



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

28  
21

**" EL METODO MUSKINGUM - GUNGE "**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A:

***JULIO EDUARDO YSLA AZABACHE***

MEXICO, D. F.

1983



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

	PAG.
INTRODUCCION	1.
METODOS PARA EL TRANSITO DE AVENIDAS	5.
DESCRIPCION DEL METODO DE MUSKINGUM- CUNGE	42.
APLICACIONES Y ANALISIS DE SENSIBILIDAD	53.
CONCLUSIONES	71.
BIBLIOGRAFIA	76.

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

Uno de los problemas principales al que se ha enfrentado el ingeniero hidráulico para obtener gastos de diseño en un cauce natural o canal artificial, ha sido sin duda el tránsito de la avenida de diseño.

La precipitación pluvial ocasiona escurrimientos superficiales, que dan lugar a un incremento en el caudal de las corrientes de la cuenca donde ocurre este fenómeno natural. A dichos incrementos se les ha denominado "avenidas".

Se entiende por tránsito de avenidas, a los procedimientos que permiten calcular los efectos dinámicos y/o cinemáticos del almacenamiento, en la forma y movimiento de una onda de avenida que recorre un cauce.

La primera referencia de una aplicación real de un tránsito del hidrograma de una avenida, de una estación de un río a otra, fue realizada por Graeff en 1883. La técnica estuvo basada en el uso de la velocidad de onda y una curva de elevaciones-gastos.

La importancia de poder transitar avenidas con exactitud, así como la dificultad del problema, se refleja en el gran número de métodos que sobre el particular han sido desarro-

llados desde el año 1900.

La predicción del hidrograma de una avenida de diseño en un sitio particular de un cauce, debe basarse en la obtención de un hidrograma en una sección aguas arriba, junto con un método para transitar este hidrograma a lo largo del resto del cauce hasta el punto de interés.

El tránsito de avenidas esencialmente se puede subdividir en dos ramas que de alguna manera están relacionadas y estas son:

El tránsito de avenidas en cauces y  
el tránsito de avenidas en vasos,

este trabajo estará abocado al estudio de la primera.

El tránsito de avenidas corresponde a un problema de flujo no permanente y su estudio se hace mediante las llamadas ecuaciones fundamentales; esto requiere de abundante información que pocas veces está disponible, como son: las características hidráulicas de las diferentes secciones transversales a lo largo del cauce, de aforos, de coeficientes de rugosidad, etc.

El análisis teórico en el tránsito de avenidas se hace mediante modelos que intentan resolver las ecuaciones fundamentales, ya que su aplicación es generalmente difícil.

Pero también existen métodos aproximados (hidrológicos) y que en algunos casos son los más recomendables.

El tránsito de avenidas en cauces puede ser útil para determinar el tiempo de duración de la avenida y las variaciones del gasto a lo largo del cauce, la variación de las velocidades y de los distintos niveles de tirantes en cada una de las secciones transversales del mismo.

La anticipación con la que se puede predecir los tirantes y gastos que se presentaron en un lugar particular de un río, resulta de gran importancia para tomar medidas preventivas.

En las siguientes páginas se presenta una comparación de los métodos más conocidos para el tránsito de avenidas en cauces, se centra la atención en un método que debido a ser muy versátil y práctico se ha destacado, este es el método Muskingum, fue desarrollado por Mc Carthy en 1938 (Ref. 1) y perfeccionado por Cunge en 1969 (Ref. 2) y es en la actualidad uno de los más usados.

Después de hacer una breve comparación con algunos otros métodos para transitar avenidas en cauces, se discuten sus ventajas y desventajas, sus requerimientos de datos y la confiabilidad de sus resultados.

La parte medular de este trabajo es la presentación del método Muskingum-Cunge, la obtención de sus parámetros, la se

cuela de cálculo, su utilidad, calibración y análisis de sensibilidad y aplicación del mismo.

En un capítulo posterior se plantean algunas conclusiones y recomendaciones obtenidas en el desarrollo de este tema.

## CAPITULO II

### METODOS PARA EL TRANSITO DE AVENIDAS

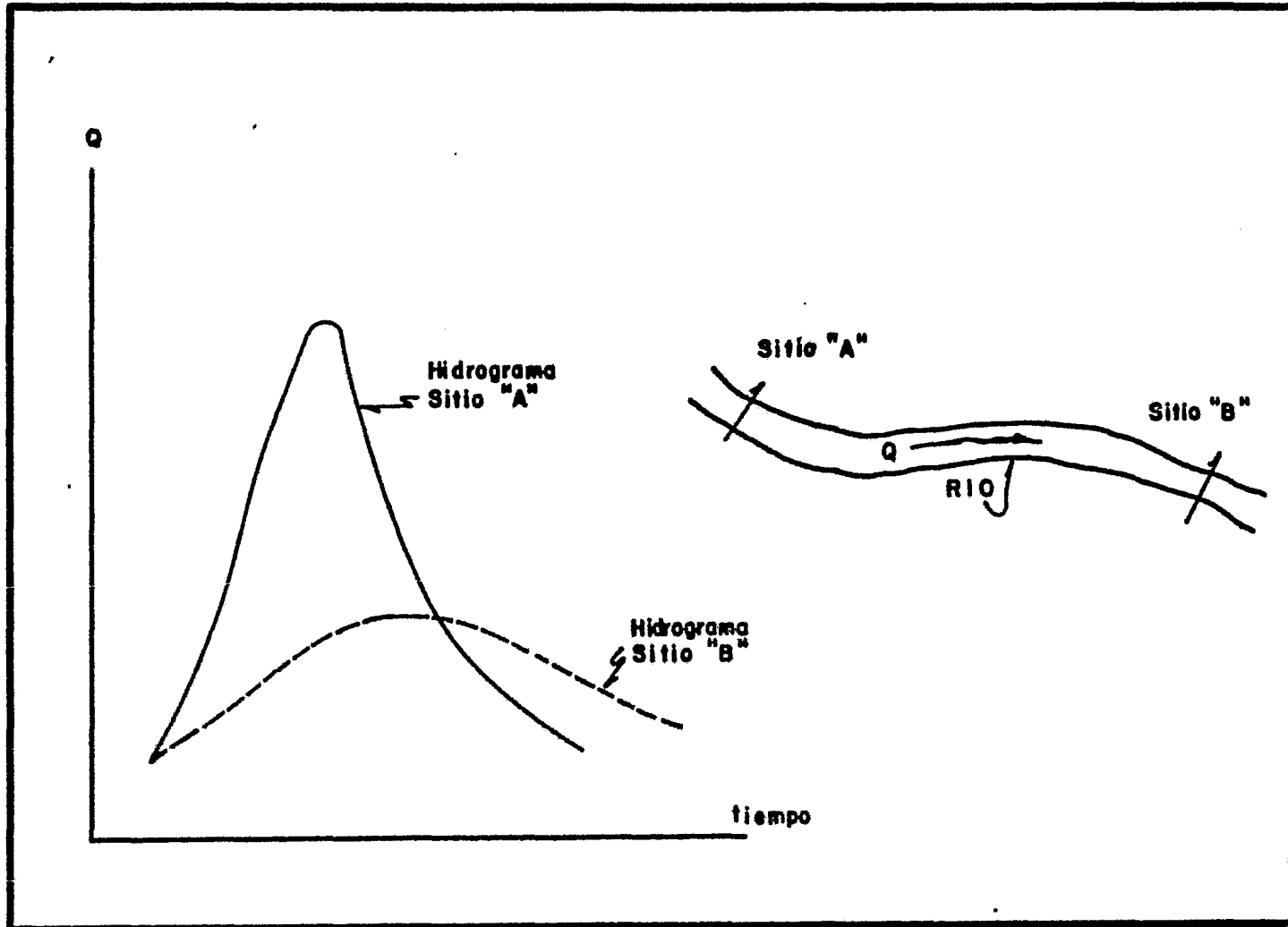
En este capítulo se describen someramente algunos métodos de tránsito de avenidas para determinar el método o métodos más adecuados a usarse, especialmente cuando la información sea escasa. En principio se supone un hidrograma en una sección aguas arriba de un río que dispone de registros en una estación de aforo, medidos u obtenidos usando métodos hidrológicos; esta información será necesaria para determinar si el flujo definido por este hidrograma afecta los gastos en una o varias secciones aguas abajo.

Existen varios métodos para transitar avenidas en cauces que en función de su formulación se pueden clasificar en:

- a) Hidráulicos,
- b) Hidrológicos o de almacenamiento.

Los métodos hidráulicos se basan en la solución de las ecuaciones completas de Saint-Venant, esto es, la versión de las ecuaciones de conservación de masa (continuidad) y cantidad de movimiento aplicados al escurrimiento a superficie libre. Estas ecuaciones diferenciales parciales no tienen solución analítica conocida y por lo tanto deben resolverse en forma numérica.





Los métodos del grupo b) son más numerosos y en general los más sencillos de todos los métodos de tránsito de avenidas. Ellos son llamados "Métodos Hidrológicos" porque abarcan los conceptos de almacenamiento para el flujo de agua y no incluyen directamente los efectos de resistencia al flujo. El tránsito de una avenida con un método hidrológico en un tramo dado de un río, se basa en la ecuación de continuidad, la cual iguala la razón de cambio del almacenamiento ( $dS/dt$ ) en el tramo, a la diferencia entre el gasto de entrada ( $Q_1$ ) en la sección aguas arriba y el gasto de salida ( $Q_0$ ) en la sección aguas abajo.

$$\frac{dS}{dt} = Q_1 - Q_0 \quad (2-1)$$

Los métodos entonces requieren una segunda relación algebraica entre el almacenamiento y los flujos de entrada y salida que permita encontrar una solución para el flujo de salida cuando se tiene el flujo de entrada. Uno de los métodos más populares de este tipo, es conocido como el método de Muskingum, el cual usa una relación algebraica lineal:

$$S = K [\epsilon Q_1 + (1 - \epsilon) Q_0] \quad (2-2)$$

Donde  $K$  es definida como el parámetro de almacenamiento y  $\epsilon$  se refiere a la importancia relativa de los ingresos y egresos.

Los valores de los parámetros están determinados por las características del cauce o canal en estudio. Se han sugerido una gran cantidad de técnicas para resolver estos métodos, ya sea con gráficas, semiempíricamente, con métodos de caja negra o en forma numérica, siendo en general más burdos los primeros y los últimos más exactos pero complejos a su vez.

Generalmente, los métodos hidráulicos describen en forma más precisa el proceso del tránsito tanto en el espacio como en el tiempo pero requieren información detallada de rugosidades, geometría del cauce, topografía de la planicie de inundación, condiciones de frontera, además de técnicas numéricas complejas y con alto requerimiento de memoria de cómputo.

Por el contrario, cuando se cuenta con poca información se puede recurrir a los métodos hidrológicos que son más simples, requieren menos datos físicos y menor tiempo de cómputo.

Las desventajas principales de los métodos hidrológicos son los siguientes: a) no consideran los efectos locales de cambios en el perfil de la superficie libre del agua (como

los remansos y efectos de mareas) y b) en general dan sólo hidrogramas como resultados, es decir, únicamente relaciones para el gasto y el cálculo de niveles debe hacerse por separado.

Aunque la exactitud de los resultados en los métodos hidrológicos es menor, los datos disponibles en muchos casos prácticos son escasos y dichos métodos son los únicos que pueden usarse.

Por ende hay dos factores primordiales que determinan la selección del método, a saber: a) los datos disponibles de la geometría del canal y de avenidas previas y b) la información requerida como respuesta.

La selección del método más apropiado para transitar una avenida es un problema complejo en el cual influye en mucho la experiencia.

En este trabajo son ignorados los métodos que se basan en una solución exacta de las ecuaciones completas de Saint-Venant y la atención está fijada en los métodos sencillos que a continuación son considerados:

- a) Método de difusión de parámetros variables.

- b) Método de difusión lineal formulado por Hayami (1951) (Ref. 3) y desarrollado como un método numérico por Thomas y Wormleaton (1970, 1971), (Ref. 4).
  
- c) Método de Muskingum, desarrollado por Mc Carthy (1938) y perfeccionado por Cunge (1969).

En los siguientes párrafos se hace una breve comparación de los mismos tratando de mostrar sus requerimientos de datos y la exactitud de los resultados.

Los conceptos usados en la deducción del método de Muskingum son básicamente hidrológicos, por lo que el uso del mismo puede desorientar a aquellos que anticipadamente centren su atención en métodos hidráulicos de tránsito de avenidas.

El mejoramiento del método básico de Muskingum por Cunge, esencialmente lo convierte de una teoría hidrológica en un método basado en principios hidráulicos. Esta conversión proviene de la aplicación numérica de las ecuaciones originales de Muskingum. Cuando estas ecuaciones son escritas en forma de diferencias finitas se introduce un error numérico que actúa como una difusión de la solución básica.

Cunge identifica la magnitud de este término de error con el término de difusión en la ecuación convección-difusión

como fue usado por Hayami en el método de difusión. Así para una asignación correcta de los parámetros en el método de Muskingum una buena aproximación puede ser obtenida por la solución de la ecuación de convección-difusión.

Hay dos métodos bien documentados, los cuales no están incluidos en la lista anterior y éstos son: el método de la onda cinemática propuesto por Lighthill y Whitham (1955) (Ref. 5) y el método gráfico de características descrito en detalle por Chow (1959), (Ref. 6). La razón para no considerar el método de la onda cinemática, es que este método puede ser considerado como una versión del método de difusión lineal con la ecuación básica escrita en forma característica. El valor de este método radica en que es usado como método gráfico.

Por otro lado, el método de las características es complicado debido a que resuelve las ecuaciones completas de Saint-Venant, su ventaja es que incluye los términos de inercia y la ecuación dinámica, (Ver Lighthill & Whitham 1955, pp. 291 , Ref. 5).

En vista del éxito del método de difusión de parámetros variables mencionado con anterioridad, existe la posibilidad de que una versión del método Muskingum usando parámetros variables similares podría también ser un método viable de tránsito de avenidas, y una mejora al original método de Muskingum (Linsley, Kohler y Paulhus, 1958 , Ref. 7). Sin

embargo, pruebas preliminares hechas de un método Muskingum de parámetros variables demuestra que los resultados tienden a ser un poco inexactos, queda para un trabajo futuro el clarificar la utilidad del método mencionado.

Otra de las desventajas con los métodos hidrológicos es que ellos asumen una relación única entre la elevación y el gasto a lo largo del tramo. Esto es contrario a lo observado en flujos naturales en los que se demuestra que el gasto para una elevación particular cuando el nivel del flujo se incrementa, es mayor que el gasto para la misma elevación cuando el nivel del flujo decrece. Este fenómeno puede ser mostrado gráficamente en la bien conocida curva de histéresis (Fig. 2-1).

Relacionada directamente con esta relación no única entre la elevación y el gasto para el tramo, está la atenuación del pico a lo largo del mismo. El método de Muskingum predice una atenuación que no es posible deducir suponiendo una relación elevación-gasto única, para poder explicar dicha atenuación es necesario recurrir a la ecuación de cantidad de movimiento o ecuación dinámica; la cual incluye el efecto de resistencia al flujo y sustituye a la relación algebraica (2-2).

Como se verá más adelante, Cunge encontró la forma de relacionar la ecuación dinámica con la ecuación (2-2).

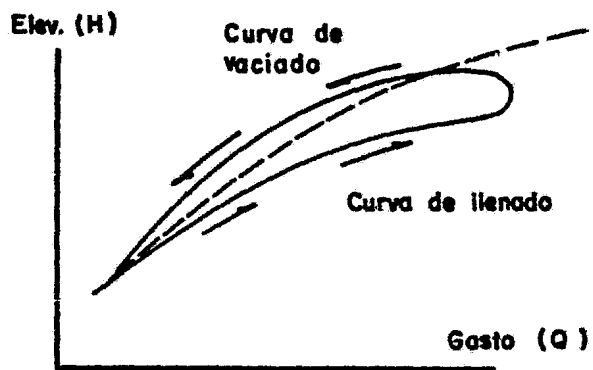


Fig. 2-1



Las ecuaciones de continuidad y dinámica pueden ser escritas en la forma:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) = gA \left( s - \frac{\partial y}{\partial x} - s_{fr} \right) + qv_q \quad (2-4).$$

Donde:  $A$  es el área de la sección transversal húmeda a una distancia  $x$  de la sección aguas arriba del tramo.

- $Q$ : es el gasto  
 $q$ : es el gasto lateral por unidad de longitud  
 $g$ : es la aceleración debido a la gravedad  
 $s$ : es la pendiente de plantilla del canal  
 $\partial y / \partial x$ : es la pendiente de la superficie del agua definida en relación a la plantilla del canal.  
 $s_{fr}$ : es la pendiente de fricción.  
 $v_q$ : es la componente de la velocidad aguas abajo a lo largo del canal para el flujo del gasto lateral.

Las ecuaciones anteriores son usualmente mencionadas como las ecuaciones de Saint-Venant para flujo gradualmente variado no permanente en canales a superficie libre.

Como se muestra, la ecuación (2-4) es muy complicada para ser resuelta analíticamente para un flujo arbitrario en un río natural sin embargo, afortunadamente algunos de los tér

minos en tal ecuación son en general suficientemente pequeños y pueden ser despreciados.

Debido a esto Lighthill & Whitham (1955), (Ref. 5) pudieron demostrar que la propagación del flujo puede ser descrita en términos de ondas cinemáticas más que de ondas dinámicas. Una onda cinemática es una onda que tiene una amplitud constante y posee solamente una velocidad en cada punto de la misma en contraste a una onda dinámica, la cual tiene dos velocidades. Al tratar un flujo como cinemático en una primera aproximación e incluyendo modificaciones a esta onda, debido a la difusión inducida por la pendiente de la superficie del agua,  $\partial y / \partial x$ , Lighthill & Whitham esbosaron un nuevo método de tránsito de avenidas, el cual llamaron el método de la onda cinemática. En efecto su método se basa en la ecuación de convección-difusión

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \omega \frac{\partial y}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2-5)$$

Donde:

- $\omega$  : parámetro de velocidad de pico
- $\mu$  : parámetro de difusión

por simplicidad  $\omega$  y  $\mu$  son usualmente considerados como parámetros constantes, éste último es el término de difusión, el cual introduce una atenuación del pico a lo largo del tramo.

Por lo anterior, el método de la onda cinemática pertenece al grupo de los métodos basados en la ecuación de convección-difusión. Sin embargo, es Hayami (1951) quien por primera vez produjo un método de tránsito de avenidas basado en una ecuación lineal de convección-difusión. El sostenía que los flujos en canales naturales son afectados por las irregularidades en la geometría del mismo. Para incluir el efecto de estas irregularidades Hayami propuso la ecuación lineal de convección-difusión con un valor arbitrario para  $\mu$ . Debido a que él no conocía otro modo de calcular directamente el valor de  $\mu$  de la geometría del canal, sugiere que  $\mu$  debía ser determinado por una comparación de resultados por prueba y error usando su método con registros de avenidas previas en el río estudiado. Una vez conocido el valor del coeficiente de difusión y definido el parámetro  $\omega$  como la velocidad de pico el método de difusión de Hayami da un buen resultado en la práctica para flujos naturales que tienen picos con gastos similares. La incertidumbre en el valor de  $\mu$ , sin embargo, permanece como una desventaja en este método.

Como explica Hayami, las irregularidades en lo ancho del canal generan una serie de almacenamientos, los cuales incrementan la capacidad de almacenamiento del río. Este fenómeno no se acentúa cuando el flujo está asociado a planicies de inundación. Según el método de difusión, en el tránsito de avenidas en un río en el que se tiene una sección transver-

sal regular, pendiente de plantilla, y rugosidades constantes y que es equivalente a un río natural, el incremento en la capacidad de almacenamiento debido a las irregularidades en el río natural pueden ser vistos como un cambio en la geometría y rugosidades del modelo equivalente al río. Si este cambio puede ser cuantificado, los parámetros para el método de difusión y  $\mu$  en particular pueden ser determinados sin requerir la aplicación del método de prueba y error.

Otra desventaja con los métodos de la onda cinemática y de difusión pudiera ser que usan valores fijos de los parámetros  $\omega$  y  $\mu$ . Suponiendo que  $\omega$  y  $\mu$  han sido encontrados de modo que la velocidad del viaje y la magnitud del pico de descarga a lo largo del tramo son correctamente simulados. Luego estos valores para  $\omega$  y  $\mu$  pueden ser considerablemente diferentes de los correspondientes valores determinados para un tránsito en cauces que desbordan. Así aunque los valores de los parámetros pueden ser obtenidos para transitar una serie de avenidas previas la extrapolación de estos valores puede conducir a errores significantes. Thomas & Wormleaton (1970), (Ref. 4) hicieron un gran número de estudios de tránsito en un tramo del río Dee (Wales) usando el método de difusión con la elevación como parámetro; indican cuán difícil es aislar valores fijos para la velocidad de convección y coeficientes de difusión cuando se aplica el método para muchos tránsitos en un río

particular. Una forma de superar esta dificultad es definir  $\omega$  y  $\mu$  como funciones de la elevación o gasto en el río.

A pesar de que las dificultades antes mencionadas pueden evitarse, permanece un problema más importante al usar los métodos de difusión, y éste es la inclusión de gastos tributarios importantes. La dificultad que surge está en cómo tomar en cuenta el efecto de un gasto lateral de entrada discreto en los cálculos al usar la ecuación que describe el fenómeno.

La solución más simple a este problema es transitar una avenida de un tributario a otro, sumando los hidrogramas de descarga del canal principal y el tributario en la confluencia; pero considerando que este procedimiento es satisfactorio para un río bien calibrado, inevitablemente surgirán problemas de precisión al aplicar los métodos de difusión a ríos que no están bien calibrados.

Anteriormente ha sido mencionado que la pendiente de la superficie del agua,  $\partial y / \partial x$ , produce una difusión de la solución de la onda cinemática, y que una de las consecuencias de esta difusión es la que provoca una atenuación del pico de elevación o descarga a lo largo del tramo. Una fórmula para la atenuación del pico de elevación para un tránsito en un canal regular fue descubierta por Forchheimer (1930), (Ref. 8), muchos años antes de que Hayami propusiera el mé-

todo de difusión. Forchheimer demostró que la atenuación está relacionada directamente a la curvatura del pico de elevación del hidrograma aguas arriba. Más recientemente, Henderson (1963), (Ref. 9) demostró cómo los términos de aceleración y convección de la ecuación de cantidad de movimiento, en el lado izquierdo de la ecuación (2-4) también contribuyen a la atenuación del pico. La importancia de estos últimos términos aumenta conforme aumenta el número de Froude para el flujo. Así para ríos de gran pendiente, Henderson señala que todos los términos en la ecuación dinámica pueden ser importantes. Sin embargo, la atenuación del pico es en forma aproximada inversamente proporcional al cuadrado de la pendiente de plantilla y la magnitud de la atenuación en ríos de gran pendiente no es tan importante como en los ríos con pendiente de plantilla pequeña.

La forma de atenuación puede también ser considerada como una consecuencia de la solución de segundo orden para la ecuación de convección-difusión. Dado que es posible cuantificar e incluir el efecto de irregularidades en la geometría de un río natural en la ecuación de convección-difusión, se puede hacer una mejora similar a la fórmula de atenuación.

A pesar de que el método Muskingum, referido anteriormente ignora los efectos dinámicos sobre la onda de flujo, Cunge (1969) demostró que es posible mejorar el método de modo

que dé una buena aproximación a la solución de la ecuación lineal de convección-difusión. Esta mejora se basa en una ecuación de diferencias finitas para el método de Muskingum. El esquema de diferencias finitas introduce una difusión arbitraria y Cunge ha identificado la magnitud de esta difusión con el término correspondiente en el método de difusión. De este modo él puede definir los parámetros del método Muskingum en términos de los parámetros para el método de difusión. Como se demuestra en el capítulo III el método Muskingum-Cunge puede ser usado para encontrar la atenuación del pico de descarga con un alto grado de precisión; además es bueno comentar aquí que el método Muskingum no tiene dificultades con tributarios como los tiene el método de difusión. Consecuentemente habrán ventajas al usar el método Muskingum-Cunge para ríos que tienen tributarios y que no han sido bien calibrados.

Debido a las limitaciones de los métodos analíticos para el tránsito de avenidas que se han propuesto y la disponibilidad de poderosas computadoras digitales, se ha puesto últimamente especial atención en las soluciones numéricas de las ecuaciones completas de Saint-Venant. Estos métodos numéricos de los tránsitos de avenidas se diferencian de los otros, principalmente en la técnica usada para resolver las ecuaciones diferenciales. Cuando se cuenta con suficiente memoria en la computadora, los métodos se pueden ampliar para incluir con más detalle las características geométricas del canal y planicie de inundación si se requiere, (Ver por ejemplo, Cruickshank y Zumaya, Ref. 10).

## METODO DE DIFUSION DE PARAMETROS VARIABLES

Partiendo de las ecuaciones de Saint-Venant (2-3) y (2-4), sabiendo que

$$s_{fr} = \frac{Q^2 n^2}{A^2 R^{4/3}} \quad (2-6)$$

y además se supone que  $\frac{\partial Q}{\partial t} \doteq 0$  ;  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) \doteq 0$

y  $qv_q \doteq 0$  (por considerar a  $v_q$  ortogonal al flujo)

$$\text{se tiene que: } 0 = Ag \left( s - \frac{\partial y}{\partial x} - s_{fr} \right) \quad (2-7)$$

De (2-6) en (2-7)

$$0 = s - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{Q^2 n^2}{A^2 R^{4/3}} \quad (2-8)$$

Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para el canal serán:

$$\frac{\partial A_c}{\partial t} + \frac{\partial Q_c}{\partial x} = q^* \quad (2-9)$$

$$0 = s - \frac{\partial y_c}{\partial x} - \frac{Q_c^2 n_c^2}{A_c^2 R_c^{4/3}} \quad (2-10)$$

y para la planicie de inundación

$$\sigma \frac{\partial A_f}{\partial t} + \frac{\partial Q_f}{\partial x} = -q^* + q \quad (2-11)$$



$$0 = \sigma^3 \left( s - \frac{\partial y_c}{\partial t} \right) - \frac{Q_f^2 n_f^2}{A_f^2 R_f^{4/3}} \quad (2-12)$$

Donde  $\sigma$  es la sinuosidad ( $\sigma \geq 1$ )

Sumando (2-9) y (2-11)

$$\frac{\partial}{\partial t} (A_c + \sigma A_f) + \frac{\partial}{\partial x} (Q_c + Q_f) = q \quad (2-13)$$

Por otro lado

$$Q = Q_c + Q_f \quad \text{y} \quad \frac{\sigma \partial A_f}{\partial t} = \sigma \frac{\partial A_f}{\partial A_c} \frac{\partial A_c}{\partial t}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial A_c}{\partial t} + \frac{\sigma \partial A_f}{\partial A_c} \frac{\partial A_c}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (2-14)$$

$$\left( 1 + \frac{\sigma \partial A_f}{\partial A_c} \right) \frac{\partial A_c}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (2-15)$$

Considerando

$$A_f = W_f y_f$$

$$A_c = W_c y_c \quad (\text{Cuando } W_c \gg y_c)$$

$$\frac{\partial A_f}{\partial A_c} = \frac{\partial (W_f y_f)}{\partial (W_c y_c)} = \frac{W_f}{W_c} \frac{\partial y_f}{\partial y_c}$$

$Q_c$  de (2-10)

$$Q_c = \left( s - \frac{\partial y_c}{\partial x} \right)^{1/2} \frac{A_c R_c^{2/3}}{n_c} \quad (2-16)$$

Despejando  $Q_f$  de (2-12) se obtiene

$$Q_f = \sigma^{3/2} \left( s - \frac{\partial y_c}{\partial x} \right)^{1/2} \frac{A_f R_f^{2/3}}{n_f} \quad (2-17)$$

Sumando (2-16) y (2-17)

$$Q = Q_c + Q_f = \left[ \frac{A_c R_c^{2/3}}{n_c} + \sigma^{3/2} \frac{A_f R_f^{2/3}}{n_f} \right] \left( s - \frac{\partial y_c}{\partial x} \right)^{1/2} \quad (2-18)$$

Derivando (2-18) con respecto a  $t$  y si  $\frac{\partial A_f}{\partial A_c} \approx \frac{W_f}{W_c}$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \left[ \frac{R_c^{2/3}}{n_c} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{A_c}{R_c} \frac{\partial R_c}{\partial A_c} \right) + \frac{\sigma^{3/2}}{n_f} \frac{\partial}{\partial A_c} (A_f R_f^{2/3}) \right] \left( s - \frac{\partial y_c}{\partial x} \right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial A_c}{\partial t} - \frac{1}{2} Q \left( s - \frac{\partial y_c}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{W_c} \frac{\partial A_c}{\partial t} \right) \quad (2-19)$$

Despreciando  $\frac{\partial A_c}{\partial t}$  y asumiendo que  $W_c \gg y_c$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \left( 1 - \frac{1}{s} \frac{\partial y_c}{\partial x} \right)^{3/10} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) = \frac{1}{2} Q \left( s - \frac{\partial y_c}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\lambda W_c} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) \right] \quad (2-20)$$

Donde:

$$c = \frac{Q}{\lambda (Q_c n_c)^{3/5} W_c^{2/5} s^{3/10}} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{A_c}{R_c} \frac{\partial R_c}{\partial A_c} + \theta \right)$$

$$\lambda = 1 + \sigma \frac{W_f}{W_c}$$

$$\theta = \sigma^{3/2} \frac{A_f R_f^{2/3}}{n_f} \left[ \frac{A_c}{A_f} \frac{W_f}{W_c} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{A_f}{R_f} \frac{\partial R_f}{\partial A_f} \right) - \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{A_c}{R_c} \frac{\partial R_c}{\partial A_c} \right) \right] \left[ \frac{A_c R_c^{2/3}}{n_c} + \sigma^{3/2} \frac{A_f R_f^{2/3}}{n_f} \right]^{-1}$$

Aquí se introducen las siguientes hipótesis y simplificaciones:

$$\text{Si } Q < Q_b \Rightarrow W_f = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\Rightarrow A_f = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\text{Si } \frac{\partial y_c}{\partial x} \ll s \Rightarrow \frac{1}{s} - \frac{\partial y_c}{\partial x} \doteq 0$$

Si la entrada lateral ( $q$ ) es uniforme a lo largo del canal entonces

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Además si

$$a = \frac{1}{2\lambda W_c s}$$

se tiene

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{aQ}{s} \frac{ds}{dx} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{3}{5} a_c \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 + cq \quad (2-21)$$

Si  $c$  en esta ecuación está definida en términos de la velocidad promedio,  $\bar{c}(Q)$ , a lo largo del tramo, entonces  $a$  tiene que estar definida en términos de un valor promedio similar como el parámetro de atenuación. Así la ecuación (2-21) quedará como:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \bar{c} \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\alpha}{L} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{3\alpha c}{5L} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 + \bar{c}q \quad (2-22)$$

El siguiente objetivo es resolver la ecuación (2-22) para un hidrograma de una avenida particular, dadas las prescripciones de las formas funcionales para  $\bar{c}$  y  $\alpha$ . De cualquier

manera, es aparente de la ecuación (2-22) que cualquier solución para el tránsito de un hidrograma usando esta ecuación es bastante sensible a la forma funcional de  $\frac{\partial \alpha}{\partial Q}$ .

Además, ya que la curva para  $\alpha$  es generalmente mucho más difícil de obtener para un río en particular que la curva para  $\bar{c}$ , se prefiere escribir la ecuación (2-22) en la forma

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \bar{c} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\alpha}{L} Q \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \bar{c} q \quad (2-23)$$

#### METODO DE DIFUSION LINEAL

El método de difusión lineal tal como lo usó Hayami (1951), Thomas & Wormleaton (1970-1971), está basado en la ecuación

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \omega \frac{\partial Q}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \omega q \quad (2-24)$$

Donde  $\omega$  y  $\mu$  están definidos como parámetros constantes, en este caso  $\mu$  está definido por:

$$\mu = \frac{\alpha (\bar{Q}_p)}{L} \bar{Q}_p \quad (2-25)$$

y  $\omega$  por:

$$\omega = \frac{L}{T_p} - \frac{2\alpha}{L^2} Q^* \quad (2-26)$$

Donde:

$\alpha$	=	Coeficiente de atenuación del pico
$\bar{Q}_p$	=	Gasto pico promedio
$T_p$	=	Tiempo de pico
$L$	=	Longitud del tramo en estudio
$Q^*$	=	Gasto redefinido a partir de un $\omega$ supuesto y luego corregido

La ecuación (2-24) es lineal, se puede resolver por diferen  
cias finitas directamente sin necesidad de interacciones.

## METODO MUSKINGUM

Se esperaría que el almacenamiento en un tramo de río dependiera de los ingresos y de los egresos al tramo y de las características hidráulicas de la sección del canal. El almacenamiento en el tramo para un tiempo dado puede expresarse como la ecuación (2-2) o más generalmente como

$$S = \frac{b}{a} \left[ \epsilon I^{m/n} + (1 - \epsilon) O^{m/n} \right] \quad (2-27)$$

Donde:

- a y n            Reflejan las características de las secciones y del tramo.
- b y m            Reflejan el estado de las características de volumen de la sección.
- $\epsilon$                 Define los pesos relativos dados a los egresos y a los ingresos en el tramo.

El método Muskingum supone que  $m/n = 1$  y hace que  $b/a = K$  resultando la ecuación (2-2) o su equivalente:

$$S = K \left[ \epsilon I + (1 - \epsilon) O \right] \quad (2-28)$$

Donde:

$K$  = Tiempo de almacenamiento constante para el tramo.

$\epsilon$  = Factor de peso, el cual varía entre 0 y 0.5 para una sección dada del río.

El comportamiento de la onda de flujo debido a cambios en el valor del factor de peso  $\epsilon$  es aparentemente fácil de observar en la figura (2-2).

El resultado de la onda de flujo aguas abajo es comúnmente descrita por la cantidad de traslación, ésto es, el tiempo de retraso y por la cantidad de atenuación o reducción del pico. Como se puede notar en la figura (2-2) el valor de  $\epsilon = 0.5$  dá como resultado una traslación pura de la onda de flujo.

La aplicación de las ecuaciones (2-1) y (2-28) para un tramo de río será directa si se conocen los parámetros  $K$  y  $\epsilon$  a partir de calibraciones anteriores. Sino el procedimiento del tránsito empieza por dividir el tiempo en un incremento de tiempo ( $\Delta t$ ) y expresar la ecuación (2-2) en forma de diferencias finitas.

$$\frac{I_0 + I_1}{2} - \frac{O_0 + O_1}{2} = \frac{S_1 - S_0}{\Delta t} \quad (2-29)$$

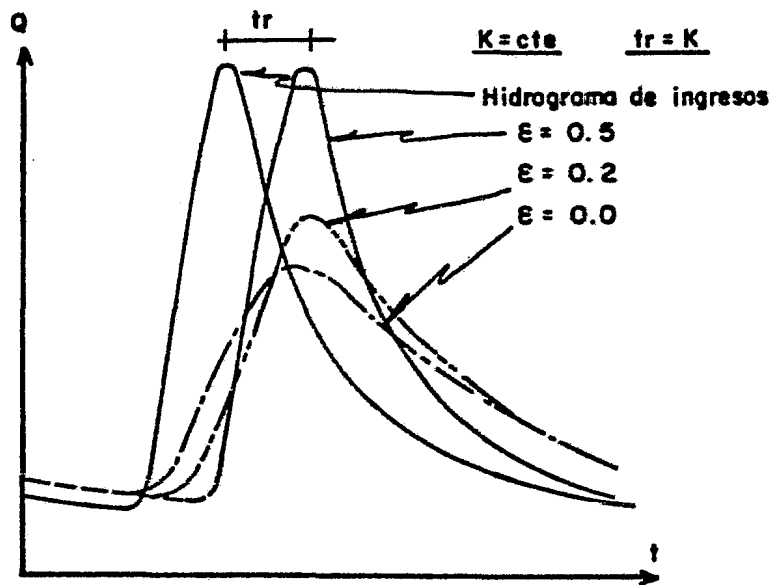


Fig. 2-2



El valor de  $(\Delta t)$  normalmente se asigna entre  $\frac{K}{3}$  y  $K$  usando los subíndices 0 y 1 para denotar el tiempo inicial y final, respectivamente para el intervalo  $\Delta t$ ; el cambio en el almacenamiento en el tramo del río, en el intervalo estará dado por:

$$S_1 - S_0 = K \left[ \epsilon(I_1 - I_0) + (1 - \epsilon)(O_1 - O_0) \right] \quad (2-30)$$

De (2-29) en (2-30) resulta la ecuación de tránsito de Muskingum dada por:

$$O_j = C_1 I_{j-1} + C_2 I_j + C_3 O_{j-1} \quad (2-31)$$

$$C_1 = \frac{K\epsilon + 0.5 \Delta t}{K - K\epsilon + 0.5 \Delta t} \quad C_2 = \frac{-K\epsilon + 0.5 \Delta t}{K - K\epsilon + 0.5 \Delta t} \quad C_3 = \frac{K - K\epsilon - 0.5 \Delta t}{K - K\epsilon + 0.5 \Delta t}$$

Nótese que  $K$  y  $\Delta t$  deben tener las mismas unidades de tiempo y también que la suma de  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  es igual a 1.

Puesto que  $I_j$  e  $I_{j-1}$  son conocidos para cada incremento de tiempo, el tránsito se efectúa resolviendo la ecuación (2-31) para incrementos sucesivos de tiempo usando cada  $O_j$  como  $O_{j-1}$  para el siguiente incremento de tiempo.

Este cálculo se ilustra paso a paso en el siguiente ejemplo:

## Ejemplo (2-1)

Realizar el tránsito de avenida para un tramo de un río dados  $\epsilon = 0.2$  y  $K = 2$  días. El hidrograma de entrada usando  $\Delta t = 1$  día está mostrado en la columna 3. Supóngase iguales los gastos de entrada y de salida en el día 2 de Julio.

Solución:

Si  $\Delta t = 1$  día,  $\epsilon = 0.2$  y  $K = 2$  días entonces de las ecuaciones (2-31) dá:

$$C_1 = 0.428$$

$$C_2 = 0.048$$

$$C_3 = 0.524$$

El cálculo del tránsito está dado en la tabla (2-1) y el hidrograma de salida se presenta en la columna 7.

j (1)	Fecha (2)	Gasto de Entrada(I <sub>j</sub> ) (3)	$C_{1I}^{j-1}$ (4)	$C_{2I}^j$ (5)	$C_{30}^{j-1}$ (6)	Gasto de Salida(O <sub>j</sub> ) (7)
1	2 Jul.	121	-	-	-	121
2	3	217	52	10	63	125
3	4	316	93	15	66	174
4	5	474	135	23	91	249
5	6	611	203	29	131	363
6	7	593	262	28	190	480
7	8	752	254	36	252	542
8	9	1 303	322	63	284	669
9	10	1 698	558	81	351	990
10	11	1 635	727	78	519	1 324
11	12	1 356	700	65	694	1 459
12	13	976	580	46	764	1 390
13	14	613	418	29	728	1 175
14	15	982	262	47	616	925
15	16	1 279	420	61	485	966
16	17	1 391	547	67	506	1 120
17	18	1 169	595	56	587	1 238
18	19	958	500	46	649	1 195
19	20	581	410	28	626	1 064
20	21	417	249	20	558	827
21	22	324	178	16	433	627
22	23	263	139	13	329	481
23	24	222	113	11	252	376
24	25	176	95	8	197	300
25	26 Jul.	172	75	8	157	240

TABLA 2-1

DETERMINACION DE K Y  $\epsilon$  .

Los valores de K y  $\epsilon$  para el método Muskingum son comúnmente estimados usando  $K \approx$  tiempo de viaje del hidrograma en el tramo y el valor promedio de  $\epsilon = 0.2$ .

Si los registros de los hidrogramas de ingresos y egresos están disponibles para una o más avenidas, el proceso del tránsito es fácil de invertir y se obtienen mejores valores de K y  $\epsilon$  para el tramo, o también el método aproximado descrito, puede ser usado para ilustrar valores instantáneos de S contra  $\epsilon I + (1 - \epsilon) O$  graficados los puntos para varios valores de  $\epsilon$  como se muestra en el ejemplo (2-2).

Dado que S y  $\epsilon I + (1 - \epsilon) O$  están supuestos relacionados linealmente por la Ec. (2-28), el valor aceptado de  $\epsilon$  será aquel que de la gráfica más esbelta (que se aproxime más a una línea recta).

Después de la representación gráfica, el valor para K se determina como la pendiente continuada de la gráfica más esbelto, ya que de la Ec. (2-28).

$$K = \frac{S}{\epsilon I + (1 - \epsilon) O} \quad (2-32)$$

Los valores instantáneos de S para las gráficas en el ejemplo (2-2) fueron determinados resolviendo para  $S_1$ , en la Ec. (2-29) para incrementos de tiempo sucesivos. Fue usado pa-

ra el incremento inicial un valor de  $S_1 = 0$ , pero el valor es arbitrario puesto que sólo la pendiente es deseada y no la intercepción.

### Ejemplo 2-2 .

Dados los hidrogramas de entrada ( $\bar{I}$ ) y salida ( $\bar{O}$ ) sobre un río particular determinar los parámetros  $K$  y  $\epsilon$  para el tramo (Ver tabla 2-2).

Hay que tomar en cuenta que  $\frac{(I - O)_{j-1} + (I - O)_j}{2}$  para  $j = 1$   
 es igual a:  $\frac{I_0 - O_0 + I_1 - O_1}{2} = \frac{I_0 + I_1}{2} - \frac{O_0 + O_1}{2} = \bar{I} - \bar{O}$

Graficando los valores de  $S_1$  (almacenamientos) en el eje de las ordenadas y  $\epsilon \bar{I} + (1 - \epsilon) \bar{O}$  para las diferentes  $\epsilon$  (0.1, 0.2, 0.3) en el eje de las abcisas se obtienen las figuras (2-3), (2-4) y (2-5) de las cuales se elige la gráfica más esbelta, o sea, la de  $\epsilon = 0.3$  y  $K \approx$  pendiente de la recta = 2.

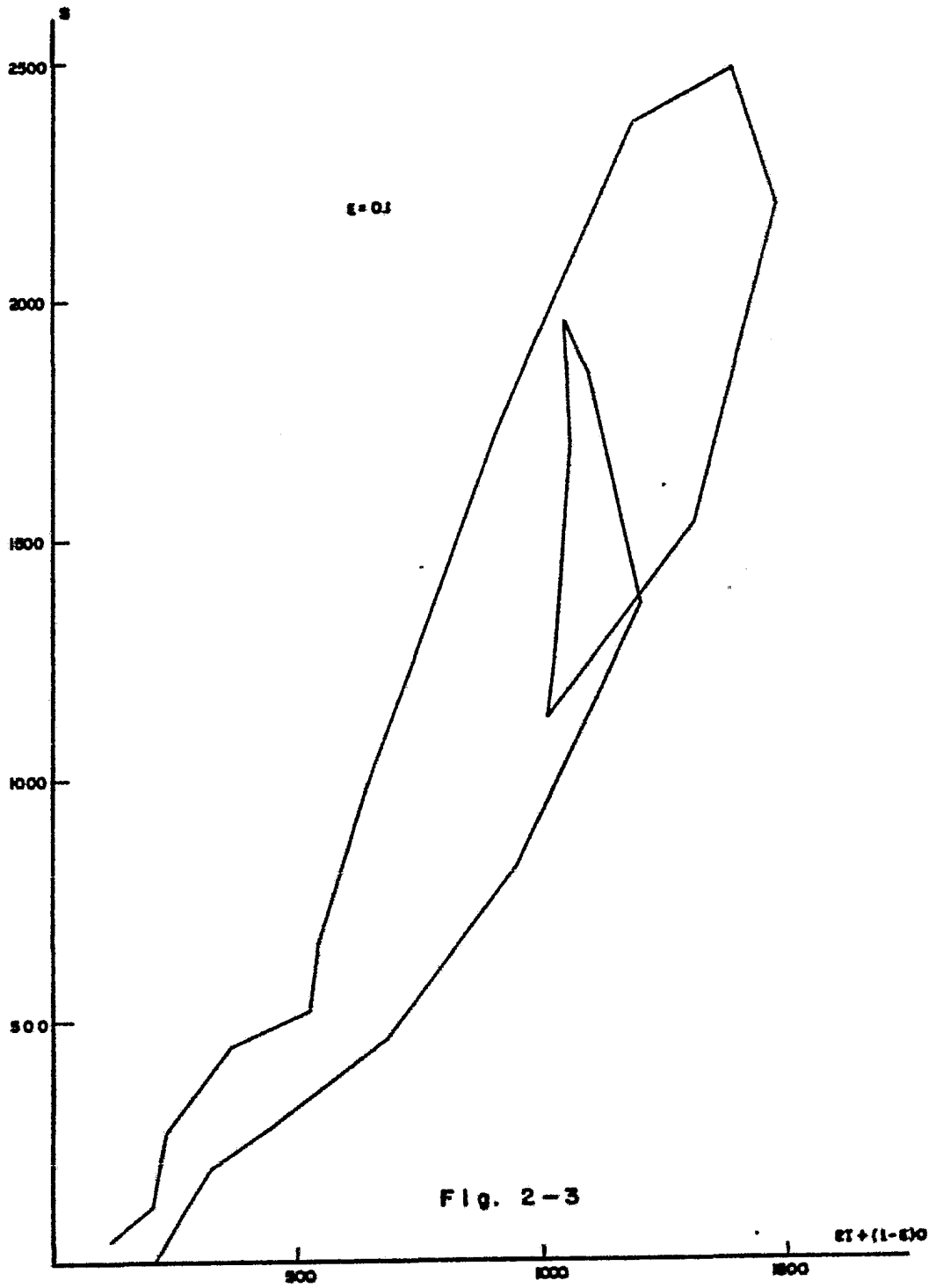
Ahora estos valores podrían ser usados en el tránsito de otras avenidas en el tramo tal como el ejemplo (2-1).

Inherente a este proceso está el postulado de que la superficie del agua en el tramo es uniforme y continua entre los extremos aguas arriba y aguas abajo de la sección.

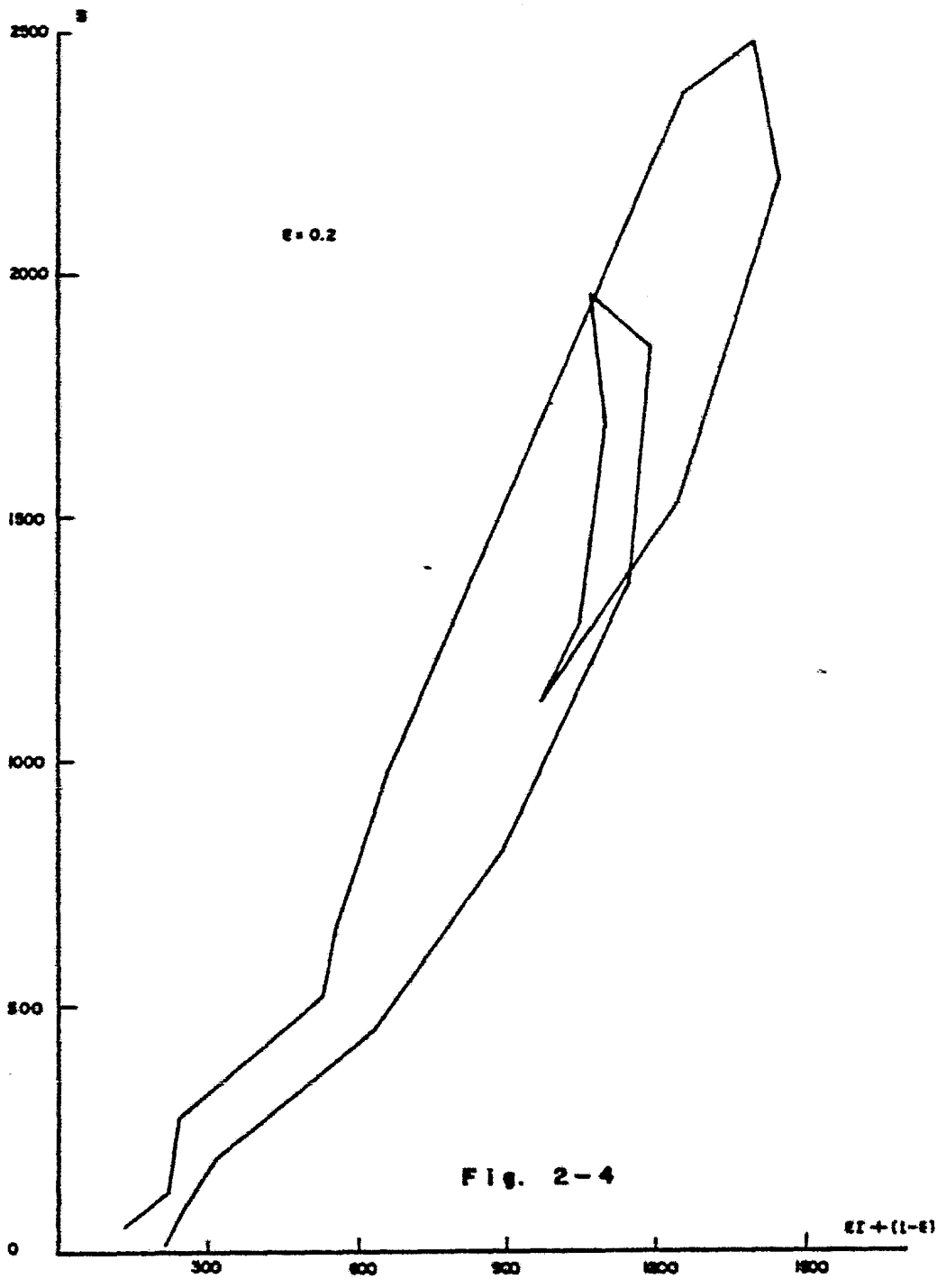
Adicionalmente, se presupone que  $K$  y  $\epsilon$  son constantes a lo largo del rango en la elevación de estudio. Si las diferencias con las suposiciones anteriormente planteadas son significativas, puede ser necesario trabajar con tramos más pequeños del río o emplear una aproximación más precisa al problema.

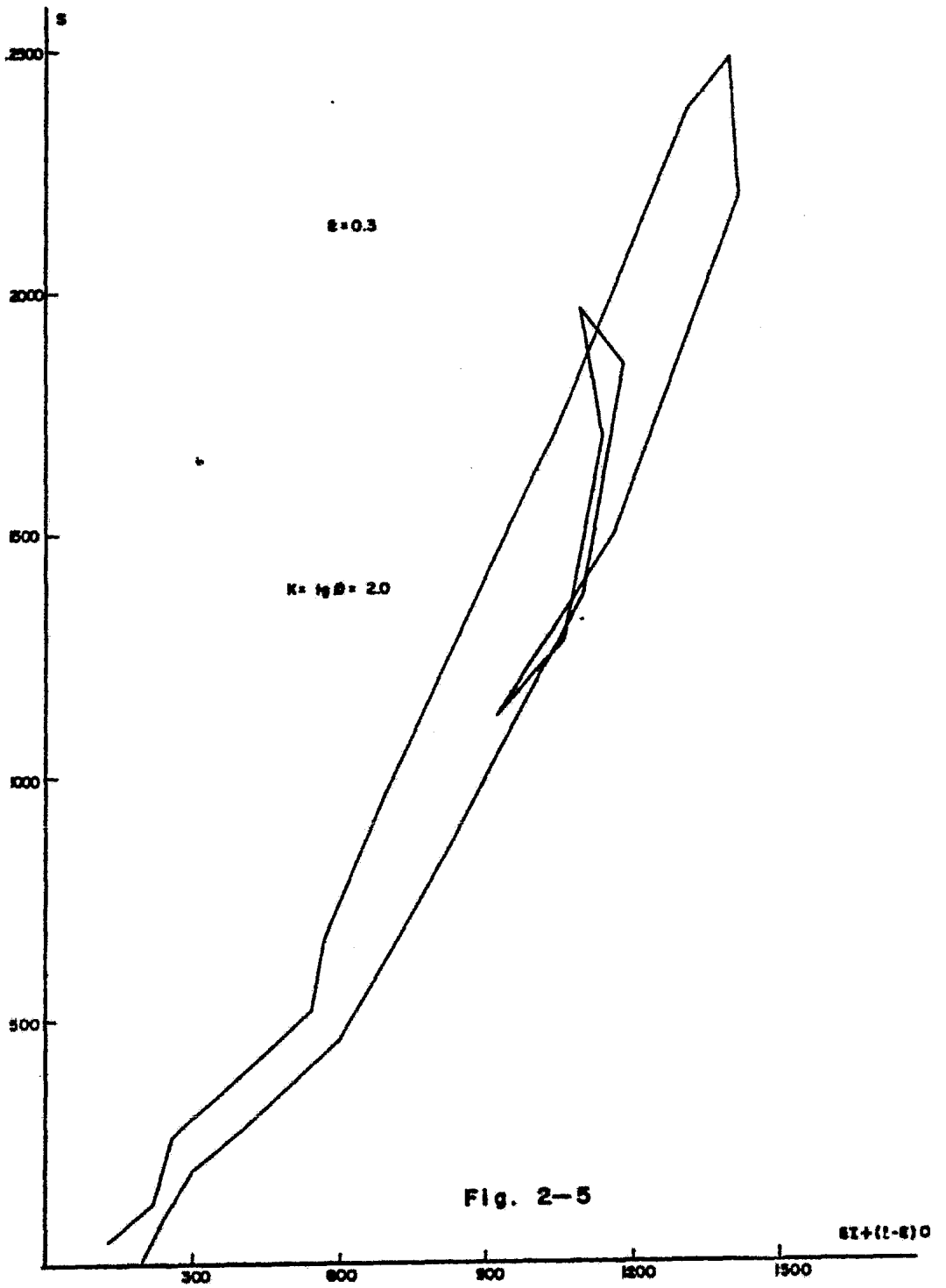
DIA	$\bar{I} = \frac{I_1 + I_2}{2}$	$\bar{O} = \frac{O_1 + O_2}{2}$	$\bar{I} - \bar{O} = \Delta S$	$S_2$	$\epsilon \bar{I} + (1 - \epsilon) \bar{O} \quad (m^3/s)$		
	(m <sup>3</sup> /s)	(m <sup>3</sup> /s)	(m <sup>3</sup> /s)	(m <sup>3</sup> /s)	$\epsilon = 0.1$	$\epsilon = 0.2$	$\epsilon = 0.3$
2	166	118	48	48	123	127	132
3	264	197	67	115	204	210	217
4	365	214	151	266	229	244	259
5	581	402	179	445	362	438	456
6	595	518	77	522	526	533	541
7	663	524	139	661	538	552	566
8	920	603	317	978	635	666	698
9	1 569	830	739	1 717	904	978	1 052
10	1 776	1 124	652	2 369	1 189	1 254	1 320
11	1 490	1 379	111	2 480	1 390	1 401	1 412
12	1 223	1 509	- 286	2 194	1 480	1 452	1 423
13	714	1 379	- 665	1 529	1 313	1 246	1 180
14	646	1 051	- 405	1 124	1 011	970	930
15	1 167	1 014	153	1 277	1 029	1 045	1 060
16	1 427	1 014	413	1 690	1 055	1 097	1 138
17	1 283	1 014	269	1 959	1 041	1 068	1 095
18	1 099	1 209	- 110	1 849	1 088	1 187	1 176
19	765	1 249	- 484	1 365	1 201	1 152	1 104
20	459	1 003	- 544	821	949	894	840
21	351	714	- 363	458	678	641	605
22	289	464	- 175	283	447	429	412
23	229	326	- 97	186	316	307	297
24	170	266	- 96	90	256	247	237
25	143	223	- 80	10	215	207	199

TABLA ( 2-2 )









Es conveniente aclarar que conforme se va transitando un hidrograma por diferentes tramos, la atenuación va disminuyendo aún cuando  $K$  y  $\epsilon$  sean constantes, y ésto, es debido a que el hidrograma de entrada para cada tramo se presenta más regulado.

A continuación se plantea un ejemplo de tránsito consecutivo de un hidrograma utilizando el hidrograma de entrada del ejemplo 2-1 para mostrar el efecto de la atenuación en cada uno de los tránsitos.

Según lo que se ha visto en páginas anteriores sería de esperar que al utilizar una  $\epsilon = 0.2$  como se ve en la fig. 2-2 se obtuviera una atenuación del pico similar, pero ésto no se cumple cuando se transita una avenida ya transitada, ésto es, regulada, pues su atenuación será menor.

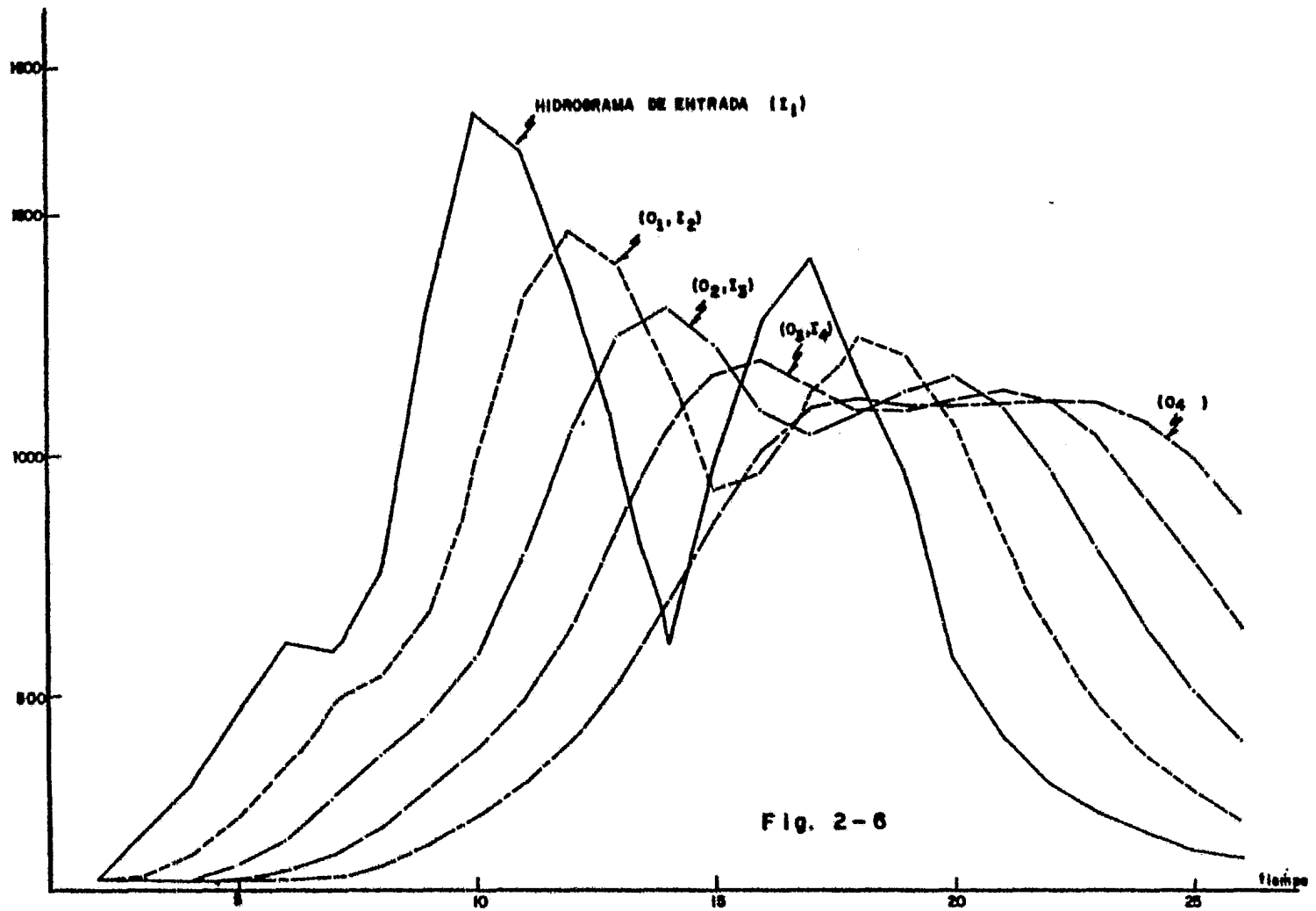
## EJEMPLO 2-3

FECHA	$I_1$ (m <sup>3</sup> /s)	$O_1 = I_2$ (m <sup>3</sup> /s)	$O_2 = I_3$ (m <sup>3</sup> /s)	$O_3 = I_4$ (m <sup>3</sup> /s)	$O_4$ (m <sup>3</sup> /s)
2 Jul.	121	121	121	121	121
3	217	125	121	121	121
4	316	174	125	121	121
5	474	249	152	125	121
6	611	363	204	140	124
7	593	480	285	174	133
8	752	542	381	231	255
9	1 303	669	463	306	195
10	1 698	990	576	386	252
11	1 635	1 324	789	487	321
12	1 356	1 459	1 050	643	408
13	876	1 390	1 241	846	530
14	613	1 175	1 302	1 037	690
15	982	925	1 230	1 160	861
16	1 279	966	1 087	1 186	1 005
17	1 391	1 120	1 037	1 136	1 089
18	1 169	1 238	1 083	1 091	1 109
19	958	1 195	1 132	1 090	1 100
20	581	1 064	1 156	1 111	1 096
21	417	827	1 101	1 130	1 104
22	324	627	961	1 109	1 115
23	263	481	795	1 031	1 108
24	222	376	640	911	1 066
25	176	300	510	776	986
26 Jul.	172	240	407	644	880

TABLA 2-3

Transitando un hidrograma y luego sucesivamente el hidrograma de salida manteniendo constantes  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , o sea

$$\begin{aligned} C_0 &= 0.048 \\ C_1 &= 0.428 \\ C_2 &= 0.524 \end{aligned}$$



En el ejemplo (2-3) se tiene que entre el hidrograma de entrada (  $I_1$  ) y su hidrograma de salida (  $O_1$  ) el porcentaje de atenuación estará dado por:

$$\% A = \frac{1698 - 1458}{1698} \times 100 = 14 \%$$

Entre  $I_2$  y  $O_2$

$$\% A = \frac{1458 - 1302}{1458} \times 100 = 11 \%$$

Entre  $I_3$  y  $O_3$

$$\% A = \frac{1302 - 1186}{1302} \times 100 = 9 \%$$

Y entre  $I_4$  y  $O_4$

$$\% A = \frac{1186 - 1109}{1186} \times 100 = 6.5 \%$$

Como se puede observar el porcentaje de atenuación va disminuyendo.

Es de esperar que un método que resuelva las ecuaciones completas de Saint-Venant de resultados más precisos para un estudio de tránsito de avenidas, sobre todo si el flujo en el río, así como el flujo sobre la llanura de inundación, están correctamente modelados y hay suficientes datos para determinar los coeficientes de rugosidad con precisión. La siguiente clase de método de tránsito de avenidas se obtie-

ne despreciando los términos de inercia en la ecuación dinámica. Sin hacer ninguna aproximación adicional la ecuación

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{n} AR^{2/3} \left( s - \frac{\partial y}{\partial x} \right)^{1/2} \right] = q \quad (2-33)$$

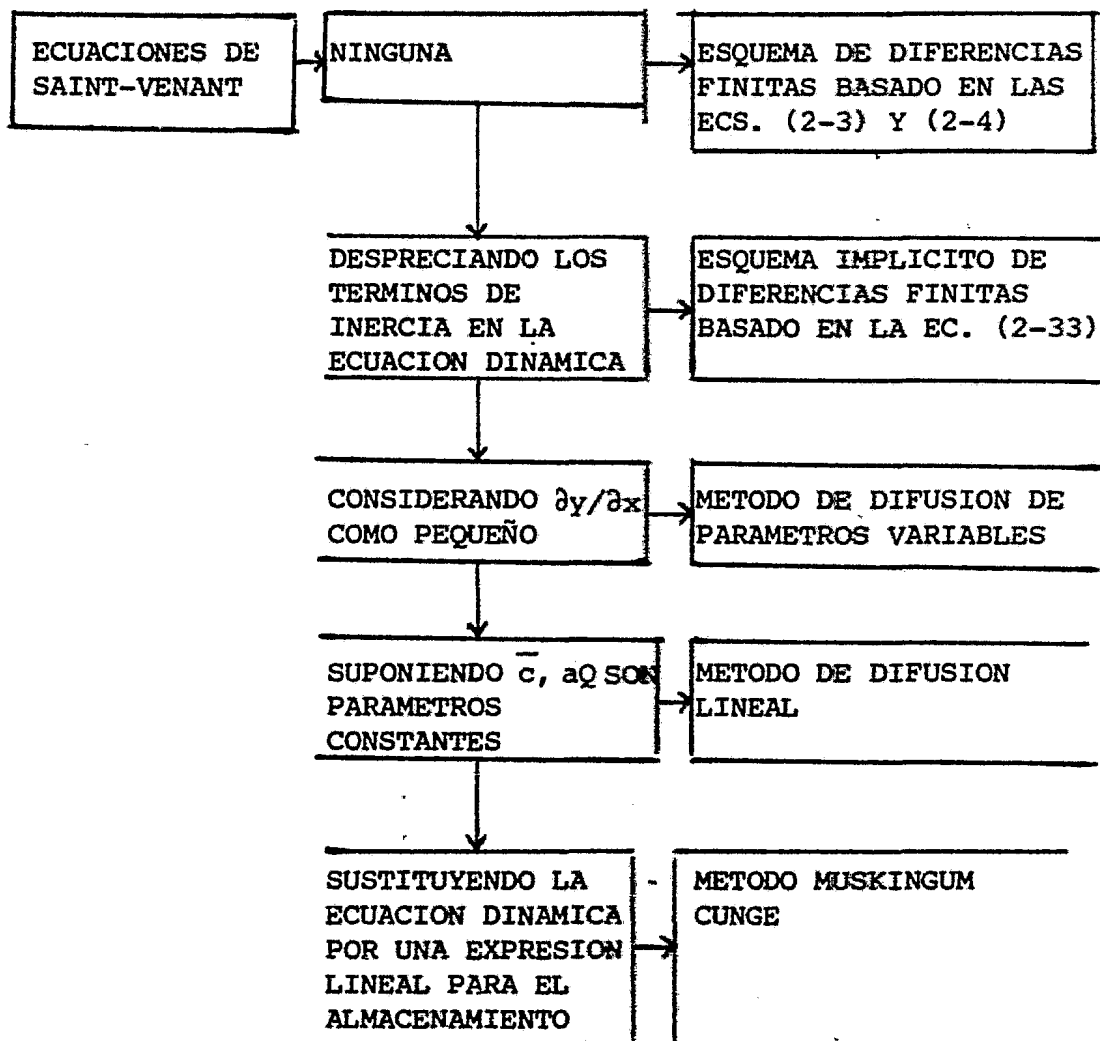
puede ser resuelta usando, por ejemplo, un esquema implícito de diferencias finitas del tipo Crank-Nickolson. Tal método no ha sido considerado aquí por la necesidad de conocer el coeficiente de rugosidad.

Los métodos de difusión y ondas cinemáticas esencialmente consideran  $\partial y/\partial x$  como pequeño en comparación con la pendiente del fondo  $\bar{y}$  y  $\alpha$  ó  $aQ$ , ya sea como funciones de  $Q$  ó parámetros constantes para una avenida dada. La última clase de métodos suponen que la ecuación dinámica puede ser reemplazada por una relación algebraica entre el almacenamiento y la entrada y salida de flujo al tramo. Esta es la base de los métodos de Muskingum y similares del tipo de almacenamiento.

Es válido resumir las relaciones entre todos los métodos de tránsito de avenidas derivados y mencionados en este capítulo, (Ver el cuadro siguiente).

## APROXIMACION

## METODO DE SOLUCION





## CAPITULO III

### DESCRIPCION DEL METODO MUSKINGUM - CUNGE

El método de Muskingum (Ref. 1) como se menciona en el capítulo anterior, es uno de los métodos hidrológicos de cálculo de propagación de ondas de avenidas más conocidos y más usados en la actualidad.

Este método utiliza la ecuación de continuidad y una relación lineal entre el almacenamiento y el gasto que entra o sale del tramo por analizar. El método de Muskingum, en su forma original tiene únicamente dos parámetros y se aplica en forma directa para toda la longitud del cauce estudiado, estos parámetros se obtienen de una calibración, en general en forma gráfica y se requiere tener información de una avenida medida en ambos extremos del tramo en cuestión. Debido a que, aparentemente, los parámetros no tienen una relación directa con el problema físico, el método de Muskingum es considerado como de caja negra.

Este método fue implementado y mejorado substancialmente por J. A. Cunge (Ref. 2) y presentado en detalle en 1969.

El cambio radica en que los parámetros pueden obtenerse de datos físicos relevantes sin necesidad de tener un hidrograma medido aguas abajo y puede aplicarse por pequeños tramos.

El método Muskingum-Cunge es muy práctico pues los cálculos se pueden hacer rápidamente, así sea con una máquina de capacidad limitada. La suposición básica para el método es que la relación elevación/gasto es lineal y aplicada estrictamente, esta suposición nos lleva a una ecuación diferencial cuya solución analítica no permite la amortiguación de ondas.

El método de Muskingum, sin embargo nos da la atenuación de una onda viajando a través de un río. La explicación de esta contradicción aparente es que la fórmula de Muskingum se deriva directamente de un esquema de diferencias finitas, reemplazando las diferencias parciales en la ecuación original. Este esquema introduce un error dentro de la solución analítica de la ecuación original, en la forma de una atenuación artificial en el gasto y modificando la celeridad de la onda resultante.

Por tanto, mientras que la relación  $H(Q)$  se asume de ser uno a uno, no tiene sentido tratar de explicar el efecto de amortiguación del método Muskingum, debido al prisma de almacenamiento en el río. El factor importante a determinar es el coeficiente artificial de amortiguación que tiene que ser aquel que corresponde al efecto real de amortiguación.

El análisis de la fórmula de Muskingum-Cunge demuestra de que este puede ser también una aproximación en diferencias finitas de una ecuación diferencial derivada de las ecuacioo

El método Muskingum-Cunge es muy práctico pues los cálculos se pueden hacer rápidamente, así sea con una máquina de capacidad limitada. La suposición básica para el método es que la relación elevación/gasto es lineal y aplicada estrictamente, esta suposición nos lleva a una ecuación diferencial cuya solución analítica no permite la amortiguación de ondas.

El método de Muskingum, sin embargo nos da la atenuación de una onda viajando a través de un río. La explicación de esta contradicción aparente es que la fórmula de Muskingum se deriva directamente de un esquema de diferencias finitas, reemplazando las diferencias parciales en la ecuación original. Este esquema introduce un error dentro de la solución analítica de la ecuación original, en la forma de una atenuación artificial en el gasto y modificando la celeridad de la onda resultante.

Por tanto, mientras que la relación  $H(Q)$  se asume de ser uno a uno, no tiene sentido tratar de explicar el efecto de amortiguación del método Muskingum, debido al prisma de almacenamiento en el río. El factor importante a determinar es el coeficiente artificial de amortiguación que tiene que ser aquel que corresponde al efecto real de amortiguación.

El análisis de la fórmula de Muskingum-Cunge demuestra de que este puede ser también una aproximación en diferencias finitas de una ecuación diferencial derivada de las ecuacioo

nes de Saint-Venant si se desprecian los términos de inercia y hay una solución para esta ecuación, la cual si permite amortiguación del tránsito de onda. Comparando esta ecuación diferencial con la fórmula de Muskingum los coeficientes de esta última pueden ser determinados de las características físicas de un río aun cuando la relación elevación-gasto no puede permanecer lineal.

Así pues, si se tiene un tramo de cauce o canal de tamaño  $\Delta x$ , sea  $j$  la sección aguas arriba y  $j+1$  la de aguas abajo. El gasto que entra al tramo será  $Q_j$  y el que sale  $Q_{j+1}$  que a su vez es el de entrada al tramo siguiente. La ecuación de continuidad se expresa como:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = Q_j - Q_{j+1} \quad (3-1)$$

La relación lineal entre almacenamiento y entradas propuesta en el método de Muskingum original puede escribirse como:

$$S = K \left[ \epsilon Q_j + (1 - \epsilon) Q_{j+1} \right] \quad (3-2)$$

Donde:

$K$  = Tiempo característico

$\epsilon$  = Factor de peso de ingresos y egresos del tramo.

Luego, derivando respecto al tiempo la ecuación 3-2 sustituyéndola en 3-1 y aproximando luego la derivada con diferencias finitas se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{K}{\Delta t} \left[ \epsilon Q_j^{n+1} + (1 - \epsilon) Q_{j+1}^{n+1} - \epsilon Q_j^n - (1 - \epsilon) Q_{j+1}^n \right] \\ & = \frac{1}{2} \left[ Q_j^{n+1} - Q_{j+1}^{n+1} + Q_j^n - Q_{j+1}^n \right] \end{aligned} \quad (3-3)$$

Donde:

$n$  = Instante donde se conocen los valores de  $Q$  .

$n + 1$  = Instante donde se desean calcular dichos valores.

Puede demostrarse que la ecuación anterior es una aproximación en diferencias finitas a la ecuación diferencial parcial,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \omega \frac{\partial Q}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

que es una ecuación del tipo de difusión-convección. La variable  $\omega$  corresponde a la velocidad de viaje del pico y está relacionada con  $K$  como sigue:

$$K = \frac{\Delta x}{\omega} \quad (3-4)$$

$\omega$  se obtiene considerando el tiempo de recorrido del pico en el tramo ( $T_p$ ) o de hidrograma sintético consideran-

do la diferencia entre los tiempos de pico al final y al inicio de la cuenca.

$\mu$  representa la atenuación del pico y está relacionado con  $\epsilon$  como sigue:

$$\mu = \frac{\alpha \bar{Q}_p}{L} = \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \omega \Delta x \quad (3-5)$$

Por consiguiente:

$$\epsilon = \frac{1}{2} - \frac{\alpha \bar{Q}_p}{L \omega \Delta x} \quad (3-6)$$

Donde:

$\alpha$  — Es un coeficiente de atenuación del pico que depende de la pendiente principalmente y del área de la llanura de inundación.

$\bar{Q}_p$  — Gasto de pico promedio en el tramo.

$L$  — Longitud total del tramo por analizar.

Calculados  $\omega$ ,  $\bar{Q}_p$  y  $\alpha$  se obtienen  $K$  y  $\epsilon$  con las ecuaciones (3-4) y (3-6) y con ellos se calculan las siguientes constantes:

$$CC = K (1 - \epsilon) + \frac{1}{2} \Delta t$$

$$C_1 = (KE + 0.5 \Delta t) / CC$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= (-K\epsilon + 0.5 \Delta t)/CC & C_4 &= q\Delta t\Delta x/CC \\
 C_3 &= (K - K\epsilon - 0.5 \Delta t)/CC
 \end{aligned}
 \tag{3-7}$$

Donde:

$$q = \text{Gasto lateral en el tramo (m}^3/\text{s/m)}$$

El hidrograma de salida de cualquier tramo se obtiene con

$$O_j = C_1 I_{j-1} + C_2 I_j + C_3 O_{j-1} + C_4 \tag{3-8}$$

Esta ecuación se aplica a todos los tramos desde el instante en que se inicia el hidrograma hasta que este complete el recorrido por el cauce.

Obtención del coeficiente de atenuación del pico ( $\alpha$ ).

El parámetro  $\alpha$  depende del ancho y de las pendientes del cauce y se calcula como:

$$\alpha = \frac{1}{2\bar{W}_c} \frac{\sum_{m=1}^M \frac{L_m}{S_m^2}}{\left( \frac{1}{\bar{L}_m} \sum_{m=1}^M \frac{L_m}{S_m^{1/3}} \right)^3} \tag{3-9}$$

Donde:

$$\lambda = \frac{W_A}{\bar{W}_c}$$

$W_f = W_f(x)$  es el ancho del área de inundación.

$\bar{W}_c$  = Es el ancho medio del cauce.

$S = s(x)$  es la pendiente.

$L = \int_0^L dx$  es la longitud total del tramo.

Para la obtención del parámetro  $\alpha$  existen dos casos:

A) Para avenidas que no desbordan

Si no desborda  $W_f \approx \bar{W}_c \Rightarrow \lambda \approx 1$  y suponiendo que la pendiente es constante la Ec. (3-9) queda como:

$$\alpha = \frac{L}{2 \bar{W}_c S} \quad (3-10)$$

B) Para avenidas que desbordan:

Suponiendo una pendiente y un ancho de inundación constantes la Ec. (3-9) se simplifica como:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{L^2}{SA} \quad (3-11)$$

Donde:

$A$  — es el área total inundada en el tramo.



Para obtener el coeficiente de atenuación  $\alpha$ , como una función del gasto máximo  $Q$  de las áreas de inundación se requiere además los siguientes datos:

- Gasto máximo que no desborda.

Este dato se puede estimar a partir de la experiencia acumulada en el análisis de una gran cantidad de datos que conduce a la recomendación de Henderson (Ref. 9) en el sentido que se tome como gasto máximo que no desborda a aquel con un período de retorno de aproximadamente 1.4 años.

- Relación áreas inundadas-gastos.

Este dato constituye un paso intermedio necesario para contar con una relación de  $\alpha$  contra el gasto máximo de entrada, con la cual es posible realizar el tránsito contando sólo con el hidrograma de entrada.

Obtención de la velocidad de propagación del pico ( $\omega$ ).

Si  $T_p$  es el tiempo de viaje de la avenida máxima registrada, la velocidad de propagación del pico ( $\omega$ ) para una primera aproximación está dada por:

$$\omega_0 = \frac{L}{T_p} \quad (3-12)$$

Donde:

L— Es la longitud total del canal.

Obtenidos el coeficiente de atenuación del pico (  $\alpha$  ), el gasto pico (  $Q_p$  ) y la curvatura del pico, se puede corregir el valor de  $\omega$  .

Si no se tuviera alguna avenida registrada, la velocidad de propagación del pico  $\omega$  se podría suponer para una primera aproximación como:

$$\omega = 1.5 c \quad (3-13)$$

Esto de acuerdo con la teoría de la onda cinemática (Ref. 12).

Donde:

$$c = V_m + \sqrt{gy}$$

$V_m$  = Velocidad media en la estación hidrológica conocida.

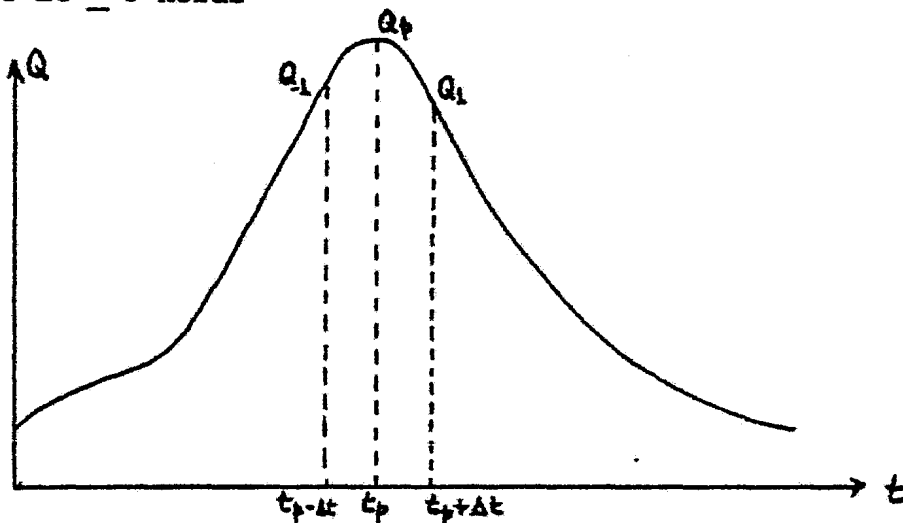
$g$  = Aceleración de la gravedad.

$y$  = Tirante

Obtención de la curvatura del pico en el hidrograma de entrada.

Primeramente hay que encontrar el tiempo de pico ( $t_p$ ), luego localizar el punto de ocurrencia del pico y marcar dos puntos a un intervalo ( $\Delta t$ ) uno a la izquierda y otro a la derecha de  $Q_p$  ( $Q_{-1}$ , y  $Q_1$  respectivamente).

$\Delta t$  queda definido como:  $\Delta t = \frac{t_p}{4}$  es conveniente que  $\Delta t \leq 3$  horas



Luego la curvatura del pico se obtiene a partir de

$$\frac{\partial^2 Q_p}{\partial t^2} = \frac{Q_1 + Q_{-1} - 2 Q_p}{(\Delta t)^2} \quad (3-14)$$

Por otro lado:

$$Q^* = \frac{\alpha}{\omega_0^3} Q_p \left| \frac{\partial^2 Q_p}{(\Delta t)^2} \right| \quad (3-15)$$

Luego se efectúa  $\frac{Q^*}{Q_p}$  y si este cociente es mayor que 0.1 entonces  $Q^*$  se redefine como:

$$Q_N^* = Q_p \left[ 1 - e^{-\left(\frac{Q^*}{Q_p}\right)} \right] \quad (3-16)$$

Entonces  $\omega_0$  se corrige con

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{2\alpha}{L^2} Q_N^* \quad (3-17)$$

Si  $\omega_1 \approx \omega_0$  entonces

Se obtiene el gasto promedio de pico ( $\bar{Q}_p$ ) como:

$$\bar{Q}_p = Q_p - \frac{1}{2} Q_N^* \quad (3-18)$$

Si  $\omega_1 \neq \omega_0$  entonces se sustituye  $\omega_0$  corregido ( $\omega_1$ ) en lugar de  $\omega_0$  en la Ec. (3-15) y se repite el cálculo tantas veces como sea necesario para que  $\omega_1 \approx \omega_0$

El siguiente paso es sustituir los valores de  $\alpha$ ,  $\omega$  y  $\bar{Q}_p$  en las Ecs. (3-4) y (3-6) y obtener  $K$  y  $\varepsilon$  con los cuales se pueden obtener las constantes de (3-7)  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  y al ser empleadas en la fórmula de recurrencia (3-8) se efectuará el tránsito.

## CAPITULO IV

### ANALISIS DE SENSIBILIDAD Y APLICACIONES

#### Ejemplo 4-1

Transitar el hidrograma sintético en un canal rectangular de 100 Kms. de longitud y 50 Mts. de ancho, con coeficiente de rugosidad de Manning de 0.035, pendiente promedio de  $1 \times 10^{-3}$ .

El hidrograma sintético que se presenta para la sección aguas arriba del tramo en estudio está definido por:

$$Q(t) = Q_b + Q_a \left[ \frac{t}{t_p} e^{(1 - \frac{t}{t_p})} \right]^\beta$$

Donde:

$$Q_b = 100 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_a = 800 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$t = a/c \text{ 3 Hrs.}$$

$$t_p = 24 \text{ Hrs.}$$

$$\beta = 16$$

Si se propone  $t$  a cada 3 Hrs. entonces  $Q(t)$  quedará:

$t$	$Q(t)$	$t$	$Q(t)$	$t$	$Q(t)$
0	100.00	39	185.86	78	100.00
3	100.00	42	138.03	81	100.00
6	100.03	45	115.52	84	100.00
9	102.69	48	105.90	87	100.00
12	136.39	51	102.11	90	100.00
15	274.96	54	100.71	93	100.00
18	537.77	57	100.23	96	100.00
21	797.92	60	100.07	99	100.00
24	900.00	63	100.02	102	100.00
27	812.76	66	100.00		
30	620.56	69	100.00		
33	423.72	72	100.00		
36	276.28	75	100.00		

Obtención del coeficiente de atenuación del pico ( $\alpha$ ) de acuerdo con la Ec. (3-10).

$$\alpha = \frac{L}{2 \bar{W}_c S} = \frac{100\ 000}{2 (50) 0.001}$$

$$\alpha = 1 \times 10^6$$

Obtención de la velocidad de propagación del pico ( $\omega$ ).

Dado que se conoce el tiempo de viaje de la avenida máxima registrada ( $T_p = 6.40$  Hrs. = 23 040 seg.) entonces para una primera aproximación  $\omega = \frac{100\ 000}{23\ 040} = 4.34$  m/s

Por otro lado, se sabe que el tiempo de pico ( $t_p = 24$  Hrs.) entonces se puede tomar  $\Delta t = \frac{24}{5} = 4.8$  Hrs. = 17 280 seg. con el que se puede definir  $Q_{-1}$  y  $Q_1$

$$Q_{-1} = Q (24 - 4.8) = 652.42 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_p = Q (24) = 900.00 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_1 = Q (24 + 4.8) = 702.90 \text{ m}^3/\text{s}$$

Luego sustituyendo en (3-14)

$$\frac{d^2 Q_p}{dt^2} = \frac{702.90 + 652.42 - 2(900)}{(17\ 280)^2} = -1.49 \times 10^{-6}$$

Y en la Ec. (3-15)

$$Q^* = \frac{1 \times 10^6}{(4.34)^3} 900 (1.49 \times 10^{-6}) = 16.40$$

$$\frac{Q^*}{Q_p} = 0.018 < 0.1$$

Como  $\frac{Q^*}{Q_p} < 0.1$  no se redefine  $Q^*$  por  $Q_N^*$ .

Se prueba  $\omega$

$$\omega_1 = \frac{1 \times 10^5}{23\ 040} - \frac{2(1 \times 10^6)}{(1 \times 10^5)^2} 16.40 = 4.34 - (0.0002)(16.40)$$

$$\omega_1 = 4.3367$$

La variación es mínima por lo que se toma  $\omega = 4.34$  m/s

$$\bar{Q}_p = Q_p - \frac{1}{2} Q^* = 900 - \frac{1}{2} 16.40 = 891.8 \text{ m}^3/\text{s}$$

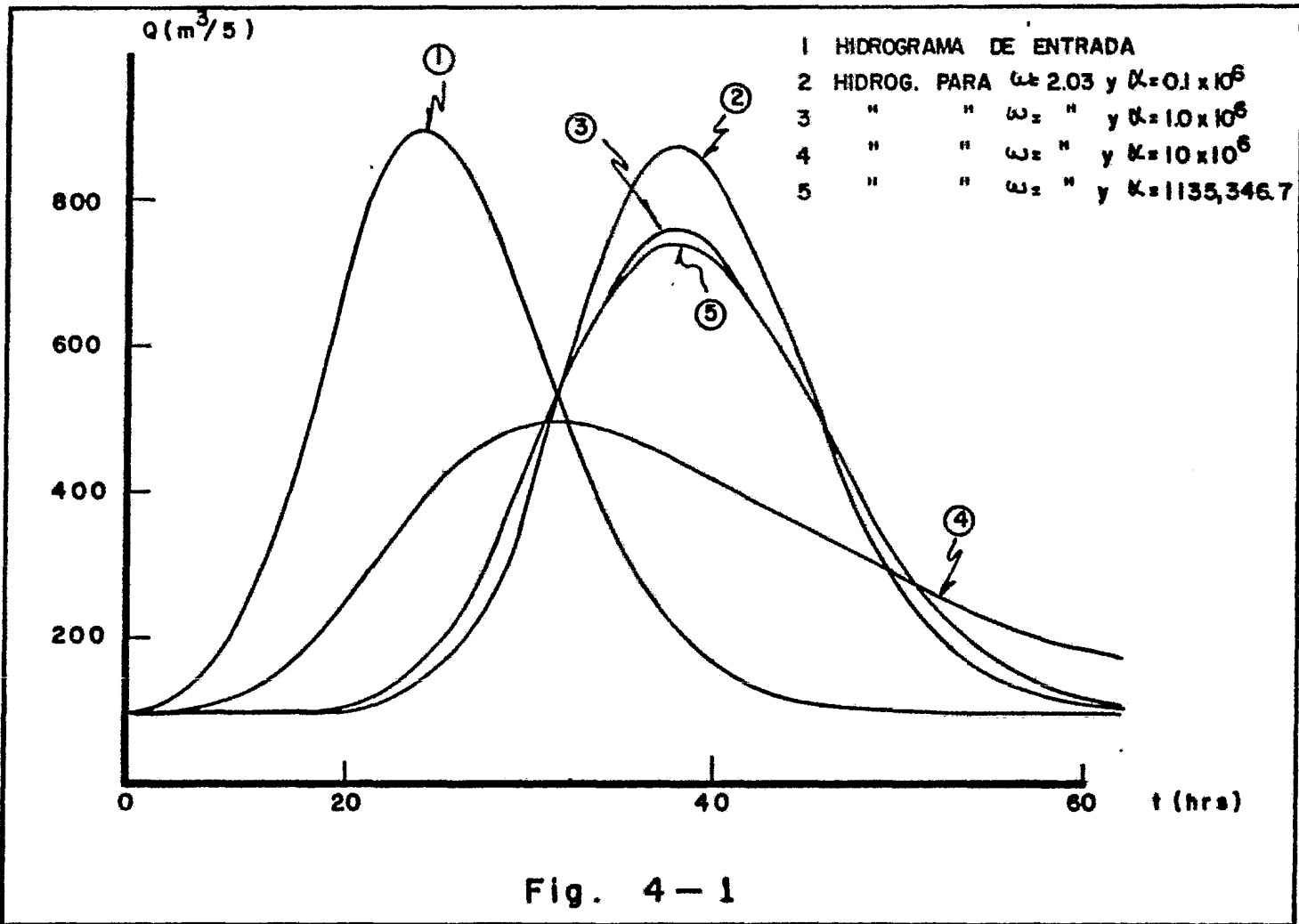
Una vez obtenidos los parámetros  $\alpha$ ,  $\omega$  y el gasto promedio  $\bar{Q}_p$  se puede seguir utilizando un programa de cálculo para tal efecto.

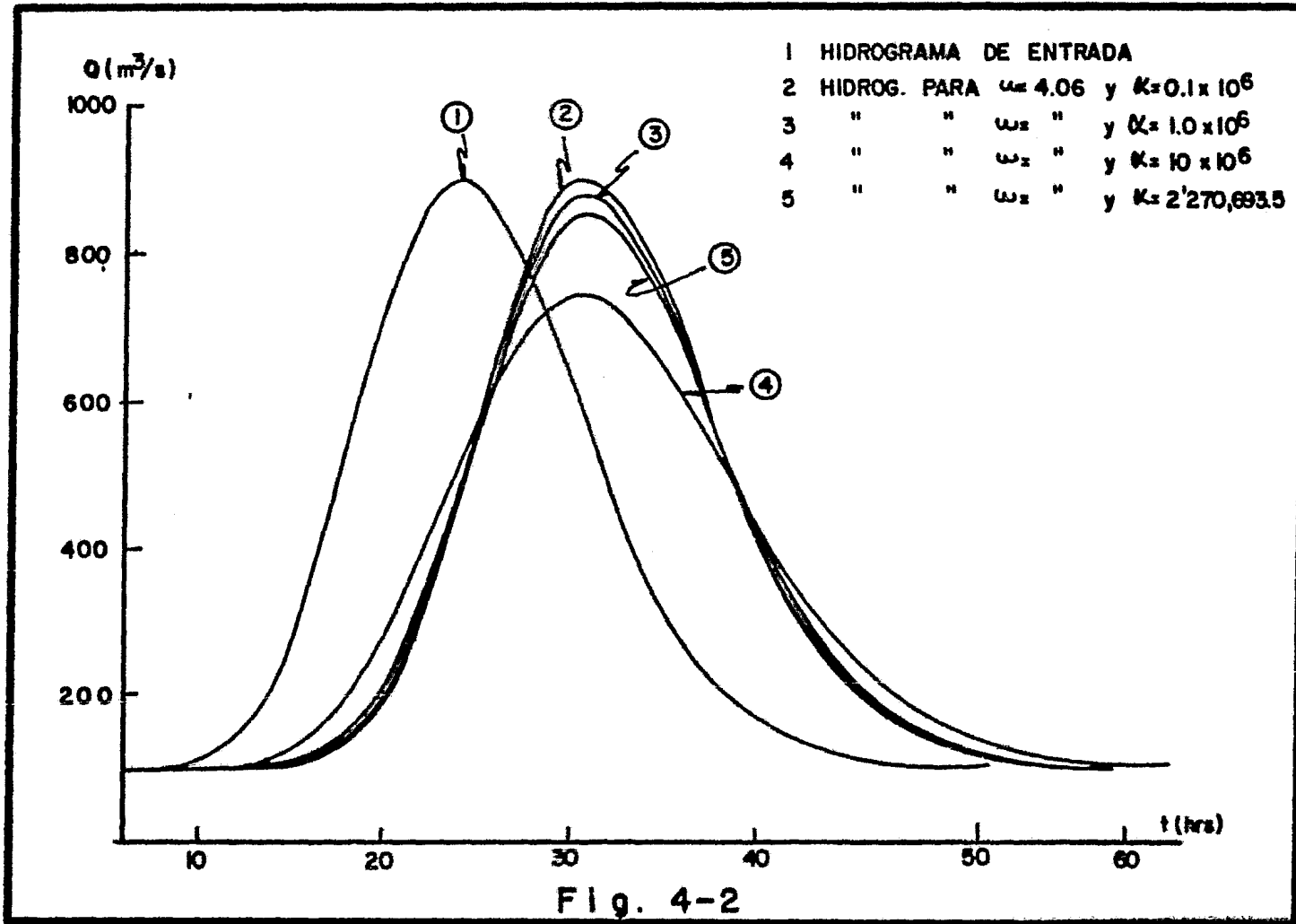
Por otro lado, se puede ver en la siguiente tabla como varía cada uno de los parámetros  $K$  y  $\epsilon$  cuando se mantiene  $\alpha$  y se varía  $\omega$  o viceversa.



$\alpha (x 10^6)$	$\omega$	$Q_p (m^3/s)$	$T_p (hrs)$	K	$\epsilon$
	2.03	878.20	37.60	4926	0.46
0.1	4.06	895.77	30.80	2463	0.48
	8.12	898.57	27.60	1231	0.49
	2.03	761.70	37.60	4926	0.06
1.0	4.06 (BASE)	875.90	30.80	2463	0.28
	8.12	895.77	27.60	1231	0.39
	2.03	497.05	31.60	4926	- 3.9
10.0	4.06	742.28	30.40	2463	- 1.7
	8.12	870.68	27.60	1231	- 0.61
$\omega$	$\alpha (x 10^6)$	$Q_p (m^3/s)$	$T_p (hrs)$	K	$\epsilon$
	0.1	878.20	37.60	4926	0.46
2.3	1.0	761.70	37.60	4926	0.06
	10.0	497.05	31.60	4926	- 3.9
	0.1	895.77	30.80	2463	0.48
4.6	1.0	875.90	30.80	2463	0.28
	10.0	742.28	30.40	2463	- 1.7
	0.1	898.57	27.60	1231	0.49
8.12	1.0	895.77	27.60	1231	0.39
	10.0	870.68	27.60	1231	- 0.61

TABLA - (4-1)





$Q(m^3/s)$

1000

800

600

400

200

20

40

60

$t$  (hrs)

① HIDROGRAMA DE ENTRADA

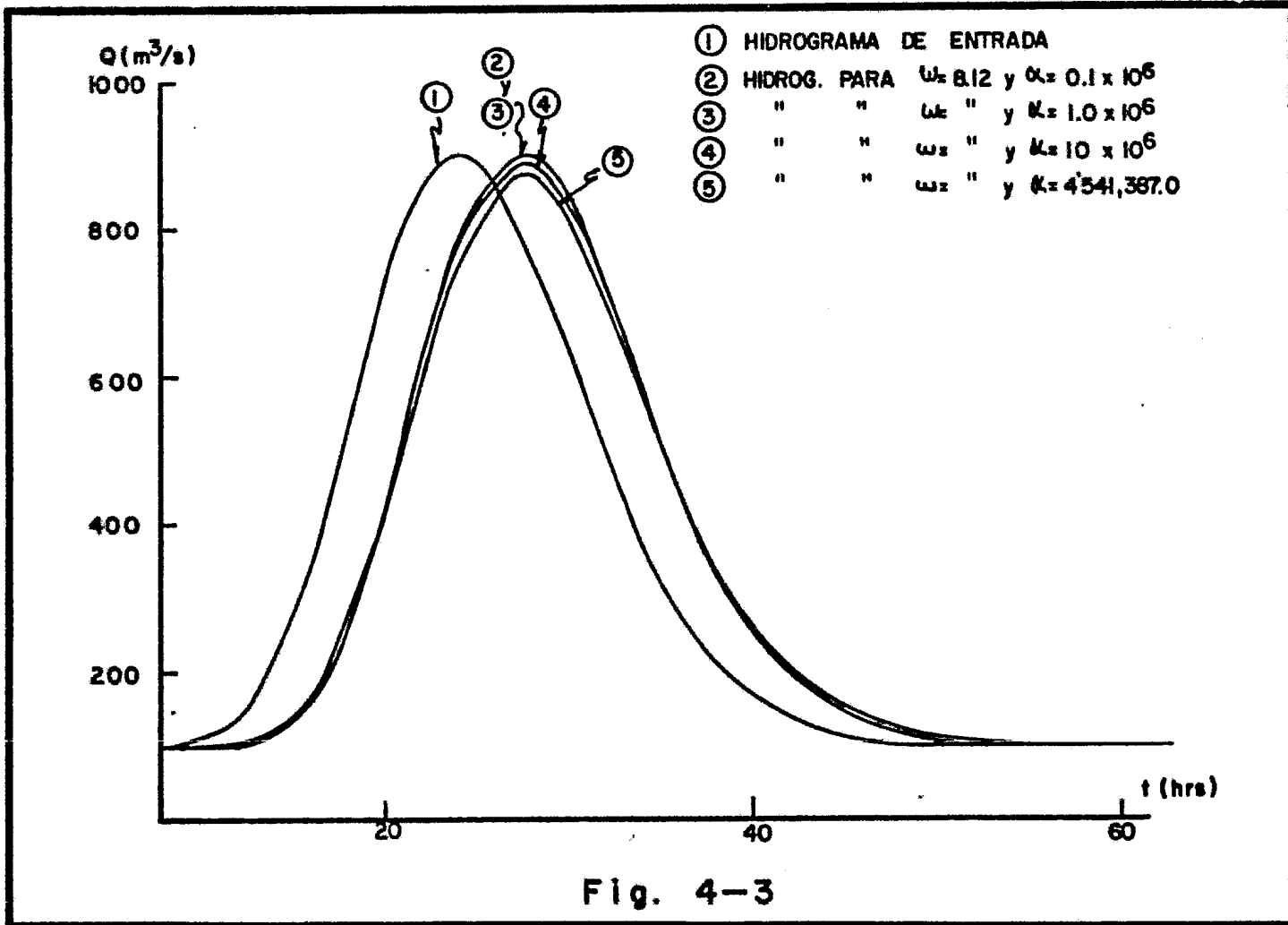
② HIDROG. PARA  $\omega = 8.12$  y  $\alpha = 0.1 \times 10^6$

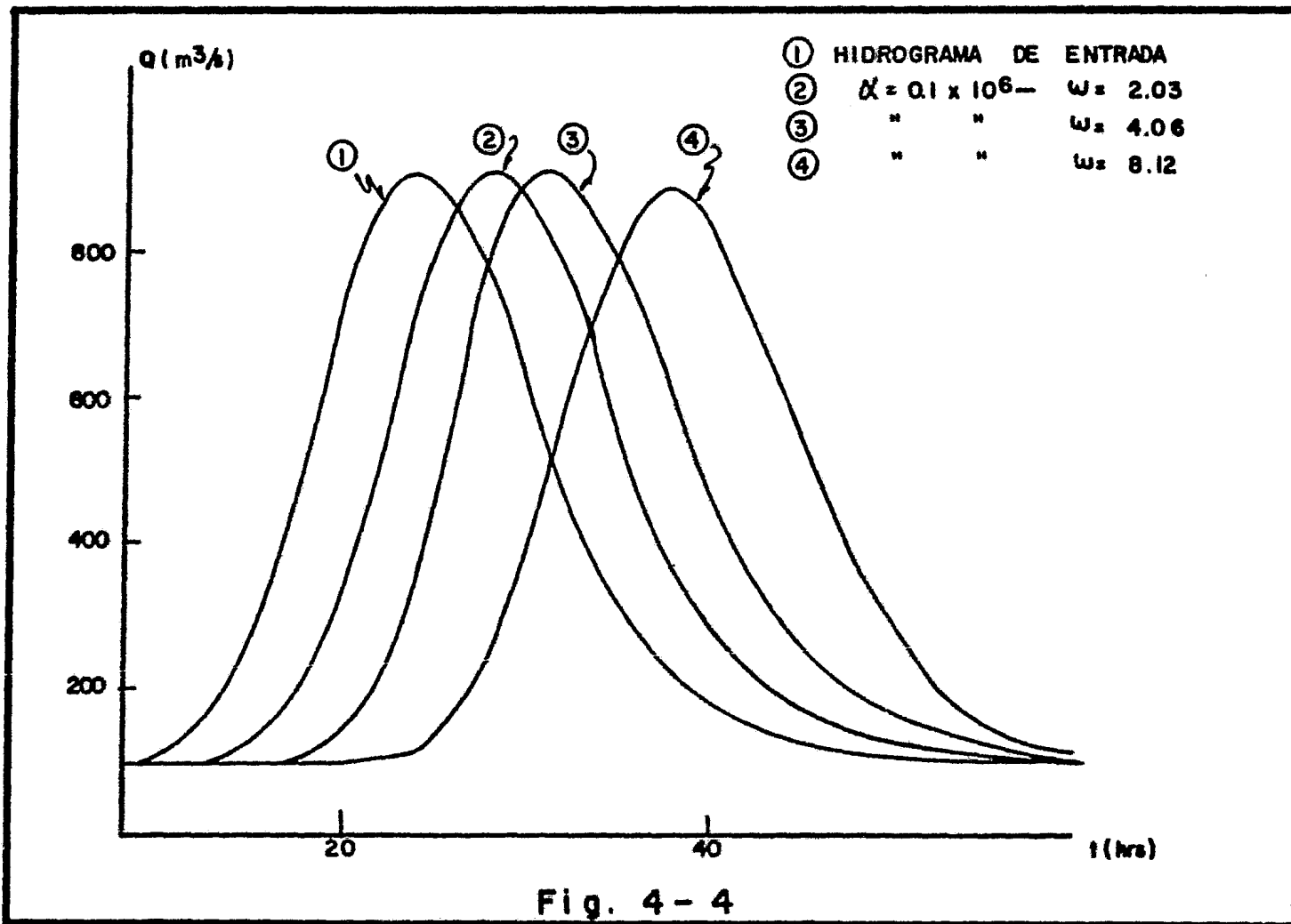
③ " "  $\omega = "$  y  $K = 1.0 \times 10^6$

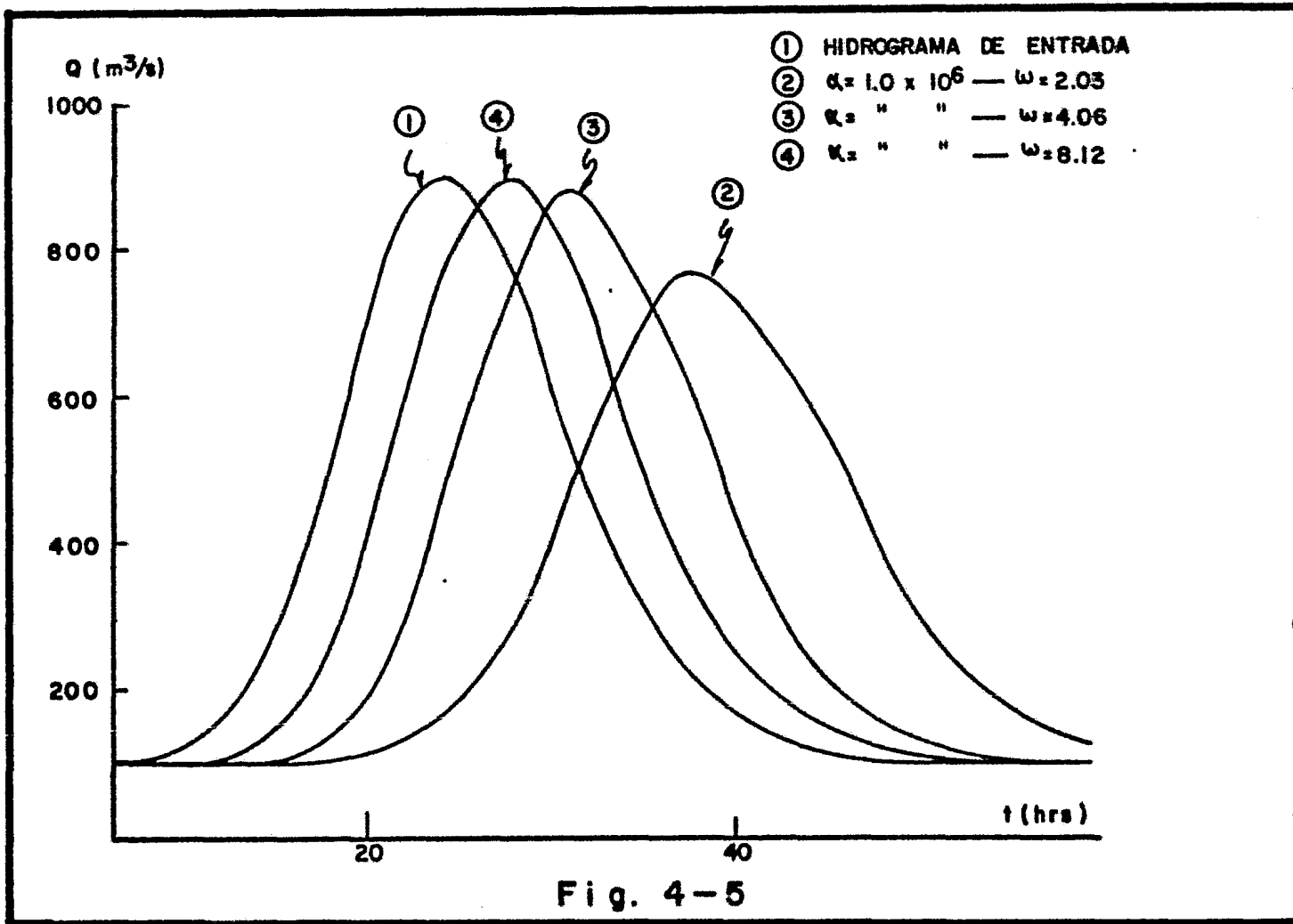
④ " "  $\omega = "$  y  $K = 10 \times 10^6$

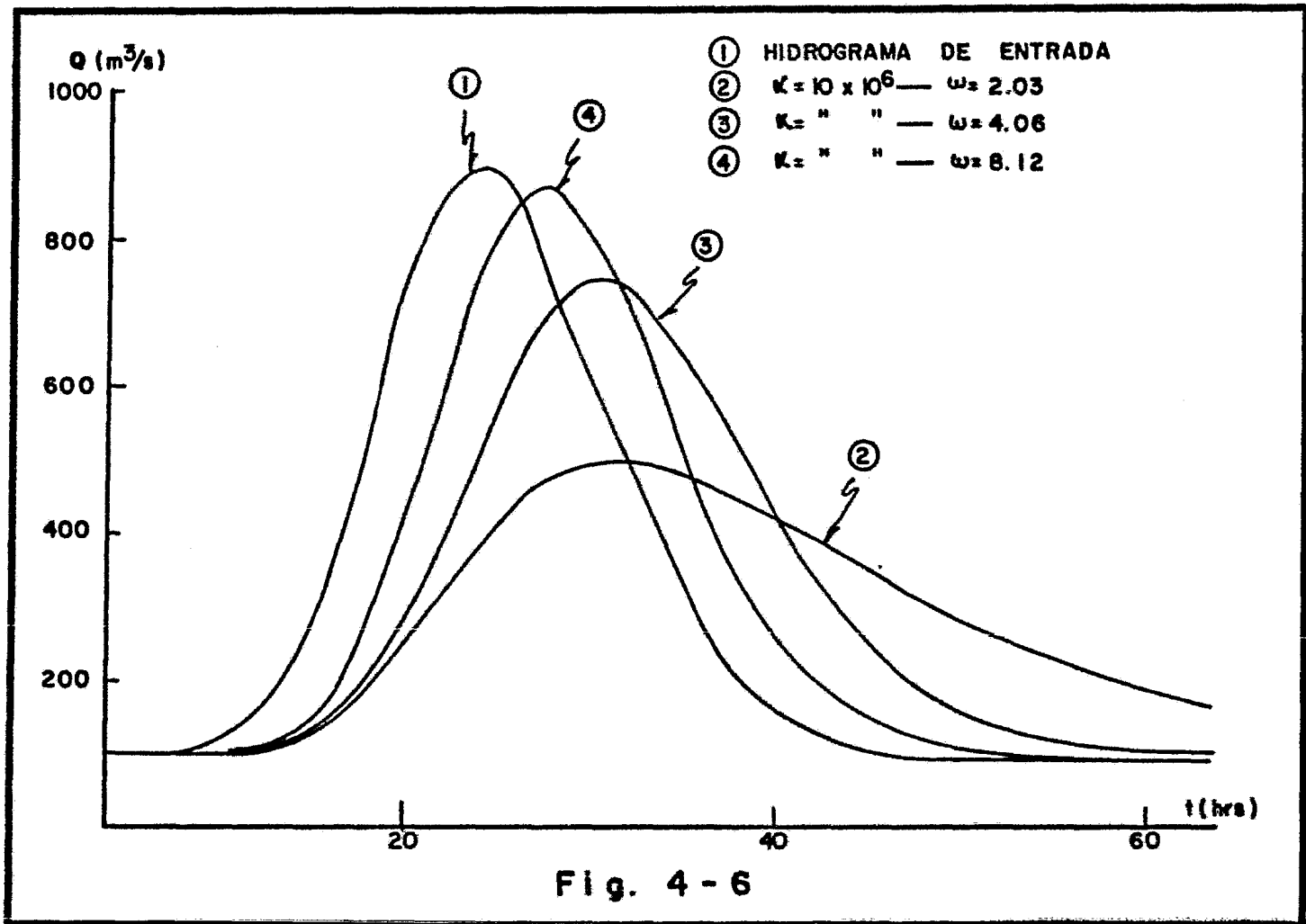
⑤ " "  $\omega = "$  y  $K = 4541,387.0$

Fig. 4-3









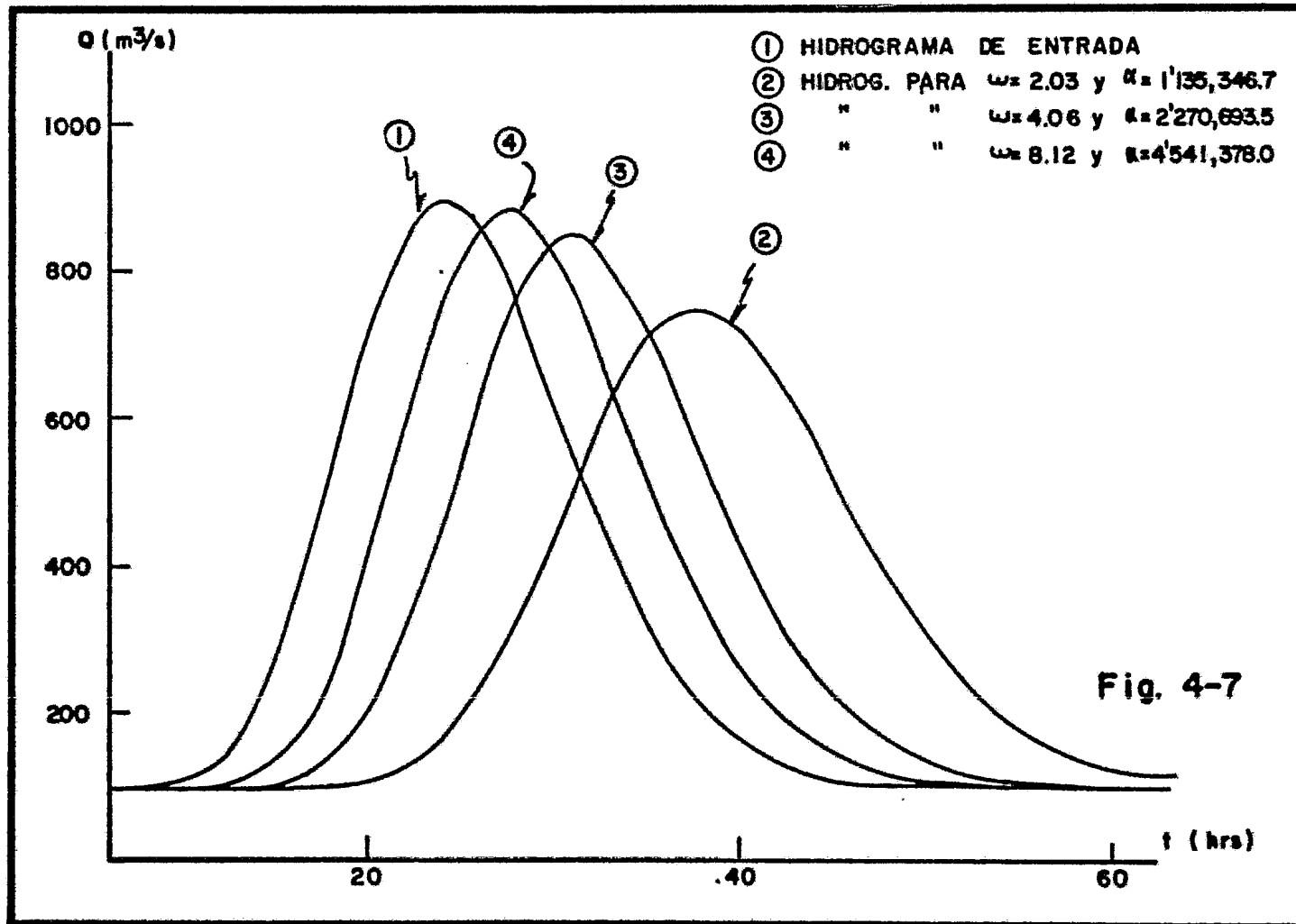
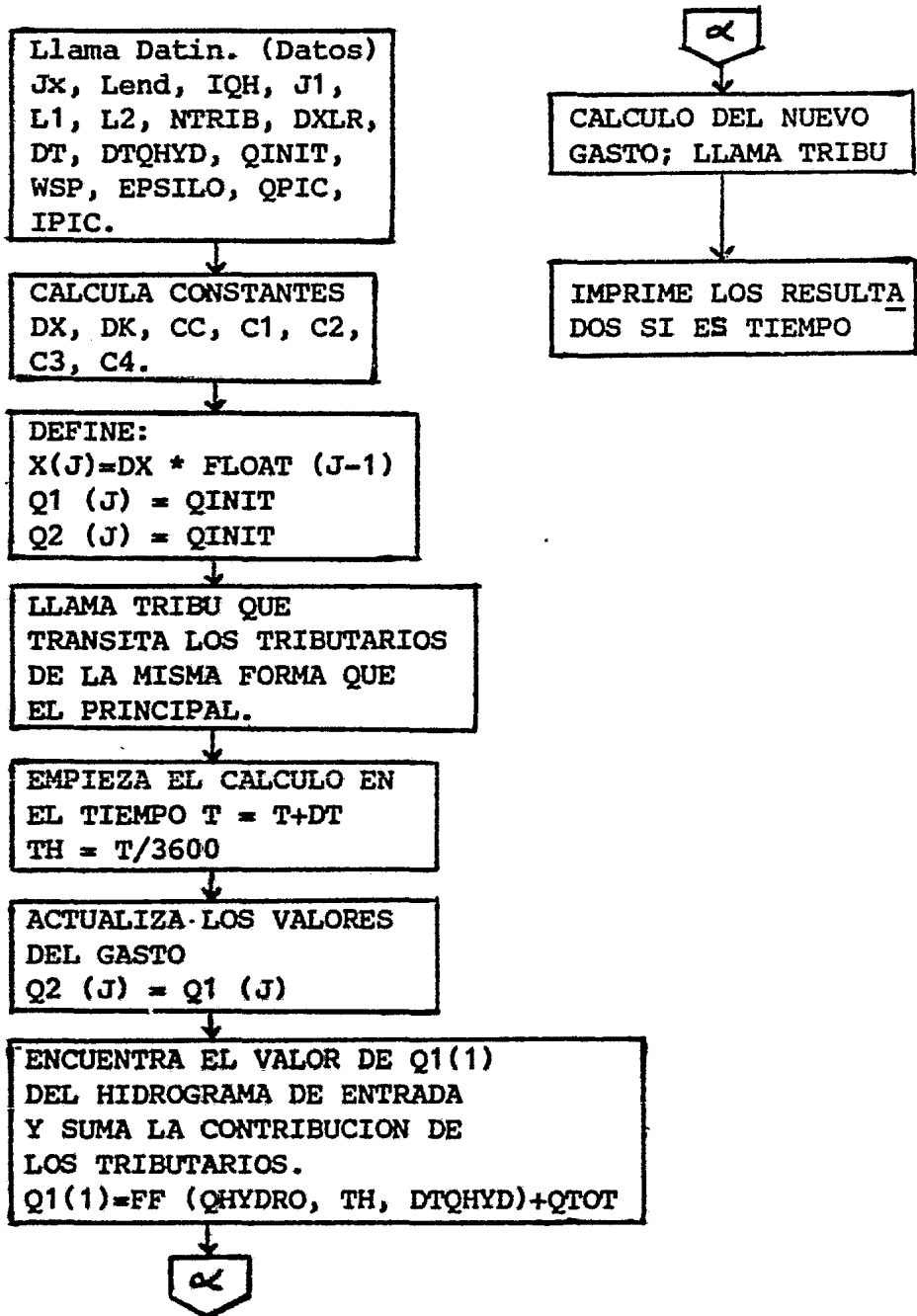




DIAGRAMA DE BLOQUES DEL PROGRAMA

MUSKINGUM/CUNGE



Donde:

- Jx = Número de nudos.
- LEND = Número de intervalos de tiempo.
- IQH = Número de puntos del hidrograma registrado aguas arriba.
- J1 = Los gastos a lo largo del tramo son escritos a J1 intervalos.
- L1 = Los gastos a lo largo del tramo son escritos cuando el número de intervalos de tiempo es igual a un múltiplo de L1.
- L2 = Sólo son escritos los gastos en el punto de salida.
- NTRIB = Número de tributarios.
- DXLR = Longitud del tramo.
- Dt = Intervalo de tiempo.
- DTQHYD = Intervalo de tiempo entre puntos sucesivos registrados para cada hidrograma específico.
- QINIT = Gasto inicial a lo largo del tramo.
- WSP = Valor de (Gasto Base)  $\frac{L}{T_p}$  y corregido
- $$\omega_p = \frac{1}{2} \frac{2\alpha}{L^2} Q *$$
- EPSILO = Valor de  $\alpha$
- QPIC = Gasto pico.
- TPIC = Tiempo de pico (  $T_p$  )

De la tabla (4-1) y de las figuras (4-1 a 4-7) se puede observar que a medida que  $\omega$  aumenta (manteniéndose  $\alpha$  constante)  $Q_p$  aumenta y  $T_p$  disminuye; asimismo  $K$  disminuye y  $\epsilon$  aumenta; ésto es lógico pues al aumentar la velocidad de propagación, el  $t_p$  se alcanzará más rápido y dado que el área bajo la curva del hidrograma es constante el  $Q_p$  será mayor cuando el  $t_b$  sea menor.

Asimismo como  $K$  es el tiempo característico al aumentar la velocidad de propagación  $\omega$  disminuye  $K$ , la variación de  $\epsilon$  es mínima, ya que es función de  $Q_p$  y de  $\omega$ .

Por otro lado, se observa que para valores de  $\alpha$  iguales a  $10 \times 10^6$   $\epsilon$  da valores negativos, lo cual no es lógico y se obtuvo como valores máximos de  $\alpha$  para que sea factible positivo los siguientes:

$\omega$	$\alpha$
2.03	1'135,346.7
4.06	2'270,693.5
8.12	4'541,387.0

Según Cunge, para asegurar la exactitud del método es conveniente tener en cuenta que luego de escoger un  $\Delta x$  aproximadamente igual a  $L/10$  y además al calcular el valor de  $\epsilon$  de la ecuación (3-6)  $\Delta x/\omega \Delta t$  debe caer debajo de la curva mostrada en la fig. (4-8).

CURVA PARA  $\Delta X / (\omega \Delta t)$  VS.  $\epsilon$   
TOMADA DE CUNGE, 1969

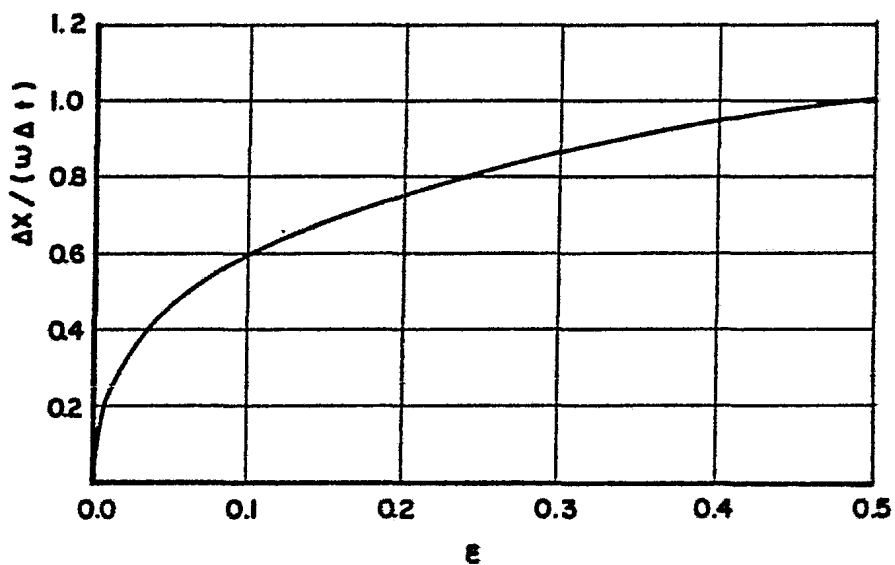


Fig. 4-8

Haciendo ciertas modificaciones, el programa original de Muskingum-Cunge se puede utilizar para transitar una avenida en un conducto cerrado tal como se verá en el siguiente ejemplo.

#### Ejemplo 4-2.

Se desea transitar una avenida que se presenta en el río Churubusco con un periodo de retorno de 25 años, considerando la afluencia de cuatro plantas de bombeo (tributarios) y considerándolos como hidrogramas laterales:

Se tomará en cuenta en la calibración el hidrograma calculado que se presenta en la Fig. 4-9 proporcionado por "DIRAC".

A partir de la información proporcionada por el Departamento del Distrito Federal se obtuvo un resumen de las características geométricas (longitudes, pendientes, secciones) y aportaciones laterales del Río Churubusco como a continuación se muestra.

Las aportaciones de las plantas de bombeo se presentan en la siguiente tabla mediante sus hidrogramas.

HIDROGRAMA DE PUNTA  
TR = 25 AÑOS

T(min)	Q(m <sup>3</sup> /s)	P.B.1	P.B.2	P.B.3	P.B.4
		Q(m <sup>3</sup> /s)	Q(m <sup>3</sup> /s)	Q(m <sup>3</sup> /s)	Q(m <sup>3</sup> /s)
0	11.0	0.0	0.0	3.3	0.0
10	11.0	0.0	0.0	3.3	0.0
20	11.0	0.0	0.0	3.3	0.0
30	18.4	0.4	0.6	4.9	0.8
40	25.6	0.6	1.0	9.4	1.6
50	32.6	0.8	1.4	13.2	2.2
60	39.4	0.9	1.7	17.4	2.8
70	43.8	1.1	2.0	20.1	3.4
80	48.0	1.4	2.4	22.2	4.2
90	49.0	3.2	2.8	24.4	4.8
100	48.0	5.2	3.2	26.4	6.0
110	44.4	7.2	3.6	28.0	7.2
120	37.8	8.2	4.0	29.8	9.2
130	31.6	8.2	4.4	31.6	9.8
140	27.0	7.8	4.8	33.0	9.8
150	22.4	7.2	5.3	34.4	9.8
160	18.0	6.6	5.0	35.5	9.8
170	15.0	6.0	5.0	36.3	9.8
180	11.8	5.4	5.0	37.4	9.8
190	11.5	4.8	5.0	37.4	9.8
200	11.2	4.0	5.0	36.6	9.8
210	11.0	3.4	5.0	35.8	9.8
220	11.0	2.8	5.0	35.1	9.8
230	11.0	2.2	5.0	34.8	9.8
240	11.0	1.8	5.0	34.4	9.8

250	11.0	1.7	5.0	33.9	9.8
260	11.0	1.6	5.0	33.7	9.8
270	11.0	1.6	5.0	33.2	9.8
280	11.0	1.6	5.0	32.7	9.8
290	11.0	1.6	5.0	32.3	9.8
300	11.0	1.6	5.0	32.0	9.8
310	11.0	1.6	5.0	31.6	9.8
320	11.0	1.5	5.0	31.2	9.8
330	11.0	1.5	5.0	30.5	9.8
340	11.0	1.5	5.0	30.2	9.8
350	11.0	1.5	5.0	29.7	9.8
360	11.0	1.4	5.0	29.3	9.0
370	11.0	1.4	5.0	28.9	8.8
380	11.0	1.4	5.0	28.5	6.4
390	11.0	1.4	5.0	28.2	4.2
400	11.0	1.4	5.0	27.7	3.3
410	11.0	1.4	5.0	27.4	3.3
420	11.0	1.4	5.0	27.0	3.3
430	11.0	1.3	5.0	26.6	3.2
440	11.0	1.3	4.6	26.2	3.2
450	11.0	1.3	3.6	25.8	3.2
460	11.0	1.2	2.6	25.4	3.2
470	11.0	1.2	1.6	25.3	3.2
480	11.0	1.2	1.6	24.6	3.1
490	11.0	1.2	1.6	24.2	3.1
500	11.0	1.1	1.6	23.8	3.1
510	11.0	1.0	1.6	23.4	3.1
520	11.0	1.0	1.6	23.0	3.1

La longitud de entubado del Río Churubusco es de 14 350 m. y está dividido en tres partes debido a sus características de sección y pendiente; a saber

	TRAMO	PENDIENTE (S)	DIAMETRO ( $\phi$ ) ( m )
I	0+000 $\rightarrow$ 3+750	0.0022	3.50
II	3+750 $\rightarrow$ 8+000	0.0003	6.00
III	8+000 $\rightarrow$ 14+350	0.0004	6.00

Luego el ancho promedio de la conducción, suponiendo que trabaja a medio tubo estará dada por:

$$W_c = \left( \frac{\phi_1 L_1 + \phi_2 L_2 + \phi_3 L_3}{L_T} \right)$$

$$L_1 = 3750 \text{ m.} \quad \phi_1 = 3.50 \text{ m.}$$

$$L_2 + L_3 = 10600 \text{ m.} \quad \phi_2 \text{ y } \phi_3 = 6.00 \text{ m.}$$

$$\bar{W}_c = \left( \frac{3.5 (3750) + 6 (10600)}{14350} \right)$$

$$\bar{W}_c = 5.35 \text{ m.}$$

#### OBTENCION DE LOS PARAMETROS

a) Parámetro de atenuación del pico ( $\alpha$ )



$$\alpha = \frac{1}{2\bar{W}_c} \left[ \frac{1}{L} \sum_{m=1}^M \frac{L_m}{S_m^{1/3}} \right]^{-3} \frac{M}{\sum_{m=1}^M} \frac{L_m}{S_m^2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{2(5.35)} \left[ \frac{1}{14350} (178,502) \right]^{-3} (8.77 \times 10^{10})$$

$$\alpha = 4'258,358$$

b) Parámetro de velocidad de propagación del pico ( $\omega$ ).

Para una primera aproximación se puede deducir la velocidad de Manning dada por:

$$V_m = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}$$

$$\bar{S} = \frac{(0.0022 (3750) + 0.0003 (4250) + 0.0004 (6350))}{14350}$$

$$\bar{S} = 0.0008 \quad \bar{S}^{1/2} = 0.029$$

Suponiendo que la conducción trabaja a medio tubo, se toma para un primer cálculo el ancho promedio  $\bar{W}_c = 5.35$  m.

$$A = \frac{\pi}{2} y^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{5.35}{2}\right)^2 = 11.24 \text{ m}^2$$

$$P = \pi y = \pi \left(\frac{5.35}{2}\right) = 8.40 \text{ m}$$

$$R = \frac{A}{P} = \frac{11.24}{8.40} = 1.34 \text{ m} \Rightarrow R^{2/3} = 1.21 \text{ m}$$

$$\therefore v_m = \frac{1}{0.013} (1.21) (0.029) = 2.7 \text{ m/s}$$

De acuerdo con la teoría de la onda cinemática (Ref. 12), la velocidad de propagación del pico es del orden de una vez y media la velocidad media del agua, de modo que:

$$\omega_0 = 1.5 v_m$$

$$\omega_0 = 1.5 (2.7) = 4.05 \text{ m/s}$$

Dado que el gasto de pico cambia al recorrer el río, el valor de  $\omega$  que se use deberá ser el promedio a lo largo del tramo. Para estimar este promedio, el valor de  $\omega_0$  obtenido con la ecuación anterior se corrige mediante el procedimiento que se describe a continuación.

Para el hidrograma dado el gasto pico =  $49 \text{ m}^3/\text{s}$

La curvatura del hidrograma se calcula aproximadamente como

$$\frac{d^2 Q_p}{\Delta t^2} = \frac{Q_1 + Q_{-1} - 2Q_p}{\Delta t^2}$$

Ahora si  $\Delta t$  es del orden de  $t_p / 5$  y  $t_p$  según los datos es de 70 min. = 4200 seg.

$$\therefore t_p / 5 = 840 \text{ seg.} = \text{se tomará } \Delta t = 20 \text{ min.}$$

$$\text{Entonces : } Q_{-1} = Q(70) = 43.8 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_1 = Q(110) = 44.4 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\therefore \frac{d^2 Q_P}{\Delta t^2} = \frac{44.4 + 43.8 - 2(49)}{(1200)^2} = \frac{-9.8}{1.44 \times 10^6}$$

$$\left| \frac{d^2 Q_P}{\Delta t^2} \right| = 6.8 \times 10^{-6}$$

$$Q^* = \frac{\alpha_P}{\omega^3} Q_P \left| \frac{d^2 Q_P}{\Delta t^2} \right| = \frac{1 \times 10^6}{(4.05)^3} (49) (6.8 \times 10^{-6})$$

$$Q^* = 5.00$$

$$Q^* \text{ se redefine si } \frac{Q^*}{Q_P} > 0.1$$

$$\frac{Q^*}{Q_P} = \frac{5}{49} = 0.102 \approx 0.1$$

Esto indica que no habrá corrección y se acepta  $\omega = 4.05$ .

$$Q_M = Q_P - 0.5 Q^* = 49 - 0.5 (5) = 46.5 \text{ m}^3/\text{s}$$

Según Cunge (Ref. 2) es recomendable que el valor de  $\frac{\Delta x}{\omega \Delta t}$  quede bajo la curva de la Fig. (4-8), en este caso dado que  $\Delta x = 1435$ ,  $\omega = 4.05$  y

$$\epsilon = 0.5 \left( 1 - \frac{2\alpha Q_M}{\omega L^2} \right) = 0.5 \left( 1 - \frac{2 \times 10^6 \times 46.5}{4.05 \times (14350)^2} \right)$$

$$\epsilon = 0.44 \rightarrow \text{ en la curva } 0.97$$

$$\therefore \frac{1435}{4.05 \Delta t} = 0.97 \quad \Delta t = \frac{1435}{4.05 \times 0.97}$$

$$\Delta t = 365.30$$

Cabe aclarar que debido a la reciente implementación del método de Muskingum-Cunge en el tránsito de avenidas en conductos cerrados tiene un grado de exactitud menor que el desarrollado en canales abiertos, regulares o naturales, por lo que es necesario encontrar relaciones más precisas entre las características geométricas y los parámetros de cálculo que el método necesita.

Por lo anteriormente expuesto, al obtener el valor del parámetro de atenuación,  $\sigma$ , sólo nos fija el orden de magnitud de dicho parámetro, en este caso se creyó conveniente tomar  $\sigma = 1 \times 10^6$  en lugar de los 4'258,358 que se obtienen directamente del procedimiento recomendado por Cunge, puesto que es el valor con el que se aproxima más el hidrograma predicho al calculado.

A manera de comparar los hidrogramas de salida obtenidos al transitar con el programa "TUAVE" (DIRAC) y con el programa "MUSKIN" (Instituto de Ingeniería) se sumaron el hidrograma de punta y los hidrogramas laterales obteniendo el hidrograma A de la Fig. 4-1, el cual como se puede observar no sufre ningún desfaseamiento ni atenuación alguna, puesto que no se transita.

El hidrograma que resulta de la suma de los otros es el siguiente:

T(min)	Q(m <sup>3</sup> /s)	T(min)	Q(m <sup>3</sup> /s)
0	14.30	270	60.60
10	14.30	280	60.10
20	14.30	290	59.70
30	25.10	300	59.40
40	38.20	310	59.00
50	50.20	320	58.50
60	62.20	330	57.80
70	70.40	340	57.50
80	78.20	350	57.00
90	84.20	360	55.70
100	88.80	370	55.10
110	90.40	380	52.30
120	89.00	390	49.80
130	85.60	400	48.40
140	82.40	410	48.10
150	79.10	420	47.70
160	74.90	480	47.10
170	72.10	440	46.30
180	69.40	450	44.90
190	68.50	460	43.40
200	66.60	470	42.30
210	65.00	480	41.50
220	63.70	490	41.10
230	62.80	500	40.60
240	62.00	510	40.10
250	61.40	520	39.70
260	61.10		

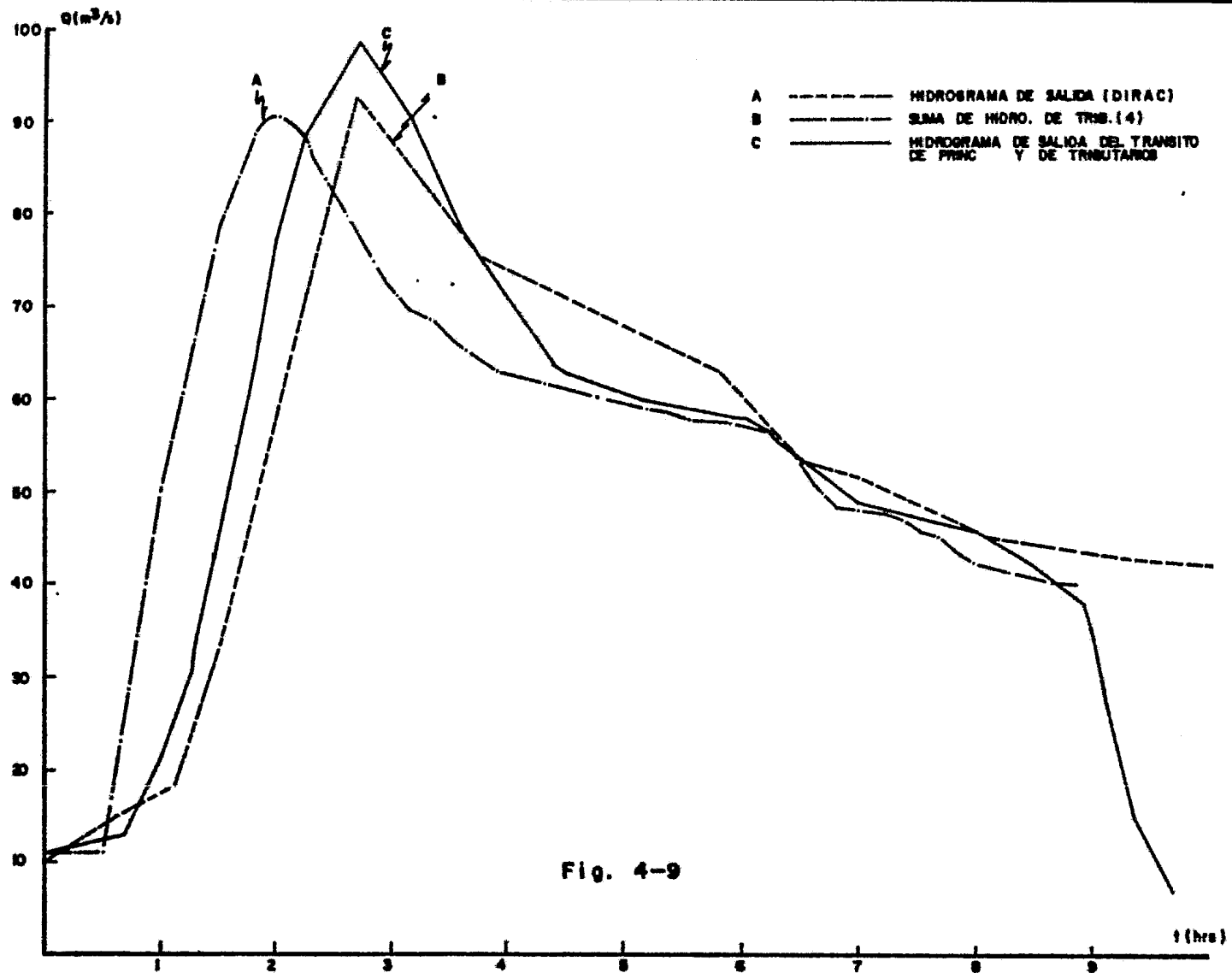


Fig. 4-9

A continuación se presenta unas tablas, mostrando el análisis de sensibilidad desarrollado para este caso acompañado de sus perspectivas gráficas, de los cuales se puede deducir que para determinados valores de  $\alpha$  y  $\omega$  se obtienen valores de epsilon negativos, lo que físicamente no es posible.

$\alpha$	$\omega$	EPSILO	WSP	QASTN	QCON
$0.1 \times 10^6$	2.02	0.387	2.016	4.049	46.976
	4.05	0.442	4.050	0.500	48.750
	8.10	0.471	8.100	0.062	48.969
$1.0 \times 10^6$	2.02	-2.754	0.679	6.981	45.510
	4.05	-0.128	3.667	3.185	47.408
	8.10	0.208	8.094	0.626	48.687
$10 \times 10^6$	2.02	-1.307	12.966	1.522	48.239
	4.05	0.358	168.061	0.001	49.000
	8.10	-5.965	3.544	3.646	47.177

- ① HIDROGRAMA DE ENTRADA (PRINCIPAL)
- ②  $M=2.02$   $K=0.1 \times 10^8$
- ③  $M=4.05$   $K=$  " "
- ④  $M=8.10$   $K=$  " "

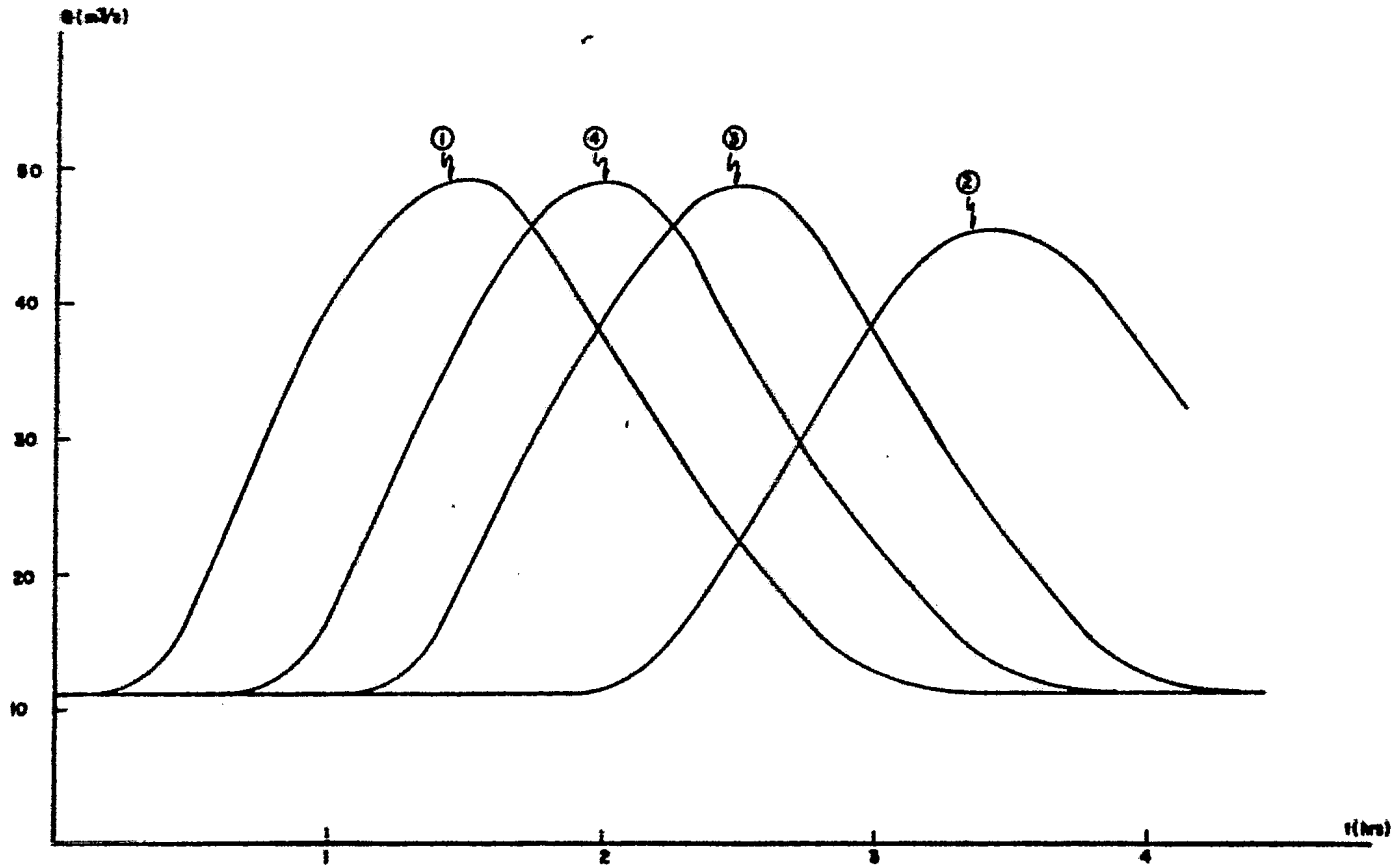


Fig. 4-10



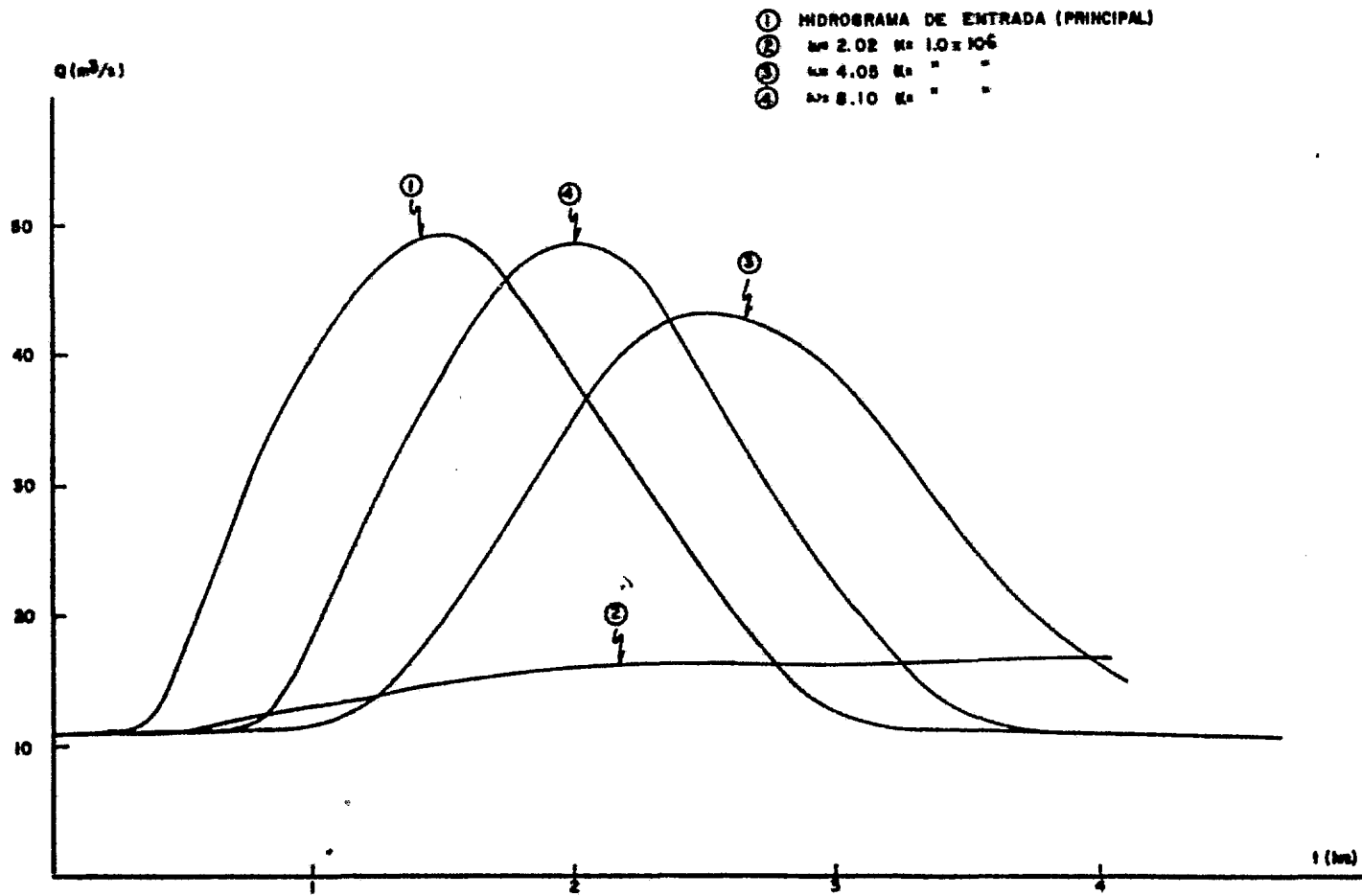


Fig. 4-11

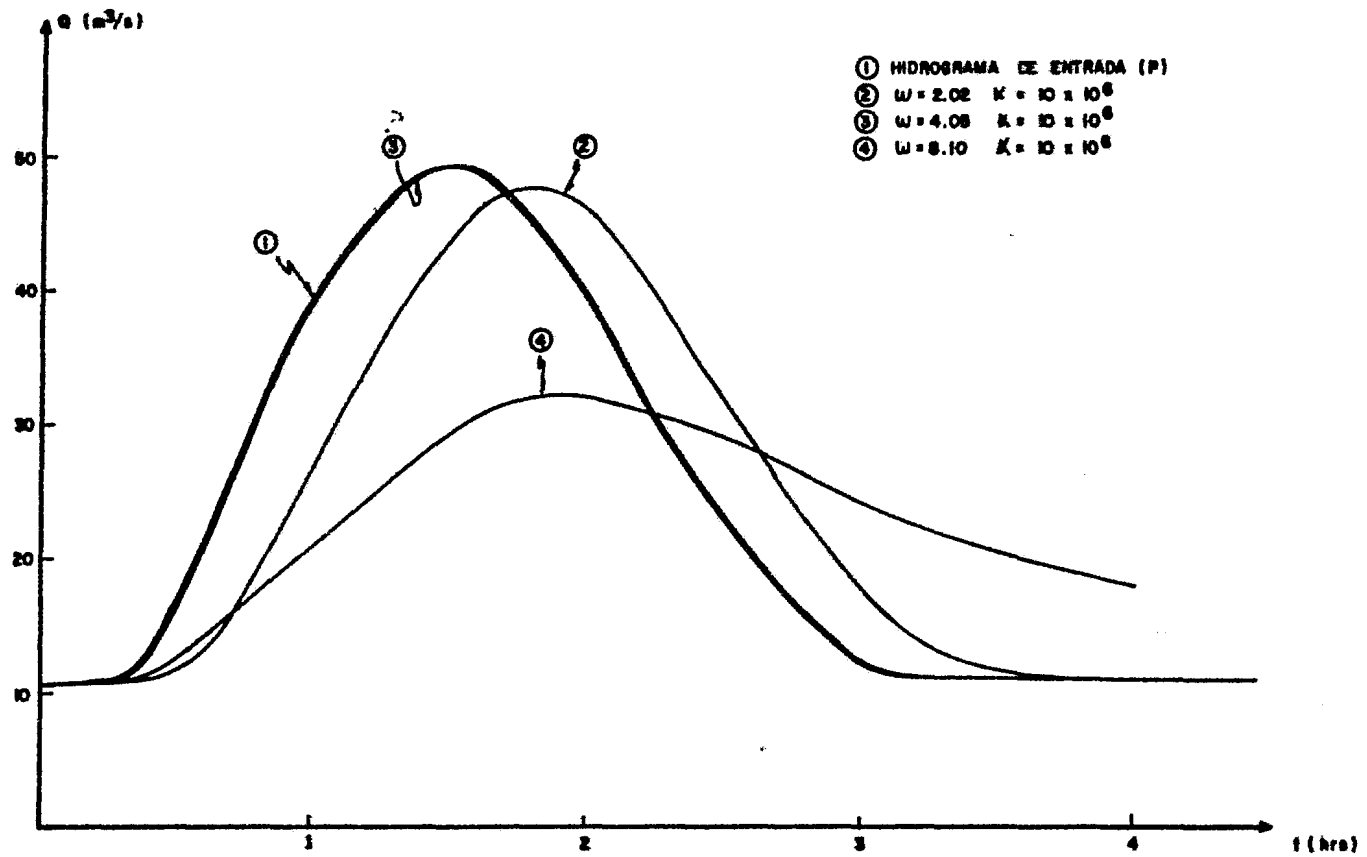


Fig. 4-12

## CAPITULO V

### CONCLUSIONES

El tránsito de avenidas en cauces básicamente es útil para determinar la duración de la avenida, las variaciones del gasto, velocidades y tirantes a lo largo del cauce y así poder determinar la avenida de diseño, la cual resulta de gran importancia para tomar medidas preventivas y como base en la construcción de obras hidráulicas.

Al comparar los métodos hidráulicos con los métodos hidrológicos para transitar avenidas en cauces, se hace necesario tomar en cuenta las condiciones de exactitud y la facilidad de aplicación de los mismos.

Resumiendo, los métodos hidráulicos tienen las siguientes características:

- Se basan en la solución de las ecuaciones completas de Saint-Venant.
- Requieren información detallada de rugosidades, geometría del cauce, topografía de la llanura de inundación, condiciones de frontera, además técnicas numéricas complejas y con alto requerimiento de memoria de cómputo.
- Describen en forma más precisa el proceso del tránsito, tanto en el espacio como en el tiempo.

Mientras que los métodos hidrológicos poseen las siguientes ventajas:

- Se pueden resolver por medio de gráficas, semiempíricamente, con métodos de caja negra o en forma numérica.
- Son más sencillos, requieren menos datos físicos y menor tiempo de cómputo.

También cabe señalar las desventajas de estos últimos que son:

- No consideran los efectos locales de cambios en el perfil de la superficie libre del agua (remansos, efectos de mareas).
- Generalmente dan sólo hidrogramas como resultados y el cálculo de niveles debe hacerse por separado.
- No toman en cuenta los ingresos laterales que existen en el cauce.
- La exactitud de sus resultados es menor.

En general los métodos hidrológicos de tránsito de avenidas son bastante utilizados, ya que éstos son sencillos en su aplicación, no requieren de gran información y pueden dar buenos resultados bajo ciertas condiciones.

La selección del método más apropiado para transitar una avenida depende en mucho de la experiencia y básicamente es una optimización entre la identificación del problema, los datos disponibles de la geometría del cauce y avenidas previas y la información requerida como respuesta.

Los base de los métodos de Muskingum y similares, suponen que la ecuación dinámica puede ser reemplazada por una relación algebraica entre el almacenamiento y la entrada y salida del flujo al tramo.

Es importante señalar que la atenuación del pico de descarga puede ser originada por la difusión inducida por la pendiente de la superficie del agua, la contribución de los términos de aceleración y convección de la ecuación de cantidad de movimiento, los cuales varían directamente con el número de Froude (Henderson) y por otro lado, Forchheimer demostró que la atenuación está directamente relacionada con la curvatura del pico del hidrograma aguas arriba del tramo.

Sin embargo, la atenuación del pico es en forma aproximada inversamente proporcional al cuadrado de la pendiente de plantilla, es decir, que la magnitud de la atenuación en cauces de gran pendiente no es tan importante como en los de pequeña pendiente.

Así, como se demuestra en la Fig. (2-6) la atenuación es cada vez menor conforme se avanza hacia aguas abajo, puesto que al transitar consecutivamente el hidrograma se va regulando y la curvatura del pico es menor.

El resultado de la onda de flujo aguas abajo es comúnmente descrita por la cantidad de traslación, ésto es, el tiempo de retraso y por la cantidad de atenuación o reducción del pico de descarga.

El método Muskingum considerado un método aproximado de caja negra necesita que sus parámetros sean obtenidos a partir de tránsitos de avenidas anteriores, por el contrario este método al ser modificado por Cunge puede obtener los valores de los parámetros de datos físicos relevantes sin necesidad de tener un hidrograma medido aguas abajo y puede aplicarse por pequeños tramos.

El método básico de Muskingum al ser perfeccionado por Cunge esencialmente lo convierte de una teoría hidrológica en un método basado en principios hidráulicos.

Una ventaja muy importante del método Muskingum-Cunge sobre los métodos de difusión es la de poder transitar una avenida en cauces con afluencia de tributarios sin dificultad, motivo por el cual será de mucha utilidad en el tránsito de avenidas en colectores de drenaje una vez que se afine bien la obtención de los parámetros en estos casos.

El método Muskingum-Cunge obtiene la atenuación del pico de descarga con un alto grado de precisión.

Para asegurar la exactitud del método es conveniente escoger un intervalo ( $\Delta t$ ) aproximadamente igual a  $L/10$  y además calcular el valor de  $\epsilon$  de la Ec. 3-6 y luego  $\frac{\Delta x}{\omega \Delta t}$  debe caer debajo de la curva mostrada en la figura 4-8.

Es recomendable para utilizar el método Muskingum-Cunge con confianza, el tener mediciones de hidrogramas en algunos puntos del tramo en estudio, al menos para una avenida. Dado que en el ejemplo 4-1 no se contaron con ellas, se determinó el valor más probable de los parámetros del modelo y se variaron dichos parámetros en un rango factible físicamente con el objeto de observar las variaciones de los resultados.

## CAPITULO VI

### BIBLIOGRAFIA

- REF. ( 1)            McCarthy G. T. (1938). The Unit Hydrograph and Flood Routing. Reporte (no publicado) presentado en la conferencia de la North Division, U. S. Army Corps of Engineers.
- REF. ( 2)            Cunge J. A. (1969). "On the Subject of a Flood Propagation Method". Journal of Hydraulic Research, I.A.H.R., Vol. 7, pp. 205-230.
- REF. ( 3)            Hayami, S. "On the Propagation of Flood Waves", Bulletin Nº 1, Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Japan, 1951, 16 p.
- REF. ( 4)            Thomas I. E. and Wormleaton P. R. (1970) Flood Routing Wsing a Convective Diffusion Model. Civil Engineering and Public Works Review, 65, 257-259.
- REF. ( 5)            Lighthill, M. J., and Whitham, G. B., "On Kinematic Waves I", Proceedings, Royal Society of London, Series A, Vol. 229, 1955, pp. 281-316.



- REF. ( 6) Chow Ven Te (1959) "Open Channel Hydraulics"  
McGraw-Hill Book Company, New York.
- REF. ( 7) Linsley JR. R.K., Kohler M. A. and Paulhus  
J. L. (1958) Hydrology for Engineers,  
p. 230 McGraw-Hill Book Company, New York.
- REF. ( 8) Forchheimer P. (1930) Hydraulik, 3rd edn.  
Teubner, Leipzig and Berlin.
- REF. ( 9) Henderson F. M. (1963) "Flood Waves in  
Prismatic Channels". Journal of the  
Hydraulics Division, Asce, 89, HY4, 39-67.
- REF. (10) Cruickshank V. C. y Zumaya G. E. "Propaga -  
ción de avenidas", Comisión del Plan Nacio -  
nal Hidráulico, SARH, México, 1977.
- REF. (11) Natural Environment Research Council 27  
Charing. Cross Road, London (1975) Flood  
Studies Report, Vol. III. Flood Routing  
Studies.
- REF. (12) M. B. Abbott "Computational Hydraulics",  
Pitman, 1979, pp. 98-100.
- REF. (13) Henderson F. M. (1966) "Open Channel Flow"  
McMillan and Company, New York.