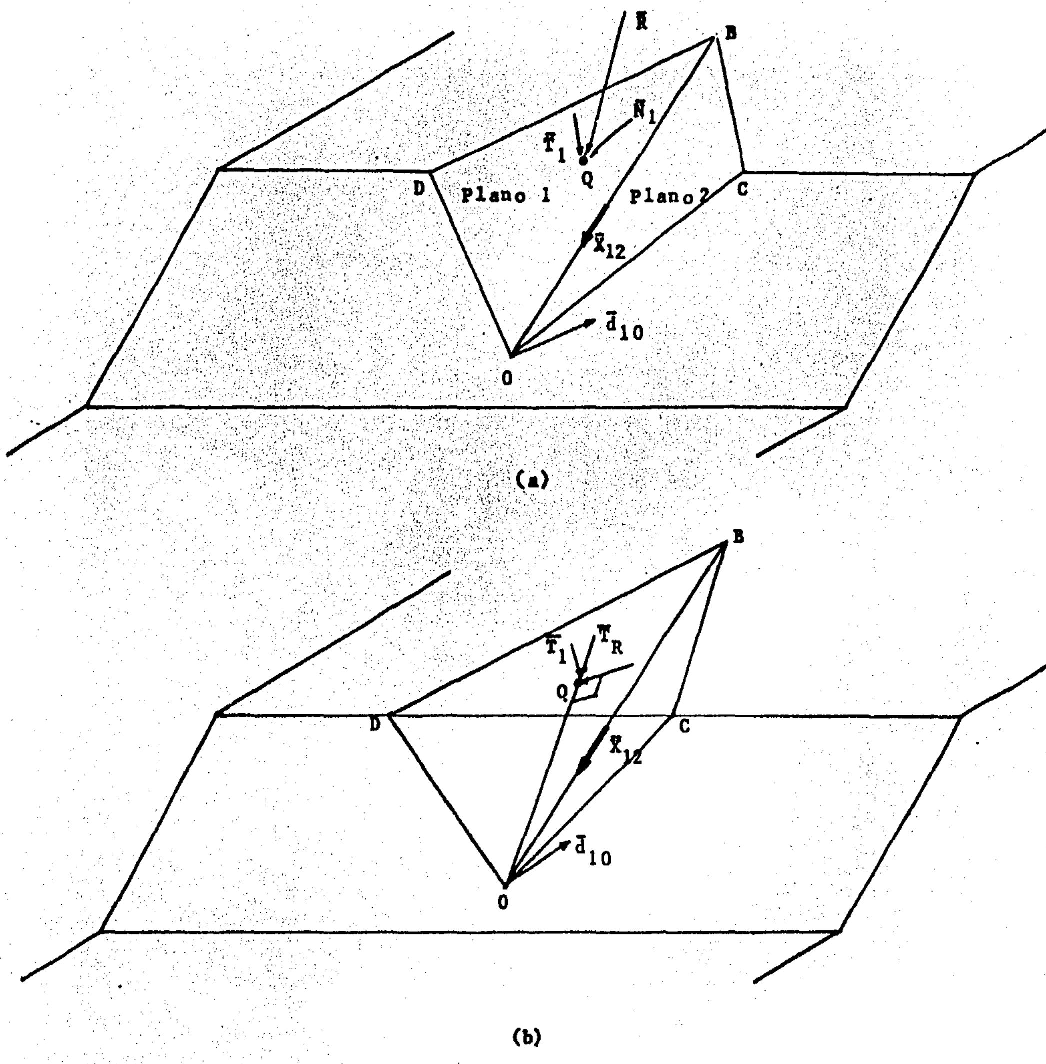


FIG. 3.6 Estabilidad contrarotación de una cuña delimitada por dos planos de debilidad.

Observese la fig. 3.7 donde se muestran distintos parámetros que se utilizarán más adelante.

Ahora bien, se procederá a deducir las expresiones para calcular los vectores $\overline{OD}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$. En primer término se deducirá la expresión correspondiente al vector $\overline{OD}$, esta deducción se realiza obteniendo cada una de las componentes del vector por separado, tales componentes serán $\overline{OD} = (OD_x, OD_y, OD_z)$. La componente OD_x se obtiene situando un sistema de ejes coordinados en un punto determinado, entonces hacemos girar la cara del talud respecto al eje X para así obtener las coordenadas del punto D. Posteriormente con el mismo origen del sistema de referencias hacemos girar este respecto al eje Z y calculamos las coordenadas del punto O, entonces la componente OD_x del vector $\overline{OD}$ se obtiene realizando la diferencia entre las coordenadas "X" de los puntos D y O, es decir, $OD_x = D_X - D_x$; de la siguiente manera:

si tenemos un talud donde $\alpha = 90°$ y $0° < \beta_1 < 90°$

y colocamos nuestro sistema coordenado haciendo coincidir su orígen con D'(ver fig. 3.8), y después hacemos girar el talud respecto al eje paralelo al eje X que contiene el punto O de tal manera que $0° < \alpha < 90°$, entonces podemos calcular la componente x del radio vector que va del origen del sistema al punto D.

Consideraciones:

h_1 = constante (antes y después del giro del talud).

Apoyándonos en la figura 3.8b cuando giramos el talud, el punto D' se mueve hacia la derecha y hacia abajo para convertirse en D, para un α dado, entonces respecto a los ejes coordenados X, Y, Z tenemos:

$$\text{Tan}\, \beta_1 = \frac{C.O.}{D_x}$$

de la fig. 3.8a

$$\tan\alpha = \frac{h_1}{C.O.} \quad \Longrightarrow \quad C.O. = \frac{h_1}{\tan\alpha}$$

de la Fig. 3.8b

$$\tan \beta_1 = \frac{h_1/\tan\alpha}{D_x}$$

$$\therefore \quad D_x = \frac{h_1}{\tan\alpha \tan \beta_1} \qquad (3.d)$$

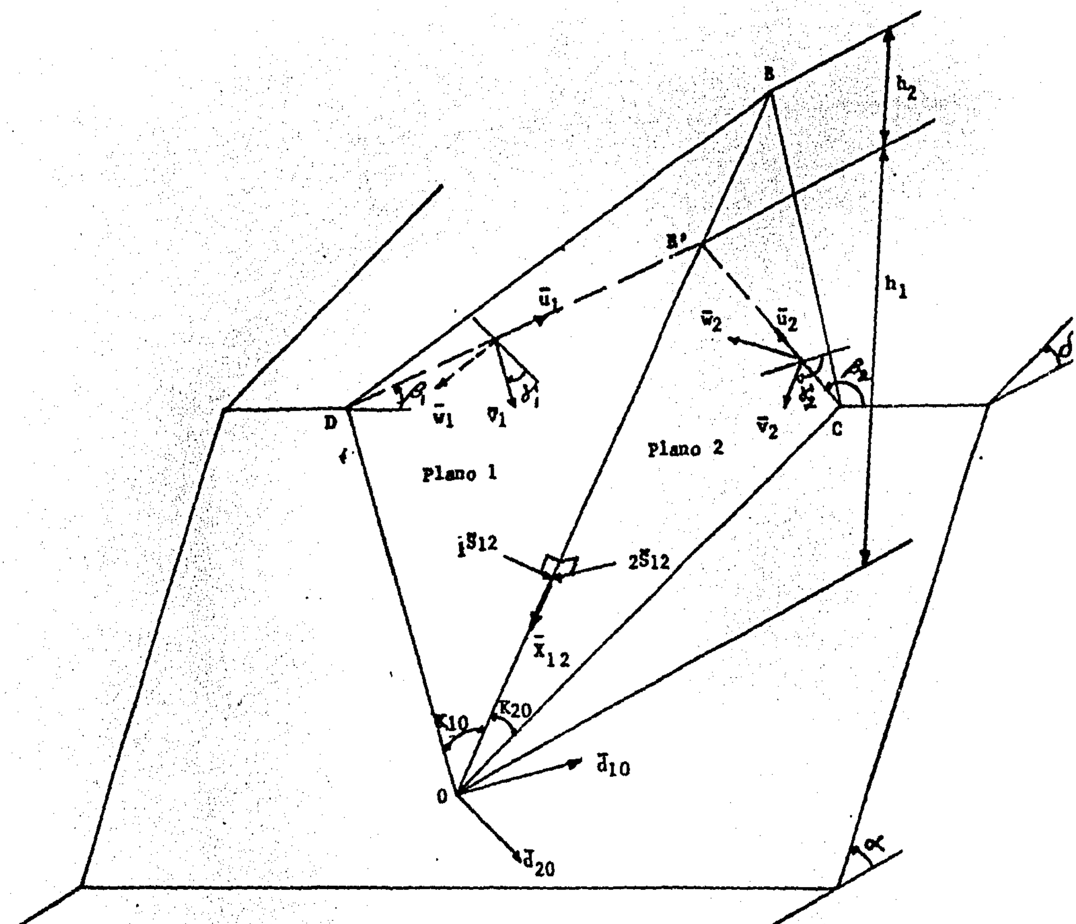


FIG. 3.7 Estabilidad de una cuña de roca delimitada por dos planos de debilidad.

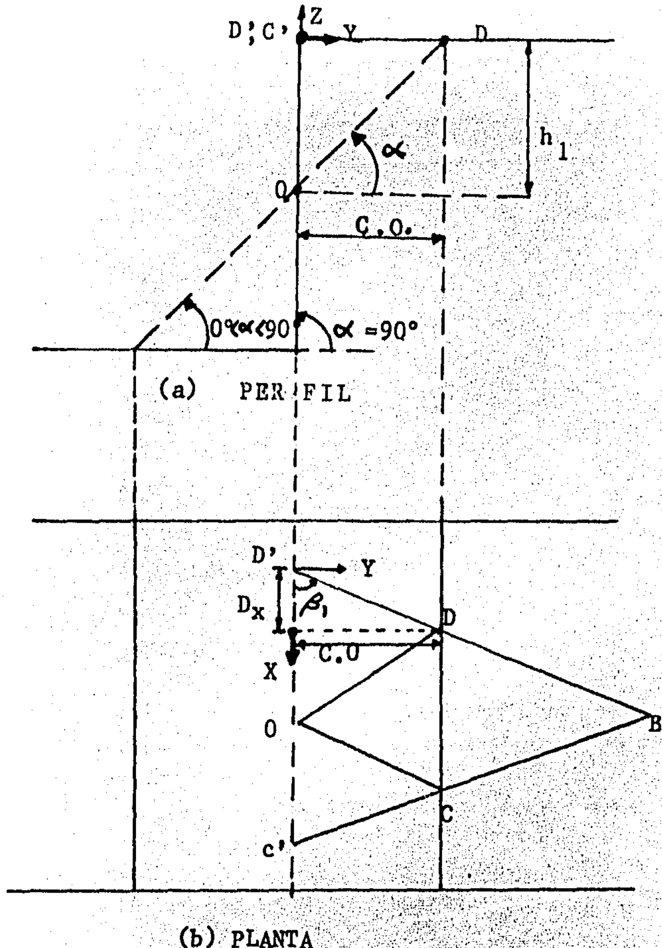


FIG. 3.8 Proyecciones ortogonales del talud.

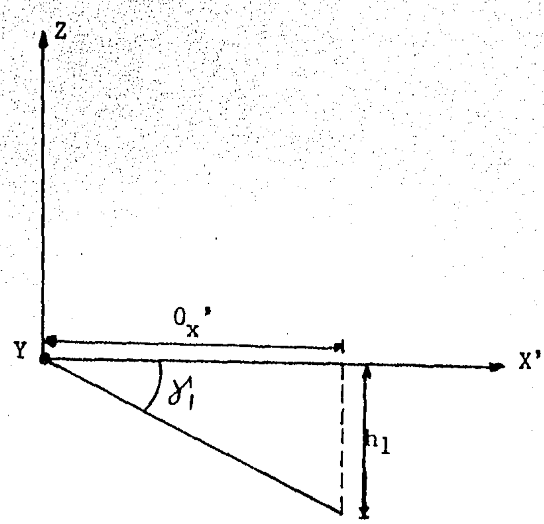


FIG. 3.9 Alzado del talud.

Ahora bien, tomando un sistema coordenado X' Y' Z cuyo origen-coincida con el punto D, y el rumbo del eje Y' sea paralelo al rumbo del plano de debilidad, podemos obtener las siguientes - expresiones apoyándonos en la figura 3.9.

$$\tan \gamma_1 = \frac{h_1}{0_x'} \Longrightarrow$$

$$0_x' = \frac{h_1}{\tan \gamma_1}$$

donde γ_1 es el echado del plano de debilidad 1.

Si la parte positiva del eje X' forma un ángulo $\Psi = \beta_1 - 90^\circ$ respecto a la parte positiva del eje X podemos a partir de la- figura 3.10 obtener:

$$\operatorname{sen} \beta_1 = \frac{0x'}{0x} \quad \therefore \quad 0x = \frac{0x'}{\operatorname{sen} \beta_1} \qquad (3.f)$$

sustituyendo (3.E) en 3.F

$$\Longrightarrow 0x = \frac{\frac{h_1}{\tan \gamma_1}}{\operatorname{sen} \beta_1} = \frac{h_1}{\tan \gamma_1 \operatorname{sen} \beta_1} \qquad (3.g)$$

Y si la componente x del segmento dirigido $\overline{OD}$, se define como la diferencia entre D_x menos 0_x entonces:

$$OD_x = D_x - 0_x = \frac{h_1}{\tan \alpha \tan \beta_1} - \frac{h_1}{\tan \gamma_1 \operatorname{sen} \beta_1} \qquad (3.h)$$

Por otro lado para obtener las componentes OD_y y OD_z del vector $\overline{OD}$ nos apoyamos en la figura 3.11.

Para OD_y tenemos:

$$\tan \alpha = \frac{h_1}{OD_y} \Longrightarrow OD_y = \frac{h_1}{\tan \alpha} \qquad (3.i)$$

Para OD_z

$$\overline{OD_z} = h_1 \qquad (3.j)$$

De las ecuaciones 3,h, 3.i y 3.j obtenemos el vector $\overline{OD}$

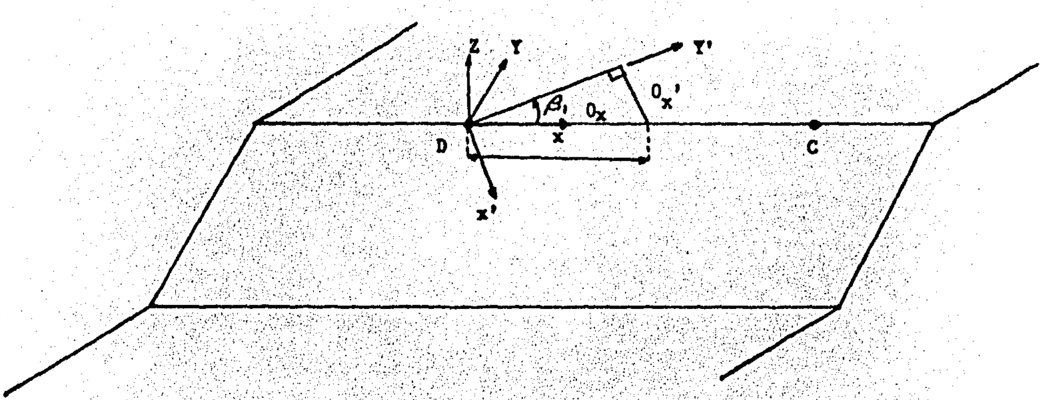


FIG. 3.10 Obtención de 0_x

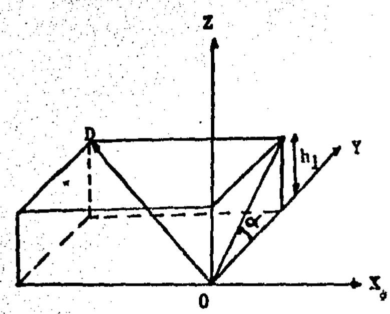


FIG. 3.11 Obtención de OD_y y OD_z.

$$\overline{OD} = \left(\frac{h_1}{\tan\alpha \tan\beta_1} - \frac{h_1}{\tan\gamma_1 \operatorname{sen}\beta_1}, \frac{h_1}{\tan\alpha_1}, h_1 \right) \tag{3.38}$$

La deducción de las componentes de vector $\overline{OC}$ se realiza de manera similar, obteniéndose:

$$\overline{OC} = \left(\frac{h_1}{\tan\alpha \tan\beta_2} - \frac{h_1}{\tan\gamma_2 \operatorname{sen}\beta_2}, \frac{h_1}{\tan\alpha}, h_1 \right) \tag{3.39}$$

Por otro lado el vector $\overline{OB}$ se obtiene de la siguiente manera:- (ver fig. 3.7)

$$\frac{\overline{OB'}}{h_1} = \frac{\overline{X_{12}}}{X_{12z}} \quad \text{Por tringulos semejantes}$$

$$\Longrightarrow \overline{OB'} = \frac{\overline{X_{12}}}{X_{12z}} h_1$$

y

$$\frac{\overline{B'B}}{h_2} = \frac{\overline{X_{12}}}{X_{12z}} \quad \text{Por triangulos segmejantes}$$

$$\Longrightarrow \overline{B'B} = \frac{\overline{X_{12}}}{X_{12z}} h_2$$

$$\overline{OB} = \overline{OB'} + \overline{B'B} = \frac{\overline{X_{12}}}{X_{12z}} h_1 + \frac{\overline{X_{12}}}{X_{12z}} h_2 = \frac{\overline{X_{12}}}{X_{12z}} (h_1 + h_2)$$

$$OB = \frac{\overline{X_{12}}}{X_{12z}} (h_1 + h_2) \tag{3.40}$$

Ahora obteniendo h_2 en función de h_1, es decir, $h_2 = f\ (h_1)$

$$h_2 = \frac{\tan\alpha - \tan E_x}{\tan E_x - \tan\delta} \cdot \frac{\tan\delta}{\tan\alpha} \cdot h_1 \tag{3.41}$$

Donde h_1, h_2, α, δ, γ_1, β_1, γ_2 y β_2 se definen en la figura 3.7.

El peso de la cuña de roca se puede determinar a partir del volumen de esta:

$$V = 1/6 \left| \overline{DB'} \times \overline{DC} \right| (h_1 + h_2) \qquad (3.42)$$

(también 2.22)

donde

$$\overline{DC} = \overline{OC} - \overline{OD} \qquad (3.43)$$

$$\overline{DB'} = \overline{OB'} - \overline{OD} \qquad (3.44)$$

$$\overline{OB'} = \frac{X_{12}}{X_{12z}} h_1 \qquad (3.45)$$

El vector $\overline{OB}'$ se dedujo anteriormente utilizando el concepto de triangulos semejantes.

El punto de aplicación, I, de la fuerza resultante $\bar{R}$ se determina a partir de conocer la magnitud y las direcciones de las líneas de acción de las fuerzas componentes, utilizando la ecuación 2.16 aplicando los principios de análisis vectorial explicado en el Capítulo II.

Para que la rotación sea posible respecto al eje $\bar{d}_{10}$, la resultante $\bar{R}$ debe producir un momento positivo respecto a los ejes X_{12} y $\bar{d}_{10}$ valuado por medio de la ecuación 2.17 de donde:

$$Mx = \text{momento de } \bar{R} \text{ respecto a } \overline{X_{12}} = \overline{X_{12}} \cdot (\overline{OI} \times \bar{R}) > 0 \qquad (3.46)$$

y

$$M_{d10} = \text{momento de } \bar{R} \text{ respecto a } \overline{d_{10}} = \overline{d_{10}} \cdot (\overline{OI} \times \bar{R}) > 0 \qquad (3.47)$$

Similarmente los momentos de $\bar{R}$ respecto a los ejes $\bar{X}_{12}$ y $\bar{d}_{20}$ deben satisfacer las ecuaciones 3.48 y 3.49, para que la rotación alrededor del eje $\bar{d}_{20}$ sea posible

$$Mx = \overline{X_{12}} \cdot (\overline{OI} \times \bar{R}) < 0 \qquad (3.48)$$

y

$$M_{d20} = \overline{d_{20}} \cdot (\overline{OI} \times \overline{R}) > 0 \qquad (3.49)$$

Se debe hacer notar que las ecuaciones 3.46 y 3.48 no representan la magnitud real del momento de $\overline{R}$ respecto al eje $\overline{X}_{12}$, debido a que $\overline{X}_{12}$ no es necesariamente unitario, pero sin embargo si representa el sentido del momento (positivo o negativo), que es lo que nos interesa.

Además se deben satisfacer algunas pruebas cinemáticas, y estas pruebas son dependientes de la magnitud de los ángulos η, K_{10} y K_{20} que se definen de la siguiente manera:

η = ángulo entre los planos 1 y 2

$$\overline{w}_1 \cdot \overline{w}_2 = w_1 \, w_2 \, \mathrm{Cos}\, \eta$$

como $w_1 = w_2 = 1$

$$\mathrm{Cos}\,\eta = \overline{w}_1 \cdot \overline{w}_2$$

$$\therefore \eta = \mathrm{Cos}^{-1} (\overline{w}_1 \cdot \overline{w}_2) \qquad 0 < \eta < \pi \qquad (3.50)$$

Ahora bien, siendo el ángulo K_{10}, el ángulo que forman el vector $\overline{OD}$ con el vector $\overline{OB}$ tenemos:

$$K_{10} = DOB$$

$$\overline{OD} \cdot \overline{OB} = (OD)\,(OB)\,\cos K_{10}$$

$$\cos K_{10} = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{OB}}{(OD)\,(OB)}$$

$$K_{10} = \cos^{-1} \frac{\overline{OD} \cdot \overline{OB}}{(OD)(OB)} \; ; \; 0 < K_{10} < \pi \qquad (3.51)$$

Similarmente

$$K_{20} = COB = \cos^{-1} \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OB}}{(OC)\ (OB)} \ ; \quad 0 < K_{20} < \pi \qquad (3.52)$$

El rango de los ángulos η , K_{10} y K_{20} para el cual es imposible una rotación respecto al eje $\overline{d}_{10}$ o $\overline{d}_{20}$ se dá a continuación:

Eje de rotación $\overline{d}_{10}$

η	K_{10}	K_{20}	condición suplementaria
$0<\eta<\pi$	$>\pi/2$	$>\pi/2$	—
$0<\eta<\pi$	$<\pi/2$	$>\pi/2$	—
$<\pi/2$	$>\pi/2$	$<\pi/2$	$\dfrac{\tan K_{20}}{\tan(\pi-K_{10})} > \sec(\pi-\eta)$

Eje de rotación $\overline{d}_{20}$

η	K_{10}	K_{20}	condicion suplemetaria
$0<\eta<\pi$	$>\pi/2$	$>\pi/2$	—
$0<\eta<\pi$	$>\pi/2$	$<\pi/2$	—
$<\pi/2$	$<\pi/2$	$>\pi/2$	$\dfrac{\tan K_{10}}{\tan(\pi-K_{20})} > \sec(\pi-\eta)$

Tabla 3.1 Rangos de los ángulos η, K_{10} y K_{20} para los cuales una rotación es cinematicamente imposible.

El análisis para determinar el factor de seguridad estático para rotación respecto a los ejes $\overline{d}_{10}$ y $\overline{d}_{20}$ es similar, por lo tanto los detalles de dicho análisis sólo se expondrán para el caso de rotación respecto al eje $\overline{d}_{10}$.

En primer lugar se descompone la resultante $\overline{R}$ en las componentes $\overline{N}_1$ y $\overline{T}_1$, siendo el punto de aplicación de estas fuerzas, el punto donde la línea de acción de $\overline{R}$ intersecte al plano 1, como se muestra en la figura 3.6.a. Por lo tanto:

$$\overline{N_1} = (\overline{R} \cdot \overline{w}_1)\ \overline{w}_1 \qquad (3.53)$$

y

$$\overline{T_1} = \overline{R} - \overline{N_1} \qquad (3.54)$$

La componente $\overline{T}_1$ que es tangencial al plano 1, se descompone ahora en $\overline{T}_r$ y $\overline{T}_t$ (fig. 3.6 b). La fuerza $\overline{T}_r$ tiene una dirección paralela al vector $\overline{QO}$ y la fuerza $\overline{T}_t$ tiene una dirección tangente a la rotación de Q respecto al eje $\overline{d}_{10}$, en caso de que esta se produgera. La fuerza $\overline{T}_t$ es por lo tanto la única componente del sistema de fuerzas que produce un momento respecto al eje $\overline{d}_{10}$. La resolución de la fuerza $\overline{T}_1$ en sus componentes $\overline{T}_t$ y $\overline{T}_r$ es:

$$\overline{T_1} = \overline{T_r} + \overline{T_t} = C_1\ (-\overline{OQ}) + C_2\ (\overline{OQ} \times \overline{w}_1) \qquad (3.55)$$

En la ecuación 3.55, $-\overline{OQ}$ y $\overline{OQ} \times \overline{w}_1$ son los vectores paralelos a $\overline{T}_r$ y $\overline{T}_t$ respectivamente. Igualando las componentes x, y, z de $\overline{T}_1$ dadas por las ecuaciones 3.54 y 3.55, los valores de los coeficientes C_1 y C_2 pueden ser determinados.

Las ecuaciones 3.54 y 3.55 dan 3 ecuaciones para encontrar dos valores desconocidos C_1 y C_2, y por lo tanto una de estas ecuaciones se puede utilizar para checar los valores obtenidos de dichas incognitas. Una vez obtenidos C_1 y C_2, podemos calcular $\overline{T}_r$ y $\overline{T}_t$, de la siguiente manera:

$$\overline{T_r} = -C_1\ \overline{OQ} \tag{3.56}$$

$$\overline{T_t} = C_2\ (\overline{OQ} \times \bar{w}_1) \tag{3.57}$$

La magnitud del momento actuante $M_{d_{10}}$ se puede obtener de la siguiente ecuación:

$$M_{d10} = T_t\ (OQ) \tag{3.58}$$

La magnitud del momento resistente que produce la fuerza de fricción desarrollada entre la superficie del plano uno y la superficie correspondiente de la cuña debida a la fuerza normal $\overline{N_1}$ se obtiene con:

$$M_{rd10} = N_1 \tan \phi_1\ OQ \tag{3.59}$$

El factor de seguridad contra rotación se puede obtener como el cociente entre el momento resistente y el momento actuante

$$\text{F.S. (Contra rotación)} = \frac{N_1 \tan \phi_1\ OQ}{T_t\ OQ} = \frac{N_1 \tan \phi_1}{T_t} \tag{3.60}$$

El factor de seguridad para rotación respecto al eje $\bar{d}_{20}$ se determina de manera similar.

Los momentos Md_{10} y Md_{20} a menudo son negativos y en ese caso solo se necesita analizar la estabilidad del talud contra deslizamiento.

3.4.2. Ejemplos de problemas de Estabilidad de Taludes que contienen dos planos de discontinuidad que se intersectan, analizados por el método vectorial.

Ejemplo 3.2

Determine el factor de seguridad de la cuña de roca OBCD mostrada en la figura 3.7

Plano 1	Plano 2
$\beta_1 = 36°$	$\beta_2 = 94°$
$\gamma_1 = 62°$	$\gamma_2 = 121°$
$\phi_1 = 20°$	$\phi_2 = 40°$
$\alpha = 70°$	$\delta = 20°$

Solución:

Factor de seguridad estático contra deslizamiento de acuerdo con las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3, para el plano 1, tenemos:

$$\bar{u}_1 = (\text{Cos } 36°,\ \text{sen } 36°,\ 0) = (.809,\ .588,\ 0) \qquad (2.1)$$

$$\bar{v}_1 = (\text{Cos } 62° \text{sen } 36°, -\text{Cos } 62° \text{Cos } 36°, -\text{sen } 62°) = (.276, -.38, -.882) \qquad (2.2)$$

$$\bar{w}_1 = \bar{u}_1 X \bar{v}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ .089 & .588 & 0 \\ .276 & -.38 & -.882 \end{vmatrix} = (-.519,\ .714,\ -.469) \qquad (2.3)$$

Para el plano 2

$$\bar{u}_2 = (\text{Cos}94°,\ \text{sen}94°, 0) = (-.07,\ .998,\ 0) \qquad (2.1)$$

$$\bar{v}_2 = (\text{Cos}121° \ \text{sen}94°,\ -\text{Cos}121° \ \text{Cos}94°,\ -\text{sen}121°) =$$

$$= (-.514,\ -.036,\ -.857) \qquad (2.2)$$

$$\bar{w}_2 = \bar{u}_2 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -.07 & .998 & 0 \\ -.514 & -.036 & -.857 \end{vmatrix} = (-.855, -.06, .515) \quad (2.3)$$

La única fuerza que interviene en el problema es el - peso propio de la cuña de roca OBCD, que actúan verticalmente- hacia abajo en la dirección -z

Por lo tanto la resultante $\bar{R}$ se puede expresar como:

$$\bar{R} = (0,0,-W)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{R}.\bar{w}_1 &= (0,0,-W).(-.519, .714,-.469) = .469W > 0 \\ \bar{R}.\bar{w}_2 &= (0,0,-W)\cdot(-.855, -.06, .575) = -.515W < 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.12a)$$

Por lo tanto la resultante, $\bar{R}$, no tiende a levantar - la cuña de roca de los planos sobre los que se apoya.

$$\bar{X}_{12} = \bar{w}_2 X \bar{w}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -.855 & -.06 & .515 \\ -.519 & .714 & -.469 \end{vmatrix} = (-.34, -.669, -.642) \quad (2.4)$$

$$X_{12} = [(-.34)^2 + (-.669)^2 + (-.642)^2]^{\frac{1}{2}} = .987$$

$${}_1\bar{S}_{12} = \bar{X}_{12} X \bar{w}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -.34 & -.669 & -.642 \\ -.519 & .714 & -.469 \end{vmatrix} = (.772, .172, -0.59) \quad (3.13)$$

$${}_2\bar{S}_{12} = \bar{X}_{12} \times \bar{w}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -.34 & -.669 & -.642 \\ -.855 & -.06 & .515 \end{vmatrix} = (-.383, .725, -.551) \quad (3.13)$$

$$\bar{R} \cdot {}_1\bar{S}_{12} = (0,0,-W) \cdot (.772,\ .172,\ -.59) = .59\,W > 0 \tag{3.14}$$

$$\bar{R} \cdot {}_2\bar{S}_{12} = (0,0,-W) \cdot (-.383,\ .725,\ -.551) = .551\,W\ \ 0 \tag{3.15}$$

$$E_x = \tan^{-1}\left(\frac{X_{12z}}{X_{12_y}}\right) = \tan^{-1}\frac{-.642}{-.669} = 43.8° \tag{3.17}$$

$$\therefore\ \delta < E_x < \alpha \tag{3.16}$$

Así de acuerdo a las ecuaciones 3.14, 3.15 y 3.16, -- el deslizamiento es cinemáticamente posible sólo a lo largo de la línea de intersección $\bar{X}_{12}$. Como $\bar{R}.\bar{X}_{12} = .642W > 0$, el deslizamiento tiende a ser hacia abajo.

$$T_{12} = \frac{\bar{R}\cdot\bar{X}_{12}}{X_{12}} = \frac{.642W}{.987} = .65W \tag{3.27}$$

$$\overline{T_{12}} = \frac{T_{12}}{X_{12}}\bar{X}_{12} = \frac{.65W}{.987}(-.34,\ -.669,\ -.642) = (-.223W, -.44W, -.42W) \tag{3.28}$$

$$\bar{N}_{12} = \bar{R} - \bar{T}_{12} = (0,0,-W)-(-.223W,\ -.44W,\ -.42W) \tag{3.29}$$

$$\bar{N}_{12} = (.223W,\ .44W,\ -.58W)$$

$$\bar{N}_{12} = N_1\bar{w}_1 + N_2\ (-\bar{w}_2) \tag{3.30}$$

$$\bar{N}_{12} = N_1\ (-.519,\ .714,\ -.469) + N_2\ (.855,\ .06,\ -.515)$$

Podemos obtener tres ecuaciones en términos de las -- componentes de $\overline{N}_{12}$ como sigue:

$$.223W = -.519\ N_1 + .855N_2$$

$$.44W = .714N_1 + .06\ N_2$$

$$-.58W = -.469N_1 - .515N_2$$

Resolviendo el sistema tenemos:

$N_1 = .565W$; $N_2 = .605W$

$$F.S. = \frac{N_1 \tan \emptyset_1 + N_2 \tan \emptyset_2}{T_{12}} = \frac{.565W \tan 20° + .605\ W \tan 40°}{.65W} \qquad (3.34)$$

F.S. = 1.10

Ahora analicemos la estabilidad contra rotación de -- acuerdo con las ecuaciones 3.37 a 3.41

$$\overline{OD} = \left(\frac{h_1}{\tan 70° \tan 36°} - \frac{h_1}{\tan 62° \text{ sen } 36°}, \frac{h_1}{\tan 70°}, h_1\right) \qquad (3.38)$$

$$\overline{OD} = (-.404h_1, \quad .364h_1, \quad h_1)$$

$$OD = h_1 \left[(-.404)^2 + (.364)^2 + (1)^2\right]^{1/2} = 1.138h_1$$

$$\overline{OC} = \left(\frac{h_1}{\tan 70° \tan 94°} - \frac{h_1}{\tan 121° \text{ sen } 94°}, \frac{h_1}{\tan 70°}; h\right) \qquad (3.39)$$

$$\overline{OC} = (.576h_1, \quad .364h_1, \quad h_1)$$

$$OC = h_1 \left[(.576)^2 + (.364)^2 + (1)^2\right]^{1/2} = 1.22\ h_1$$

$$\overline{OB} = \overline{X_{12}} \frac{(h_1 + h_2)}{X_{12z}} \qquad (3.40)$$

$\bar{X}_{12} = (-.34,\ -.669,\ -.642)$

$$h_2 = \frac{\tan\alpha - \tan E_x}{\tan E_x - \tan\delta} \cdot \frac{\tan\delta}{\tan\alpha} \cdot h_1 \qquad (3.41)$$

$$\tan E_x = \frac{X_{12z}}{X_{12y}} \qquad (3.17)$$

$$\tan E_x = \frac{-.642}{-.669} = .9596$$

$$h_2 = \frac{\tan 70° - .9596}{.9596 - \tan 20°} \cdot \frac{\tan 20°}{\tan 70°} \cdot h_1 = .398h_1$$

$$\overline{OB} = (-.34,\ -.669,\ -.642)\ \frac{(h_1 + .398h_1)}{-.642}$$

$$\overline{OB} = (.741h_1,\ 1.46h_1,\ 1.398h_1)$$

$$OB = h_1 [.741^2 + 1.46^2 + 1.398^2]^{1/2} = 2.155h_1$$

$$\overline{OS} = 1/4\ (\overline{OD} + \overline{OC} + \overline{OB})$$

$$\overline{OS} = 1/4\ [(-.404h_1,\ -.364h_1,\ h_1) + (.576h_1, .364h_1, h_1) + (.741h_1,\ 1.46h_1,\ 1.398h_1)]$$

(3.37)

$$\overline{OS} = (.235h_1,\ .547h_1,\ .85h_1)$$

Para poder aplicar las pruebas cinematicas para rotación, es necesario calcular los ángulos K_{10}, K_{20} y η

$$\eta = \cos^{-1} [(-.519,\ .714,\ -.469) \cdot (-.855,\ -.06,\ .515)] = 80.9° < \pi/2$$

(3.50)

$$K_{10} = \cos^{-1} \frac{(-.404h_1,\ .364h_1,\ h_1)\ .\ (.741h_1,\ 1.46h_1,\ =1.398h_1)}{(1.138h_1)\ (2.155h_1)} = 48.1° < \pi/2 \qquad (3.51)$$

$$K_{20} = \cos^{-1} \frac{(.576h_1,\ .364h_1, h_1).(.741h_1,\ 1.46h_1,\ 1.398h_1)}{(1.22h_1)\ (2.155h_1)} = 25.3° < \pi/2 \qquad (3.52)$$

$$M_x = \overline{X}_{12}\ .\ (\overline{OI}\ \times\ \overline{R}) = \overline{X}_{12}\ .\ (\overline{OS}\ \times\ \overline{R}) \qquad (3.46)$$

$$M_x = (-.34,\ -.669,\ -.642)\ .\ \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ .235h_1 & .547h_1 & .85h_1 \\ 0 & 0 & -W \end{vmatrix} = .03Wh_1 > 0$$

Este no es el momento real respecto al eje $\overline{X}_{12}$ debido a que el vector $\overline{X}_{12}$ no es unitario, pero lo que nos intere sa es el signo del momento.

Para los valores obtenidos de η, K_{10}, K_{20} y M_x, una rotación respecto al eje $\overline{d}_{10}$ es cinemáticamente posible. Sin embargo la rotación puede ocurrir solamente si $M_{d_{10}} > 0$

$$\overline{d}_{10} = -\ \overline{w}_1 = (.519,\ -.714,\ .469) \qquad (3.35)$$

$$\overline{OI} = \overline{OS} = (.235h_1,\ .547h_1,\ .85h_1)$$

$$Md_{10} = (.519,\ -.714,\ .469)\ .\ \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ .235h_1 & .547h_1 & .85h_1 \\ 0 & 0 & -W \end{vmatrix} = -\ .452Wh_1 < 0 \qquad (3.47)$$

Por lo tanto no puede ocurrir una rotación respecto al eje $\overline{d}_{10}$.

EJEMPLO 3.3

Determine el factor de seguridad de la cuña de roca - OBCD mostrada en la fig. 3.12 cuando:

a) P = 0
b) P = 10 toneladas. En la dirección del eje Y

Plano 1

$\phi_1 = 30°$

$\beta_1 = 17°$

$\gamma_1 = 60°$

Plano 2

$\phi_2 = 30°$

$\beta_2 = 63°$

$\gamma_2 = 80°$

$\alpha = 90°$ $\delta = 0°$

El punto de aplicación de P es S tal que $\overline{OS} = (-1.859, .609, 2.743)$ las dimensiones están dadas en metros

CASO a

Calculo del factor de seguridad estático para deslizamiento para el Plano 1

$$\bar{u}_1 = (\cos 17°,\ \text{sen } 17°,\ 0) = (.955,\ .292,\ 0) \qquad (2.1)$$

$$\bar{v}_1 = (\cos 60° \text{ sen } 17°,\ -\cos 17° \cos 60°,\ -\text{sen } 60°) = (.146,\ -.478,\ -866) \qquad (2.2)$$

$$\bar{w}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ .955 & .292 & 0 \\ .146 & -.478 & -.866 \end{vmatrix} = (-.253,\ .827,\ -.499)$$

Para el plano 2

$$\bar{u}_2 = (\cos 63°,\ \text{sen } 63°,\ 0) = (.454,\ .89,\ 0) \qquad (2.1)$$

$$\bar{v}_2 = (\cos 80° \text{ sen } 63°,\ -\cos 63° \cos 80°,\ -\text{sen } 80°) = (.155,\ -.079,\ -.985) \qquad (2.2)$$

$$\bar{w}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ .454 & .89 & 0 \\ .155 & -.079 & -.985 \end{vmatrix} = (-.877,\ .447,\ -.174) \qquad (2.3)$$

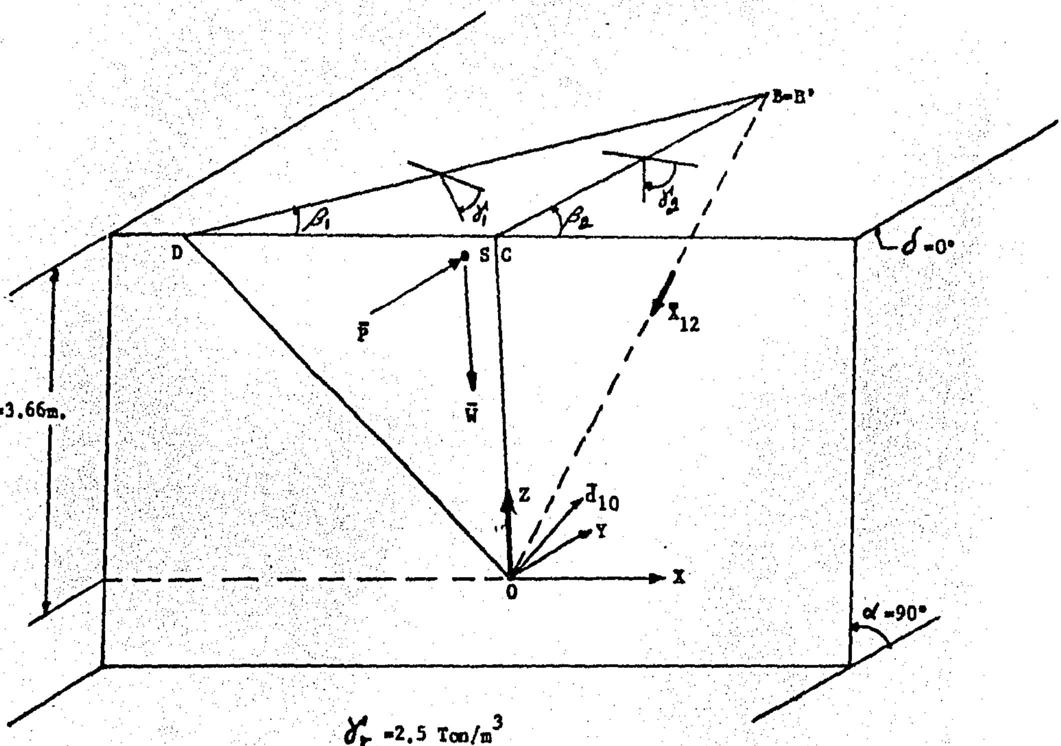


FIG. 3.12 Estabilidad de una cuña de roca delimitada por dos planos de debilidad.

Cuando $\overline{P} = 0$

$$\overline{R} = (0,0,-W)$$

donde W es el peso de la cuña de roca OBCD

$$\overline{X}_{12} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -.877 & .447 & -.174 \\ -.253 & .827 & -.499 \end{vmatrix} = (-.079, -.394, -.613) \qquad (2.4)$$

$$X_{12} = .733$$

$$_1\overline{S}_{12} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -.079 & -.394 & -.613 \\ -.253 & .827 & -.499 \end{vmatrix} = (.704, .116, -.165) \qquad (3.13)$$

$$_2\overline{S}_{12} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -.079 & -.394 & -.613 \\ -.877 & -.447 & -.174 \end{vmatrix} = (.343, .524, -.381) \qquad (3.13)$$

$$\overline{R} \cdot {_1\overline{S}_{12}} = (0,0,-W) \cdot (.704, .116, -.165) = .165W > 0 \qquad (3.14)$$

$$\overline{R} \cdot {_2\overline{S}_{12}} = (0,0,-W) \cdot (.343, .524, -.381) = .381W > 0 \qquad (3.15)$$

$$E_x = \tan^{-1}\left(\frac{-.613}{-.394}\right) = 57.27° \qquad (3.17)$$

$$\therefore \delta < E_x < \alpha$$

Por lo tanto, de acuerdo a las ecuaciones 3.14, 3.15 y 3.16, el deslizamiento es cinemáticamente posible sólo si se produce a lo largo de la línea de intersección $\overline{X}_{12}$

Como $\overline{R} \cdot \overline{X}_{12} = (0,0,-W) \cdot (-.079, -.394, -.613) = .613W > 0$, el deslizamiento ocurre hacia abajo.

$$T_{12} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{X}_{12}}{X_{12}} \quad \frac{-W\ (-.613)}{.733} = .836W \tag{3.27}$$

$$\bar{T}_{12} = \frac{.836W}{.733}\ (-.079,\ -.394,\ -.613) = (-.09W,\ -.449W,\ -.699W)$$

$$\bar{N}_{12} = (0, 0, -W) - (-.09W,\ -.449W,\ -.699W) = (.09W,\ .449W,\ -.301W) \tag{3.29}$$

$$\bar{N}_{12} = N_1\ \bar{w}_1 + N_2\ (-\bar{w}_2) = N_1\ (-.253,\ .827,\ -.499) + N_2\ (.877,\ -.477,\ .174) \tag{3.30}$$

Obteniendo tres ecuaciones tenemos:

$$.09W = -.253\ N_1 + .877\ N_2 \tag{3.31}$$

$$.449W = .827\ N_1 - .477\ N_2 \tag{3.32}$$

$$-.301W = -.499\ N_1 + .174\ N_2 \tag{3.33}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos N_1 y N_2

$$N_1 = .733W \quad ; \quad N_2 = .314W$$

$$F.S. = \frac{.733W\ \tan 30° + .314W\ \tan 30°}{.828\ W} = .73 < 1 \tag{3.34}$$

Estabilidad contra rotación:

$$\overline{OD} = \left(\frac{3.66}{\tan 90° \tan 17°} - \frac{3.66}{\tan 60°\ \text{sen}\ 17°},\ \frac{3.66}{\tan 90°},\ 3.66 \right) \tag{3.38}$$

$$\overline{OD} = (-7.23,\ 0,\ 3.66)$$

$$OD = 8.1$$

$$\overline{OC} = \left(\frac{3.66}{\tan 90°\ \tan 63°} - \frac{3.66}{\tan 80°\ \text{sen}\ 63°},\ \frac{3.66}{\tan 90°},\ 3.66 \right) \tag{3.39}$$

$$\overline{OC} = (-.724,\ 0,\ 3.66)$$

$$OC = 3.731$$

$$\overline{OB} = (-.079, -.394, -.613)\ \frac{(3.66 + 0)}{-.613} = (.472, 2.35, 3.66) \quad (3.40)$$

$$OB = 4.375$$

$$\overline{OS} = 1/4\left[(.472, 2.35, 3.66) + (-.724, 0, 3.66) + (-7.23, 0, 3.66)\right] = \quad (3.37)$$

$$\overline{OS} = (-1.87, .588, 2.745)$$

$$\eta = \cos^{-1}\left[(-.253, .827, -.499) \cdot (-.877, .447, -.174)\right] = 47.3° < \pi/2 \quad (3.50)$$

$$K_{10} = \cos^{-1}\left[\frac{(-7.23, 0, 3.66) \cdot (.472, 2.35, 3.66)}{(8.1)\ (4.375)}\right] = 73.64° < \pi/2 \quad (3.51)$$

$$K_{20} = \cos^{-1}\left[\frac{(-.724, 0, 3.66) \cdot (.472, 2.35, 3.66)}{(3,731)\ (4.375)}\right] = 36.9° < \pi/2 \quad (3.52)$$

$$M_x = \overline{X_{12}} \cdot (\overline{OI} \times \overline{R}) = \overline{X}_{12} \cdot (\overline{OS} \times \overline{R})$$

$$M_x = (-.079, -.394, -.613) \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1.87 & .588 & 2.745 \\ 0 & 0 & -W \end{vmatrix}$$

$$M_x = .7833W > 0$$

Este valor de M_x indica que la resultante $\overline{R}$ intersecta al plano 1.

Para estos valores de η, K_{10}, K_{20} y M_x una rotación respecto al eje $\bar{d}_{10}$ es cinematicamente posible.

$$\overline{d_{10}} = -\overline{w_1} = (.253, -.827, .499) \quad (3.35)$$

$$Md_{10} = (.253, -.827, .499) \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1.87 & .588 & 2.745 \\ 0 & 0 & -W \end{vmatrix}$$

$$Md_{10} = 1.4W > 0 \qquad (3.47)$$

Por lo tanto es posible una rotación respecto al eje $\overline{d_{10}}$ y el factor de seguridad contra rotación se puede determinar de la siguiente manera:

$$N_1 = \bar{R} \cdot \overline{w_1} = (0,0,-W) \cdot (-.253, .827, -.499) = .499W$$

$$\bar{N}_1 = .499W\,(-.253, .827, -.499) = (-.126W, .413W, -.25W) \qquad (3.53)$$

$$\bar{T}_1 = \bar{R} - \bar{N}_1 = (0,0,-W) - (-.126W, .413W, -.25W)$$

$$\bar{T}_1 = (.126W, -.413W, -.75W) \qquad (3.54)$$

$$\bar{T}_1 = C_1\,(-\overline{OQ}) + C_2\,(\overline{OQ} \times \overline{w_1}) \qquad (3.55)$$

$$\overline{OQ} = \overline{OI} + \Upsilon \bar{R} = (-1.87, .588, 2.745) + (0,0,-\Upsilon W) = [-1.87, .588, (2.745-\Upsilon W)]$$

Como $\overline{OQ}$ y $\bar{w}_1$ son perpendiculares entre sí $\overline{OQ} \cdot \overline{w_1} = 0$

$$\therefore (-1.87)(-.253) + (.588)(.827) + (-.499)(2.745 - \Upsilon W) = 0$$

$$\therefore .473 + .486 - .499\,(2.745 - \Upsilon W) = 0$$

$$\therefore (2.745 - \Upsilon W) = 1.922$$

$$\therefore \overline{OQ} = (-1.87, .588, 1.922)$$

$$\overline{OQ} \times \overline{w_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1.87 & .588 & 1.922 \\ -.253 & .827 & -.499 \end{vmatrix} = (-1.883, -1.42, -1.4)$$

$$\therefore \bar{T}_1 = (.126W, -.413W, -.75W) = C_1(1.87, -.588, -1.922) + C_2\,(-1.883, -1.42, 1.4)$$

Podemos obtener tres ecuaciones con dos incognitas:

$$.126W = 1.87C_1 - 1.883C_2$$
$$-.413W = -.588C_1 - 1.42C_2$$
$$-.75W = -1.922C_1 - 1.4C_2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior tenemos:

$$C_1 = .254W$$
$$C_2 = .186W$$
$$\overline{T}_t = C_2\ (\overline{OQ} \times \overline{w}_1) \qquad (3.57)$$
$$\overline{T}_t = .186W\ (-1.883,\ -1.42,\ -1.4) = (-.35W,\ -.264W,\ -.26W)$$
$$T_t = .51W$$
$$F.S. = \frac{N_1 \tan \emptyset_1}{T_t} = \frac{.499W \tan 30°}{.51W} = .56 \qquad (3.60)$$

NOTA: se debe hacer notar que todas las dimensiones de la cuña están expresadas en metros.

Caso b

$$\overline{P} = (0,\ 10,\ 0)$$

En el caso (a) la única fuerza en el sistema es el peso propio de la cuña, $\overline{W}$, y no es necesario conocer su magnitud para estimar el factor de seguridad. Pero en el caso (b) existe una fuerza externa adicional P=10 toneladas que actúa en el sentido positivo del eje Y y paralelamente a él, y su línea de acción contiene el centro de gravedad, S, de la cuña y por lo tanto se hace necesario, para éste caso, calcular la magnitud de $\overline{W}$

$$\text{Como } \delta = 0° \quad \Longrightarrow \quad h_2 = 0 \qquad (3.41)$$
$$\overline{DC} = \overline{OC} - \overline{OD}$$
$$\overline{DC} = (-.724,\ 0,\ 3.66) - (-7.23,\ 0,\ 3.66) = (6.51,\ 0,\ 0)$$
$$\overline{OB'} = \overline{X_{12}}\ \frac{h_1}{X_{12z}} = (-.079,\ -.394,\ -.613)\ \frac{(3.66)}{-.613} = (.472,\ 2.35,\ 3.66)$$
$$(3.45)$$

$\overline{DB}' = \overline{OB}' - \overline{OD} = (.472,\ 2.35,\ 3.66) - (-7.23,\ 0,\ 3.66) = (7.7,\ 2.35,\ 0)$ (3.44)

$V = 1/6 \left| \overline{DB}' \times \overline{DC} \right| (h_1 + h_2)$ (2.20)

$$\overline{DB}' \times \overline{DC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 7.7 & 2.35 & 0 \\ 6.51 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,\ -15.3)$$

$\left| \overline{DB}' \times \overline{DC} \right| = 15.3$

$V = 1/6\ (15.3)\ (3.66) = 9.327\ m^3$

$W = \gamma_R\ V$

$\gamma_R = 2.5\ ton/m^3$

$W = 2.5\ (9.327) = 23.32\ ton$

$\bar{W} = (0,0,\ -23.32)$

$\bar{P} = (0,10,0)$

$\bar{R} = \bar{W} + \bar{P} = (0,\ 10,\ -23.32)$

$\bar{R} \cdot {}_1\bar{S}_{12} = (0,\ 10,\ -23.32) \cdot (.704,\ .116,\ -.165) = 5 > 0$ (3.14)

$\bar{R} \cdot {}_2\bar{S}_{12} = (0,\ 10,\ -23.32) \cdot (.343,\ .529,\ -.381) = 14.17 > 0$ (3.15)

$\delta < E_x < \alpha$

Los valores obtenidos arriba indican que el desliza-miento es cinematicamente posible sólo a lo largo de la línea de intersección de los planos 1 y 2.

Como

$\bar{R} \cdot \bar{X}_{12} = (0,\ 10,\ -23.32) \cdot (-.079,\ -.394,\ -.613) = 10.36 > 0$

Entonces el deslizamiento ocurrirá hacia abajo de la línea de intersección de los planos 1 y 2

$$T_{12} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{X}_{12}}{X_{12}} = \frac{(0,\ 10,\ -23.32)\ .\ (-.079,\ -.394,\ -.613)}{.733} = \frac{10.36}{.733} = 14.13 \tag{3.27}$$

$$\bar{T}_{12} \ \frac{T_{12}}{X_{12}} \ (\bar{X}_{12}) = \frac{14.13}{.733} (-.079,\ -.394,\ -.613) = (-1.52,\ -7.6,\ -11.82) \tag{3.28}$$

$$\bar{N}_{12} = \bar{R} - \bar{T}_{12} = (0,\ 10,\ -23.32) - (-1.52,\ -7.6 - 11.82) = (1.52,\ 17.6,\ -11.5) \tag{3.29}$$

$$\bar{N}_{12} = N_1 (\bar{w}_1) + N_2 (-\bar{w}_2) \tag{3.30}$$

$$\bar{N}_{12} = N_1 (-.253,\ .827,\ -.499) + N_2 (.877,\ -.447,\ .174)$$

Podemos obtener 3 ecuaciones en términos de las componentes de $\bar{N}_{12}$

$$1.52 = -.253\ N_1 + .877\ N_2 \tag{3.31}$$
$$17.6 = .827\ N_1 - .447\ N_2 \tag{3.32}$$
$$-11.5 = -.499\ N_1 + .174\ N_2 \tag{3.33}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones anterior:

$N_1 = 26.33$ ton

$N_2 = 9.33$ ton

$$F.S. = \frac{26.33 \tan 30° + 9.33 \tan 30°}{14.13} = 1.457 \tag{3.34}$$

Estabilidad contra rotación

$$M_x = \overline{X}_{12} \cdot (\overline{OI} \times \overline{R}) = \overline{X}_{12} \cdot (\overline{OS} \times \overline{R}) \qquad (3.46)$$

$$M_x = (-.079, -.394, -.613) \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1.87 & .588 & 2.745 \\ 0 & 0 & -23.32 \end{vmatrix} = 31.9 > 0$$

$\therefore$ la resultante $\overline{R}$ intersecta el plano 1 como en el caso - (a)

$$\eta = \cos^{-1} \left[(0.253, .827, -.499) \cdot (-.877, .447, -.174) \right] = 47.3° < \pi/2 \qquad (3.50)$$

$$K_{10} = \cos^{-1} \frac{(-7.23, 0, 3.66) \cdot (.472, 2.35, 3.66)}{(8.1)(4.375)} = 73.64° < \pi/2 \qquad (3.51)$$

$$K_{20} = \cos^{-1} \frac{(-.724, 0, 3.66) \cdot (.472, 2.35, 3.66)}{(3.731)(4.375)} = 36.9° < \pi/2 \qquad (3.52)$$

Para los valores calculados η, K_{10}, K_{20} y M_x, es -- posible cinemáticamente una rotación respecto al eje $\bar{d}_{10}$.

$$\bar{d}_{10} = -\bar{w}_1 = (.253, -.827, .499) \qquad (3.35)$$

$$M_{d10} = \bar{d}_{10} \cdot (\overline{OS} \times \overline{R}) \qquad (3.47)$$

$$M_{d10} = (.253, -.827, .499) \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1.87 & .588 & 2.745 \\ 0 & 10 & -23.32 \end{vmatrix} = 16.32 > 0$$

Por lo tanto la rotación tiende a ocurrir al rededor- del eje $\bar{d}_{10}$. El factor de seguridad contra rotación se puede- determinar de la siguiente manera:

$$N_1 = \overline{R} \cdot \bar{w}_1 = (0, 10, -23.32) \cdot (-.25\,3, .827, -.499) = 19.9$$

$$\bar{N}_1 = N_1 \; \bar{w}_1 = 19.9\,(-.253, .827, -.499) = (-5.03, 16.46, -9.93) \qquad (3.53)$$

$$\bar{T}_1 = (0, 10, -23.32) - (-5.03, 16.43, -9.93) = (5.03, -6.46, -13.39) \qquad (3.54)$$

$$\bar{T}_1 = C_1 (-\overline{OQ}) + C_2 (\overline{OQ} \times \bar{w}_1) \qquad (3.55)$$

$$\overline{OQ} = \overline{OI} + \Upsilon \bar{R} = \overline{OS} + \Upsilon \bar{R}$$

$$\overline{OQ} = (-1.87, .588, 2.745) + (0, 10\Upsilon, -23.32\Upsilon)$$

$$\overline{OQ} = [-1.87, (.588 + 10\Upsilon), (2.745 - 23.32\Upsilon)]$$

$\overline{OQ}$ y $\bar{w}_1$ son perpendiculares entre sí.

$$\therefore \overline{OQ} \cdot \bar{w}_1 = 0$$

$$\therefore [-1.87, (.588 + 10\Upsilon), (2.745 - 23.32\Upsilon)] \cdot (-.253, .827, -.499) = 0$$

$$\therefore .4731 + .4863 + 8.27\Upsilon - 1.3698 + 11.637\Upsilon = 0$$

$$\Rightarrow \Upsilon = \frac{.4104}{19.9067} = .0206$$

$$\therefore \overline{OQ} = (-1.87, .794, 2.2646)$$

$$\overline{OQ} \times \bar{w}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1.87 & .794 & 2.2646 \\ -.253 & .827 & -.499 \end{vmatrix} = (-2.27, -1.51, -1.346)$$

$$\bar{T}_1 = (5.03, -6.46, -13.39) = C_1 (-\overline{OQ}) + C_2 (\overline{OQ} \times \bar{w}_1) \qquad (3.55)$$

$$\bar{T}_1 = (5.03, -6.46, -13.39) = C_1 (1.87, -.794, 2.2646) + C_2 (-2.27, -1.51, -1.346)$$

Podemos obtener tres ecuaciones a partir de la ecuación anterior:

$$5.03 = 1.87\, C_1 - 2.27\, C_2$$
$$-6.46 = -.794\, C_1 - 1.51\, C_2$$
$$-13.39 = -2.2646\, C_1 - 1.346\, C_2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior tene- --

mos:

$$C_1 = 4.812$$

$$C_2 = 1.748$$

$$\bar{T}_t = C_2 (\overline{OQ} \times \bar{w}_1) \qquad (3.57)$$

$$\bar{T}_t = 1.748 (-2.27, -1.51, -1.346) = (-3.97, -2.64, -2.3528)$$

$$T_t = 5.32 \text{ toneladas}$$

$$F.S. = \frac{N_1 \tan \phi_1}{T_t} \qquad \frac{19.9 \tan 30°}{5.32} = 2.16 \qquad (3.60)$$

Podemos observar que la fuerza lateral $\bar{P}$ aumenta la estabilidad de la cuña de roca OBCD contra deslizamiento y contra rotación.

NOTA: En el caso (b) todas las fuerzas están dadas en toneladas y todas las dimensiones están dadas en metros.

3.5. METODO DE ANALISIS DE ESTABILIDAD PARA TALUDES EN MACIZOS ROCOSOS CON TRES FAMILIAS DE JUNTAS QUE SE INTERSECTAN

En esta sección, se analiza la estabilidad contra deslizamiento de un volumen de roca tetraédrico delimitado por tres planos de debilidad y una superficie exterior, el método utilizado es el siguiente (fig. 3.13).

La falla por deslizamiento de una masa de roca tetraédrica ABCD, puede ocurrir mediante la separación de uno o dos de los tres planos que delimitan al tetraedro. por lo tanto existen seis modos posibles de falla como se ve en la figura 3.14. El modo de falla en un caso dado dependerá de la geometría del problema y de la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas, $\bar{R}$, que se define por la siguiente ecuación:

$$\bar{R} = \bar{W} + \bar{Q} + \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 \qquad (3.61)$$

Donde

$\bar{W} = (W_x, W_y, W_z)$: vector que representa el peso propio del tetraedro.

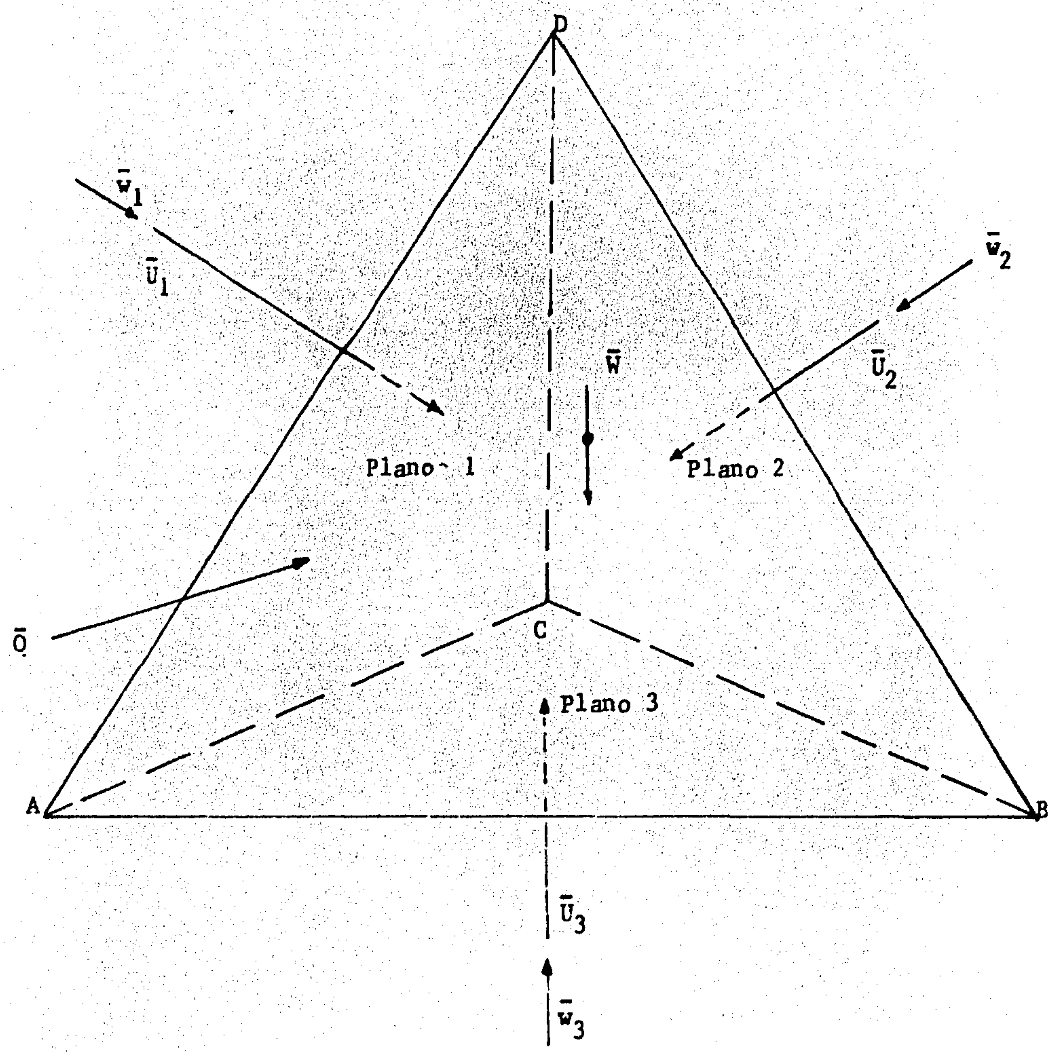


FIG. 3.13 Fuerzas sobre una cuña de roca delimitada por tres planos de debilidad que se intersectan.

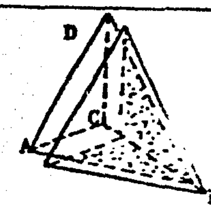
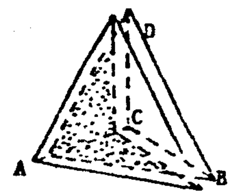
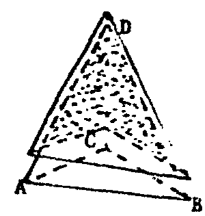
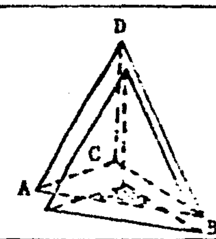
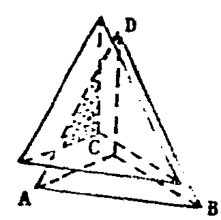
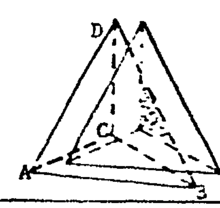
Modo de deslizamiento	Caras en contacto	Caras libres	Diagrama
Dirección CB	2 y 3	1	
Dirección CA	3 y 1	2	
Dirección CD	1 y 2	3	
Sobre el plano 3 Dirección entre CB y CA	3	1 y 2	
Sobre el plano 1 Dirección entre CA y CD	1	2 y 3	
Sobre el plano 2 Dirección entre CD y CB	2	3 y 1	

FIG. 3.14 Modos de falla por deslizamiento de una cuña de roca delimitada por tres planos de debilidad que se intersectan.

$\bar{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$: Fuerza externa aplicada a la cuña de roca.

$\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3$: Fuerzas que produce la presión en el agua que actúa en los planos 1, 2 y 3 respectivamente.

El primer paso en el análisis de estabilidad de la cuña de roca ABCD, es determinar el modo de fallar por deslizamiento para unas condiciones dadas. Esto se puede hacer como se explica a continuación.

3.5.1 Determinación de modo de fallar por deslizamiento (fig. 3.15).

Sean $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$ y $\bar{w}_3$ vectores normales a los plano uno, dos y tres respectivamente, cuyo sentido es hacia adentro de la cuña de roca.

La fuerza resultante $\bar{R}$ levanta al tetraedro de las tres caras de contacto si las tres siguientes ecuaciones se satisfacen simultáneamente:

$$\bar{R} \cdot \bar{w}_1 > 0 \tag{3.62}$$

$$\bar{R} \cdot \bar{w}_2 > 0 \tag{3.63}$$

$$\bar{R} \cdot \bar{w}_3 > 0 \tag{3.64}$$

En tal caso el equilibrio no es posible, a menos que las juntas puedan tomar tensión o que exista algún anclaje que resista esta fuerza de tensión.

Si las ecuaciones 3.62 a 3.64 muestran que no existe tal separación entre las caras que sirven de base al tetraedro y éste, es decir, que no se cumpla alguna o varias de ellas, entonces debemos realizar otras revisiones de tipo cinemático para determinar el modo de falla por deslizamiento.

Los vectores $\bar{X}_{12}$, $\bar{X}_{23}$ y $\bar{X}_{31}$, paralelos a la dirección de las líneas de intersección CD, CB y CA respectivamente están dados por las ecuaciones:

$$\bar{X}_{12} = \bar{w}_2 \times \bar{w}_1 \tag{3.65}$$

$$\bar{X}_{23} = \bar{w}_3 \times \bar{w}_2 \tag{3.66}$$

$$\bar{X}_{31} = \bar{w}_1 \times \bar{w}_3 \tag{3.67}$$

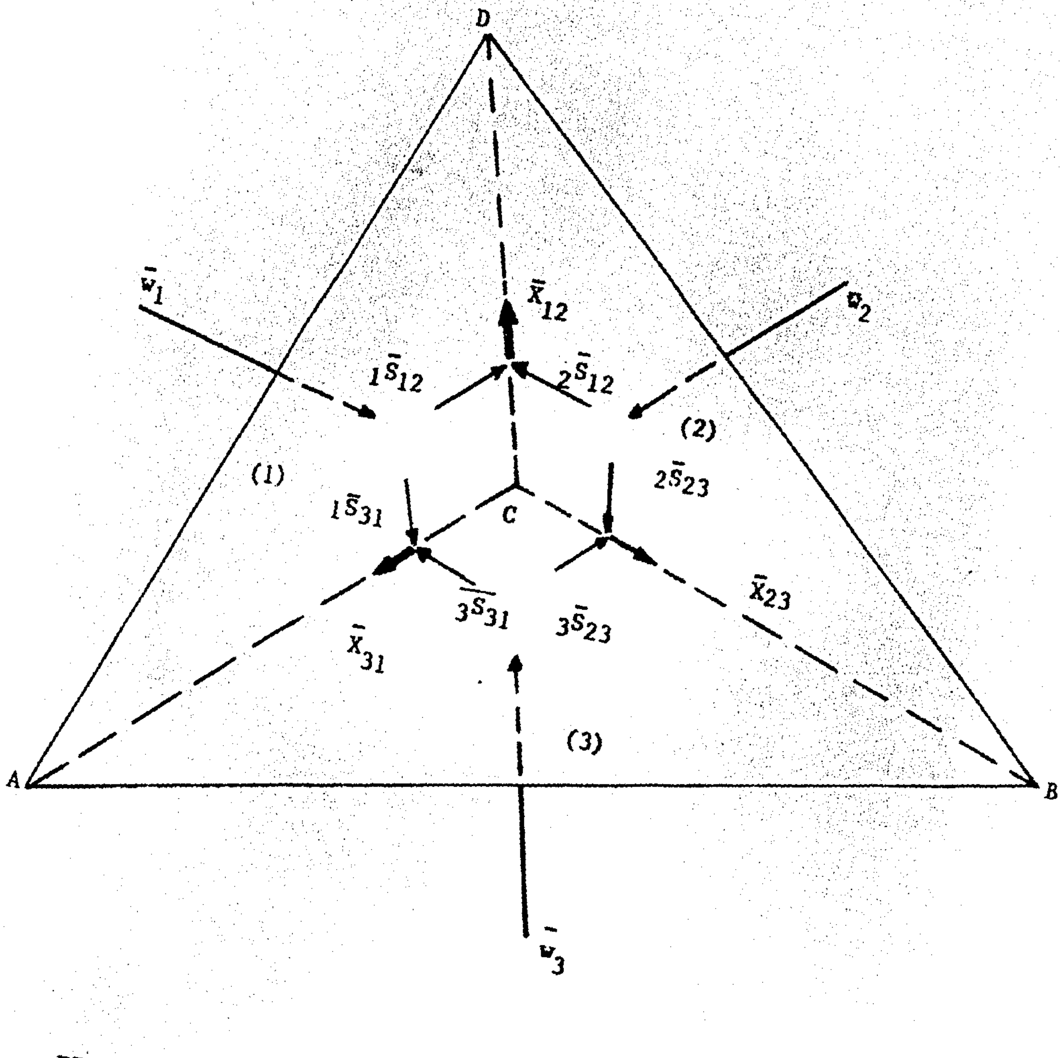


FIG. 3.15 Estabilidad de una cuña de roca delimitada por tres planos de debilidad que se intersectan.

Definamos ahora dos nuevos vectores $_1\bar{S}_{12}$ y $_2\bar{S}_{12}$ ortogonales a $\bar{X}_{12}$ y contenidos en los planos uno y dos respectivamente:

$$_1\bar{S}_{12} = \bar{x}_{12} \times \bar{w}_1 \qquad (3.68)$$

$$_2\bar{S}_{12} = \bar{w}_2 \times \bar{x}_{12} \qquad (3.69)$$

Similarmente los vectores $_2\bar{S}_{23}$ y $_3\bar{S}_{23}$ normales a $\overline{X_{23}}$ y contenidos en los planos dos y tres respectivamente están dados por:

$$_2\bar{S}_{23} = \bar{X}_{23} \times \bar{w}_2 \qquad (3.70)$$

$$_3\bar{S}_{23} = \bar{w}_3 \times \bar{X}_{23} \qquad (3.71)$$

Los vectores $\overline{_1S_{31}}$ y $\overline{_3S_{31}}$ normales a $\overline{X_{31}}$ contenidos en los planos uno y tres respectivamente están dados por:

$$_3\bar{S}_{31} = \bar{X}_{31} \times \bar{w}_3 \qquad (3.72)$$

$$_1\bar{S}_{31} = \bar{w}_1 \times \bar{X}_{31} \qquad (3.73)$$

El sentido y dirección de los vectores definidos por las ecuaciones 3.65 a 3.73 se muestran en la figura 3.15

Si el deslizamiento ocurre a lo largo de la línea de intersección $\overline{X_{12}}$, la fuerza resultante de todas las fuerzas actuantes, $\overline{R}$, debe tener una componente paralela a $\overline{X_{12}}$ la cual tiende a separar la cuña del plano tres. Esta condición se puede representar vectorialmente por la ecuación:

$$\bar{R} \cdot \bar{X}_{12} \geq 0 \qquad \text{Revisión I} \qquad (3.74)$$

Además las componentes de $\bar{R}$ sobre los planos uno y dos paralelas a los vectores $\overline{_1S_{12}}$ y $\overline{_2S_{12}}$ deben ser concurrentes a la linea de intersección $\overline{X_{12}}$ satisfaciendo las siguientes ecuaciones:

$$\bar{R} \cdot {}_1\overline{S_{12}} \geq 0 \tag{3.75}$$

$$\bar{R} \cdot {}_2\overline{S_{12}} \geq 0 \tag{3.76}$$

Las ecuaciones 3.74 a 3.76 se deben satisfacer simultáneamente si el deslizamiento de la cuña de roca ABCD es paralelo a $\overline{X_{12}}$ separándose del plano tres. Las condiciones que se deben satisfacer para que el deslizamiento ocurra paralelo a los vectores $\overline{X_{23}}$ y $\overline{X_{31}}$ se pueden obtener de manera similar: Estas son:

Para un deslizamiento paralelo a $\overline{X_{23}}$, Revisión II

$$\bar{R} \cdot \overline{X_{23}} \geq 0 \tag{3.77}$$

$$\bar{R} \cdot {}_2\overline{S_{23}} \geq 0 \tag{3.78}$$

$$\bar{R} \cdot {}_3\overline{S_{23}} \geq 0 \tag{3.79}$$

Para un deslizamiento paralelo a $\overline{X_{31}}$, Revisión III

$$\bar{R} \cdot \overline{X_{31}} \geq 0 \tag{3.80}$$

$$\bar{R} \cdot {}_1\overline{S_{31}} \geq 0 \tag{3.81}$$

$$\bar{R} \cdot {}_3\overline{S_{31}} \geq 0 \tag{3.82}$$

Si el deslizamiento ocurre solamente sobre un plano, supongamos que es sobre el plano uno, entonces $\bar{R}$ debe tener una componente normal al plano uno dirigida hacia afuera de la cuña de roca ABCD, es decir:

$$\bar{R} \cdot \overline{W_1} \leq 0 \qquad \text{Revisión IV} \tag{3.83}$$

Además las componentes de $\bar{R}$ contenidas en el plano uno paralelas a ${}_1\overline{S_{12}}$ y ${}_1\overline{S_{31}}$ deben tener un sentido tal que se alejen de

$\overline{X_{12}}$ y $\overline{X_{31}}$, es decir:

$$\bar{R} \cdot {}_1\overline{S_{12}} \leq 0 \tag{3.84}$$

$$\bar{R} \cdot {}_1\overline{S_{31}} \leq 0 \tag{3.85}$$

Las ecuaciones correspondientes para los casos en que el deslizamiento ocurre sobre los planos dos o tres únicamente son:

Para deslizamiento sobre el plano dos únicamente, Revisión V

$$\bar{R} \cdot \overline{w_2} \leq 0 \qquad (3.86)$$

$$\bar{R}_{\cdot 2}\ \overline{S_{12}} \leq 0 \qquad (3.87)$$

$$\bar{R}_{\cdot 2}\ \overline{S_{23}} \leq 0 \qquad (3.88)$$

Para deslizamiento sobre el plano tres únicamente, Revisión VI.

$$\bar{R} \cdot \overline{w_3} \leq 0 \qquad (3.89)$$

$$\bar{R}_{\cdot 3}\ \overline{S_{23}} \leq 0 \qquad (3.90)$$

$$\bar{R}_{\cdot 3}\ \overline{S_{31}} \leq 0 \qquad (3.91)$$

3.5.2. Cálculo del factor de seguridad para deslizamiento.

Después de investigar el modo de fallar por desliza-- miento basándose en las revisiones cinemáticas antes mencionadas, el siguiente paso es calcular el factor de seguridad para deslizamiento bajo unas condiciones dadas. El procedimiento - para estimar el factor de seguridad es básicamente el mismo, - como se explicó en la sección 3.4.1.3. de este capítulo para - el caso de una cuña de roca delimitada por dos planos de debilidad.

Se exponen tres ejemplos para ilustrar el método de - análisis. En el análisis anterior, de la sección 3.5.1., sin-embargo, se ha supuesto que la cuña de roca crítica está delimitada por los tres planos de debilidad antes mencionados y la cara exterior del talud como se muestra en la figura 3.13. -- Cuando las condiciones de campo son tales que esta suposición es válida, el método de análisis de estabilidad presentado - - arriba es aplicable directamente. Pero en la mayoría de los - casos la cuña de roca crítica está delimitada sólo por dos - - planos de debilidad (en lugar de tres). Bajo estas condicio-- nes el análisis de estabilidad se efectúa como se explicó en - la sección 3.4.1.3.

3.5.3. Ejemplos de taludes que contienen tres planos de dis-- continuidad que se intersectan analizados por el método vectorial.

Ejemplo 3.4.

Determine el factor de seguridad contra deslizamiento de la cuña de roca ABCD mostrado en la figura 3.13.

$\bar{w}_1 = (0\ ,.72,\ .69)$

$\bar{w}_2 = (.63,\ -.12,\ .77)$

$\bar{w}_3 = (0,\ 0,\ 1)$

$\overline{W} = (0,\ 0,\ -36.5\ \text{tons})$

$\overline{Q} = (0,\ 0,\ 0)$

$\overline{U}_1 = 23.6$ tons.; $\overline{U}_2 = 8$ tons. ; $\overline{U}_3 = 5.7$ tons.

$\emptyset_1 = \emptyset_2 = \emptyset_3 = 40°$

<u>Solución</u>:

$$\overline{R} = \overline{W} + \overline{Q} + \overline{U_1} + \overline{U_2} + \overline{U_3} \qquad (3.61)$$

$$\overline{R} = \overline{W} + \overline{Q} + U_1\ \overline{w_1} + U_2\ \overline{w_2} + U_3\ \overline{w_3}$$

$\overline{R} = (0,0,\ -36.5) + (0,0,0) + 23.6\ (0,\ .72,\ .69) + 8\ (.63,\ -.12,\ .77$
$+\ 5.7\ (0,0,\ 1)$

$\overline{R} = (5.05,\ 16.04,\ -8.34)$ todas las componentes en toneladas.

$R = 18.8$ tons.

$$\overline{X_{12}} = \overline{w_2}\ X\ \overline{w_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ .63 & -.12 & .77 \\ 0 & .72 & .69 \end{vmatrix} = (-.638,\ -.435,\ .454) \qquad (3.65)$$

$X_{12} = .895$

$$\overline{X_{23}} = \overline{w_3}\ x\ \overline{w_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ .63 & -.12 & ..77 \end{vmatrix} = (.12,\ .63,\ 0) \qquad (3.66)$$

$X_{23} = .64$

$$\overline{X_{31}} = \overline{w_1}\ x\ \overline{w_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & .72 & .69 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (.72,\ 0,\ 0) \qquad (3.67)$$

$X_{31} = .72$

$$\overline{{}_1S_{12}} = \overline{X_{12}} \times \overline{w_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ .638 & -.435 & .454 \\ 0 & .72 & .69 \end{vmatrix} = (-.626,\ .44,\ -.459) \qquad (6.68)$$

$$\overline{{}_2S_{12}} = \overline{w_2} \times \overline{X_{12}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ .63 & -.12 & .77 \\ -.638 & -.435 & .454 \end{vmatrix} = (.28,\ -.777,\ -.351) \qquad (3.69)$$

$$\overline{{}_2S_{23}} = \overline{X_{23}} \times \overline{w_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ .12 & .63 & 0 \\ .63 & -.12 & .77 \end{vmatrix} = (.485,\ -.093,\ -.41) \qquad (3.70)$$

$$\overline{{}_3S_{23}} = \overline{w_3} \times \overline{X_{23}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ .12 & .63 & 0 \end{vmatrix} = (-.63,\ .12,\ 0) \qquad (3.71)$$

$$\overline{{}_3S_{31}} = \overline{X_{31}} \times \overline{w_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ .72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,\ -.72,\ 0) \qquad (3.72)$$

$$\overline{{}_1S_{31}} = \overline{w_1} \times \overline{X_{31}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & .72 & .69 \\ .72 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ .497,\ -.518) \qquad (3.73)$$

$$\bar{R} \cdot \overline{w_3} = (5.05,\ 16.04,\ -8.34) \cdot (0,\ 0,\ 1) = -8.34 < 0 \qquad (3.89)$$

Por lo tanto la cuña de roca no se separa del plano 3

$$\bar{R} \cdot \overline{{}_3S_{23}} = (5.05,\ 16.04,\ -8.34) \cdot (-.63,\ .12,\ 0) = -1.25 < 0 \qquad (3.90)$$

$$\bar{R} \cdot \overline{{}_3S_{31}} = (5.05,\ 16.04,\ -8.34) \cdot (0,\ -.72,\ 0) = -11.55 < 0 \qquad (3.91)$$

Las ecuaciones 3.89 y 3.91 indican que el deslizamiento ocurre solamente sobre el plano 3.

$N_3 = \bar{R} . (-\bar{w}_3) = (5.05,\ 16.04,\ -8.34) . (0,\ 0,\ -1) = 8.34$ tons.

$\bar{N}_3 = N_3\ (-\bar{w}_3) = (0,\ 0,\ -8.34)$

$\bar{T}_3 = \bar{R} - \bar{N}_3 = (5.05,\ 16.04,\ 0)$

$T_3 = 16.8$ tons.

$$F.S. = \frac{N_3 \tan \phi_3}{T_3} = \frac{8.38 \tan 40°}{16.8}$$

F.S. = .42

EJEMPLO 3.5

Tomense los datos del problema 1 pero ahora haciendolas siguientes consideraciones:

$U_1 = 12$ tons. ; $U_2 = 2$ tons.; $U_3 = 2$ tons.

Solución:

$$\bar{R} = \bar{W} + \bar{Q} + U_1\ \overline{w_1} + U_2\ \overline{w_2} + U_3\ \overline{w_3} \qquad (3.61)$$

$$\bar{R} = (0,\ 0,\ -36.5) + (0,\ 0,\ 0) + 12\ (0,\ .72,\ .69) + 2\ (.63,\ -.12,\ .77) + 2\ (0,\ 0,\ 1)$$

$\bar{R} = (1.26,\ 8.4,\ -24.68)$

$$\bar{R}.\bar{w}_3 = (1.26,\ 8.4,\ -24.68) . (0,\ 0,\ 1) = -\ 24.68 < 0 \qquad (3.64)$$

Por lo tanto no es posible que la cuña de roca se separe de los tres planos de soporte simultáneamente.

$$\bar{R}.\ \overline{X_{23}} = (1.26,\ 8.4,\ -24.68).(.12,\ .63,\ 0) = 5.45 > 0 \qquad (3.77)$$

$$\bar{R}.\ \overline{{}_2S_{23}} = (1.26,\ 8.4,\ -24.68).(.485,\ -.093,\ -.41) = 9.94 > 0 \qquad (3.78)$$

$$\bar{R}.\ \overline{{}_3S_{23}} = (1.26,\ 8.4,\ -24.68).(-.63,\ .12,\ 0) = .22 > 0 \qquad (3.79)$$

Las ecuaciones 3.77 a 3.79 indican que el deslizamiento sólo puede ocurrir a lo largo de la línea de intersección X_{23}.

$$T_{23} = \frac{\overline{R} \cdot \overline{X_{23}}}{X_{23}} = \frac{(1.26,\ 8.4,\ -24.68)\ .\ (.12,\ .63,\ 0)}{.64} = 8.5 \text{ tons.}$$

$$\overline{T}_{23} = \frac{T_{23}}{X_{23}}\ \overline{X_{23}} = \frac{8.5}{.64}\ (.12,\ .63,\ 0) = (1.6,\ 8.35,\ 0)$$

$$\overline{N_{23}} = \overline{R} - \overline{T_{23}} = (1.26,\ 8.4,\ -24.68) - (1.6,\ 8.35,\ 0) = (-.34,\ -.05\ ,-24.68)$$

$$\overline{N_{23}} = N_2\ (-\overline{w_2}) + N_3\ (-\overline{w_3})$$

$$\overline{N_{23}} = N_2\ (-.63,\ .12,\ -.77) + N_3\ (\ 0,\ 0,\ -1)$$

formando tres ecuaciones tenemos:

$$-\ .34 = -.63\ N_2$$

$$-\ .05 = .12\ N_2$$

$$-\ 24.68 = -.77\ N_2 - N_3$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos:

$$N_2 = .54 \text{ tons.}$$

$$N_3 = 24.26 \text{ tons.}$$

$$F.S. = \frac{.54 \tan 40° + 24.26 \tan 40°}{8.5}$$

$$F.S. = 2.44$$

EJEMPLO 3.6

Un talud de Roca tiene un rumbo Este-Oeste y contiene tres familias de planos de debilidad que se intersectan, con las siguientes orientaciones:

PLANO	RUMBO	ECHADO
1	N 47° E	44° SE
2	N 20° W	83° SW
3	N 69° W	16° SW

El ángulo de fricción de los tres planos es 20°. Determine el factor de seguridad del talud contra falla por deslizamiento.

Solución:

Considerando el sentido positivo del eje X hacia el Este, el sentido positivo del eje Y hacia el Norte y el eje Z positivo hacia arriba.

Entonces los tres planos tienen el siguiente rumbo y echado:

Plano 1 $\beta_1 = 43°$ $\gamma_1 = 44°$

Plano 2 $\beta_2 = 110°$ $\gamma_2 = 97°$

Plano 3 $\beta_3 = 159°$ $\gamma_3 = 164°$

Los vectores unitarios $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$, y $\bar{w}_1$ se definen con las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3. Cuando los vectores normales a cada plano $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$ y $\bar{w}_3$ tienen un sentido hacia adentro de la cuña de roca, se definen como sigue:

$$\bar{w}_1 = \bar{u}_1 \times \bar{v}_1 = (.508, -.474, .719) \qquad (2.3)$$

$$\bar{w}_2 = \bar{u}_2 \times \bar{v}_2 = (-.933, -.339, .122) \qquad (2.3)$$

$$\bar{w}_3 = \bar{u}_3 \times \bar{v}_3 = (-.099, -.257, .961) \qquad (2.3)$$

De manera similar al problema 1, se calculan los siguientes vectores:

$$\overline{X_{12}} = \overline{w_2} \times \overline{w_1} = (-.182, .729, .635) \qquad (3.65)$$

$$X_{12} = .983$$

$$\overline{X_{23}} = \overline{w_3} \times \overline{w_1} = (.295, -.885, -.206) \qquad (3.66)$$

$$X_{23} = .955$$

$$\overline{X_{31}} = \overline{w_1} \times \overline{w_3} = (-.303, -.526, -.172) \qquad (3.67)$$

$$X_{31} = .631$$

$$\overline{{}_1S_{12}} = \overline{X_{12}} \times \overline{w_1} = (.847, .432, -.253) \qquad (3.68)$$

$$_2\overline{S_{12}} = \overline{w}_2 \times \overline{X}_{12} = (-.304,\ .57,\ -.741) \quad (3.69)$$

$$_2\overline{S_{23}} = \overline{X_{23}} \times \overline{w_2} = (-.178,\ -.157,\ -.925) \quad (3.70)$$

$$_3\overline{S_{23}} = \overline{w_3} \times \overline{X_{23}} = (.903,\ .263,\ .163) \quad (3.71)$$

$$_3\overline{S_{31}} = \overline{X_{31}} \times \overline{w_3} = (-.55,\ .309,\ .026) \quad (3.72)$$

$$_1\overline{S_{31}} = \overline{w_1} \times \overline{X_{31}} = (.466,\ -.137,\ -.403) \quad (3.73)$$

$$\overline{R} = (0,\ 0,\ -w)$$

$$\overline{R}.\ \overline{w}_1 = -.719\ w < 0$$

$$\overline{R}.\ \overline{w}_2 = -.122\ w < 0$$

$$\overline{R}.\ \overline{w}_3 = -.961 < 0$$

Por lo tanto el modo de falla no puede ocurrir se-parándose la cuña de roca de los tres planos de debilidad, se llega a ésta conclusión comparando las ecuaciones 3.62, 3.63, y 3.64 con las ecuaciones arriba obtenidas. Se puede verificar fácilmente que todas las revisiones cinemáticas se satisfacen solamente cuando la falla por deslizamiento ocurre sobre el plano tres, es decir, analíticamente se tiene:

$$\overline{R}.\ \overline{w}_3 = -.961\ \overline{w} < 0 \quad (3.89)$$

$$\overline{R}.\ {}_3\overline{S_{23}} = -.163\ \overline{w} < 0 \quad (3.90)$$

$$\overline{R}.\ {}_3\overline{S_{31}} = -.026\ \overline{w} < 0 \quad (3.91)$$

$$N_3 = \overline{R}.\ (-\overline{w}_3) = .961\ W$$

$$\overline{N}_3 = N_3\ (-\overline{w}_3) = (.095\ W,\ .247\ W,\ -.924\ W)$$

$$\overline{T}_3 = \overline{R} - \overline{N}_3 = (-.095\ W,\ -.247\ W,\ -.076\ W)$$

$T_3 = .275\ W$

$$F.S. = \frac{N_3 \tan \phi_3}{T_3} = \frac{.961\ W \tan 20°}{.275\ W}$$

$F.S. = 1.27$

Los cálculos anteriores se efectuaron suponiendo que la cuña de roca crítica está delimitada por tres planos de debilidad. Como se hizo notar anteriormente, en la mayoría de los casos, existe una cuña de roca delimitada solamente por dos planos de debilidad, que es más crítica que la cuña que consideramos en el análisis anterior. En efecto, en este ejemplo, la cuña de roca delimitada por los planos uno y dos tiene un factor de seguridad contra deslizamiento menor que el calculado para la cuña de roca considerada en el ejemplo 3.6. La determinación del modo de falla y el factor de seguridad contra deslizamiento se puede realizar como se explicó en la sección 3.4.1.3. los detalles de este análisis no se exponen aquí, excepto el hecho de que el deslizamiento tiende a ocurrir hacia abajo y en una dirección paralela a la línea de intersección de los planos uno y dos y el factor de seguridad es F.S. = .58 que resulta ser menor que el valor calculado previamente para la cuña de roca delimitada por los tres planos, siendo este de F.S. = 1.27.

CAPITULO IV

ANALISIS DE TALUDES EN MACIZOS ROCOSOS POR METODOS GRAFICOS ESTEREOGRAMAS

4.1. PROPIEDADES DE LAS PROYECCIONES ESFERICAS:

4.1.1. Generalidades:

La proyección estereográfica simplifica la solución - gráfica de problemas que tienen que ver con la orientación relativa de líneas y planos en el espacio. En el contexto de la Mecánica de Rocas, la proyección estereográfica resulta interesante para analizar problemas tales como la estabilidad de excavaciones, exploración y representación de discontinuidades - en macizos rocosos, así como en análisis de estabilidad de taluedes (Hendron et. al. 1981). A continuación se exponen los principios básicos de las proyecciones estereográficas y en -- las siguientes secciones se presentan las operaciones esenciales y el uso del estereograma para análisis de estabilidad de taludes en macizos rocosos.

La figura 4.1., muestra la proyección estereográfica de una línea inclinada, es decir, que forma un ángulo $\delta \neq 0$ respecto a la horizontal. La línea contiene el centro de una esfera de referencia, llamando a este punto O, la línea intersecta la superficie de la esfera en el punto P localizado en el - Hemisferio inferior y en el punto -P en el Hemisferio superior. En cualquier aplicación, se supone que la línea o plano a proyectar contiene el centro de la esfera de referencia. El plano horizontal que contiene a O se denomina plano de proyección, cuando se proyectan sobre él otros planos con distintos echados, se construye el llamado estereograma. La proyección de - la normal a un plano se denominará polo de dicho plano, una normal al plano de proyección intersecta la parte más alta de la superficie de la esfera en el punto F, denominado foco. La -- proyección estereográfica consiste en proyectar líneas y puntos desde la superficie de la esfera de referencia y tomando - un solo punto de fuga (el foco), sobre el plano de proyección (plano horizontal). Para encontrar la proyección estereográfica a partir del Hemisferio inferior de una línea inclinada que contiene a O, se debe encontrar el punto donde esta línea intersecta la superficie de la esfera, entonces, se traza una -- recta desde este punto de intersección hasta el foco F, ahora bien, el punto donde esta recta intersecta el plano de proyección, será la proyección estereográfica de la línea inclinada. Por ejemplo, la línea OP en la figura 4.1a, intersecta la superficie de la esfera en el punto P, y la línea PF intersecta-

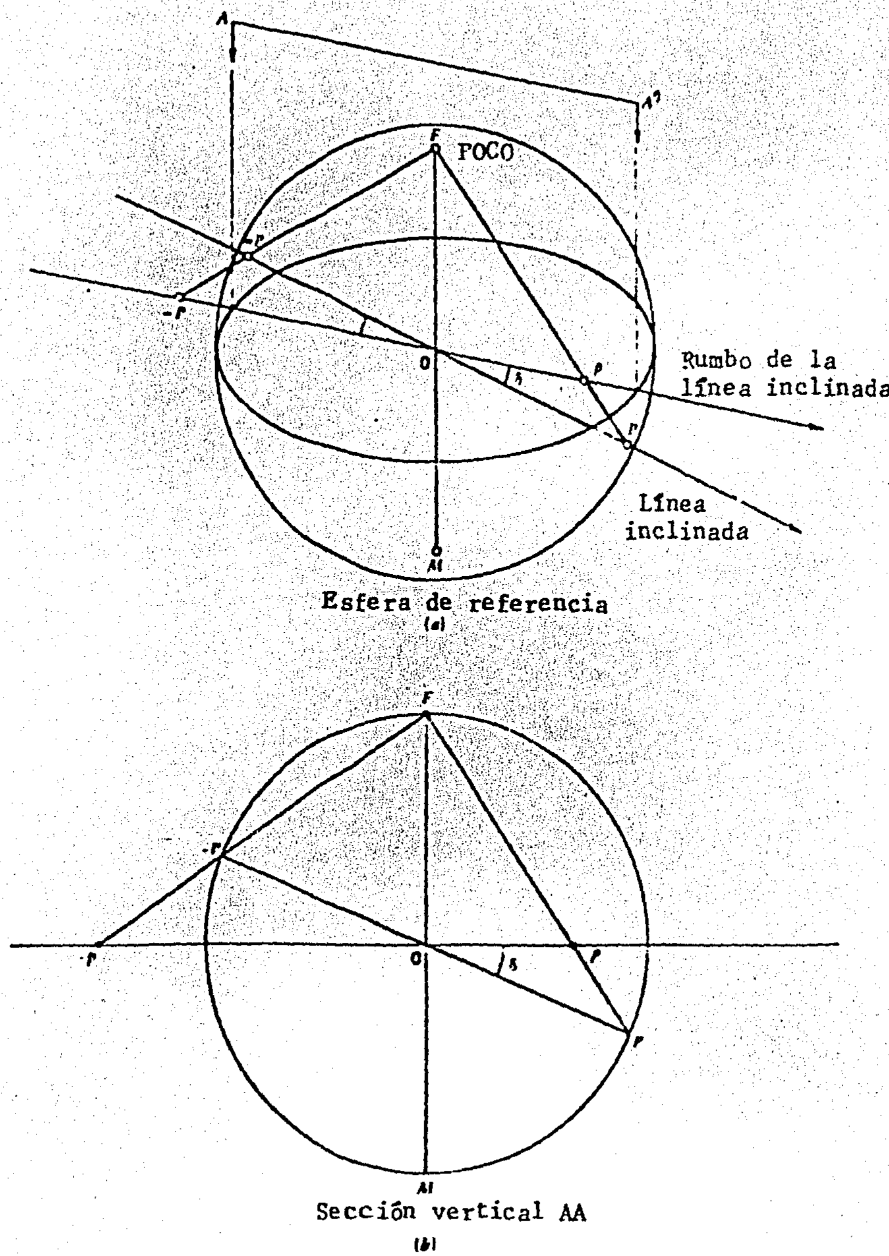


FIG. 4.1 Proyección estereografica de una línea

el plano de proyección en el punto p. Este último punto es entonces la proyección estereográfica de la línea OP a partir del Hemisferio inferior. La figura 4.1.b., muestra una sección vertical de la esfera de referencia que contiene la línea OP. Siempre es posible utilizar una figura como la 4.1.b., para obtener la proyección estereográfica de una línea, pero es más sencillo trazar dicha proyección a partir de un estereograma, como se expondrá posteriormente.

La proyección estereográfica de un plano, consiste en encontrar el lugar geométrico que une las proyecciones de todas las líneas que contiene dicho plano. Un teorema enuncia:- "Cualquier círculo contenido en la superficie de la esfera, se proyectará como un círculo sobre el plano de proyección". Como cualquier plano que se desee proyectar contiene el centro de la esfera, la traza que forma al intersectar la superficie de esta, será un círculo cuyo radio será igual al radio de la esfera, entonces la proyección del plano en cuestión, sobre el plano de proyección contituira también un círculo, para encontrar el centro de este círculo, es suficiente con proyectar el vector rumbo y el vector echado, obteniendo dos puntos que están contenidos en tal círculo, y a partir de estos puntos se obtiene el centro del círculo que servirá para trazarlo con un compás.

La figura 4.2., muestra un plano horizontal que intersecta la esfera, formando un semicírculo SMT. Si se proyectan estos puntos sobre el plano de proyección tomando el punto de fuga F, tales puntos coinciden con su proyección. Por lo tanto, un círculo cuyo centro es O y contenido en el plano de proyección, representa la proyección estereográfica de un plano horizontal. Cualquier punto dentro de este círculo, cuando ha sido proyectado utilizando el foco F, pertenece a un punto situado en la superficie del Hemisferio inferior de la esfera. - La figura 4.2., también muestra un plano inclinado que contiene a O y que intersecta la esfera de referencia, formando el semicírculo SDT.

La línea OS y su opuesta OT, representan el rumbo del plano inclinado; la proyección de estas líneas coincide con los puntos S y T respectivamente. La línea OD, representa el vector echado del plano inclinado, cuya proyección es el punto d, como se muestra. Otras líneas contenidas en el plano inclinado como OA, OB, OC, etc., se proyectan obteniendo los puntos a, b, c, etc., para definir el lugar geométrico circular TdS como se ve en la figura. Entonces, trazar este lugar geométrico es determinar la proyección estereográfica del plano inclinado. Una manera para hacer esto, es construir un círculo que contenga los puntos T, d y S. El centro de este círculo, se encuentra contenido en la línea OV sobre el punto que corresponde a la proyección de una línea cuya inclinación forma un -

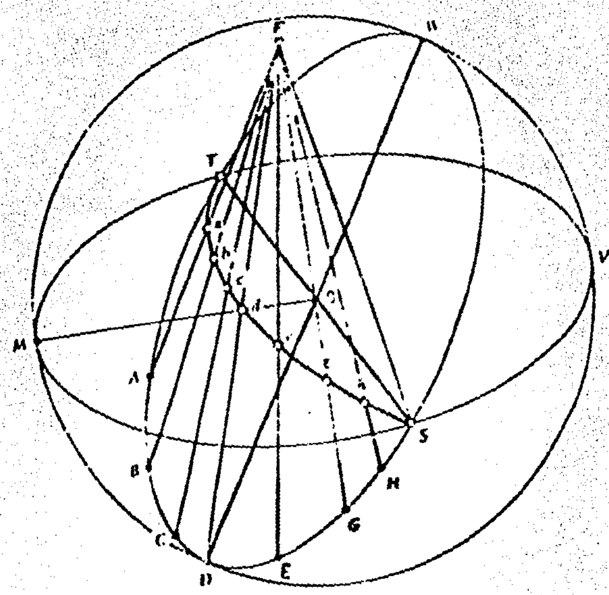


FIG. 4.2 Proyección estereográfica de un plano.

ángulo con la vertical de dos veces el echado. Otra manera de encontrar la proyección del plano, es trazar la proyección de OW, que es la proyección opuesta al vector echado, y bisectar la distancia que existe entre este punto y d, para así localizar el centro del círculo proyectado. Sin embargo, la manera más conveniente de proyectar el plano es trazándolo a partir de un estereograma.

Un estereograma es una proyección estereográfica de un conjunto de planos de referencia. La figura 4.3., muestra un estereograma que presenta una serie de proyecciones de planos que tienen el mismo rumbo, pero que el echado sufre un incremento de 2° respecto al plano anterior, se puede hacer la analogía de estas proyecciones con los meridianos que se pueden observar en un globo terráqueo (entonces como convención, llamaremos a estos arcos de circunferencia "meridianos"). Se puede observar que la proyección de un plano vertical es una línea recta, llamemos a esta línea "eje meridiano". También se muestra un conjunto de círculos ortogonales a los meridianos y cada uno de estos se obtiene dividiendo el círculo que representa la proyección de un plano horizontal en 360 partes iguales. En el estereograma mostrado en la figura 4.3 se hicieron 180 divisiones, por lo que cada una representa dos grados, físicamente estas divisiones representan el ángulo que forma el rumbo de un plano cualquiera con el rumbo de la familia de planos a partir de los cuales se obtienen los meridianos. Se puede hacer la analogía de estos círculos ortogonales a los meridianos con los paralelos que se pueden observar en un globo terráqueo, haciendo notar que esto no son paralelos sino que se trata de una analogía para poder denominarlos de la forma antes mencionada. Entonces un plano vertical cuyo rumbo forme un ángulo de 90°con el rumbo de la familia de planos a partir de los cuales se obtienen los meridianos, tendrá una proyección que es una línea recta y formará un ángulo de 90°con el eje meridiano, a esta línea se le llamará "eje paralelo". Para poder seguir los ejemplos se recomienda obtener una copia de la figura 4.3., entonces insértese un alfiler de atrás hacia adelante que pase exactamente por el centro del estereograma, entonces fije el estereograma a su mesa de trabajo con cinta adhesiva, quedando la punta del alfiler hacia arriba, ahora bien, coloque una hoja de papel translúcido (albanene) sobre el estereograma insertando el alfiler en la hoja, la cual le permitirá girar su hoja (sobre la cual hará los trazos) alrededor del eje que constituye el alfiler.

4.1.2. Proyección de una Línea:

Ejemplo 4.1.

Sea la línea (1), con un ángulo vertical de 40° hacia abajo de la horizontal, y cuyo rumbo es N 30° E; encontrar su proyección estereográfica a partir del Hemisferio inferior. -

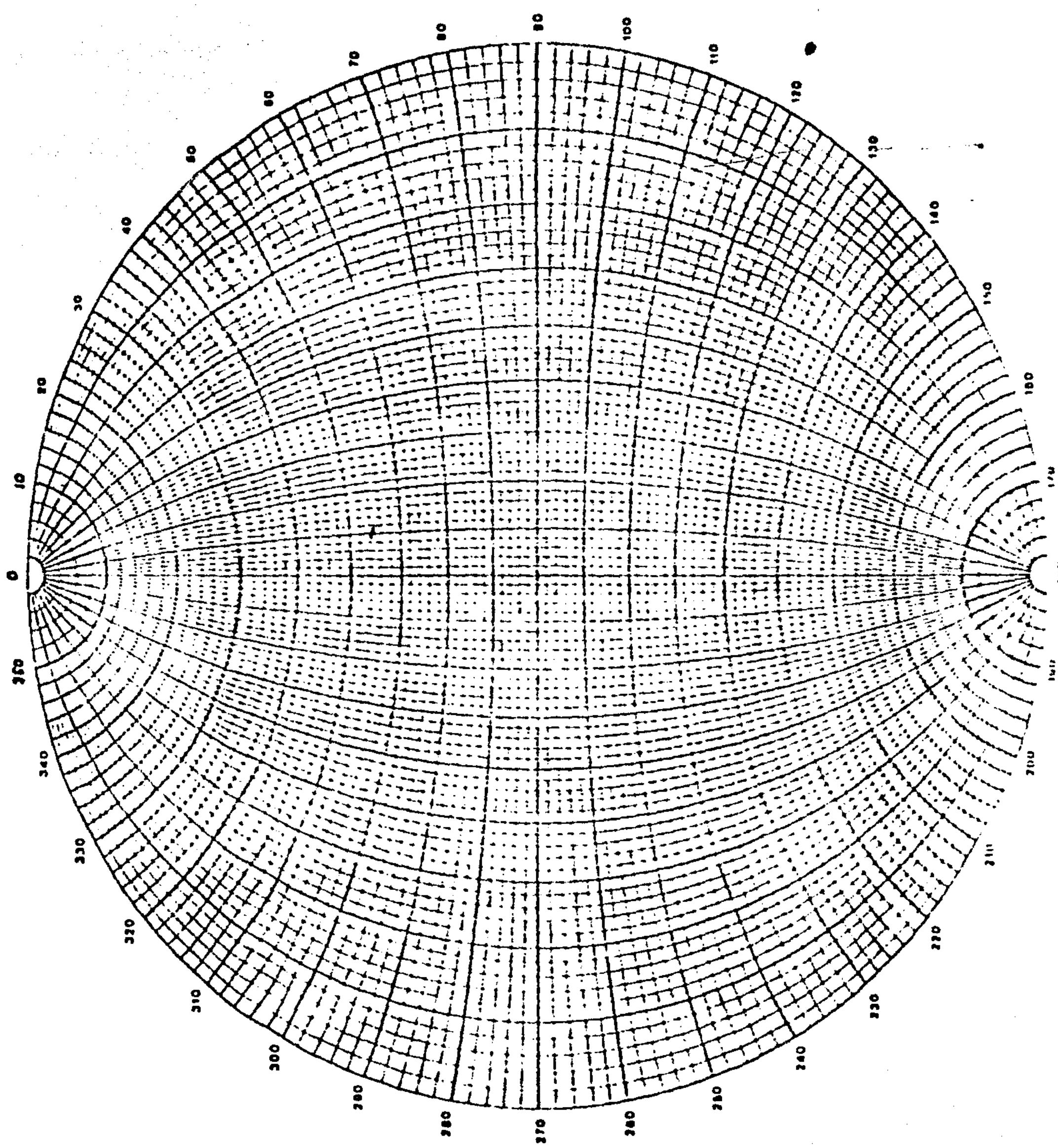


FIG. 4.3 Estereograma (equi-ângulo)

Se asume que la línea contiene al centro de la esfera de referencia. Si el punto de fuga es el foco F, entonces la proyección de la línea será un punto dentro del círculo que representa la proyección estereográfica de un plano horizontal. En la fig. 4.4.a., se ha superpuesto la hoja de trazo al estereograma como se indicó anteriormente, entonces se marca el Norte, que debe coincidir con el eje meridiano, ahora se procede a marcar el Sur, Este y Oeste al rededor del estereograma. La línea horizontal cuyo rumbo es N 30°E, ha sido proyectada marcando un punto a 30° hacia el Este a partir del Norte sobre el círculo que representa la proyección de un plano horizontal. En la figura 4.4.b., la hoja de trazos ha sido girada hasta hacer coincidir el punto marcado anteriormente con cualquiera de los dos ejes (meridiano o paralelo) que son ortogonales y reglados. Como son líneas rectas deben ser la proyección del plano vertical. En este caso se hizo coincidir el punto con el "eje paralelo". La familia de meridianos cuya variación es de 2°, entre uno y otro, calibra la proyección del plano vertical representado por el "eje paralelo", y así el ángulo vertical de 40° se puede obtener gráficamente contando la intersección de 20 meridianos con el "eje paralelo". El punto así obtenido, marcado como uno, es la proyección estereográfica buscada.

4.1.3. Angulo entre dos Líneas.

Ejemplo 4.2.

Considere una línea (dos), cuya inclinación hacia abajo respecto a la horizontal es de 20°y cuyo rumbo es N 20°W. Obtener su proyección estereográfica y medir el ángulo que forma con la línea (uno) proyectada previamente. La línea (dos) se proyecta dibujadola en la hoja de trazos, siguiendo la misma secuencia utilizada en el ejemplo 4.1. Para medir el ángulo que forma las líneas uno y dos, es necesario determinar el plano que contiene a ambas. Este se encuentra girando la hoja de trazos hasta que ambos puntos que representan la proyección de las líneas se superpongan a un meridiano común, como se ve en la fig. 4.4.d. El ángulo entre uno y dos se mide entonces contando las intersecciones del meridiano con los paralelos que están entre el punto uno y el punto dos (cada intersección representa dos grados), el ángulo medido es de 47°, el rumbo y echado del plano común a uno y dos, se muestra en la figura 4.4.e., se obtiene girando el papel de trazo de tal manera que los extremos del meridiano que representa la proyección del plano que contiene las líneas uno y dos coincidan con los extremos del "eje meridiano" del estereograma, entonces se mide el ángulo que forma este eje con la marca señalada como Norte dandonos el rumbo, ahora bien, midiendo sobre el eje paralelo desde la periferia hacia el centro del estereograma obtenemos el echado.

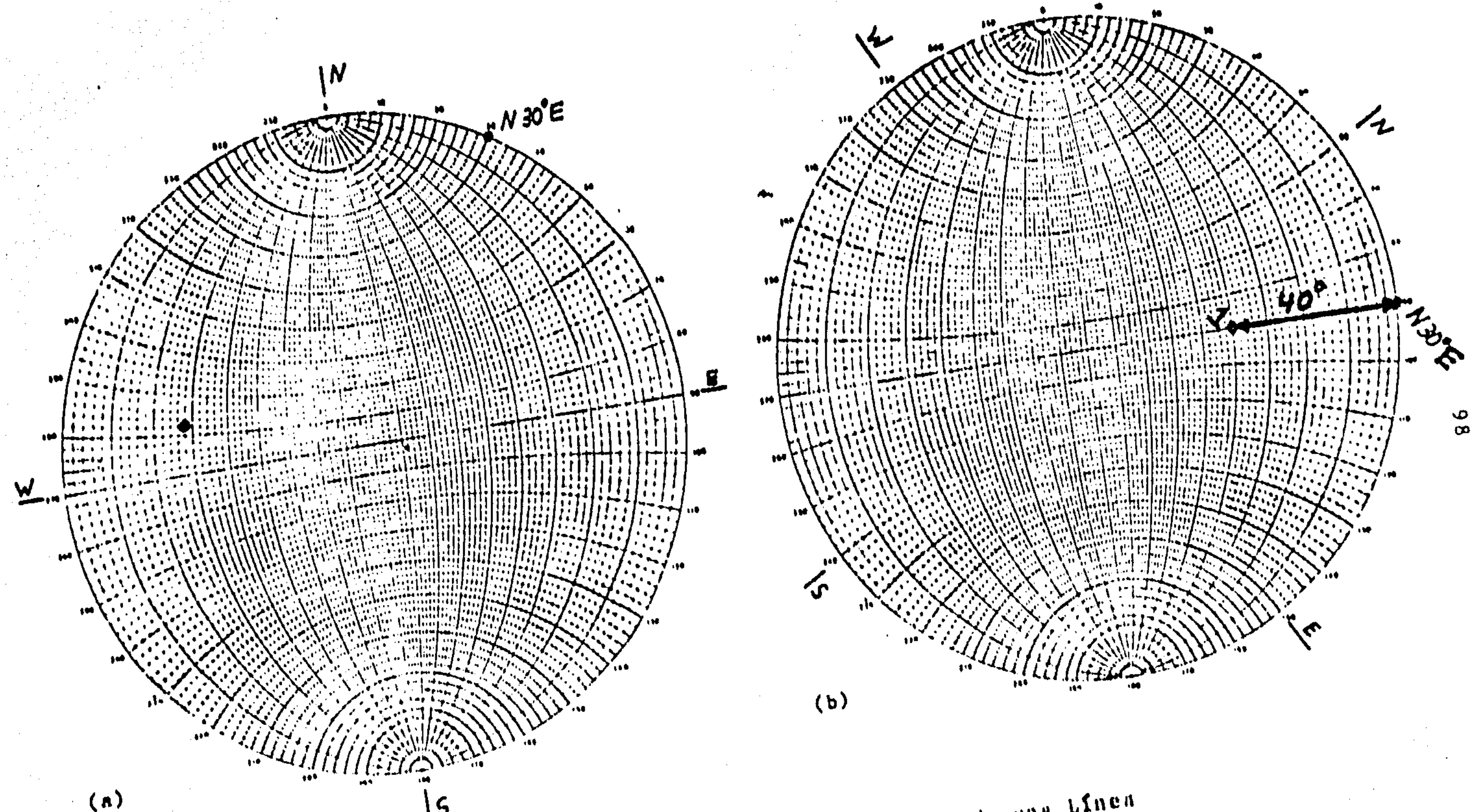


FIG. 4.4. Proyección Estereográfica de una Línea

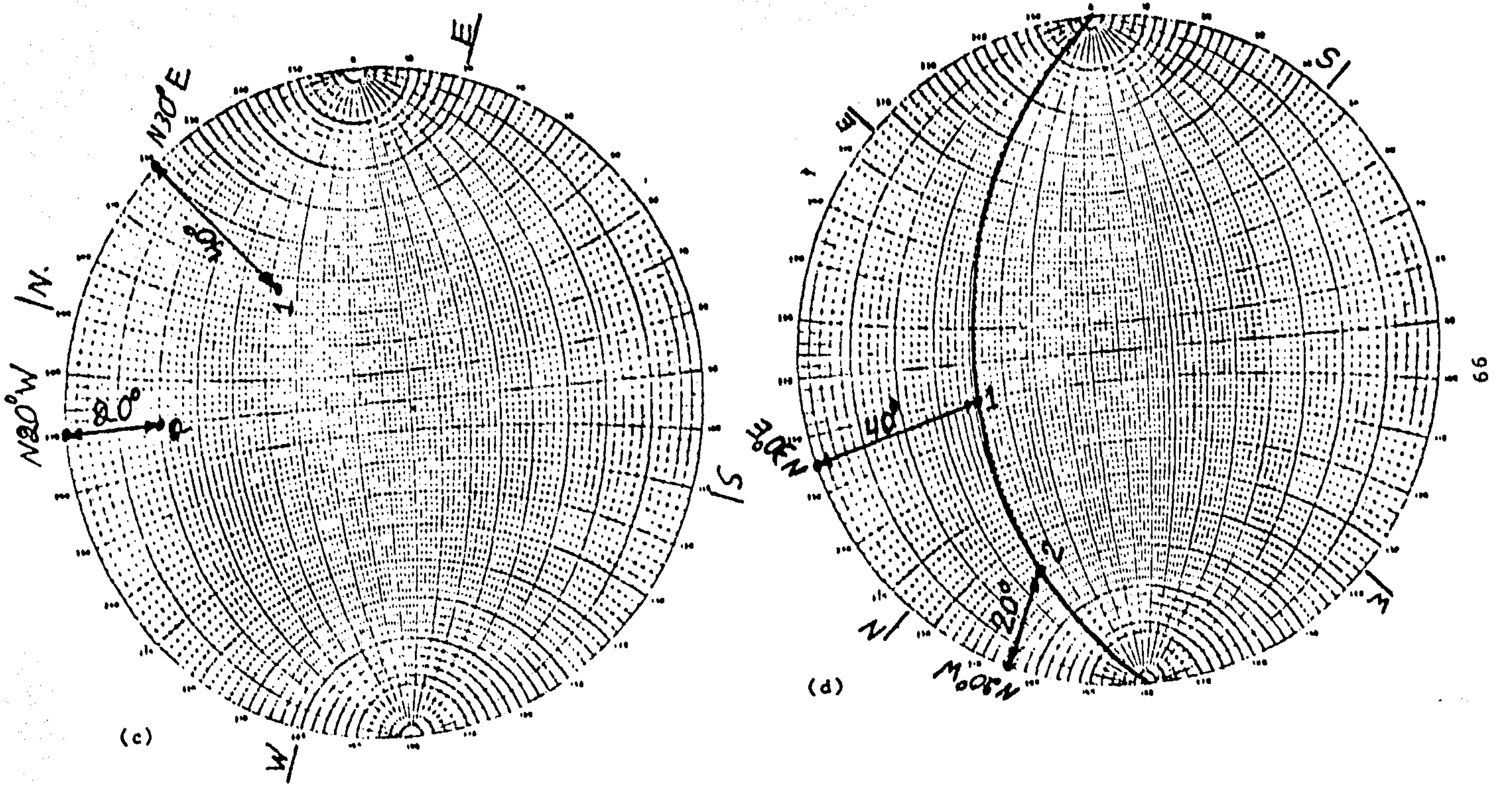
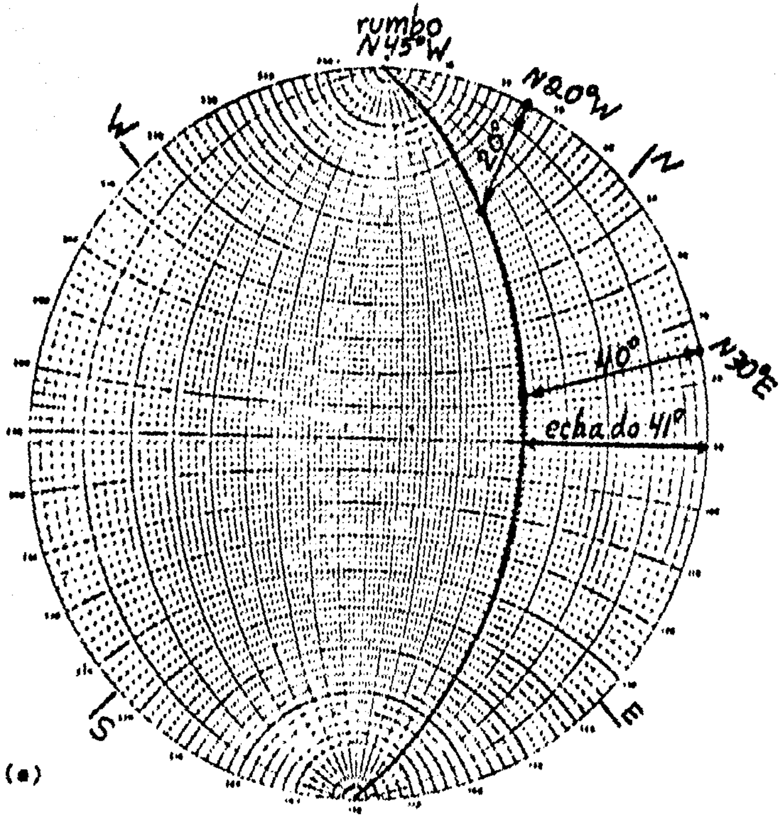


FIG. 4.4. Proyección estereográfica de 2 líneas y plano común a ambas



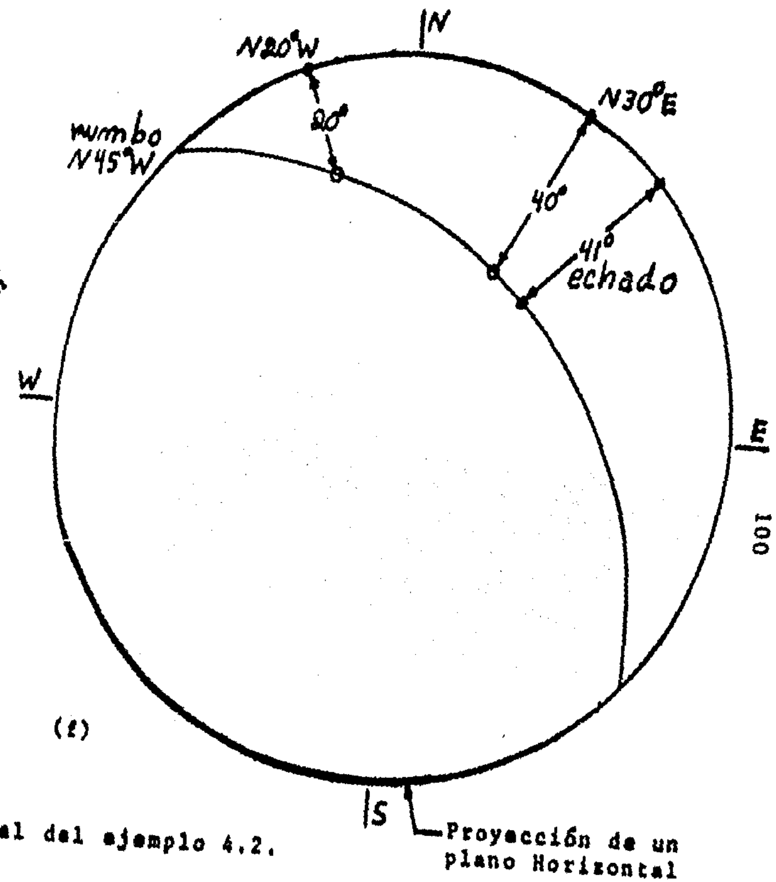


FIG. 4.4. Trazo final del ejemplo 4.2.

4.1.4. Proyección de un plano dados su rumbo y echado.

Ejemplo 4.3.

Trace la proyección estereográfica de un plano (uno)- cuyo rumbo es N 50°E y su echado es 20° en una dirección N 40° W. Sobre la hoja de trazo superpuesta al estereograma, se procede de la siguiente manera: El vector rumbo, que es una línea horizontal, cuya dirección es N 50° E, se traza como un -- punto a 50° al Este a partir del Norte, sobre el meridiano que representa la proyección de un plano horizontal, (vease fig. - 4.5.a.). Entonces girando la hoja de trazo hasta superponer - la proyección del vector rumbo con el "eje meridiano", se traza la proyección del vector echado sobre el eje paralelo, como se muestra en la figura 4.5.b. El vector echado es una línea- inclinada respecto a la horizontal 20°, y cuya dirección es N- 40° W, así hasta este punto se sigue la secuencia de los ejemplos 4.1. y 4.2. Ahora se traza el meridiano que contiene las proyecciones de los vectores rumbo y echado. Para tener precisión, el meridiano se debe trazar con un compas. Como el vector echado tiene una inclinación respecto a la horizontal de - 20° , el centro del meridiano se localiza en el punto que re-- presenta la proyección de una línea que forma un ángulo de 40° con la vertical, este punto se encuentra contenido en el eje - paralelo, que es el eje que contiene la proyección del vector- echado, como se muestra en la figura 4.5.b.

Ejemplo 4.4.

Trace la proyección estereográfica del plano (dos), - cuyo rumbo es N 60° W y su echado es 45°hacia el S 30° W, y encuentre la orientación de la línea de intersección de los planos uno y dos. De manera análoga a la obtención de la proyección del plano uno, se obtiene la proyección del plano dos, -- trazandose un meridiano como se muestra en la figura 4.5.c. - Este meridiano cruza el meridiano que representa la proyección del plano uno en el punto marcado como I_{12}. Como I_{12} es un -- punto en la proyección de cada plano, entonces representa una- línea que está contenida en ambos planos; es por lo tanto la - línea de intersección buscada. La dirección de esta línea se- lee en el estereograma, girando la hoja de trazo, hasta que el punto que representa la línea de intersección se superponga al "eje paralelo", como se muestra en la figura 4.5.d. En esta - posición, el ángulo vertical medido a partir de la horizontal- de la proyección I_{12} se obtiene contando el número de meridianos que intersectan al eje paralelo desde la periferia del estereograma hasta la proyección I_{12}, la línea de intereseccióndé ambos planos forma un ángulo de inclinación medido a partir de la horizontal hacia abajo de 16° y cuyo rumbo es N 77° W. - La figura 4.5.e., muestra la fig. de trazo con las proyecciones obtenidas.

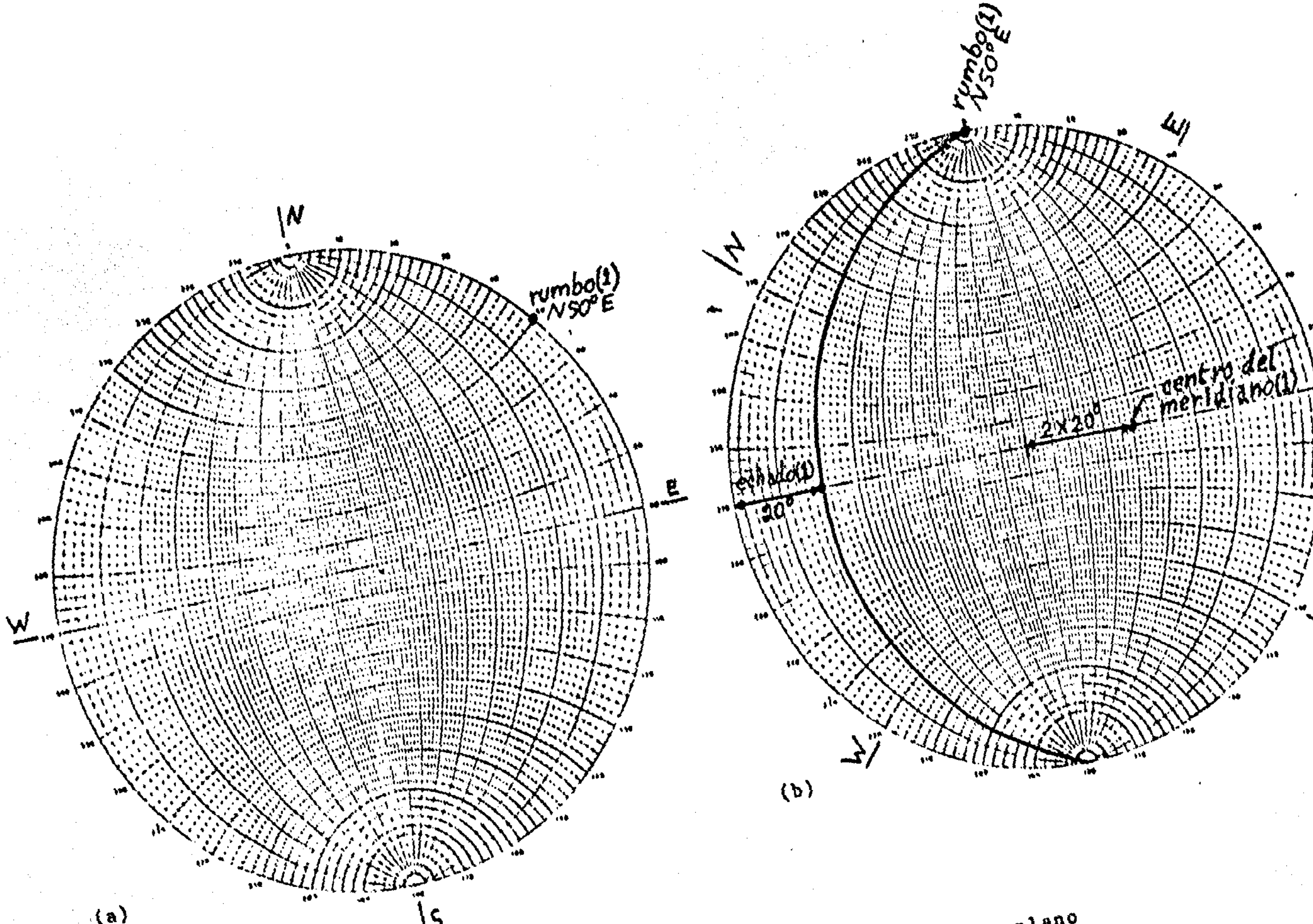
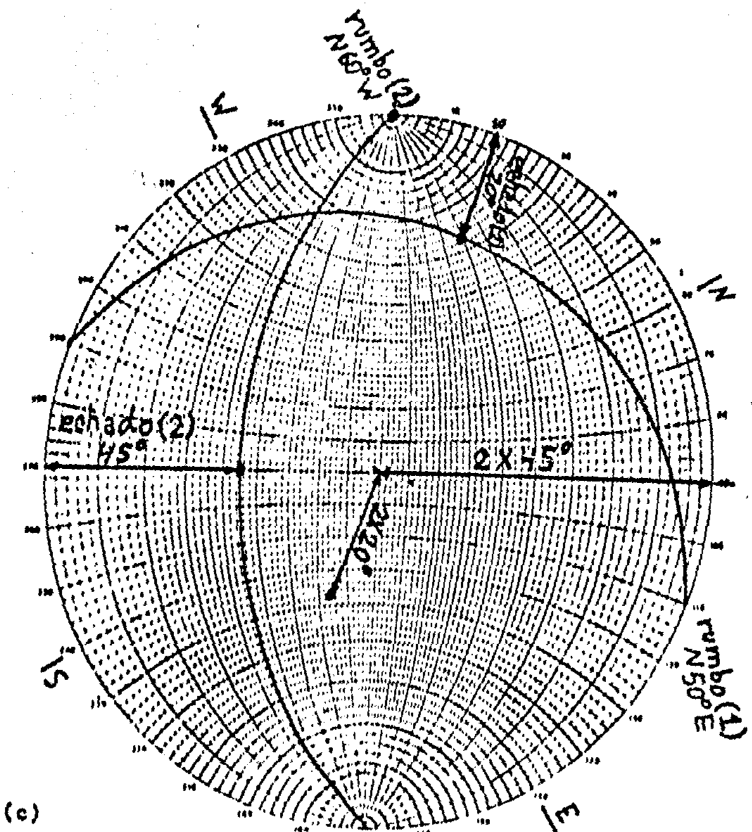


FIG. 4.5. Proyección estereográfica de un plano



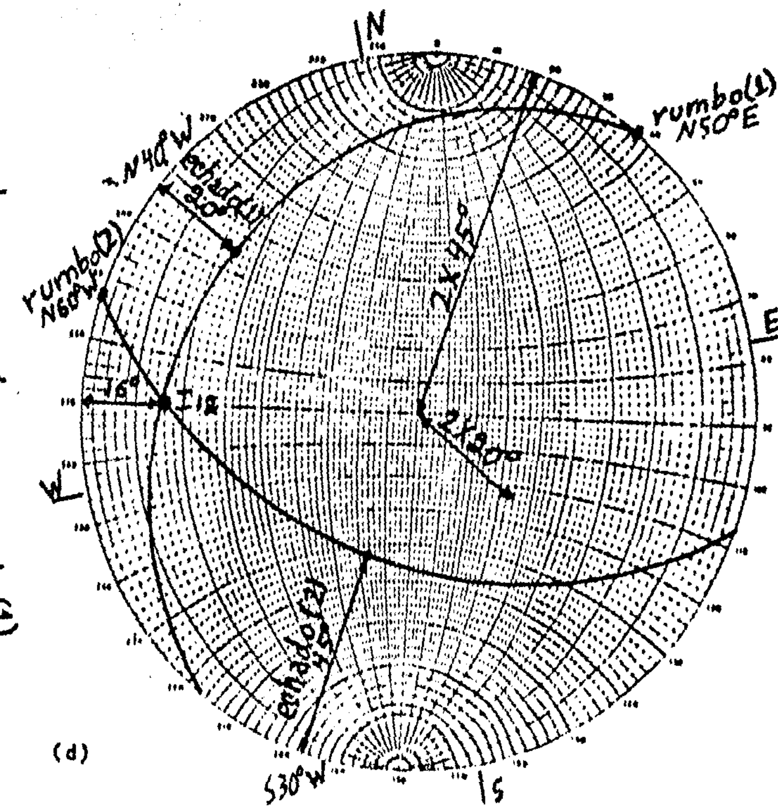


FIG. 4.5. Proyección estereográfica de dos planos y línea de intersección de éstos (I_{12})

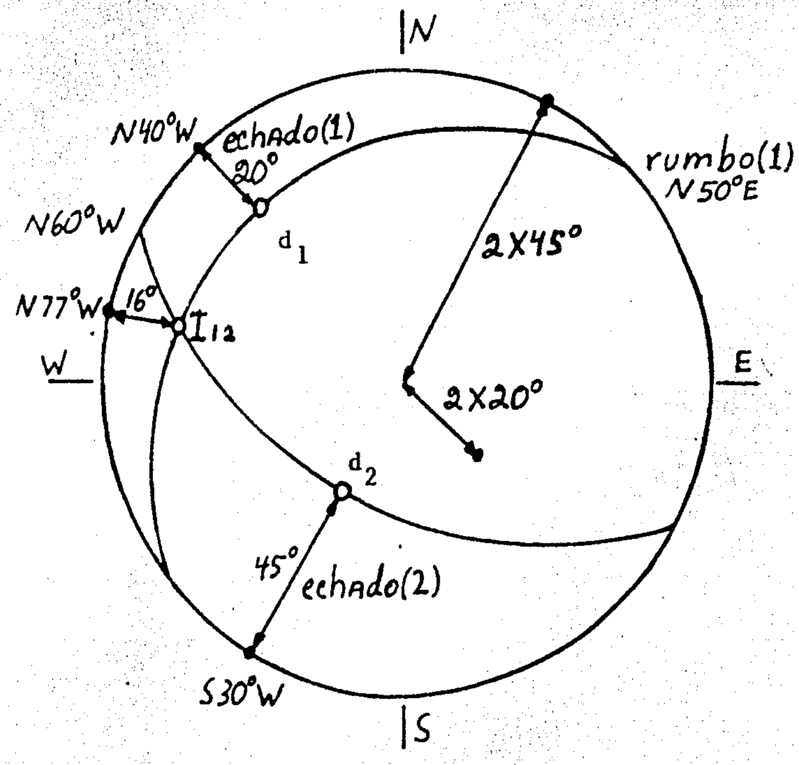


FIG. 4.5.e. Trazos finales

Existe otra manera más conveniente de encontrar la línea de intersección de dos planos, cuando ellos estan representados por sus normales. En este caso, en lugar de un meridiano, un plano puede ser proyectado como un punto. Para encontrar la línea de intersección de dos planos representados por sus normales, n_1 y n_2, el método mostrado en la fig. 4.6., se puede utilizar. La normal al plano uno (n_1), puede ser trazada como se ve la fig. 4.6.a., alineando la proyección del vector echado del plano uno con el "eje paralelo" y midiendo 90° sobre este eje. La normal al plano dos, se traza de manera análoga como se ve en la figura 4.6.b. Entonces, en la fig. 4.6.c., las dos normales, n_1 y n_2 se superponen a un meridiano común a ambas, esto se logra girando apropiadamente la hoja de trazo. La normal a este meridiano será I_{12} (fig. 4.6.c.). La figura 4.6.d. muestra la hoja de trazo concluida. Notese que no fué necesario dibujar los meridianos que representan la proyección de los planos uno y dos para poder encontrar I_{12} por medio de este método. Estos meridianos fueron dibujados en la hoja de trazo para demostrar que con los dos métodos se obtiene el mismo resultado.

4.1.5. Lugar Geométrico de las líneas que forman un ángulo constante respecto a otra línea dada.

El lugar geométrico de las líneas que forman un ángulo constante con otra línea dada, es un cono circular, cuyo vértice coincide con el centro de la esfera de referencia. Este cono se proyecta como un círculo. Apoyandonos en el teorema enunciado previamente, la proyección de un círculo es un círculo, esto es, puede ser dibujado en la hoja de trazos con un compás. Una manera de hacer esto se muestra en la figura. 4.7.

Ejemplo 4.5.

Trazar el lugar geométrico de las líneas que forman un ángulo de 45° con la normal al plano (uno) del ejemplo anterior. En la figura 4.7.a., el punto n_1, es trazado apoyandonos en la fig. 5.6.d., y ha sido alineado con el "eje paralelo" del estereograma. Ahora dos líneas contenidas en la superficie del cono son proyectadas (como puntos), alejandose del punto n_1, un ángulo de 45°sobre el "eje paralelo" en ambos sentidos. En la figura 4.7.a., la distancia entre estos dos puntos es bisectada para encontrar el centro del círculo que representa la proyección de la traza del cono con la superficie de la esfera de referencia. Notese que este centro no coincide con el eje del cono (n_1). El círculo es ahora trazado a partir del centro, utilizando un compás como se muestra en la figura 4.7.a. El trazo final se muestra en la figura 4.7.b.

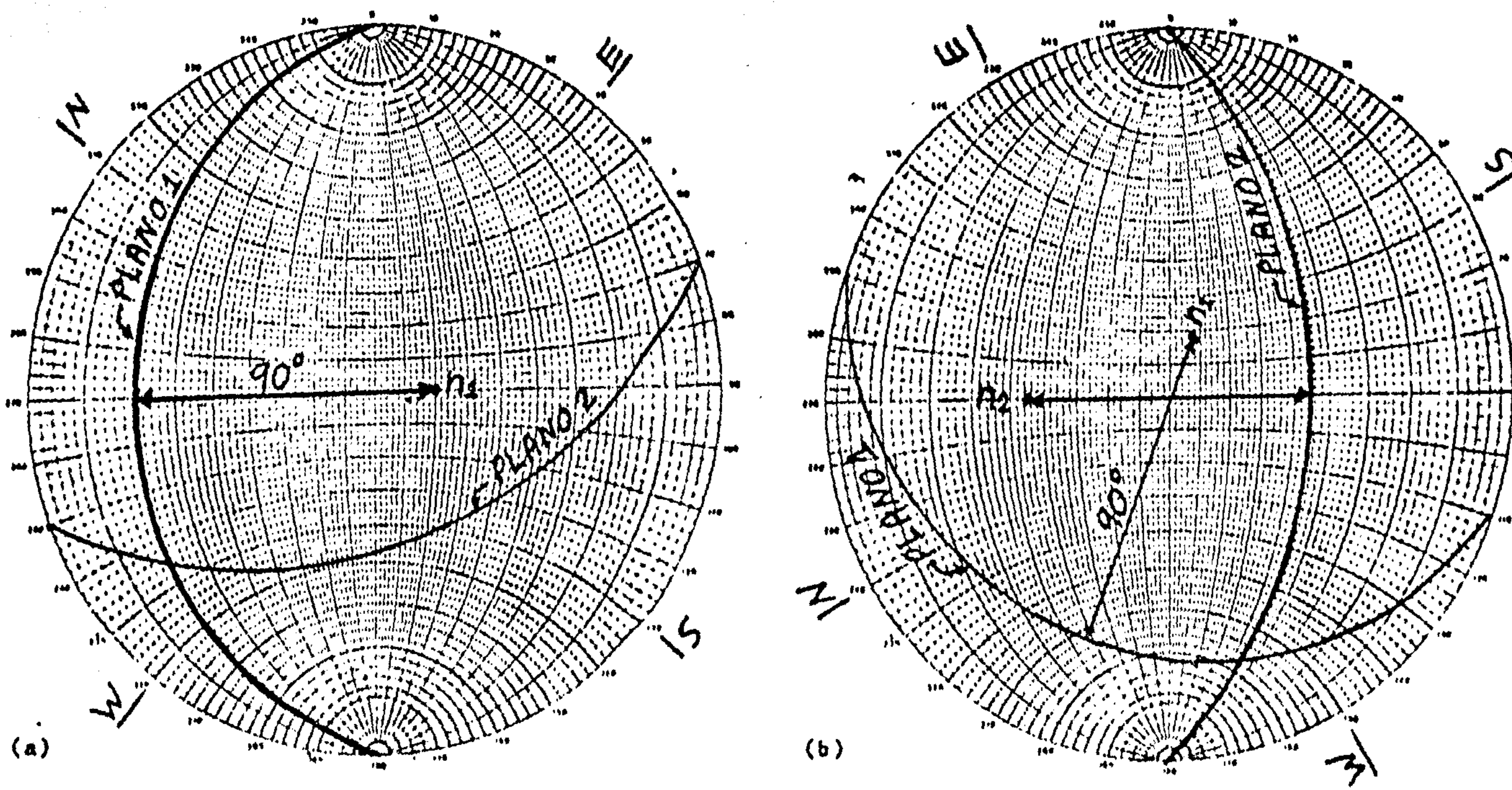


FIG. 4.6. Proyecciones de las normales a los planos 1 y 2.

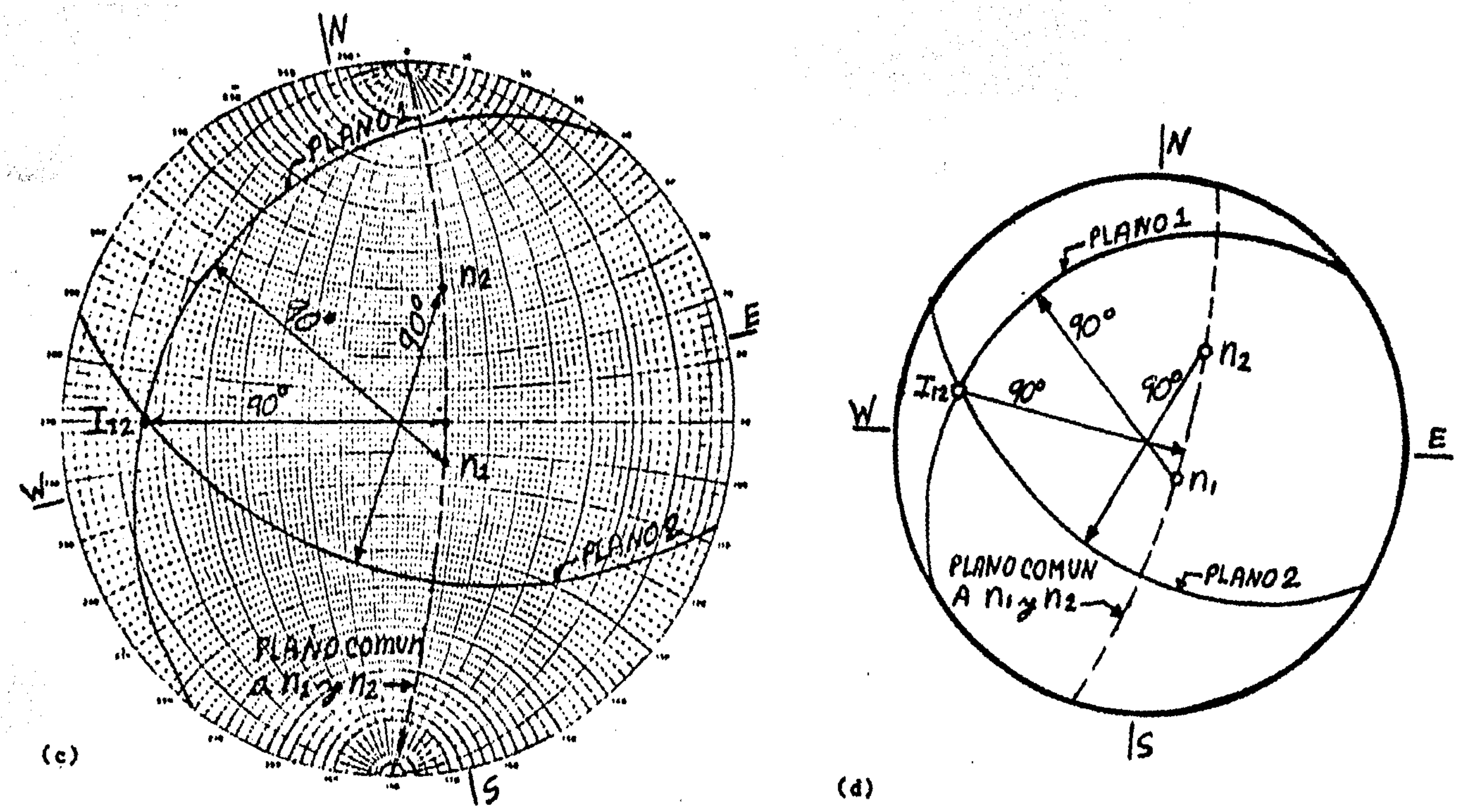


FIG. 4.6. Orientación de la línea de intersección de dos planos.

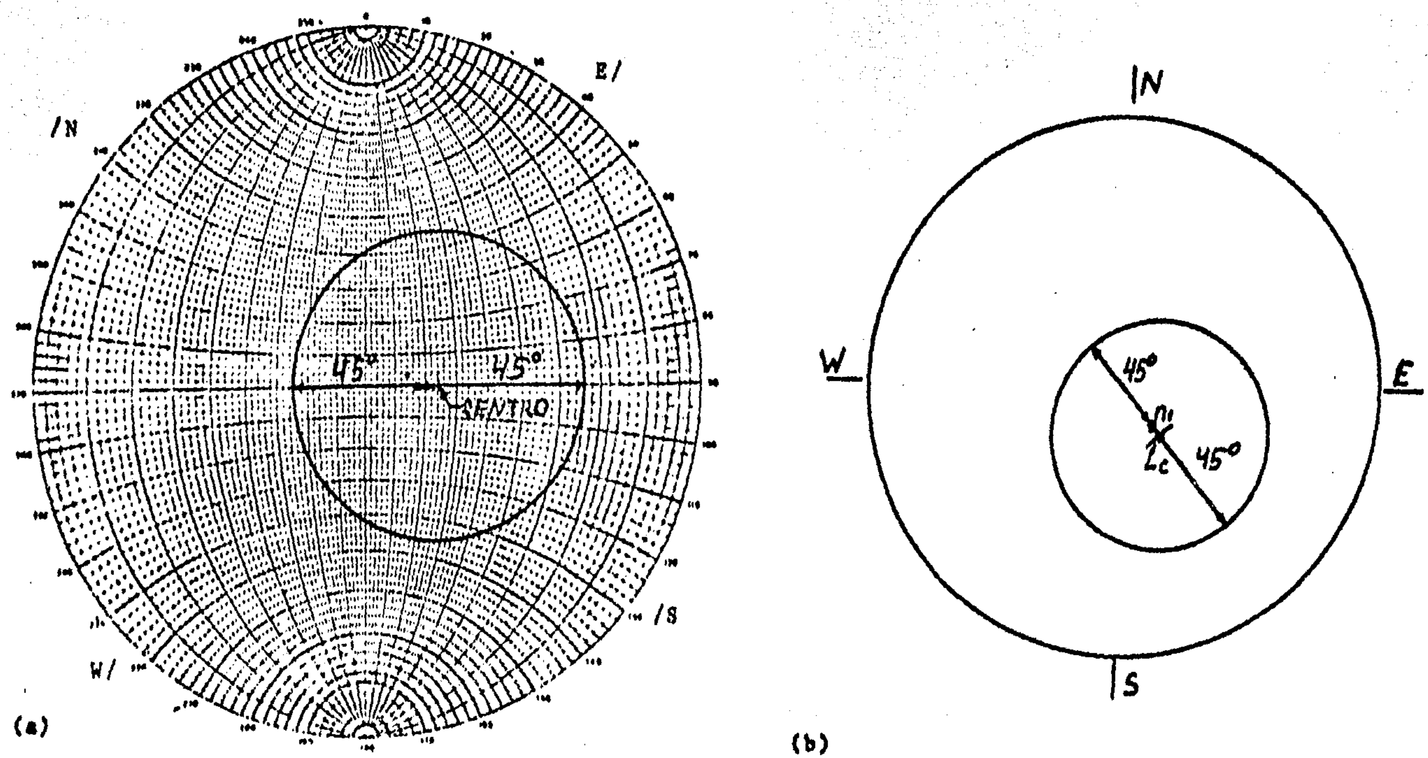


FIG. 4.7. Líneas que forman un ángulo cons
tante con la normal n_1.

4.2. USO DEL ESTEREOGRAMA PARA EVALUAR LAS FUERZAS ACTUANTE Y RESISTENTE SOBRE UNA CUÑA DE ROCA QUE POTENCIALMENTE PUEDE DESLIZAR.

El estereograma puede ser utilizado para evaluar la estabilidad de una cuña de roca tridimensional que se apoya sobre planos que son capaces de desarrollar una reacción tangencial al plano debido a la fricción. El método es muy similar al método bidimensional del polígono de fuerzas, utilizado para sumar estas. Sin embargo, por el método estereográfico solo podemos determinar la orientación (y no la magnitud) de las fuerzas involucradas en el análisis. Si la fuerza resultante-actuante forma un ángulo con las normales a los planos potenciales de falla mayor que el ángulo que forma la mayor fuerza-resistente con dichas normales, entonces el deslizamiento se llevará a cabo.

Notese que el punto de aplicación de las fuerzas actuantes y reacciones no es conocido, y la suma de momentos es por lo tanto imposible.

El análisis de estabilidad se divide en dos etapas. En la primera la orientación de la máxima fuerza resistente que actúa en los planos potenciales de falla es trazada en el estereograma. (Para deslizamiento sobre un plano, la fuerza resitente máxima estará orientada formando un ángulo ϕ con la normal al plano). Entonces se pueden determinar en el estereograma las zonas de estabilidad e inestabilidad considerando solamente la orientación de las fuerzas resistentes en los planos potenciales de falla.

La segunda etapa involucra la determinación de la orientación de la fuerza resultante actuante sobre la cuña. Esta resultante puede incluir el peso propio de la cuña, la fuerza producida por la presión del agua en los planos de debilidad y fuerzas debidas a estructuras, como serían las producidas por los estribos de una presa. Se utiliza la suma de vectores gráficamente como apoyo al método estereográfico para determinar la orientación de la fuerza resultante actuante. Si la proyección de dicha fuerza se encuentra dentro de la zona de estabilidad en el estereograma, entonces la cuña no desliza.

4.3. DESLIZAMIENTO SOBRE UN PLANO

4.3.1. Orientación de la fuerza resistente que actúa sobre el plano de falla.

En esta sección se utiliza el ejemplo 3.1., del capítulo III: Sea un macizo rocoso que contiene un plano probable de falla cuyo rumbo es E - W y su echado es 30° hacia el Sur y que tiene un ángulo de fricción de 40°. La cara del talud, -- también está orientada E - W.

Consideremos primero que solo actúa sobre la cuña, el peso propio. La fuerza resistente a la falla, $\bar{R}_L$, que es la - suma de la fuerza normal al plano potencial de falla $\bar{N}$, más la máxima fuerza resistente debida a la fricción que se puede desarrollar en dicho plano $\bar{S}$, forma un ángulo $\emptyset$, (ángulo de fricción) con la normal a dicho plano. Como la tendencia al deslizamiento es hacia abajo, entonces $\bar{S}$ actúa hacia arriba y $\bar{R}_L$ está orientado como se muestra en la figura 4.8.a. Un cono de - fricción puede ser trazado para mostrar las posibles orientaciones de $\bar{R}_L$, debidas a un deslizamiento en otras direcciones. La superficie del cono esta orientada a $\emptyset$ grados respecto a la normal como se muestra en la figura 4.8.a y b. Cuando la fuerza actuante $\bar{R}$, actúa con un ángulo menor de $\emptyset$ respecto de la - normal, el deslizamiento no puede ocurrir en ninguna dirección. Cuando $\bar{R} = \bar{R}_L$, el deslizamiento se inicia.

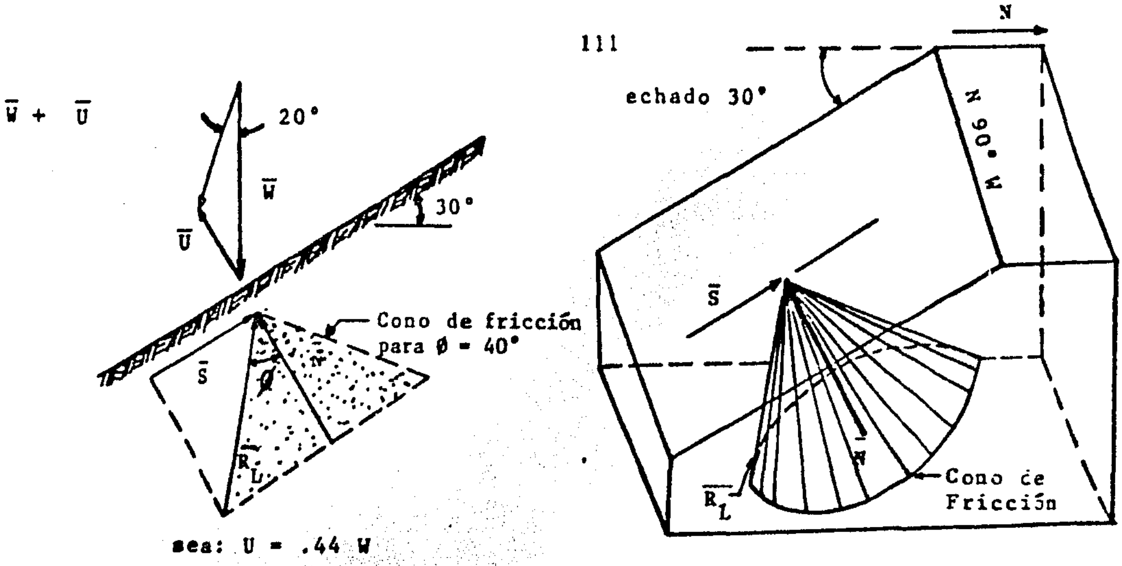
La proyección estereográfica del cono de fricción forma un círculo en el estereográma, como se ve en la fig. 4.8.c. En primer lugar se traza la proyección de la fuerza normal. - El circulo de fricción puede ser trazado como se explicó en la sección 4.1.5. (Nótese que la proyección de $\bar{N}$, no coincide -- con el centro del círculo que representa la proyección del cono de fricción).

4.3.2. <u>Estabilidad de una cuña cuyo peso propio es $\bar{W}$ y sobre la cual actúa otra fuerza debida a la presión del agua en el plano probable de falla.</u>

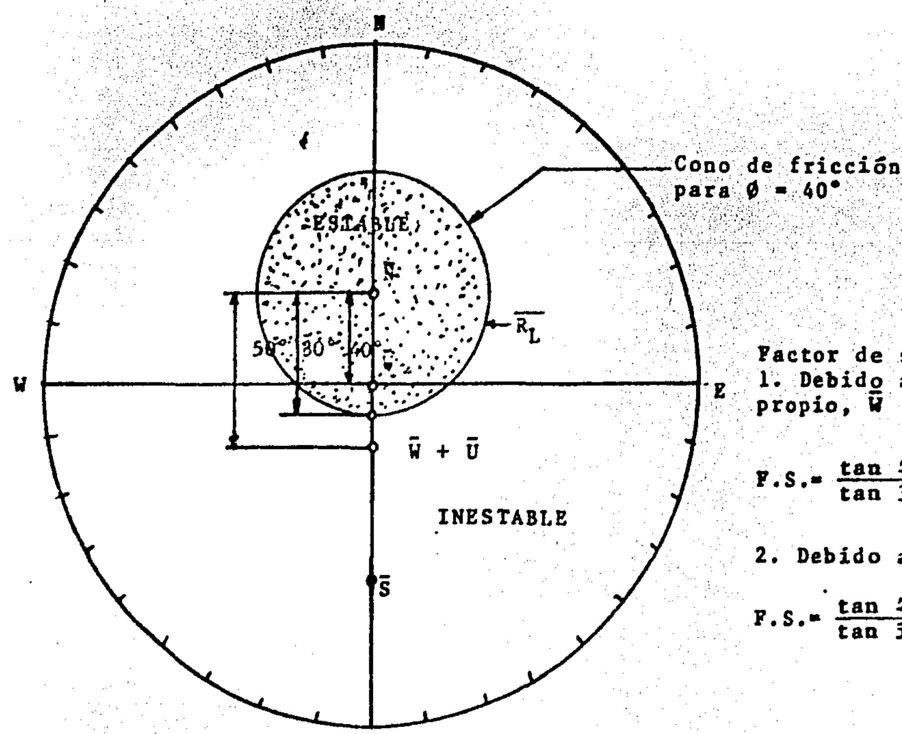
Podemos deducir a partir de una primera aproximación que la cuña de roca no deslizará sobre el plano de debilidad - debido a que $\emptyset$ = 40° siendo mayor que el echado de dicho plano . Esto se puede ver en la fig. 4.8.c., donde el vector peso, $\bar{W}$, está dentro del cono de fricción.

Si la presión del agua actúa en el plano probable de falla, la estabilidad de la cuña se reduce. La fuerza, $\bar{U}$, actúa normal al plano de falla como se muestra en la fig. 4.8.a. La fuerza resultante actuante $\bar{R} = \bar{W} + \bar{U}$, puede determinarse -- trazando los dos vectores a escala (fig. 4.8.a.) y midiendo directamente el ángulo de la resultante respecto de la vertical. En este caso tenemos como dato U = .44 W y por lo tanto el ángulo que forma $\bar{R}$ con la vertical es de 20°, como se puede checar con la ley de los senos. Por lo tanto la proyección de $\bar{R}$ se localiza 10° afuera del círculo de fricción, en la zona de inestabilidad. Esto se debe a que el ángulo que forma la resultante con la normal al plano es de 50°.

El factor de seguridad para los dos casos, sin tomar-



(a) (b)



(c)

Factor de seguridad
1. Debido al peso propio, $\bar{W}$

$$F.S. = \frac{\tan 40°}{\tan 30°} = 1.45$$

2. Debido a $\bar{W}$ + $\bar{U}$

$$F.S. = \frac{\tan 40°}{\tan 50°} = .71$$

(d)

FIG. 4.8. Deslizamiento sobre un solo plano

en cuenta la fuerza $\bar{U}$ y tomandola en cuenta es:

a) Debido a la fuerza $\bar{W}$.

$$F.S. = \frac{\tan 40°}{\tan 30°} = 1.45 \qquad (3.7)$$

b) Debido a $\bar{R} = \bar{W} + \bar{U}$.

$$F.S. = \frac{\tan 40°}{\tan 50°} = .17 \qquad (3.11)$$

4.3.3. Procedimiento gráfico para determinar la dirección de la fuerza resultante actuante.

La suma de una serie de vectores no se puede realizar utilizando solamente la proyección estereográfica, debido a que no existe un método para representar las magnitudes de dichos vectores en este tipo de proyección. Sin embargo, la orientación de la fuerza resultante actuante puede ser determinada utilizando la proyección estereográfica en combinación con la adición gráfica de vectores.

Sean tres vectores, $\bar{W}$ y $\bar{U}$ del ejemplo anterior y un vector adicional $\bar{A}$ cuyas características son: A = .6 W, actuando en una dirección S 45° W y cuyo echado es de 10°. Estos vectores se ilustran en la figura 4.9.

La suma por el método gráfico se realiza como se muestra en la figura 4.10. Como se expuso en el ejemplo anterior, los vectores $\bar{W}$ y $\bar{U}$ se suman gráficamente determinando la orientación de $\bar{W} + \bar{U}$, que forma un ángulo de 20° con la vertical (fig. 4.10.a) Ahora bien, los vectores $\bar{W}$ y $\bar{A}$ se suman de manera análoga determinando la orientación de $\bar{W} + \bar{A}$, este ultimo vector forma un ángulo con la vertical de 30° (fig. 4.10.b.).- Ahora los vectores $\bar{W}$, $\bar{U}$, $\bar{A}$, $\bar{W} + \bar{U}$ y $\bar{W} + \bar{A}$ se proyectan sobre el estereograma (fig. 4.10.c.).

Una vez que estos vectores han sido proyectados, la orientación del vector resultante $\bar{R} = \bar{W} + \bar{A} + \bar{U}$, se puede determinar utilizando solamente el estereograma. Esto se realiza encontrando la orientación de la línea de intersección de dos planos. Un plano que contiene a $\bar{W} + \bar{A}$ y $\bar{U}$, y el otro que contiene a $\bar{W} + \bar{U}$ y $\bar{A}$ (fig. 4.9.). La proyección de la línea de intersección de estos dos planos, coincide con la proyección del vector resultante $\bar{R} = \bar{W} + \bar{A} + \bar{U}$. En el estereograma de la figura 4.10.c., se ha determinado un meridiano del estereograma que contiene las proyecciones de $\bar{W} + \bar{A}$ y $\bar{U}$, este meridiano representa la proyección del plano que contiene los vec-

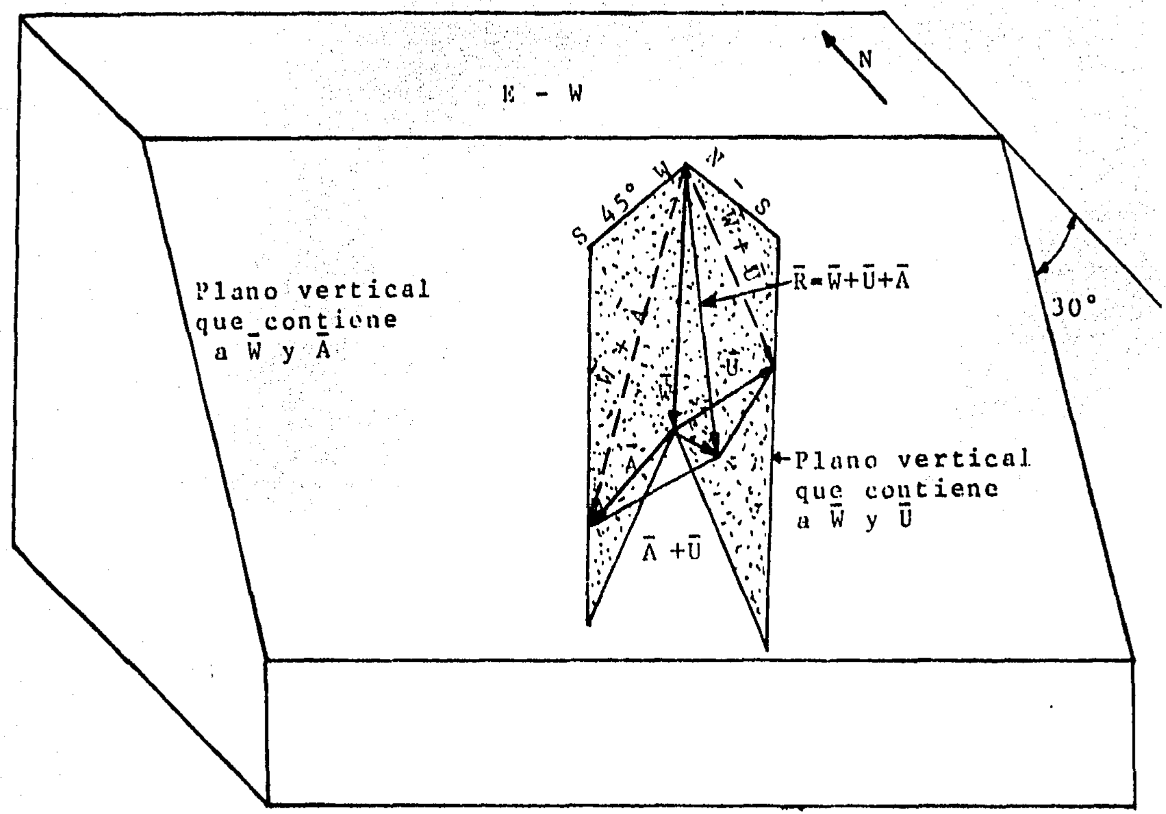
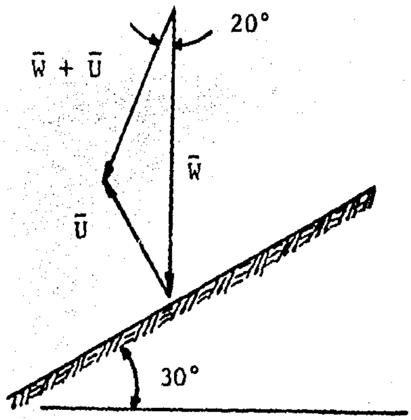
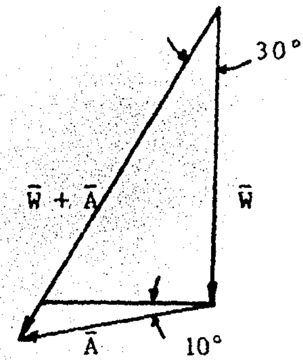


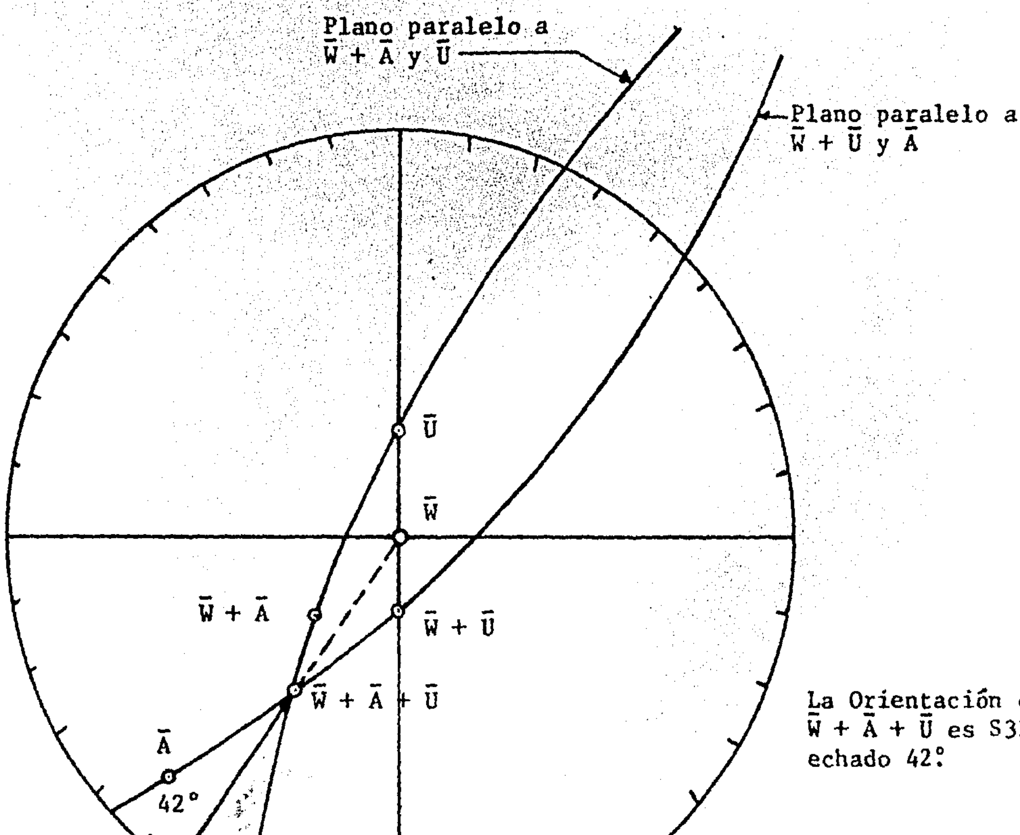
FIG. 4.9. Adición gráfica de 3 vectores



(a) Plano vertical orientado N-S Contiene a los vectores $\bar{W}$ y $\bar{U}$



(b) Plano vertical orientado S45° W Contiene los vectores $\bar{W}$ y $\bar{A}$



La Orientación de $\bar{W} + \bar{A} + \bar{U}$ es S32° W, echado 42°.

FIG. 4.10. Determinación gráfica de la orientación del vector resultante $\bar{R} = \bar{W} + \bar{A} + \bar{U}$

tores $\bar{W} + \bar{A}$ y $\bar{U}$, por otro lado se ha encontrado otro meridiano que representa la proyección de un plano que contiene los vectores $\bar{W} + \bar{U}$ y $\bar{A}$. El punto de intersección de estos dos meridianos representa la proyección del vector resultante $\bar{R} = \bar{W} + \bar{U} + \bar{A}$, ahora, apoyándonos en el estereograma obtenemos directamente del el la dirección de $\bar{R}$, que forma un ángulo con la horizontal de 42° y cuya dirección es S 32° W.

La manera de obtener la proyección de $\bar{R}$ arriba expuesta, se explica de la siguiente manera: Se puede obtener $\bar{R}$ realizando la suma vectorial de $(\bar{W} + \bar{U}) + \bar{A}$ donde $\bar{W} + \bar{U}$ y $\bar{A}$, están contenidos en un plano uno (vease fig. 4.11.), por otro lado se llega al mismo resultado si hacemos la suma vectorial de $(\bar{W} + \bar{A}) + \bar{U}$ donde $\bar{W} + \bar{A}$ y $\bar{U}$ están contenidos en otro plano (dos), entonces el extremo terminal del vector $\bar{R} = \bar{W} + \bar{U} + \bar{A}$ está contenido en ambos planos simultaneamente, por lo cual el vector $\bar{R}$ tiene una orientación paralela a la línea de intersección de ambos planos, la cual se puede obtener directamente del estereograma.

4.3.4. Determinación de la dirección del deslizamiento y del factor de seguridad para el caso de una fuerza $\bar{R} = \bar{W} + \bar{U} + \bar{A}$ que actúa sobre una cuña de roca.

En la fig. 4.12, la fuerza resultante $\bar{R}$, ha sido combinada con la proyección del cono de fricción. $\bar{R} = \bar{W} + \bar{U} + \bar{A}$ se encuentra fuera del círculo de fricción, es decir, en la zona inestable, por lo tanto el deslizamiento es inminente. La dirección del deslizamiento será paralela a la dirección de la fuerza resistente friccionante. Se puede observar que el vector normal al plano de deslizamiento $\bar{N}$, la fuerza resultante actuante $\bar{R}$, y la fuerza resistente friccionante $\bar{S}$ están contenidas en un mismo plano, entonces utilizando el esterograma trazamos el meridiano que representa la proyección de dicho plano, utilizando como puntos de referencia $\bar{N}$ y $\bar{R}$, y sobre ese meridiano obtenemos la proyección de $\bar{S}$ que estará a 90° de $\bar{N}$, ahora obtenemos directamente del estereograma la dirección de $\bar{S}$ que resulta ser para este ejemplo S 27° W y el ángulo que forma con la horizontal es de 25°. Notese que esta dirección no es paralela a la dirección de $\bar{R}$.

El factor de seguridad está determinado por las separaciones angulares sobre este meridiano. Desde $\bar{N}$ hasta $\bar{R}_L$, el ángulo es de 40°, mientras que el de $\bar{N}$ hasta $\bar{R}$ es de 75°. El factor de seguridad es por lo tanto.

$$F.S. = \frac{\tan 40°}{\tan 75°} = .22 \qquad (3.11)$$

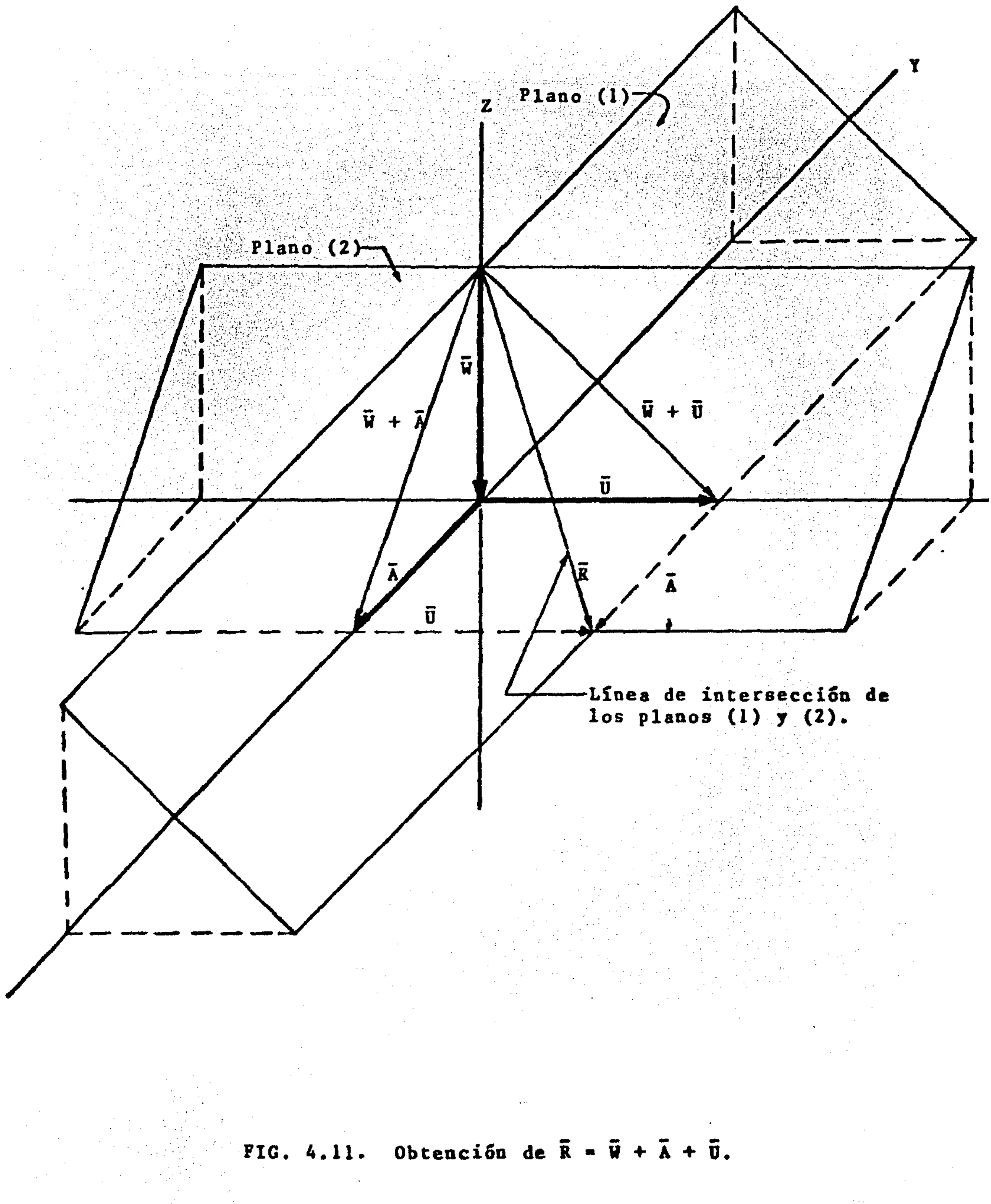
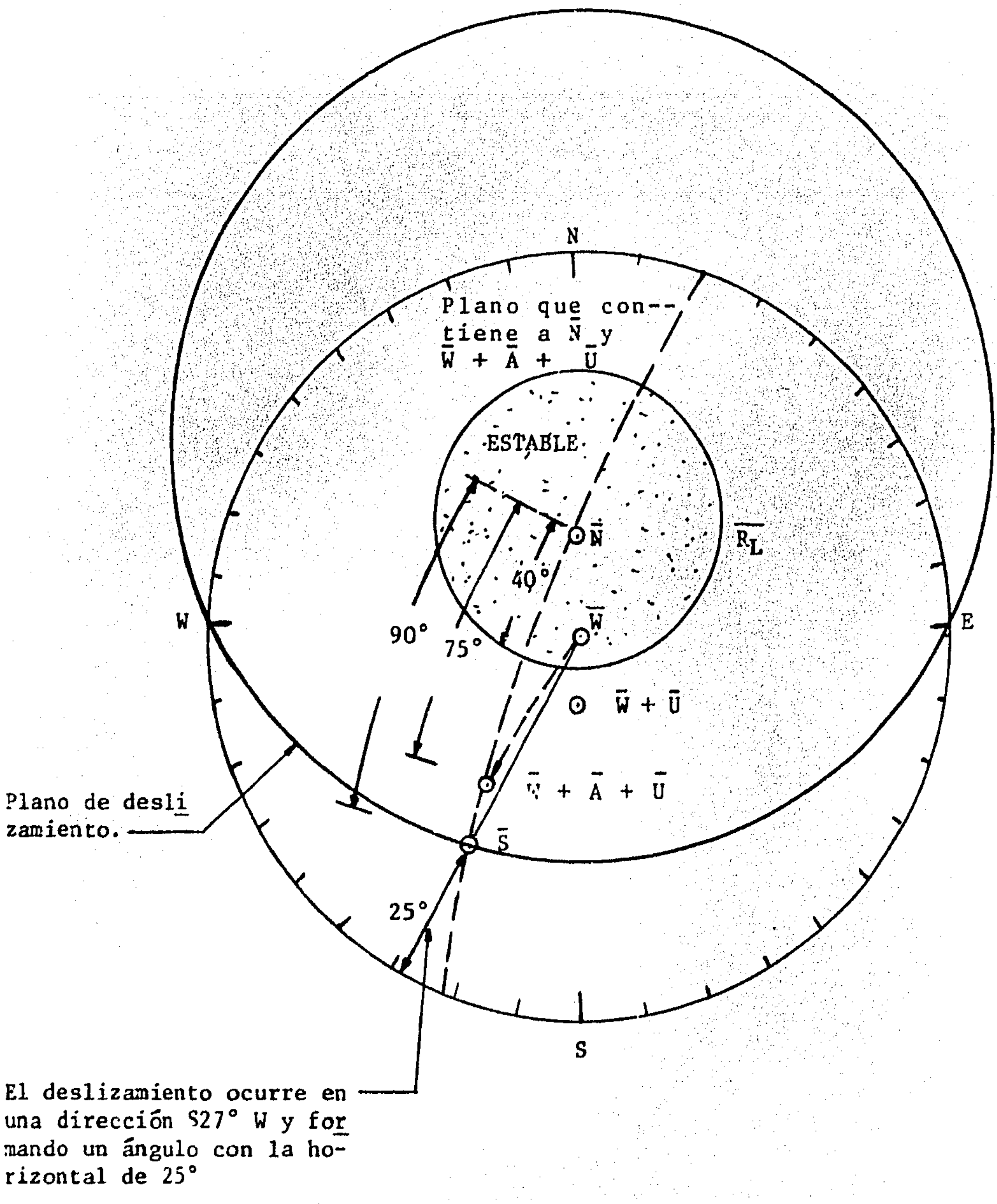


FIG. 4.11. Obtención de $\bar{R} = \bar{W} + \bar{A} + \bar{U}$.



$$F.S. = \frac{\tan 40°}{\tan 75°} = .22$$

FIG. 4.12. Deslizamiento sobre un solo plano

4.3.5. Fuerza mínima $\overline{NW}$ requerida para producir la falla.

La orientación de la fuerza mínima $\overline{NW}$, requerida para producir la falla de un talud que sin ella fuera estable, puede ser determinada rápidamente a partir del estereograma. Para determinar la magnitud de la fuerza mínima, es necesario -- construir una gráfica auxiliar como la mostrada en la figura - 4.13.

Para el plano cuyo echado es $\gamma = 30°$ mostrado en la figura 4.8, la cuña es estable bajo su peso propio $\overline{W}$. Para reducir el factor de seguridad a la unidad, el ángulo que forma el peso $\overline{W}$ y la fuerza resultante resiste $\overline{R}_L$, debe ser reducido. - El ángulo mínimo es 10° que será obtenido cuando las fuerzas - actuantes provoque un deslizamiento hacia abajo del plano de - debilidad en una dirección paralela al echado (hacia el Sur).- Cualquier otra dirección de deslizamiento, dará como resultado un ángulo mayor entre $\overline{R}_L$ y $\overline{W}$, y por lo tanto el valor de $\overline{NW}$ será mayor.

La fuerza mínima, $\overline{NW}$, estará dirigida hacia el Sur y - formando un ángulo con la horizontal de 10° hacia arriba siendo así normal a $\overline{R}_L$, como se ve en la figura 4.13.

4.3.6. Fuerza mínima de anclaje $\overline{NW}$ necesaria para obtener el- factor de seguridad deseado.

Para obtener la magnitud de la fuerza mínima de anclaje y su dirección óptima se recurre a un ejemplo ilustrativo - como sigue:

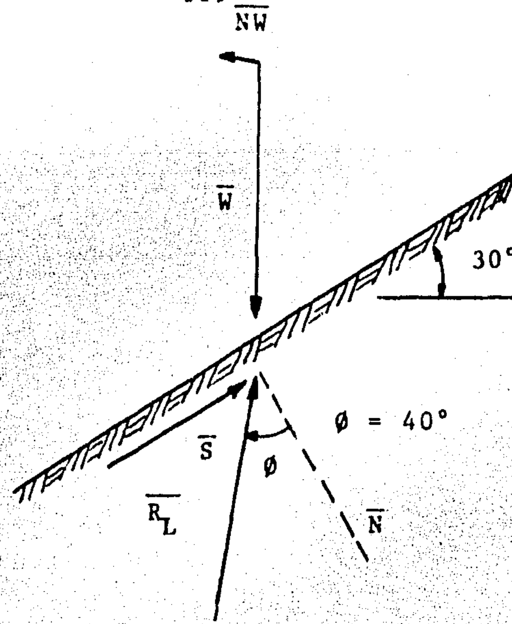
Ejemplo 4.6.

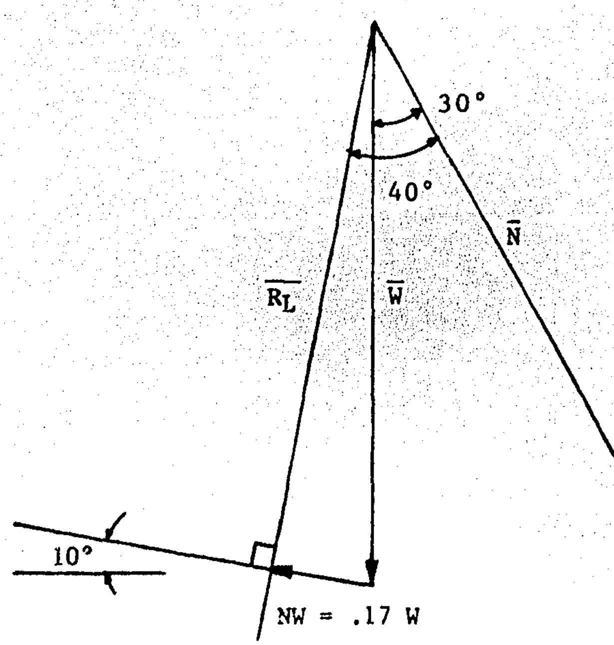
Sea el plano de debilidad cuyo rumbo es hacia el Norte y su echado es 43° E, el ángulo de fricción ϕ = 40° y solo actúa el peso propio. Se desea obtener un factor de seguridad F.S. = 1.5.

El primer paso es obtener la proyección estereográfica del plano de debilidad (fig. del ejemplo 4.6.a.), a partir- de esta se obtiene la dirección de la normal al plano y se procede a trazar el círculo de fricción, se puede observar que el peso propio se encuentra fuera de la zona estable, por lo que- se produce el deslizamiento.

$$F.S. = \frac{\tan \phi}{\tan \gamma} = \frac{\tan 40°}{\text{Tan } 43°} = 0.9$$

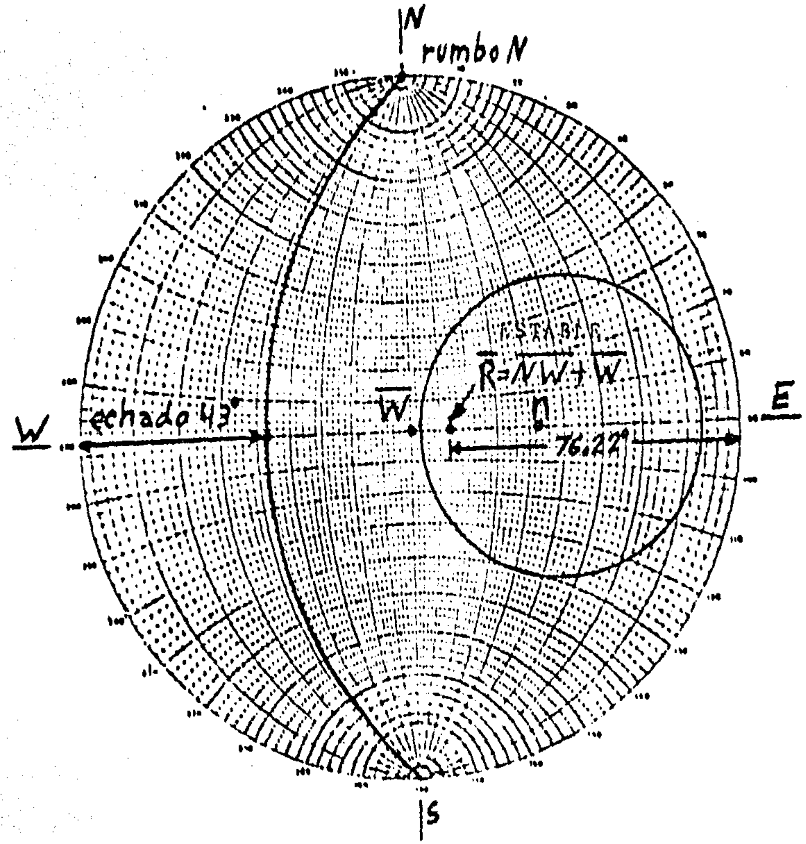
Ahora bien, la fuerza mínima de anclaje $\overline{NW}$, se debe - sumar al peso $\overline{W}$ para obtener una fuerza resultante cuya proyec



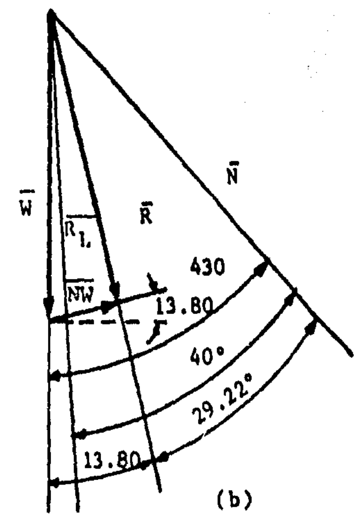


Polígono de fuerzas

FIG. 4.13. Fuerza mínima requerida para causar la falla.



(a)



(b)

Magnitud mínima de la fuerza de ancla je:

sen 13.78° = $\dfrac{\overline{NW}}{\overline{W}}$ $\Longrightarrow$

$\overline{NW} = 0.238\ \overline{W}$

Dirección óptima del anclaje rumbo; - hacia el Este

echado: 13.78 hacia arriba de la hori zontal.

FIG. del ejemplo. 4.6. Obtención de la fuerza mínima de anclaje.

ción se localice dentro de la zona estable y se obtenga un factor de seguridad de 1.5. Las fuerzas $\bar{W}$, $\overline{NW}$, $\bar{R}$, $\bar{N}$, se encuentran contenidas en un mismo plano, entonces se utiliza una figura auxuliar como la figura del ejemplo 4.6.b.

Para obtener un factor de seguridad de 1.5. la fuerza resultante $\bar{R} = \bar{W} + \overline{NW}$ debe formar un ángulo con la normal al plano de $\emptyset' = 29.22°$

$$1.5 = \frac{\tan 40°}{\tan \emptyset'} \Longrightarrow \emptyset' = \text{Arc} \tan \left(\frac{\tan 40°}{1.5}\right) = 29.22°$$

De lo anterior se deduce que el ángulo que debe formar $\bar{R}$ con $\bar{W}$ es de 13.78°, con este dato y a partir de la figura del ejemplo 4.6.b., se puede obtener la magnitud mínima de la fuerza de anclaje.

$$\text{Sen } 13.78° = \frac{\overline{NW}}{W} \Longrightarrow \overline{NW} = 0.238\ \bar{W}$$

La orientación óptima de la fuerza mínima de anclaje es hacia el Este como se deduce a partir de estereograma y formando un ángulo de 13.78° hacia arriba de la horizontal.

A partir del estereograma de la fig. del ejemplo 4.6.a., se puede obtener la dirección de la fuerza resultante $\bar{R}$ cuyo rumbo es hacia el Este y su echado es 76.22°.

4.4. DESLIZAMIENTO SOBRE DOS PLANOS FRICCIONANTES

4.4.1. Generalidades.

Los modos posibles de falla de una cuña apoyada en dos planos puede ser determinada rápidamente apoyandonos en el estereograma. La orientación de las fuerzas actuantes determina cuando el deslizamiento ocurre sobre la línea de intersección de los planos, o cuando ocurre sobre cualquiera de ellos. Un ejemplo se utiliza para clarificar la siguiente discución.- El ejemplo se ilustra en las figuras 4.14. a 4.18.

4.4.2. Orientación de la línea de intersección de los dos planos de debilidad.

La orientación de la línea de intersección de dos planos potenciales de falla es determinada usando el estereograma como se ilustra en la figura 4.14. Los meridianos que representan la proyección de los dos planos, se trazan en el estereograma y su intersección se determina como se expuso en la sección 4.1.4. Para el ejemplo ilustrado en la figura 4.14. -

ción se localice dentro de la zona estable y se obtenga un factor de seguridad de 1.5. Las fuerzas $\bar{W}$, $\overline{NW}$, $\bar{R}$, $\bar{N}$, se encuentran contenidas en un mismo plano, entonces se utiliza una figura auxuliar como la figura del ejemplo 4.6.b.

Para obtener un factor de seguridad de 1.5. la fuerza resultante $\bar{R} = \bar{W} + \overline{NW}$ debe formar un ángulo con la normal al plano de $\phi' = 29.22°$

$$1.5 = \frac{\tan 40°}{\tan \phi'} \Longrightarrow \phi' = \text{Arc tan}\left(\frac{\tan 40°}{1.5}\right) = 29.22°$$

De lo anterior se deduce que el ángulo que debe formar $\bar{R}$ con $\bar{W}$ es de 13.78°, con este dato y a partir de la figura del ejemplo 4.6.b., se puede obtener la magnitud mínima de la fuerza de anclaje.

$$\text{Sen } 13.78° = \frac{\overline{NW}}{W} \Longrightarrow \overline{NW} = 0.238\ \bar{W}$$

La orientación óptima de la fuerza mínima de anclaje es hacia el Este como se deduce a partir de estereograma y formando un ángulo de 13.78° hacia arriba de la horizontal.

A partir del estereograma de la fig. del ejemplo 4.6.a., se puede obtener la dirección de la fuerza resultante $\bar{R}$ cuyo rumbo es hacia el Este y su echado es 76.22°.

4.4. DESLIZAMIENTO SOBRE DOS PLANOS FRICCIONANTES

4.4.1. Generalidades.

Los modos posibles de falla de una cuña apoyada en dos planos puede ser determinada rápidamente apoyandonos en el estereograma. La orientación de las fuerzas actuantes determina cuando el deslizamiento ocurre sobre la línea de intersección de los planos, o cuando ocurre sobre cualquiera de ellos. Un ejemplo se utiliza para clarificar la siguiente discución.- El ejemplo se ilustra en las figuras 4.14. a 4.18.

4.4.2. Orientación de la línea de intersección de los dos planos de debilidad.

La orientación de la línea de intersección de dos planos potenciales de falla es determinada usando el estereograma como se ilustra en la figura 4.14. Los meridianos que representan la proyección de los dos planos, se trazan en el estereograma y su intersección se determina como se expuso en la sección 4.1.4. Para el ejemplo ilustrado en la figura 4.14. -

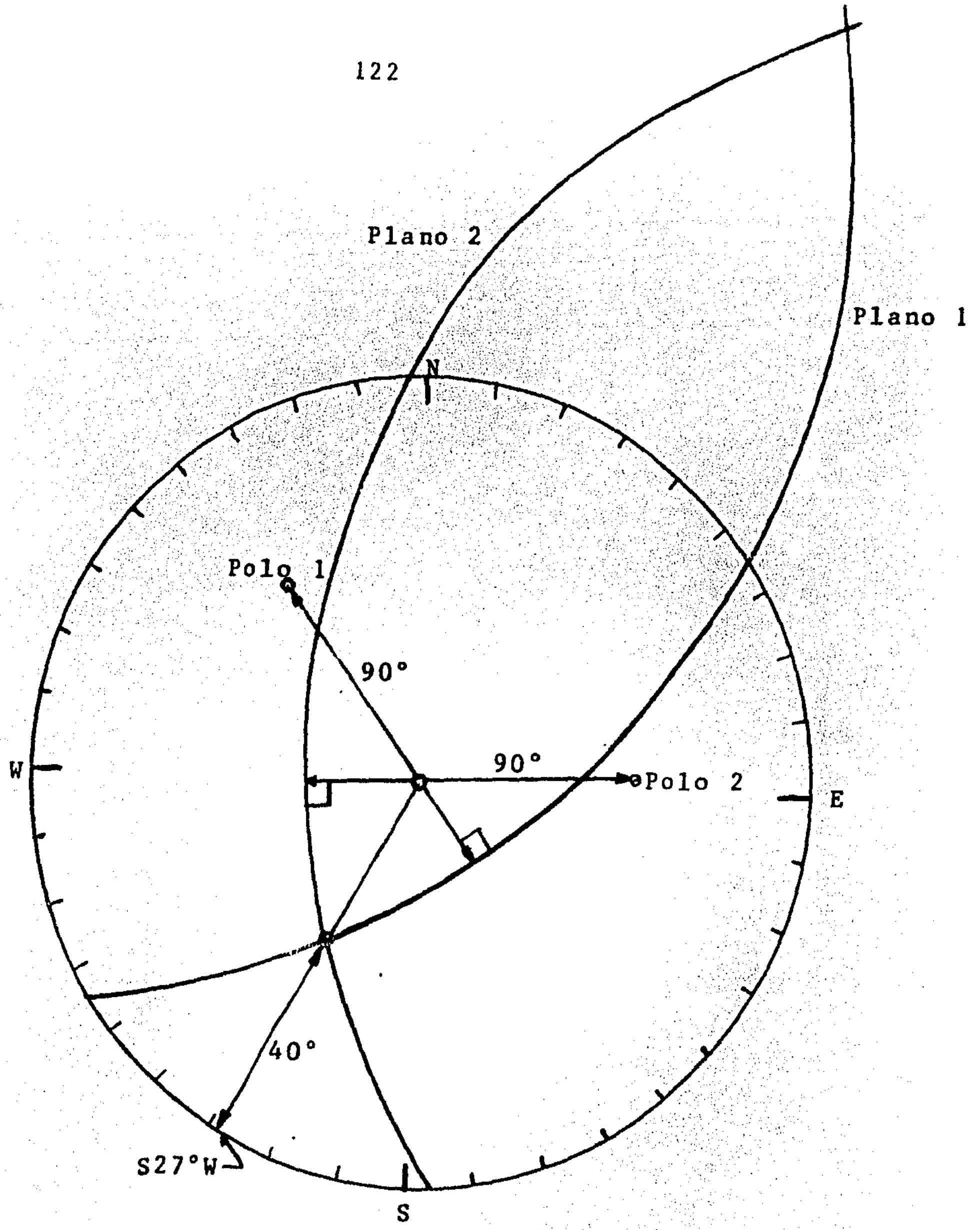


FIG. 4.14 Deslizamiento sobre 2 planos: orientación de la línea de intersección.

tenemos:

Plano 1: Rumbo N 54° E; echado 62° SE, ϕ = 20°

Plano 2: Rumbo N 04° W; echado 59° SW, ϕ = 40°

La línea de intersección forma un ángulo con la horizontal de 40° y está orientada al S 27° W.

La figura 4.15., es un diagrama del bloque de los dos planos, mostrando su línea de intersección y los conos de fricción que actúan en cada plano. Por claridad en el dibujo estos conos se muestran arriba de los planos de deslizamiento.

4.4.3. Fuerzas resistentes sobre los planos de falla.

Las zonas de inestabilidad y estabilidad aparecen delimitadas en el estereograma (fig. 4.16.), por las fuerzas resistentes friccionantes $\overline{R_{L1}}$ y $\overline{R_{L2}}$. Las zonas de inestabilidad incluyen aquellas en las cuales el deslizamiento ocurre hacia abajo a lo largo de la línea de intersección, hacia arriba a lo largo de la misma línea, sobre uno u otro plano unicamente y levantando la cuña de roca de los dos planos de soporte. Para el caso de deslizamiento sobre el plano uno solamente, la orientación de $\overline{R_{L1}}$ está definida por el cono de fricción del plano uno, entonces a partir de este cono se definen las zonas de estabilidad e inestabilidad. Para delizamiento a lo largo de la línea de intersección de los planos uno y dos, la orientación de $\overline{R_{L1}} \neq \overline{R_{L2}}$ separa las zonas de estabilidad e inestabilidad. El límite entre las zonas de deslizamiento sobre la línea de intersección y el deslizamiento sobre el plano uno, es el meridiano que contiene a $\overline{N_1}$ y $\overline{S_1}$, que son las fuerzas normal y tangencial, esta última debida a la fricción sobre el plano uno, respectivamente. Este meridiano representa un plano normal al plano uno y paralelo a la línea de intersección.

4.4.4. Método para encontrar el lugar geométrico del límite entre las zonas estable e inestable.

Para el caso de deslizamiento a lo largo de la línea de intersección, el lugar geométrico de la resultante, $\overline{R_{L1}}$ + $\overline{R_{L2}}$, debe ser determinado para establecer las zonas de estabilidad e inestabilidad para este modo de falla particular. Las fuerzas friccionantes sobre los planos uno y dos, tendrán una dirección paralela al deslizamiento, que en este caso es paralela a la línea de intersección. Por lo tanto, las fuerzas friccionantes, $\overline{S_1}$ y $\overline{S_2}$, serán trazadas en el estereograma en el mismo punto que representa la proyección de la orientación de la línea de intersección de los dos planos (punto $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ en la fig. 4.16.).

La dirección de la reacción en cada plano es conocida,

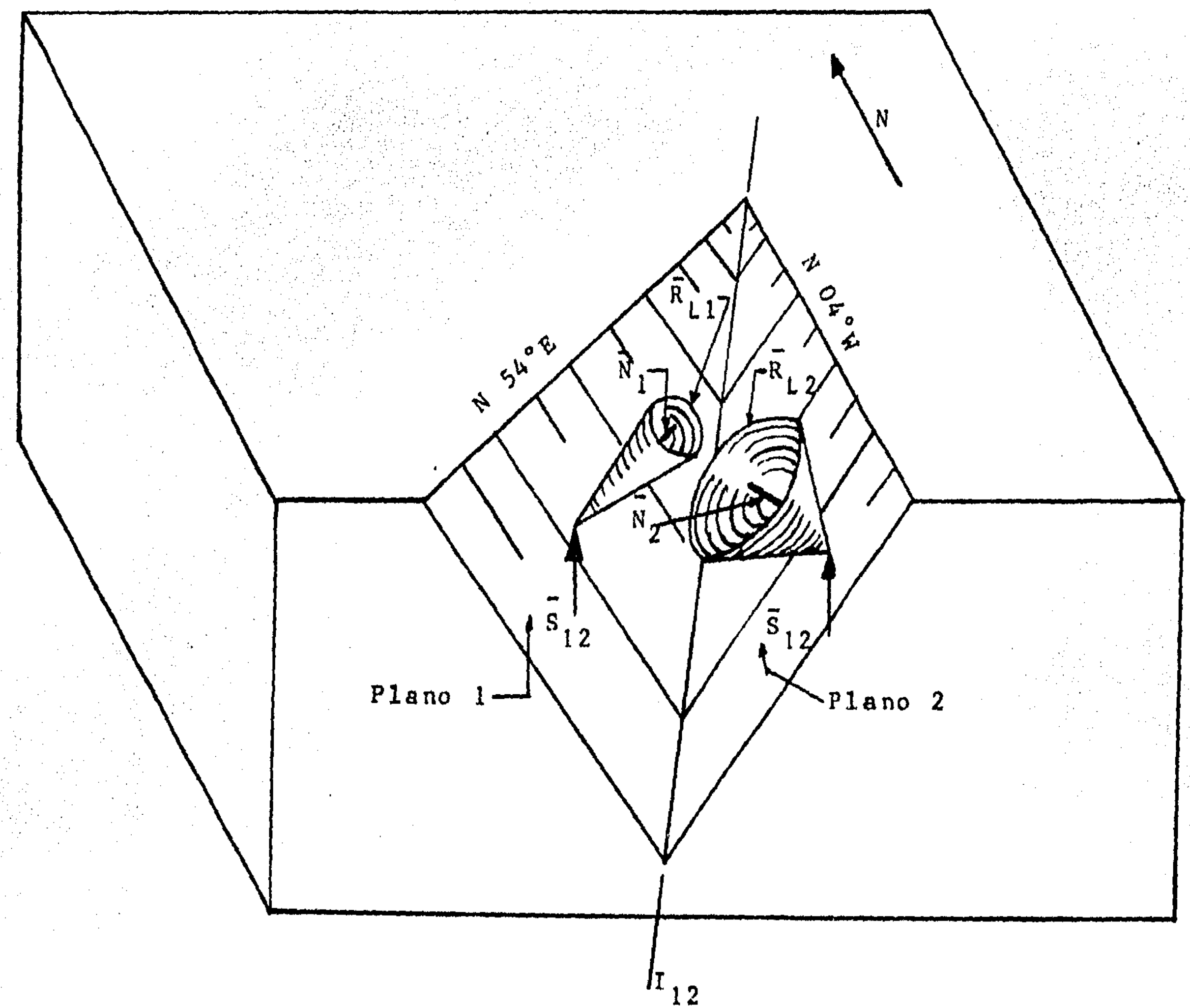


FIG. 4.15. Deslizamiento sobre 2 planos: Diagrama de bloque

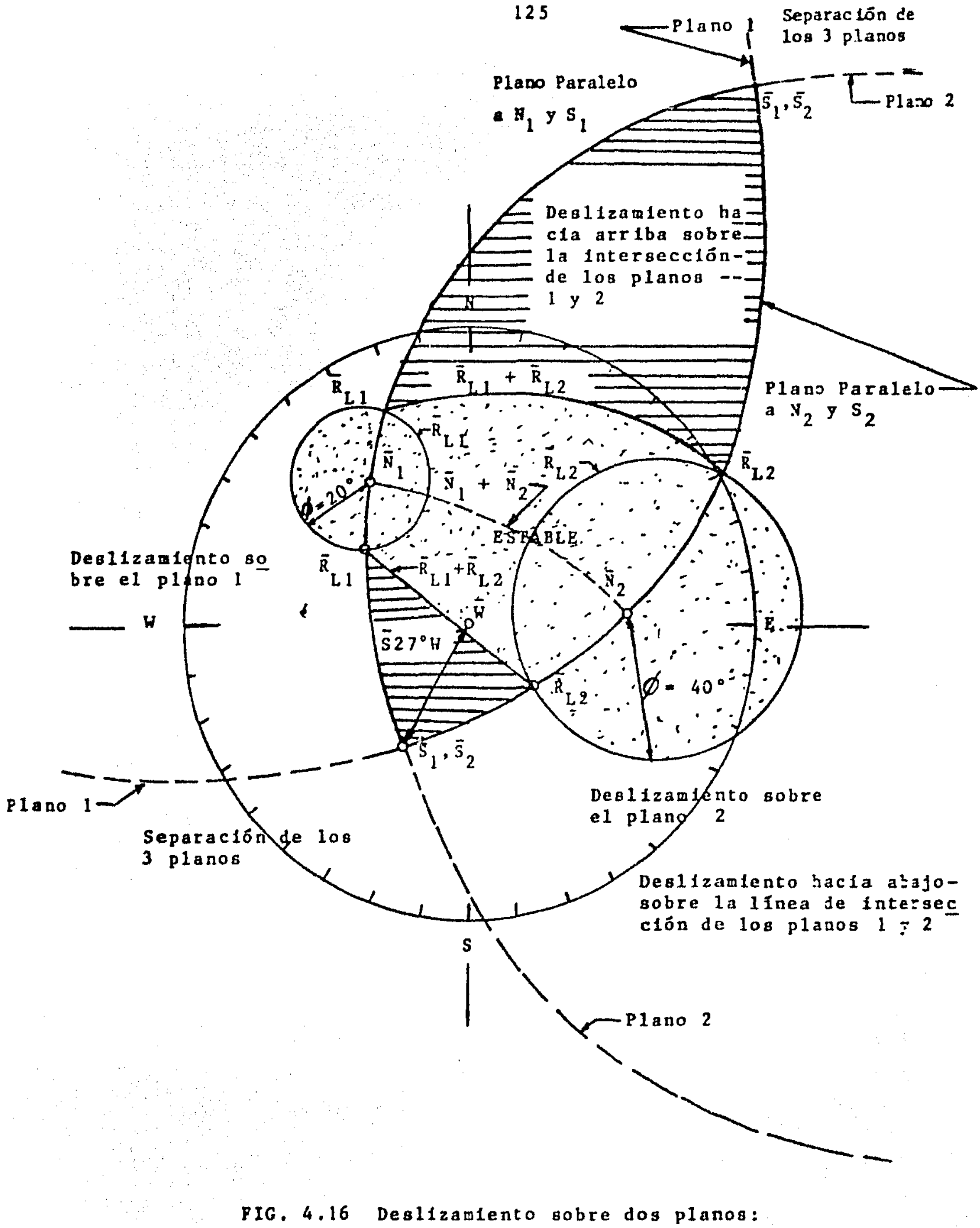


FIG. 4.16 Deslizamiento sobre dos planos: Estereograma

ya que la dirección de sus componentes, la fuerza normal y la fuerza friccionante en ese plano han sido determinados. La fuerza resistente R_{L1} debe estar contenída en el mismo plano que contiene a N_1 y S_1. Por lo tanto, la dirección de la fuerza resistente R_{L1}, puede ser situada en el estereograma trazando un meridiano a través de la proyección de N_1 y S_1. R_{L1} está situada donde este meridiano intersecta el cono de fricción del plano uno. Similarmente, R_{L2} se localiza donde el meridiano que contiene a N_2 y S_2 intersecta el cono de fricción del plano dos. Cuando estamos considerando el caso de deslizamiento a lo largo de la línea de intersección, la orientación de R_{L1} y R_{L2} se determina de la manera arriba expuesta sin importar qué fuerzas actuantes intervengan en el problema.

Si se suman $\overline{R_{L1}}$ y $\overline{R_{L2}}$, su resultante, $\overline{R_{L1}} + \overline{R_{L2}}$, deberá estar contenida en un plano que sea paralelo al plano que contienen a R_{L1} y R_{L2}. Este plano puede ser localizado en el estereograma de la figura 4.16., trazando un meridiano que contenga a R_{L1} y R_{L2}. Para deslizamiento a lo largo de la línea de intersección de los planos uno y dos, la reacción $R_{L1} + R_{L2}$ estará situada sobre el meridiano antes mencionado, pero su posición a lo largo de este, dependerá de la orientación de las fuerzas que actúen sobre la cuña de roca, esto se debe a que la orientación del vector resultante actuante afecta las magnitudes relativas de R_{L1} y R_{L2}. Si la orientación de la fuerza resultante actuante se localiza fuera de la zona estable delimitada por $R_{L1} + R_{L2}$, entonces el deslizamiento ocurrirá sobre la interesección de los dos planos.

En la figura 4.16., la proyección del vector peso, $\overline{W}$, se encuentra justo dentro de la zona estable. Basta una fuerza muy pequeña dirigida hacia el Sur, para desplazar la proyección del vector resultante actuante fuera de la zona estable, causando el deslizamiento hacia abajo y en dirección de la línea de intersección de los planos uno y dos.

4.4.5. Fuerza mínima $\overline{NW}$ requerida para provocar el deslizamiento de la cuña de roca.

Para producir el deslizamiento de la cuña, la proyección de la fuerza resultante actuante debe caer fuera de la zona estable. La mínima fuerza $\overline{NW}$ requerida para causar el deslizamiento puede ser determinada de manera análoga a como se determinó para deslizamiento sobre un plano (sección 4.3.5.). Para cerrar el polígono de fuerzas (y obtener un factor de seguridad de uno) debemos sumar una fuerza que conecte el extremo final del vector resultante actuante (en este caso el peso $\overline{W}$) con el plano que contiene la reacción $R_{L1} + R_{L2}$. La fuerza mínima buscada será la única que actúe normalmente al plano que contiene a $R_{L1} + R_{L2}$ como se muestra en la fig. 4.17.

La orientación de esta fuerza mínima puede ser determinada apoyandonos en el estereograma. Su magnitud puede ser determinada trazando el polígono de fuerzas (como se observa en la fig. 4.17.). En la figura 4.17., el mínimo ángulo que forman $\bar{W}$ y $R_{L1} + R_{L2}$, que debe ser cerrado para obtener un factor de seguridad de uno, es 4°. La fuerza mínima está también dirigida hacia arriba (en este caso formando un ángulo con la horizontal de 4°) para así intersectar al plano que contiene a $R_{L1} + R_{L2}$ formando un ángulo recto. Notese que el rumbo de la fuerza mínima (en este caso S 40°W), no es el mismo que el rumbo de la línea de intersección (en este caso S 27° W). En general, la fuerza mínima $\overline{NW}$, no tendrá una orientación paralela al rumbo de la línea de intersección a menos que sobre la cuña actúe solamente su peso propio y los ángulos de fricción de los dos planos sea igual.

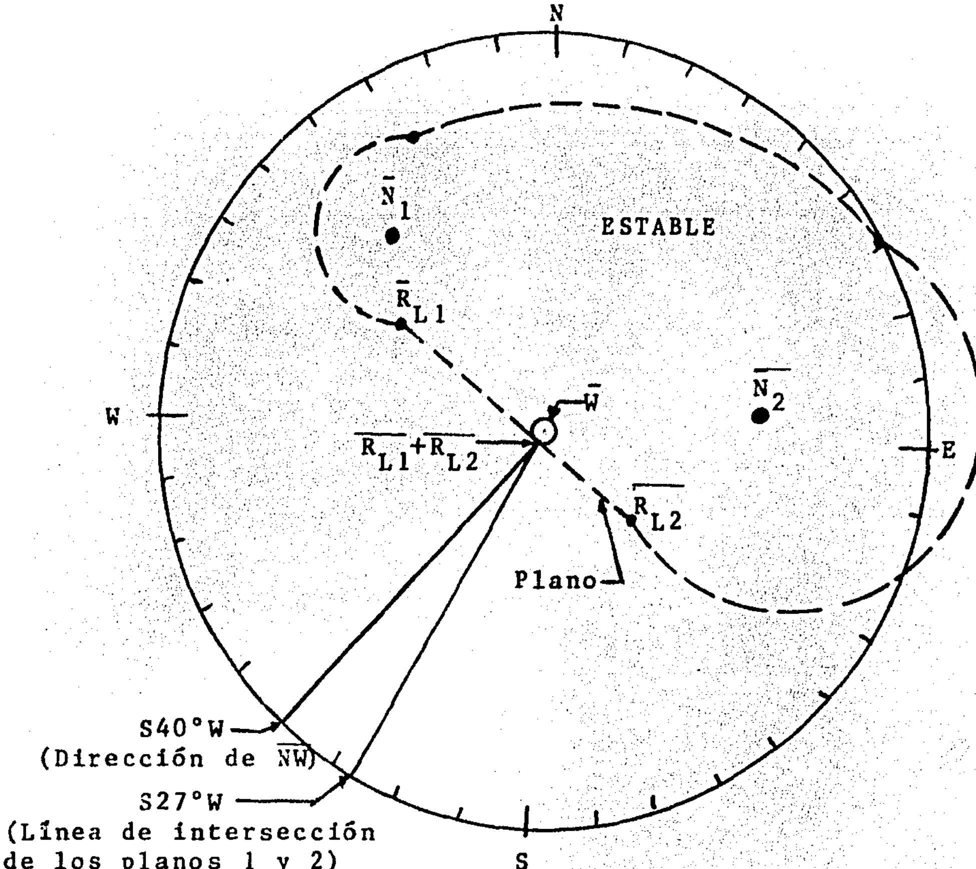
Se debe hacer notar que la diferencia en magnitud entre la fuerza mínima $\overline{NW}$, y la fuerza $\overline{NW}'$ dirigida horizontalmente y paralela al rumbo de la línea de intersección será muy pequeña en la mayoría de los casos, particularmente para aquellos en que la fuerza primordial que actúe sobre la cuña sea el peso propio, y el factor de seguridad sea ligeramente mayor que uno.

En estos casos una aproximación razonable (pero que está ligeramente fuera del lado de la seguridad) es considerar que la fuerza mínima $\overline{NW}$ actúa horizontalmente y paralela al rumbo de la línea de intersección.

4.4.6. Factor de seguridad y obtención de las fuerzas mínimas requeridas para inducir que una cuña sea estable.

Existen dos condiciones separadas para la determinación del factor de seguridad y de las fuerzas requeridas para estabilizar una cuña de roca. Considerense las dos condiciones ilustradas en la figura 4.18.: Caso 1, donde sobre la cuña de roca actúa una fuerza, $\bar{D}$, que produce el desplazamiento sobre un solo plano (plano uno), y el caso dos, donde sobre la cuña actúa una fuerza, $\bar{B}$, provocando un deslizamiento a lo largo de la línea de intersección de los planos uno y dos.

Caso 1: Sobre la cuña se tiene el efecto de la fuerza actuante $\bar{D}$, y el deslizamiento ocurrira sobre el plano 1 solamente. No habra fuerza normal sobre el plano 2. En este caso, las orientaciones de la fuerza normal, $\bar{N}_1$, sobre el plano 1, y la fuerza actuante $\bar{D}$, son conocidas mientras que la orientación de la fuerza resistente friccionante $\bar{S}_1$, y la reacción R_{L1}, sobre el plano 1 son incognitas que seran determinadas. Se sabe que S_1 y R_{L1} estan contenidas en el plano que contiene también a N_1 y D.



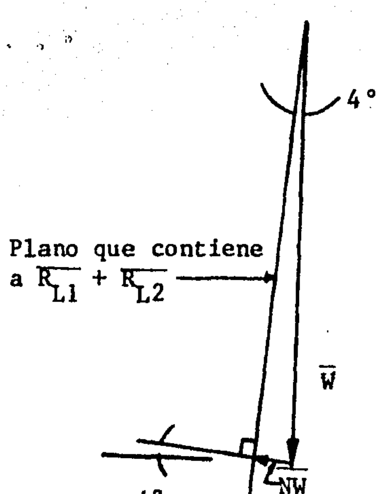


FIG. 4.17 Deslizamiento sobre dos planos:- fuerza mínima requerida para causar el deslizamiento.

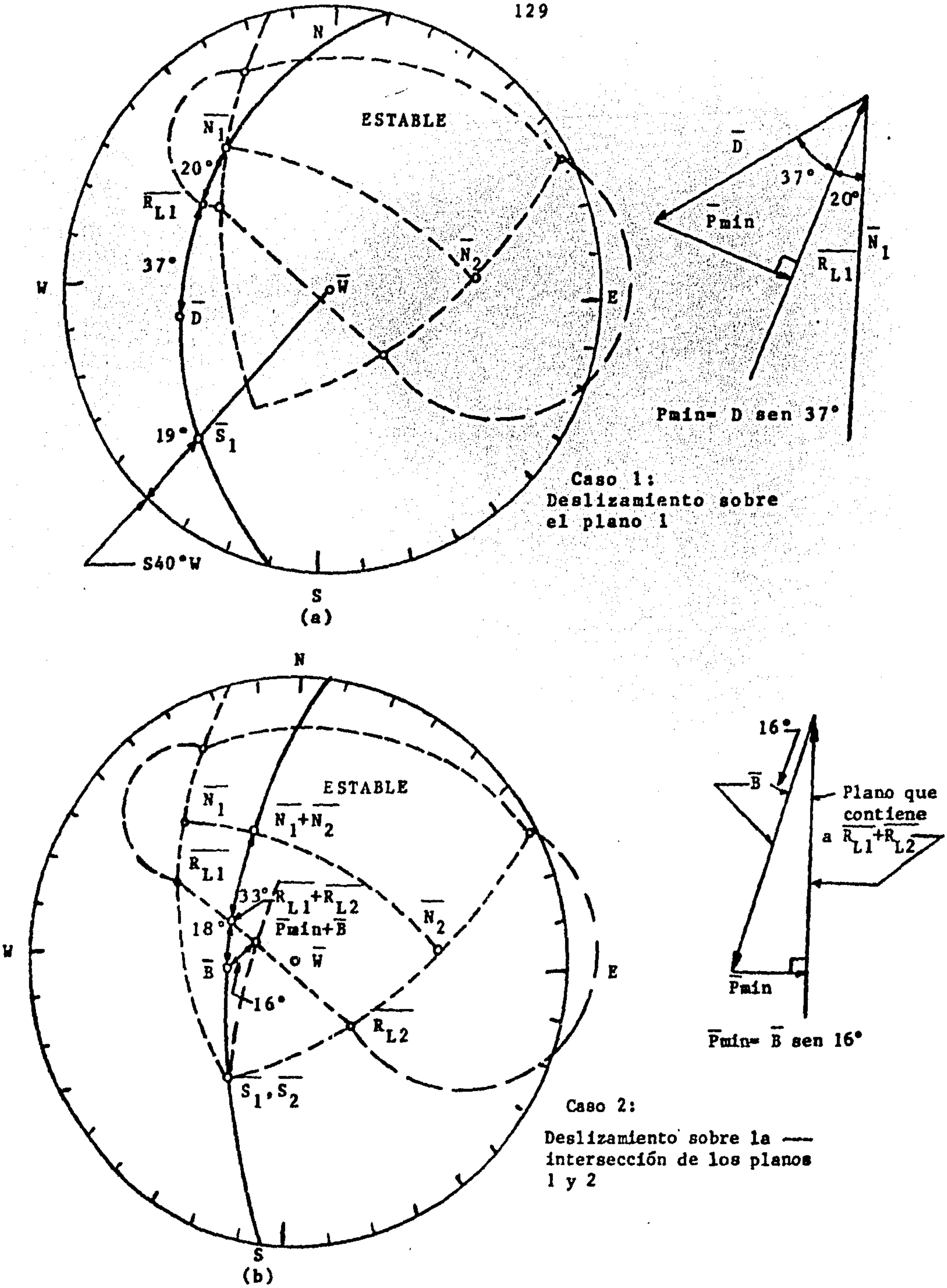


FIG. 4.18 Fuerzas mínimas para estabilizar la cuña de roca.

Asi su posición es obtenida trazando un meridiano (línea continua en la figura 4.18 a) que pasa por $\overline{N_1}$ y $\overline{D}$, entonces $\overline{S_1}$ se localiza sobre este meridiano a 90° a partir de $\overline{N_1}$, y $\overline{R_{L1}}$ se localiza a ϕ grados a partir de $\overline{N_1}$, también sobre el meridiano. En el ejemplo expuesto, el ángulo entre $\overline{N_1}$ y $\overline{R_{L1}}$ es $\phi = 20°$, y el ángulo entre $\overline{R_{L1}}$ y $\overline{D}$ es 37°. Por lo tanto, el factor de seguridad es:

$$F.S. = \frac{\text{Maxima fuerza resistente friccionante}}{\text{Fuerza friccionante actuante}} = \frac{\tan 20°}{\tan (20°+37°)} = .24$$

(Vease la figura 4.18 a) El deslizamiento de la cuña será en dirección de la fuerza friccionante $\overline{S}$, en este caso forma un ángulo con la horizontal de 19° con una dirección S 40° W, sobre el plano 1.

La magnitud de la fuerza mínima $\overline{P}$, requerida para cerrar el ángulo de 37° entre $\overline{R_{L1}}$ y $\overline{D}$ (y así aumentar el factor de seguridad a un valor del 1) puede ser determinado a partir del polígono de fuerzas de la figura 4.18 a. Si la magnitud de $\overline{D}$ es conocida, entonces la fuerza mínima es:

$$P_{min} = D \text{ sen } 37°$$

Caso 2: Sobre la cuña actua la fuerza $\overline{B}$ y el deslizamiento ocurrira sobre la línea de intersección de los planos 1 y 2. La dirección de las fuerzas friccionantes existentes, $\overline{S_1}$ y $\overline{S_2}$, será paralela a la línea de intersección de los planos 1 y 2, mientras que las posiciones de $\overline{N_1} + \overline{N_2}$ y $\overline{R_{L1}} + \overline{R_{L2}}$ permanecen como incognitas a determinar. Estas pueden ser encontradas trazando un meridiano (línea continua en la figura 4.18 b) que pase por $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ y $\overline{B}$, ya que todas estas fuerzas están contenidas en un mismo plano. $\overline{R_{L1}} + \overline{R_{L2}}$ se localiza en la intersección de este meridiano y el meridiano que contiene a $\overline{R_{L1}}$ y $\overline{R_{L2}}$. $\overline{N_1} + \overline{N_2}$ se localiza en la intersección del meridiano que contiene a $\overline{S_1} + \overline{S_2}$ y $\overline{B}$, con el meridiano que contiene a $\overline{N_1}$ y $\overline{N_2}$.

El factor de seguridad en este caso es determinado por el ángulo de 51° que se forma entre $\overline{N_1} + \overline{N_2}$ y $\overline{B}$ y el ángulo de 33° que existe ente $\overline{N_1} + \overline{N_2}$ y $\overline{R_{L1}} + \overline{R_{L2}}$.

El factor de seguridad es por lo tanto:

$$F.S. = \frac{\tan 33°}{\tan (33°+ 18°)} = \frac{\tan 33°}{\tan 51°} = .53$$

La dirección del deslizamiento es a lo largo de la lí nea de intersección, S 27° W, y su echado es 40°.

El concepto de factor de seguridad en cierta manera - no está aplicado rigurosamente en este caso, debido a que la - fuerza a requerida para estabilizar la cuña no debe cerrar el- ángulo de 18° entre $\overline{R_{L1} + R_{L2}}$ y $\overline{B}$. En cambio la fuerza mínima, $\overline{P}_{min}$, es $\overline{B}$ a 16°. Notese que el nuevo vector resultante ac- - tuante, $\overline{P}_{min} + \overline{B}$, está contenido en un plano que es diferente- al plano que contenía a la fuerza actuante original $\overline{B}$.

4.5. DESLIZAMIENTO DE UNA CUÑA DELIMITADA POR TRES PLANOS.

El caso de deslizamiento de una cuña delimitada por - tres o más planos de debilidad es ligeramente más complicado - que el caso de una cuña delimitada por dos planos. Considerando tres planos aparece otro círculo de fricción en el estereograma dependiendo de la dirección de las fuerzas actuantes, el deslizamiento ocurrira sobre cualquiera de los tres planos, sobre cualquiera de las tres líneas de intersección, o la cuña - tenderá a ser levantada de los tres planos. Los métodos para- determinar las fuerzas mínimas requeridas para causar el deslizamiento, para determinar los factores de seguridad, etc., son idénticos a aquellos descritos para el caso de la cuña delimitada por dos planos (sección 4.4.). Antes de efectuar el análisis de estabilidad, se debe tomar una desición básica, que - consiste en determinar cuales planos son planos potenciales de falla y cuales cuñas son críticas.

Las figuras 4.19 y 4.20. Ilustran el caso de una cuña delimitada por tres planos. La orientación y los ángulos - de fricción para cada uno de los tres planos es la siguiente:

PLANO	RUMBO	ECHADO	Ø
1	N 32° E	40° SE	34°
2	N 04° E	60° W	12°
3	E - W	50° S	20°

El estereograma correspondiente se ilustra en la figura 4.20. Para este caso observando la figura 4.19., resulta - aparente que si importar la presencia del tercer plano, la cuña tiende a fallar por deslizamiento (debido a su peso propio) a lo largo de la línea de intersección de los planos uno y dos. Para producir la falla por deslizamiento sobre el plano tres,- o a lo largo de la línea de intersección de los planos tres y- uno, o a lo largo de la intersección de los planos tres y dos, se requiere de una fuerza actuante considerable, cuya direc- - ción sea hacia arriba (hacia el Norte).

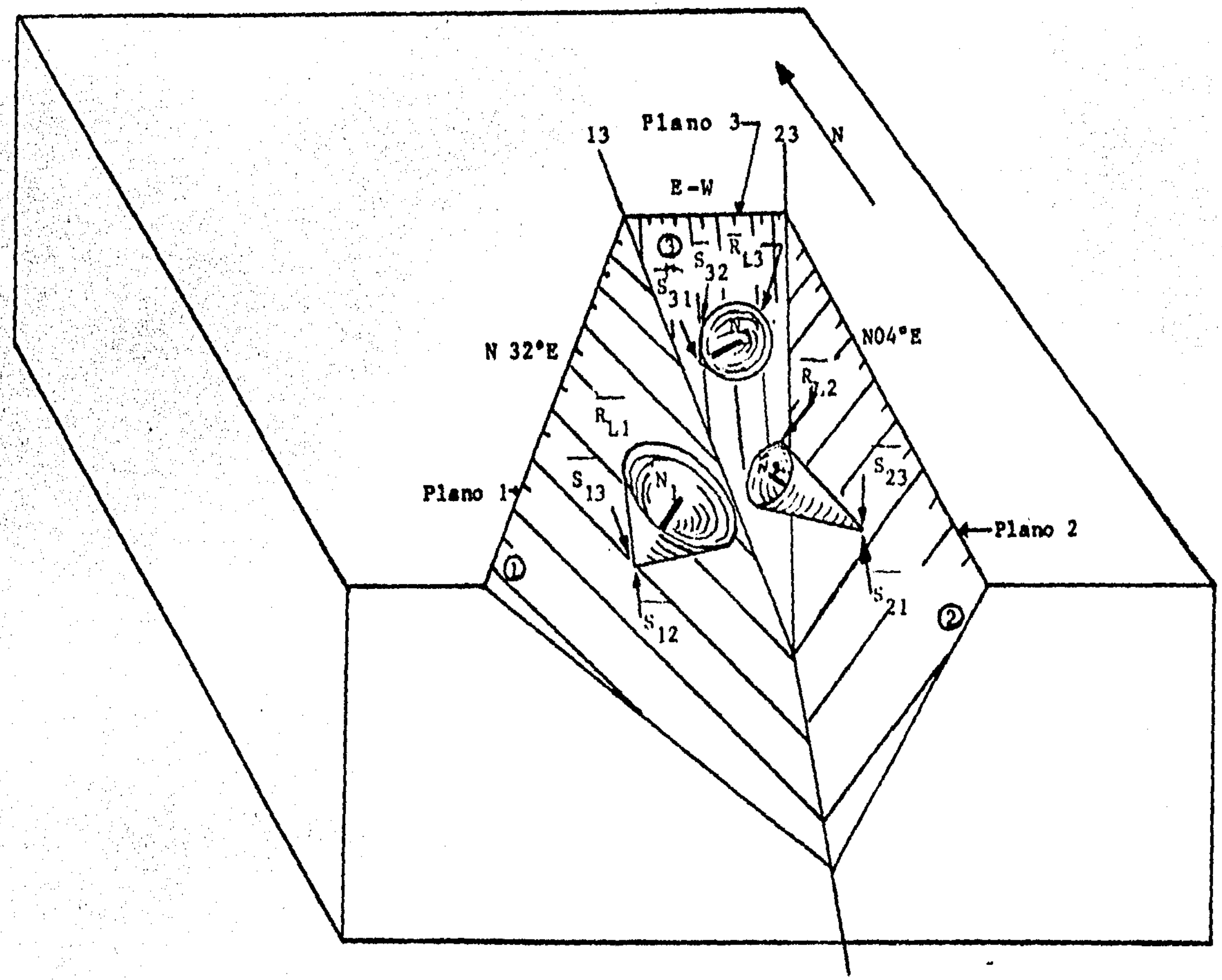


FIG. 4.19 Cuna delimitada por tres planos: Diagrama de bloque.

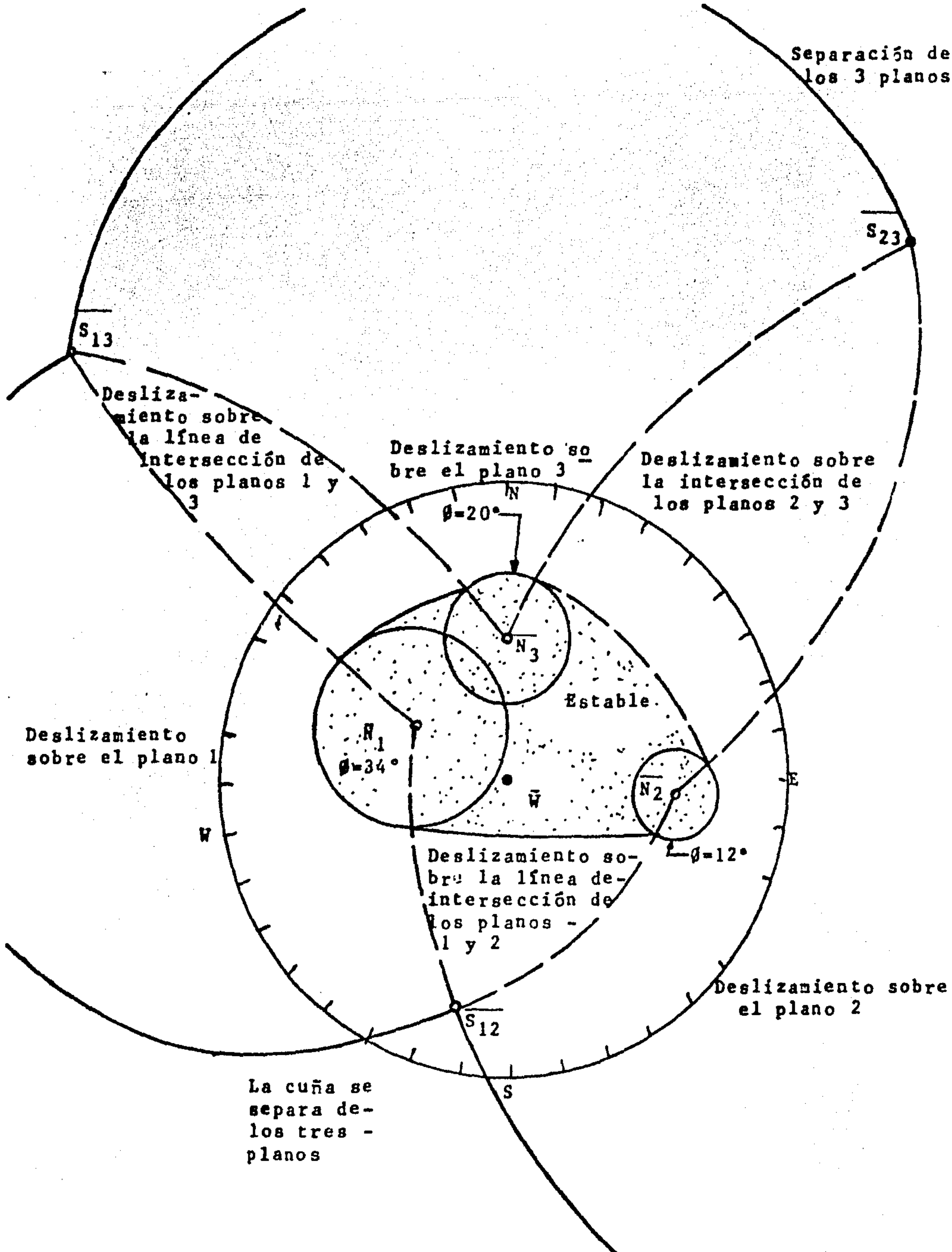


FIG. 4.20 Cuña delimitada por 3 planos, Estereograma

4.6. CUÑA DELIMITADA POR TRES PLANOS DONDE LA TRAZA QUE FORMA UNO DE ELLOS CON LA CARA DEL TALUD, TIENE UNA DIRECCION PARALELA AL RUMBO DE DICHA CARA.

No obstante que la cuña delimitada por los planos uno, dos y tres, es estable para la condición expuesta en la figura 4.19., no será estable si el plano tres está expuesto en la base o los lados del corte o talud, como se muestra en la figura 4.21. Se presentan casos similares a este, en masas de roca en donde las familias de juntas forman cuñas multiples, en lugar de formar una sola cuña.

Si los planos uno y dos se presentan como se muestra en la figura 4.21a., entonces la cuña A será todavía estable bajo la acción de su peso propio, como se observó en la figura 4.20. Sin embargo, si el plano tres está expuesto en el borde del corte o talud, entonces el plano dos ya no retendrá las cuñas A y B, así el deslizamiento será inminente a lo largo de la intersección de los planos uno y tres, como se indica en el estereograma de la figura 4.21b.

Otro posible modo de falla, será que las cuñas A y B (actuando como una sola cuña), sufran un giro alejandose de la línea de intersección de los planos uno y tres, y se deslice sobre el plano tres únicamente. Esto puede ocurrir si la masa de las cuñas está concentrada hacia el plano tres, alejandose de la línea de intersección de los planos uno y tres. (Fallas por rotación, serán analizadas en la sección 4.7).

Otra posibilidad es que las cuñas A y B se separen y deslicen como bloques individuales, la cuña A, posiblemente deslice sobre la intersección de los planos uno y tres y la cuña B deslice sobre el plano tres únicamente.

Cunado los planos de debilidad representan conjuntos de juntas en lugar de simples discontinuidades, entonces los modos de falla descritos arriba pueden ser muy posibles. Algunas de las juntas pertenecientes a un conjunto de ellas puede estar expuesto en los lados o bordes de los taludes y esto permite la falla de las cuñas sobre planos simples, en vez de deslizamientos sobre multiples planos.

Juntas de otras familias, pueden liberar los extremos de las cuñas, facilitando el deslizamiento sobre un solo plano. En general, se obtiene un factor de seguridad bajo si la masa de roca tiene una tendencia a moverse como varios cuerpos rígidos separados por las familias de juntas, en lugar de moverse como un solo cuerpo rígido. Es muy importante que todas estas posibilidades sean consideradas durante la fase exploratoria del estudio de estabilidad del talud, antes de seleccionar las cuñas críticas sobre las cuales el análisis de estabilidad se-

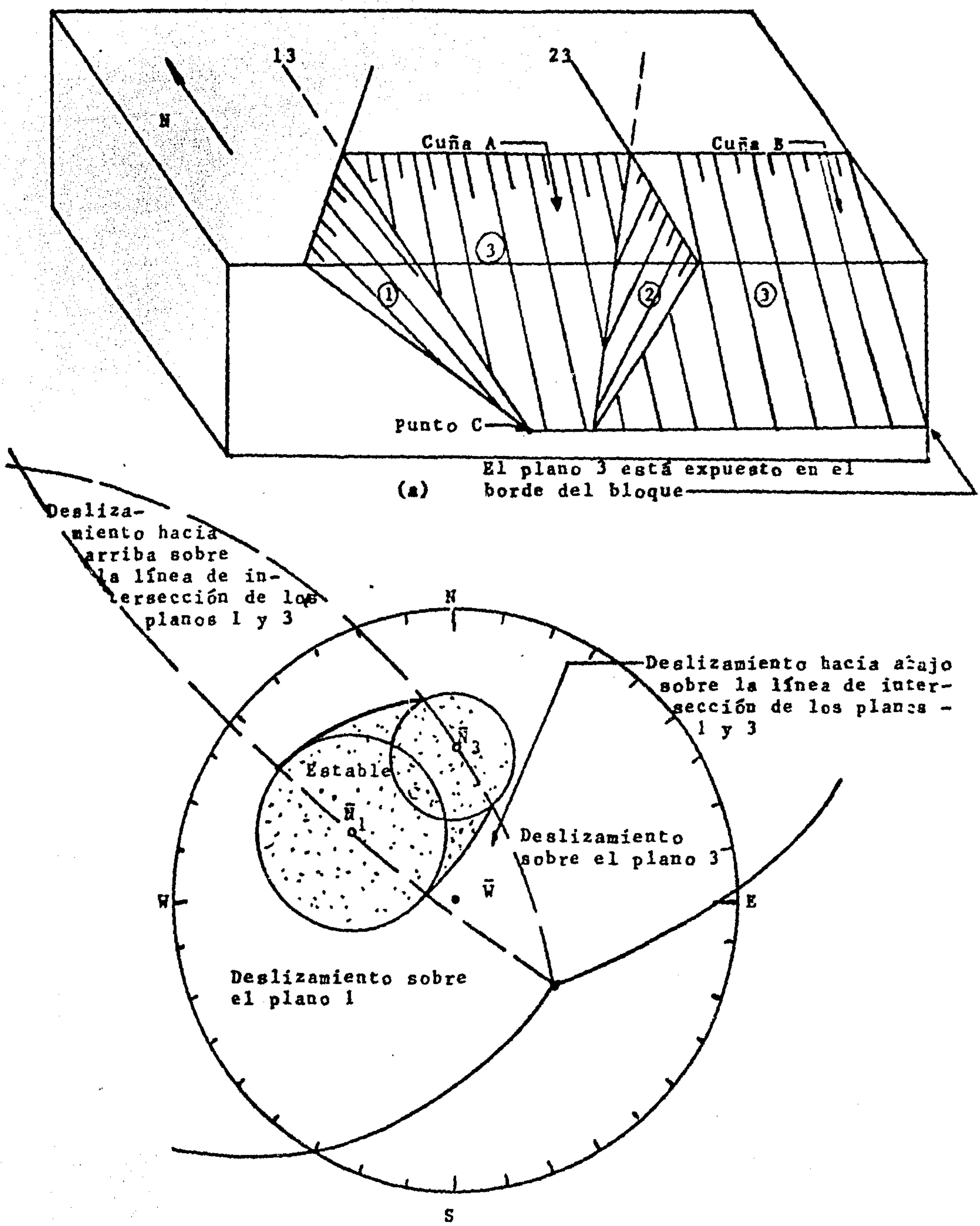


FIG. 4.21 Cuña delimitada por tres planos: plano 3 expuesto en el límite del bloque.

llevará a cabo.

4.7. ROTACION DE LA CUÑA SOBRE EL PLANO TRES.

El factor de seguridad contra rotación de una cuña, - puede ser estimado utilizando el estereosgrama si el punto de- aplicación de las fuerzas actuantes sobre el plano de falla es conocido. Considerese el ejemplo de la figura 4.22. La cuña- ilustrada aquí es la misma que la cuña de la figura 4.21, ex-- cepto por un incremento en el ángulo de fricción del plano uno de 34° a 40°, de tal suerte que la cuña es ahora estable con-- tra deslizamiento hacia abajo a lo largo de la intersección de los planos uno y tres, bajo la acción de su peso propio.

Se supone que la falla por rotación se produce mediante un giro al rededor del punto C, en la base del talud. También se asume que las fuerzas cortantes y normales sobre el -- plano tres se pueden sumar como fuerzas $\overline{N_3}$ y $\overline{S_3}$, que tienen su punto de aplicación en el punto D (en el punto de intersección de la fuerza resultante actuante, $\overline{W}$, y el plano tres). Esto - implica que no existe variación alguna del ángulo de fricción- en todo el plano tres. Basandose en estas hipótesis la dirección de la fuerza friccionante $\overline{S_3}$, será perpendicular a la línea $\overline{CD}$, como se muestra en la figura 4.22.

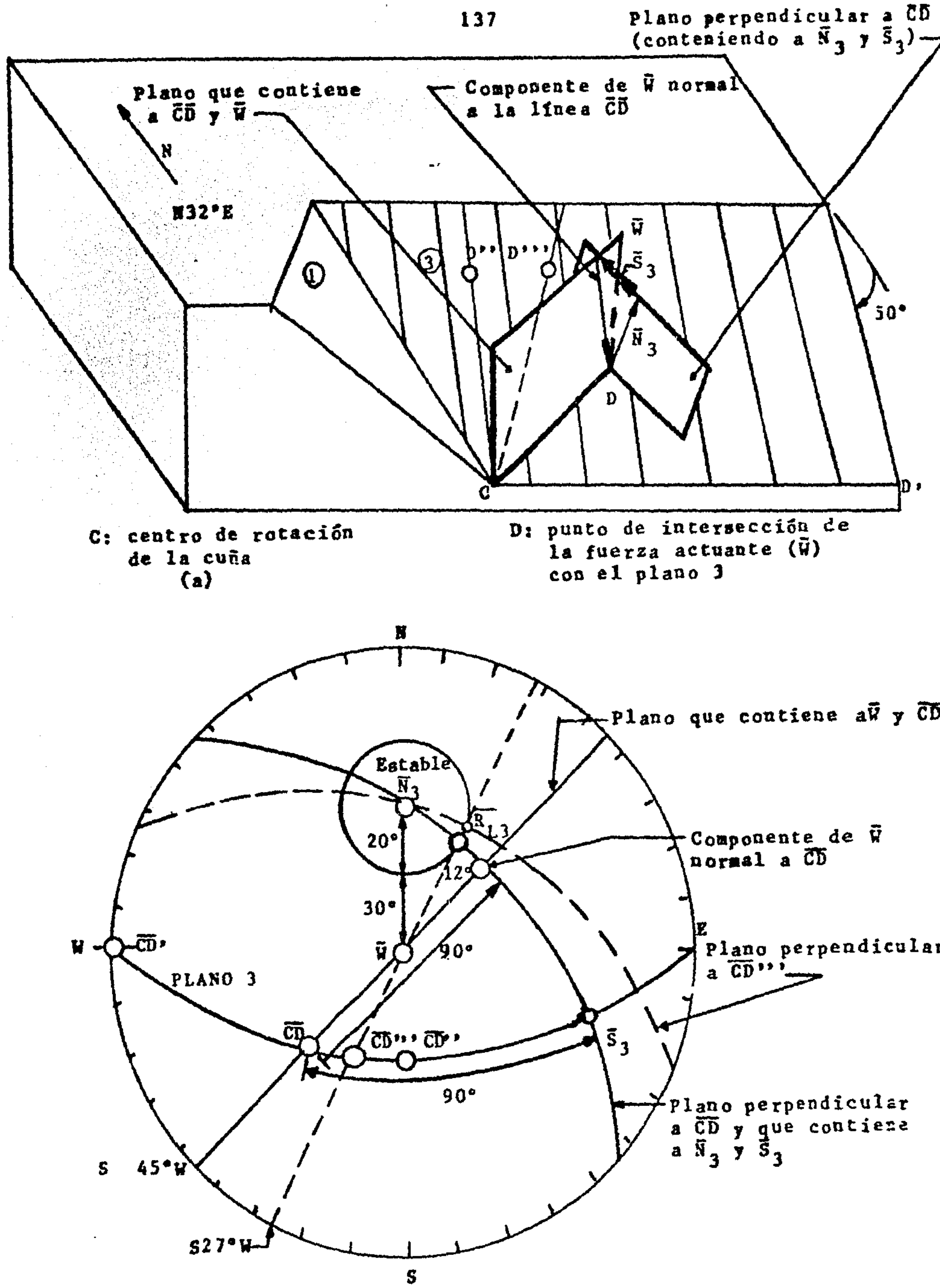
Sean las condiciones para la cuña de la figura 4.22a.:

PLANO	RUMBO	ECHADO	Ø
1	N 32° E	40° SE	40°
2	E - W	50° S	20°

Además, se supone que el centro de gravedad de la cuña se conoce, y por lo tanto la orientación de la línea $\overline{CD}$ es- conocida. La línea $\overline{CD}$ es el brazo de palanca desde el centro- de rotación, C, hasta el punto de intersección del vector peso, $\overline{W}$, con el plano tres (D), se asume que su rumbo es S 45° W, -- contenida en el plano tres.

Es aparente de las condiciones dadas en los planos -- uno y tres que la cuña, bajo su peso propio, $\overline{W}$, es estable contra el deslizamiento si este ocurre solamente sobre el plano - uno, debido a que el echado del plano 1 es igual al ángulo de- fricción de ese mismo plano (40°). La cuña por lo tanto es estable contra deslizamiento sobre la línea de intersección de - los planos uno y tres.

La cuña no es estable contra deslizamiento si este -- ocurre solamente sobre el plano tres, debido a que el echado -



(b)

FIG. 4.22 Rotación de una cuña sobre el plano 3 de este plano excede el ángulo de fricción. Si la cuña se extendiera una distancia infinita hacia la derecha del diagrama, entonces la cuña se comportaría como si únicamente se produgera el deslizamiento sobre el plano tres, debido a que todo el peso de la cuña estaría sobre el plano tres y solo una porción muy pequeña del peso actuaría sobre el plano uno. En este caso el brazo de palanca para la rotación de la cuña sería paralelo al rumbo del plano tres (línea $\overline{CD}'$). Entonces la fuerza friccionante resistente $\overline{S_3}$, actuará directamente hacia arriba con una dirección paralela al echado del plano tres, que es la misma condición para deslizamiento sobre un solo plano.

El factor de seguridad contra un deslizamiento rotacional es:

$$F.S. = \frac{\text{Momento resistente}}{\text{Momento actuante}} = \frac{\overline{CD}'\ (W \tan 20°)}{\overline{CD}'\ (W \tan 50°)} = \frac{\tan 20°}{\tan 50°} = 0.30$$

Este factor de seguridad es idéntico al factor de seguridad contra deslizamiento sobre el plano tres en la dirección del echado.

Otro extremo será el caso donde el peso de la cuña esté concentrado cerca de la intersección de los planos uno y tres y así el brazo de palanca estará contenido en el plano tres directamente hacia arriba (línea $\overline{CD}''$). La fuerza friccionante $\overline{S_3}$, en este caso tendrá una dirección paralela al rumbo del plano tres. La fuerza actuante, $\overline{W}$, no tiene componente en esta dirección, entonces la rotación no puede ocurrir, sin importar la resistencia debida a la fricción en el plano tres. El factor de seguridad contra rotación es por lo tanto:

$$F.S. = \frac{\overline{CD}''\ (\tan 20°)}{\overline{CD}''\ (\tan 0°)} = \infty$$

Ahora se presenta un caso intermedio, donde la línea $\overline{CD}$ está dirigida S 45°W y contenída en el plano tres, como se muestra en el estereograma de la figura 4.22. La estabilidad rotacional de la cuña se determina de la siguiente manera: El meridiano que representa la proyección del plano tres se dibuja en el estereograma, así como la fuerza normal y el círculo de fricción del plano tres, La proyección de la línea $\overline{CD}$ se obtiene en el estereograma en la intersección del plano tres como un plano vertical cuyo rumbo es S 45°W. Entonces $\overline{S_3}$ se localiza sobre el plano tres, formando un ángulo con la línea $\overline{CD}$ de 90°. Ahora bién, se traza un meridiano que pase por $\overline{S_3}$ y $\overline{N_3}$, este meridiano representa la proyección del plano que contiene a $\overline{S_3}$ y $\overline{N_3}$. Este meridiano también se localiza a 90°-

de $\overline{CD}$, donde $\overline{CD}$ está contenído en un meridiano (en este caso - es una línea recta) que además contiene a $\overline{W}$. La componente de $\overline{W}$ que es normal a $\overline{CD}$, se puede obtener en este caso. El fac-- tor de seguridad es:

$$F.S. = \frac{\tan \phi}{\tan\ (\text{ángulo entre } \overline{N_3} \text{ y la componente de } \overline{W} \perp \text{a } \overline{CD})}$$

$$F.S. = \frac{\tan 20°}{\tan (20° + 12°)} = \frac{\tan 20°}{\tan 32°} = 0.58$$

En efecto, la cuña es estable contra deslizamiento a- lo largo de la línea de intersección de los planos uno y tres, pero inestable para el caso de rotación sobre el plano tres.

Sin embargo, el factor de seguridad contra rotación - (F.S. =0.58), es todavía apreciablemente mayor que el factor - de seguridad contra deslizamiento, solamente sobre el plano -- tres (F.S. =0.3).

Para que el factor de seguridad contra rotación sobre el plano tres sea igual a uno, el centro de gravedad de la cu- ña debe estar localizado de tal manera que la línea $\overline{CD'''}$ este orientada S 27° W y contenída en el plano tres, como está in- dicado por la línea discontinua tangente al círculo de fric- - ción en el estereograma de la figura 4.22.

CAPITULO V

CONCLUSIONES

a) En primer lugar se hará notar que el presente trabajo tiene como objetivo ampliar la bibliografía en el idioma castellano relativo al tema de análisis de estabilidad de taludes en roca que ciertamente es bastante reducida; en este trabajo no se pretende hacer un estudio exhaustivo del tema que es mucho más extenso de lo que aquí se abarca, sino que se presenta a manera de una primera aproximación a este tipo de análisis para que posteriormente los lectores interesados cuenten con una base sólida para profundizar en el tema; se debe hacer notar que no obstante que es un trabajo introductorio, presenta análisis perfectamente detallados tanto del método vectorial como del método gráfico, así como ejemplos en que se toman en cuenta las variables que en la práctica se ha notado que intervienen en la gran mayoría de los casos; estos ejemplos se encuentran resueltos en su totalidad y sin omitir ningún factor que intervenga en el problema, de manera que el lector puede apoyarse en estos para que paralelamente a la lectura de la teoría se pueda apreciar la aplicación práctica en un caso concreto, esto lleva a un entendimiento de la teoría en su totalidad, junto con una apreciación práctica de esta y como consecuencia se produce la fijación de cada uno de los conceptos presentados en forma clara.

b) De la observación de los ejemplos resueltos se puede deducir que aunque las variables que intervienen en estos son muy distintas, existe una serie de pasos a seguir que son comunes a todos y cada uno de los ejemplos; en resumen los pasos a seguir para analizar la estabilidad de un talud en roca son los siguientes:

1.- Se inspecciona la intersección de las distintas familias de juntas con cada una de las otras familias y con la cara del talud para así determinar el tetraedro que puede constituir una cuña potencial de falla; entonces esta cuña es la que se debe analizar detalladamente.

2.- Las fuerzas que tienden a afectar el equilibrio de la cuña deben ser sumadas vectorialmente obteniéndose una fuerza resultante actuante; estas fuerzas pueden ser el peso propio de la cuña, la fuerza externa aplicada a la cuña por alguna estructura y las fuerzas debidas a la presión del agua actuando en las distintas caras del tetraedro.

3.- En este momento se deben hacer estudios cinemáticos para determinar el modo de falla de la cuña, es decir, para concluir si la cuña fallará por deslizamiento sobre un plano cualquiera o sobre la intersección de dos planos o si sufrirá un movimiento de rotación. La cinemática de la falla dependerá de la orientación de la fuerza actuante en relación a la orientación de los planos de soporte.

4.- Después de que el modo de falla ha sido determinado, se compara la máxima fuerza friccionante resistente que esta orientada paralelamente a la dirección del movimiento, con la fuerza friccionante necesaria para mantener el equilibrio y así poder obtener el factor de seguridad.

c) También se debe hacer notar que la resolución de los ejemplos que representan los casos comunes en la práctica se ha realizado muy detalladamente; sin embargo se pueden suprimir algunos detalles como por ejemplo no tomar en cuenta las fuerzas producidas por alguna estructura, esto dependiendo de cada caso en particular, pero esto se puede hacer cuando el peso propio de la cuña es muy grande en relación a dicha fuerza, entonces sus efectos pueden ser insignificantes y se puede despreciar, simplificando los cálculos grandemente.

d) En este trabajo también se comparan los métodos vectorial y gráfico, pudiendo observarse que el método vectorial es un método con el cual se tiene una mayor precisión respecto al gráfico; sin embargo es mucho más laborioso debido a la gran cantidad de operaciones que deben realizarse en este tipo de análisis, por otra parte el encontrar la magnitud mínima y la dirección óptima de la fuerza de anclaje necesaria para lograr un factor de seguridad conveniente por el método vectorial no es práctico ya que se requiere una gran cantidad de operaciones siendo este cálculo muy lento; sin embargo por el método gráfico la solución de este problema es casi inmediata y se logra una muy buena aproximación, lo cual trae como consecuencia que para estos fines se prefiera el uso de los estereogramas.

En resumen el método vectorial es más preciso pero más laborioso respecto del gráfico que resulta ser casi inmediato.

e) Otro aspecto importante que nunca se debe perder de vista es la ventaja que representa para el ingeniero contar con computadoras electrónicas. En el inciso anterior de estas conclusiones se hizo notar que el método vectorial tiene mayor presición que el gráfico, entonces es más conveniente utilizar este método ya que se obtiene la solución exacta, entonces el problema que representan la gran cantidad de operaciones queda resuelto utilizando las computadoras electrónicas. En este trabajo se realizó un bosquejo de la utilización de las calculadoras programables, no pretendiendo con esto agotar las posi bilidades que esta tecnología presenta, sino que a manera de ilustración se muestra la posibilidad que tiene el método vectorial de ser programado en su totalidad, es decir, el Ingeniero no tendrá más que analizar los datos proporcionados por los Geólogos, elegir la cuña crítica, suministrar a la computadora los datos pertinentes y esperar que esta le proporcione el modo de falla y el factor de seguridad de la cuña analizada.

En esto se debe tener mucho cuidado ya que los datos que el Ingeniero proporcione a la computadora deberán elegirse en base al conocimiento de la teoría y la experiencia, siendo así, el criterio del Ingeniero un factor de importancia relevante; con esto se pretende aclarar que la computadora no sustituya al Ingeniero sino que es solamente una herramienta para hacer más rápido el proceso de cálculo.

APRENDICE A

Programas para calculadoras de bolsillo (H.P. 33)

El objetivo de este apéndice es introducir el uso delas calculadoras de bolsillo programables, con el propósito de mecanizar los cálculos tan laboriosos presentados en el capítulo III, esto tiene la ventaja de reducir el trabajo y el tiempo al mínimo. Los programas que se presentan a continuación - son bastante limitados y permiten hacer cálculos muy específicos de partes aisladas del análisis general y completo de taludes en roca, pero ilustran de manera clara que los procedimientos de cálculo pueden ser programados en su totalidad, es decir, una vez que se ha estudiado la teoría, ya no se hace necesario revisar el concepto de los cálculos cada vez que se hace un análisis de estabilidad, entonces la idea fundamental del método vectorial es la factibilidad de utilizar calculadoras programables para realizar el trabajo mecánicamente, quedando al Ingeniero la responsabilidad de suministrar a la calculadora - datos racionales basados en el conocimiento de la teoría y la experiencia e interpretar los resultados una vez que se hayan procesados dichos datos.

Los programas que se elaboraron son los siguientes:

1.- Módulo de un vector.

2.- Producto punto de dos vectores.

3.- Producto cruz de dos vectores y cálculo del módulo del vector resultante.

4.- Producto mixto.

5.- Obtención del vector rumbo $\bar{u}$, vector echado $\bar{v}$ y vector normal $\bar{w}$ a partir de β y γ.

6.- Obtención del centroide de una cuña de roca.

7.- Obtención del volumen de un tetraedro.

PROGRAMA # 1 Módulo de un Vector.

Sea el vector $\bar{A} = (A_x, A_y, A_z)$

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}$$

Paso	Se ingresa	Comentarios
	PRGM ■ RUN	Modalidad de programación
00	f CLEAR PRGM	Borra la memoria del programa
01	gx^2	
02	$x \gtrless y$	
03	gx^2	
04	+	
05	$x \gtrless y$	
06	gx^2	
07	+	
08	f $\sqrt{x}$	
09	GTO 00	
	PRGM ■ RUN	Modalidad manual
	g RTN	Regresa la memoria del programa al paso 00
	Ingreso de datos	Comentarios
	A_x enter A_y enter A_z	Ingreso de las componentes del vector $\bar{A}$
	R/S	Ejecución del programa, en pantalla aparece el módulo del vector $\bar{A}$

PROGRAMA # 2 Producto punto de dos Vectores.

Sean los vectores $\bar{A} = (A_x, A_y, A_z)$; $\bar{B} = (B_x, B_y, B_z)$

$$\bar{A} \bullet \bar{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

PROGRAMACION PARA LA H.P. 33

Paso	Se ingresa	Comentarios
	PRGM ■← RUN	Modalidad de programación
00	f CLEAR PRGM	Borra la memoria del programa
01	RCL 1	
02	RCL 4	
03	X	
04	RCL 2	
05	RCL 5	
06	X	
07	+	
08	RCL 3	
09	RCL 6	
10	X	
11	+	
12	GTO 00	
	PRGM →■ RUN	Modalidad manual
	g RTN	Regresa la memoria del programa al paso 00
	Ingreso de datos	**Comentarios**
	A_x STO 1	Ingreso de las componentes de los vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$
	A_y STO 2	
	A_z STO 3	
	B_x STO 4	
	B_y STO 5	
	B_z STO 6	
	R/S	Ejecución del programa, aparece en pantalla el valor del producto punto

PROGRAMA # 3 Producto cruz de dos Vectores y Cálculo del Módulo del Vector Resultante.

Sean los vectores $\bar{A} = (A_x, A_y, A_z)$; $\bar{B} = (B_x, B_y, B_z)$

$$\bar{A} \times \bar{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\bar{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\bar{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\bar{k}$$

$$|\bar{A} \times \bar{B}| = [(A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2]^{1/2}$$

PROGRAMACION PARA LA H.P. 33

Paso	Se ingresa	Comentarios
	PRGM ■◄ RUN	Modalidad de programación
00	f CLEAR PRGM	Borra la memoria del programa
01	RCL 5	
02	RCL 3	
03	X	
04	RCL 6	
05	RCL 2	
06	X	
07	-	
08	STO 0	
09	R/S	
10	RCL 6	
11	RCL 1	
12	X	
13	RCL 4	
14	RCL 3	
15	X	
16	-	
17	STO 7	
18	R/S	
19	RCL 4	
20	RCL 2	
21	X	
22	RCL 5	
23	RCL 1	
24	X	
25	-	

Paso	Se ingresa	Comentarios
26	STO 1	
27	R/S	
28	RCL 0	
29	gx^2	
30	RCL 7	
31	gx^2	
32	+	
33	RCL 1	
34	gx^2	
35	+	
36	f $\sqrt{x}$	
37	GTO 00	
	PRGM ➡ RUN	Modalidad manual
	g RTN	Regresa la memoria del - programa al paso 00
	Ingreso de datos	**Comentarios**
	A_x STO 4 A_y STO 5 A_z STO 6 B_x STO 1 B_y STO 2 B_z STO 3	Ingreso de las componen- tes de los vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$
	R/S	Aparece en pantalla la com ponente X del vector $\bar{A}$ X $\bar{B}$
	R/S	Aparece en pantalla la com ponente Y del vector $\bar{A}$ X $\bar{B}$
	R/S	Aparece en pantalla la com ponente Z del vector $\bar{A}$ X $\bar{B}$
	R/S	Aparece en pantalla el mó- dulo del vector $\tilde{A}$ X $\tilde{B}$

PROGRAMA # 4 Producto mixto.

Sean los vectores $\bar{A} = (A_x, A_y, A_z)$; $\bar{B} = (B_x, B_y, B_z)$;

$$\bar{C} = (C_x, C_y, C_z)$$

Producto mixto $= \bar{C} \cdot (\bar{A} \times \bar{B})$

Nota: Para ejecutar este programa se requieren dos etapas, en la primera se proporcionan a la calculadora los valores de las componentes de los vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$ y se obtiene el vector $\bar{A} \times \bar{B}$. Las segunda etapa consta de igresar los valores de las componentes de vector $\bar{C}$ y realizar el producto punto.

PROGRAMACION PARA LA H.P. 33

Paso	Se ingresa	Comentarios
	PRGM ■ RUN	Modalidad de programación
00	f CLEAR PRGM	Borra la memoria del programa
01	RCL 5	
02	RCL 3	
03	X	
04	RCL 6	
05	RCL 2	
06	X	
07	-	
08	STO 0	
09	RCL 6	
10	RCL 1	
11	X	
12	RCL 4	
13	RCL 3	
14	X	
15	-	
16	STO 7	

Paso	Se ingresa	Comentarios
17	RCL 4	
18	RCL 2	
19	X	
20	RCL 5	
21	RCL 1	
22	X	
23	-	
24	STO 6	
25	R/S	
26	RCL 1	
27	RCL 0	
28	X	
29	RCL 2	
30	RCL 7	
31	X	
32	+	
33	RCL 3	
34	RCL 6	
35	X	
36	+	
37	GTO 00	
	PRGM→RUN	Modalidad manual
	g RTN	Regresa la memoria del programa al paso 00

	Ingreso de datos	Comentarios
	A_x STO 4	
	A_y STO 5	
	A_z STO 6	Ingreso de las componentes
	B_x STO 1	de los vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$
	B_y STO 2	
	B_z STO 3	

Paso	Se ingresa	Comentarios
	R/S	Realiza el producto - cruz de $\bar{A}$ y $\bar{B}$ y se detiene
	C_x STO 1 C_y STO 2 C_z STO 3	Ingreso de las componentes del vector $\bar{C}$
	R/S	Aparece en la pantalla el valor del producto mixto $\bar{C} \cdot (\bar{A} \times \bar{B})$

PROGRAMA # 5 Obtención del vector rumbo $\bar{u}$, vector echado $\bar{v}$, y vector normal $\bar{w}$ a partir de β y γ.

Sean los vectores $\bar{u} = \cos\beta\,\bar{i} + \operatorname{sen}\beta\,\bar{j}$

$$\bar{v} = \cos\gamma\,\operatorname{sen}\beta\,\bar{i} - \cos\gamma\,\cos\beta\,\bar{j} - \operatorname{sen}\gamma\,\bar{k}$$

$$\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v}$$

PROGRAMACION PARA LA H.P. 33

Paso	Se ingresa	Comentarios
	PRGM ■ RUN	Modalidad de programación
00	f CLEAR PRGM	Borra la memoria del programa
01	RCL 6	
02	f COS	
03	STO 4	
04	RCL 6	
05	f SEN	
06	STO 5	
07	0	
08	STO 6	
09	RCL 7	
10	f COS	
11	STO 0	
12	RCL 5	
13	X	
14	STO 1	
15	RCL 0	
16	RCL 4	
17	X	
18	CHS	
19	STO 2	
20	RCL 7	
21	f SEN	

Paso	Se ingresa	Comentarios
22	CHS	
23	STO 3	
24	RCL 5	
25	RCL 3	
26	X	
27	RCL 6	
28	RCL 2	
29	X	
30	-	
31	R/S	
32	RCL 6	
33	RCL 1	
34	X	
35	RCL 4	
36	RCL 3	
37	X	
38	-	
39	R/S	
40	RCL 4	
41	RCL 2	
42	X	
43	RCL 5	
44	RCL 1	
45	X	
46	-	
47	GTO 00	
	PRGM ⟶■ RUN	Modalidad manual
	g RTN	Regresa la memoria del -- programa del paso 00

Paso	Se ingresa	Comentarios
	Ingreso de datos	
	β STO 6 γ STO 7	Ingreso de los valores -- del rumbo y echado de un- plano, en grados
	R/S	Calcula los vectores $\bar{u}$ y- $\bar{v}$ y almacena sus componen tes en las siguientes memorias: u_x memoria 4 u_y memoria 5 u_z memoria 6 v_x memoria 1 v_y memoria 2 v_z memoria 3 y calcula la componente X del vector $\bar{w}$ que -- aparece en la pantalla
	R/S	Calcula la componente Y del -- vector $\bar{w}$ y aparece en la pantalla
	R/S	Calcula la componente Z del vec-- tor $\bar{w}$ y aparece en la pantalla
	RCL 4	Aparece en la pantalla u_x
	RCL 5	Aparece en la pantalla u_y
	RCL 6	Aparece en la pantalla u_z
	RCL 1	Aparece en la pantalla v_x
	RCL 2	Aparece en la pantalla v_y
	RCL 3	Aparece en la pantalla v_z

PROGRAMA # 6 Obtención del centroide de una cuña de roca.

Para resolver este problema en la H.P. 33 es necesario ejecutarlo en dos etapas debido a que la capacidad de la calculadora es sobrepasada para revolverlo en su totalidad, el procedimiento a seguir consiste en cargar la memoria del programa con una parte de este para posteriormente ingresar los datos y ejecutarlo, la segunda etapa consiste en borrar la primer parte del programa e ingresar la segunda parte de este y ejecutarlo, obteniendo así las componentes del vector que define el centroide del tetraedro.

$$\overline{OS} = 1/4\ (\overline{OD} + \overline{OC} + \overline{OB})$$

$\overline{OS}$: vector que define el centroide de la cuña de roca

donde $\overline{OD}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ están dados por las siguientes fórmulas:

$$\overline{OD} = \left(\frac{h_1}{\tan\alpha \tan\beta_1} - \frac{h_1}{\tan\gamma_1 \operatorname{sen}\beta_1},\ \frac{h_1}{\tan\alpha},\ h_1\right)$$

$$\overline{OC} = \left(\frac{h_1}{\tan\alpha \tan\beta_2} - \frac{h_1}{\tan\gamma_2 \operatorname{sen}\beta_2},\ \frac{h_1}{\tan\alpha},\ h_1\right)$$

$$\overline{OB} = \overline{X_{12}}\ \left(\frac{h_1 + h_2}{X_{12z}}\right)$$

PROGRAMACION PARA LA H.P. 33

Paso	Se ingresa	Comentarios
	PRGM ■ RUN	Modalidad de programación
00	f CLEAR PRGM	Borra la memoria del programa
01	RCL 3	
02	RCL 2	
03	f TAN	
04	÷	
05	STO 2	
06	RCL 0	
07	f TAN	
08	÷	
09	RCL 3	
10	RCL 1	
11	f TAN	
12	RCL 0	
13	f SEN	
14	X	
15	÷	
16	-	
17	STO 1	
18	RCL 2	
19	RCL 4	
20	f TAN	
21	÷	
22	RCL 3	
23	RCL 5	
24	f TAN	
25	RCL 4	
26	f SEN	
27	X	

Paso	Se ingresa	Comentarios
28	÷	
29	−	
30	STO 4	
31	RCL 6	
32	STO 0	
33	R/S	
34	RCL 3	
35	RCL 0	
36	+	
37	x ≷ y	
38	÷	
39	STO 0	
40	RCL 5	
41	X	
42	R/S	
43	RCL 0	
44	RCL 6	
45	X	
46	R/S	
47	RCL 0	
48	RCL 7	
49	X	
	GTO 00	
	PRGM→RUN	Modalidad manual
	g RTN	Regresa la memoria del programa al paso 00

	Ingreso de datos	Comentarios
	β_1 STO 0 γ_1 STO 1 α STO 2 h_1 STO 3 β_2 STO 4 γ_2 STO 5 h_2 STO 6	Ingreso de los datos requeridos para aplicar -- las fórmulas anotadas anteriormente.
	R/S	Ejecución del programa, deteniendose para solicitar más datos.
	X_{12x} STO 5 X_{12y} STO 6 X_{12z} STO 7	Ingreso del vector $\bar{X}_{12}$
	R/S	Aparece en pantalla el valor- de la componente X del vector $\overline{OB}$.
	R/S	Aparece en pantalla el valor- de la componente Y del vector $\overline{OB}$.
	R/S	Aparece en pantalla el - valor de la componente Z del vector $\overline{OB}$.
	RCL 1	Aparece en pantalla la componente X del vector $\overline{OD}$.
	RCL 2	Aparece en pantalla el - valor de las componentes Y de los vectores $\overline{OD}$ y $\overline{OC}$
	RCL 3	Aparece en pantalla el valor- de las componentes Z de los - vectores $\overline{OD}$ y $\overline{DC}$.

	RCL 4	Aparece en pantalla en valor de la componente X del vec-- tor $\overline{OC}$.
Paso	Se ingresa	Comentarios
	PRGM ■ RUN	Modalidad de programación
00	f CLEAR PRGM	Borra la memoria del programa.
01	RCL 5	
02	RCL 1	
03	+	
04	RCL 4	
05	+	
06	4	
07	÷	
08	R/S	
09	RCL 6	
10	RCL 2	
11	2	
12	X	
13	+	
14	4	
15	÷	
16	R/S	
17	RCL 7	
18	RCL 3	
19	2	
20	X	

Paso	Se ingresa	Comentarios
21	+	
22	4	
23	÷	
24	GTO 00	
	PRGM → RUN	Modalidad manual
	g RTN	Regresa la memoria del programa al paso 00
	Ingreso de datos	Comentarios
	OB_x STO 5 OB_y STO 6 OB_z STO 7	Ingreso de las componentes del vector $\overline{OB}$.
	R/S	Aparece en pantalla el valor de la componente X del vector $\overline{OS}$.
	R/S	Aparece en pantalla el valor de la componente Y del vector $\overline{OS}$.
	R/S	Aparece en pantalla el valor de la componente Z del vector $\overline{OS}$.

PROGRAMA # 7 Volumen de un tetraedro.

$$V = \frac{1}{6} \left| \overline{DB'} \times \overline{DC} \right| (h_1 + h_2)$$

V: Volumen de un tetraedro

Donde:

$$\overline{DC} = \overline{OC} - \overline{OD}$$

$$\overline{DB'} = \overline{OB'} - \overline{OD}$$

$$\overline{OB'} = \overline{X_{12}} \left(\frac{h_1}{X_{12z}}\right)$$

PROGRAMACION PARA LA H.P. 33

Paso	Se ingresa	Comentarios
	PRGM ▪ RUN	Modalidad de programación
00	f CLEAR PRGM	Borra la memoria del progra
01	RCL 0	ma
02	RCL 1	
03	X	
04	6	
05	÷	
06	STO 1	
07	RCL 2	
08	RCL 0	
09	RCL 3	
10	÷	
11	X	
12	RCL 5	
13	-	
14	RCL 6	

Paso	Se ingresa	Comentarios
15	RCL 4	
16	-	
17	X	
18	g ABS	
19	RCL 1	
20	X	
21	GTO 00	
	PRGM ➔ RUN	Modalidad manual
	g RTN	Regresa la memoria del programa paso 00
	Ingreso de datos	Comentarios
	h_1 STO 0 h_2 STO 1 X_{12y} STO 2 X_{12z} STO 3 OD_x STO 4 OD_y STO 5 OC_x STO 6	Ingreso de los datos - requeridos para obte-- ner el volumen de un - tetraedro.
	R/S	Aparece en pantalla el volumen del tetraedro.

Ejemplos de aplicación de los programas # 6 y # 7.

Para aplicar el programa # 6 obtención del Vector que define el Centroide de un Tetraedro, se utiliza el ejemplo - - 3.3, donde:

$\beta_1 = 17°$; $\gamma_1 = 60°$; $\alpha = 90°$; $h_1 = 3.66$ m; $\beta_2 = 63°$; $\gamma_2 = 80°$; $h_2 = 0$

$$\bar{x}_{12} = (-.079, -.394, -.613).$$

Procedimiento:

a) Se ingresa la primer parte del programa

b) Ingreso de datos y ejecución del programa

Ingreso de datos	Comentarios	Pantalla
17 STO 0 60 STO 1 89.99 STO 2 3.66 STO 3 63 STO 4 80 STO 5 0 STO 6	Ingreso de datos β_1, γ_1, α, h_1, β_2, γ_2, h_2. En este ejemplo al ingresar $\alpha = 90°$ la calculadora marca error, entonces se debe ingresar $\alpha = 89,99^0$. Para $\alpha \neq 90°$ no se debe hacer — ninguna corrección.	
R/S	Ejecución del programa, deteniéndose para solicitar - el vector $\bar{X}_{12}$	
- .079 STO 5 - .394 STO 6 - .613 STO 7	Ingreso del vector $\bar{X}_{12}$	
R/S	Obtención de OB_x	0.4717
R/S	Obtención de OB_y	2.3524
R/S	Obtención de OB_z	3.6600
RCL 1	Obtención de OD_x	7.2254

RCL 2	Obtención de $OD_y = OC_y$	0.0006 ≐ 0
RCL 3	Obtención de $OD_z = OC_z$	3.6600
RCl 4	Obtención de OC_x	-.7240

c) Se ingresa la segunda parte del programa.
d) Ingreso de datos y ejecución del programa.

Ingreso de datos	Comentarios	Pantalla
.472 STO 5 2.352 STO 6 3.66 STO 7	Ingreso del vector $\overline{OB}$	
R/S	Obtención de OS_x	-1.8693
R/S	Obtención de OS_y	0.5883
R/S	Obtención de OS_z	2.7450

Para aplicar el programa # 7 Cálculo del Volumen en un Tetraedro se utiliza el ejemplo 3.3 donde:

$h_1 = 3.66$ m; $h_2 = 0$; $X_{12y} = -.394$; $X_{12z} = -.613$; $OD_x = -7.23$; $OD_y = 0$; - $OC_x = -.724$.

Procedimiento:

a) Se ingresa el programa
b) Ingreso de datos

Ingreso de datos	Comentarios .	Pantalla
3.66 STO 0 0 STO 1 -.394 STO 2 -.613 STO 3 -7.23 STO 4 0 STO 5 -.724 STO 6	Ingreso de datos	
R/S	Obtención del - volumen del te- traedro.	9.3360

BIBLIOGRAFIA

Apostol, Tom M., (1978), "CALCULUS", Ed. Reverté, S.A.

Goodman, Richard E., (1980), "INTRODUCTION TO ROCK MECHANICS", Ed. John Wiley & Sons.

Hendron, A.J. Jr., Cording, E.J. y Aiyer, A.R., (1971), NCG -- TECHNICAL REPORT No. 36. ANALYTICAL AND GRAPHICAL - - METHODS FOR THE ANALYSIS OF SLOPES IN ROCK MASSES", - Ed. Departamento de Ingeniería Civil de la Universi-- dad de Illinois.

Jaeger, J.C. y Cook, N.G.W. (1979), "FUNDAMENTALS OF ROCK - - MECHANICS", Ed. Chapman and Hall.

Marsal, Raúl J. y Reséndiz, Daniel N., (1983), "PRESAS DE TIE- RRA Y ENROCAMIENTO", Ed. Limusa.

Zienkiewicz, O.C. y Stagg, (1979), "ROCK MECHANICS IN ENGINEE- RING PRACTICE", Ed. John Wiley and Sons.

"APUNTES DE MATEMATICAS II"
Sección de Matemáticas
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México