



# Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

23  
-13

**Diseño de Vigas de Concreto**

## **Tesis Profesional**

Que para obtener el Título de  
**INGENIERO CIVIL**

**p r e s e n t a**

**J. DE JESUS R. VASQUEZ CAHUANTZI**

**MEXICO, D. F.**

**1983**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TRABAJO ESCRITO SOBRE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO

DISEÑO DE VIGAS

I.- INTRODUCCION

II.- POR FLEXION

III.- POR TENSION DIAGONAL

IV.- POR AGRIETAMIENTO

V.- POR DEFLEXIONES

VI.- POR ADHERENCIA

BIBLIOGRAFIA

## I N T R O D U C C I O N

El objetivo fundamental del diseño, consiste en determinar las dimensiones y características de los elementos de una estructura para que ésta cumpla cierta función - con un grado de seguridad razonable, comportándose además satisfactoriamente, una vez en condiciones de servicio. Debido a estos requisitos, es preciso conocer las relaciones que existen entre las características de los elementos de una estructura, ( dimensiones, refuerzo, - etc. ) las solicitaciones que debe soportar y los efectos que dichas solicitaciones producen en la estructura. En otras palabras, es necesario conocer la acción respuesta de la estructura estudiada.

Las acciones en una estructura, son las solicitaciones a que pueda estar sometida, entre éstas tenemos, el peso propio de la estructura, las cargas vivas que actúan sobre ella, las presiones por viento, las aceleraciones por sismos y los asentamientos. La respuesta de una estructura o de un elemento estructural, es su comportamiento bajo una acción determinada y puede expresarse - como: agrietamiento, deformación, durabilidad y vibración; desde luego, la respuesta es función de las características de la estructura, o del elemento estructural considerado.

Para establecer una base racional de diseño, será necesario entonces obtener las características acción-respuesta correspondiente a las solicitaciones que actúan más frecuentemente sobre los distintos elementos estructurales.

Con esta información, se puede delimitar el rango de las solicitaciones bajo las cuales el elemento se comportará satisfactoriamente una vez en condiciones de servicio.

En los procedimientos de diseño, el dimensionamiento se lleva a cabo normalmente a partir de las acciones interiores calculadas por medio de un análisis de la estructura. Debe notarse que, para diseñar satisfactoriamente no siempre es necesario partir de las acciones interiores inducidas por las solicitaciones exteriores. Muchos diseños han sido desarrollados a partir de estudios de modelos estructurales.

La primera condición que debe satisfacer un diseño, es que la estructura resultante sea lo suficientemente resistente; en términos de las características acción-respuesta, se puede definir la resistencia de una estructura o elemento a una acción determinada, como el valor máximo que dicha acción puede alcanzar.

El diseño debe garantizar que la estructura tenga un factor de seguridad razonable; mediante este factor, se trata de tomar en cuenta en el diseño, la incertidumbre existente respecto a los efectos de ciertas acciones y los valores usados en varias etapas del proceso de cálculo y construcción.

La selección de este factor de seguridad adecuado, no es problema sencillo, debido al gran número de variables y condiciones que debe tomarse en cuenta, la dificultad principal reside en la naturaleza probabilística tanto de las solicitaciones que actúan sobre la estructura, como en la resistencia de ésta.

Los criterios modernos de diseño están tendiendo a enfoques probabilísticos, no obstante las dificultades que implican éstos; por una parte, todavía no se tiene suficiente información sobre la variabilidad tanto de las sollicitaciones que deben considerarse, como de la resistencia de los materiales y elementos utilizados en las estructuras. Hasta la fecha, la mejor herramienta que posee el diseñador para establecer límites de tolerancia, es su experiencia con estructuras semejante cuando actúan bajo condiciones similares.

El diseño de miembros estructurales de concreto reforzado, no puede realizarse con la misma exactitud que se logra al hacerlo con miembros homogéneos, por principio se emplean dos materiales distintos pero que actúan juntos: concreto y acero. Estos tienen diferente grado de resistencia y otras propiedades físicas por lo que se hace imposible el diseño de miembros estructurales con presión perfecta.

En conclusión: para poder diseñar los elementos estructurales satisfactoriamente, deberán cumplirse con los siguientes seis puntos:

- 1.- Seguridad razonable.
- 2.- Resistencia adecuada a la finalidad utilitaria.
- 3.- Comportamiento satisfactorio en condiciones de servicio, como son: flexión, agrietamiento, vibraciones, - explosiones, etc.
- 4.- Economía.
- 5.- Aspecto estético.
- 6.- Vida útil.

Los seis puntos anteriores nos llevarán a las cuatro con secuencias de nuestra estructura:

- a)- Elección final del tipo de estructura.
- b)- Elección del material.
- c)- Características de la mano de obra.
- d)- Condiciones mecánicas para las cuales está sujeta.

Al iniciar en dimencionamiento de elementos estructurales se seguirán los siguientes pasos:

- 1.- Idealización de la estructura.
- 2.- Simplificarla.
- 3.- Establecer las Hipótesis de Análisis.
- 4.- Establecer las solicitaciones para las cuales estará diseñada la estructura.
- 5.- Analizarla.
- 6.- Dimencionamiento o diseño.
- 7.- Revisión (durante la construcción y su vida útil, co mo son: grietas, deflexiones, hundimientos, diferenciales, vibraciones, etc.).

## CARACTERISTICAS GENERALES DEL CONCRETO Y EL ACERO

El concreto es un material pétreo, artificial, obtenido de la mezcla en proporciones determinadas, de semento -- agregados y agua. El semento y el agua forman una pasta que rodea a los agregados, constituyendo un material heterogéneo; algunas veces se añaden ciertas sustancias -- llamadas aditivos o acondicionantes que mejoran o modifican algunas propiedades del concreto.

El concreto simple sin refuerzo, es resistente a la compresión; pero es débil a la tención, lo que limita su -- aplicabilidad como material estructural. Para resistir -- tensiones, se emplea refuerzo de acero generalmente en -- forma de barras colocado en las zonas donde se prevee -- que se desarrollarán tensiones bajo las sollicitaciones -- de servicio. El acero restringe el desarrollo de las -- grietas originadas por la poca resistencia a la tensión del concreto. El uso del refuerzo no está restringido a la finalidad anterior; tambien se emplea en zonas de compresión para aumentar la resistencia del elemento reforzado, para reducir las deformaciones debidas a las car--gas de larga duración y para proporcionar confinamiento lateral al concreto, lo que indirectamente aumenta su resistencia a la compresión.

La combinación del concreto simple con refuerzo, consti--tuye lo que llamamos concreto reforzado.

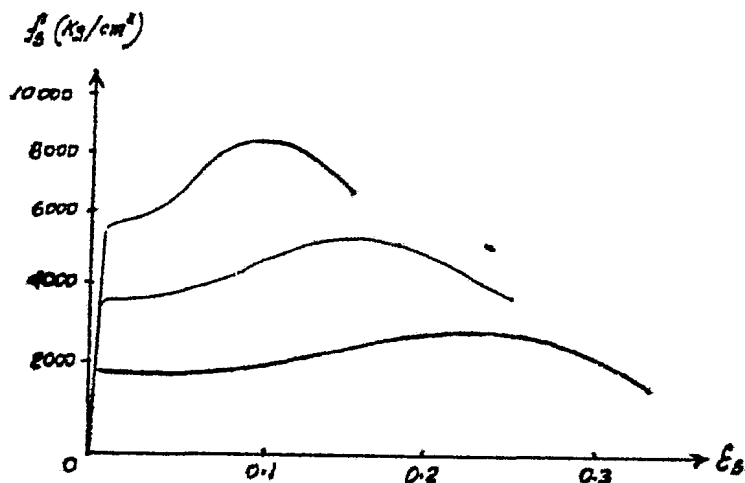
Existen otras características del concreto, tales como -- su durabilidad, permeabilidad, resistencia al fuego, a -- la abrasión, a la intemperie, etc.



El acero para refuerzo en el concreto, se utiliza en --- distintas formas; la mas común es la barra o varilla que se fabrica tanto de acero laminado en caliente, como de acero trabajado en frío, los diámetros usuales en México varían de 1/4 a 1 1/2 pulgadas. en otros Países se usan diámetros aún mayores. Todas las varillas con excepción - del alambrcn de un cuarto de pulgada tienen corrugacio- nes en la superficie, para mejorar su adherencia al con- creto, en la tabla mostrada a continuaci3n, se proporci- narán datos sobre las características principales de va- rillas de refuerzos, así como la nomenclatura usada para identificarlas.

NOMEN- CLATURA DE BARRAS	DIAMETRO NOMINAL		PESO Kg/m	NUMERO DE BARRAS										
	PULG.	MM		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	1/4	6.4	0.248	0.32	0.64	0.96	1.28	1.60	1.92	2.24	2.56	2.88	3.20	BARRAS DE ACERO EN CM <sup>2</sup>
2.5	5/16	7.9	0.368	0.49	0.98	1.47	1.96	2.45	2.94	3.43	3.92	4.41	4.90	
3	3/8	9.5	0.559	0.71	1.42	2.13	2.84	3.56	4.26	4.97	5.68	6.39	7.10	
4	1/2	12.7	0.993	1.27	2.54	3.81	5.08	6.35	7.62	8.89	10.16	11.43	12.70	
5	5/8	15.9	1.552	1.98	3.96	5.94	7.92	9.90	11.88	13.86	15.84	17.82	19.80	
6	3/4	19.0	2.235	2.85	5.70	8.55	11.40	14.25	17.10	19.95	22.80	25.65	28.50	
7	7/8	22.2	3.042	3.88	7.76	11.64	15.52	19.40	23.28	27.16	31.04	34.92	38.80	
8	1	25.4	3.973	5.07	10.14	15.21	20.28	25.35	30.42	35.49	40.56	45.63	50.70	
9	1 1/2	28.6	5.028	6.41	12.82	19.23	25.64	32.05	38.46	44.87	51.28	57.69	64.10	
10	1 1/4	31.8	6.207	7.92	15.84	23.76	31.68	39.60	47.52	55.44	63.36	71.28	79.20	
11	1 3/8	34.9	7.511	9.58	19.16	28.74	38.32	47.90	57.48	67.06	76.64	86.22	95.80	
12	1 1/2	38.1	8.938	11.40	22.80	34.20	45.60	57.00	68.40	79.80	91.20	102.60	114.00	

Generalmente el tipo de acero se caracteriza por el límite o esfuerzo de fluencia; este esfuerzo al límite de fluencia se aprecia claramente en las curvas esfuerzo-deformación de varillas laminadas en caliente, como se indica en la figura siguiente:



**CURVA ESFUERZO-DEFORMACION DE ACEROS  
LAMINADOS EN CALIENTE PARA VARILLAS DE REFUERZO**

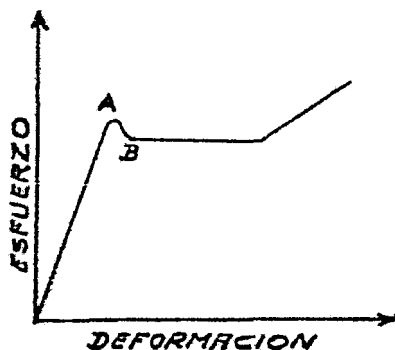
En México se cuenta con una variedad relativamente grande de aceros de refuerzo. Las varillas laminadas en caliente pueden obtenerse con límites de fluencia desde 2,300 hasta 4,200 Kg/cm<sup>2</sup>. El acero trabajado en frío, alcanza límites de fluencia de 4,000 a 6,000 Kg/cm<sup>2</sup>; pero la ventaja de los primeros son que en los refuerzos con detalles soldados, se pueden soldar con facilidad mientras, que con los segundos no; también, otra propiedad importante que tienen los primeros, es la facilidad de ser doblado, ya que éste es una medida indirecta de ductilidad y un índice de trabajabilidad.

Para lograr el trabajo en conjunto del concreto y el acero de refuerzo, deberá tenerse una adherencia suficiente

entre ambos, esto se logra ya sea mecánicamente o por medio de rugosidades en la superficie del acero de refuerzo.

Para el diseño se supone que la curva esfuerzo-deformación del acero en compresión, es idéntica a la curva esfuerzo-deformación en tensión. La curva en compresión, es difícil de determinar en el caso de barras debido a efectos de esbeltez.

En la curva esfuerzo -deformación del acero, se exhiben una porción elástica lineal, una plataforma de cedencia (es decir, una zona más allá de la cual la deformación aumenta con poco o ningún aumento del esfuerzo); una región de endurecimiento por deformación en la que el esfuerzo nuevamente aumenta con la deformación, y finalmente una región en la que el esfuerzo decae hasta que ocurre la falla o fractura, según la figura que se presenta a continuación.



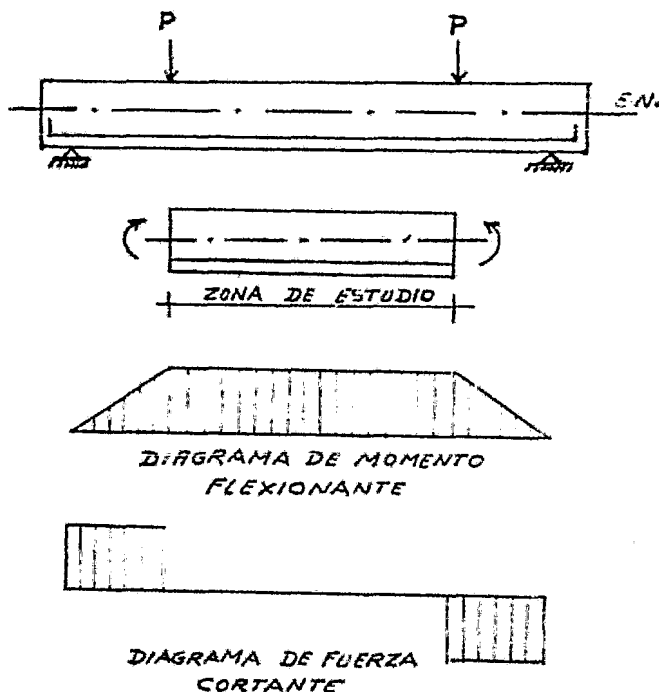
Los puntos A y B se les conoce como la resistencia a la cedencia superior e inferior respectivamente, caracterizada por una disminución abrupta en el esfuerzo.

# COMPORTAMIENTO Y MODOS DE FALLA DE VIGAS SUJETAS A FLEXION SIMPLE

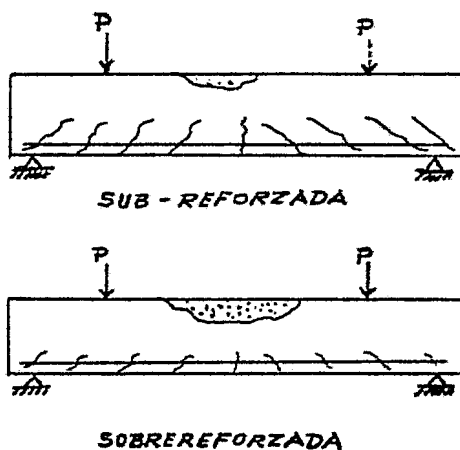
## I N T R O D U C C I O N

Son frecuentes los elementos estructurales sujetos a flexión tales como trabes, vigas o losas que trabajan en una sola dirección; generalmente la flexión se presenta acompañada de fuerza cortante. Sin embargo, la resistencia a flexión puede estimarse con suficiente precisión despreciando el efecto de la fuerza cortante.

Se han llevado a cabo gran número de ensayos en flexión, utilizando vigas simplemente apoyadas, sometidas a dos cargas concentradas y colocadas de modo simétrico en las que existe una zona sujeta solo al momento flexionante como lo muestra la siguiente figura:



Al empezar a cargar, el comportamiento de la pieza es esencialmente elástico y toda la sección contribuye a resistir el momento exterior. Cuando la tensión en la fibra más esforzada de alguna sección excede la resistencia del concreto a la tensión, empiezan a aparecer grietas; a medida que se incrementa la carga, estas grietas aumentan en número, en longitud y abertura. Entonces se puede observar claramente la zona de la pieza sujeta a tensión en la que se presentan las grietas, y la zona sujeta a compresión según la siguiente figura



**AGRIETAMIENTO EN LA FALLA DE  
VIGAS SUJETAS A FLEXION**

## SUPOSICIONES BASICAS DE LA TEORIA DE LA RESISTENCIA A FLEXION

Al desarrollar una teoría general de la resistencia a flexión de las secciones de concreto reforzado para su dimensionamiento, se hacen las siguientes suposiciones básicas tanto para el método de los esfuerzos admisibles, como para el método -- del diseño por resistencia última ó al límite.

### HIPOTESIS BASICAS PARA DISEÑO ELASTICO O DE LOS ESFUERZOS ADMISIBLES

1.- La sección plana antes de la deformación, permanece plana después de la deformación.

COROLARIO.- Las deformaciones son proporcionales a su distancia al eje neutro E.N. según una ley de variación lineal (Ley de Hook).

2.- Dentro de los esfuerzos de trabajo los módulos de elasticidad son constantes.

COROLARIO.- Los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones y su variación es lineal.

3.- Las tensiones son tomadas íntegramente por el acero y se consideran aplicadas en el centro de gravedad de éste.

4.- La adherencia entre el acero y el concreto es perfecta y sus deformaciones son iguales a igual distancia del eje neutro.

5.- El conjunto de fuerzas interiores y exteriores constituye un sistema en equilibrio.

## HIPOTESIS BASICAS PARA DISEÑAR PLASTICAMENTE O AL LIMITE

1.- La sección plana antes de la deformación permanece plana después de la deformación.

CCROLARIO.- Las deformaciones son proporcionales a su distancia al eje neutro y siguen una Ley de variación lineal.

2.- Al llegar a su capacidad límite, los esfuerzos no son proporcionales a las deformaciones y su distribución no es lineal.

CONSECUENCIA.- El diagrama de esfuerzos podrá tener cualquier forma teórica (rectangular, triangular, parabólica de segundo o tercer grado, trapecial, etc.) siempre y cuando los valores resultantes de las fórmulas obtenidas con estos diagramas estén de acuerdo con los valores reales.

3.- Las tensiones serán tomadas íntegramente por el acero, se considerarán aplicados en el centro de gravedad de éste; (a fin de poder aplicar o lograr la consecuencia de la hipótesis 2 en algunos casos se podrá permitir que el concreto tome ciertas tensiones dentro de su capacidad para ello).

4.- La adherencia entre el acero y el concreto es perfecta y sus deformaciones son iguales a igual distancia del eje neutro.

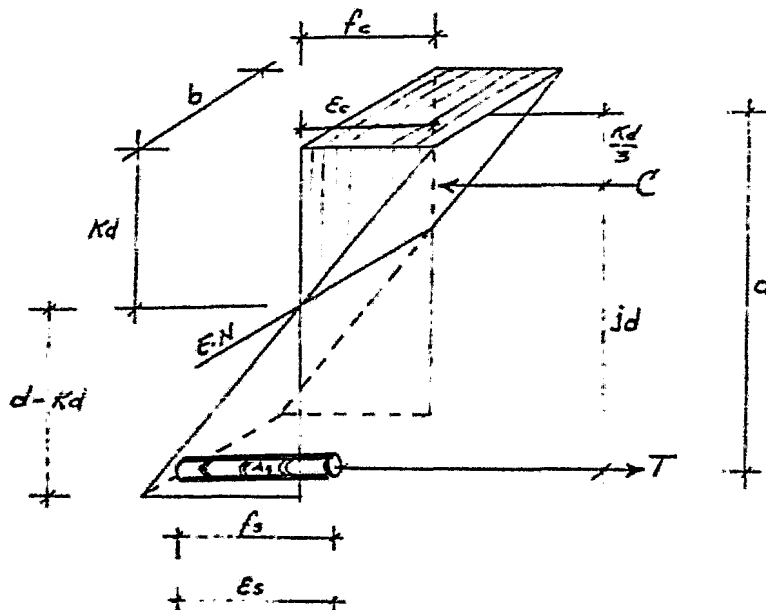
5.- El conjunto de fuerzas interiores y exteriores constituyen un sistema en equilibrio.

DISEÑO POR ESFUERZOS DE TRABAJO O  
DISEÑO ELÁSTICO

El procedimiento de dimensionamiento tradicional, basado en esfuerzos de trabajo consiste en determinar los esfuerzos correspondientes a acciones interiores obtenidas de un análisis elástico de la estructura, bajo sus supuestas sollicitaciones de servicio. Estos esfuerzos se comparan con esfuerzos permisibles, especificados como una fracción de las resistencias del concreto y del acero. Se supone que así se logra a la par un comportamiento satisfactorio en condiciones de servicio y un margen razonable de seguridad.

Teniendo en cuenta las anteriores suposiciones, pasemos a estudiar el comportamiento de una sección transversal de una viga sujeta a flexión.

El significado de las hipótesis para el diseño elástico puede apreciarse en la siguiente figura.





La cuña de esfuerzos de la parte superior, nos representa - las deformaciones de compresión del concreto y la cuña de esfuerzos de la parte inferior nos representa las deformaciones que sufriría el concreto en caso de poder resistir - la tensión; pero ya hemos mencionado que este esfuerzo es soportado en su totalidad por el acero.

Del diagrama de deformaciones se deducen las fatigas para - cualquier punto de la sección una vez conocidos los módulos de elasticidad del acero (E.S) y del concreto (E.C.) .

Con el diagrama de esfuerzos (ver figura número 3) podemos deducir ya el momento resistente de la sección.

El valor de la Compresión total será igual al volumen del - prisma triangular y está representado por:

$$c = 1/2 f_c \cdot b \cdot K_d.$$

La tensión total será igual al volumen del cilindro de esfuerzos y está representado por:

$$T = A_s \cdot F_s$$

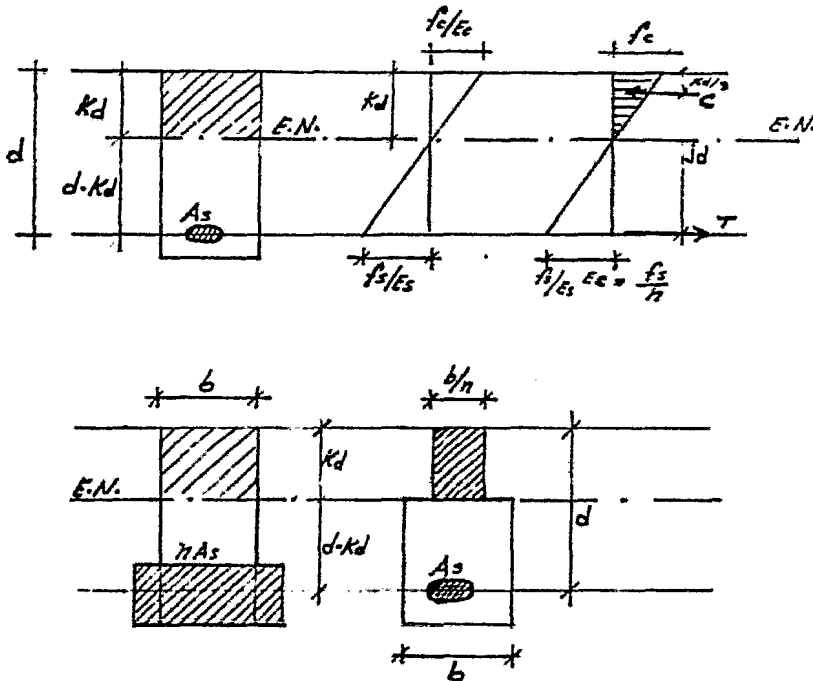
El brazo del par que se forma entre la tensión y la compresión será:

$$J_d = d - \frac{K_d}{3}$$

La resultante de la tensión (T) se encuentra localizado en el centro de gravedad de las secciones de acero en tensión. La resultante de compresión (C) pasa por el centro de gravedad de la cuña de esfuerzos y para una sección rectangular, el centro de compresión se localiza a la mitad del ancho de

la viga y a la tercera parte de la altura de la cuña de compresión contada desde la base.

Al querer calcular la profundidad del eje neutro (E.N.) nos encontramos con el inconveniente de que en la sección transversal de una viga de concreto armado ésta no es homogénea, pues está formada de concreto y de acero de refuerzo, por lo tanto, los triángulos de tensión y compresión no son semejantes debido a los distintos módulos de elasticidad de los dos materiales, por eso no es posible compararlos entre sí; para poder hacerlo, sustituimos el acero de refuerzo por un concreto ideal capaz de absorber la fuerza de tensión encomendada al acero y con módulo de elasticidad igual al del concreto en compresión; de esta manera obtenemos un diagrama como se muestra en la figura número 4



Todo lo expuesto lo podremos expresar analíticamente, refiriéndonos a la Ley de Hooke.

$$S_s = \frac{f_s}{E_s} = S_c \frac{f_s/n}{E_c} \quad \therefore \frac{f_s}{E_s} = \frac{f_s/n}{E_c}$$

$$f_s E_c = \frac{f_s E_s}{n} \quad \therefore f_s E_c n = E_s f_s$$

$$n = \frac{E_s f_s}{f_s E_c} = \frac{E_s}{E_c}$$

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

Una vez obtenido el valor de "n" la sección resultante es homogénea y puede ya tratarse como tal.

Por otra parte tendremos:

$$T = A_s f_s \quad \text{y} \quad C = A_c \frac{f_s}{n} \quad \text{iguando } T = C$$

$$\text{se tiene } A_s f_s = A_c \frac{f_s}{n} \quad \therefore A_c = n A_s \quad \text{--- (a)}$$

La ecuación (a) es sustituyendo el área de acero por una de concreto equivalente, haremos lo mismo para el área de concreto, sustituyéndola por una de acero equivalente:

Esto es:

$$C_c = \frac{1}{2} f_c (k d) d \quad ; \quad C_s = \frac{1}{2} n f_c (k d) X$$

Iguando  $C_c = C_s$  tendremos

$$\frac{1}{2} f_c (k d) d = \frac{1}{2} n f_c (k d) X$$

$$X = \frac{b}{n} \quad \text{--- (b)}$$

Ya conocidas las equivalencias anteriores y sacando momentos de inercia de las áreas equivalentes con respecto al eje neutro E.N., tenemos:

$$I_c = \frac{b (kd)^3}{3} + nA_s (d - kd)^2$$

$$I_s = \frac{b (Kd)^3}{3n} + A_s (d - Kd)^2$$

Igualando las inercias tenemos que:

$$I_c = nI_s \quad \text{por lo tanto:}$$

$$n = \frac{I_s}{I_c} = \frac{E_s}{E_c}$$

Esto es lo que llamamos la sección transformada partiendo de la sección agrietada y aplicando la fórmula de la escuadría, tendremos:

$$f_c = \frac{M}{I_c} (Kd) \quad \text{y} \quad f_s = \frac{M}{I_s} (d - Kd)$$

Donde (Kd) es la profundidad del eje neutro E.N. cuyo valor no es conocido hasta ahora, aplicando la quinta hipótesis y relacionado geoméricamente muestra sección en estudio tenemos según figura número 5

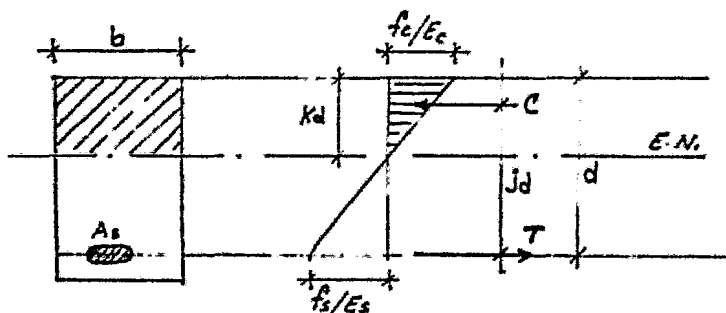


fig. (5)

Por una relación de triángulos semejantes tendremos:

$$\frac{\frac{f_c}{E_c}}{Kd} = \frac{\frac{f_s}{E_s}}{d-Kd} \quad \therefore \quad \frac{\frac{f_c}{E_c}}{\frac{f_s}{E_s}} = \frac{Kd}{d-Kd}$$

$$\frac{f_c}{f_s} n = \frac{K}{1-K} \quad \text{y} \quad \frac{f_c}{f_s} = \frac{K}{n(1-K)} \quad \text{---(A)}$$

De (A) podemos escribir  $nfc(1-K) = fsK$ ;  $nfc - nfcK = fsK$

$$nfc = fsK + nfcK = (fs + nfc)K \quad \therefore \quad K = \frac{nfc}{fs + nfc}$$

Que es la constante del valor característico de la profundidad del eje neutro que está en función de los esfuerzos y de la relación de los módulos de elasticidad de los materiales "n".

Al valor de "K" lo podemos poner como :

$$K = \frac{1}{1 + \frac{fs}{nfc}}$$

Que le llamaremos constante de proyecto. Esta constante de proyecto fluctúa entre los valores de 1/3 a 1/2.

Por otro lado, introduciendo una nueva constante  $p = \frac{A_s}{bd}$  que es el porcentaje de acero y está en función de la geometría de la sección y por la quinta hipótesis que dice que el conjunto de fuerzas interiores y exteriores forman un sistema de equilibrio, tenemos:

$A_s = pbd$  y  $T = C$  por lo tanto:

$$\frac{1}{2} f_c Kbd = p b d f_s \quad \frac{f_c}{f_s} = \frac{2p}{K} \quad (B)$$

Igualando entonces (A) y (B) tenemos:

$$\frac{K}{n(1-K)} = \frac{2p}{K} \quad \therefore \quad K^2 = 2p \{ n - (1-K) \}$$

$K^2 = 2np - 2npK$  ;  $K^2 + 2npK - 2np = 0$  por lo tanto:

$$K = -np \pm \sqrt{(np)^2 + 2np}$$

A esta nueva constante le llamaremos **CONSTANTE DE REVISION**.

$jd$  = brazo del par interno compresión-tensión

y  $jd = d - \frac{Kd}{3}$  que se describe en el diagrama de esfuerzos de la figura número 5, entonces dándole a "d" el valor de la unidad tendremos

$$j = 1 - \frac{K}{3} \quad \text{que será constante.}$$

Haciendo nuevamente alusión la quinta hipótesis, tendremos que el incremento resistente de la pieza en función del -- concreto es igual al volumen del prisma triangular visto - en la figura número 3.

$$M_c = \frac{1}{2} f_{cb} K_d j d$$

Y el momento en función del acero será:

$$M_s = A_s f_s j d$$

Como el momento del concreto y del acero deberán ser iguales entre sí e igual al momento actuante exterior (M.E.).

De la fórmula del momento resistente en función del concreto obtendremos:

$$f_{cb} K_d j d = 2M \quad \therefore \quad f_c = \frac{2M}{b K_d j d^2} \quad \text{--- (C)}$$

De la fórmula del momento en función del acero, obtendremos:

$$f_s = \frac{M}{A_s j d} \quad \text{--- (D)}$$

Las 2 fórmulas anteriores (C) y (D) son fórmulas de revisión para vigas rectangulares simplemente armadas; enseguida obtendremos las fórmulas para diseñar esas mismas vigas, que se deducen de todas vistas en los puntos anteriores.

OBTENCION DE LAS FORMULAS PARA EL DISEÑO  
DE VIGAS SIMPLEMENTE ARMADAS

En la mayoría de los casos, cuando se hace el diseño de la sección de una viga, es común imponer la condición de que la mayoría de los materiales para este caso (acero y concreto), alcancen a la vez sus fatigas máximas de trabajo, cumpliéndose en estas condiciones lo que conocemos con el nombre de -- SECCION BALANCEADA EN UNA VIGA.

Naturalmente, diseñar una pieza dentro de la sección balanceada, es haberlo sin duda en las mejores condiciones de trabajo; sin embargo, son muchas las condiciones en que por razones arquitectónicas o bien por imposiciones de economía -- quedan fijas de antemano las dimensiones de la viga.

De la fórmula del momento resistente del concreto, tendremos:

$$M_c = \frac{1}{2} f_{cb} K d^2 j \quad \text{e introduciendo una nueva constante:}$$

$$K = \frac{1}{2} f_{c} K_j \quad \text{obtendremos } M = K b d^2 \quad \therefore \quad d^2 = \frac{M}{K b}$$

que nos dará el peralte efectivo de la sección de una viga: despejando (d) tendremos:

$$d = \sqrt{\frac{M}{K b}}$$

que es una fórmula fundamental de diseño.

Esta misma fórmula podríamos deducirla de la fórmula del momento en función del acero:

De la fórmula del momento en función del acero podremos encontrar el área de acero necesario para reforzar nuestra sección:



$M_s = A_s f_s j d$  . . .  $A_s = \frac{M}{f_s j d}$  que es la fórmula fundamental de diseño.

Con estas fórmulas fundamentales de diseño ya se puede dimensionar elementos de concreto (reforzado) aplicando la teoría del diseño ELÁSTICO:

Procedimientos a seguir:

- 1.- Determinar los elementos mecánicos como cortante y momento exterior.
- 2.- Determinación de los materiales  $f'_c$  y  $f_y$ .

3.- Cálculo de las constantes  $n = \frac{E_c}{E_s}$ ,  $k = \frac{1}{1 + \frac{f_s}{f_c}}$

y  $j = 1 - \frac{k}{3}$

4.- Determinación del peralte  $d = \sqrt{\frac{M}{K_b}}$

5.- Calcular el área de acero con  $A_s = \frac{M}{f_s j d}$

6.- Colocación del acero y determinar el centro de gravedad del mismo.

7.- Conocido el centro de gravedad del acero se calcula :  
 $h = d + y$

8.- Revisión del momento exterior.

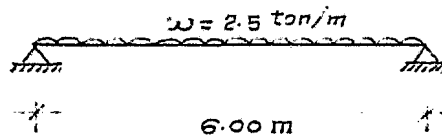
9.- Conocido el momento exterior, revisar la constante:  
 $K = \frac{M}{(np)^2 - 2np} - np$  así como  $j = 1 - \frac{K}{3}$

10.- Revisión de esfuerzos:

$f_s = \frac{M}{A_s j d}$  ,  $f_c = \frac{2M}{K_j b d^2}$

Ejemplo ilustrativo para ver los pasos a seguir en el dimensionamiento de una viga simple apoyada:

Sea la siguiente viga simplemente apoyada con los siguientes materiales:



$$f_c = 200 \text{ Kg/cm}^2 \quad \therefore \quad f_c = 0.45 \times 200 = 90 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$d/b \doteq 2$$

$$T.M.A. = 3/4''$$

Sección propuesta 30 x 60

$$\begin{aligned} \text{Cálculo del peso propio: } W_{pp} &= 0.3 \times 0.6 \times 1 \times 2.4 = 0.43 \text{ Ton/m} \\ &+ 2.50 \text{ " } \\ \hline &2.93 \text{ Ton/m} \end{aligned}$$

Cálculo del momento exterior:

$$M = \frac{w l^2}{8} = \frac{2.93 \times 6^2}{8} = 13.2 \text{ Ton-m}$$

$$\text{Cálculo de las constantes } n = \frac{E_c}{E_s} = 9$$

$$K = \frac{1}{1 + \frac{2000}{9 \times 200}} = 0.23$$

$$j = 1 - \frac{k}{3} = 1 + \frac{0.29}{3} = 0.9$$

$$K = \frac{1}{2} f_{ck} j = \frac{1}{2} \times 90 \times 0.29 = 11.8 \text{ Kg/cm}^2$$

Dimensionamiento:

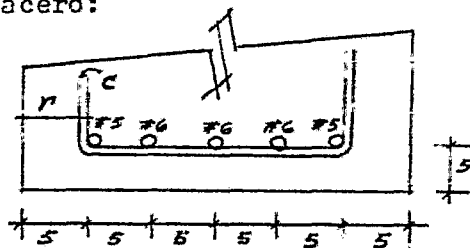
$$d = \sqrt{\frac{M}{Kb}} = \sqrt{\frac{13.2 \times 10^5}{11.8 \times 30}} = 61 \text{ cm} \quad \text{por lo tanto:}$$

$$h = 61 + 5 = 66 \text{ cm.}$$

Cálculo del área de acero:

$$A_s = \frac{M}{f_s j d} = \frac{13.45 \times 10^5}{2000 \times 0.9 \times 61} = 12.2 \text{ cm}^2 \approx 3\#6 + 2\#5$$

Colocación del acero:



La separación entre varillas deberá cumplir con:

$$S > \begin{cases} \phi \\ 1.5 \text{ T.M.A. ( tamaño máximo agregado )} \\ b_n = 2(r + c) + n\phi + (n-1)\text{sep.} \end{cases}$$

sea  $r = 4.0 \text{ cm}$  ,  $c = 0.5 \text{ cm}$  ,  $\phi = 1.9 \text{ cm}$  y T.M.A. = 1.905 cm.

Separación mínima que recomienda el ACI  $\begin{cases} \phi \\ 2.5 \end{cases}$

Nos regirá según el A.C.I.  $sep. = 2.5 \text{ cm.}$

$b_u = 2(4 + 0.5) + 2 \times 1.6 + 3 \times 1.9 + 4 \times 2.5 = 27.7 \text{ cm}$  que resultó menor de  $30 \text{ cm.}$  por lo tanto si pasamos con  $b=30 \text{ cm.}$  Revisando la sección tenemos:

$$K = \sqrt{(np)^2 + 2np} - np \quad \therefore \quad np = 9 \frac{12.1}{30 \times 61} = 0.0666$$

$$K = \sqrt{(0.0600)^2 + 2(0.0600)} - 0.0600 = 0.29 \quad \text{por lo tanto:}$$

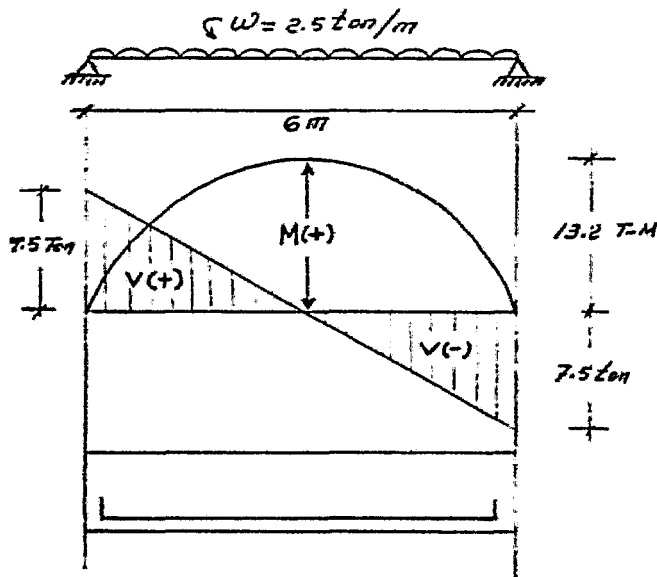
$$K/3 = \frac{0.29}{3} = 0.097$$

$$f_s = \frac{M}{A_s j d} = \frac{13.45 \times 10^5}{12.2 \times 0.903 \times 61} = 2001 \text{ Kg/cm}^2$$

$$j = 1 - \frac{K}{3} = 0.903$$

$$f_c = \frac{f_s K}{n(1-k)} = \frac{2001 \times 0.29}{9 \times 0.71} = 90.8 \approx 90.0 \text{ Kg/cm}^2$$

Los elementos mecánicos y el refuerzo longitudinal los representamos en la figura siguiente

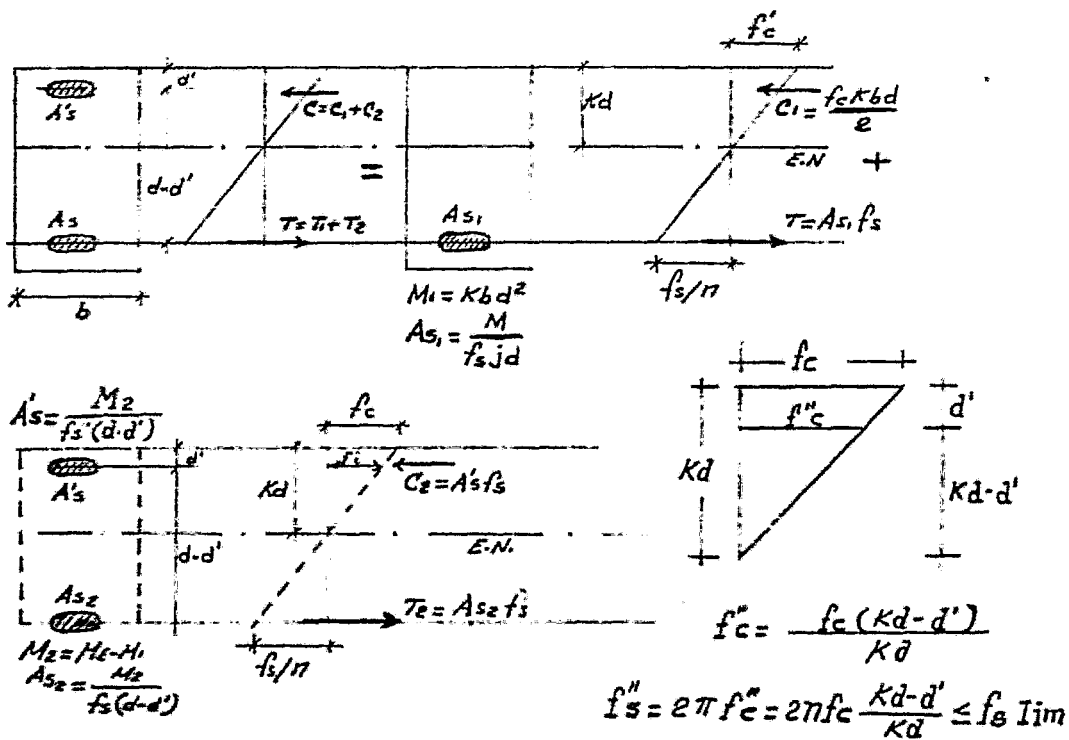


SECCIONES RECTANGULARES DOBLEMENTE ARMADAS

Los pasos a seguir para calcular este tipo de secciones es esencialmente el mismo que para las secciones simplemente armadas con la diferencia de que la fuerza total de compresión es la suma de la fuerza de compresión en el concreto,  $C_1$  y de la fuerza en el acero de compresión  $C_2$ , para determinar  $C_2$ , es necesario calcular la deformación en el nivel del acero de compresión  $\epsilon_s$ , y obtener a partir de dicha deformación, el esfuerzo en el acero  $f_s$ . Este esfuerzo puede ser menor o igual al de fluencia; pero nunca mayor que éste.

Es condición indispensable que la esquadria de la pieza este fija para que se presente el problema de que el momento resistente natural de la sección trabajando como balanceada sea menor que el momento flexionante al que se somete la viga.

En la figura siguiente se ilustra el diagrama de esfuerzos y deformaciones que actúan en este tipo de secciones.



$$f_s \text{ lim} = 2000 \text{ Kg/cm}^2$$

El factor "2" es para tomar en cuenta el efecto del KREEP - - (flujo plástico) siempre y cuando este valor no exceda del es fuerza de servicio límite al del acerc que es de  $2000 \text{ Kg/cm}^2$ .

Aunque el diseño es sencillo, se expone un ejemplo ilustrativo para su mejor entendimiento.

Calcular los armados en tensión y compresión en una viga doble mente armada sometida a un momento de  $20,000 \text{ Kg-m}$ .

datos

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_s = 1400 \text{ Kg/cm}^2$$

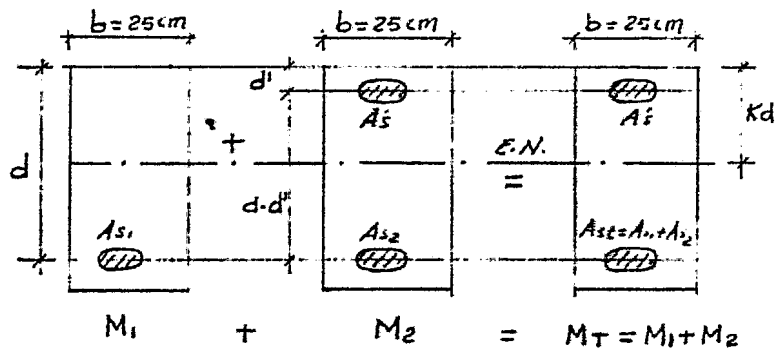
$$n = 14$$

$$K = 19.55$$

$$d = 50 \text{ cm}$$

$$b = 25 \text{ cm}$$

$$d' = 8 \text{ cm}$$



Cálculo del momento resistente natural de la sección:

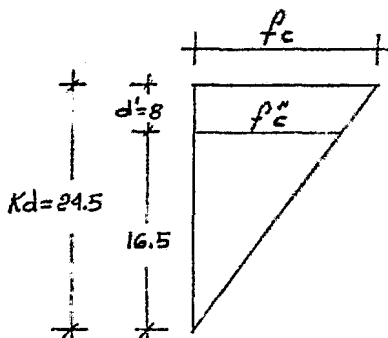
$$M_1 = Kbd^2 = 19.55 \times 25 \times 50^2 = 1221875 \text{ Kg - cm}$$

$$M_2 = M_t - M_1 = 2'000,000 - 1'221,875 = 778,125 \text{ Kg - cm.}$$

La viga como sección balanceada necesita un área de acero de:

$$A_s = \frac{M_1}{f_s j d} = \frac{1'221,875}{1400 \times 0.84 \times 50} = 20.78 \text{ cm}^2.$$

Nos falta absorber  $M_2 = 778,125 \text{ Kg-cm}$ , este momento lo tomaremos con un par de acero como se ilustra en la figura del ejemplo siguiente:



$Kd = 49 \times 50 = 24.50 \text{ cm}$  por igualación de triángulos tenemos :

$$\frac{f_c}{24.50} = \frac{f_c''}{16.50} \quad \therefore \quad f_c'' = \frac{16.50 f_c}{24.50} = 0.672 f_c$$

$$f_s'' = 2n f_c'' = 2 \times 14 \times 0.672 \times 94.5 = 1,780 \text{ Kg/cm}^2$$

Que resultó mayor de  $f_s$  por lo tanto se tomará este valor.

$$A's = \frac{M_2}{f_s (d-d')} = \frac{778,125}{1,400 (50-8)} = 13.25 \text{ cm}^2$$

Entonces las áreas finales de acero en la viga será:

$$\text{Tensión} \quad A_{st} = A_{s1} + A_{s2} = 20.78 + 13.25 = 34.03 \text{ cm}^2$$

$$\text{En compresión} \quad A's = 13.25 \text{ cm}^2$$

## V I G A S " T "

Son una combinación de losas y vigas formando ambos elementos una sola unidad; la losa recibe el nombre de patín y la viga el de alma, nervio o nervadura.

Para que una viga trabaje realmente como "T" es necesario que el eje neutro "E.N." caiga abajo de la losa o patín; en caso raro que el eje neutro caiga en el límite del patín o dentro de él, la viga "T" será únicamente en apariencia y la sección funcionará como una viga rectangular y se deberá calcular como tal.

En este tipo de vigas, el ancho del patín es quizá lo más difícil de calcular o definir y es los esfuerzos de compresión máximos que se encuentran localizados en el eje de la sección van disminuyendo conforme se alejan de dicho eje, fenómeno -- provocado principalmente por los esfuerzos cortantes en la losa.

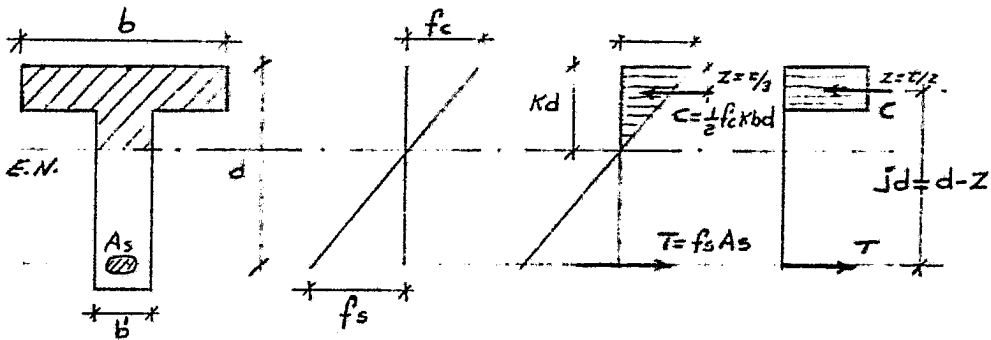
Siguiendo el reglamento del D.F. de construcciones el ancho del patín deberá quedar limitado al menor valor de las 4 especificaciones siguientes:

- A)- No excederá de la cuartaparte del claro.
- B)- No excederá de la mitad de la distancia entre paños de nervaduras.
- C)- No excederá de 16 veces de espesor del patín más el ancho del alma, nervio o nervadura.
- D)- No excederá de 6 veces el peralte efectivo más el ancho del alma, nervio o nervadura.

La falla en este tipo de vigas, pueden originarse por compresión en el patín, por tensión en el refuerzo longitudinal, -- por tensión diagonal y por adherencia.



Nuevamente dibujaremos el diagrama de esfuerzos para una sección "T".



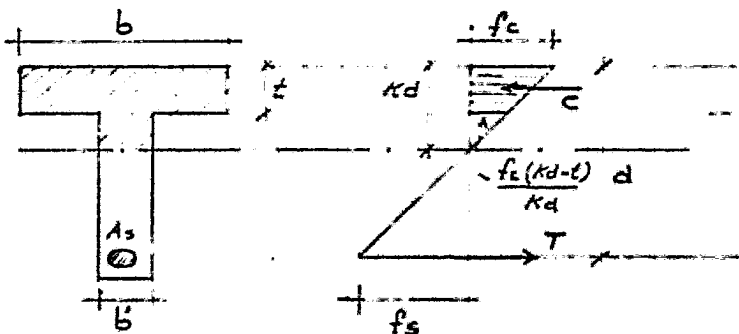
Del diagrama de esfuerzos  $jd = d - z$  que para el caso más desfavorable  $jd \hat{=} d - t/2$

Para determinar el área de acero de refuerzo que va a llevar la sección "T" del mismo diagrama de esfuerzos, tendremos:

$$M = As fs (d - t/2) \quad \therefore \quad As = \frac{M}{fs (d - t/2)} \quad \text{ó también} \quad As = \frac{M}{fs jd}$$

El valor de "j" anda casi siempre entre estos valores de : 0.90 a 0.92 incluso despreciando la compresión en el alma.

Cálculo del peralte de la sección "T".



Del diagrama de esfuerzos de compresión se tendrá:

$$C = \left[ f_c + \frac{f_c}{Kd} (Kd - t) \right] \frac{t}{2} b$$

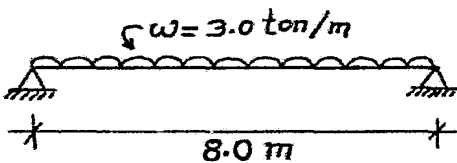
$$C = f_c b t \left( 1 - \frac{t}{2Kd} \right)$$

$$M = C j d = f_c b t j d \left( 1 - \frac{t}{2Kd} \right) \therefore \frac{M}{f_c b t j} = d - \frac{t}{2K}$$

$d = \frac{M}{f_c b t j} + \frac{t}{2K}$  que es el peralte requerido para la sección "T". El área se calculará con:

$$A_s = \frac{M}{f_s j d}$$

Ejemplo ilustrativo.



DATOS:

$$t = 10 \text{ cm}$$

$$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$c.a.c. = 3.0 \text{ m}$$

$$b^* = 25 \text{ cm}$$

Cálculo del momento flexionante:

$$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{3 \times 8^2}{8} = 24 \text{ Ton-m}$$

$$K = \frac{1}{1 + \frac{f_s}{n f_c}} = \frac{1}{1 + \frac{2000}{9 \times 90}} = 0.20$$

Cálculo del ancho efectivo.

$$b = \begin{cases} L/4 = 800/4 = 200 \text{ cm} \\ c_{ac} = 300 \text{ cm} \\ 16t + b^* = 16 \times 10 + 25 = 185 \text{ cm} \end{cases} \longrightarrow \text{Rige, cálculo del peralte.}$$

$$d = \frac{M}{f_{cbtj}} + \frac{t}{2k} = \frac{24 \times 10^5}{90 \times 185 \times 10 \times 0.9} + \frac{10}{2 \times 0.28} = 33.87 \text{ cm} \approx 34$$

El peralte obtenido resultó muy chico probablemente no pasará por constante, este tema se ve en los siguiente capítulos:  
Cálculo del área de acero.

$$A_s = \frac{M}{f_s j d} = \frac{24.0 \times 10^5}{2000 \cdot (34 - 5)} = 41.4 \text{ cm}^2$$

Como comparación: si hubiera sido una sección rectangular, para encontrar su peralte tendríamos:

$$d = \sqrt{\frac{24 \times 10^5}{11.87 \times 25}} = 90 \text{ cm}$$

Comparada con la "d" anterior hay diferencia significativa, su área de acero sería:

$$A_s = \frac{M}{f_s j d} = \frac{24 \times 10^5}{2000 \times 90 \times 0.9} = 14.81 \text{ cm}^2$$

## DISEÑO PLASTICO O AL LIMITE

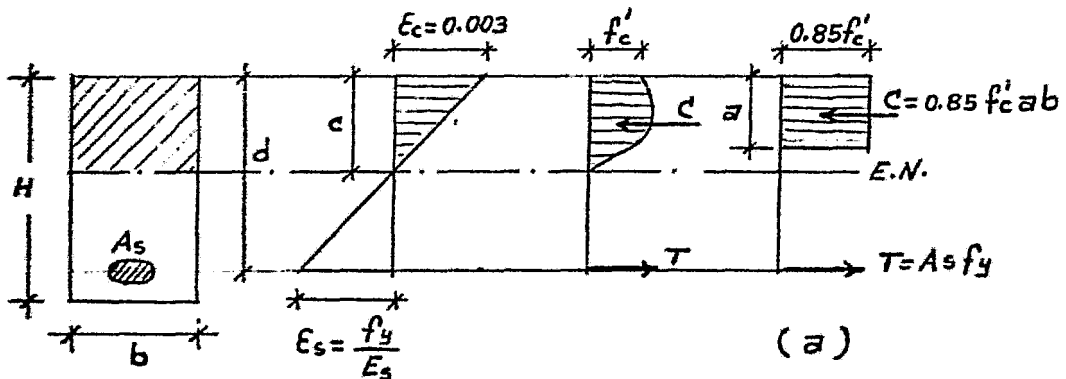
El procedimiento más utilizado en la actualidad es el denominado METODO PLASTICO o de resistencia última.

El procedimiento consiste en determinar las acciones interiores correspondientes a las condiciones de servicio, mediante un análisis elástico y multiplicarlas por un factor de carga que puede ser constante o variable según los distintos elementos para así obtener la resistencia de dimensionamiento.

El factor de carga puede introducirse también incrementando - las acciones exteriores y realizando después un diseño elástico de la estructura. El dimensionamiento se hace entonces con las hipótesis de comportamiento inelástico.

Se presentarán dos procedimientos a seguir para el análisis - de este método, según el A.C.I. y según el R.D.D.F.

Según el A.C.I. (Instituto Americano del Concreto).



Se aplicarán las hipótesis básicas del diseño plástico vistas en página número 6 .

Del diagrama de deformaciones tenemos:

$$\frac{E_c}{c} = \frac{E_c + E_s}{d} \quad \therefore \quad c = \frac{E_c}{E_c + E_s} d$$

Substituyendo valores ya para el caso límite tendremos:

$$c_b = \frac{0.003}{\frac{0.003 + f_y}{2 \times 10^6}} = \frac{6.000}{6000 + f_y} d$$

Que será la profundidad del eje neutro E.N. en la sección balanceada, esto quiere decir que los dos materiales estarán trabajando con sus esfuerzos máximos a la falla y con una deformación igual.

Ya conocido  $C_b$  y del diagrama de esfuerzos (a) del equilibrio de fuerzas internas  $\sum F_h = 0$  tendremos:

$$C = T \quad \therefore \quad 0.85f'_c ab = A_s f_y \quad \text{--- (a)}$$

Introduciendo la constante  $p = \frac{A_s}{bd}$  que es el porcentaje de acero, se puede despejar a  $A_s = pbd$  y substituyendo en la ecuación anterior (a)

$$0.85f'_c ab = pbd f_y$$

Despejando a (a) tenemos  $a = p \frac{f_y}{0.85f'_c} d$  que será la profundidad del bloque de esfuerzos.

Si introducimos otra constante  $m = \frac{f_y}{0.85f'_c}$  tendremos:  
 $a = pmd = K_1 c$

Donde  $K_1 = 0.85$  si  $f'_c \leq 280 \text{ Kg/cm}^2$ ; pero si  $f'_c > 280 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $K_1$  disminuirá en 0.05 por cada incremento de  $f'_c$  en  $70 \text{ Kg/cm}^2$ .

Entonces el momento último resistente valdrá:

$$M_u = \bar{\phi} A_s f_y \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

Donde el factor  $\bar{\phi}$  toma en cuenta posibles fallas en la fabricación del concreto, acero, cálculos, etc.

El valor de  $\bar{\phi}$  (llamado factor de resistencia) estará comprendido entre 0.70 a 0.90 según los elementos mecánicos actuantes:

Valores de  $\bar{\phi}$  para diferentes tipos de carga

Flexión ———  $\bar{\phi} = 0.90$

Cortante ———  $\bar{\phi} = 0.85$

para columnas zunchadas  $\bar{\phi} = 0.75$

Estribos  $\bar{\phi} = 0.70$

Aplastamiento  $\bar{\phi} = 0.70$

Entonces de  $A_s = pbd$  y sustituyendolo en la fórmula del momento último ( $M_u$ ) tendremos:

$$M_u = pbd f_y \left( d - \frac{pmd}{2} \right) = pbd^2 f_y \left( 1 - \frac{pm}{2} \right)$$

$$\frac{M_u}{bd^2} = \bar{\phi} p f_y \left( 1 - \frac{pm}{2} \right) \text{ fórmula probablemente la más utilizada}$$

actualmente por ser la expresión mas práctica para encontrar el momento último.

La fórmula anterior podemos escribirla de esta otra forma:

$$\frac{M_u}{bd^2} = p f_y \frac{f'c}{f'c} \left( 1 - \frac{p f_y}{2 \times 0.85 f'c} \right) \text{ y si introducimos -}$$

otra nueva constante:

$$q = \frac{p f_y}{f'c} \text{ y } \frac{1}{2 \times 0.85} = 0.59 \text{ se tendrá:}$$

$$\frac{M_u}{bd^2} = \bar{\phi} \left[ q f'c (1 - 0.59 q) \right] \text{ expresión que aparece en algu-}$$

nos libros pero que no es muy práctica.

Veamos ahora la expresión:

(\*)  $C_b = \frac{6000}{6000 + f_y} d$  en que influye en las fórmulas anteriores.

Partiendo de la siguiente expresión  $b = 0.85 f'_c a = p f_y d$ , de la cual despejando a (p) tendremos:

$p = 0.85 b, \frac{f'_c}{f_y} \frac{1}{d} C$  donde (C) para la condición balanceada vale según ecuación (\*) entonces el porcentaje de acero balanceado valdrá:

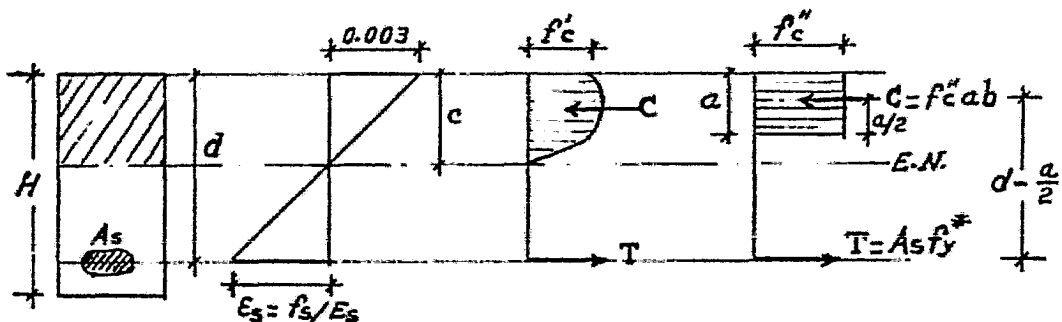
$$p_b = 0.85 b, \frac{f'_c}{f_y} \frac{6000}{6000 + f_y}$$

La sección sub-reforzada será dúctil si el acero es dúctil, - si no es así sufrirá una falla frágil. Se garantizará siempre que ocurra la falla en el acero antes que en el concreto por compresión; para esto deberemos diseñar con un porcentaje de acero que esté comprendido entre los siguientes valores:

$$\frac{14}{f_y} \leq p \leq 0.75 p_b$$

Un valor recomendable de (p) será  $p = 0.18 \frac{f'_c}{f_y}$

Procedimiento para diseñar plásticamente según el R.D.D.F. -- (Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal).



(b)

El A.C.I. hace variar la profundidad del bloque de esfuerzos "a", mientras que el R.C.D.D.F hace variar el valor de  $f''c$  -- con  $f''c = kfc$  dando a "k" los siguientes valores:

$$K = \begin{cases} 0.85 & \text{si } f''c \leq 250 \text{ Kg/cm}^2 \\ 1.05 - \frac{f''c}{1250} & \text{si } f''c > 250 \text{ Kg/cm}^2 \end{cases}$$

De la figura (b) se muestra una viga rectangular con refuerzo de lado de tensión únicamente. Se supone que la sección es sub-reforzada, de manera que el acero fluye, como sucede con los casos prácticos de diseño, por lo tanto:

$$f_s = f_y^*$$

Por equilibrio de fuerzas, se puede obtener la profundidad del bloque de esfuerzos "a" de la siguiente manera:

$$C = T$$

$$abf''c = Asf_y^* \quad \therefore \quad a = \frac{Asf_y^*}{bf''c} \quad \text{----- (a)}$$

Tomando momento con respecto a la resultante de compresión:

$$M_u = T \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_u = Asf_y \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

Otra expresión puede obtenerse tomando momentos con respecto al acero de tensión:

$$M_u = c \left( d - \frac{a}{2} \right), \quad M_u = abf''c \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

Introduciendo las constantes  $p = \frac{As}{bd}$  por lo tanto:  
 $As = pbd$  y de la ecuación (a) tenemos:

$$a = pd \frac{f_y^*}{f''c}; \quad \text{haciendo constante } \frac{f_y^*}{f''c} = m \quad \text{tendremos:}$$

$$M_u = F.R.Asf_y \left( d - \frac{a}{2} \right) = pbif_y \left( d - \frac{pmd}{2} \right) = pbd^2f_y \left( 1 - \frac{pm}{2} \right)$$



$$\frac{Mu}{bd^2} = F.R. pfy \left(1 - \frac{pm}{2}\right) = pfy \frac{f'c}{fy} \left(1 - \frac{p'fy}{2f'c}\right)$$

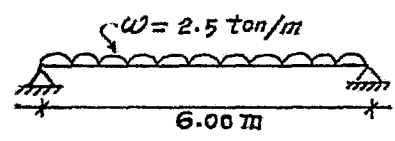
Introduciendo una nueva constante:  $q = \frac{p'fy}{f'c}$

$$\frac{Mu}{bd^2} = \left[ qfy (1 - 0.5q) \right] F.R.$$

Podemos expresar la fórmula anterior de esta otra forma:

$$\frac{Mu}{bd^2} = F.R. \left[ pfy (1 - 0.5q) \right]$$

Ejemplo ilustrativo que hace ver la diferencia al usar el procedimiento del A.C.I. y el R.C.D.D.F.



DATOS:

- $f'c = 200 \text{ Kg/cm}^2$
- $fy = 4000 \text{ Kg/cm}^2$
- T.M.A. =  $3/4" = 1.90 \text{ cm.}$
- $d/b \doteq 2$

A. C. I.

$$W_{p.p.} = 0.30 \times 0.65 \times 2.4 = 0.468 \text{ Ton/m.}$$

$$V = 1.4 \times 0.468 + 1.7 \times 2.5 \text{ Ton/m.}$$

$$Mu = \frac{4.9 \times 6^2}{8} = 22.05 \text{ Ton/m.}$$

$$p = 0.18 \frac{f'c}{fy} = 0.18 \frac{200}{4000} = 0.009$$

$$\frac{Mu}{bd^2} = \phi pfy \left(1 - \frac{pm}{2}\right)$$

$$m = \frac{fy}{0.85f'c} = \frac{4000}{0.85 \times 200} = 23.5$$

$$\frac{M_u}{bd^2} = \frac{22.05 \times 10^5}{30d^2} = 0.9 \times 0.009 \times 4000 \left(1 - \frac{0.009 \times 23.5}{2}\right) = 28.97$$

por lo tanto:  $d = \sqrt{\frac{22.05 \times 10^5}{30 \times 28.97}} = 50.40 \text{ cm.}$

si suponemos un  $p = 0.007$  entonces:

$$\frac{22.05 \times 10^5}{30d^2} = 0.9 \times 0.007 \times 4000 \left(1 - \frac{0.007 \times 23.5}{2}\right) = 23.1$$

entonces  $d = \sqrt{\frac{22.05 \times 10^5}{30 \times 23.1}} = 56.4 \text{ cm.}$

$$A_s = 0.007 \times 30 \times 56.4 = 11.84 \text{ cm}^2.$$

R. C. D. D. F.

$$W_u = 1.4 \times 2.968 = 4.15 \text{ Ton/m}$$

$$M_u = \frac{4.15 \times 6^2}{8} = 18.68 \text{ Ton/m} \quad p = 0.009$$

$$\frac{M_u}{bd^2} = F.R. \cdot p f_y \left(1 - \frac{p m}{2}\right)$$

$$m = \frac{f_y}{f'_c} = \frac{4000}{0.8 \times 0.85 \times 200} = 29.4$$

$$\frac{M_u}{bd^2} = \frac{18.5 \times 10^5}{30d^2} = 0.9 \times 0.009 \times 4000 \left(1 - \frac{29.4 \times 0.009}{2}\right) = 28.1 \text{ cm.}$$

por lo tanto:  $d = \sqrt{\frac{18.5 \times 10^5}{30 \times 28.1}} = 47.0 \text{ cm.} \quad p = 0.007$

$$\frac{18.5 \times 10^5}{30d^2} = 0.9 \times 0.007 \times 4000 \left(1 - \frac{0.007 \times 29.4}{2}\right) = 22.6$$

por lo tanto:  $d = \sqrt{\frac{18.5 \times 10^5}{30 \times 22.6}} = 52.2 \text{ cm.}$

$$A_s = 0.007 \times 30 \times 52.2 = 11.0 \text{ cm}^2$$

$$A. C. I.$$

$$A_s = 13.6 \text{ cm}^2 \left\{ \begin{array}{l} 5 \# 6 = 5 (2-87) = 14.35 \text{ cm}^2 \\ 4 \# 6 + 1 \# 5 = 13.47 \text{ cm}^2 \end{array} \right.$$

Colocación de varillas:

$$b_n = 2 (r+c) + n \bar{\phi} + n-1 (\text{sep})$$

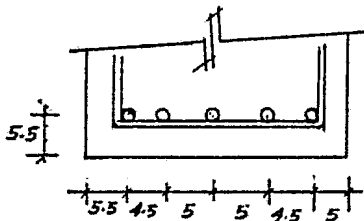
Separación entre varillas:

$$\text{sep} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\phi} = 1.9 \text{ cm} \\ 2.5 \leftarrow \text{Rige} \\ 1 \frac{1}{3} = 1.33 \times 1.9 = 2.53 \text{ cm.} \end{array} \right.$$

Colocación de varillas en un solo lecho

$$b_n = 2 (4+0.5) + 4 \times 1.9 + 1.6 + 4 \times 2.5$$

$$b_n = 28.2 \text{ cm} < 30.0 \text{ cm.}$$



$$h = 50.5 + 5.5$$

$$56 \text{ cm}$$

que será el peralte de la sección.

R. C. D. D. F.

$$A_s = 12.7 \text{ cm}^2 \left\{ \begin{array}{l} 3 \# 6 + 2 \# 5 = 12.59 \text{ cm}^2 \\ 4 \# 6 + 1 \# 5 = 13.38 \text{ cm}^2 \end{array} \right.$$

Colocación de Varillas:

$$b_n = 2 (r + c) + n \bar{\phi} + n-1(\text{sep})$$

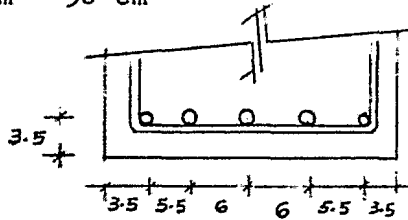
Separación entre varillas.

$$\text{sep} = \begin{cases} \phi = 1.9 \text{ cm} & \text{--- Rige} \\ 1.5 \text{ T.M.A.} = 1.5 \times 1.9 = 2.8 \text{ cm.} \end{cases}$$

Colocación de varillas en un solo lecho.

$$b_n = 2(1.9 + 0.5) + 3 \times 1.9 + 2 \times 1.6 + 4 \times 2.8$$

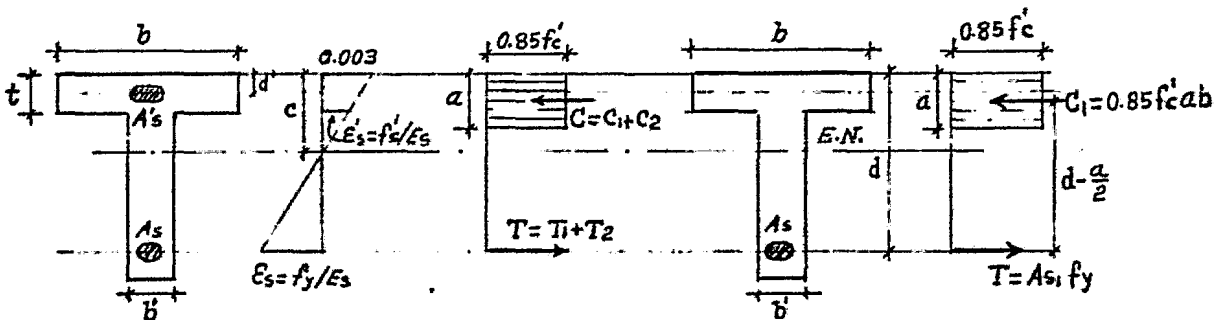
$$b_n = 24.9 \text{ cm} \quad 30 \text{ cm}$$



$$h = 47 + 3.5 = 50.5 \text{ cm}$$

que será el peralte de la sección.

S E C C I O N E S " T "



Sea:  $A's = As_2$  y  $As = As_1$

$$As = As_1 + As_2$$

$$\frac{c}{\epsilon_c} = \frac{d'}{\epsilon_c - \epsilon_{s'}}$$

$$c = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c - \epsilon_{s'}} d'$$

si  $f's \rightarrow fy$

$$\epsilon's = \epsilon_s$$

$$c = \frac{0.003}{0.003 - \frac{fy}{2 \times 10^6}}$$

$$c = \frac{6000}{6000 - fy} d'$$

Haciendo  $\Sigma F_H = 0$   
 $C = T$   
 $0.85 f'ck_1c = (p-p') dfy$   
 $\therefore a = k_1c = 0.85 c$   
 $0.85 f'cab = (p-p') bdfy$

De la figura anterior:

Si  $As = As_1 + As_2$   
 $As_1 = As - As_2$   
pero  $As_2 = As'$   
 $\therefore As_1 = As - As'$  entonces  $p_1bd = pbd - p'bd = (p-p') bd$   
entonces  $As_1 = (p-p') bd$   
 $0.85 f'c k_1cb = (p-p') bdfy$  entonces  
 $(p-p') = 0.85 k_1 \frac{f'c}{fy} \frac{1}{d} \frac{6000}{6000-fy} d'$

De la misma figura anterior tenemos de  $C = T$   
 $0.85 f'cab = As_1fy = (As - As') fy = (p-p') bdfy$   
despejando a "a" tenemos:

$a = (p-p') \frac{fy}{0.85f'c} d$  donde  $m = \frac{fy}{0.85f'c}$   
 $a = (pt-pf) md$

Entonces tomando momentos con respecto a la zona de tensión, tenemos:

$Mu = As_1fy (d - \frac{a}{2}) \phi$   
 $Mu = (As - A's) fy (d - \frac{a}{2}) \phi$

Por otro lado tomando en cuenta que la sección resulte doblemente armada, la contribución del acero en la zona de compresión se analizará de la manera siguiente:

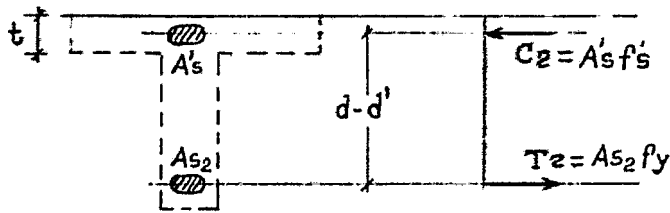


fig. (C)

de la figura (C)

$$f's = f'y \quad \therefore \quad As_2 = A's$$

$$Mu_2 = Mu - Mu_1$$

$$Mu_2 = \Phi A'sfy (d-d')$$

$$\frac{Mu_2}{bd^2} = \Phi p'fy \left(1 - \frac{d'}{d}\right)$$

El momento último final; tomando en cuenta que la sección tome esfuerzos en la zona de compresión tanto el concreto como el acero, valdrá:

$$Mu = \Phi \left[ (pt - pf) fy \left(d - \frac{a}{2}\right) + Affy \left(d - \frac{t}{2}\right) \right]$$

Dicha expresión se puede escribir de esta otra forma:

$$Mu = \Phi \left[ (pt - pf) fy \left(1 - \frac{(pt - pf)m}{2}\right) + pffy \left(1 - \frac{t}{2d}\right) \right]$$

Y el porcentaje de acero  $(p - p')$  deberá estar comprendido entre los valores:

$$0.75 (0.85 k_1 \frac{f'c}{fy} \frac{6000}{6000 + fy}) \geq (p - p') \geq 0.85 k_1 \frac{f'c}{fy} \frac{d'}{d} \frac{6000}{6000 - fy}$$

De la figura (C) tenemos de:

$$C = T \quad \therefore \quad 0.85f'ct (b - b') = Affy$$

$$Af = (b - b')t \quad \frac{0.85f'c}{fy} = \frac{t}{m} (b - b')$$

Si se desprecia la compresión en el concreto, entonces el momento último que resistirá el acero será:

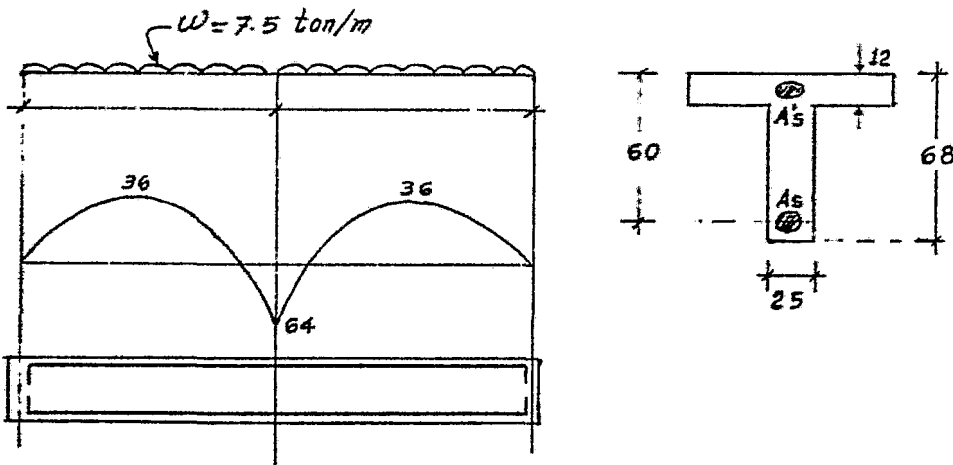
$$M_u = \phi A_f f_y \left( d - \frac{t}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{M_u}{\phi A_f f_y} = d - \frac{t}{2} \quad \therefore \quad d = \frac{M_u}{\phi A_f f_y} + \frac{t}{2}$$

$$A_s = A_f \quad \text{y} \quad A_s = \frac{M_u}{\phi f_y \left( d - \frac{t}{2} \right)}$$

$$A_p = \frac{t}{m} b \quad d = \frac{M_u}{\phi A_p f_y} + \frac{t}{2} \quad \text{y} \quad A_s = A_p$$

Ejemplo de una sección T diseñada plásticamente.



$$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$$

$$c.a.c. = 250 \text{ cm.}$$

$$F.C.M. = 1.4$$

$$F.C.V. = 1.7$$

$$P.p. = \left[ (0.25 \times 0.68) + (2.25 \times 0.12) \right] 2.4 = 1.06 \text{ Ton/m.}$$

$$Wp.p. u = 1.06 \times 1.48 \text{ Ton/m.}$$

$$Wv.u = 7.5 \times 1.7 = \frac{12.75}{14.23} \text{ Ton/m.}$$

$$M + = \frac{9}{128} \times 14.23 \times 36 = 36 \text{ Ton/m.}$$

$$M_- = \frac{14.23 \times 36}{8} = 64.0 \text{ Ton-m.}$$

$$M_u = \frac{bd^2 f'c}{3} = 25 \times 60^2 \times \frac{200}{3} = 60 \times 10^5 \text{ Kg-cm.} < 64 \times 10^5 \text{ Kg-cm.}$$

Quiere decir entonces que resultará doblemente armada el porcentaje máximo de acero, deberá ser el 0.75 Pb.

$$P \text{ máx.} = 0.75 \times 0.85 \times 0.85 \times \frac{200}{2530} \times \frac{600}{6000 + 2530} = 0.031$$

$$\frac{M_u}{bd^2} = \phi p f_y \left(1 - \frac{p m}{2}\right); m = \frac{f_y}{0.85 f'c} = \frac{2530}{0.85 f'c} = 14.9$$

$$\frac{M_u}{bd^2} = 0.9 \times 0.031 \times 2530 \left(1 - \frac{0.031 \times 14.9}{2}\right) = 53$$

$$M_u = 53 bd^2 = 53 \times 25 \times 60^2 = 47.7 \times 10^5 \text{ Kg-cm.} < 64 \times 10^5$$

Con este resultado confirmamos que será doblemente armada -  
 $A_{s1} = p x b d = 0.031 \times 25 \times 60 = 46.5 \text{ cm}^2$ .  
 $M_{u2} = 64 - 47.7 = 16.3 \text{ Ton-m.}$

$$A_{s2} = A's = \frac{M_{u2}}{f_y (d-d')} = \frac{16.3 \times 10^5}{0.9 \times 2530 \times (60-8)} = 13.77 \text{ cm}^2$$

Sección de momentos positivos  $M = 35.7 \text{ Ton-m}$

El ancho efectivo será  $b = \begin{cases} L/4 = 150 \text{ --- RIGE} \\ 16t - b' = 16 \times 12 + 25 \\ \text{c.a.c.} = 250 \end{cases}$

$$A_f = \frac{t}{m} (b - b') = \frac{12}{14.9} (150 - 25) = 100.67 \text{ cm}^2$$

El momento último resistente será:



$$MUR = \phi A_s f_y \left( d - \frac{t}{2} \right) = 0.9 \times 100.67 \times 2530 (60 - 6) = 11.92 \times 10^6 \text{ Kg cm.}$$

Que es mucho mayor que el momento actuante positivo.  
Como tenemos una sección sobrada utilizaremos la otra fórmula.

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y \left( d - \frac{t}{2} \right)} = \frac{35.7 \times 10^5}{0.9 \times 2530 (60 - 6)} = 29.0 \text{ cm}^2$$

Concluimos que el diseño correcto será una viga "T" invertida L.

### DISEÑO DE VIGAS SOMETIDAS A FUERZAS CORTANTES

La gran mayoría de los miembros estructurales de concreto reforzado no pueden escapar de tener que resistir fuerzas cortantes. Estas fuerzas rara vez actúan por sí solas, sino en combinación con flexión, carga axial y quizá torsión. -- Además de identificar el efecto de fuerzas cortantes que actúan por sí solas, es necesario examinar las interacciones posibles con las otras acciones estructurales. En los miembros a flexión en especial, los mecanismos que resisten el cortante interactúan íntimamente, con adherencia en el concreto, el refuerzo y el anclaje de éste.

La transmisión de cortante en las vigas de concreto reforzado se apoya fuertemente en la resistencia a tensión y compresión del concreto. En consecuencia no es de sorprender que una falla a cortante por lo general sea no dúctil. Por lo tanto, se debe intentar suprimir dicha falla. En especial en estructuras que resisten sismo, se pone gran atención a la ductilidad, razón por la que el diseñador debe asegurarse de que jamás ocurra una falla a cortante, lo que implica que cuando es esencial la ductilidad, la resistencia a cortante del miembro deba ser algo mayor que la resistencia máxima a flexión que éste podría desarrollar. Es conveniente utilizar aun los conceptos clásicos de esfuerzo cortante en los cuerpos homogéneos isotrópicos y elásticos al tratar con miembros de concreto reforzado.

Modificar en forma adecuada, la teoría elástica puede proporcionar predicciones aceptables con respecto a resistencia y a la formación de grietas. Sin embargo, con el desarrollo de grietas, se origina un patrón sumamente complejo de esfuerzos, al grado que en esta etapa muchas ecuaciones

que actualmente se utilizan tienen poco que ver con el comportamiento real.

Para visualizar el efecto de la fuerza cortante es útil recordar algunos conceptos elementales de la mecánica de los materiales, ya que, a niveles de cargas bajos y antes de la aparición de grietas el comportamiento del concreto reforzado se asemeja al de un material homogéneo, isotrópico y -- elástico. El estudio se limitará al caso de elementos en -- que el estado de esfuerzos puede suponerse como un estado de esfuerzos planos.

En un punto cualquiera de un elemento sujeto a este tipo de esfuerzos, los esfuerzos normales y tangenciales correspondientes a distintos planos que pueden pasar por el punto -- varían en magnitud al cambiar la orientación del plano de -- referencia. El estado de esfuerzos en un punto queda definido cuando se conocen los esfuerzos normales y tangenciales en el punto según dos planos perpendiculares cualesquiera.- Aquellos planos en que solo existen esfuerzos normales se -- llaman planos principales y son perpendiculares entre si.

Los esfuerzos en estos planos reciben el nombre de esfuerzos principales y tienen la propiedad de ser los esfuerzos máximos o mínimos que pueden existir en el punto.

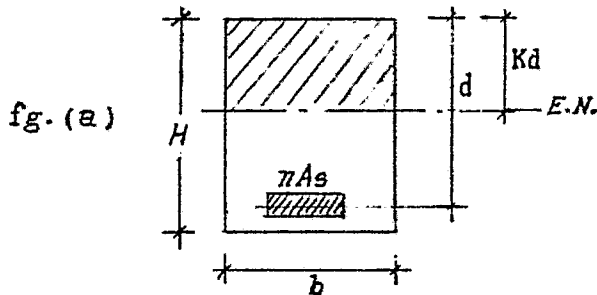
La distribución elástica de esfuerzos tangenciales,  $V$ , se calcula con expresión:

$$v = \frac{VQ}{bh}$$

Donde  $V$  es la fuerza cortante de la sección,  $Q$ , es el momento estático respecto al eje neutro del área de la sección -- situada arriba del nivel considerado,  $b$  es el ancho de la -- sección al nivel considerado y  $h$  es el peralte total de la

sección.

Si el elemento es rectangular, ver la figura (a) siguiente, podemos deducir la fórmula anterior de esfuerzos tangenciales, tendremos:



$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

$$I = \frac{b (kd)^3}{3} + nAs (d-kd)^2$$

$$Q = \frac{b (kd)^2}{2} = nAs (d-kd)$$

$$\frac{I}{Q} = \frac{\frac{b (kd)^3}{3} + nAs (d-kd)^2}{\frac{b (kd)^2}{2} + nAs (d-kd)}$$

$$\frac{I}{Q} = \frac{2}{3} (kd) + d - (kd) = d - \frac{kd}{3}$$

$$\frac{I}{Q} = d \left(1 - \frac{k}{3}\right) = dj$$

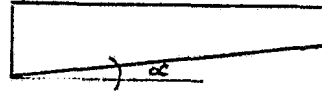
Substituyendo, tendremos:  $\tau = \frac{V}{bjd} = \frac{V}{bd}$

La distribución elástica de los esfuerzos tangenciales la podemos escribir también:

$$\tau = \frac{V}{bd}$$

Para una viga de peralte variable, tendremos:

$$v = \frac{V \pm \frac{M}{d} \operatorname{tg} \alpha}{bjd}$$



Los esfuerzos tangenciales o cortantes pueden ser verticales y horizontales, producidos los primeros por la gravedad, según la figura (b)



fig. (b)

Y los horizontales producidas por las mismas tensiones y compresiones producidas por la flexión según la figura (c).

Los esfuerzos cortantes verticales y horizontales al conjungarse con la deformación de la viga, producen otros que pueden originar grietas como se ve en la figura (d)



fig.(c)

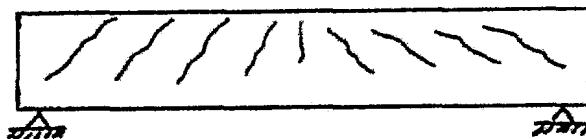


fig.(d)

Estas grietas producidas ocasionan una tensión conocida con el nombre de TENSICN DIAGONAL, dichas grietas suelen aparecer cerca de los apoyos con una inclinación a  $45^{\circ}$  en donde el esfuerzo cortante es mayor y se van convirtiendo en grietas verticales conforme se alejan de donde es mayor el esfuerzo cortante.

Una forma conveniente de representar los estados de esfuerzos en los distintos puntos de un elemento consiste en trazar las redes de trayectorias de los esfuerzos principales. Estos diagramas muestran gráficamente la dirección de los esfuerzos principales en cualquier punto del elemento. En la figura (e) se ilustra una red típica de esfuerzos principales de tensión para el caso de una viga libremente apoyada sujeta a varias cargas concentradas.

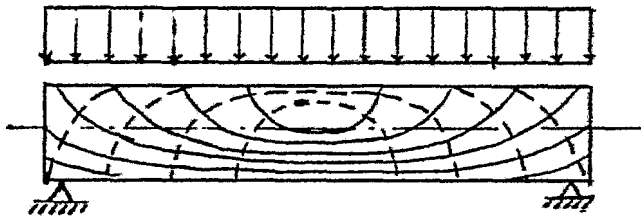


fig. (e)

Considerando el equilibrio de un elemento infinitesimal la magnitud de  $f_n$  y la inclinación de los esfuerzos principales, resultantes de la aplicación simultánea de un esfuerzo de tensión  $f$  y un esfuerzo cortante  $v$  ilustrado en la figura (f) lo podemos obtener como sigue:

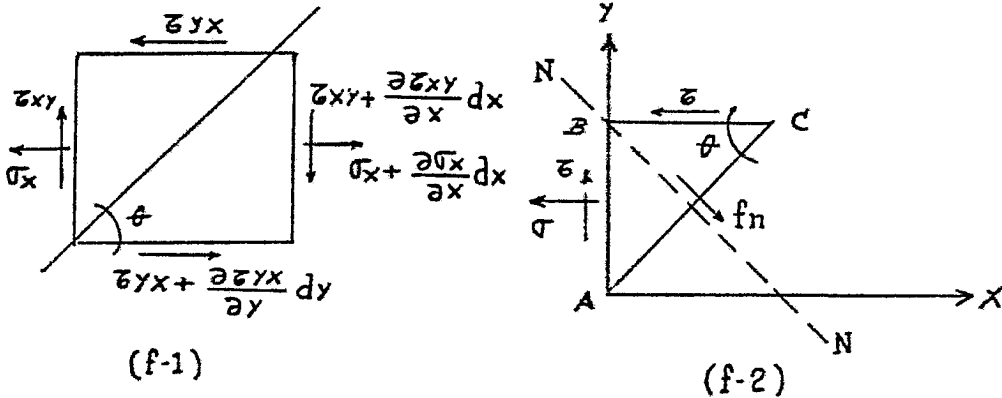


fig.(f)

De la figura (f-2) tenemos:

- fn = esfuerzo principal
- phi = plano principal
- AB = AC    SEN phi
- BC = AC    COS phi

Del equilibrio de fuerzas en la dirección X tenemos:  $\sum F_x = 0$

- $\sigma_{AB} - \tau_{BC} + f_n AC \text{ sen. } \phi = 0$
- $\sigma_{AC} \text{ sen. } \phi - \tau_{AC} \text{ cos. } \phi + f_n AC \text{ sen. } \phi = 0$

$$(f_n - \sigma) \text{ sen. } \phi - \tau \text{ cos. } \phi = 0 \text{ ----- (A)}$$

Del equilibrio de fuerzas en la dirección Y tenemos:  $\sum F_y = 0$

- $\tau_{AB} - f_n AC \text{ cos. } \phi = 0$
- $\tau \text{ sen. } \phi - f_n \text{ cos. } \phi = 0 \text{ ----- (B)}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (A) y (B) obtendríamos una solución trivial, para evitar esto igualaríamos el determinante a cero.

$$\begin{vmatrix} f_n - \sigma & \tau \\ \tau & f_n \end{vmatrix} = 0 = f_n^2 + f_n \sigma + \tau^2$$

$$\therefore f_n = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Ya conocido el valor del esfuerzo principal nos faltaría de finir el plano principal.

Trazando un plano N-N y haciendo el equilibrio de esfuerzos que pase por dicho plano tendremos:

$$\Sigma F_{NN} = 0$$

$$\begin{aligned} - \sigma_{AB} \operatorname{sen} \theta - \tau_{AB} \operatorname{cos} \theta - \tau_{BC} \operatorname{sen} \theta + f_n AC &= 0 \\ - \sigma_A \operatorname{sen}^2 \theta - \tau_A \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta - \tau_A \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \theta + f_n A &= 0 \\ \sigma \operatorname{sen}^2 \theta + 2 \tau \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta &= f_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{haciendo: } \operatorname{sen}^2 \theta &= \frac{1}{2} (1 - \operatorname{cos} 2\theta) \\ 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta &= \operatorname{sen} 2\theta \end{aligned}$$

$\frac{\sigma}{2} (1 - \operatorname{cos} 2\theta) + \tau \operatorname{sen} 2\theta = f_n$  para poder encontrar el plano principal derivamos la ecuación:

$$\frac{df_n}{d\theta} = 0 = \frac{\sigma}{2} 2 \operatorname{sen} 2\theta + 2 \tau \operatorname{cos} 2\theta = \sigma \operatorname{sen} 2\theta + 2 \tau \operatorname{cos} 2\theta$$

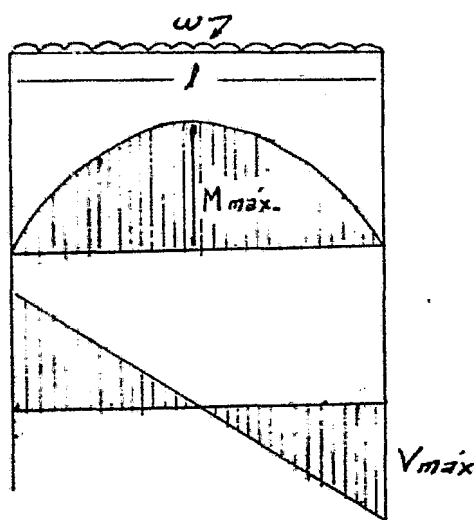
$$\text{por lo tanto: } \sigma \operatorname{sen} 2\theta = -2 \tau \operatorname{cos} 2\theta$$

$$\sigma \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\operatorname{cos} 2\theta} = -2 \tau$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = - \frac{2 \tau}{\sigma}$$

Que sería la ecuación del plano principal.





Tendremos dos secciones de interés:

- 1.- Donde el momento es máximo y el cortante es nulo.
- 2.- Donde el cortante es máximo y el momento nulo.

Caso 1.- El momento es máximo y le corresponde un valor de  $\sigma$  máx. y el cortante  $\tau = 0$ , entonces si  $\tau = 0$  fn valdrá:

$$fn = \begin{cases} \sigma & \text{y } \operatorname{tg} 2\theta = 0 \\ 0 & \end{cases}$$

$$\text{de donde } 2\theta = \begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$$

Caso 2.- Momento es nulo, por lo tanto  $\sigma = 0$  y  $V$  será el máximo, entonces  $\tau$  será el máx.

$$fn = \pm \tau \text{ y } \operatorname{tg} 2\theta = \infty \therefore 2\theta = \begin{cases} 90^\circ \\ 270^\circ \end{cases} ; \theta = \begin{cases} 45^\circ \\ 135^\circ \end{cases}$$

EXPRESIONES PARA VALUAR LA RESISTENCIA A  
EFECTOS DE FUERZA CORTANTE

En la mayoría de los reglamentos los efectos de las variables estudiados anteriormente se expresan por medio de fórmulas sencillas, con ciertas limitaciones y restricciones.

Como se ha dicho, no se cuenta con una teoría general que explique satisfactoriamente los efectos de la fuerza cortante en elementos de concreto. Por consiguiente las expresiones propuestas reflejan los efectos de las variables principales dentro de los límites de la información experimental. Las recomendaciones esenciales de los reglamentos tanto del A.C.I. como la del R.C.D.D.F. están basados en el trabajo ACI - 326 y solo difieren entre si, en detalles, notaciones y en la forma de establecer el factor de carga.

MIEMBROS SIN REFUERZO TRANSVERSAL

El efecto de la fuerza cortante en un elemento puede medirse valuando el esfuerzo cortante nominal dado por la expresión.

$$v_r = \frac{V_r}{bd}$$

Donde:

$v_r$  = esfuerzo cortante nominal en una sección transversal.-

$V_r$  = fuerza cortante externa en la sección considerada, correspondiente a la carga de diseño.

$b$  = ancho del alma de la sección I ó T o ancho total si la sección es rectangular.

$d$  = Peralte efectivo del refuerzo longitudinal de tensión.

Para elementos sin refuerzo en el alma el esfuerzo cortante nominal correspondiente a la carga que produce el agrietamiento inclinado, está dado por la ecuación:

$$v_c = 0.5 \sqrt{f'c} + 180 p \frac{V_{rd}}{M_r} \leq 0.90 \sqrt{f'c}$$

Donde:

$v_c$  = esfuerzo cortante nominal que resiste el concreto en  $Kg/cm^2$ .

$f'c$  = Resistencia del concreto a la compresión en  $Kg/cm^2$ , medida en cilindros de 15x30 cm.

$p$  = Relación de acero longitudinal,  $As/bd$ .

$As$  = Area de acero longitudinal.

$V_r$  = Fuerza cortante en la sección considerada.

$M_r$  = Momento flexionante en la sección considerada. Si  $M_r$  es menor que  $V_{rd}$ , se toma igual a este producto.

Esta fórmula fué propuesta por el comité A.C.I. 326.

Cuando la carga axial de compresión es importante, tal que produzca zonas en miembro en que todo el acero trabaje a -- compresión, puede estimarse la resistencia en esta zona, -- con la expresión:

$$v_c = 0.50 \left( 1 - 0.007 \frac{N_r}{A_g} \right) \sqrt{f'c}$$

El valor de  $v_c$  no deberá exceder de:

$$v_c = 0.90 \sqrt{f'c \left( 1 + 0.028 \frac{N_r}{A_g} \right)}$$
 en  $Kg/cm^2$ .

Donde  $A_g$  es el área total de la sección.

Para carga axial de tensión importante, la resistencia del concreto puede calcularse con la expresión

$$v_c = 0.50 \sqrt{f'c} \left( 1 + 0.028 \frac{N_r}{A_g} \right)$$

El Reglamento de Construcciones para el D.F. da los siguientes valores:

$$V_c = F.R. \cdot b \cdot d (0.2 + 30 p) \sqrt{f^*c} , \quad \text{si } p < 0.01$$

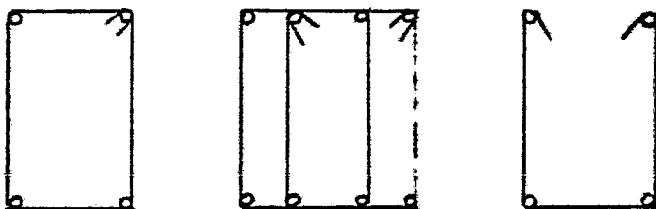
$$v_c = 0.5 F.R. \cdot b \cdot d \sqrt{f^*c} \quad \text{si } p \geq 0.01$$

Cuando se tenga elementos estructurales muy grandes considerar  $v_c = 0$  y se reforzará la sección con más estribos.

### MIEMBROS CON REFUERZO TRANSVERSAL

Elementos con refuerzos en el alma.- El refuerzo transversal o refuerzo en el alma, que se utiliza en elementos de concreto para aumentar su resistencia a los efectos de la fuerza cortante puede ser de distintos tipos. En algunos casos, se aprovecha parte del acero principal de flexión, doblandolo en zonas donde ya no es requerido para tomar esfuerzos longitudinales, de manera que atraviese las regiones donde pueden aparecer grietas inclinadas.

Estas barras para que sean efectivas deben anclarse en la zona de compresión. El refuerzo transversal de uso mas extendido es el estribo, ver las figuras siguientes:



Comúnmente los estribos son de dos ramas, en U ó cerrados, siendo los serrados los mas frecuentes. Sin embargo, en algunos casos se utiliza tambien estribos de cuatro ramas. Generalmente los estribos se colocan en posición vertical, pero tambien es usual colocarlos inclinados con respecto al eje del elemento con un ángulo que varía entre  $30^{\circ}$  y  $60^{\circ}$ , siendo  $45^{\circ}$  la inclinación más común. Frecuentemente, se utilizan en un mismo elemento combinaciones de los diversos tipos de refuerzo transversal mencionado.

Se ha observado, que cualquiera que sea el tipo de refuerzo transversal que se utilice, éste no contribuye en forma apreciable a resistir los esfuerzos inclinados en el alma de la pieza, es decir, el refuerzo en el alma influye muy poco en la magnitud de la carga que produce las primeras grietas inclinadas; pero despues de la aparición de las primeras grietas, el refuerzo transversal se deforma gradualmente al incrementar la carga hasta que alcanza su límite de fluencia. Con el fin de evitar que el ancho de la grieta inclinada sea excesivo, el reglamento ACI recomienda que el acero transversal tenga un esfuerzo de fluencia máximo de  $4,200 \text{ Kg/cm}^2$ .

Es importante tener en cuenta que, para que el refuerzo transversal sea realmente efectivo debe colocarse a espacimientos tales, a lo largo del eje de la pieza, que cualquier grieta inclinada potencial que pudiera formarse en elemento sea cruzada cuando menos por una barra de refuerzo en el alma.

Otro efecto importante del refuerzo en el alma es de incrementar la ductilidad del elemento, al proporcionar confinamiento lateral al concreto sujeto a compresión. Este efecto es de gran importancia en estructuras que pueden estar suje

tas a fuerzas sísmicas, en la que el desarrollar una ducti-  
lidad adecuada es tan importante como el garantizar la re-  
sistencia necesaria.

El refuerzo del alma desempeña un papel triple despues de -  
la aparición de las grietas inclinadas. Por una parte res-  
tringe el crecimiento de las grietas inclinadas conservando  
en esta forma una fropundidad mayor para la zona de compresión.  
Esto incrementa la capacidad de esta zona para resistir  
fuerzas normales y tangenciales. Por otra parte, cuando  
se usa refuerzo transversal en forma de estribos, estos me-  
joran la capacidad por adherencia del miembro, pues tienden  
a evitar fallas por desgarramiento al nivel del acero de re-  
fuerzo. Finalmente, el refuerzo en el alma toma una porción  
importante de la fuerza cortante externa y, cuando el refuer-  
zo forma anillos cerrados incrementa ligeramente la capaci-  
dad de la zona de compresión debido al efecto de confinamien-  
to.

En terminos generales, se han aplicado dos criterios para es-  
timar la resistencia de un elemento con refuerzo trnasversal.  
Uno de ellos considera que la resistencia a fuerza cortante  
se obtiene como la suma de las contribuciones del concreto  
y del refuerzo transversal; es decir, que es igual a la car-  
ga de agrietamiento inclinado más la contribución directa -  
del refuerzo transversal, calculada utilizando la analogía  
de la armadura o alguna de sus variantes. En cambio en el -  
otro criterio, que fué predominante hasta hace algunos años,  
se había considerado que una vez desarrollada la grieta in-  
clinada solo el refuerzo transversal resiste la fuerza cor-  
tante.

## SEPARACION DEL REFUERZO TRANSVERSAL

El refuerzo transversal aumenta la ductilidad y proporciona un aviso de falla que no poseen los elementos sin dicho refuerzo. Este refuerzo resulta de gran valor cuando se presentan fuerzas imprevistas en la estructura lo que evite a fallas catastróficas. Por esta razón se recomienda en general colocar una cantidad mínima de refuerzo transversal. El reglamento ACI recomienda colocar un área mínima igual a:

$$A_v = 3.5 \frac{b_s}{f_y}$$

Los reglamentos limitan la separación del refuerzo transversal cuando este se considera necesario. En general se trata de impedir que pueda desarrollarse una grieta a  $45^\circ$  sin que sea intersectada por una varilla en la zona comprimida - entre el refuerzo en tensión y el semi peralte efectivo del elemento.

Cuando la contribución del refuerzo transversal es apreciablemente mayor que la contribución del concreto, el requisito de separación máxima es más rígido.

Veamos en seguida el análisis de como calcular la separación de los estribos.

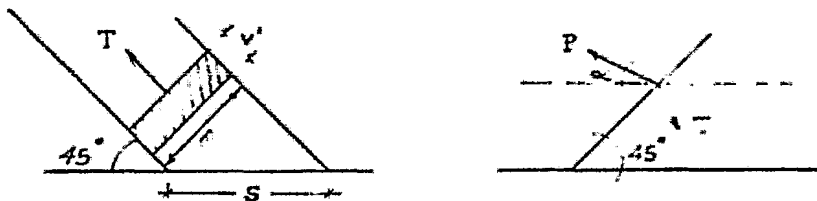


fig. (a)

Sea  $T = mv'b$  ver fig. (a)  
 $m = s \text{ sen. } 45^\circ$   
 $T = v'bs \text{ sen. } 45^\circ$  \_\_\_\_\_ (a)

Sea  $P = Avfv$  P deberá ser capaz de absorber a T  
 $P = Avfv$  y  $T = P \text{ cos. } (45^\circ - \alpha)$

$\therefore T = Avfv \text{ cos. } (45^\circ - \alpha)$  \_\_\_\_\_ (b)

Igualando las dos ecuaciones (a) y (b) tenemos:

$$v'bs \text{ sen. } 45^\circ = Avfv ( \text{ cos. } 45^\circ \text{ cos. } \alpha + \text{ sen. } 45^\circ \text{ sen. } \alpha )$$

Donde  $v'bs =$  la capacidad de carga de la varilla inclinada a  $45^\circ$ .

$$v'bs \text{ sen. } 45^\circ = Avfv \text{ sen. } 45^\circ ( \text{ sen. } \alpha + \text{ cos. } \alpha )$$

$$v'bs = Avfv ( \text{ sen. } \alpha + \text{ cos. } \alpha )$$

Si  $v' = \frac{V'}{bd}$  sustituyendo, tendremos:

$$\frac{V'bs}{bd} = Avfv ( \text{ sen. } \alpha + \text{ cos. } \alpha ) \text{ despejando a}$$

(s) tendremos:

$$S = \frac{Avfvd}{V'} ( \text{ sen. } \alpha + \text{ cos. } \alpha )$$
 \_\_\_\_\_ Esta expresión es muy importante que nos va a permitir calcular la separación de los estribos que van a tomar los esfuerzos cortantes.

Esta expresión es muy importante que nos va a permitir calcular la separación de los estribos que van a tomar los esfuerzos cortantes.

Si  $\alpha = 90^\circ$   $\text{sen. } \alpha + \text{ cos. } \alpha = 1$  y  $S = \frac{Avfvd}{V'}$

Si  $\alpha = 45^\circ$   $\text{sen } \alpha + \text{ cos. } \alpha = 1.414$  y  $S = \frac{1.414 Avfvd}{V'}$

Pero ahora la pregunta sería que tanta separación o qué separación máxima podríamos los estribos.

Pensemos en una grieta potencial, dicha grieta nos interesa



que no vaya a penetrar la zona de compresión. Si estamos -- aceptando que en la zona de tensión si hay varillas y que éstas siguen una trayectoria con una inclinación a  $45^{\circ}$ ; entonces la máxima separación a la que deberán colocarse los estribos será a  $d/2$

$$\text{Sep. máx.} = d/2$$

El ACI y el R.C.D.D.F. recomiendan que para barras dobladas a  $45^{\circ}$  la separación máxima deberá ser  $3/4 d$ , además estas barras dobladas no pueden tomar más de dos tercios  $V'$  y -- cuando menos la otra tercera parte de  $V'$  se tomará con estribos, otra de las restricciones es que la barra doblada -- estará cortada por lo menos una vez por un estribo.

El R.C.D.D.F. la separación que recomienda para estribos -- es:

$$s = \frac{2av \phi f_y d}{V'}$$

$av$  = es el área del estribo

2 - por ser dos ramas ó 4 si fuesen 4 ramas

$\phi$  - factor de resistencia

$f_y$  - esfuerzo de fluencia del acero

$d$  - peralte efectivo de la sección

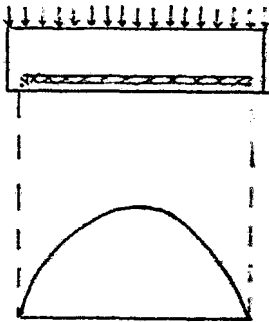
$V'$  -  $(V_t - V_c)$

## ADHERENCIA Y ANCLAJE

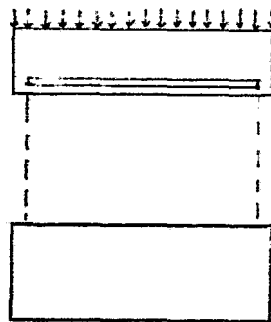
### INTRODUCCION

En un elemento de concreto reforzado es necesario que exista adherencia entre el concreto y las varillas de refuerzo, de manera que, ambos materiales estén íntimamente ligados entre sí. Si no la hay el comportamiento del elemento difiere de lo descrito en los capítulos anteriores.

En las siguientes figuras, se ilustra la diferencia en comportamiento entre una viga con refuerzo adherido y otra en la que el refuerzo se encuentra libre dentro de la masa de concreto.



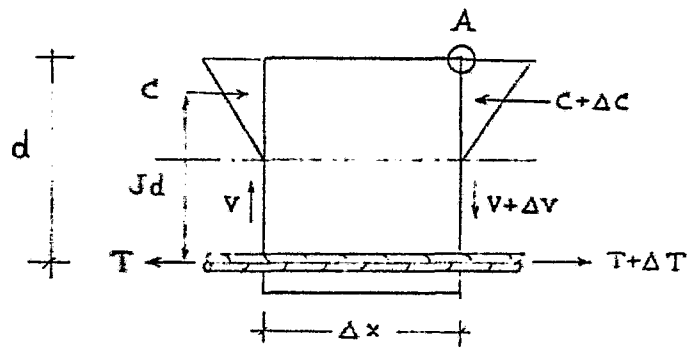
(a) Ref. adherido



(b) Ref. sin adherir

En el caso (a) los esfuerzos en el esfuerzo varían a lo largo del elemento ya que son prácticamente proporcionales a la magnitud del momento flexionante. En cambio, en el caso de (b) los esfuerzos en el esfuerzo son constantes a lo largo del claro, ya que como la varilla está libre el elemento se comporta como un arco atirantado y no como una viga, en este caso, es necesario anclar mecánicamente las varillas en los extremos del elemento por medio de placas u otros dispositivos adecuados.

Veamos el diagrama de cuerpo libre de una varilla.



La fuerza en la zona de tensión en el extremo de la derecha, es mayor que el extremo de la izquierda por ser mayor el momento flexionante.

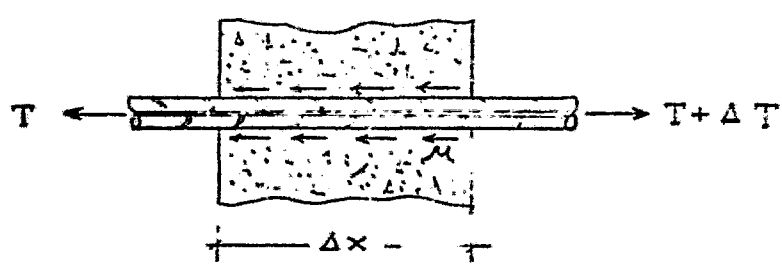
Si tomáramos momentos con respecto al punto A tendríamos:

$$\Sigma M_A = C \cdot \Delta x + Td - (T + \Delta T) d = 0$$

Para las fuerzas cortantes se ve también que el de la extrema derecha, es mayor que el de la extrema izquierda, y tomando momentos con respecto al mismo punto, tendríamos:

$$V \Delta x + JdT - jdT - \Delta Td = 0 \quad \therefore \quad V \Delta x - \Delta Tjd = C \quad \text{--- (a)}$$

Si aislamos la barra, tendríamos:



Para que la varilla esté en equilibrio, debe existir una -- fuerza de adherencia a su alrededor que es producida por eg fuerzas de adherencia, " $\mu$ ", entre el concreto y el acero.

Tendremos entonces que:

$\Delta T = \Delta X (C \mu)$  donde " $C$ " es el perímetro de una varilla y el valor de  $\Delta T$  substituyéndolo en la ecuación (a) tendremos:

$V \Delta X - \Delta X C \mu d = C$  si despejamos a " $\mu$ " tendremos:

$\mu = \frac{V}{C d}$  ahora si tenemos varias varillas:

$$\mu = \frac{V}{\Sigma C d}$$

En diseño plástico

$\mu_u = \frac{V}{\phi \Sigma C d}$  y los valores permisibles de " $\mu$ " serán:

Para barras altas:  $\mu_u = \frac{1.78 f'c}{\phi} \leq 39.4 \text{ Kg/cm}^2$

Para barras bajas:  $\mu_u = \frac{2.52 f'c}{\phi} \leq 56.2 \text{ Kg/cm}^2$

Se dice que las barras son altas, cuando hay mas de 30 cm. de concreto bajo ellas, cuando hay menos de 30 cm. de concretos bajo ellas, entonces se dice que son bajas, " $\phi$ " es el diámetro de la varilla dado en pulgadas.

La adherencia o resistencia al deslizamiento del refuerzo tiene su origen en los tres fenómenos siguientes:

- 1.- Adhesión de naturaleza química entre el acero y el concreto.
- 2.- Fricción entre las varillas y el concreto que se desarrolla al tender a deslizar la primera.
- 3.- Apoyo directo de las corrugaciones de las varillas contra el concreto que las rodea.

La adherencia ha sido mucho menos estudiada que la flexión y la tensión diagonal, debido primeramente a que en muchos casos no es un aspecto crítico en el diseño. El conocimiento sobre el problema es relativamente escaso, especialmente en lo que se refiere a la determinación de la determinación de los esfuerzos internos desarrollados y al mecanismo de la falla por adherencia.

El problema de adherencia, ha sido estudiado solo para casos particulares; no se dispone de una teoría general aplicable en todas las situaciones. Debido a esto el comportamiento de elementos que fallan por adherencia tienen que ser analizados también para casos particulares.

La longitud de anclaje, recibe también el nombre de longitud de desarrollo. Este nombre indica que los esfuerzos en las varillas se desarrollan de un valor a otro a lo largo de la longitud de desarrollo.

La longitud de desarrollo la podemos definir también, como la distancia entre dos secciones de una varilla de refuerzo con fuerzas de tensión diferentes, que equilibran a los esfuerzos de adherencia.

#### CALCULO DE LA LONGITUD DE DESARROLLO

Por medio de ensayos de extracción, de vigas y de elementos con varillas traslapadas, se han obtenidos esfuerzos promedio de adherencia  $\mu$ , que para varillas en tensión se pueden representar en forma general, con la ecuación:

$$\mu = \frac{K \sqrt{f'c'}}{db}$$

Y para varillas en compresión  $\mu = K \sqrt{f'c'}$  donde:

F corresponde a la constante que depende del tipo de varilla (lisa o corrugada) del lecho superior o inferior y de otras variables.

db es el diámetro de la barra.

Conocido el valor de  $\mu$  puede determinarse la longitud de desarrollo Ld por medio de la ecuación:

$$Ld = \frac{T}{\mu \sum s} \quad (b)$$

Para evitar fallas por adherencia que son de tipo frágil, la varilla de refuerzo debe alcanzar su límite de fluencia fy por lo tanto, la fuerza de tensión es igual al área de acero de una varilla Ab ; por su límite de fluencia fy :

$$T = Abfy \quad (c)$$

Substituyendo la ecuación (c) en la ecuación (b) tendremos:

$$Ld = \frac{Abfy}{\mu \sum s}$$

Haciendo ahora  $\sum s = \pi db$  , ya que se está considerando una sola varilla, se obtienen las siguientes expresiones generales para el cálculo de longitudes de desarrollo.

Para varillas en tensión:

$$Ld = \frac{Abfy}{\pi k \sqrt{f'c'}}$$

Para varillas en compresión:

$$Ld = \frac{Ab fy db}{\pi k \sqrt{f'c'}}$$

En la tabla siguiente se presentan valores que han sido --- propuestos para estimar en distintos casos las longitudes - de desarrollo.

# varilla	fy = 4200		fy = 2800
	barras altas	barras bajas	
3 2 5	140	140	95
6	120	140	95
7 2 9	95	140	95
10	95	125	95
11	95	110	95

GANCHOS STANDARD

En ocasiones no se dispone de suficiente espacio para alo-- jar la longitud de desarrollo requerida. Se suele en estos casos hacer dobleces en el extremo de la varilla, de manera que se formen ganchos o escuadras. Si estos ganchos o escuadras, reúnen determinadas características geométricas, se denominan GANCHOS STANDARD.

En el reglamento A.C.I. se considera que un gancho estándar desarrolla un esfuerzo:

$$f_h = \xi \sqrt{f'_c}$$

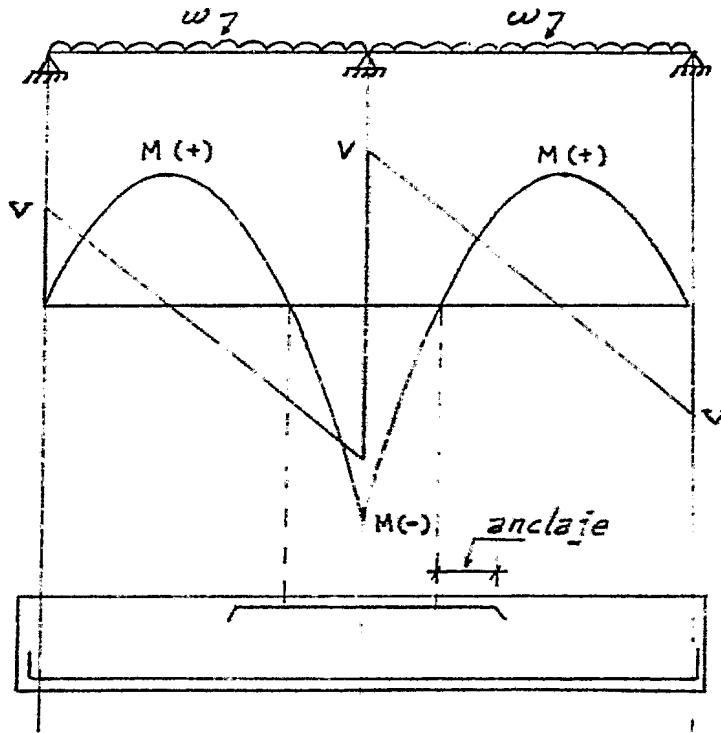
De donde "  $\xi$  " es aproximadamente igual a 0.034 fy; pero no mayor que los de la tabla siguiente:

varilla	$\xi$
Nº 18	50
Nº 11, Nº 14 varillas altas mayores que el Nº 6	95
todos los casos restantes	140

### ANCLAJE EN VIGA CONTINUA

El caso más frecuente de revisión de longitudes de desarrollo se presenta en vigas continuas.

En estas vigas se tienen momentos negativos en los apoyos y positivos en el centro del claro; ver figura:



El refuerzo se coloca en las zonas en que los momentos producen esfuerzos de tensión, o sea, en el lecho superior de la viga donde el momento es negativo y en el lecho inferior donde el momento es positivo.

El refuerzo negativo teóricamente puede cortarse o interrumpirse en el punto de inflexión, ya que más allá de este punto no se requiere para resistir esfuerzos de tensión. En la práctica nunca se corta el refuerzo exactamente en el punto de inflexión.



## DEFLEXIONES

El cálculo de las deflexiones tienen dos aspectos: Por un lado es necesario calcular las deflexiones de miembros estructurales bajo cargas y condiciones ambientales -- conocidas; por otro lado, deben establecerse criterios sobre límites aceptables de deflexiones. Ambos aspectos son -- complejos.

Se han estudiado en forma determinística, mientras que en -- realidad son de naturaleza probabilística, ya que las de--- flexiones medidas en ensayos de vigas teóricamente iguales presentan una gran dispersión.

El problema de calcular las deflexiones de miembros estruc- turales es aún más difícil que el estimar las deflexiones - de vigas ensayadas en el laboratorio.

La complicación estriba principalmente, en los siguientes - factores; el comportamiento del concreto es función del --- tiempo, y por consiguiente en cualquier enfoque riguroso de be tenerse en cuenta la historia de carga del miembro inves- tigado. En la práctica ésto no es posible generalmente, ya que las condiciones de carga son muy variable, tanto en la magnitud, como en el tiempo de aplicación; también es difícil predecir la variación de la humedad y temperatura con - el tiempo. No es fácil calcular los efectos de la interac- ción del miembro considerado con otros elementos. El momen- to de inercia varía debido a cambios en la cantidad de ace- ro de una sección a otra. etc.

Método simplificado para calcular las deflexiones de vigas bajo cargas de corta duración.

En los métodos simplificados, las deflexiones se calculan co- mo si se tratase de un elemento de un material homogéneo y elástico para el cual fueran aplicables las siguientes ecua-

ciones de mecánica de materiales:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \therefore \quad y = \iint \frac{y}{EI}$$

Con esta hipótesis ya no es necesario calcular la magnitud y distribución de curvaturas a lo largo del elemento.

la diferencia entre los distintos métodos consiste básicamente en los valores del módulo de elasticidad,  $E$ , y el momento de inercia  $I$ .

A continuación presentaremos el método del reglamento A.C.I. que es el más usual.

Este método está basado en estudios realizados por Branson según los cuales, el efecto de agrietamiento de concreto -- puede tomarse en cuenta usando en los cálculos un momento de inercia efectivo promedio  $I_{ef}$  a lo largo del elemento.

El valor de  $I_{ef}$  que presenta el reglamento, es el siguiente:

$$I_{ef} = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right) I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \quad I_{cr} < I_g$$

Donde:

$M_a$  = Al momento máximo.

$M_{cr}$  = Es el momento de agrietamiento de la sección homogénea de concreto calculado con la fórmula de la esquadria y suponiendo que el módulo de rotura es:

$$2 \sqrt{f'c}$$

$I_g$  = Al momento de inercia de la sección completa (sin considerar el refuerzo).

$I_{cr}$  = El momento de inercia de la sección agrietada transformada.

El valor de  $I_{ef}$  calculado con la ecuación anterior no deberá ser mayor de  $I_g$ .

Para deflexiones a larga duración, multiplicar la duración instantánea por:

$$2 - 1.2 \left( \frac{A's}{A_s} \right) \geq 0.6$$

Las deflexiones permisibles que marca el reglamento el A.C.I. son las siguientes:

Para pisos sin aplanados de yeso:  $\frac{L}{180}$

Para pisos con aplanados de yeso, pero sin separaciones:  $\frac{L}{300}$

En general para otras condiciones:  $\frac{L}{560}$

El reglamento de construcciones del P.F. (R.C.D.B.F.) recomienda lo siguiente:

$$\text{Flecha máxima} = 0.5 + \frac{L}{500}$$

Donde  $L$  = al claro entre puntos de inflexión.

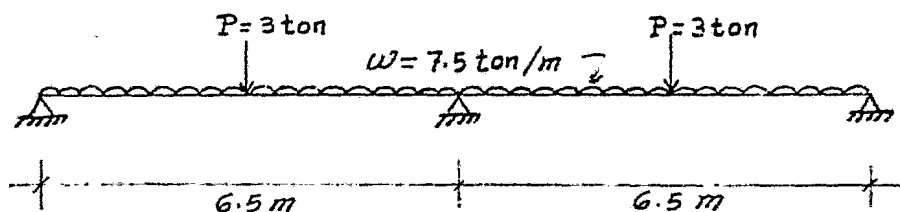
Para cargas diversas de larga duración:  $E_c = 5,000 \sqrt{f'_c}$

Para cargas de corta duración:  $E_c = 10,000 \sqrt{f'_c}$

En el siguiente ejemplo, se hará la revisión de una viga y se diseñará aplicando los cinco temas vistos en este trabajo escrito, es decir se revisará por:

- a).- Flexión
- b).- Tensión diagonal
- c).- Agrietamiento
- d).- Adherencia y anclaje
- e).- Por deflexiones

EJEMPL. IIUSTRATIVO



D A T O S:

Sección = 35x90

b = 35 cm.

f'c = 250 Kg/cm<sup>2</sup>

fy = 4,000 Kg/cm<sup>2</sup>

T.M.A. = 3/4" ( 1.9 cm)

F.C.M. = 1.2

F.C.V. = 2.4

S O L U C I O N :

I.- Determinación de los elementos mecánicos:

$$W p.p. = 0.35 \times 0.90 \times 2.4 \times 1.2 = 907 \text{ Kg/m.}$$

$$W c.v. = 7.5 \times 2.4 = 18,000 \text{ Kg/m.}$$

$$p = 3 \times 2.4 = 7.2 \text{ Ton.} \quad 18,907 \text{ Kg/m.}$$

II.- Analizaremos la viga usando el método de Hardy Cross, que consiste en encontrar los elementos de desequilibrio en cada nudo, suponiendo empotrados dichos nudos para después permitirles girar, distribuyendo -- los momentos proporcionalmente a las rigideces de cada miembro transportando los momentos debidos al giro a los extremos opuestos desequilibrando nuevamente los nudos, por lo que se debe repetir el procedimiento hasta que el valor de la corrección del momen

to de empotramiento no sea mayor del diez por ciento del va  
 lor inial.

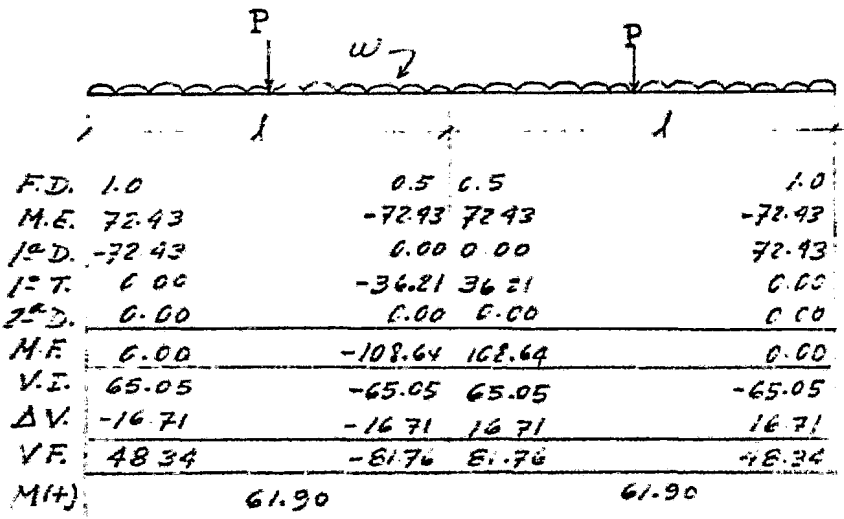
Los momentos de empotramiento, los calcularemos con las fór  
 mulas siguientes:

Para la carga uniformemente repartida:  $M = \frac{WL^2}{12}$

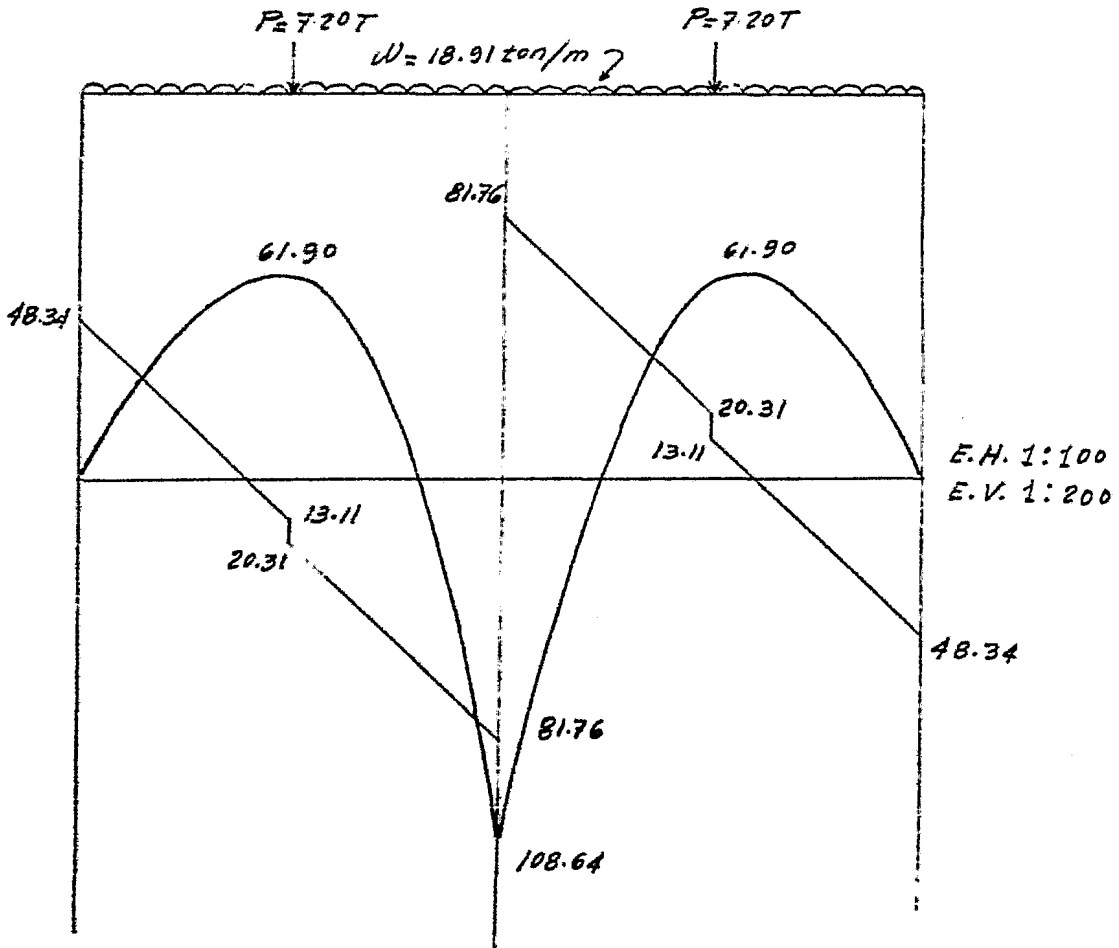
$M = \frac{18.91 \times 6.5^2}{12} = 66.58 \text{ Ton/m.}$

Para la carga concentrada:  $M = \frac{PL}{8}$

$M = \frac{7.2 \times 6.5}{8} = \frac{5.85 \text{ Ton/m.}}{72.43 \text{ Ton/m.}}$



El diagrama de momentos y de fuerzas cortantes, se representan en la siguiente figura:



### III.- Dimensionamiento de la sección:

Cálculo de las constantes:

$$\eta = \frac{f_y}{0.85 f'_c} = \frac{4,000}{0.85 \times 250} = 18.81$$

$$F_b = 0.75 \phi \frac{f'_c}{f_y} = \frac{6000}{6000+4000} = 0.75 \times 0.85^2 \frac{250}{4000} \times \frac{6000}{10000} = 0.0203$$

$$K = \frac{\rho \mu}{bd^2} = \phi \rho f_y \left(1 - \frac{\rho \mu}{2}\right) = 0.9 \times 0.0203 \times 4000 \left(1 - \frac{0.0203 \times 18.81}{2}\right) = 59.13$$

Para el cálculo de (d) lo hacemos con el mayor de los momentos obtenidos:

$$d = \sqrt{\frac{M}{Kb}} = \sqrt{\frac{108.64 \times 10^5}{35 \times 59.13}} = 72.5 \text{ cm.}$$

El área de acero que necesitamos para soportar el momento negativo será:

$$A_s (-) = \rho b d = 0.0203 \times 35 \times 72.5 = 51.5 \text{ cm}^2.$$

Para calcular el área de acero para el momento positivo, lo podemos sacar a partir del momento negativo por una regla de tres:

$$\frac{0.0203}{108.6} = \frac{x}{61.9} \therefore x = \frac{0.0203 \times 61.9}{108.6} = 0.0116$$

El porcentaje lo checaremos para ver que tengamos mayor --- porcentaje que el mínimo:

$$\rho \text{ mín.} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{4000} = 0.0035 < 0.0116 \therefore \text{ sí cumple.}$$

$$A_s (+) = 0.0116 \times 35 \times 72.5 = 29.35 \text{ cm}^2.$$

### IV.- Revisión por tensión diagonal del peralte calculado .

Se permitirá que  $V$  máx. pueda resistir cuatro veces  $V_c$ .

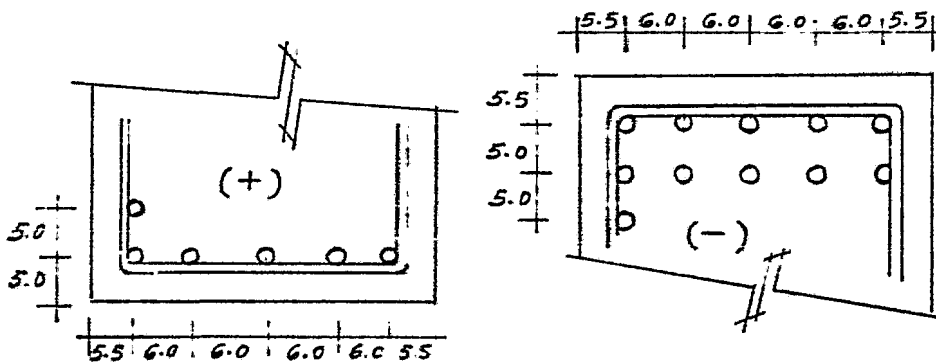
$$V \text{ máx.} = 4 \times 0.25 \times 0.5 \sqrt{f'c} b d = 4 \times 0.25 \times 0.5 \sqrt{250} \times 35 \times 72.5 = 68206 \text{ Kg.}$$

$V \text{ máx.} = 68.2 \text{ Ton.} < 81.76 \text{ Ton.}$  por lo tanto, la sección no pasa por tensión diagonal.

Podemos justificar, aceptando que el cortante ocurre a una distancia ( $d$ ) del paño de apoyo, suponiendo que el apoyo fuera de 15 cm. entonces, tendríamos  $72.5 + 15 = 87.5$ , midiendo a escala en el diagrama de cortantes, encontramos que aproximadamente nos da un cortante de 70.0 Ton.

V.- Colocación del acero.

Si	As (+) = 51.5 cm <sup>2</sup> .	11	8 = 55.78 cm <sup>2</sup> .
	As (-) = 29.35 cm <sup>2</sup> .	6	8 = 30.42 cm <sup>2</sup> .



VI.- Determinación de la longitud del anclaje.

	$l_a = 12\phi = 12 \times 2.5 = 30 \text{ cm.}$
As (+)	$d = 72.5 \longrightarrow \text{RICE}$
	12 $\phi$
As (-)	$d \longrightarrow \text{RICE}$



## VII.- Determinación de la longitud de desarrollo

$$A_s(+); L_d = 0.06 A_v \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \geq 0.0057 \phi f_y = 0.0057 \times 2.5 \times 4000 = 57 \text{ cm.}$$

$$= 0.06 \times 5.07 \times \frac{4000}{\sqrt{250}} = 76.90 \text{ cm} > 57 \text{ cm}$$

As (-); Como son barras altas se multiplicará la Ld de las barras bajas por 1.4

$$L_d = 77 \times 1.4 = 107.8 + 72.5 = 180.3 \text{ cm}$$

## VIII.- Cálculo de la longitud de apoyo

$$L_{ap.} = \frac{R}{f_{apb}} = \frac{48340}{0.7 \times 0.85 \times 250 \times 35} = 9.3$$

∴ Longitud de apoyo exterior es 9.3 cm

Para la longitud de apoyo interior

$$L_{ap.} = \frac{2 \times 81760}{0.7 \times 0.85 \times 250 \times 35} = 31.4 \text{ cm.} \approx 32 \text{ cm}$$

La viga se prolongará 17.0 cm a partir del eje del apoyo exterior para poder dar el gancho Standar con radio de 7.5 cm como mínimo.

## IX.- Cálculo del momento que resiste una varilla.

Se saca el centro de gravedad del conjunto de varillas -- tanto para las positivas como para las negativas.

$$As (+) \quad y = \frac{5 \times 5.5 + 1 \times 10.5}{6} = 6.3 \text{ cm}$$

$$\therefore h = d + y = 72.5 + 6.3 = 78.8 \text{ cm}$$

$$As (-) \quad y = \frac{5 \times 5.5 + 5 \times 10.5 + 1 \times 15.5}{11} = 8.7 \text{ cm}$$

$$h = d + y = 72.5 + 8.7 \approx 81.2 \text{ cm}$$

Nos rige entonces  $h = 81.2 \text{ cm}$

$$d (+) = h - y = 81.2 - 6.3 = 74.9 \text{ cm}$$

$$d (-) = h - y = 81.2 - 8.7 = 72.5 \text{ cm}$$

Entonces la capacidad del momento de una varilla será:

$$M_R = \phi As f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) \quad \therefore a = \text{pmd}$$

$$a (-) = 0.0203 \times 18.8 \times 73 = 27.26 \text{ cm}$$

$$a (+) = 0.0116 \times 18.8 \times 75 = 15.80 \text{ cm}$$

$$m_r (-) = 0.9 \times 5.07 \times 4000 \left( 72.5 - \frac{27.26}{2} \right) = 10.84 \times 10^5$$

$$m_r (+) = 0.9 \times 5.07 \times 4000 \left( 74.9 - \frac{15.8}{2} \right) = 12.25 \times 10^5$$

#### X.- Cálculo de la flecha

Se calculará con el método de Newmark, como la viga es simétrica se calculará la flecha para un solo claro.

$P = 3 \text{ ton}$

$w = 8.256 \text{ ton/m}$

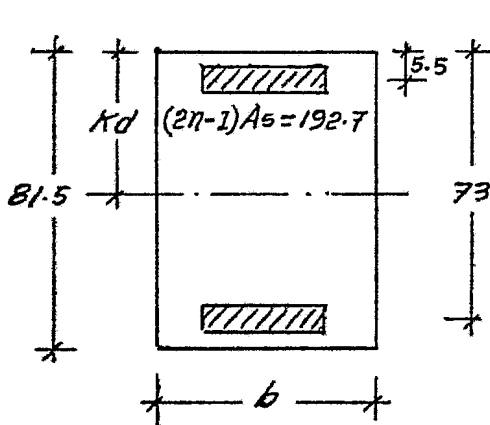
$h$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	
$P$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	8.256 ton
$P$	3	6	6	3	3	6	6	$\frac{8.256 \times 1.08}{6} \text{ ton}$
$P$	-4.458	-8.916	-8.916	-4.458	-4.458	-8.916	-8.916	-4.458 ton
$V = 123$	43.84	34.92	26	14.08	5.16	-3.76	-8.22	ton
$Vh$	43.84	34.92	26	14.08	5.16	-3.76	-8.22	ton
$M$	0	43.84	78.76	104.76	118.84	124	120.24	1.08 ton-m
$\alpha = -\frac{M}{EI}$	0	-43.84	-78.76	-104.76	-118.84	-124	-120.24	$\frac{1.08}{EI} \text{ ton-m}$
$A$	-92.14	-517.16	-936.20	-581	661.2	-1417.20	-1475.0	-1466.80 $1.08^2/EI \text{ ton-m}^2$
$\phi$	7058.6	6591.4	5605.1	4363	2945.8	1466.8		
$\phi h$	7058.6	6591.4	5605.1	4363	2945.8	1466.8		
$Y_1$	-27981	-20922	-14380.7	-8775.6	-4112.6	-1466.8	0.0	
M.C.	0.0	1	2	3	4	5	6	
A.C.		-12	-24	-36	-48	-60	-34	
$\phi.c.$	214	202	178	142	94	34	0.0	
$y.c.$	864	650	448	270	128	34		
M.C.	0.0	32.4	64.8	97.2	129.6	162	194.4	
M.F.	0.0	11.4	13.96	7.56	-10.76	-38	-74.16	1.08 ton-m
$y.c.$	27981	21060	14515	8748	4147	1102	0.0	
$y$	0	138	1343	-27.6	-265.6	-364.8	0.0	$\frac{1.08^3}{12EI} \text{ ton-m}^3$

$\curvearrowright y_{\text{max}}$

$$M_a = 13.06 \times 1.09 = 15.07 \text{ ton-m}$$

$$y = \frac{1343 \times 1.09^3}{12 E I} = \frac{141}{E I}$$

XI.- Enseguida se calculará la profundidad del eje neutro  $K_d$



$$\frac{35 \times K_d^2}{2} + 192.66(K_d - 5.5) - 304.2(73 - K_d) = 0$$

$$17.5K_d^2 + 192.66K_d - 1059.6 + 304.2K_d - 22206.6 = 0$$

$$K_d^2 - 28.39K_d - 1329.49 = 0$$

$$K_d = -14.0 \pm \sqrt{201.35 + 1329.49}$$

$$y(-) = K_d = -14.19 + 39.12 = 24.93 \text{ cm}$$

$$I_{cr} = \frac{35 \times 24.93^3}{3} + 192.66(24.93 - 5.5)^2 + 304.2(73 - 24.93)^2$$

$$= 180764.5 + 72733.95 + 702922.5 = 956420.95 \text{ cm}^4$$

$$I_g = \frac{35 \times 81.5^3}{12} = 1578018.1 \text{ cm}^4$$

$$y(+)=d-K_d=73-24.93=48.07 \text{ cm}$$

$$M_{cr} = \frac{2 \sqrt{250}}{48.07} \cdot I_g = 1'398750.3 \text{ Kg-m}$$

$$M_a = 15.07 \text{ ton-m} = 1'507000 \text{ Kg-m}$$

$$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \leq I_g$$

$$\frac{M_{cr}}{M_a} = \frac{13.987}{15.07} = 0.928 ; (0.928)^3 = 0.799$$

$$(0.799) I_g = 0.799 \times 1'578018.1 = 1'261555.5$$

$$(1-790) I_{er} = 192240.6$$

$$I_e = 192240.6 + 1261555.5 = 1453796.1 < I_g \quad \therefore \text{Bien}$$

La flecha será entonces  $Y = \frac{M}{12EI}$

$$Y = \frac{141 \times 10^9}{158114 \times 1453796} = \frac{141 \times 10^9}{229.86 \times 10^9} = 0.61 \text{ cm}$$

$$E_c = 10000 \sqrt{f_{c'}} = 158114$$

$$Y_{dif} = 2-1.2 \frac{A's}{A_s} = 2-1.2 \frac{10.14}{30.44} = 1.6 \text{ (Y instantánea)}$$

$$Y_{final} = Y_{inst} + 1.6 Y_{inst} = 0.61 + 1.6 \times 0.61 = 1.586 \text{ cm}$$

$$Y_{permisible} = \frac{L}{360} = \frac{650}{360} = 1.800 \text{ cm} > 1.586 \text{ Bien}$$

#### XII.- Cálculo del agrietamiento

$$Z = f_s \sqrt[3]{d c A^3} = 1327 \sqrt[3]{6.3 \times 77.5^3} = 10267 > 26000$$

$\therefore$  agrietamiento está dentro de lo permitido

#### XIII.- Cálculo de la separación de los estribos y las varillas dobladas.

Cortante que toma el concreto

$$V_c = \phi 0.5 \sqrt{f_{c'}} b d = 0.85 \times 0.5 \sqrt{2500} \times 35 \times 72.5 = 17.051 \text{ ton}$$

Cortante que toman las varillas dobladas

Será dos tercios de lo que resta de el cortante total menos lo que tiene el concreto.

La separación de las varillas dobladas será

$$S = \frac{avfvd \phi 1.414}{V'} = \frac{5.07 \times 4000 \times 72.5 \times 0.85 \times 1.414}{V'}$$

$$S = \frac{1767153.5}{V'} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } V' = 35 \text{ ton} & S = 50.4 < 54 \\ \text{Si } V' = 20 \text{ ton} & S = 60.9 > 54 \\ \text{Si } V' = 23 \text{ ton} & S = 76.8 > 54 \end{array} \right.$$

Separación de los estribos

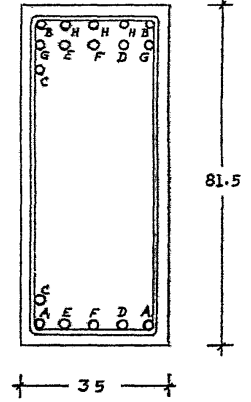
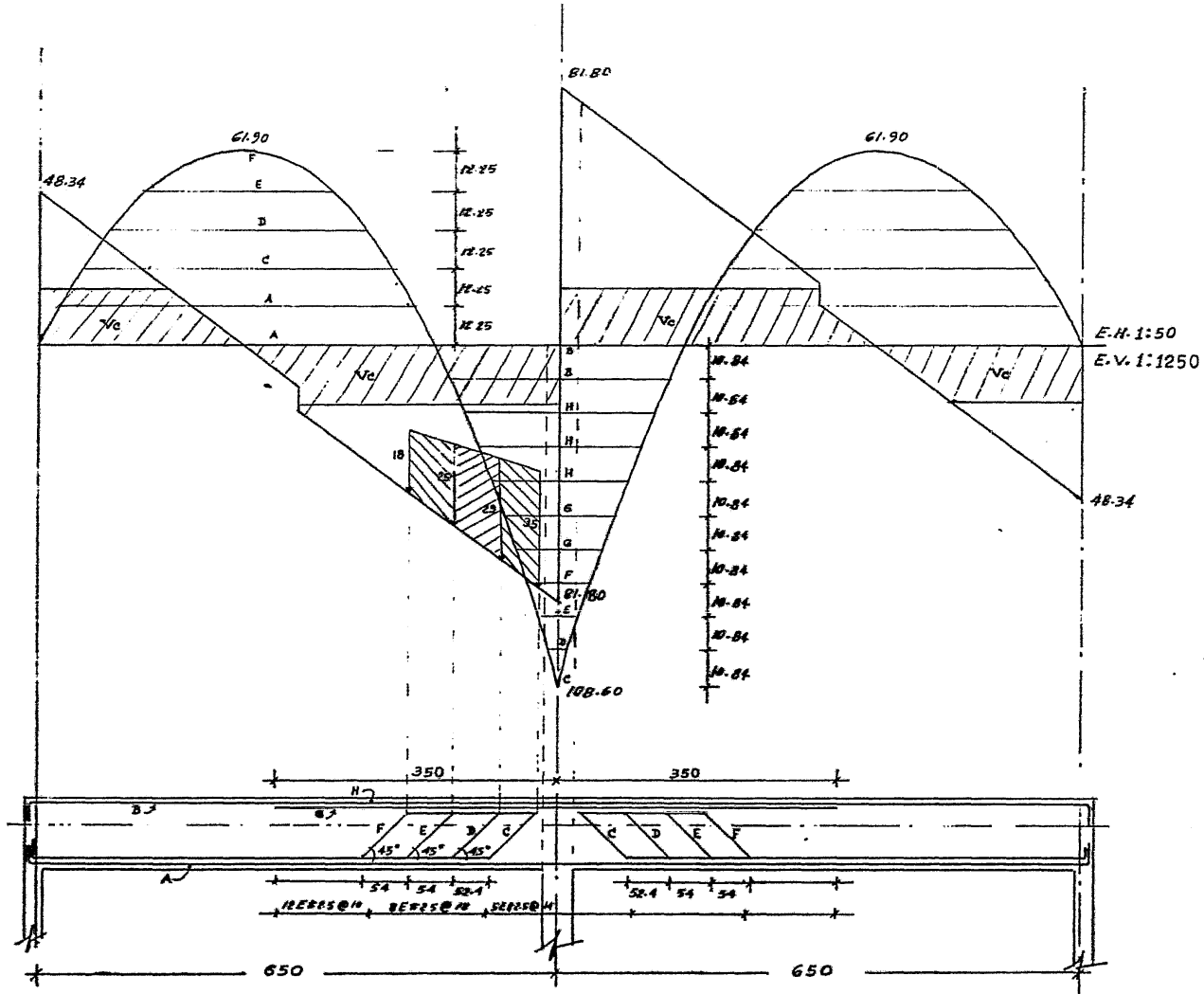
Estos toman un tercio de lo que resta del cortante total menos el cortante que toma el concreto menos el cortante que toma -- las varillas dobladas.  $S = \frac{2avfvd\phi}{V'} = \frac{2 \times 0.5 \times 4000 \times 72.5 \times 0.85}{17500}$

$$S = \frac{248200}{17500} = 14.18 \text{ Se pondran } E \# 2.5 @ 14.0 \text{ cm}$$

$$\text{Si } V' = 1400 \text{ ton} \longrightarrow S = 18.00 \text{ cm}$$

Los demás estribos se pondrán a una separación mas reducida para que tomen un cortante mayor.

$$S = 10 \text{ cm}$$



## BIBLIOGRAFIA

ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO.- R. PARK Y T. PAULAY. Editorial Limusa, México 1980.

ASPECTOS FUNDAMENTALES DE CONCRETO REFORZADO.- OSCAR M. GONZALES CUEVOS, FRANCISCO ROBLES F. V., JUAN CASILLAS G., ROGER DIAS DE COSSIO. Editorial Limusa México, 1975.

REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES DEL DEPARTAMENTO DEL D. F. Unibersidad Nacional Autónoma de México, Instituto de-- Ingeniería, 1977.