



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ingeniería

29  
178

Ayudas Prácticas para el Diseño de Losas de  
Concreto Reforzadas Aligeradas

T E S I S

Que para obtener el título de:

I N G E N I E R O C I V I L

P r e s e n t a :

Daniel Enrique Reyna Valdivia

México, D. F.

1983



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

NOTACION	
1. INTRODUCCION	1
2. CARACTERISTICAS DE LAS LOSAS	7
2.1 Descripción	8
2.2 Clasificación	9
2.3 Ventajas estructurales y constructivas	10
3. DESCRIPCION DEL ANALISIS	12
3.1 Generalidades	12
3.2 Análisis teórico de momentos aplicados en placas isótropas	13
3.2.1 Ecuación diferencial de placas delgadas con pequeños desplazamientos	14
3.3 Efecto en placas ortotrópicas	23
3.3.1 Ecuación diferencial de las placas ortótropas	24
3.4 Método de la estructura equivalente	29
3.4.1 Procedimiento de cálculo	30
4. COMENTARIOS AL METODO DEL MARCO EQUIVALENTE Y AYUDAS PRACTICAS PARA EL DISEÑO DE LOSAS ALIGERADAS	41
5. APLICACIONES	46
6. COMENTARIOS GENERALES	66
7. REFERENCIAS	68
APENDICE	
TABLAS	
FIGURAS	

## NOTACION

Ac	área crítica para tensión diagonal
As	área de refuerzo longitudinal en tensión, $\text{cm}^2$
Asmax, Asmin	área de refuerzo máximo y mínimo respectivamente
Av	área de refuerzo por tensión diagonal comprendido en una distancia $s$
b	ancho de la sección
be	ancho efectivo
C	constante de la sección transversal para definir las propiedades del miembro torsionante
c	dimensión de la columna o capital
c1, c2	respectivamente, dimensiones de la columna en la dirección paralela y normal al análisis
d	peralte efectivo de la losa
E	módulo de elasticidad
Eca	módulo de elasticidad del concreto en una losa
estr	estribos
Fc	factor de carga
FR	factor de resistencia
f'c	resistencia especificada del concreto a compresión, $\text{kg}/\text{cm}^2$

$f'c$	$(1.05 - \frac{f^*c}{1250}) f^*c \leq 0.85 f^*c$
$f^*c$	resistencia nominal del concreto a compresión, $kg/cm^2$
$f_s$	resistencia del acero en condiciones de servicio, $0.6 f_y$
$f_y$	esfuerzo especificado de fluencia del acero, en $kg/cm^2$
$G$	módulo de elasticidad por esfuerzo cortante
$H_i$	altura desde el nivel cero hasta el nivel $i$ , para análisis sísmico
$h$	paralte total de un elemento, o dimensión transversal de un miembro, paralela a la flexión o a la fuerza cortante; también altura de un entrepiso eje a eje
$I_s$	momento de inercia de un ancho de losa igual a $l_2$ . Excepto la dimensión $l_2 h^3 / 12$
$I_{sb}$	momento de inercia de un ancho de losa igual a $l_2$
$K_c$	rigidez de la columna a flexión
$K_{ec}$	rigidez de la columna equivalente
$K_t$	rigidez torsionante
$K_{ta}$	rigidez torsional aumentada
$l_c$	longitud de la columna
$l_1, l_2$	respectivamente, claros paralelo y normal a la dirección que se analiza, de un tablero de losa plana
$M_R$	momento resistente de diseño
$m_x, m_y$	momentos flexionantes alrededor del eje $x, y$ respectivamente.
$m_{xy}, m_{yx}$	momentos torsionantes
$p$	porcentaje de acero $A_s/bd$ (en vigas)
$q$	$p f_y / f'c$

$q_x, q_y$	fuerzas unitarias en las direcciones $x, y$ respectivamente
$a$	separación del refuerzo transversal
$u, v, w$	componentes de desplazamiento
$F$	fuerza cortante
$V_{adm}$	fuerza cortante admisible, kg
$V_c$	fuerza resistente al corte, kg
$V_{CR}$	fuerza cortante de diseño que toma el concreto, kg
$V_u$	fuerza cortante última, kg
$w$	carga en condiciones de servicio
$W_i$	peso del nivel $i$ , kg
$\epsilon$	deformación unitaria
$F$	esfuerzo normal, $kg/cm^2$
$\nu$	relación de Poisson
$\tau_{xy}, \tau_{yx}$	esfuerzos cortantes
$\gamma_{xy}, \gamma_{yx}$	deformación por cortante ( distorsión angular)
$\phi$	ángulo entre el acero de refuerzo con el eje de la pieza, en cortante. Ángulo de giro en teoría de placas
$\Delta$	incremento

## 1. INTRODUCCION

Conviene decir que la losa plana consiste de un elemento plano (losa) apoyado directamente sobre columnas. El espesor de la losa puede engrosarse en la región de la columna por medio del llamado ábaco, además pueden incrementarse las dimensiones de la porción de la columna inmediatamente abajo de la losa para formar el capitel. La tendencia actual es la de construir losas planas omitiendo el ábaco y el capitel. El procedimiento de diseño parte, originalmente, de los análisis hechos considerándola como una placa plana.

La losa plana se ha empleado en la práctica desde hace más de 70 años. Al principio, las losas no se diseñaban, sino que simplemente se construían y se sometían a algunas pruebas de carga; el requisito de seguridad consistía en que no se excediera una deformación límite especificada de manera empírica.

En 1913, siete años después de que se construyó la primer losa plana, se estimaba que más de mil edificios se habían construido usando este sistema. A pesar de que el diseño de la losa plana no estaba cubierto en los reglamentos, el empleo de esta fue un éxito debido a su economía.

Durante ese periodo se desarrollaron varias teorías para explicar los diseños usados. Además, se hizo un gran número de pruebas de carga en edificios reales, para medir deformaciones y con ello poder determinar la magnitud y distribución de deformaciones unitarias, de esfuerzos y momentos.

El primer procedimiento teórico para explicar el comportamiento de las losas fue el que publicó J.R. Nichols en 1914 (ref 1), su análisis produjo por primera vez un medio de calcular el momento total estático que debe resistir una losa plana.

El primer reglamento de construcciones que incluyó especificaciones referentes al cálculo de estas estructuras fue el de la ciudad de Chicago en 1914, pero el momento total para el cual se debería diseñar la losa era menor que el momento total estático obtenido por Nichols. Posteriormente aparecieron especificaciones en los reglamentos del A.C.I.

Las especificaciones anteriores estaban basadas en la experiencia que se tuvo en la construcción satisfactoria y el uso de losas planas, y no en investigaciones, a pesar de que muchos de los datos que se obtuvieron de medir deformaciones unitarias en estructuras reales se interpretaron por algunos ingenieros para justificar diseños basados en un momento menor del que se obtendría por estática. Esta interpretación era naturalmente errónea, y dependía solamente de suponer que cierta porción de la capacidad de flexión de la losa se debía a la tensión en el concreto.

Actualmente se permite diseñar un sistema de piso (ref 7) "..... por cualquier procedimiento que satisfaga las condiciones de equilibrio y compatibilidad geométrica .....", utilizando generalmente dos alternativas: el procedimiento



semiempírico conocido como " Método de Diseño Directo " y el análisis elástico aproximado llamado " Método del Marco Equivalente ".

En este trabajo de tesis profesional se describe el Método del Marco Equivalente, y se presentan, además, unas gráficas cuyo objetivo fundamental es facilitar el diseño de las losas aligeradas para las personas que están involucradas con ello en la práctica profesional.

Las losas aligeradas de concreto reforzado tienen tres componentes principales, los cuales son: concreto, acero de refuerzo y materiales aligerantes.

Respecto a los materiales aligerantes, los bloques huecos son los que con más frecuencia se utilizan en la construcción de losas encasetonadas; aunque existen, además, otros tipos de bloques como son de poliuretano, sofit, cartón comprimido y tubos sonovoid.

En este trabajo de tesis profesional no se tratará acerca de las propiedades del concreto y del acero de refuerzo, puesto que estos ya son de sobra conocidas. Ni tampoco se hablará acerca de los procesos de fabricación de los distintos materiales aligerantes.

Los bloques se fabrican en diversas medidas para formar cajas, generalmente de 20x20, 40x40, 60x60, 40x60, o cualquier combinación entre ellas, y con peraltes que varían desde 10 hasta 60 cms.

En el capítulo 2, se describen los diferentes tipos de losas de acuerdo con la forma de apoyo y se hace notar la diferencia que existe entre la losa plana reticular y los demás tipos. Se enumeran también algunas de las principales ventajas, tanto estructurales como constructivas.

En el capítulo 3, debido a la analogía entre las losas planas y las placas, puesto que se consideran como estructuras bidimensionales, en donde las propiedades de flexión dependen del espesor. Se discuten las hipótesis así como las ecuaciones que gobiernan el problema de placas delgadas con pequeños desplazamientos, placas delgadas con grandes desplazamientos y el de placas gruesas.

Debido a que las ecuaciones gobernadoras de los casos anteriores, fueron desarrolladas bajo la hipótesis de que existe isotropía en el material del cual está formada la placa y, estrictamente, la generalidad de las aplicaciones prácticas corresponden a problemas en los cuales los materiales involucrados son eminentemente anisótropos, se presentan también ecuaciones en las cuales se toma en cuenta la anisotropía estructural, introducida mediante las nervaduras características de las losas reticulares, de acuerdo con la ecuación diferencial de las placas ortótropas; sin embargo, ya que la solución del problema no es simple, en la práctica se recurre al "Metodo de la Estructura Equivalente", del cual se describen los fundamentos y características principales, así como el procedimiento de cálculo en lo referente a idealización de la estructura, determinación de rigideces, análisis estructural, distribución de momentos flexionantes y dimensionamiento de la estructura.

En el capítulo 4, se discuten brevemente los dos problemas que conciernen a los sistemas de entrapiso a base de losa plana, como son la presencia de deflexiones excesivas bajo cargas de servicio y la posibilidad de falla por cortante bajo sobrecargas.

En ensayos realizados últimamente se ha demostrado que casi una total redistribución de momentos flectores puede

alcanzarse en tales sistemas antes del colapso, siempre que se impidan las fallas por cortante. Debiendo poner especial cuidado en edificios sujetos a carga lateral para conseguir un mecanismo de falla dominado por flexión, para el cual se debe diseñar la conexión para resistir esfuerzos cortantes.

Con lo que respecta a las ayudas prácticas para el diseño de losas aligeradas de concreto reforzado, se trata principalmente de facilitar al profesional en la materia, el trabajo en cuanto a la obtención del área de acero requerida para resistir las fuerzas de tensión o compresión (según sea el caso) que se presentan en las nervaduras características de las losas nervadas.

Con ayuda de las gráficas aquí proporcionadas, tan solo con conocer el valor de los momentos, tanto negativo como positivo, y sin necesidad de afectar éstos por ningún factor, de acuerdo con los espesores de las franjas de columna y central, se obtiene directamente el área de acero requerida.

En el capítulo 5, se presenta un ejemplo en el cual se sigue paso a paso, tanto la obtención de elementos mecánicos como el diseño de la losa nervada, utilizando para ello las ayudas prácticas.

Puesto que como ya se menciona con solo conocer el valor de el momento actuante ( momento resistente de diseño  $M_R$ ) y el ancho de columnas o central ( efectivo), se obtiene el valor del área de acero requerida ( $A_s$ ). En el ejemplo presentado se trató de hacer ver que metodología se debe seguir cuando debido a la magnitud del momento, se caiga dentro de una zona en donde no se encuentra tabulada la curva  $M_R-A_s$ ; puesto que para su obtención solo se consideraron secciones simplemente reforzadas, y que por razones de proyecto, como pudiera ser

no permitir aumento en el espesor de la losa, deba diseñarse esta con las nervaduras trabajando como secciones doblemente reforzadas.

El diseño de la losa para resistir esfuerzos cortantes se hace en la forma recomendada por el RDF - 76, tanto para las nervaduras, como en la sección crítica alrededor de las columnas.

## 2. CARACTERISTICAS DE LAS LOSAS

Los sistemas de entrepiso reticular se usan con mucha frecuencia en las construcciones de concreto reforzado, debido a las ventajas que este tipo de elementos tienen respecto a las losas macizas, con o sin vigas de apoyo.

Quizá la ventaja más importante que caracteriza a los sistemas de entrepiso reticular es la disminución del peso propio de la losa, mediante la inclusión de elementos livianos de relleno o de elementos huecos definitivos o removibles con posterioridad al colado del concreto. De esta manera se logra una notable economía en la cantidad de concreto necesario y en la cuantía de acero de refuerzo requerida.

Los edificios que están compuestos por este tipo de losas de entrepiso, sujetos a cargas verticales, se analizan idealizándolos como un conjunto de marcos planos, para lo cual se utiliza el concepto del ancho equivalente, con el objeto de definir las características de las vigas. Los reglamentos de construcción contienen recomendaciones a fin de conseguir que el comportamiento de la estructura equivalente sea representativa de la real.

Cuando los edificios estructurados con sistemas de entrepiso reticular están sujetos a cargas laterales, presentan un comportamiento diferente al que corresponde a el caso de sollicitaciones verticales (ref 2); sin embargo, los reglamentos no contienen especificaciones que tomen en cuenta esta diferencia en el comportamiento estructural. La idealización de los marcos correspondiente a carga vertical, cuando se usa en edificios sujetos a carga lateral, puede dar resultados desfavorables en el diseño de las columnas.

## 2.1 Descripción

Las losas son elementos estructurales, cuyas dimensiones en planta son grandes en comparación con su peralte, siendo las acciones principales las cargas aplicadas normales a su plano, aunque en ocasiones actúan fuerzas contenidas en éste, que se transmiten a los marcos, muros u otros elementos rigidizantes.

Las losas pueden estar apoyadas solamente en dos lados opuestos, en cuyo caso la acción estructural es esencialmente en una dirección. La losa puede soportar cargas en la dirección perpendicular a las vigas de apoyo (fig 1); también se da el caso en que los apoyos se encuentran en los cuatro lados de la losa, con lo cual se obtiene una losa con trabajo en las dos direcciones (fig 2). Si la relación de largo a ancho de un tablero de losa es mayor que 2, se pueden colocar vigas intermedias para obtener el efecto de trabajo en una dirección, aun cuando los soportes estén colocados en los cuatro lados (fig 3). En algunos casos las losas de concreto pueden estar soportadas directamente por columnas, sin el uso de vigas de apoyo; dándoseles comúnmente el nombre de " Losas Planas " (fig 4).

Como las vigas de apoyo pueden ser de cualquier tamaño, las losas planas se pueden considerar como un caso particular de las losas perimetralmente apoyadas, en el que las vigas se han reducido hasta desaparecer; por el contrario las losas perimetralmente apoyadas se pueden ver como las losas planas en las que se han rigidizado los ejes que unen las columnas. Las losas apoyadas sobre muros también se pueden considerar como un caso particular de las losas perimetralmente apoyadas sobre vigas infinitamente rígidas (ref 3).

Frecuentemente, en la construcción de losas planas se emplean columnas ensanchadas en la unión columna - losa, adaptadas para reducir la tensión debido a fuerza cortante y flexión negativa alrededor de las columnas, dándosele a esa parte el nombre de "ábaco o capitel" (fig 5).

Estrechamente relacionada con la losa plana está la losa reticular, en la cual para reducir el peso de la carga muerta de la losa maciza se forma una cuadrícula de vacíos, resultando nervaduras en toda la losa, las cuales la hacen trabajar en ambos sentidos. En este tipo de losas se acostumbra omitir los vacíos en la periferia de las columnas para tener una mayor resistencia a fuerza cortante y flexión negativa en esas áreas (fig 6).

## 2.2 C l a s i f i c a c i ó n

Por conveniencia las losas planas se clasifican como (ref 4):

Losas planas sólidas. Dentro de las cuales se encuentran; losas planas sin ábaco, losas planas con ábaco, losas planas con ábaco y capitel.

Losas planas aligeradas. Como pueden ser las losas planas aligeradas con casetones no recuperables formados

con bloques de concreto simple, de espuma de poliuretano u otros, losas planas aligeradas con casetones recuperables, conocidas también como losas waffle o losas parrilla.

### 2.3 Vent a j a s e s t r u c t u r a l e s y c o n s t r u c t i v a s

Las ventajas estructurales más relevantes de las losas planas se pueden resumir como sigue:

Reduce la altura del edificio en 30 cm por piso en promedio sin afectar la altura libre escogida, representando una gran economía en muros, columnas, aplanados, recubrimientos, escaleras, etc. Reduciendo además, el peso sobre la cimentación y el momento de volteo.

Un gran ahorro en costo de material y mano de obra para el cimbrado, reduciéndose además el desperdicio al evitar cortes para acomodar traveses y hacer costados para las mismas.

Al no tener que interrumpir la superficie horizontal para armar traveses y descimbrarlas, se puede reducir hasta en un 50% el tiempo empleado en el colado de la losa. Además, es más fácil colocar la distribución del alumbrado, tuberías y ductos, ya que al tendido de las líneas puede ser recto en cualquier dirección, sin tener que rodear ni tomar en cuenta la simetría de éstas con respecto a las traveses.

Facilidad para disponer la colocación de las columnas, ya que no es necesario que estén en la misma línea, ni que guarden cierta simetría entre ellas. Teniendo con esto mayor flexibilidad en la colocación de divisiones interiores, ya que no existen traveses sobre las cuales deban estar las concentraciones de carga. Siendo, además, más recomendables para



cubrir claros mayores de 6.0 m. que los sistemas convencio-  
nales de losa y trabe.

No se requieren falsos plafones para ocultar trabes,  
ni rellenos como en el caso de entrepisos con trabes inverti-  
das. Al suprimir las trabes, se obtiene un ahorro en el costo  
de enyesados y decoración, al haber una menor superficie a  
tratar.

### 3. DESCRIPCION DEL ANALISIS

Un sistema de losa puede diseñarse mediante cualquier procedimiento que satisfaga las condiciones de equilibrio de fuerzas y compatibilidad geométrica, si se demuestra que la resistencia de diseño en cada sección es por lo menos igual a la resistencia requerida, tomando en cuenta todas las combinaciones de carga muerta, viva y accidental, y que no se alcancen los estados límite de servicio ( de deflexiones, agrietamiento, etc).

#### 3.1 Generalidades

La distribución de momentos en la losa es un problema complejo. Esta depende no solo de las características propias de la losa, sino también de los elementos que constituyen la estructura, como vigas y columnas.

En la Universidad de Illinois, entre los años 1960 a 1963, se efectuó una serie de ensayos estructurales formados por losas, vigas y columnas.

Los resultados de esos ensayos en combinación con estudios analíticos, han permitido desarrollar métodos de diseño que toman en cuenta el efecto de las variables más importantes sobre el comportamiento de las estructuras.

Independientemente de los experimentos que se han realizado, se han hecho estudios analíticos tomando como base la teoría de placas planas.

Debido a que la ecuación diferencial de placas ortótropas está formulada para problemas en los cuales los materiales involucrados son eminentemente anisótropos, y como esta fórmula tiene similitud con la de placas delgadas con pequeños desplazamientos, en materiales isótropos, se presentan la deducción de las dos ecuaciones para poder ver las analogías inherentes entre ellas.

### 3.2 Análisis teórico de momentos aplicados en placas isótropas

Las placas se consideran como estructuras bidimensionales, en donde las propiedades de flexión dependen del espesor.

Generalmente en los estudios de placas se consideran los siguientes tipos: placas delgadas con pequeños desplazamientos, placas delgadas con desplazamientos grandes, y placas gruesas.

En las placas delgadas con pequeños desplazamientos, se supone que éstos son pequeños en comparación con el espesor de la placa. En la teoría de flexión de placas sujetas a cargas transversales, se suponen las siguientes hipótesis (refs 5 y 6):

1. No existen deformaciones en la superficie media de la placa
2. Los puntos de las placas que se encuentran inicialmente sobre un plano normal a la superficie media, permanecen en ese plano después de que se ha flexionado.

### 3. Los esfuerzos normales en la dirección transversal a la placa pueden despreciarse

En las placas delgadas con grandes desplazamientos se considera que la primera hipótesis se cumple siempre y cuando no se presenten deformaciones en la superficie media. Los cálculos demuestran que los esfuerzos correspondientes a la superficie media son despreciables si los desplazamientos de placa son pequeños en comparación con el espesor. Para este tipo de placas se obtienen ecuaciones no lineales, y la solución del problema llega a ser complicado.

En el caso de placas de espesor considerable, especialmente en losas con fuertes concentraciones de carga, se deberá aplicar la teoría de placas gruesas. Esta teoría considera el problema de placas como un problema tridimensional de elasticidad.

#### 3.2.1. Ecuación diferencial de placas delgadas con pequeños desplazamientos

La ecuación diferencial de las placas en un sistema de coordenadas cartesianas se basa en las siguientes hipótesis: a) El material es elástico, homogéneo e isótropo; b) La placa inicialmente es plana; c) El espesor de la placa es pequeño comparado con las demás dimensiones de la misma; d) Las deflexiones son pequeñas, comparadas con el espesor de la placa; e) Las pendientes de la superficie media deflectada son pequeñas comparadas con la unidad; f) Las deformaciones son tales que las secciones normales a la superficie media, inicialmente planas, permanecen planas después de la deformación (Hipótesis de Navier); g) La deflexión de la placa se produce por

los desplazamientos de la superficie media, normales a su plano inicial, y h) Los esfuerzos normales a la superficie media son de magnitud despreciable.

Para deducir la ecuación diferencial que gobierna al problema se hace lo siguiente:

- 1) Seleccionar un marco objetivo de referencia (fig 8)
- 2) Establecer el equilibrio de un elemento diferencial de placa (fig 9)
- 3) Determinar la relación que existe entre los esfuerzos, deformaciones (giros) y desplazamientos en el plano xy (figs 10 a 12)
- 4) Expresar la relación que existe entre los elementos mecánicos y los desplazamientos verticales (flechas)

Para establecer el equilibrio se supone que la placa se somete a fuerzas transversales a su plano. De las 6 ecuaciones de equilibrio en el espacio, se utilizarán las siguientes:

$$\sum m_x = 0 \qquad \sum m_y = 0 \qquad \sum P = 0$$

de acuerdo con la fig 9, se dan las siguientes ecuaciones:

$$\sum m_x = 0 ; \qquad \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \qquad (1)$$

$$\sum m_y = 0 ; \qquad \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x \qquad (2)$$

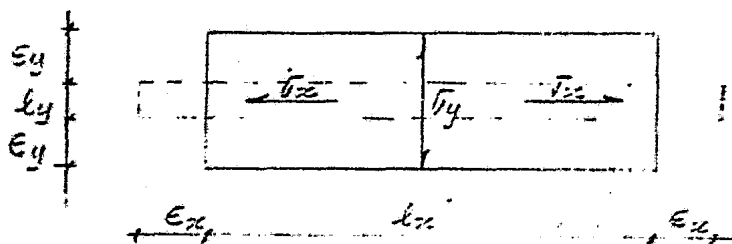
$$\sum P_z = 0 ; \qquad \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = - P_z \qquad (3)$$

Substituyendo las ecs 1 y 2 en la ec 3 y observando que  $m_{xy} = m_{yx}$  se obtiene :

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 m_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -P_z(x,y) \quad (4)$$

Los momentos flexionantes y torsionantes en la ec 4 dependen de las deformaciones; además, las deformaciones están en función directa de las componentes de desplazamiento  $u, v, w$ .

Para obtener la relación que existe entre los esfuerzos, las deformaciones y los desplazamientos; primeramente se establece la correspondencia que existe entre los esfuerzos y las deformaciones longitudinales. Si se supone que el material es elástico, isótropo, homogéneo (cumple con la ley de Hooke).



De la ley de Hooke se tiene,  $\bar{\sigma} = E\epsilon$ ; por lo tanto:

$$\epsilon_x = \frac{\bar{\sigma}_x}{E}, \quad \epsilon_y = \nu \frac{\bar{\sigma}_y}{E}, \quad \epsilon_z = \nu \frac{\bar{\sigma}_z}{E}$$

donde  $\nu$  (relación de Poisson) es la relación que existe entre la deformación transversal unitaria y la deformación longitudinal unitaria del elemento estructural, y su variación va de 0.15 a 0.35 para la mayoría de los materiales empleados en la construcción (0.15 para madera, 0.20 para concreto y 0.3 para acero estructural).

Si los esfuerzos  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$ , se aplican al mismo tiempo, de la ley de Hooke generalizada, se obtiene:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\bar{v}_x - \nu (\bar{v}_y + \bar{v}_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\bar{v}_y - \nu (\bar{v}_x + \bar{v}_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\bar{v}_z - \nu (\bar{v}_x + \bar{v}_y)]$$

Si se considera el caso bidimensional (plano x, y), estas relaciones se transforman en las siguientes ecuaciones, las cuales dan una relación entre los esfuerzos y las deformaciones longitudinales.

$$\bar{v}_x = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$\bar{v}_y = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\epsilon_y - \nu \epsilon_x)$$

Se determinará en seguida la relación que existe entre las deformaciones lineales y los desplazamientos verticales. Se sabe que los momentos torsionantes  $m_{xy}$ ,  $m_{yx}$  ocasionan esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ , los cuales a su vez producen deformaciones por esfuerzo cortante, utilizando la ley de Hooke se establece una relación entre los esfuerzos y las deformaciones que producen. De acuerdo con esto:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}$$

donde  $E = 2G(1 + \nu)$

$G$  = Modulo de esfuerzo cortante

A continuación se considerará la geometría deformada de la placa, con el fin de expresar a los giros en función de los coeficientes de desplazamiento. Para esto se toma una sección de la placa a una distancia "y" constante (fig 11),

comparando la sección antes y después de deformarse, empleando las hipótesis siguientes:

1. Las pendientes de la superficie media deformada, son pequeñas comparadas con la unidad Y
2. Las deformaciones son tales que las líneas rectas, inicialmente normales a la superficie media, permanezcan rectas y normales a la misma; se puede expresar el ángulo de giro de las líneas I-I y II-II por las relaciones

$$\theta = - \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{y} \quad \theta + \dots = \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx$$

después de deformarse el elemento longitudinal  $\overline{AB}$  correspondiente a una fibra, que se localiza a una distancia "z" de la superficie media, adquiere la longitud  $\overline{A'B'}$ . Si se sabe que la deformación lineal " $\epsilon$ " provocada por un esfuerzo normal, se define como un cambio en la unidad de longitud del elemento, entonces:

$$\epsilon_x = - \frac{\Delta dx}{dx} = z \frac{d\theta}{dx}$$

Sustituyendo el valor de  $\theta$  en la ecuación anterior

$$\epsilon_x = - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

de manera semejante se puede deducir la deformación lineal en función de los desplazamientos verticales, con lo cual se obtiene:

$$\epsilon_y = - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

por último, se determina la relación que existe entre la distorsión angular (deformación angular) y las componentes de desplazamiento u, v, w. Para esto se considera un paralelogramo rectangular ABCD (fig 12), que se localiza a una



distancia  $z$  constante de la superficie media. Por efectos del corte, el paralelogramo pasa a ocupar la configuración deformada  $A'B'C'D'$ . De acuerdo con lo anterior al observar la configuración deformada, se deduce que:

$$\gamma' = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{y} \quad \gamma'' = \frac{\partial u}{\partial y}$$

además, se sabe que la componente de desplazamiento lineal de las direcciones  $x$ ,  $y$

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{v} = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

por lo tanto la distorsión angular total es

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

en conclusión, la configuración deformada de la superficie media queda definida por las relaciones entre  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  como se muestra a continuación.

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

También se sabe que las fuerzas interiores pueden ser expresadas en función de  $w$ , puesto que las componentes de esfuerzo  $\bar{v}_x$  y  $\bar{v}_y$  producen momentos flexionantes en un elemento de placa de una manera semejante a la forma presentada en la teoría elemental de vigas. Por lo tanto, si se efectúa la integración de las componentes de esfuerzo normal, se obtienen los momentos flexionantes que actúan en el interior de la placa, así como los momentos torsionantes producidos por los esfuerzos cortantes  $\bar{c} = \bar{c}_{xy} = \bar{c}_{yx}$  los cuales se pueden calcular como se indica a continuación:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z \, dz$$

como  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ , entonces  $M_{xy} = M_{yx}$ . Si se substituyen las ecs de las cuales se obtiene la deformación lineal ( $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ), en las correspondientes a esfuerzos normales ( $\sigma_x, \sigma_y$ ), en función del desplazamiento transversal de la placa, queda:

$$\sigma_x = - \frac{E z}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = - \frac{E z}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

substituyendo en la ecuación que da el momento flexionante

$$M_x = - \frac{2 E}{1 - \nu^2} \int_0^{h/2} \left( z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z \, dz$$

resolviendo

$$M_x = - \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

si  $D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$ , se tiene:

$$M_x = - D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

de manera análoga

$$M_y = - D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

a la relación  $\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$  se le conoce como " Rigidez a la flexión de la placa". Los momentos torsionantes  $m_{xy}$ ,  $m_{yx}$  se obtendrán integrando las ecuaciones correspondientes, sustituyendo antes el valor de  $\bar{c}_{xy}$ ,  $\bar{c}_{yx}$  en dicha relación como se indica a continuación.

$$m_{xy} = 2 \int_0^{h/2} \bar{c}_{xy} z \, dz$$

$$m_{xy} = - \frac{E h^3 (1-\nu)}{12 (1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$m_{xy} = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

sustituyendo los valores de  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$  en la ec 4

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = P_z(x,y)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2 \partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{P_z(x,y)}{D}$$

la cual es la ecuación que gobierna al problema de placas delgadas con pequeños desplazamientos. Es una ecuación diferencial de 4<sup>o</sup> orden, no homogénea, con coeficientes constantes, cuya solución se ha encontrado por diferentes métodos (ref 5).

Para resolver la ecuación anterior se necesitan conocer las condiciones de frontera del problema a tratar, presentándose tres tipos de condiciones de borde cuya solución

se discutirá enseguida:

Bordes fijos. En este caso la deflexión y las pendientes son nulas.

$$\text{para } x = 0 \text{ ó } x = a \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\text{para } y = 0 \text{ ó } y = b \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Bordes libres. En cuyo caso el momento y la fuerza cortante transversal son nulos.

$$\text{para } x = 0 \text{ ó } x = a \quad m_x=0, \quad V_x=0$$

$$\text{para } y = 0 \text{ ó } y = b \quad m_y=0, \quad V_y=0$$

si se sustituyen los valores que se obtuvieron, en las expresiones de momentos queda:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ ó } x = a$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } y = 0 \text{ ó } y = b$$

además

$$V_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$

$$V_y = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$$

en donde el 2º término las dos últimas ecuaciones, representa el efecto del momento torsionante. Substituyendo los valores de  $q_x, q_y, m_{xy}, m_{yx}$  resulta que

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \text{para } x=0 \text{ ó } x=a$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \text{para } y=0 \text{ ó } y=b$$

Bordes simplemente apoyados. En cuyas condiciones la deflexión y el momento flexionante, son nulos.

$$\text{para } x=0 \text{ ó } x=a \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{para } y=0 \text{ ó } y=b \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

en las esquinas de las placas rectangulares, el momento torsionante produce una reacción adicional, según puede verse en la fig 13.

### 3.3 E f e c t o   e n   p l a c a s   o r t o t r ó p i c a s

Las ecuaciones presentadas en los artículos anteriores, fueron desarrolladas bajo la hipótesis de que existe isotropía en el material del cual esta formada la placa. Estrictamente, la generalidad de las aplicaciones prácticas corresponden a problemas en los cuales, los materiales involucrados son eminentemente anisótropos; tal es el caso del concreto reforzado.

Sin embargo, en las expresiones y desarrollos que se anotan a continuación, no se considerará la anisotropía inherente al material del cual está formada la placa (anisotropía natural), sino a la estructural, introducida mediante las nervaduras características de las losas reticulares.

Si un material homogéneo tiene tres planos de simetría mutuamente perpendiculares con respecto a sus propiedades elásticas, se conoce como ortótropo (ortogonalmente anisótropo). Aunque el comportamiento estructural real de una losa reticular, no puede representarse exactamente por el de una placa formada por un material ortótropo. Resultados experi\_

mentales (refs 5 y 6) han demostrado que se obtiene una buena aproximación mediante esta idealización, siempre que las rigideces flexionantes en las direcciones x,y seán uniformemente distribuidas.

### 3.3.1 Ecuación diferencial de las placas ortótropas

Suponiendo que las direcciones principales de ortotropía coinciden con los ejes x,y, será evidente que se requiere de cuatro constantes elásticas para establecer las relaciones esfuerzo-deformación ortótropas; las cuales se discuten a continuación:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\bar{\nu}_x}{E_x} - \nu_y \frac{\bar{\nu}_y}{E_y} & ; & \quad \bar{\nu}_x = \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y} (\epsilon_x + \nu_y \epsilon_y) \\ \epsilon_y &= \frac{\bar{\nu}_y}{E_y} - \nu_x \frac{\bar{\nu}_x}{E_x} & ; & \quad \bar{\nu}_y = \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y} (\epsilon_y + \nu_x \epsilon_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} & ; & \quad \tau_{xy} = G_{xy} \gamma_{xy} \end{aligned}$$

donde el módulo de elasticidad por esfuerzo cortante ( $G_{xy}$ ), puede expresarse en términos de  $E_x$ ,  $E_y$

$$G_{xy} = \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2(1 + \sqrt{\nu_x \nu_y})} = \frac{E}{2(1 + \sqrt{\nu_x \nu_y})}$$

análogas a las relaciones deformación-desplazamiento, las cuales como se mencionó anteriormente son expresadas por las ecuaciones.

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\chi_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

puesto que para su deducción se consideraron únicamente relaciones geométricas que no dependen de las características del material. Substituyendo las ecuaciones anteriores en las expresiones que dan  $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$ , se pueden obtener las fuerzas internas en términos de  $w$ .

$$\bar{v}_x = - \frac{E_x z}{1 - \nu_x \nu_y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\bar{v}_y = - \frac{E_y z}{1 - \nu_x \nu_y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

substituyendo estas ecuaciones en las expresiones

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{v}_x z \, dz$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{v}_y z \, dz$$

quedando

$$m_x = - D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = - D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

donde las rigideces a flexión de la placa ortótropa son:

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12 (1 - \nu_x \nu_y)}$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12 (1 - \nu_x \nu_y)}$$

substituyendo  $\gamma_{xy}$  en  $\tau_{xy}$  y esta a su vez en  $m_{xy}$  resulta

$$\tau_{xy} = G_{xy} \left( -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -2 G_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

$$m_{xy} = m_{yx} = - \frac{G_{xy} h^3}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

reemplazando el valor de  $G_{xy}$

$$m_{xy} = m_{yx} = - \frac{\sqrt{E_x E_y} h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} \left( 1 - \sqrt{\nu_x \nu_y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

si se introduce  $D_x, D_y$

$$m_{xy} = m_{yx} = - 2 D_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

donde  $2 D_t = \sqrt{D_x D_y} (1 - \nu_x \nu_y)$  es la rigidez torsional de la placa ortótropa. Substituyendo  $m_x, m_y, 2D_t$  en la ecuación que proporciona los momentos torsionantes y flexionantes de pendientes de la deformación, resulta:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = - P_z(x, y)$$

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - P_z(x, y)$$

en donde  $B = 1/2 (D_y D_x + \nu_x D_y + 4D_t)$  se conoce como rigidez torsionante efectiva de la placa ortótropa.

Por el teorema de reciprocidad de Betti,  $\nu_x E_y = \nu_y E_x$  y análogamente  $\nu_x D_y = \nu_y D_x$ . Entonces la rigidez torsionante se toma de la siguiente forma

$$B = \nu_x D_y + 2 D_t = \nu_y D_x + 2 D_t$$



en el caso de la ortotropía estructural  $V_x$  y  $V_y$ , no son propiedades del material, sino constantes elásticas correspondientes a la configuración geométrica del sistema estructural. Debido a que la exactitud en el análisis de placas ortótropas depende en gran parte de las rigideces flexionantes y torsionantes, será conveniente si es posible, hacer pruebas directas para obtener las rigideces reales. De estas rigideces, es la torsionante la difícil de obtener. Obviamente, es posible considerar valores aproximados razonables para dichas rigideces en cálculos analíticos o numéricos. Como puede observarse se ha venido expresando a los elementos mecánicos como fuerzas generalizadas por unidad de longitud de la superficie media, razón por la cual se deben definir a las propiedades de las secciones también por unidad de longitud. Una fórmula aceptable para la rigidez torsionante efectiva de losas de concreto reforzado en dos direcciones de espesor constante es:

$$B = \sqrt{D_x D_y}$$

Si un sistema de piso de concreto reforzado que tiene la forma de losa-trabe (fir 14), se tomara como una placa isótropa equivalente, en donde las rigideces flexionantes pueden ser obtenidas como :

$$D_x = \frac{E I_x}{c_1} \qquad D_y = \frac{E I_y}{c_2}$$

Para un cálculo riguroso, la porción de la sección transversal formada por la losa deberá ser dividida entre  $1 - V_{xy}^2$ ; en donde  $V_{xy}^2 = V_x V_y$ .

Se recomienda que el ancho efectivo para la sección "T" se usen los valores  $c_1$  y  $c_2$  ya indicados, y la rigidez torsionante efectiva se obtendrá con la siguiente expresión.

$$B = \frac{E h^3}{12(1-\nu x^2)} + \frac{G_{xy}}{2} + \frac{h, \gamma_i, b_i^3, k_i}{c_1} + \frac{h_2 \gamma_i b_2^3 k_2}{c_2}$$

donde se observa que los dos últimos términos del segundo miembro corresponden a las nervaduras separadas de la losa.

Los valores de  $\gamma_i$  dependen de la relación  $b_i/h_i$ , en la siguiente tabla se dan algunos valores.

$\frac{b_i}{h_i}$	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	∞
$\gamma_i$	0.140	0.266	0.196	0.299	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.339

Debido a que la rigidez torsionante en vigas de concreto reforzado disminuye después de haberse desarrollado grietas en el concreto, se recomienda que los términos correspondientes a las nervaduras o vigas sean reducidos; esto se hace en la fórmula anterior por medio de los factores  $k_i$ , dichos factores dependen del refuerzo, de la relación  $b_i/h_i$  y de la relación del momento torsionante al momento flexionante.

El factor numérico  $\gamma_i$ , sirve para calcular el momento de inercia torsional de una sección subdividida en rectángulos.

$$\gamma_i = 1/3 (1 - 0.63 x/y)$$

Por lo expuesto anteriormente se concluye la analogía existente entre el estudio de placas isótropas con las ortótropas. De tal manera que el procedimiento de solución, será: Obtener las rigideces flexionantes y torsionantes, resolver la ecuación gobernadora, la que dará los desplazamientos verticales de la losa, conocidos éstos se podrán obtener los elementos mecánicos, momentos y fuerzas, por unidad de longitud. Para resolver el problema se puede recurrir a los métodos analíticos o numéricos como el método de Navier,

principios variacionales, diferencias finitas, elemento finito, entre otros. Sin embargo, la solución del problema no es simple en la práctica, por lo que se recurre al " Metodo de la estructura equivalente ".

### 3.4 Método de la estructura equivalente

La solución rigurosa de los problemas de placas corresponde a un problema de valores en la frontera , ya que se deben satisfacer las condiciones de frontera características del problema específico del que se trate y la ecuación diferencial gobernadora de placas delgadas con pequeños desplazamientos.

En general este tipo de solución es aplicable a contados problemas prácticos, debido a la complejidad en el planteamiento matemático del mismo. Este tipo de soluciones, puede clasificarse de la siguiente manera: Soluciones cerradas, soluciones de la ecuación biarmónica, la cual plantea una solución particular de la ecuación diferencial de placas, soluciones en doble serie trigonométrica, soluciones en serie trigonométrica simple.

Por lo anterior, se han utilizado métodos numéricos para resolver el problema a través de métodos aproximados de análisis que permitan obtener resultados razonables, dentro de un margen de error admisible, con ayuda de las computadoras.

Uno de los métodos aproximados más ampliamente usado es el " Metodo del Marco Equivalente" que aparece en el Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado ACI 318-77, cuyos fundamentos y características principales se anotan a continuación.

Las losas deben diseñarse por métodos que consideren el trabajo en conjunto de los elementos que integran al sistema de piso, esto generalmente no es fácil. Aunque sin embargo, existen enfoques comprensibles, pero tal vez laboriosos numéricamente .

El método del marco equivalente (ref 7), toma en cuenta consideraciones obtenidas en extensos estudios físicos y analíticos, ambos para formular un método de diseño más verdadero y representativo del comportamiento real de las losas tridimensionales a conjuntos de estructuras equivalentes de dos dimensiones, tomadas longitudinal y transversalmente, a través de todo el edificio. La distribución de momentos en la losa es un problema complejo; ésta depende no solo de las características propias de la losa, sino también, de los elementos que constituyen la estructura, como vigas y columnas.

### 3.4.1 Procedimiento de cálculo

El procedimiento consiste en los pasos que se mencionan a continuación.

a) Idealización de la estructura tridimensional en marcos bidimensionales constituidos por columnas y vigas.

b) Determinación de las rigideces de los elementos que forman los marcos.

c) Análisis estructural de los marcos, para la obtención de elementos mecánicos (momento flexionante y fuerza cortante).

d) Distribución de los momentos flexionantes y fuerzas cortantes.

e) Dimensionamiento de los elementos de la estructura.

A continuación se procederá a desarrollar cada uno de los pasos necesarios para calcular una estructura por el método del marco equivalente.

a) Idealización de la estructura. Consiste en dividir la estructura en marcos en dos direcciones, localizadas sobre los ejes de los soportes. Cada marco se constituye de una hilera de columnas o apoyos equivalentes y franjas de viga-losa, limitadas lateralmente por el eje del tablero a cada lado de los apoyos (fig 15).

El marco equivalente está compuesto de 3 partes:

1. La franja de losa horizontal, incluyendo cualquier viga que se extienda en la dirección del marco.

2. Las columnas ó cualquier otro miembro de apoyo que se extienda por arriba o por abajo de la losa.

3. Los elementos de la estructura que proporcionan transmisión de momentos entre los miembros horizontales y verticales.

Si los miembros verticales son muros que se extienden a lo largo de todo el ancho de la franja de losa (fig 16), la conexión para la transmisión de momento es cien por ciento efectiva, y el marco equivalente se puede manejar como un marco plano convencional. En el caso opuesto, si el apoyo es una columna conectada a la franja de losa únicamente en el borde (fig 17), la eficiencia de la conexión para la transmisión de momento se aproxima a cero.

La columna del marco equivalente es la misma de la estructura, modificada de tal manera, que además de la columna propiamente dicha incluye la viga perpendicular a la dirección del marco equivalente. Esta modificación hace tomar en cuenta el efecto de restricción por torsión que ejercen las

vigas sobre la losa. En sistemas de piso sin vigas, se supone que existe una viga cuyo peralte es igual al de la losa y cuyo ancho es igual al de la columna o capital en la dirección del marco equivalente. En losas apoyadas sobre columnas, las vigas de los marcos están formadas por los tramos de losa comprendidos entre los ejes centrales de los tableros adyacentes.

b) Determinación de las rigideces de los elementos que forman los marcos. Para el cálculo de las rigideces, se consideran únicamente secciones gruesas de concreto sin agrietar y sin tomar en cuenta el acero de refuerzo, ya sea para losas-vigas o para columna equivalente, según estudios experimentales (ref 8).

Losas-vigas. Los diagramas de rigidez equivalente de losa-viga pueden ser usadas para determinar las constantes de distribución de momentos así como los momentos de empotramiento para el análisis de la estructura equivalente, de acuerdo con sus secciones transversales (fig 18). Para el cálculo de la rigidez, la variación de las áreas está basada en las siguientes consideraciones (ref 9).

1. El momento de inercia de la losa-viga entre las caras de los soportes, se basa en el ancho de la sección transversal de concreto, a lo largo de toda ella.

2. Un soporte está definido como una columna, capitel, marco o muro (la viga no se considera un miembro de soporte para el marco equivalente).

3. El momento de inercia de la losa-viga de la cara del soporte, se toma igual al momento de inercia de la losa-viga en la cara del soporte dividida entre el factor  $(1 - c_2/l_2)^2$ .

El factor de amplificación  $(1-c_2/l_2)^2$  aplicado al momento de inercia entre la cara del soporte y su eje, hace que cada miembro losa-viga esté limitado a esa longitud. En consecuencia, la rigidez, los factores de transporte y los momentos de empotramiento basados en consideraciones usuales para miembros prismáticos uniformes, no puede ser aplicado a estos miembros losa-viga. En los anexos se dan fórmulas para calcular los momentos de empotramiento, los factores de transporte y rigidez a flexión de la losa.

**Columna equivalente.** Una columna equivalente (fig 19) consiste en la columna real sobre y debajo de la losa, más los miembros sujetos a torsión de cada lado de las columnas hasta la línea media de los tableros adyacentes. Tomando en cuenta que para un marco exterior el miembro sujeto a torsión está solo en un lado de la columna; la presencia de trabes paralelas influirá también en la rigidez de la columna equivalente (ver 110). Dicha rigidez  $k_{ec}$  está dada en términos de su inverso o flexibilidad como sigue:

$$\frac{1}{k_{ec}} = \frac{1}{\sum k_c} + \frac{1}{\sum k_t}$$

aunque para propósitos de cálculo, se puede preferir que la expresión sea dada en términos de rigidez según se muestra

$$k_{ec} = \frac{\sum k_c \times \sum k_t}{\sum k_c + \sum k_t} \quad \text{ó} \quad k_{ec} = \frac{k_c}{1 + \frac{\sum k_c}{\sum k_t}}$$

En los miembros reales de columnas, los diagramas de rigidez de columna, se pueden usar para determinar su rigidez a flexión  $k_c$ . La rigidez de la columna se basa en su longitud  $l_c$ , medida desde la mitad del espesor de la losa inferior hasta la mitad del espesor de la losa superior. La formulación de los diagramas de rigidez se basan en las siguientes consi

deraciones:

1. El momento de inercia de la columna fuera de la unión losa-viga se basa en el área de la sección gruesa de concreto. Se toma en cuenta la variación del momento de inercia a lo largo del eje de la columna, entre la junta losa-viga y columna. Para columnas con capital, se supone que el momento de inercia varía linealmente de la base del capital a la parte inferior de la losa-viga.

2. El momento de inercia de la losa-viga se supone infinito  $I = \infty$ , en el espesor de la misma en la unión de la columna. Como los momentos de inercia losa-viga, el factor de rigidez  $K_c$  para las columnas, no se basa en consideraciones de miembros prismáticos uniformes.

La rigidez  $K_t$  de un miembro torsionante, se calcula de acuerdo con:

$$K_t = \frac{9 E_{cs} C}{I_2 (1 - c_2/1_2)^3}$$

el término  $C$  es una constante de la sección transversal para definir las propiedades del miembro torsionante.

$$C = (1 - 0.63 x/y) \frac{x^3 y}{3}$$

donde:

$x$  = dimensión total menor de una sección transversal rectangular

$y$  = dimensión total mayor de una sección transversal rectangular

y la suma se refiere a los rectángulos en que se puede descomponer la sección  $T$  ó  $L$  de la viga torsionante.

El valor de  $C$  se calcula dividiendo la sección transversal del miembro torsionante en partes rectangulares



separadas y sumando los valores de  $C$  para cada rectángulo componentes.

Es conveniente subdividir la sección transversal de manera que resulte el mayor valor de  $C$ . Algunas aplicaciones de esto se muestran en la fig 20, y en los anexos se proporciona una gráfica para poder determinar con menos dificultad esa constante.

El cálculo de  $K_t$  con la ecuación anterior, se basa en suponer una distribución triangular de momentos torsionantes en la viga perpendicular al marco que se considera. Cuando el tablero tiene una viga paralela a la dirección en que actúa el momento flexionante, la hipótesis ya no es válida; por lo tanto la rigidez torsional  $K_t$  dada por la ecuación anterior necesita ser incrementada como sigue:

$$K_{ta} = K_t I_{sb}/I_s$$

c) Análisis estructural de los marcos, para la obtención de elementos mecánicos (momento flexionante y fuerza cortante). El análisis de los marcos se inicia una vez que han sido determinadas las rigideces, los momentos de empotramiento y los factores de transporte de cada uno de los elementos de la estructura equivalente. El procedimiento de análisis puede ser cualquiera para marcos bidimensionales. El cálculo por carga vertical puede hacerse aislando cada piso y suponiendo que las columnas superior e inferior están empotradas en sus extremos opuestos. En el análisis por cargas laterales (viento ó sismo) deben analizarse los marcos completos.

Cuando se conoce la distribución de la carga viva, el análisis se hace para tal distribución. Si no se conoce,

y la carga viva no excede de las tres cuartas partes de la carga muerta, o no hay posibilidad de que la carga viva varíe significativamente de uno a otro tablero, el análisis estructural se efectúa suponiendo que todos los claros del marco están cargados.

Cuando no se cumplen estas condiciones, el momento positivo máximo en un claro dado se calcula suponiendo que el claro está cargado con las tres cuartas partes de la carga viva y con la carga muerta total, y que los claros adyacentes están cargados únicamente con la carga muerta, según ref 7.

En esta parte de el cálculo, para la obtención de los elementos mecánicos en los miembros de los marcos, se ha desarrollado últimamente una gran variedad de paquetes de programas de computadora para darles solución a éstos utilizando métodos matriciales. Como un ejemplo de ellos se pueden citar el Stress, Tabs, Etabs, SapIV, etc, los cuales no se discutirán en el presente trabajo, por considerar que no están dentro de su objetivo primordial.

d) Distribución de los momentos flexionantes y fuerzas cortantes. Los momentos flexionantes y fuerzas cortantes obtenidas mediante el análisis descrito en la sección anterior corresponden a las trabes y columnas del marco equivalente y, por tanto es necesario distribuirlos entre los elementos del sistema de piso.

Puesto que las trabes del marco equivalente representan a las franjas del sistema de piso ( fig 15), los momentos y fuerzas cortantes deben distribuirse entre los elementos comprendidos en dichas franjas. Para hacer esta, se

seguirá el proceso de distribución recomendado por el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal de 1976 (ref 11), del cual a continuación se tratará lo mas importante.

Respecto a cargas, el factor de carga  $F_c$  se determinará: para combinaciones que incluyen exclusivamente acciones permanentes y variables.  $F_c=1.4$ , excepto cuando se trate de estructuras que soportan pisos en los que pueda haber aglomeración de personas, en cuyo caso  $F_c=1.5$ . Para combinaciones de acciones que incluyan una carga accidental, además de las acciones permanentes y variables,  $F_c=1.1$ , y para revisión de estados límite de servicio se tomará en todos los casos  $F_c=1.0$

El factor de resistencia  $F_R$  por el cual se deberá multiplicar la resistencia nominal, serán;  $F_R = 0.90$  en flexión y  $F_R = 0.80$  en cortante.

Sobre losas planas en la ref 11 se anota lo siguiente: En cada tablero de una losa plana se distinguen tres franjas en cada dirección. La de columnas, de ancho igual a la mitad del claro del tablero en la dirección en que se mida el ancho, y las extremas o centrales, cada una de ancho igual a un cuarto de dicho claro.

Se supone que la estructura se divide en marcos ortogonales, cada uno de ellos formado por una fila de columnas y franjas de losa con ancho igual a la distancia entre líneas medias de los tableros adyacentes al eje de columnas considerado. Al calcular las rigideces relativas de los miembros, el momento de inercia de cualquier sección (de columnas o de trabas) puede tomarse como el de la sección de concreto no agrietado y sin considerar el refuerzo. Además, para valuar el momento de inercia de las losas, se considerará un ancho

equivalente, a cada lado del eje de columnas, igual a

$$\frac{0.5 l_1}{1 + 1.67 l_2/l_1} + 0.3 c \leq 0.5 l_2$$

Los momentos flexionantes en secciones críticas a lo largo de las losas de cada marco se distribuirán entre las franjas de columna y las centrales, de acuerdo con los porcentajes indicados en la siguiente tabla.

	franja de columna	franjas centrales
Momento positivo	60	40
Momento negativo	75	25

Una fracción del momento negativo proporcionado por  $(1 - \alpha)$ , debe considerarse transmitida por flexión sobre una franja de losa cuyo ancho efectivo será  $c_2 + 3h$ , centrado con respecto al eje de las columnas, ref 11 y ref 7.

Se debe cumplir además, que la distancia centro a centro de nervaduras no sea mayor que un octavo del claro de la losa paralelo a la dirección en que se va a medir la separación de las nervaduras. Debiéndose revisar la resistencia a cargas concentradas en las zonas comprendidas entre nervaduras, considerándose como mínimo una carga concentrada de 1000 kg. en un área de 10x10 actuando en la posición más desfavorable.

Los refuerzos positivos y negativos deben prolongarse más allá de cada punto de inflexión una distancia no menor que un decimo del claro respectivo, debiendo mantenerse no menos de la cuarta parte del refuerzo positivo total máximo hasta la línea que une los centros de columnas. Por lo menos 25 % del área de acero de cada franja extrema debe estar comprendida en un ancho igual a  $0.5 c + d$  a cada lado del eje de columnas.

El área mínima de refuerzo de secciones rectangulares de concreto reforzado de peso normal, puede calcularse con la siguiente expresión aproximada

$$A_{smin} = \frac{0.7 \sqrt{f'_c} \, bd}{f_y}$$

Ahora se comentará lo relativo a la resistencia a fuerza cortante, aplicado a el diseño de losas.

La fuerza cortante que toma el concreto,  $V_{CR}$ , en elementos con relación claro a peralte total  $l/h > 5$ , se calculará con el criterio siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{si } p < 0.001 & V_{CR} = FR \, bd \, (0.2 + 30 p) \sqrt{f'_c} \\ p \geq 0.01 & V_{CR} = 0.5 \, FR \, bd \sqrt{f'_c} \end{array}$$

Si  $l/h < 4$  y las cargas y reacciones comprimen directamente las caras superior e inferior de la viga,  $V_{CR}$  se obtendrá multiplicando el valor que da la 2ª ecuación por:  $(3.5 - 2.5 M/Vd) > 1.0$ , pero no mayor que  $1.5 \, FR \, bd \sqrt{f'_c}$  y si  $l/h < 4$  y  $l/h > 5$ ,  $V_{CR}$  se hará variar linealmente hasta los valores dados por las ecuaciones anteriores.

El refuerzo por tensión diagonal en vigas y columnas sin prefuerzo debe estar formado por estribos cerrados y perpendiculares u oblicuos al eje de la pieza. El diámetro mínimo de estribos será del # 2, en vigas de marcos que deban resistir sismo y en cuyo diseño se usa un factor de ductilidad de 2 o mayor, debe suministrarse un refuerzo mínimo por tensión diagonal cuando  $V_u < V_{CR}$ , espaciados a cada  $d/2$  y se colocará a partir de toda unión de viga con columnas o muros hasta  $1/4$  del claro correspondiente. Cuando  $V_u > V_{CR}$  se requerirá refuerzo por tensión diagonal y el espaciamiento  $S$ , se determinará con la expresión y limitaciones siguientes.

$$s = \frac{F_R A_v f_y (\sin \theta + \cos \theta)}{V_u - V_{CR}} \leq \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b}$$

$$\text{si } 1.5 F_R b d \sqrt{f'_c} \leq V_u > V_{CR} \quad s < 0.5 d$$

$$V_u > 1.5 F_R b d \sqrt{f'_c} \quad s < 0.25 d$$

$$\text{y en ningún caso } V_u > 2.5 F_R b d \sqrt{f'_c}$$

e) Dimensionamiento de los elementos de la estructura. Conocidos los elementos mecánicos, esto es, momento flexionante y fuerza cortante de los marcos equivalentes, se procede al diseño de los elementos estructurales.

Es importante considerar la transmisión del momento flexionante de la losa a la columna, con el objeto de que el comportamiento de la estructura sea más eficiente, al respecto se recomienda concentrar refuerzo de flexión necesario para resistir las fuerzas horizontales en una franja de losa localizada sobre el eje de la columna, el ancho se recomienda sea igual al ancho de la columna más el espesor de la losa. Además, se deberá revisar el efecto de esfuerzos cortantes, o sea el efecto de penetración (ref 12).

#### 4. COMENTARIOS AL METODO DEL MARCO EQUIVALENTE Y AYUDAS PRACTICAS PARA EL DISEÑO DE LOSAS ALIGERADAS.

La definición del ancho de la viga equivalente, planteada anteriormente, permite el análisis de los marcos que conforman la estructura idealizada. Este análisis, puede llevarse a cabo mediante alguno de los procedimientos disponibles. Sin embargo, los resultados de tal análisis no permiten conocer, aunque sea en forma aproximada las condiciones reales a las que se verá expuesta la conexión columna-losa reticular de concreto reforzado, en instantes próximos a la falla.

La geometría multidimensional de las losas de concreto reforzado, las hace inherentemente más dúctiles que las vigas, a menos que se presente una falla por cortante en éstas o en los elementos que las soportan.

Probablemente, los dos problemas prácticos principales que conciernen a los sistemas de entrepiso, son la presencia de deflexiones excesivas bajo cargas de servicio, y la posibilidad de fallas por cortante bajo sobrecargas.

Los resultados de una serie de ensayos realizados en la última década (ref 13), han demostrado que casi una total redistribución de momentos flectores puede alcanzarse en tales sistemas antes del colapso, siempre que se impidan las fallas por cortante.

La experiencia indica que debe tenerse cuidado en el cortante desarrollado en las conexiones columna-losa, especialmente cuando hay transferencia de momentos en la conexión, como sucede cuando los edificios están sujetos a carga lateral de viento o sismo; esta condición también se presenta aunque con menor importancia en los sistemas de piso sujetos a carga vertical ( ref 14).

Cuando se publicó el reglamento ACI 318-71, se disponía de pocos resultados de pruebas de laboratorio que permitieran conocer el comportamiento de las conexiones columna-losa de entrepiso, bajo cargas dinámicas laterales. Con posterioridad, se han obtenido datos de ensayos realizados con modelos de sistemas de entrepiso macizos, sujetos a cargas verticales y horizontales tanto estáticas como dinámicas (refs 13 y 15).

En los artículos siguientes se expone un resumen de las conclusiones obtenidas de los ensayos realizados, con base en los datos y artículos disponibles.

Conexiones columna-losa reticular. Aunque las disposiciones del reglamento ACI 318-77 son aplicables tanto a sistemas de piso macizos como nervados, los datos de pruebas en los cuales se basan se refieren al primer tipo nombrado.

Entre las conclusiones desarrolladas en base a los resultados de ensayos de laboratorio, realizados en conexiones columna-losa reticular, se pueden anotar las siguientes.

Las grietas de flexión nunca llegan a formar una línea de fluencia completa a través del ancho de la losa. Inmediatamente antes de la falla se completa el agrietamiento diagonal alrededor de la columna y la capacidad para resistir el momento decrece rápidamente.



De acuerdo con las conexiones ensayadas, la resistencia real, puede ser predicha con buena aproximación cuando se utiliza la expresión  $V_c = 1.06 \sqrt{f_c}$  kg/cm<sup>2</sup> para calcular la resistencia al cortante. Parece que, la existencia de estribos en las nervaduras o en la nervadura principal no contribuye a la resistencia al cortante; sin embargo, especialmente cuando éste se coloca en una viga ancha sobre el eje de la columna. Se recomienda una cuantía de refuerzo transversal tal que provea una resistencia igual a la permitida en la expresión  $V_c = 0.53 \sqrt{f_c}$  kg/cm<sup>2</sup>.

A pesar de que la falla se produce por cortante, el comportamiento es algo dúctil, aun en los casos en los que no se coloca refuerzo transversal. La única forma de evitar la falla por cortante, es la de utilizar ábacos o capiteles en las conexiones. Este tipo de falla corresponde a punzonamiento de la columna alrededor de la losa, a menos que la zona maciza sea muy reducida, en cuyo caso, se presenta una falla por cortante en las nervaduras. Se obtienen resultados conservadores cuando se revisa el cortante en una sección crítica localizada a una distancia  $d/2$  fuera de los límites de la zona maciza.

Para conseguir un mecanismo de falla dominado por la flexión, sería necesario diseñar la conexión para resistir los esfuerzos cortantes producidos por un momento calculado como la suma de los momentos resistentes positivo y negativo a los lados de la columna. Parece que es apropiado diseñar estas estructuras para resistir el doble de las fuerzas sísmicas prescritas para marcos dúctiles.

La rigidez lateral del sistema losa-columna es algo baja, especialmente si existe algún agrietamiento por flexión, debido a cargas gravitacionales. En este caso, la rigidez

puede calcularse aproximadamente usando un marco equivalente cuyas vigas tengan el momento de inercia de una sección de losa de ancho igual a la dimensión correspondiente de la columna más el espesor de la losa.

Con respecto a las ayudas prácticas para el diseño de losas aligeradas, se puede anotar lo siguiente.

De acuerdo con el procedimiento de diseño propuesto por el RDP-76 para losas reticulares, se llevó a cabo en este trabajo la presentación de gráficas para obtener el área de acero requerida por flexión en las nervaduras que forman la losa nervada.

Con estas gráficas, se pretende acortar el tiempo requerido para desarrollar principalmente los pasos de distribución de momentos flexionantes y el dimensionamiento de los elementos de la estructura, en lo que se refiere al área de acero requerida.

Para obtener las gráficas, se utilizó una computadora de escritorio en la cual se introdujo previamente el programa. El cual no se transcribe aquí por no ser éste el objetivo del presente trabajo.

Debido a la diversidad entre los valores de los esfuerzos de fluencia, tanto del acero como del concreto se trató de incluir combinaciones que tuvieran en cuenta esto. Los valores empleados son; para el acero ( $f_y$ ) 3000 kg/cm<sup>2</sup>, 4200 kg/cm<sup>2</sup>, 5200 kg/cm<sup>2</sup> y para el concreto ( $f'_c$ ) 150 kg/cm<sup>2</sup>, 200 kg/cm<sup>2</sup>, 250 kg/cm<sup>2</sup>.

Para el uso de las gráficas deben tomarse en cuenta los siguientes pasos:

1. Obtener el ancho efectivo de las franjas centrales o de la de columna, mediante la suma de los espesores de las nervaduras incluidas en cada una de ellas.

2. Seleccionar la gráfica a usar de acuerdo con el tipo de momento ( positivo o negativo), tipo de franja que se diseñará ( central o de columnas), esfuerzos utilizados (del concreto y del acero), y el peralte de la losa. En lo correspondiente a momento negativo, también se toma en cuenta que el momento será resistido por la sección crítica  $c_2 + 3h$  o por nervaduras de la franja de columnas que no estén incluidas en la sección  $c_2 + 3h$ .

3. Con el valor del momento último, se entra a las gráficas y de acuerdo con el ancho, se obtiene el área de acero. Misma que se repartirá proporcionalmente de acuerdo con los anchos de nervaduras incluidas.

Las gráficas están construidas tomando en cuenta el porcentaje mínimo y el porcentaje máximo de la sección analizada; con lo cual no se considera el caso de una sección doblemente reforzada para resistir el momento resistente de diseño.

En las nervaduras en la cual el momento se aproxime a cero, se pondrá el porcentaje mínimo correspondiente.

Las gráficas de momento negativo se tabularon para el valor de  $c_1 = c_2$ ; pero cuando esto no suceda en el problema que se presente, aunque el error por considerar que  $c_1 = c_2$  es relativamente bajo, se presenta también una tabla en la cual se obtendrá un factor que multiplicado por el momento resistente de diseño, nos da el momento resistente de diseño corregido. Con el cual se entra a la gráfica; eliminando así el error que se pudiera cometer al considerar las dimensiones de la columna iguales.

El diseño por cortante se hará en la forma convencional recomendada por el RDP-76, tanto para las nervaduras como en la sección crítica alrededor de las columnas.

## 5. APLICACIONES

Se hará el diseño de un sistema de entrapiso de losa plana, aligerada con moldes recuperables, para un edificio de 8 niveles, empleando lo considerado por las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal 1976 (ref 11). Se considera el efecto de sismo.

Debido a que el objetivo fundamental es el diseño del sistema de piso, algunos cálculos no se describen detalladamente.

### Datos:

Edificio para oficinas

Dimensiones de planta y secciones de columnas  
en la fig 21

### Materiales:

Concreto  $f'c=200$  kg/cm<sup>2</sup>

Acero  $f_y=4200$  kg/cm<sup>2</sup>

### Solución:

a) Distribución de nervaduras. Después de varias alternativas al hacer la distribución de nervaduras en plance a mano alzada, se tomó la que se ilustra en la fig 22, de acuerdo con el manual de productos de Vitro Ciabra (ref 16).

Observando la fig 22, la distribución de nervaduras es:

En claros laterales dirección "x", 9 nervaduras de 12.7 cm de ancho

En claro central dirección "x", 9 nervaduras de 11.1 cm de ancho

En claros laterales dirección "y", 8 nervaduras de 12.0 cm de ancho

En claro central dirección "y", 8 nervaduras de 14.1 cm de ancho

Nervaduras de borde de 65 cm de ancho

Utilizando molde de 63.5 x 63.5 cm entera de 20 (peralte de 20 cm) y molde de 63.5 x 31.7 cm (peralte de 20 cm).

b) Análisis de cargas. Para determinar la carga muerta del piso considerado, se tomará un peralte de la losa de 25 cm, el cual se revisará posteriormente, para evitar el flujo plástico del concreto causado por compresiones debidas a la flexión.

Peso de la losa:

Area total de la planta,  $A_t = 21.8 \times 23.3 = 507.94 \text{ m}^2$

En 21.0 m se tienen 27 moldes de 63.5 x 63.5 entera de 20.

En 22.5 m se tienen 28 moldes de 63.5 x 63.5 entera de 20 y 2 de 63.5 x 31.7 media de 20.

Total de moldes = 612 entera de 20 + 54 media de 20

Volumen de la losa =  $A_t \times h = 507.94 \times 0.25 = 126.98 \text{ m}^3$

Volumen de moldes =  $612 \times 0.076 + 54 \times 0.037 = 48.51 \text{ m}^3$

Volumen del concreto =  $126.98 - 48.51 = 78.47 \text{ m}^3$

Peso de la losa =  $\frac{\text{vol. de concreto} \times \text{peso específico}}{\text{área total}} =$

$$\text{peso de la losa} = \frac{78.47 \times 2400}{507.94} = 371 \text{ kg / m}^2$$

Determinación de cargas ( en  $\text{kg/m}^2$  ) :

	Entrepiso	Azotea
Losa h = 25 cm	371	371
Carga muerta adicional	40	20
Firme de mortero-cemento de 2 cm promedio	60	60
Mozaico de pasta	35	—
Relleno de tezontle 10 cm prom.	—	100
Enladrillado	—	50
Mat. impermeabilizante	—	10
Otras (muros interiores, escaleras, etc)	50	—
	556 $\text{kg/m}^2$	611 $\text{kg/m}^2$
C.M. Total		

La carga viva para análisis por cargas verticales es :

En planta tipo C.V. = 250  $\text{kg/m}^2$   
 En azotea C.V. = 100  $\text{kg/m}^2$

Para el análisis con sismo la carga viva es la siguiente:

En planta tipo C.A. = 90  $\text{kg/m}^2$   
 En azotea C.A. = 70  $\text{kg/m}^2$

Efectuando las combinaciones de carga que señala el reglamento se tiene:

En planta tipo C.M.+ C.V. = 556 + 250 = 806  $\text{kg/m}^2$   
 C.M.+ C.A. = 556 + 90 = 646  $\text{kg/m}^2$   
 En azotea C.M.+ C.V. = 611 + 100 = 711  $\text{kg/m}^2$   
 C.M.+ C.A. = 611 + 70 = 681  $\text{kg/m}^2$

c) Revisión del peralte de la losa. Según la sección 4.3.6.h de las Normas Técnicas Complementarias.

$$h_{\min} = 1.2 K l (1 - 2c/3l)$$

para losas con ábaco que cumplen con la sección 4.3.6.i, se tiene que

$$k = 0.0006 \sqrt[4]{f_s W} \geq 0.02$$

Al sustituir valores, resulta  $k = 0.024$ . Con lo cual el peralte mínimo es

$$h_{\min} = 1.2 \times 0.024 \times 750 \left[ 1 - \frac{2(80)}{3(750)} \right] = 20.06 \text{ cm}$$

por lo tanto es correcta la suposición anterior de  $h = 25 \text{ cm}$ .

d) Obtención de los momentos de inercia. Antes de proceder a calcular los momentos de inercia en vigas equivalentes se obtendrá el ancho equivalente de acuerdo con el criterio del citado reglamento.

$$L_{eq} = \frac{0.5 l_2}{1 + 1.67 l_2/l_1} + 0.3 c \leq 0.5 l_2$$

Al obtener el momento de inercia en las franjas de borde, debe tomarse en cuenta la parte de la viga de borde que está del lado exterior del eje de columnas, además del ancho equivalente antes mencionado.

Momentos de inercia ( marco eje 3 y eje A )

Columnas:

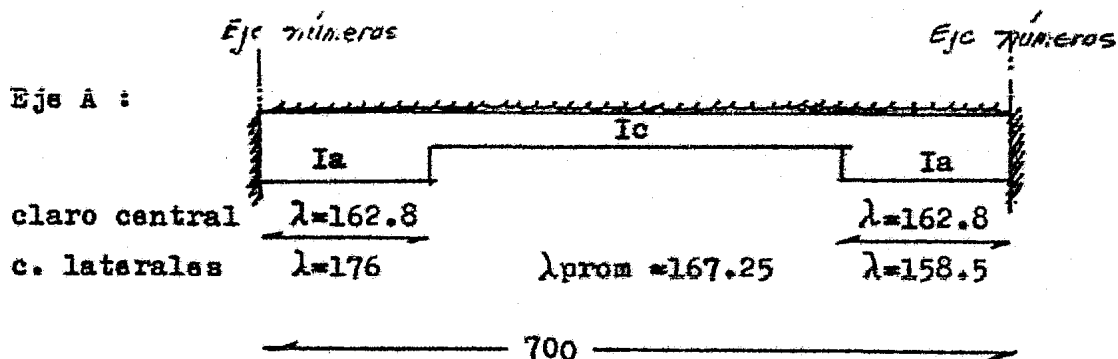
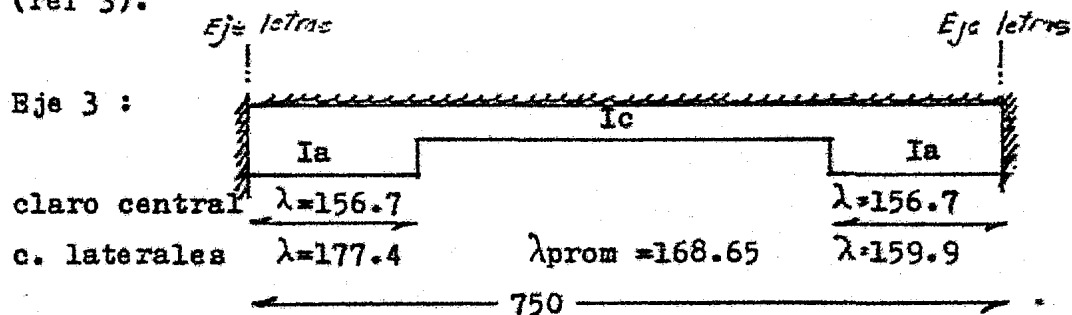
60 x 60	$I = bh^3/12 = 60^4 / 12 = 1\ 080\ 000 \text{ cm}^4$
70 x 70	$I = 70^4/12 = 2\ 000\ 833 \text{ cm}^4$
80 x 80	$I = 80^4/12 = 3\ 413\ 333 \text{ cm}^4$

Vigas equivalentes. De acuerdo con la idealización de la viga equivalente ( fig 23 ), se tienen:

MARCO	NIVEL	2 $L_{eq}$ (cm)	$I_c$ (cm <sup>4</sup> )	$I_a$ (cm <sup>4</sup> )
3	8,7,6	310	142154	403646
	5,4,3	316	153180	411458
	2,1	322	154139	419271
A	8,7,6	152	146521	197916
	5,4,3	155	147442	201823
	2,1	159	148654	207031

e) Cálculo de las rigideces del marco equivalente.

De acuerdo con el uso de fórmulas para encontrar los momentos de empotramiento, factores de transporte y rigideces, (ref 3).





MARCO	NIVEL	W	VIGA A-B o C-D			VIGA B-C		
		kg/m	kb/E	ME(t-m)	F.T.	kb/E	ME(t-m)	F.T.
B	8	4977	1505	27.41	0.645	1446	27.31	0.640
	7,6	5642	1505	31.08	0.645	1446	30.97	0.640
	5,4,3	5642	1571	30.88	0.638	1513	30.78	0.634
	2,1	5642	1592	30.92	0.639	1533	30.82	0.636
			VIGA 1-2 o 3-4			VIGA 2-3		
A	8	2666	1047	11.50	0.544	1043	11.49	0.543
	7,6	3022	1047	13.03	0.544	1043	13.03	0.543
	5,4,3	3022	1064	13.06	0.546	1060	13.06	0.546
	2,1	3022	1086	13.10	0.548	1082	13.10	0.548

Rigidez de columna ( $K_c$ ) de acuerdo con gráfica. Y rigidez torsionante de la viga anexa, de acuerdo con gráfica de "C" y fórmula.

RIGIDEZ DE LA COLUMNA					RIG. TORS. DE LA VIGA			
ENTREPISO	Ic	K	Ic	Kc/E	EJE 3		EJE A	
					C	Kt/E	C	Kt/E
8-7,7-6,6-5	320	4.53	1080000	16584	230469	3877	230469	3551
5-4,4-3,3-2	320	4.53	2000833	30725	282552	4983	282552	4549
2-1	320	4.53	3413333	52415	334635	6192	334635	5632
1-0	370	4.46	3413333	44224	334635	6192	334635	5632

Rigidez de la columna equivalente ( $K_{ec}$ ).

E J E 3	
NIVEL	Kec/E
8	3143
7-6	3471
5	4506
4-3	4609
2	5763
1	5818

E J E A	
NIVEL	Kec/E
8	2925
7-6	3207
5	4149
4-3	4235
2	5274
1	4993

g) Análisis del marco debido a cargas verticales. En forma aproximada debido a la simetría de la estructura, se analizará una subestructura o parte del marco; es un procedimiento que recomienda el A.C.I. (ref 7), se hará solamente el marco 3 y marco A nivel 1; considerando las columnas empotradas en el 2º nivel ( el análisis se hará por el método de Cross).

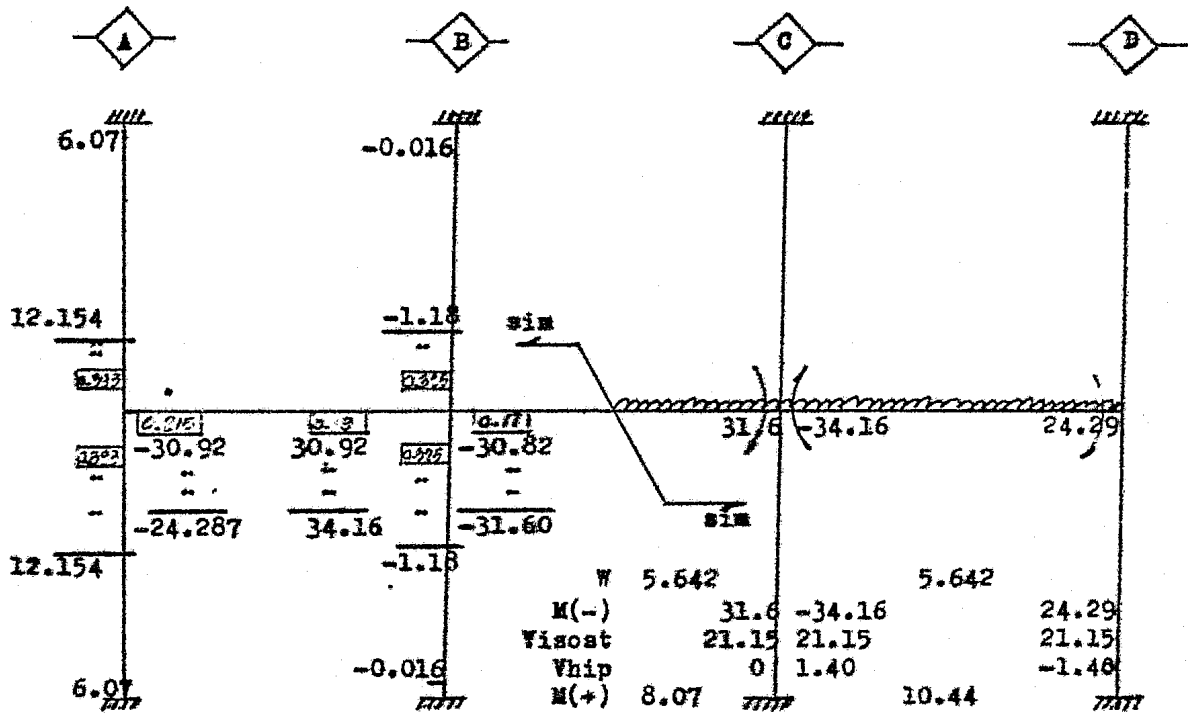
#### Factores de distribución

Nudo "A"		f.d.
K <sub>ec</sub>	5818	0.785
K <sub>AB</sub>	1592	0.215

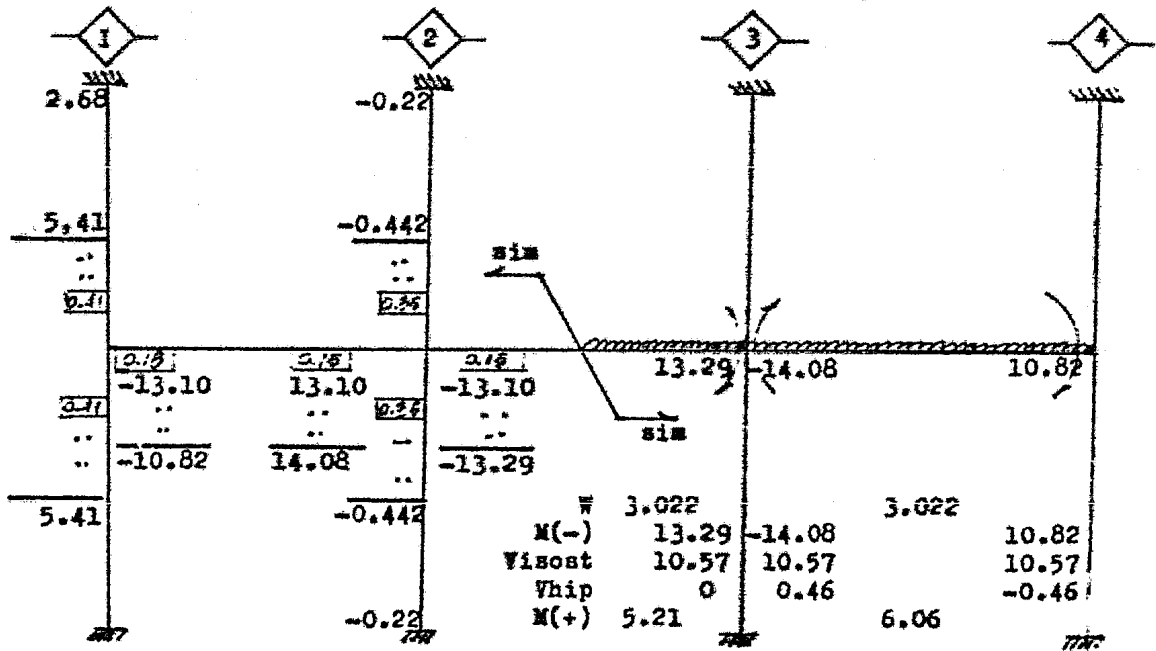
Nudo "B"		f.d.
K <sub>ec</sub>	5818	0.65
K <sub>AB</sub>	1592	0.18
K <sub>BC</sub>	1533	0.17

Nudo "1"		f.d.
K <sub>ec</sub>	4993	0.82
K <sub>1-2</sub>	1086	0.18

Nudo "2"		f.d.
K <sub>ec</sub>	4993	0.70
K <sub>1-2</sub>	1086	0.15
K <sub>2-3</sub>	1082	0.15



MARCO EJE 3 NIVEL I



MARCO EJE A NIVEL I

Análisis sísmico. Para determinar las fuerzas laterales debido a sismo, se usará el método estático permitido por el Reglamento de Construcciones del D.F.

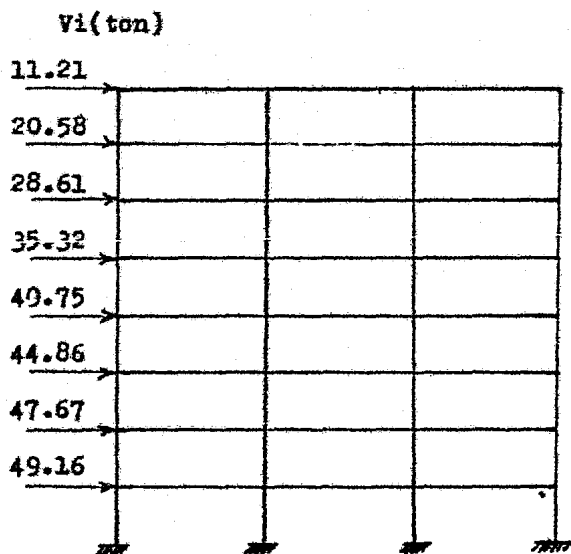
Considerando que el edificio está ubicado en la zona III de la ciudad de México, y clasificado dentro del grupo B, se obtiene del reglamento antes citado:

coeficiente sísmico  $c = 0.24$

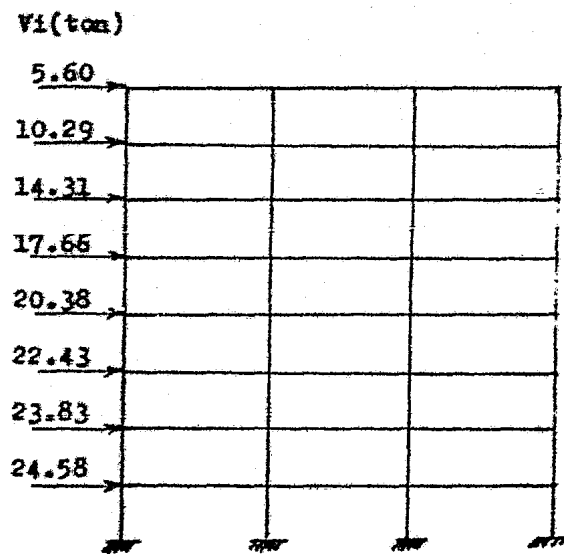
factor de ductilidad  $Q = 4.0$

$$F_i = \frac{W_i H_i}{\sum W_i H_i} \frac{c W_t}{Q}$$

Con el objeto de considerar mayor atención al diseño de la losa, no se exponen los cálculos para la determinación de las fuerzas sísmicas. A continuación se anotan los resultados del marco 3 y el marco A.

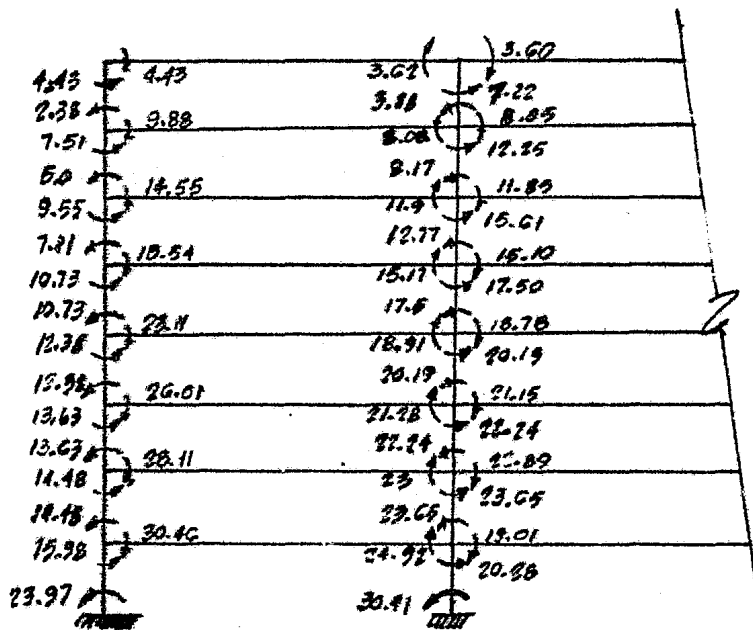


MARCO EJE 3

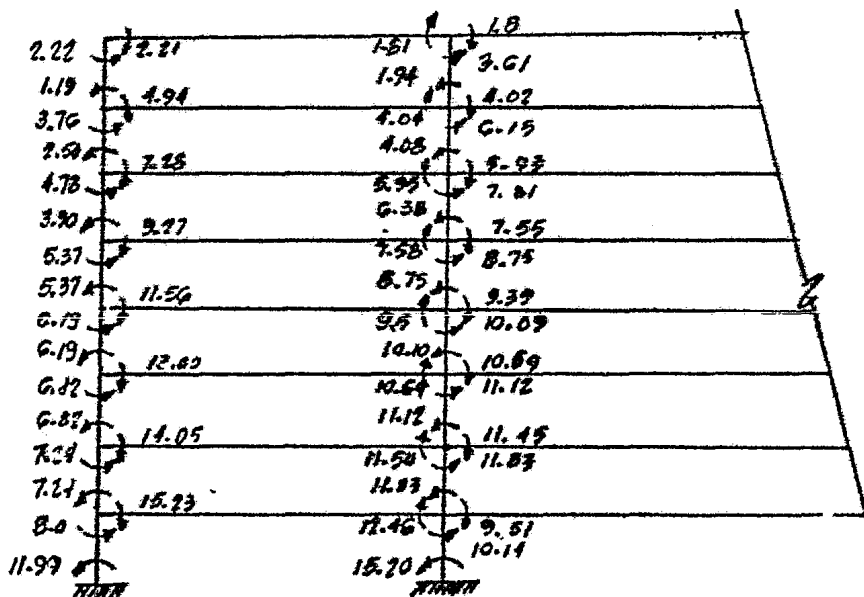


MARCO EJE A

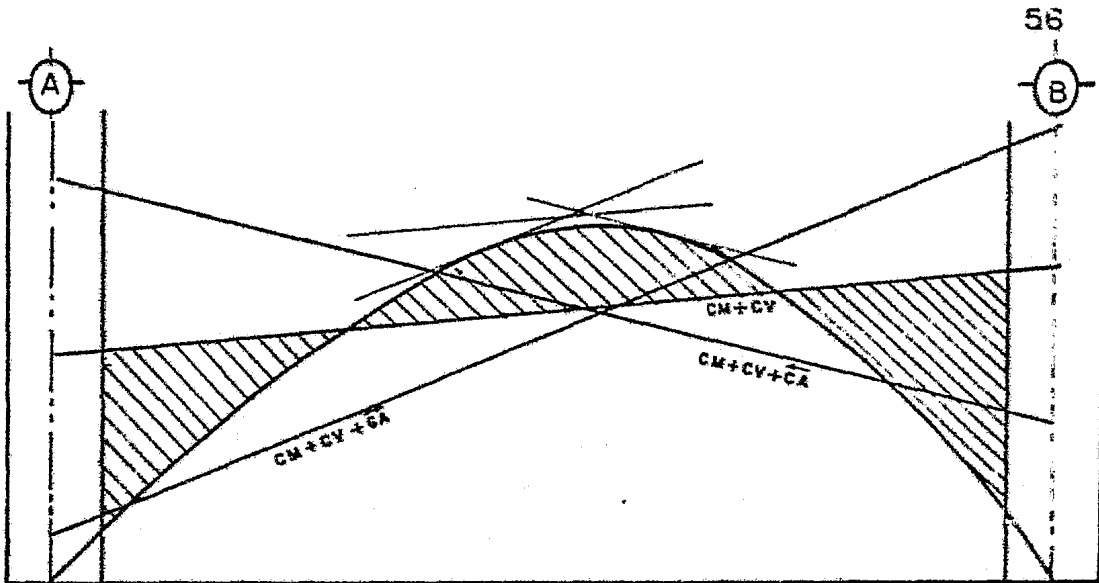
Conocidas las fuerzas cortantes en cada nivel, se proceda al análisis del marco por cargas laterales, el cual se puede hacer por cualquier método. Aquí únicamente se presentan los resultados.



Marco eje 3

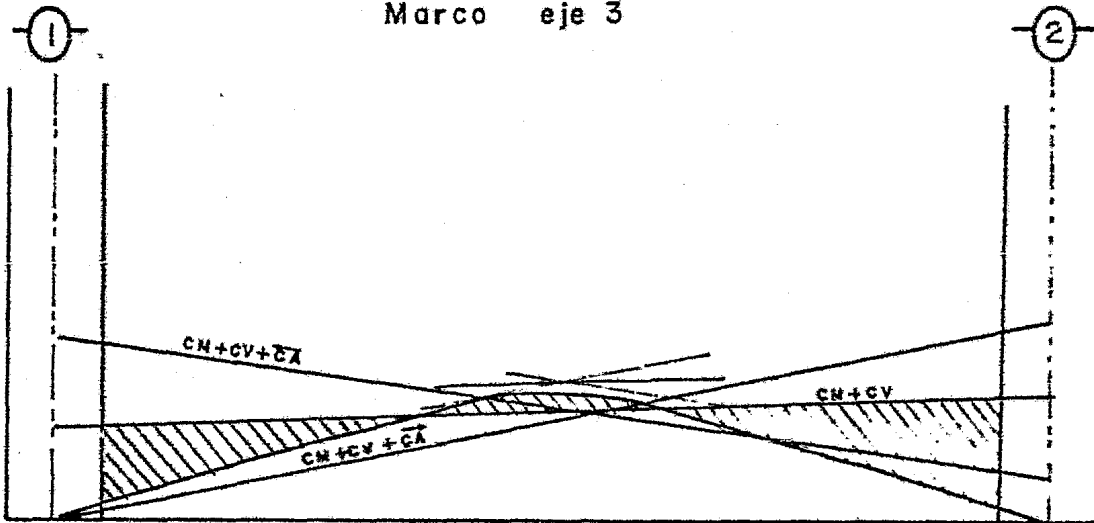


Marco eje A



CM+CV	-24.28		10.44		-34.16
CM+CV+CA	-6.17	12.61			-59.08
CM+CV+CA	-54.74			10.00	-9.24
1.4(CM+CV)	-34.00		14.61*		-47.82
1.1(CM+CV+CA)	-6.78	13.87			-64.98*
1.1(CM+CV+CA)	-60.21*			11.00	-23.62

Marco eje 3



CM+CV	-10.82		6.06		-14.08
CM+CV+CA	-4.41	4.67			-28.54
CM+CV+CA	-28.05			3.03	-1.82
1.4(CM+CV)	-15.15		8.48*		-19.71
1.1(CM+CV+CA)	-4.85	5.14			-29.19*
1.1(CM+CV+CA)	-28.85*			3.33	-1.78

Marco eje A

e) Dimensionamiento por flexión. Se diseñara primero el eje 3, utilizando para ello las ayudas prácticas para diseño, que se han preparado en esta tesis.

Ancho de franjas centrales (2) = 350 cm

Ancho de franja de columnas = 350 cm

Sección crítica por flexión  $c_2 + 3h$  (ref 11) =  
 $80 + 3(25) = 155$  cm

Momento Negativo ( sección próxima al eje A).

De acuerdo con las gráficas; entrando con el valor de  $M_R = 60.21$  t-m y  $b = 155$  cm (para obtener el área de acero en la sección crítica por flexión), se observa que no existe curva en la intersección de esos dos valores.

Debido a que las ayudas prácticas están realizadas suponiendo una sección simplemente reforzada, se puede resolver el problema anterior de las siguientes formas: 1. Considerar una sección doblemente reforzada, 2. Aumentar el peralte de la losa ó 3. Aumentar el valor de las resistencias del concreto y/o del acero. En este caso se optará por seguir la primer solución; con lo cual queda:

$A_s(\text{máx})$  simplemente reforzada =  $38.4$  cm<sup>2</sup> ;  $p = 0.011$  ;  $q = 0.34$   
 y el momento que resiste la sección es de  $M_R = qbd^2 = 26.68$  t-m.  
 Por lo tanto, se usarán 14 vrs. del #6, repartidas en 155 cm centradas en el eje de columnas.

Como ya se tomó en la sección crítica por flexión un momento de 26.68 t-m, la diferencia de momento negativo se debe distribuir en proporción a los anchos de nervaduras no incluidas en la franja  $c_2 + 3h$ , y las de la franja cen\_ tral. Entonces:

$$M_R = 60.21 - 26.68 = 33.53 \text{ t-m}$$

ancho para calcular el refuerzo

$$2 \text{ nervaduras de ancho} = 0.5(321.3 - 155) = 83.15 \text{ cm}$$

$$2 \text{ nervaduras de ancho} = 12.00 \text{ cm}$$

$$2 \text{ nervaduras de ancho} = 14.10 \text{ cm}$$

de acuerdo con esto el ancho total será

$$b = 2(83.15) + 12.0 + 14.1 = 192.40 \text{ cm}$$

Debido a que el momento  $M_R = 33.53 \text{ t-m}$  será tomado tanto por las nervaduras de la franja de columnas, así como por las nervaduras de las franjas centrales, no se puede utilizar la gráfica presentada para momento negativo, puesto que en su obtención tienen implícito a el factor  $\alpha$ . Por lo tanto, se usarán las gráficas para momento positivo, franja de columnas, multiplicando el valor del momento por 1.667 o franja central multiplicando por 2.5.

Con la curva de franja de columnas

$$M_R = 33.53 \times 1.667 = 55.89 \text{ t-m} ; b = 192.40 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 45.40 \text{ cm}^2$$

Con la curva de franja central

$$M_R = 33.53 \times 2.5 = 83.83 \text{ t-m} ; b = 192.40 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 45.40 \text{ cm}^2$$

Para nervaduras de 83.15 cm:  $A_s = 45.4 / 192.4 \times 83.15 = 19.62 \text{ cm}^2$   
usar 10 vrs # 5

Para nervaduras de 12.00 cm:  $A_s = 45.4 / 192.4 \times 12.0 = 2.83 \text{ cm}^2$   
usar 2 vrs # 4

Para nervaduras de 14.10 cm:  $A_s = 45.4 / 192.4 \times 14.1 = 3.33 \text{ cm}^2$   
usar 2 vrs # 5

Dimensionamiento para el momento positivo claro A  
( $M_R = 14.61 \text{ t-m}$ ).

En la franja de columnas se tienen 2 nervaduras de 12.0 cm, 1 nervadura de 15.0 cm y 2 nervaduras de 14.1 cm.



En la franja central se tienen 2 nervaduras de 12.0 cm y 2 de 14.1 cm.

De acuerdo con gráficas:

franja de columnas:

$$M_R = 14.61 \text{ t-m} , \quad b = 67.2 \text{ cm} , \quad \Rightarrow A_s = 12.0 \text{ cm}^2$$

$$\text{Para nervaduras de 12.0 cm: } A_s = 12/67.2 \times 12 = 2.14 \text{ cm}^2 \\ \text{usar 2 vrs \# 4}$$

$$\text{Para nervaduras de 15.0 cm: } A_s = 12/67.2 \times 15 = 2.68 \text{ cm}^2 \\ \text{usar 2 vrs \# 5}$$

$$\text{Para nervaduras de 14.1 cm: } A_s = 12/67.2 \times 14.1 = 2.52 \text{ cm}^2 \\ \text{usar 2 vrs \# 4}$$

franjas centrales:

$$M_R = 14.61 \text{ t-m} , \quad b = 52.2 \text{ cm} , \quad \Rightarrow A_s = 7.7 \text{ cm}^2$$

$$\text{Para nervaduras de 12.0 cm: } A_s = 7.7/52.2 \times 12 = 1.77 \text{ cm}^2 \\ \text{usar 2 vrs \# 4}$$

$$\text{Para nervaduras de 14.1 cm: } A_s = 7.7/52.2 \times 14.1 = 2.08 \text{ cm}^2 \\ \text{usar 2 vrs \# 4}$$

Dimensionamiento por flexión eje A.

Ancho franjas centrales (2) = 187.5 cm

Ancho franja de columnas = 187.5 cm

Sección crítica por flexión  $c_2 + 3h = 80 + 3(25) = 155 \text{ cm}$

De acuerdo con las gráficas; entrando con el valor de  $M_R = 28.65 \text{ t-m}$  y  $b = 155 \text{ cm}$ , se tiene un área de acero  $A_s = 23.40 \text{ cm}^2$  en la franja crítica  $c_2 + 3h$ .

Las nervaduras de la franja de columnas no incluidas en el ancho  $c_2 + 3h$  son:

$$1 \text{ nervadura de ancho} = 177.4 - 115.0 = 62.40 \text{ cm}$$

Las nervaduras de la franja central son:

$$2 \text{ nervaduras de ancho} = 12.7 \text{ cm}$$

Si se sabe que la franja central resiste un 25 % del momento negativo, entrando a las gráficas con el valor

$M_R = 28.65$  t-m y  $b = 25.4$  cm, se ve que no existe curva en la intersección de esos dos valores. Por lo tanto la diferencia entre el momento negativo y el que se tomo en la sección crítica por flexión, se distribuye en proporción a los anchos de nervaduras no incluidas en la franja  $c_2 + 3h$  y las de la franja central.

Momento tomado en  $c_2 + 3h$ ,  $A_s = 23.4$  cm<sup>2</sup>,  $p = 0.0067$ ,  $q = 0.2072$ , por lo tanto  $M_R = qbd^2 = 0.2072 \times 155 \times 22.5^2 = 16.26$  t-m.

El momento  $M_R = 28.65 - 16.26 = 12.39$  t-m, será tomado en un ancho de  $b = 87.80$  cm. Utilizando la gráfica para momento positivo franja de columnas, con  $M_R = 1.667 \times 12.39 = 20.65$  t-m.

$$M_R = 20.65 \text{ t-m}, \quad b = 87.80 \text{ cm}, \quad \Rightarrow A_s = 16.4 \text{ cm}^2$$

Para nervaduras de 62.4 cm:  $A_s = 16.4/87.8 \times 62.4 = 11.65$  cm<sup>2</sup>  
usar 6 vrs # 5

Para nervaduras de 12.7 cm:  $A_s = 16.4/87.8 \times 12.7 = 2.37$  cm<sup>2</sup>  
usar 2 vrs # 4

Dimensionamiento para el momento positivo claro 1 ( $M_R = 8.48$  t-m).

En la franja de columnas se tienen 1 nervadura de 65 cm y 2 nervaduras de 12.7 cm.

En la franja central se tienen 2 nervaduras de ancho 12.7 cm.

De acuerdo con gráficas; con la curva de franja de columnas

$$M_R = 20.65 \text{ t-m} ; \quad b = 90.4 ; \quad \Rightarrow A_s = 6.5 \text{ cm}^2$$

Para nervaduras de 65 cm:  $A_s = 6.5/90.4 \times 65 = 4.67$  cm<sup>2</sup>  
usar 4 vrs # 4

Para nervaduras de 12.7 cm:  $A_s = 6.5/90.4 \times 12.7 = 0.913$  cm<sup>2</sup>  
usar 1 vr # 4

Con la curva de franja central

$$M_R = 8.48 \text{ t-m} ; b = 25.4 \text{ cm} ; \Rightarrow A_s = 4.2 \text{ cm}^2$$

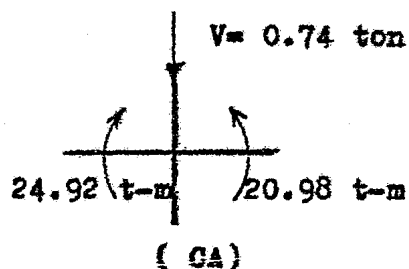
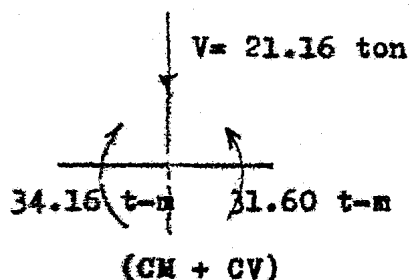
Para nervaduras de 12.7 cm:  $A_s = 4.2 / 25.4 \times 12.7 = 2.1 \text{ cm}^2$   
 usar 2 vrs # 4.

Revisión por tensión diagonal.

Se hará según el artículo 2.1.5.j de las Normas Técnicas, tanto para columna interior como para columna exterior. Debido a que el proceso es repetitivo solo se diseñará el eje 3.

Columna interior 3B.

Fuerzas en condiciones de servicio ( de acuerdo con análisis anterior).



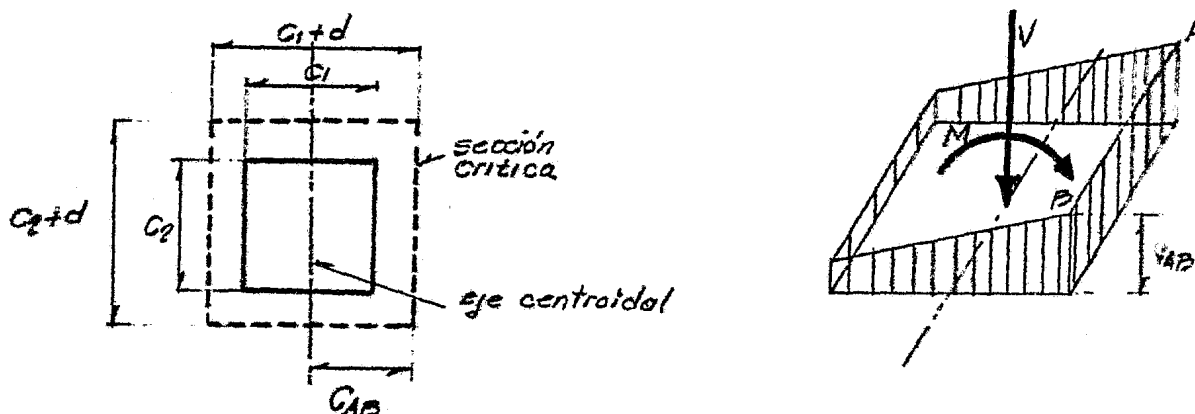
$$e_1 = e_2 = 80 \text{ cm}$$

$$e_1 + d = e_2 + d = 102 \text{ cm}$$

$$e_{AB} = (e_1 + d) / 2 = 51 \text{ cm}$$

$$A_c = 2d ( e_1 + e_2 + 2d ) = 2 \times 22.5 ( 80 + 80 + 2 \times 22 ) = 8976 \text{ cm}^2$$

De acuerdo con tablas que se presentan al final con los valores de  $e_1$ ,  $e_2$ , y  $d$  se obtienen  $\alpha = 0.4012$ ,  
 $J_c = 15\,745\,429 \text{ cm}^4$ .



Revisión para CM + CV.

$$V_u = 1.4 \times 21.16 = 29.62 \text{ ton}$$

$$M_u = 1.4 (34.16 - 31.60) = 3.584 \text{ t-m}$$

$$V_u = \frac{V_u}{A_c} + \frac{M_u C_{AB}}{J_c} = \frac{29620}{8976} + \frac{0.4012 \times 358400 \times 51}{15\,745\,429} =$$

$$V_u = 3.7657 \text{ kg/cm}^2$$

El esfuerzo cortante admisible si no se usa refuerzo es :

$$V_{adm} = FR \sqrt{f'_c} = 0.8 \sqrt{160} = 10.12 \text{ kg/cm}^2 > V_u = 3.7657 \text{ kg/cm}^2$$

Revisión para CM + CV + CA

$$V_u = (21.16 + 0.74) 1.1 = 24.09 \text{ ton}$$

$$M_u = (34.16 - 31.60 + 24.92 + 20.92) 1.1 = 48.40 \text{ ton}$$

$$V_u = \frac{24090}{8976} + \frac{0.412 \times 4840000 \times 51}{15\,745\,429} = 9.14 \text{ kg/cm}^2$$

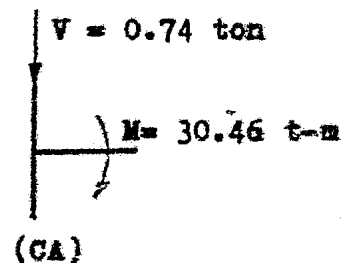
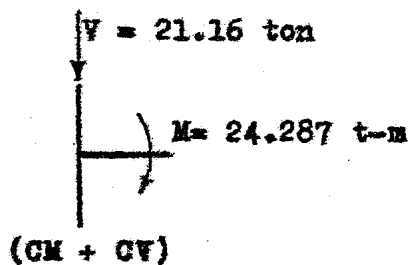
$$V_u = 9.14 \text{ kg/cm}^2 < V_{adm} = 10.12 \text{ kg/cm}^2$$

por lo tanto se suministrará solo el refuerzo transversal mínimo, de acuerdo con el artículo 2.1.5.j

estr # 2.5 @  $d/2$  hasta  $l/4$ ; esto es estr # 2.5 @ 11 hasta 187.5 cm del eje de columnas.

### Columna exterior 3A.

Fuerzas en condiciones de servicio (de acuerdo con análisis anterior).



$$C = c_1 + d/2 = 80 + 11 = 91 \text{ cm}$$

$$b = c_2 + d = 80 + 22 = 102 \text{ cm}$$

$$A_c = (2c + b)d = (2 \times 91 + 102)22 = 6248 \text{ cm}^2$$

$$g = \frac{bc}{2(2c + b)} = \frac{102 \times 91}{2(2 \times 91 + 102)} = 16.34 \text{ cm}$$

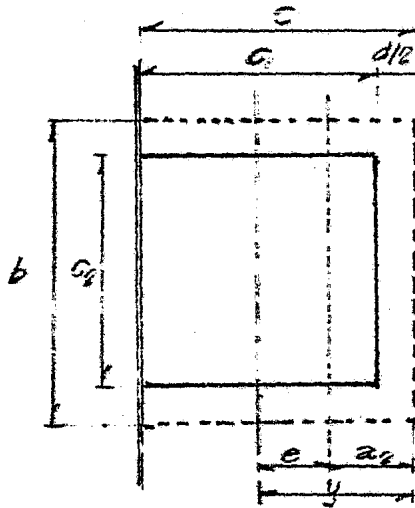
$$y = c - c_1/2 = 91 - 80/2 = 51 \text{ cm}$$

$$a_2 = c/2 - g = 91/2 - 16.34 = 29.16 \text{ cm}$$

$$e = y - c/2 + g = 51 - 80/2 + 16.34 = 27.34 \text{ cm}$$

$$J_c = \frac{dc^3}{6} + \frac{cd^3}{6} + 2cdg^2 + bd \left( \frac{c}{2} - g \right)^2 = 5\,901\,721 \text{ cm}^4$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \frac{91}{102}} = 0.387$$



Revisión para CM + CV

$$M_u = 1.4 \times 24.287 = 34.00 \text{ t-m}$$

$$V_u = 1.4 \times 21.16 = 29.624 \text{ t-m}$$

$$V_u = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\alpha M_u a_2}{J_c} = \frac{34000}{6248} + \frac{0.387 \times 3400000 \times 29.16}{5\,901\,721} =$$

$$V_u = 11.94 \text{ kg/cm}^2$$

Revisión del esfuerzo cortante máximo admisible cuando se usa refuerzo.

$$V_{adm} = 1.5 FR \sqrt{f^*c} = 1.5 \times 0.8 \sqrt{160} = 15.18 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_{adm} = 15.18 \text{ kg/cm}^2 > V_u 11.94 \text{ kg/cm}^2$$

Revisión para CM + CV + CA

$$M_u = (24.287 + 30.46)1.1 = 60.22 \text{ t-m}$$

$$V_u = (21.16 + 0.74)1.1 = 24.09 \text{ ton}$$

$$V_u = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\alpha M_u a_2}{J_c} = \frac{24090}{6248} + \frac{0.387 \times 6022000 \times 29.16}{5\,901\,721} =$$

$$V_u = 15.38 \text{ kg/cm}^2 > V_{adm} = 15.18 \text{ kg/cm}^2$$

por lo que será necesario reforzar el ábaco para resistir

el cortante según el artículo 2.1.5.b de las Normas Técnicas Complementarias.

Si  $1.5 FR \sqrt{f'c} < Vu \leq 2.5 FR \sqrt{f'c}$  entonces las separaciones máximas se reducen a  $0.25d$ .

$$V_{max} = 2.5 \times 10.12 = 25.30 \text{ kg/cm}^2 > Vu = 15.38 \text{ kg/cm}^2$$

Refuerzo por tensión diagonal.

$$Vu = dbVu = 22 \times 102 \times 15.38 = 34.513 \text{ kg}$$

$$V_{CR} = 0.5 FR db \sqrt{f'c} = 0.5 \times 0.8 \times 102 \times 22 \times \sqrt{160} = 11354 \text{ kg}$$

proponiendo estribos de cuatro ramas del # 3

$$Av = 4 \times 0.71 = 2.84 \text{ cm}^2$$

$$S = \frac{FR Av fy d}{Vu - V_{CR}} \leq \frac{FR Av fy}{3.5 b}$$

sustituyendo

$$\frac{0.8 \times 2.84 \times 4200 \times 22}{34513 - 11354} = 9.1 \text{ cm} < \frac{0.8 \times 2.84 \times 4200}{3.5 \times 102} = 26.7 \text{ cm}$$

$$0.25 d = 0.25 \times 22 = 5.5 \text{ cm} < 9.2 \text{ cm}$$

Se colocarán estribos del # 3 de cuatro ramas 5.5 cm hasta un tercio del claro.

Una alternativa para evitar una cantidad grande de refuerzo por cortante dentro del ábaco, consiste en aumentar el peralte de los ábacos únicamente. Para esta condición, solo se toma en cuenta el incremento de la carga muerta sobre el ábaco, y se considera que los momentos flexionantes y las rigideces no varían significativamente.

## 6. COMENTARIOS GENERALES

En esta tesis se da énfasis al comportamiento básico de una parte de la estructura de concreto reforzado, como lo es la losa. Se ha pretendido dejar claras las ideas para que el lector tenga un conocimiento completo del funcionamiento y características de un sistema de piso a base de losa plana aligerada.

En los primeros capítulos se explica la utilidad de este sistema de piso, así como la descripción del análisis de losas reticulares donde se plantea la teoría de este tipo de losas, y donde se observa la complejidad matemática para efectuarlo con fines prácticos. Aún empleando programas de computadora ya elaborados no resulta fácil, por lo tanto se recurrió a el método aproximado establecido en el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal y del American Concrete Institute ( A.C.I.).



En cuanto a las aplicaciones se puede concluir lo siguiente: En la determinación de rigideces de la viga equivalente, se usó el procedimiento propuesto en la ref 3, aunque existen varios procedimientos comunes para valuar la rigidez angular, tomando como base el método de la analogía de la columna.

Otro método sería considerar la viga equivalente con sección uniforme (sin ábaco), el cual solo tiene una aproximación de 65% (ref 13), por lo que se recomienda no usar esta forma.

Una recomendación cuando se considera el efecto de sismo, donde resulta un incremento notable en la fuerza cortante, se deben revisar los desplazamientos laterales y en caso de rebasar los permisibles, se recomienda usar muros de cortante con el objeto de que la losa no tome tanto el efecto del sismo (ref 14).

En el ejemplo que se presentó, se trató de que la sección tuviera que ser doblemente reforzada, para aplicar la metodología a seguir en estos casos; puesto que para el problema en donde con la sección propuesta se puede tomar el momento resistente de diseño  $M_R$ , no hay más que entrar con el valor de  $M_R$  y encontrar el valor de  $A_s$ .

El autor espera que el contenido y tratamiento del tema de esta tesis, sea de interés para todas las personas y profesionales de ingeniería estructural, y que en un futuro al llegar a encontrar problemas similares, que este trabajo sirva de base y experiencia para un mejor análisis y diseño de estructuras similares.

## 7. REFERENCIAS

1. Basilia M. " Resistencia de elemento para aligerar losas planas de concreto reforzado" Tesis maestría UNAM 1962.
2. Sharan S.K., Clyde D., y Turcke D, " Equivalent frame Analysis Improvements for Slab Design" A.C.I. Journal, Febrero 1978.
3. González Cuevas, Robles F., Casillas G., Diaz de Cossio. " Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado " ed. Limusa 1979.
4. Winter George, Nilson Arthur. " Design of Concrete Structures " McGraw-Hill Kogakusha, Ltd 1972.
5. Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. " Theory of Plates and Shells " McGraw-Hill Kogakusha, 1959.

6. Szilard R. " Theory and Analysis of Plates. Clasical and Numerical Methods " Prentice-Hall 1974.
7. A.C.I. Comité 318. " Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado (A.C.I. 318-77) y Comentarios " IMCYC 1980.
8. Corley W.G., Jirsa J.O. " Equivalent Frame Analysis for Slab Design " A.C.I. Journal, noviembre 1960, proceedings, vol 67.
9. Ferguson P.M. " Design of Concrete Structures " Prentice-Hall 1972.
10. David A. Pecknold " Slab Effective Width for Equivalent Frame Analysis " A.C.I. Journal, abril 1975.
11. Instituto de Ingeniería U.N.A.M. " Diseño y construcción de Estructuras de Concreto " Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal. Julio 1977.
12. Instituto de Ingeniería U.N.A.M. " Ancho Equivalente de Losas Reticulares para Análisis ante Cargas Laterales " Informe julio 1976.
13. J. Díaz Padilla, R. Díaz de Cossío " Ensaye de Losas Aligeradas " Instituto de Ingeniería 249, diciembre 1969.
14. Meli R. Rodriguez M. " Waffle Flat Plate-column Connections Under Alternating Loads " Instituto de Ingeniería UNAM 1978.
15. Harnden C.T. " Test of One and Two-story Flat Plate Models " Journal of the Structural Division ASCE vol 100 No. 571, enero 1974.
16. Manual de Productos Vitro Cimbra. Vitro-Fibras S.A.

A P E N D I C E S .

$C_1 / C_2$	d= 25	d= 40	d= 60
0.9	1.0167	1.0149	1.0129
0.8	1.0284	1.0234	1.0190
0.7	1.0543	1.0478	1.0412
0.6	1.0757	1.0661	1.0568
0.5	1.1070	1.0959	1.0745

En donde  $C_1$  es la menor de las dimensiones.

Los valores intermedios se pueden interpolar.

Factor de corrección para el momento que es resistido en la sección crítica, cuando  $c_1 \neq c_2$ .

$$\frac{y}{x} = (1 - 0.60 \frac{x}{y}) \frac{y}{x} = \frac{y}{x} - 0.60$$

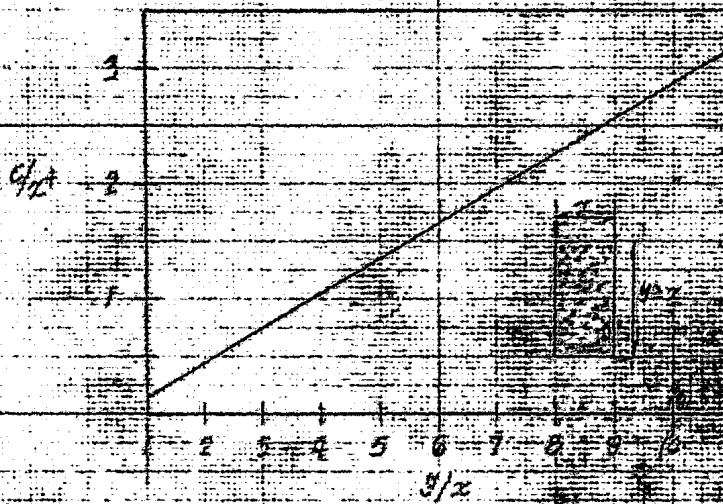
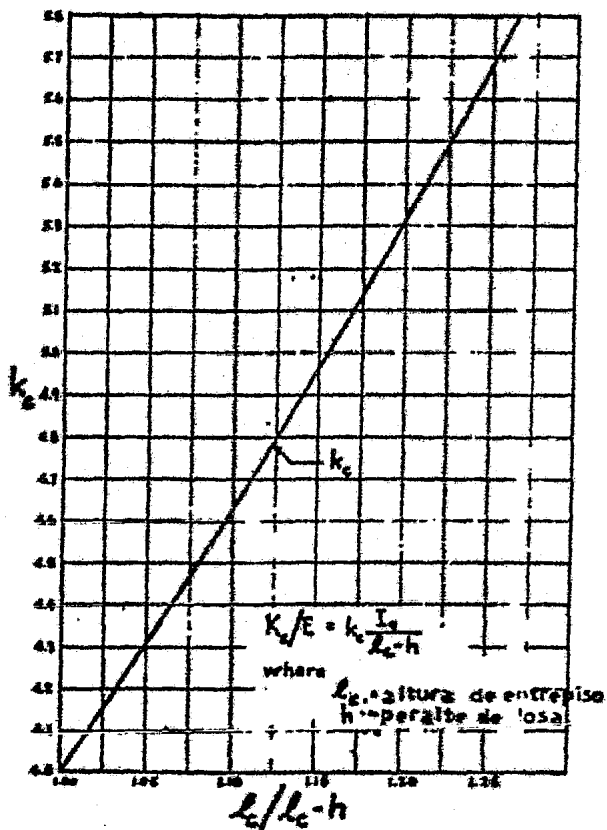


Gráfico para obtenção do fator G

T - 4

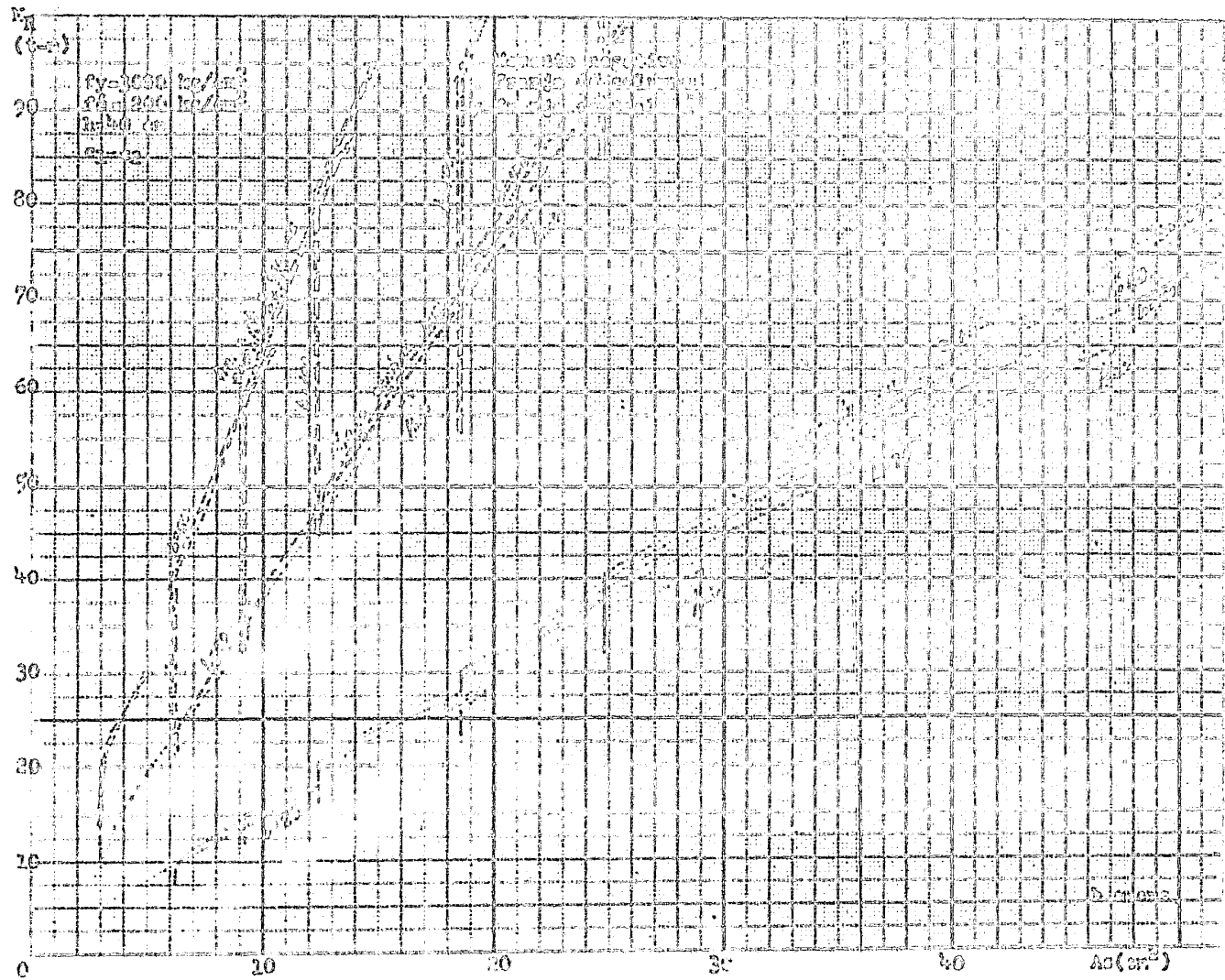


Rigidez de columna  $K_c/E_c$

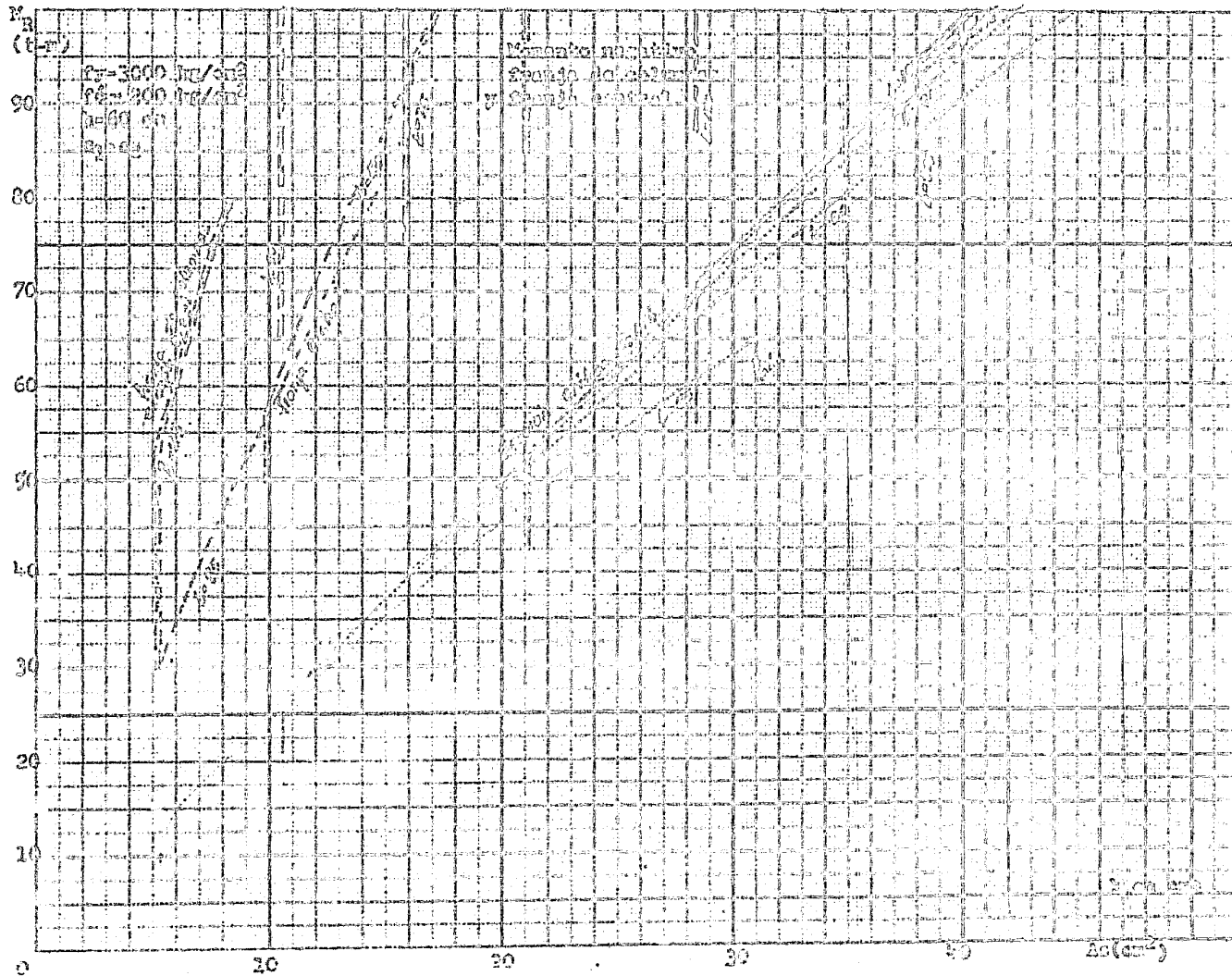
$$K_c/E_c = \left[ 1 + 3 \left( \frac{c}{l_c - h} \right)^2 \right] \frac{I_c}{l_c - h}$$

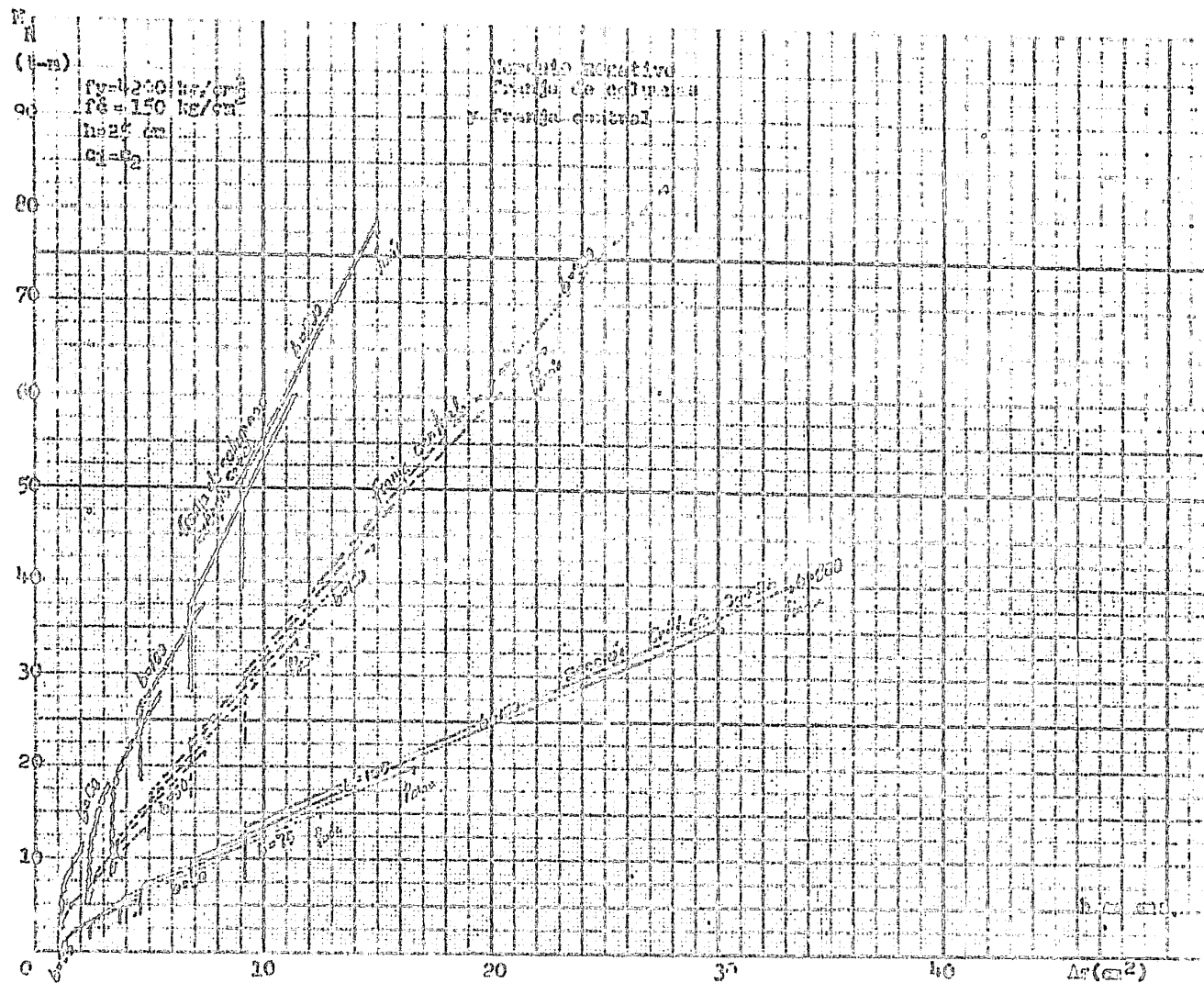
$$k_c = 1 + 3 \left( \frac{c}{l_c - h} \right)^2$$

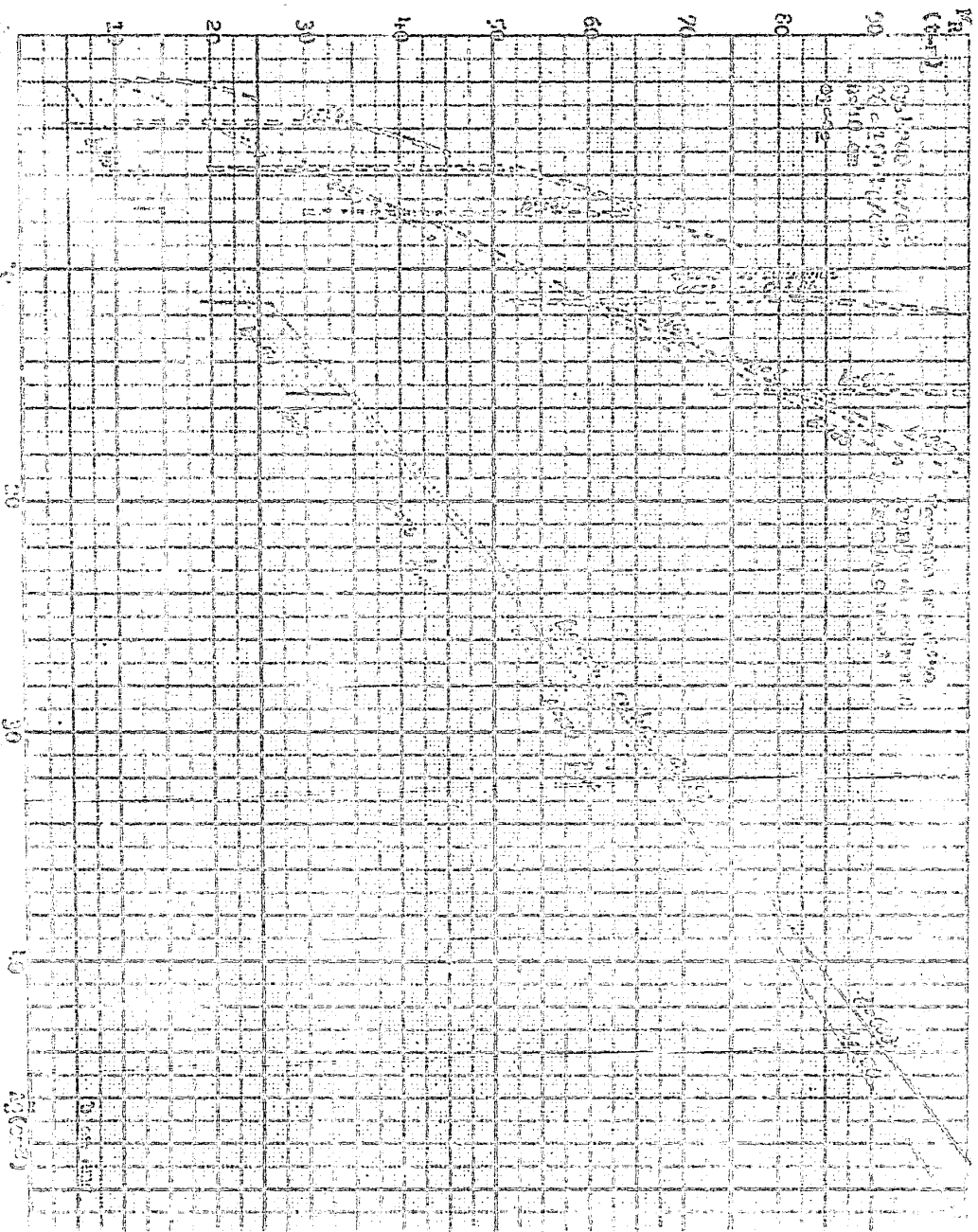












W2  
(0-1)

90

80

70

60

50

40

30

20

10

0

10

20

30

40

50

60

70

80

90

100

110

120

130

140

150

160

170

180

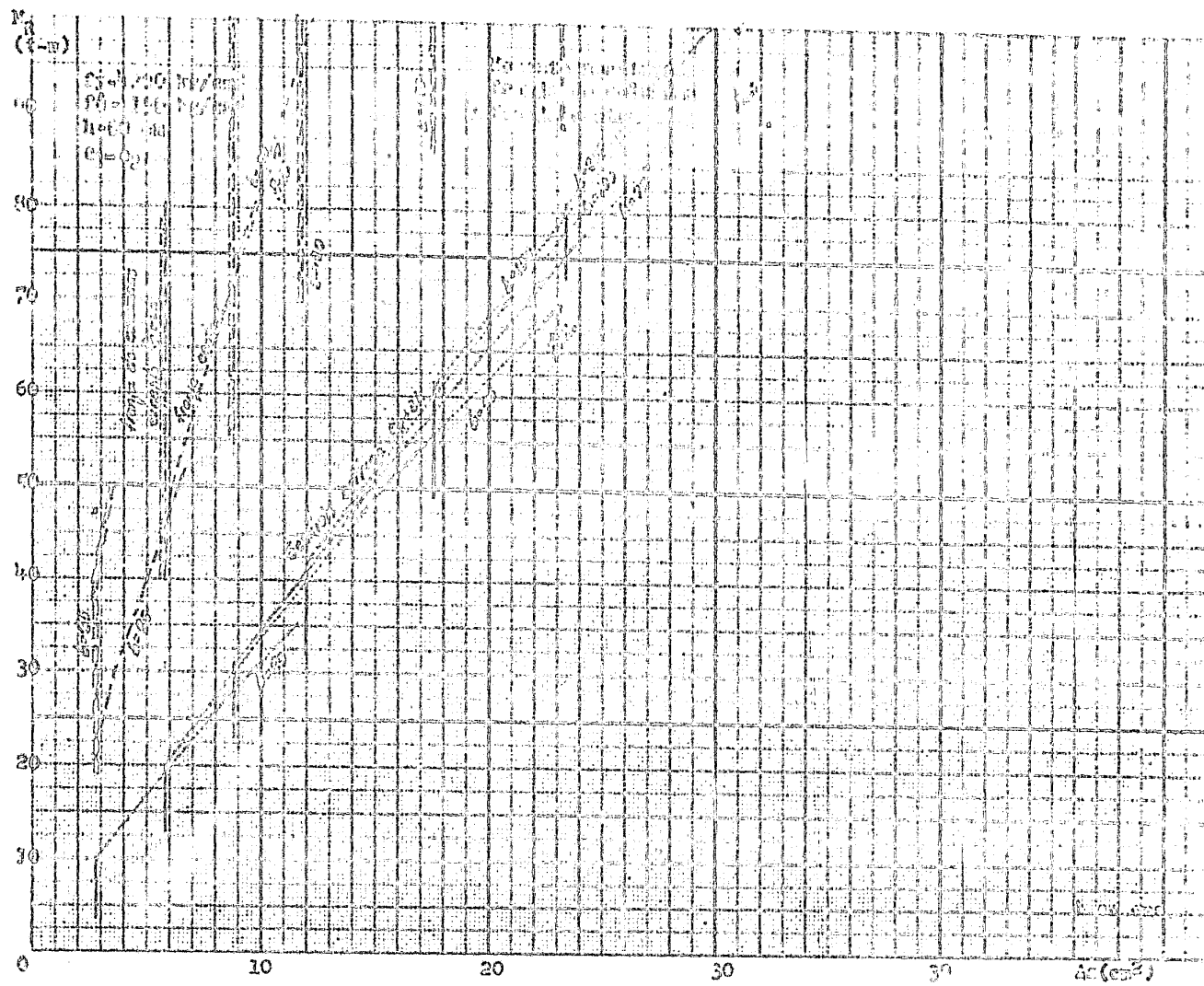
190

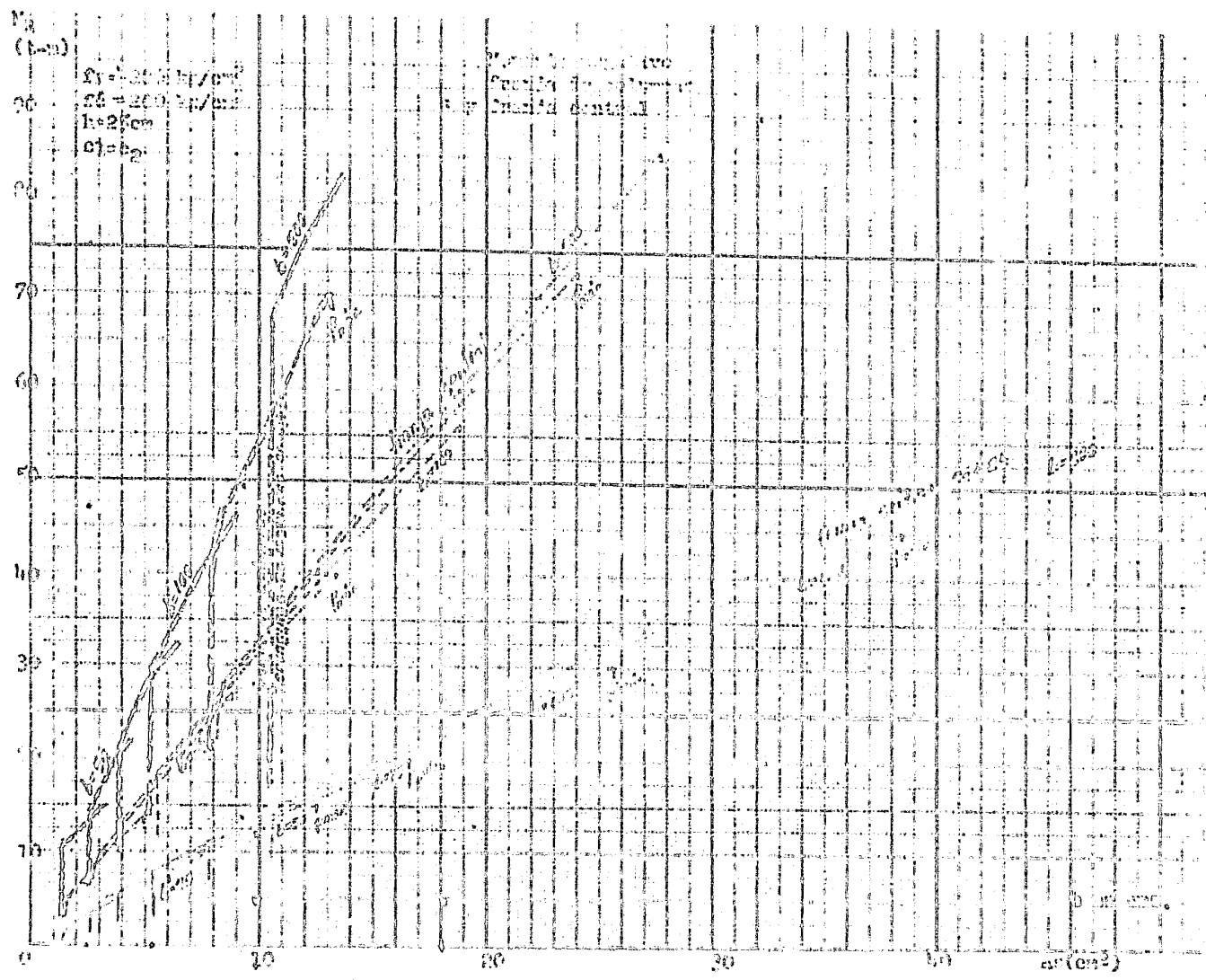
200

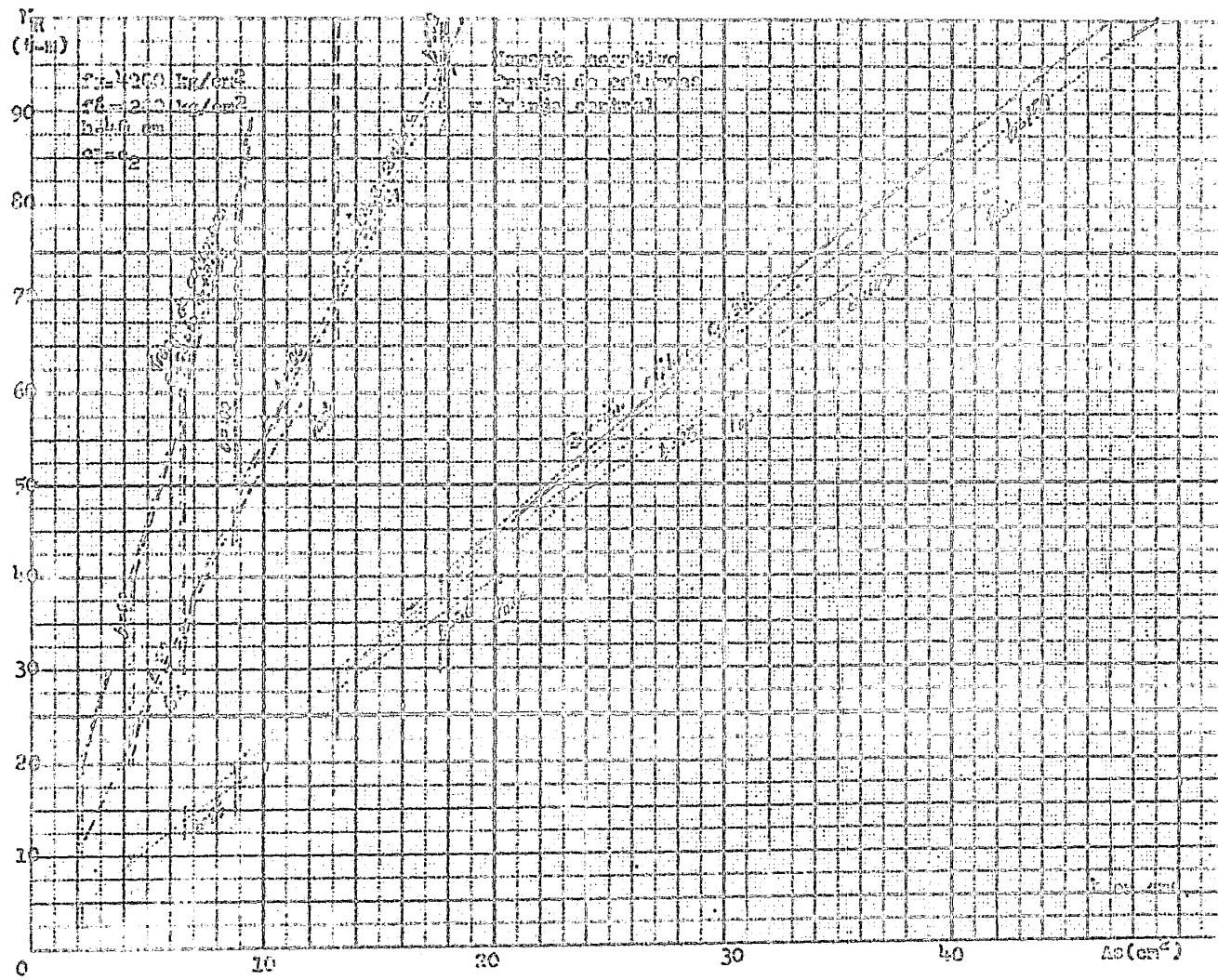
210

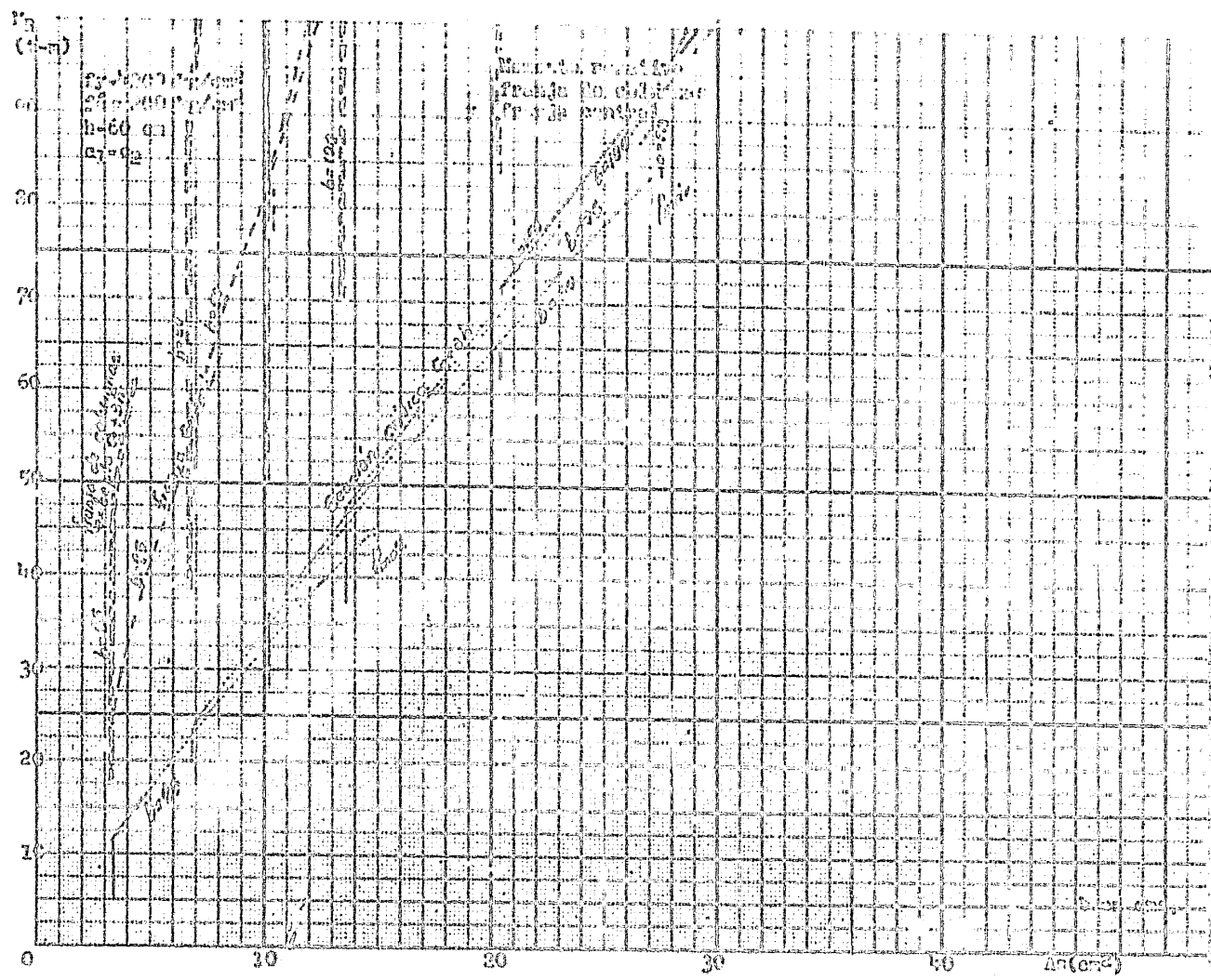
220

Technical drawing showing a cross-section of a mechanical part on a grid. The drawing includes a vertical axis labeled 'W2 (0-1)' and a horizontal axis with numerical markings from 10 to 90. The part features a central vertical shaft with a diameter of approximately 10 units, a wider cylindrical section with a diameter of approximately 30 units, and a top section with a diameter of approximately 40 units. The drawing is oriented vertically on the page.



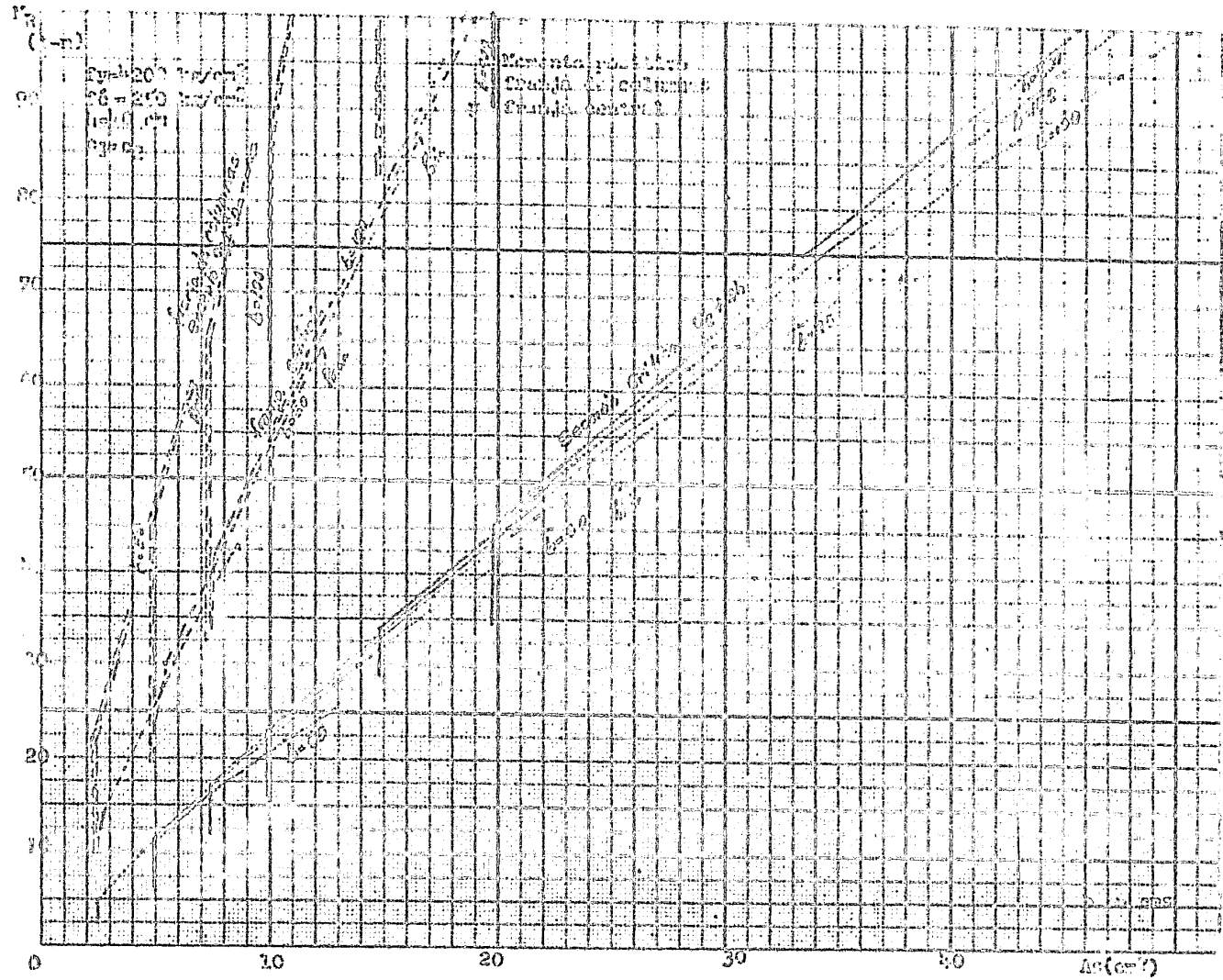


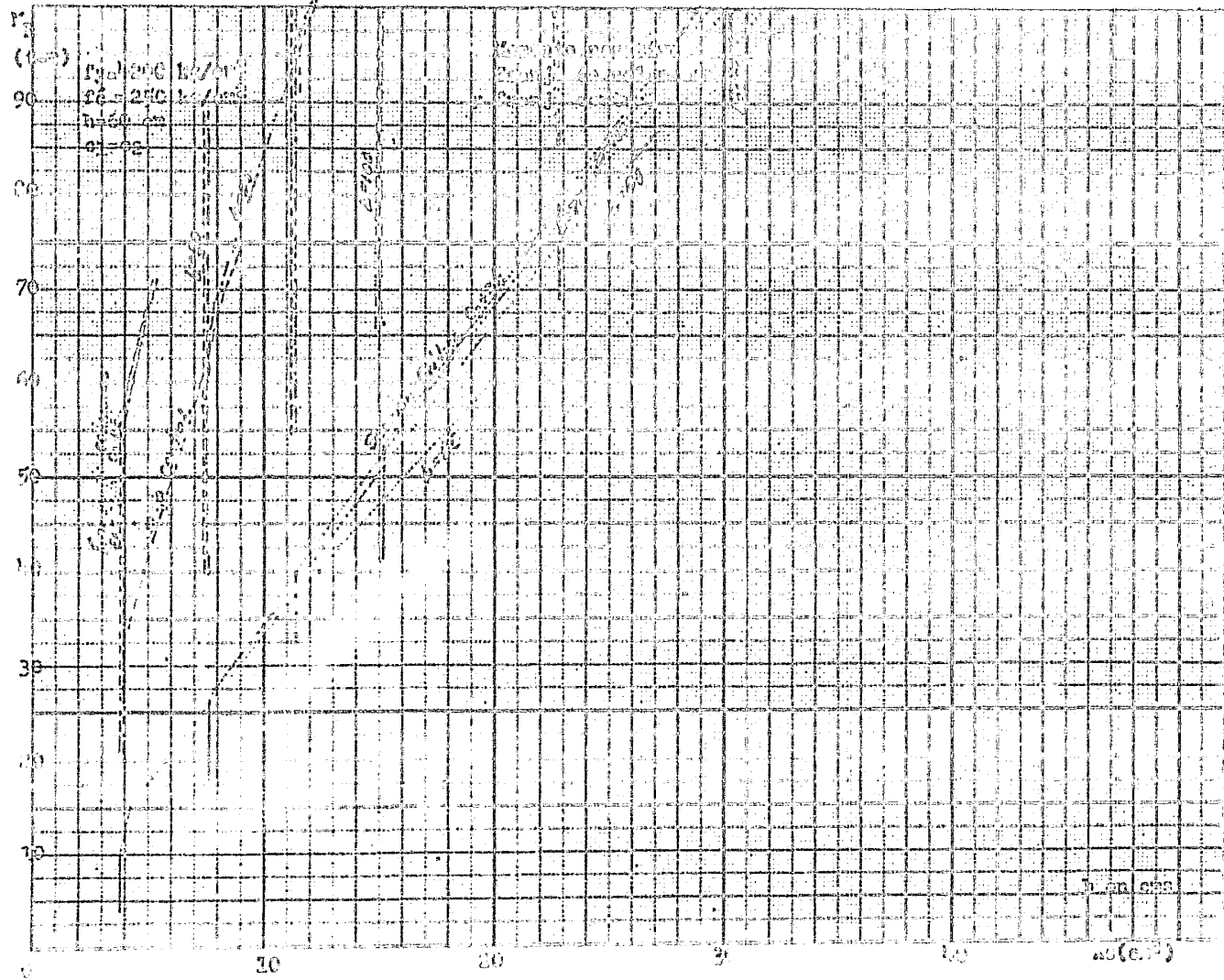


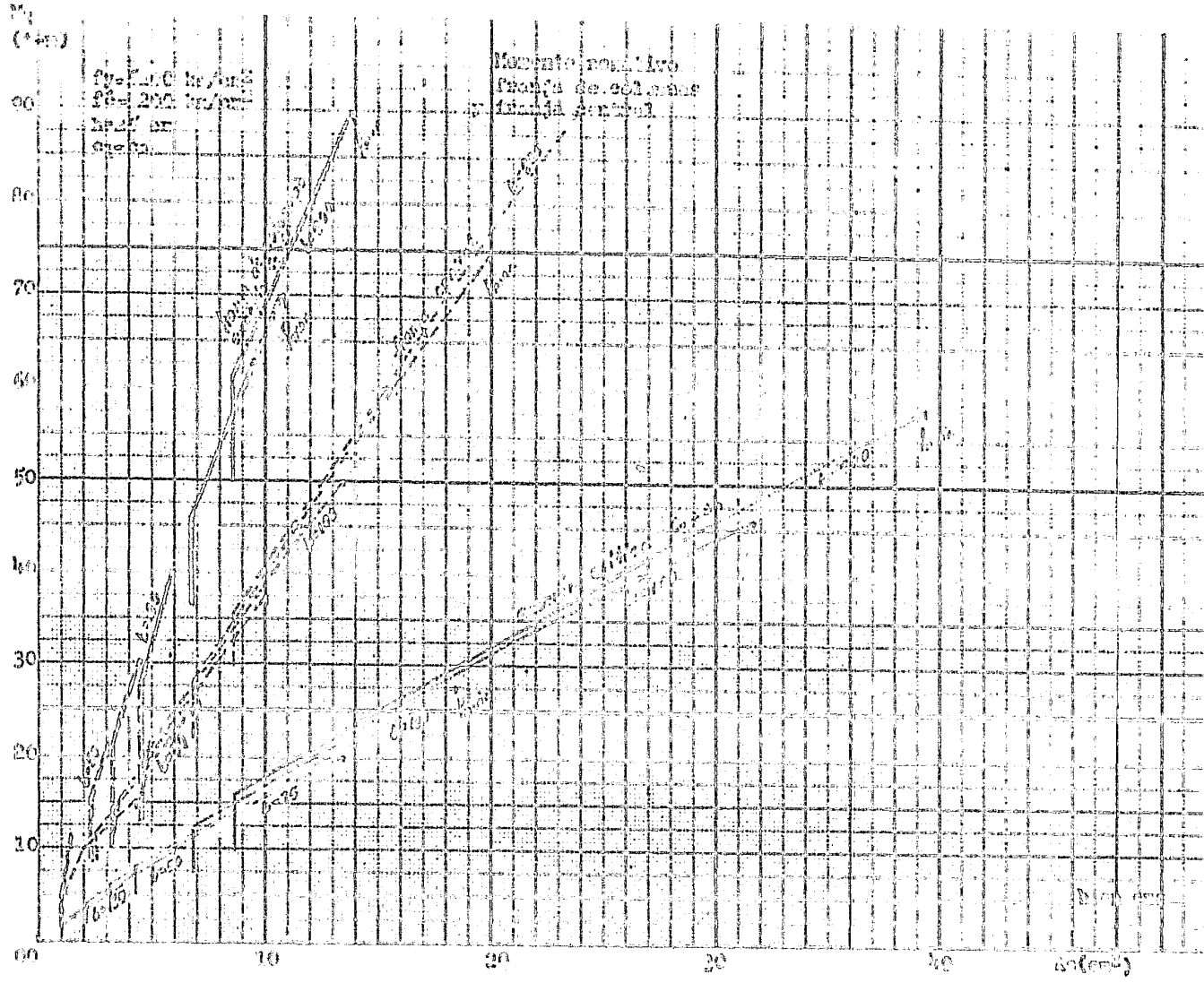


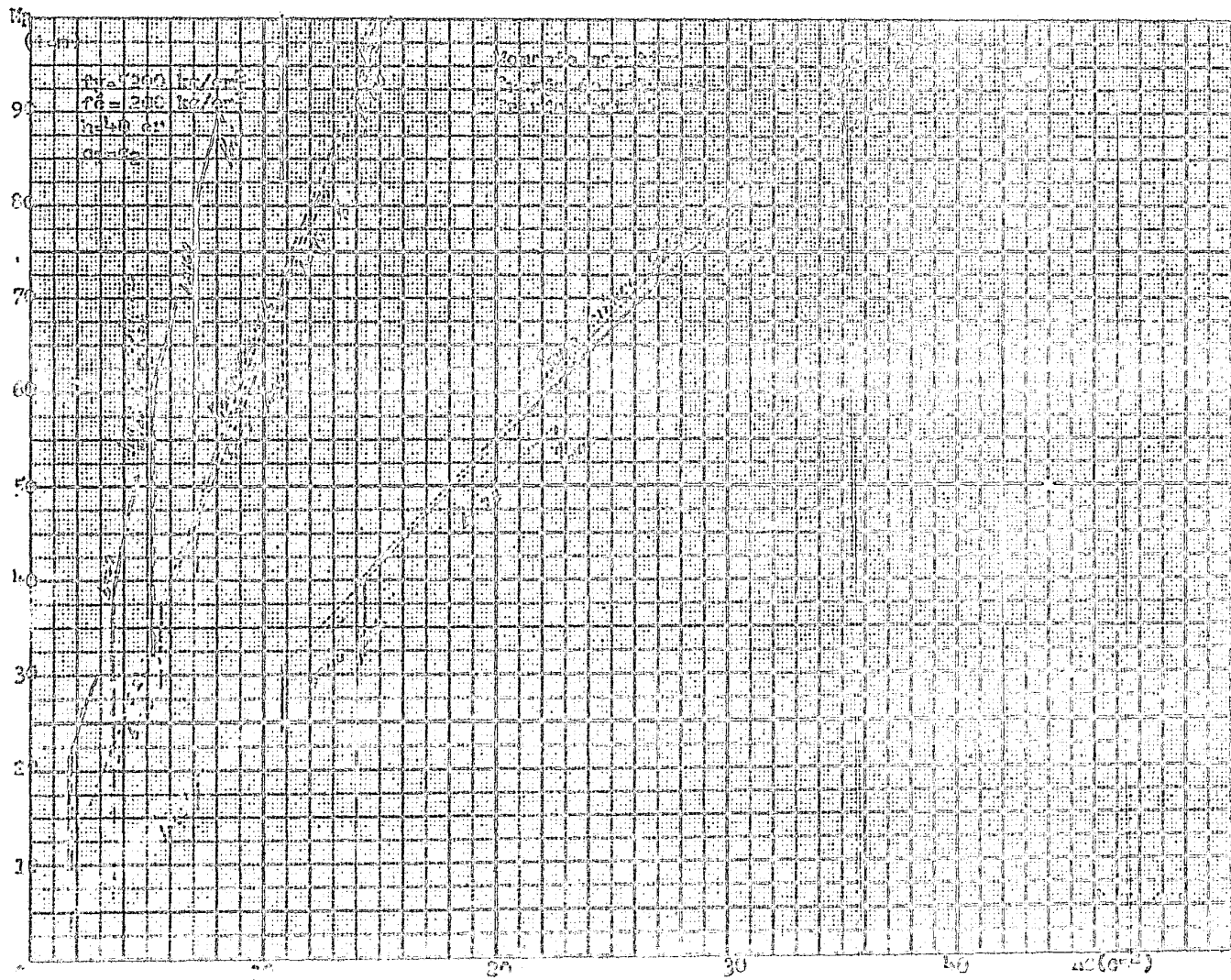




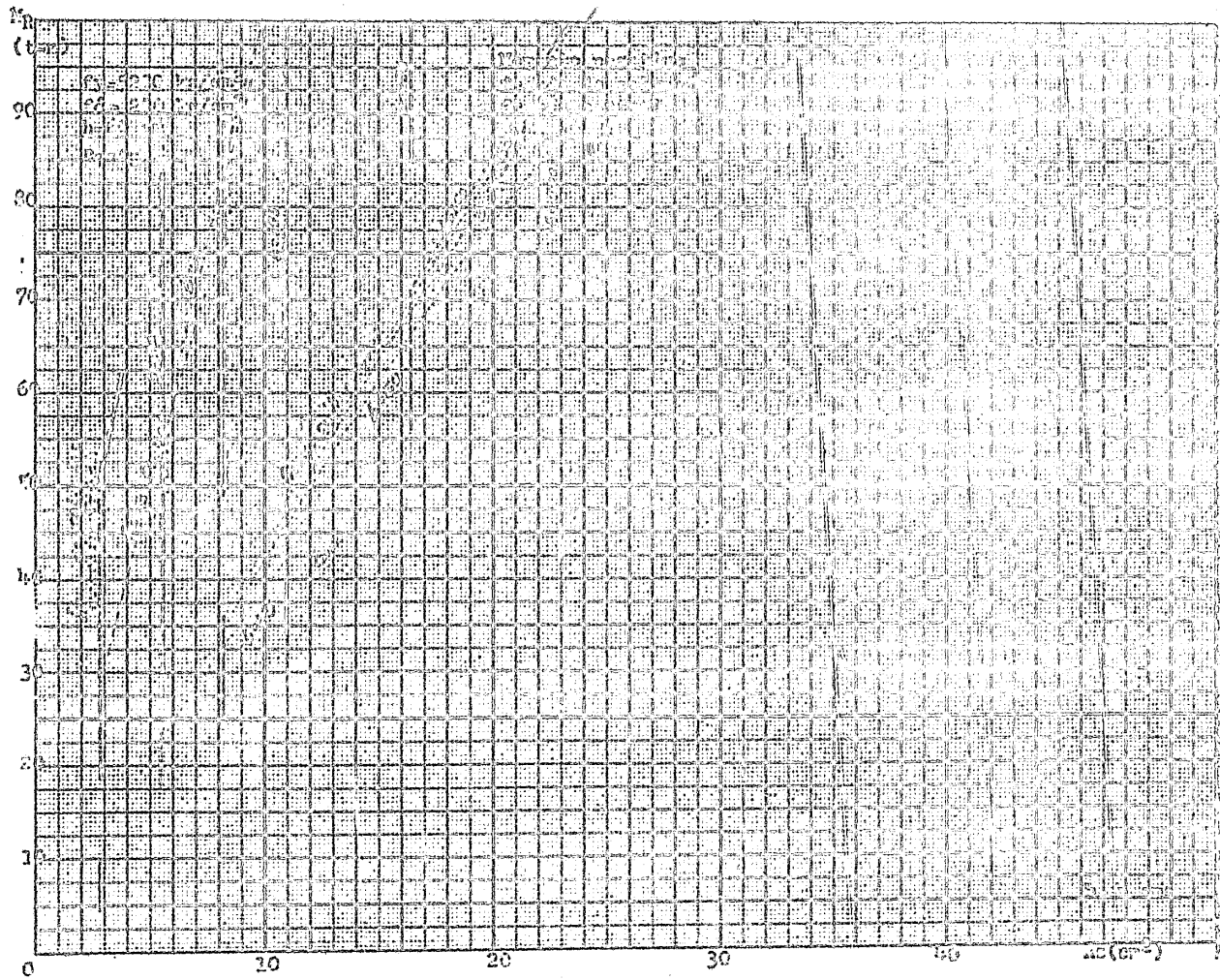


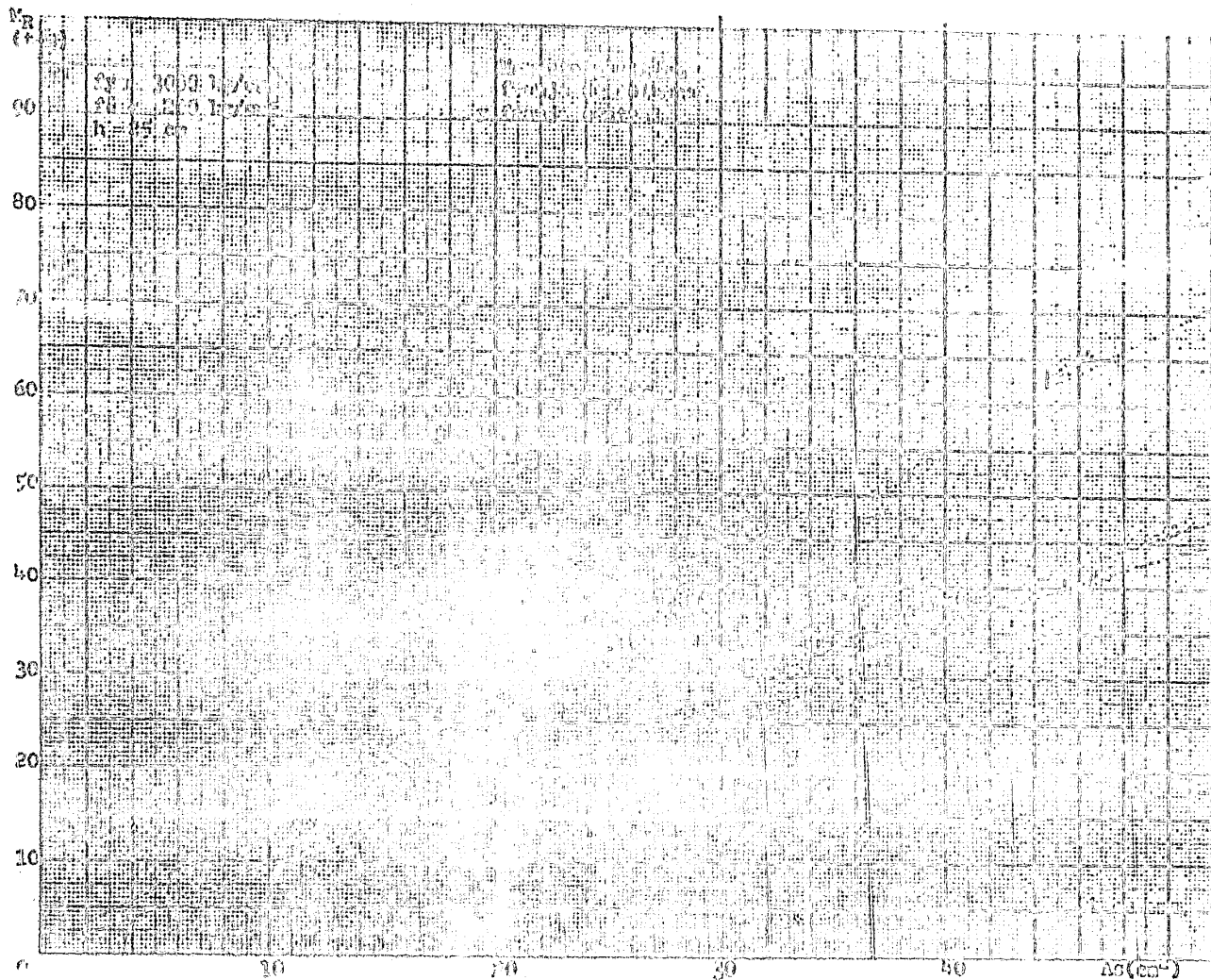


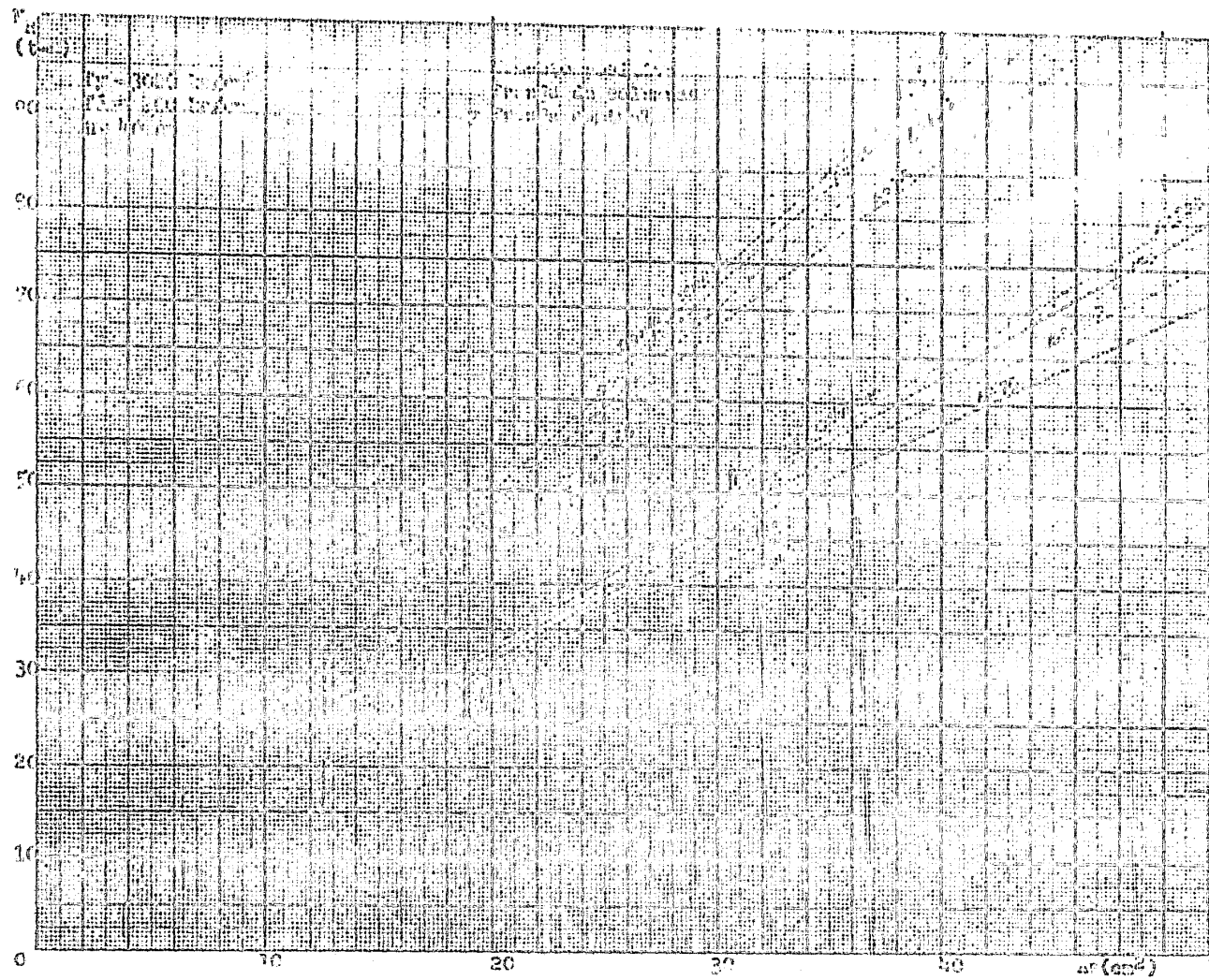




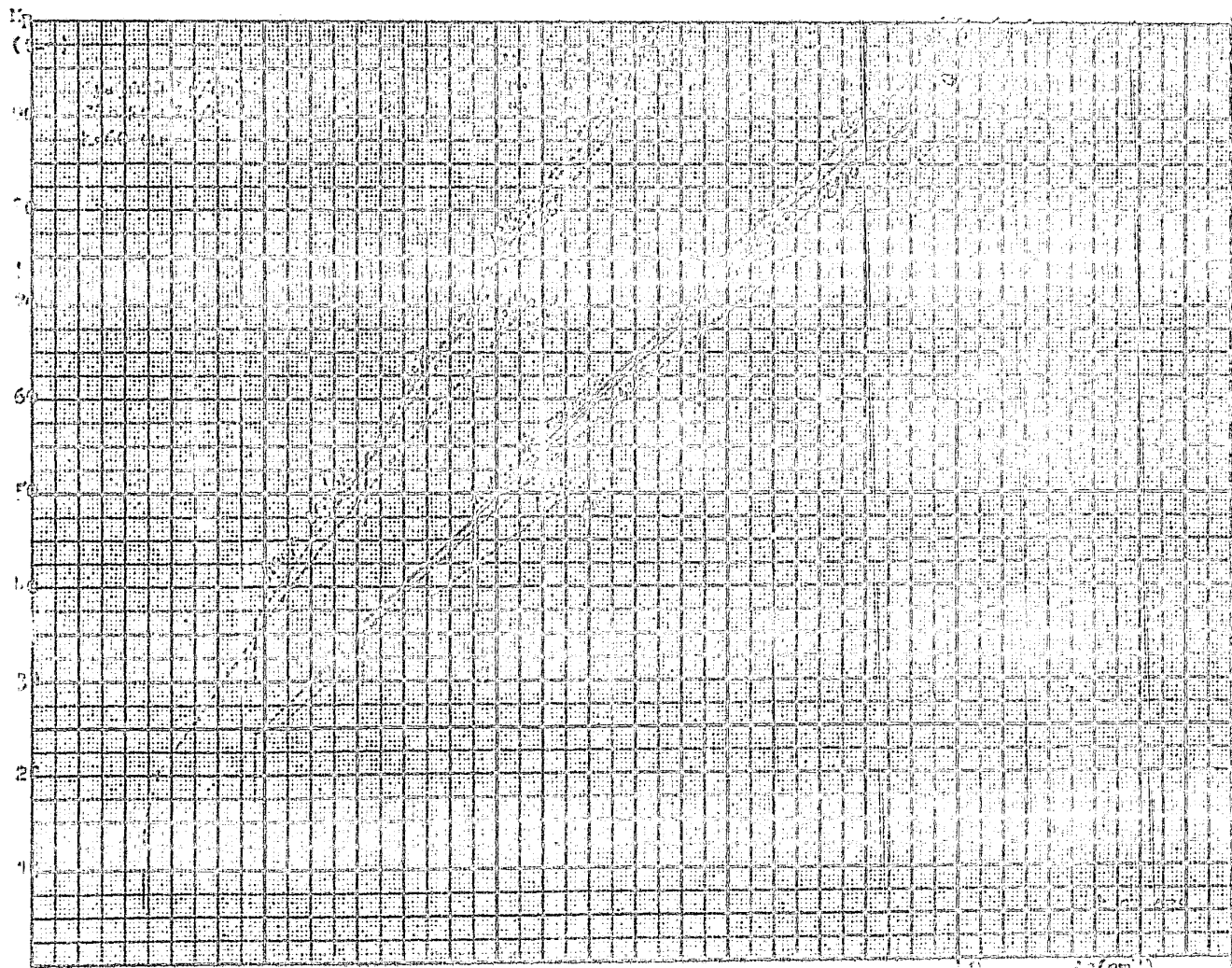
0





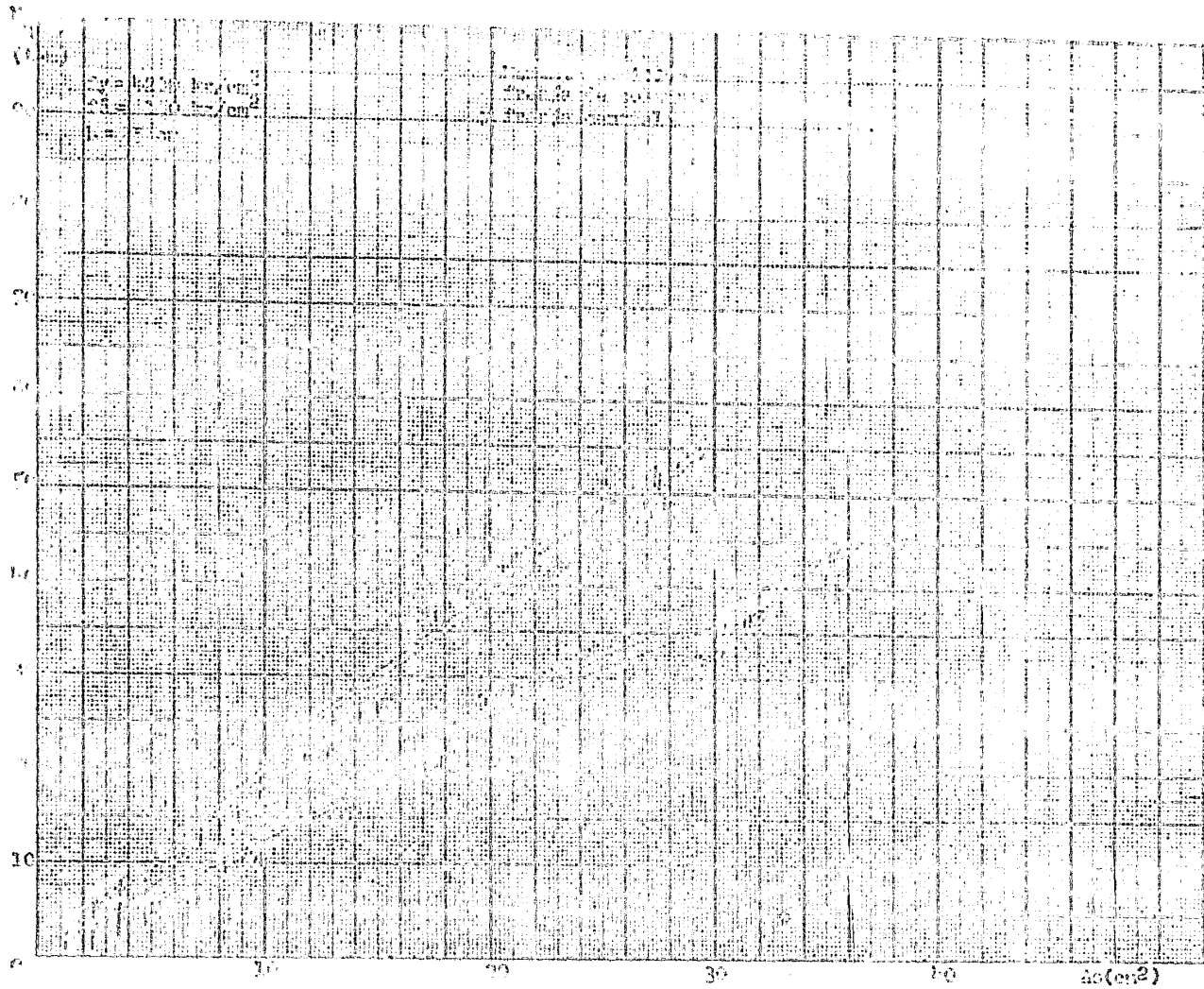


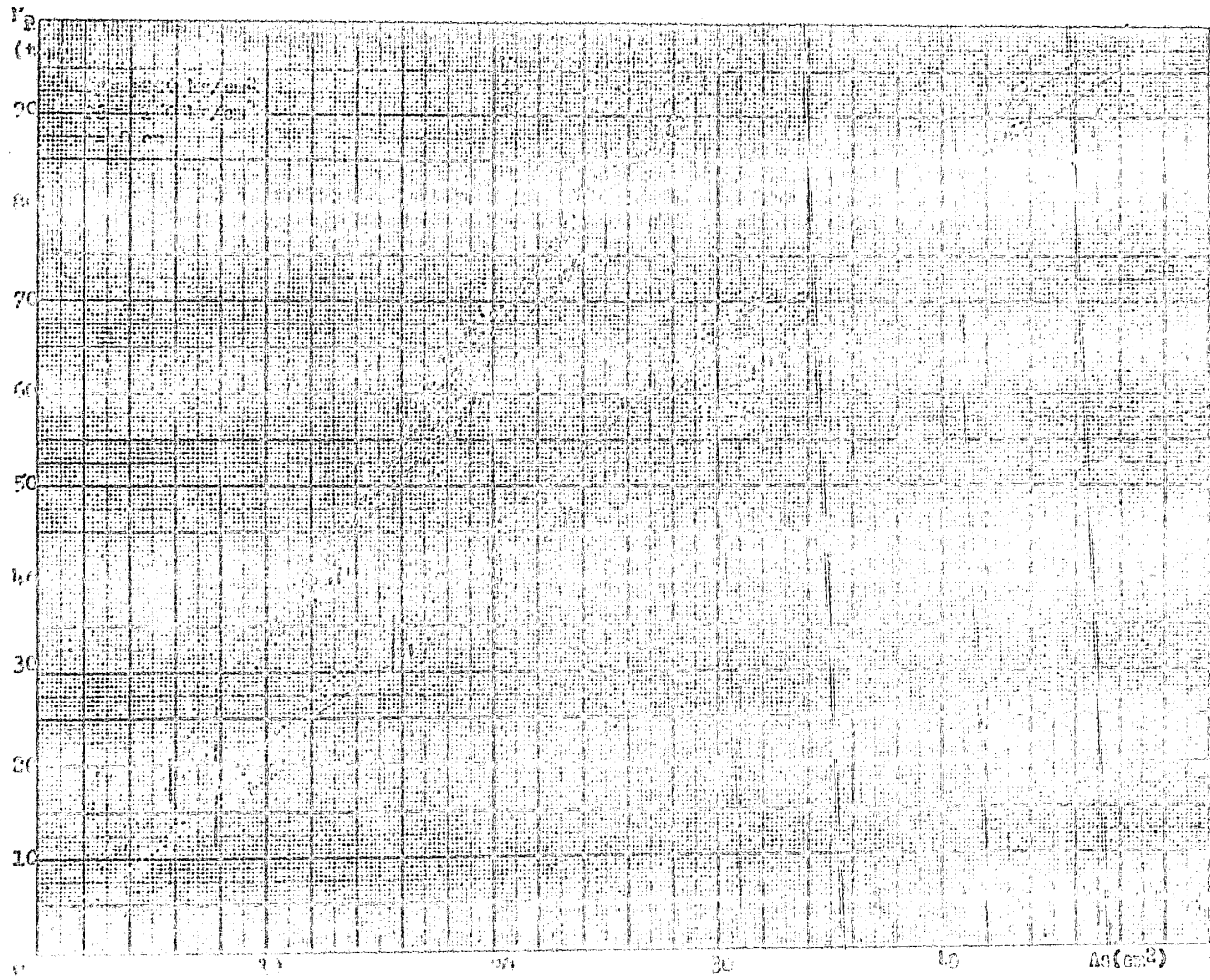


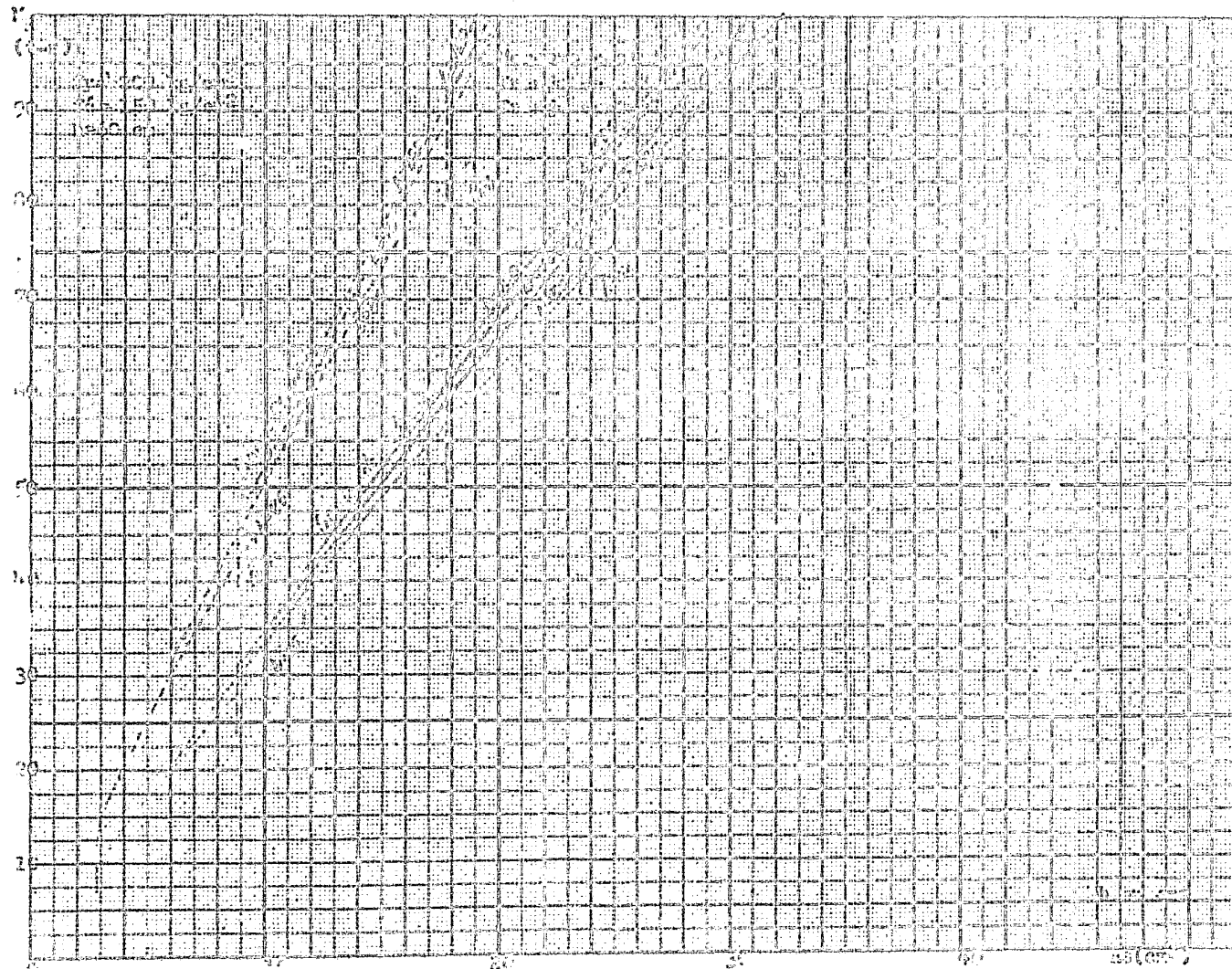


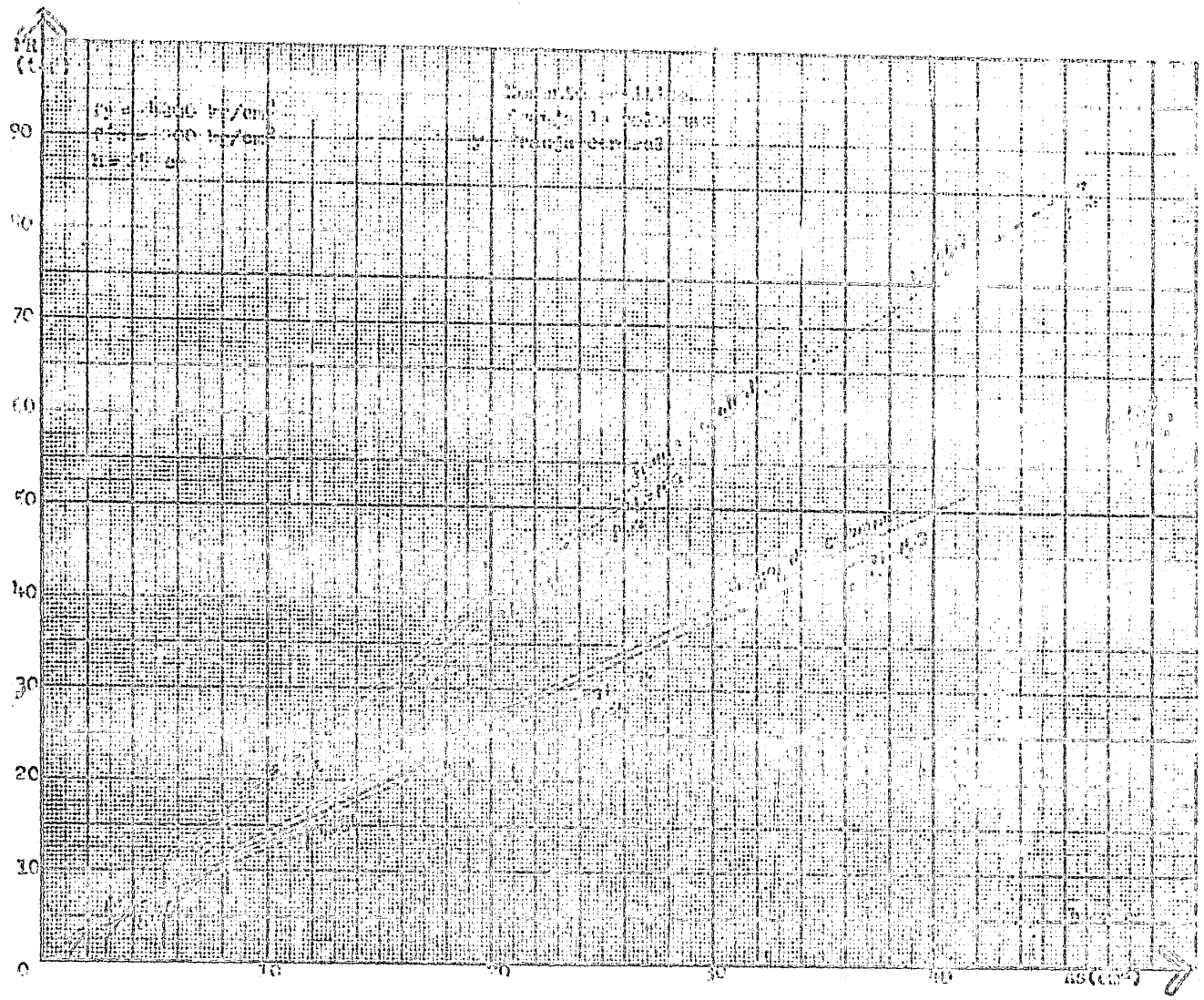
41 (cm)

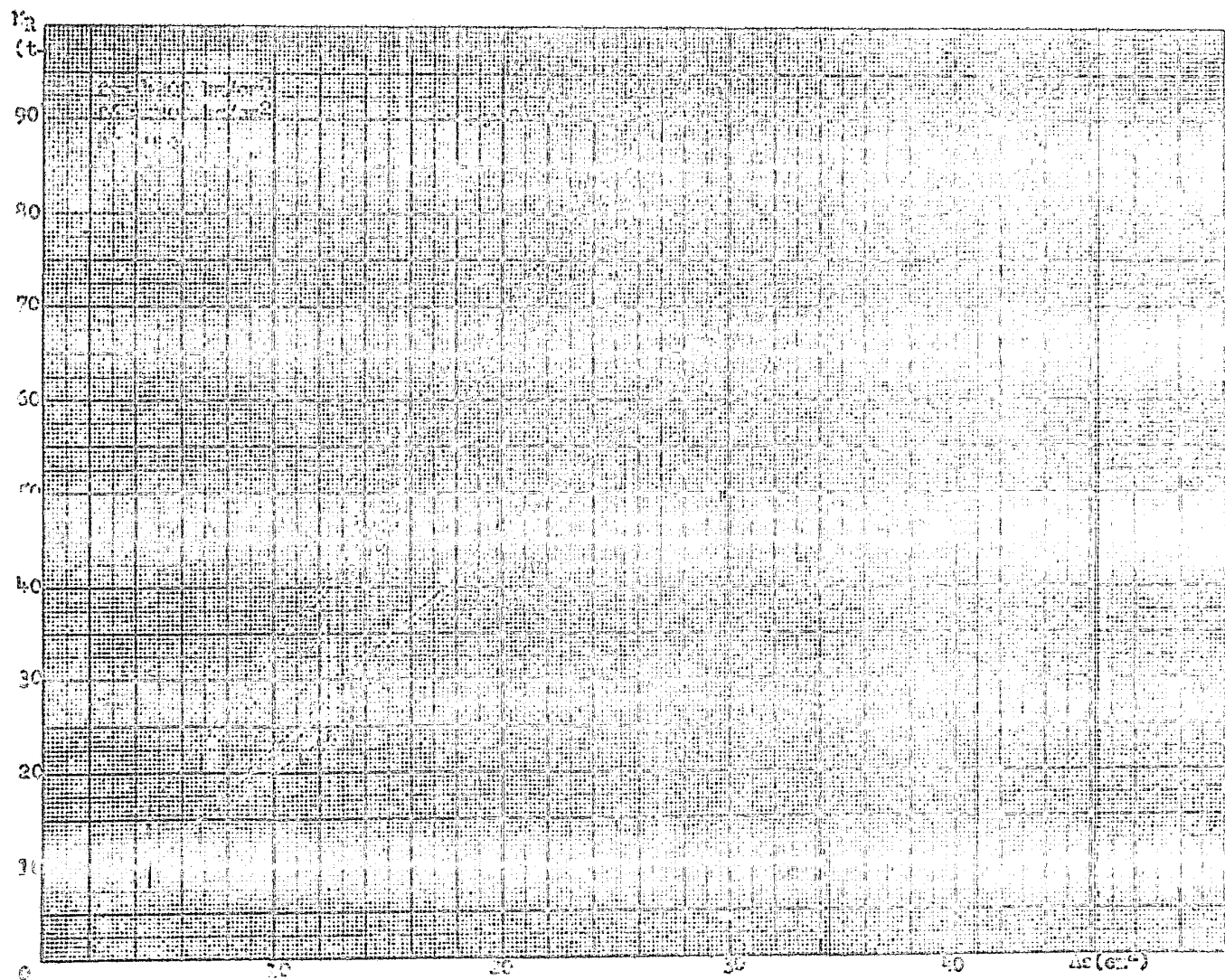


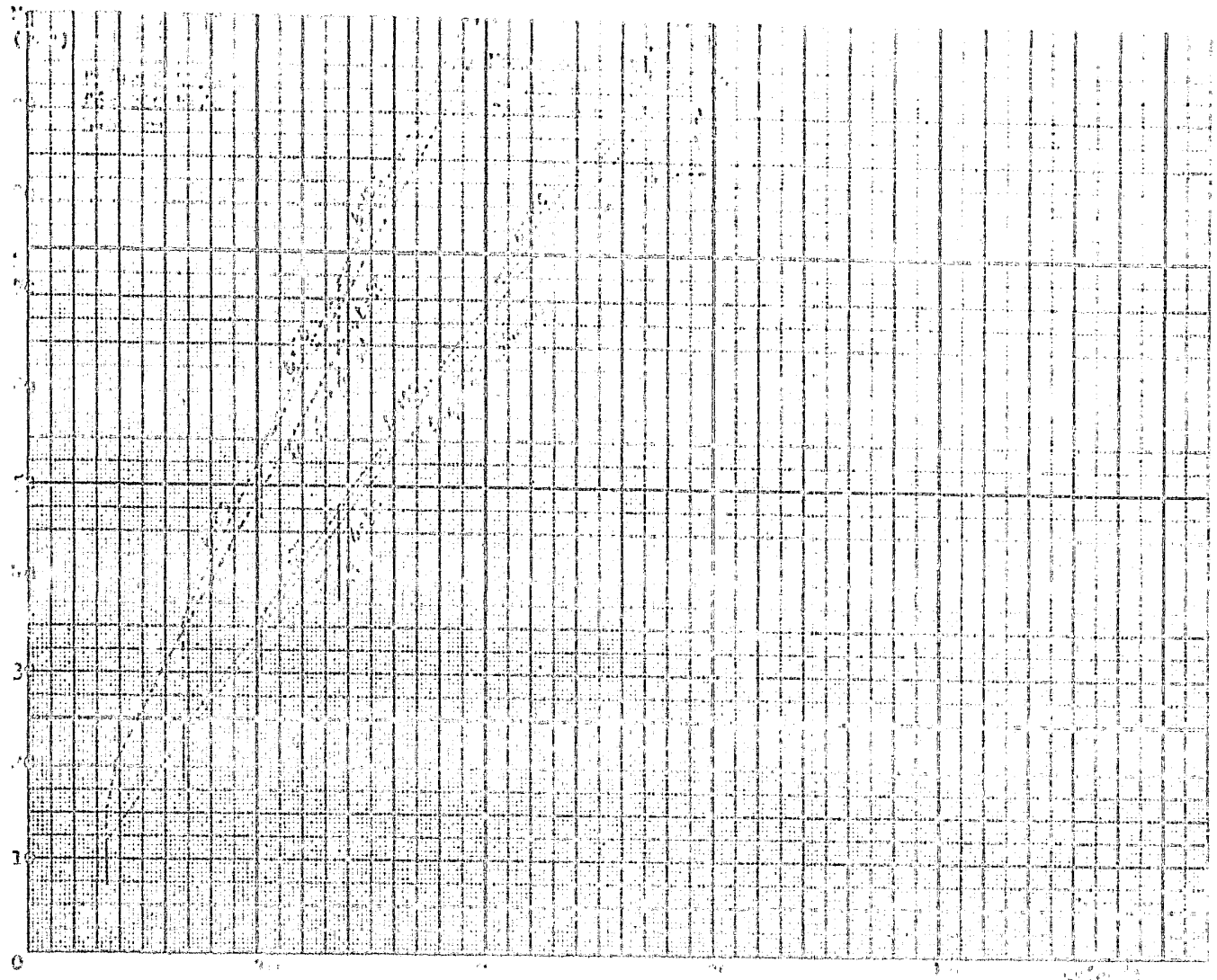




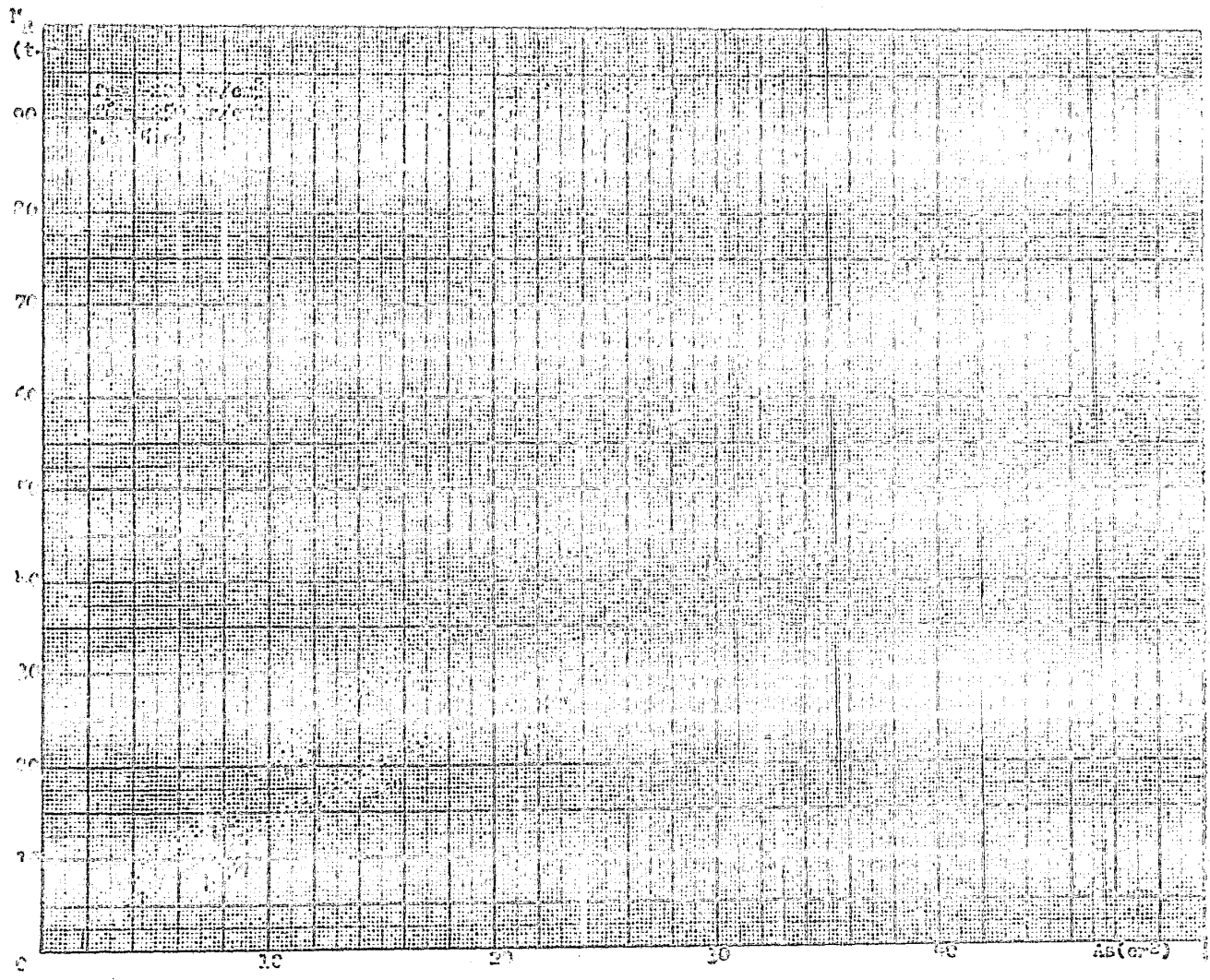


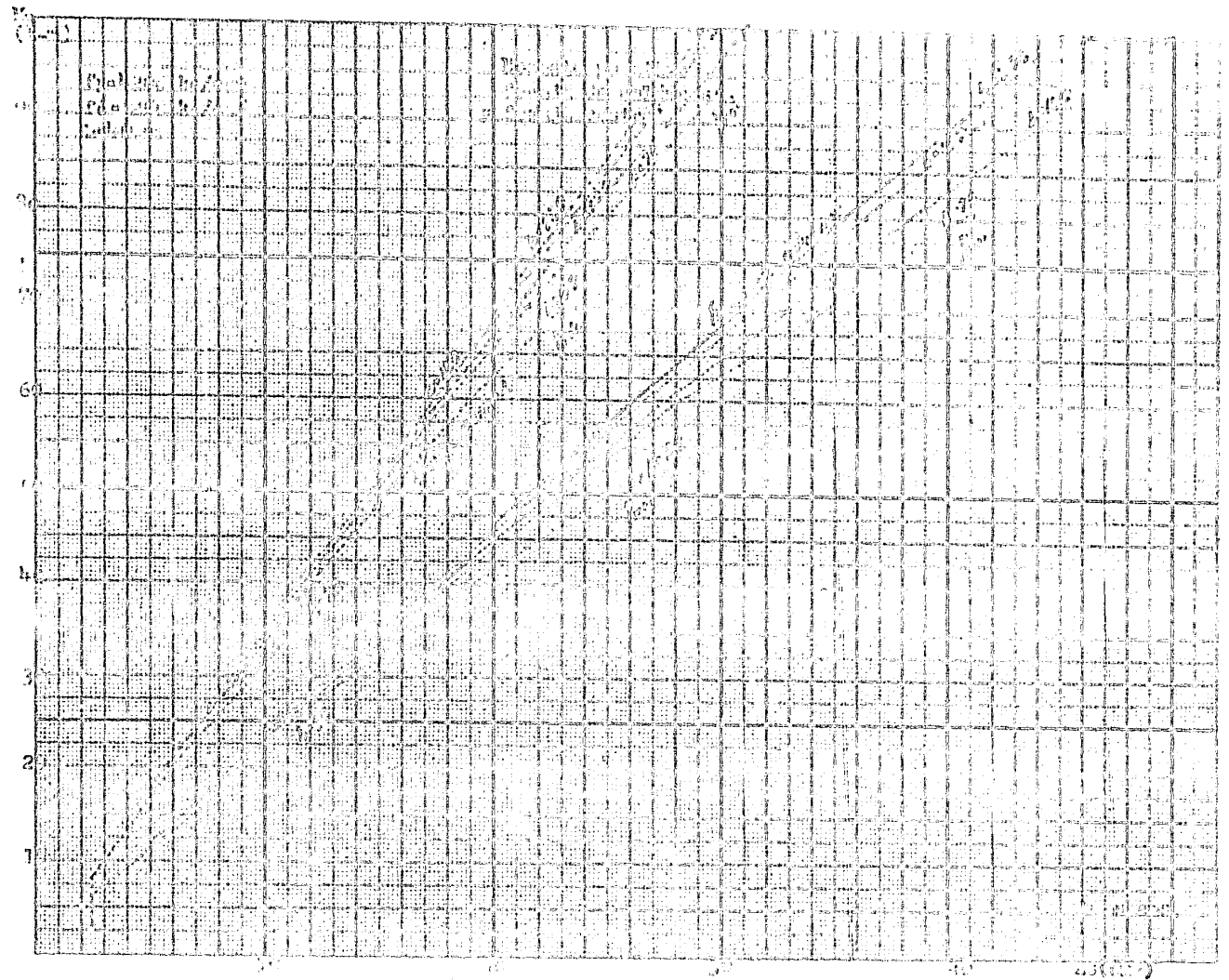




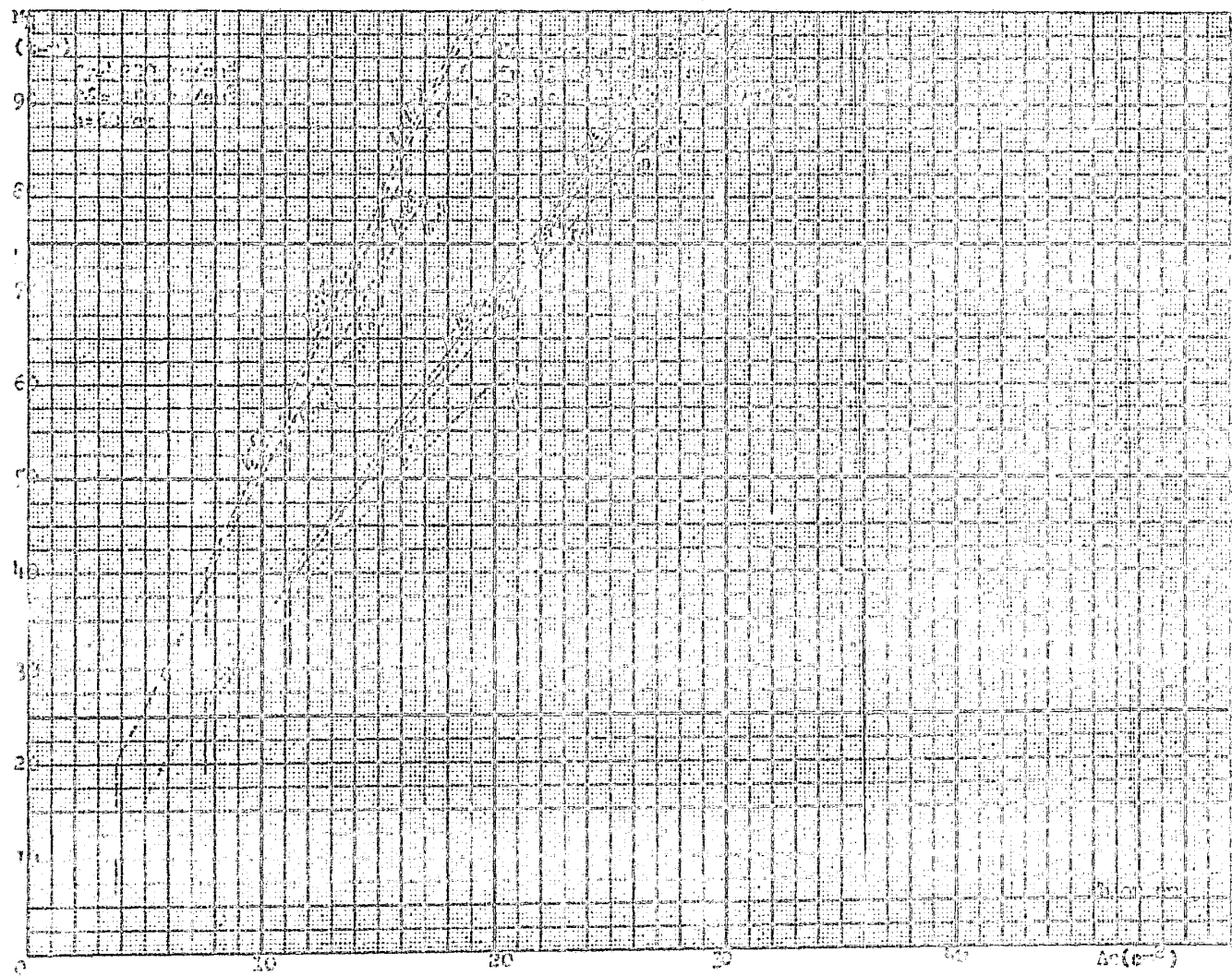


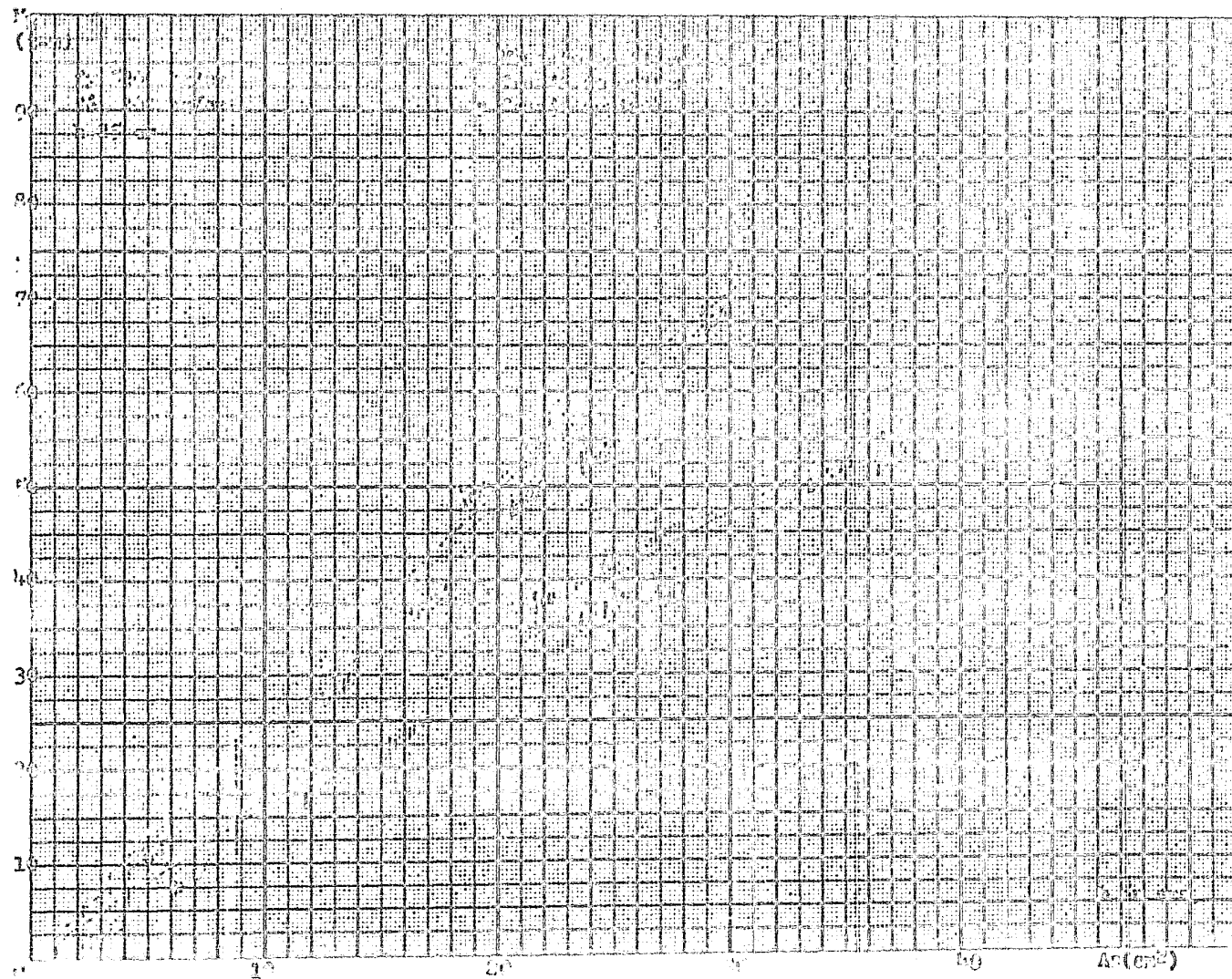


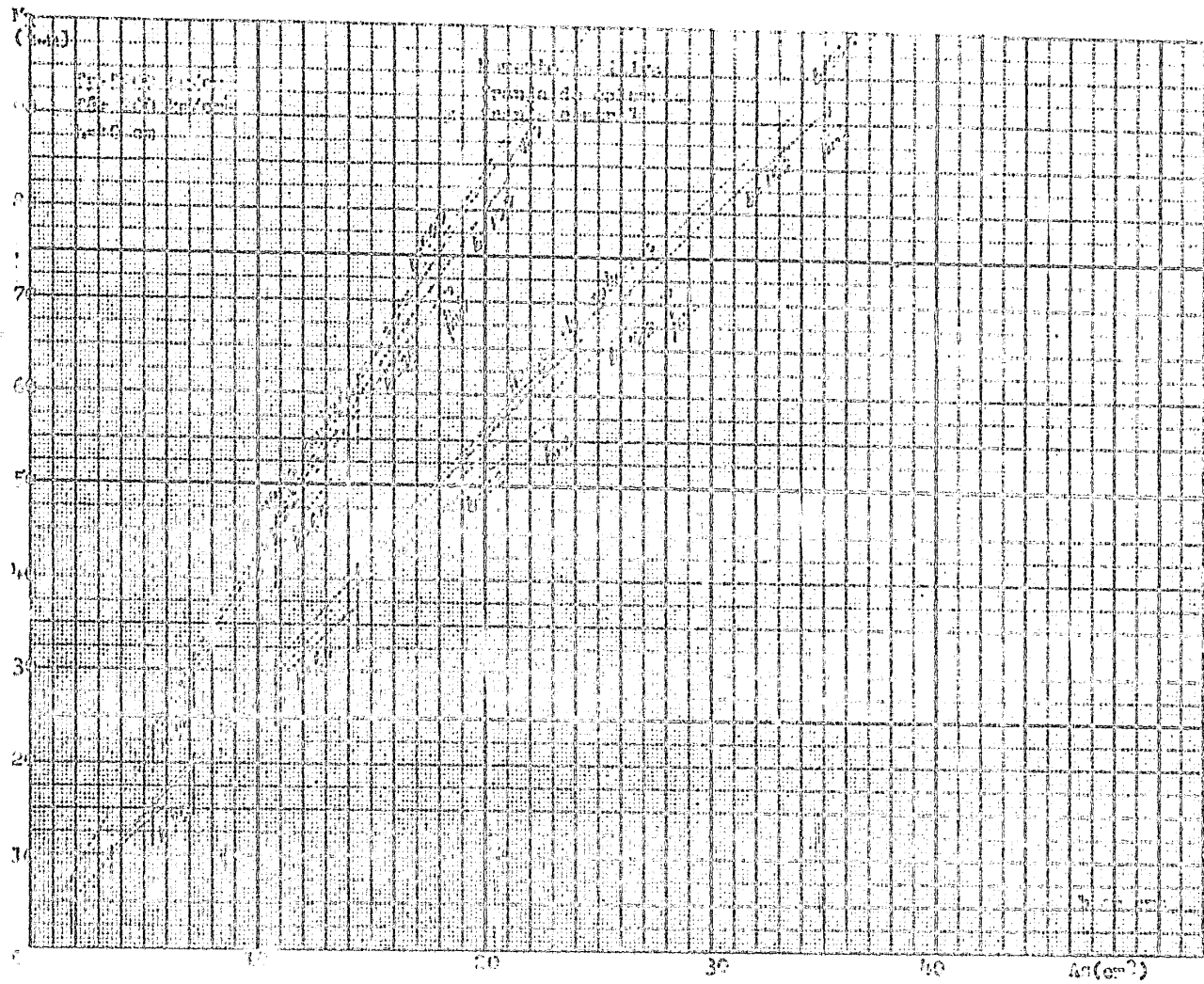


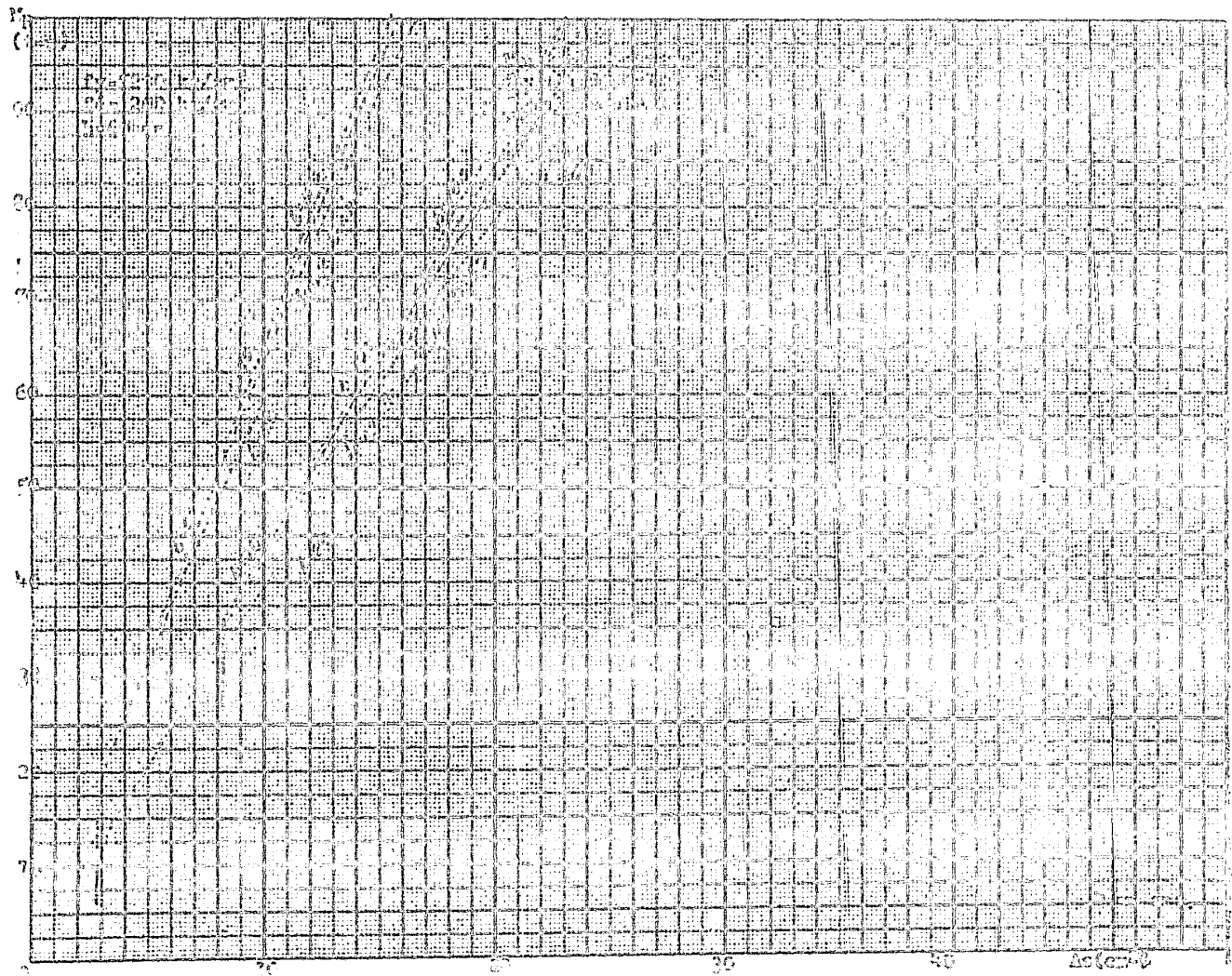












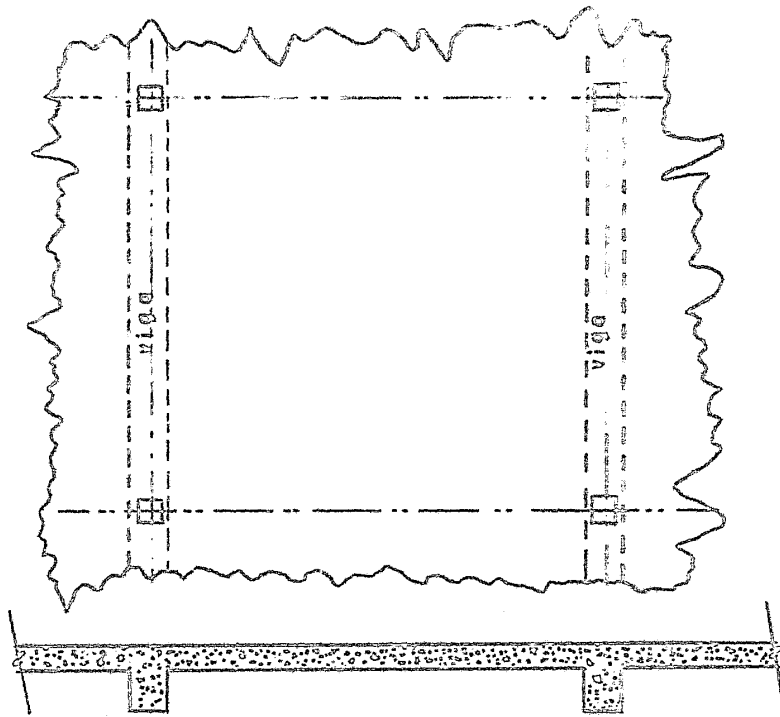


Fig. 1 Lasa con trabajo en una dirección.

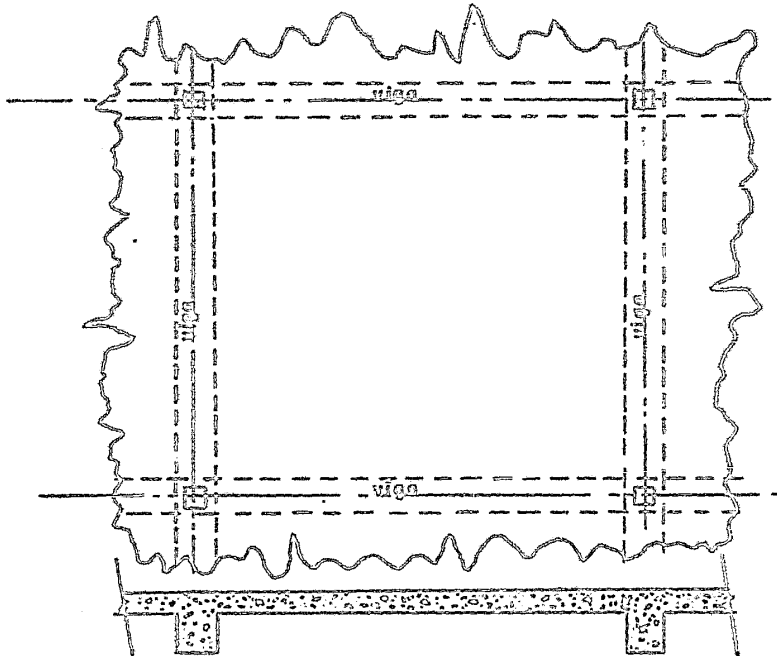


Fig. 2 Lasa con trabajo en las dos direcciones.

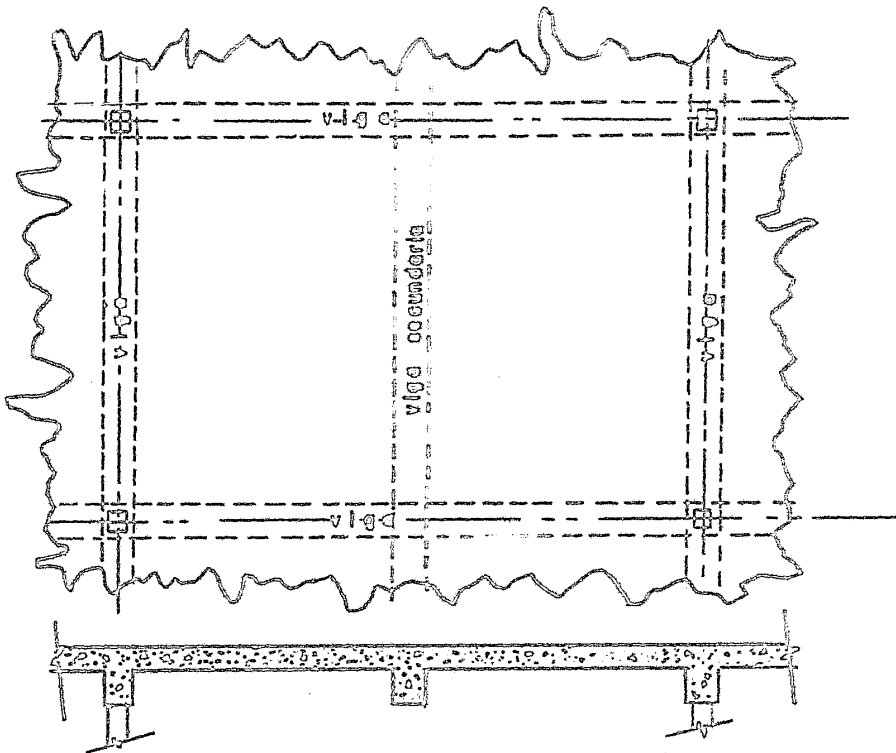


Fig. 3 Losa con trabajo en una dirección

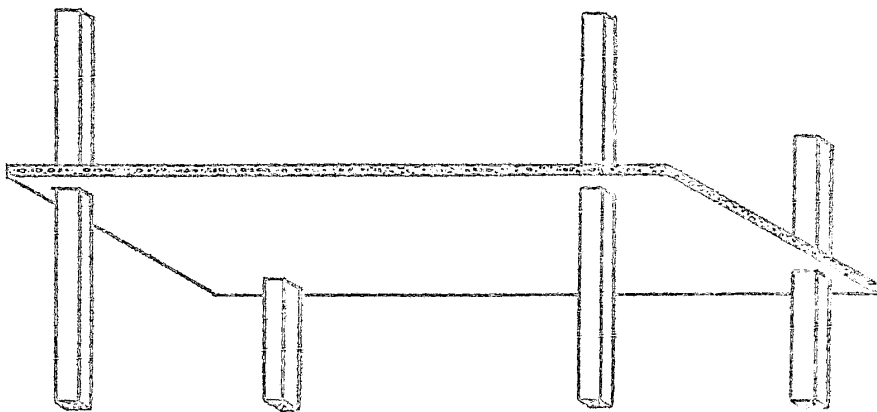


Fig. 4 Losa plana

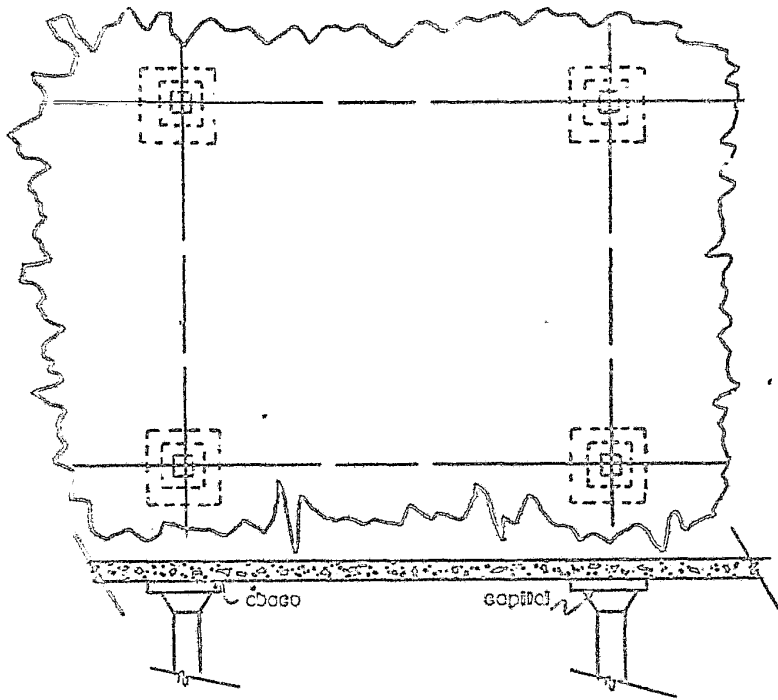


Fig.5 Losa plana con ábaco y capitel

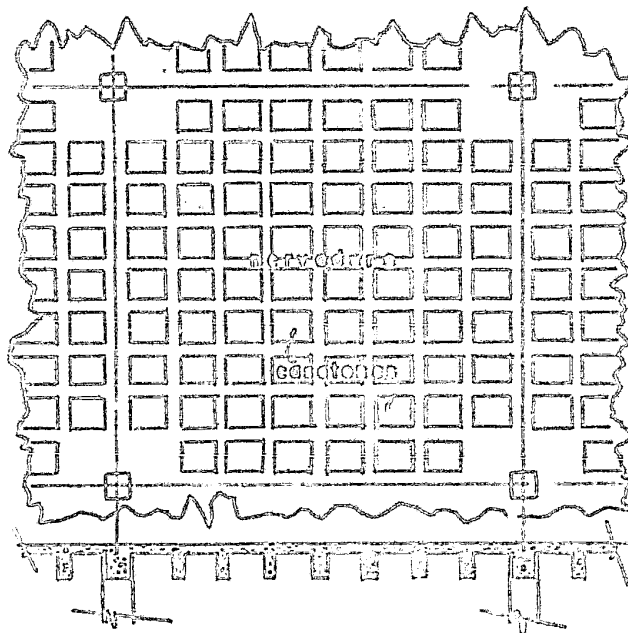
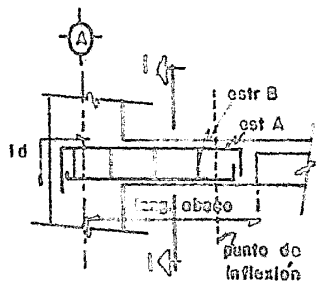
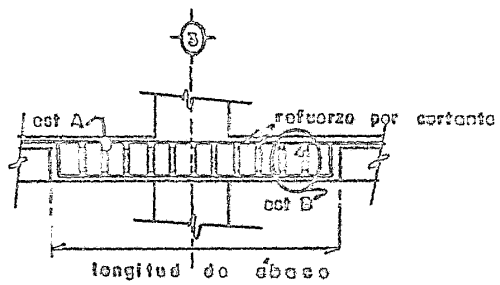


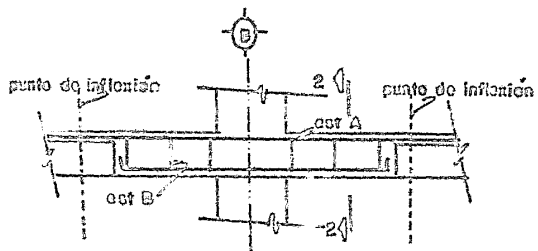
Fig.6 Losa ribeteada



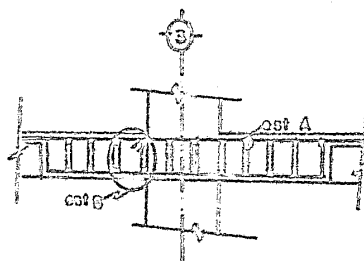
Abaco de columna exterior



Corte 1-1



Abaco de columna interior



Corte 2-2

Fig 7 Refuerzo por esfuerzo cortante



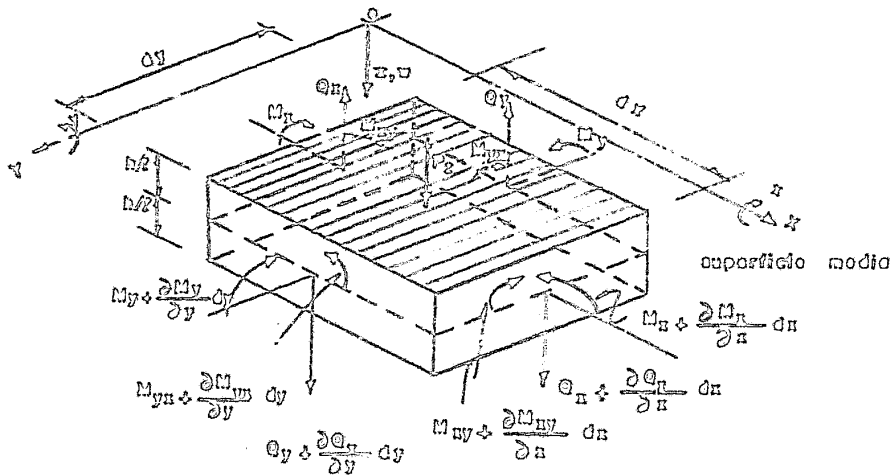


Fig. 8 Representación gráfica de las fuerzas externas e internas sobre el elemento de la superficie media.

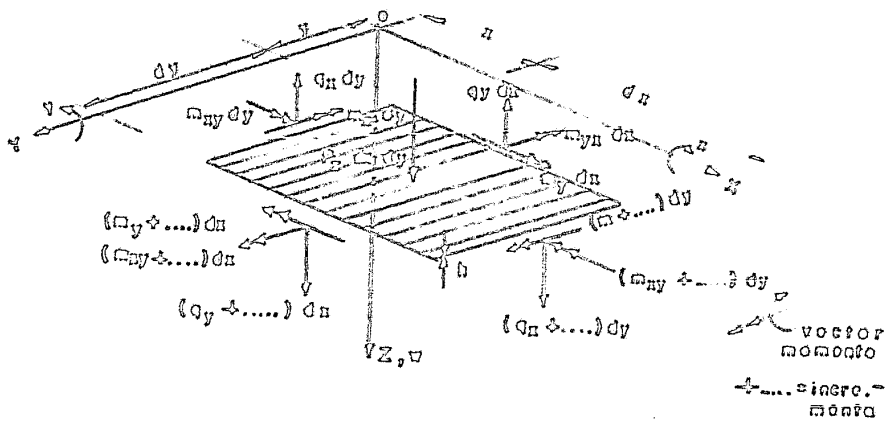


Fig. 9 Equilibrio de un elemento diferencial de placa.

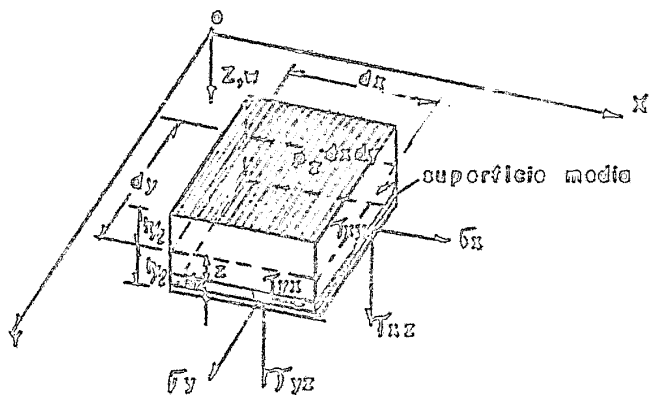


Fig. 10 Esfuerzos que actúan en un elemento diferencial de placa

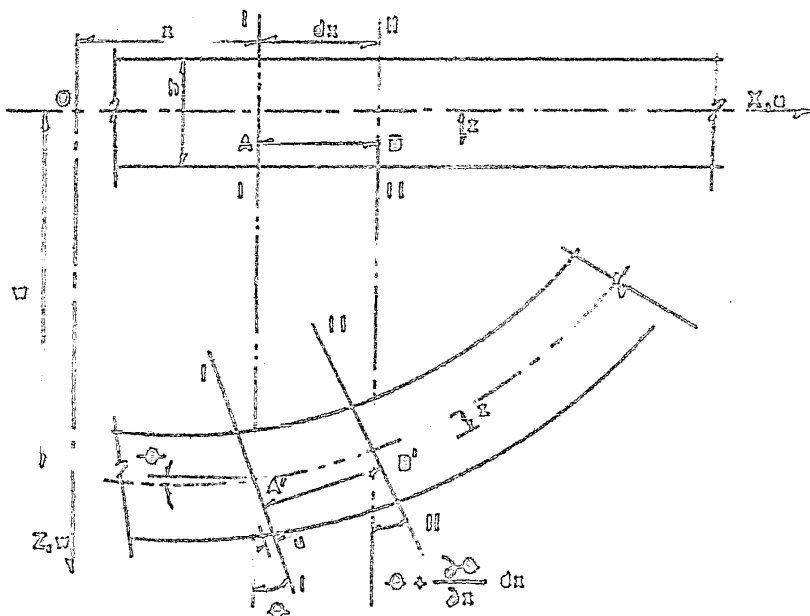


Fig. 11 Sección antes y después de la deformación

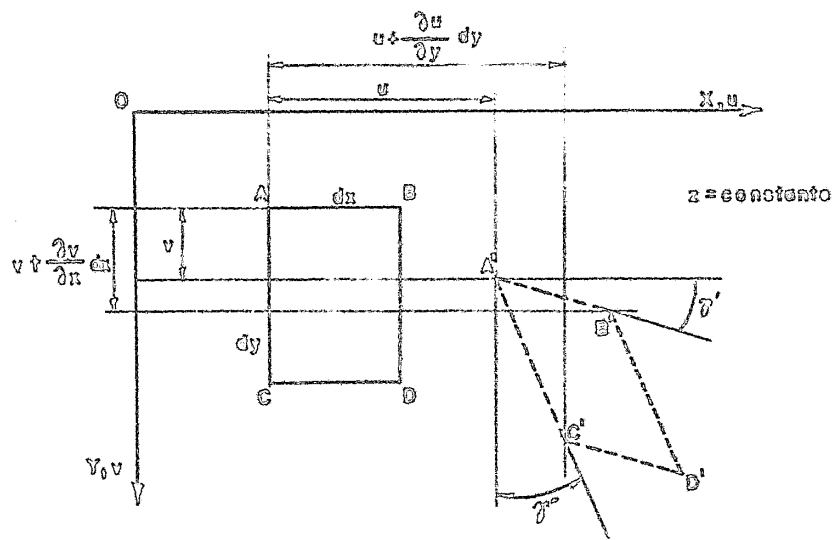


Fig.12 Distorsión angular

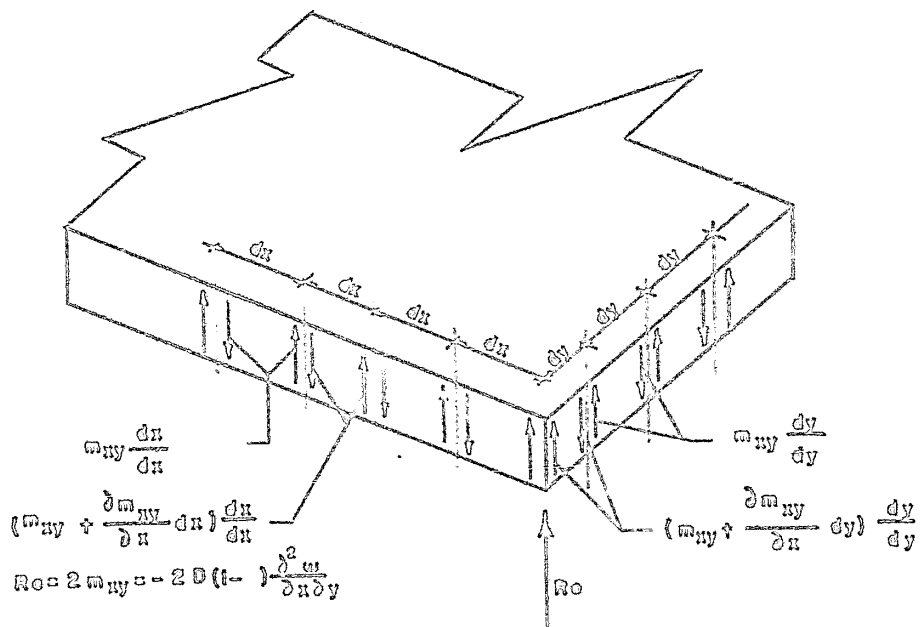


Fig.13 Esquina de placa rectangular, en la cual puede verse la reacción adicional provocada por el momento flectante

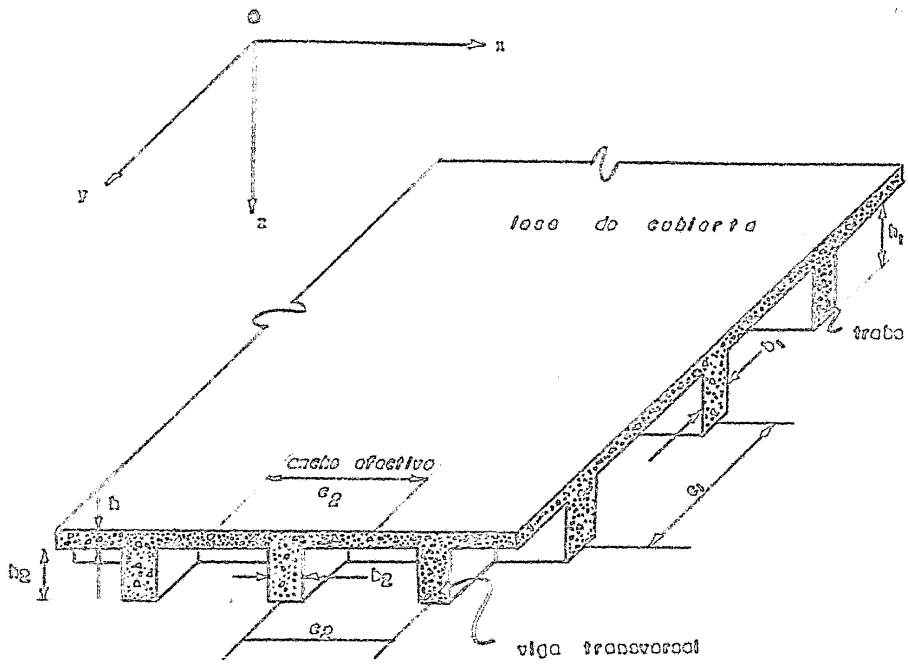
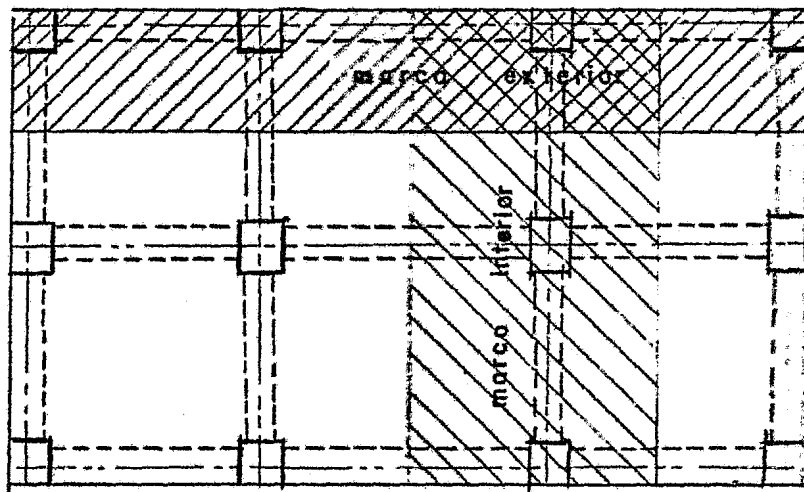


Fig. 14 Laje de concreto reforçado, rigidizada por nervaduras ortogonais



1/2 franja franja de 1/2 franja  
 central columnas central

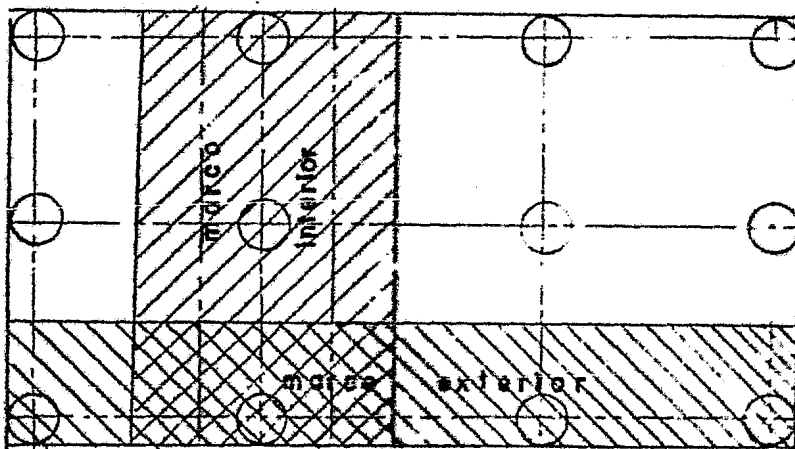


Fig. 15 Marcos equivalentes

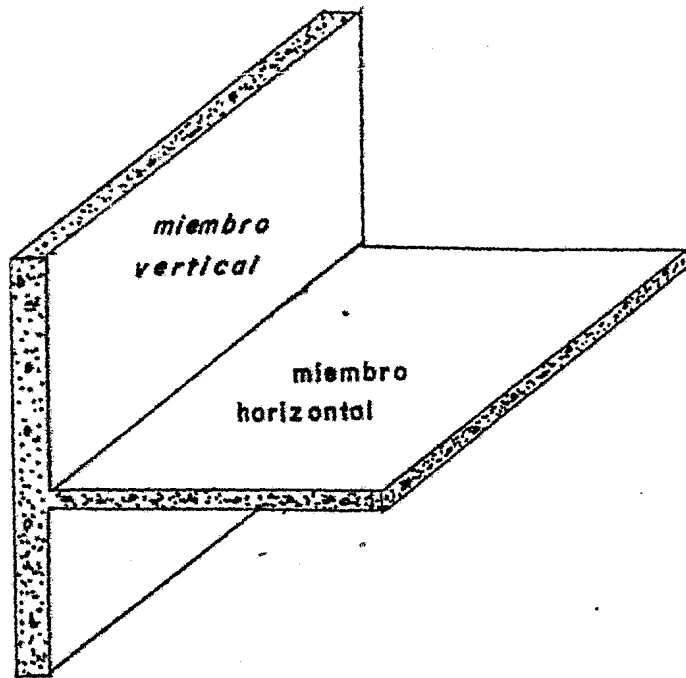


Fig.16 Conexión para transmisión de momento 100% efectiva

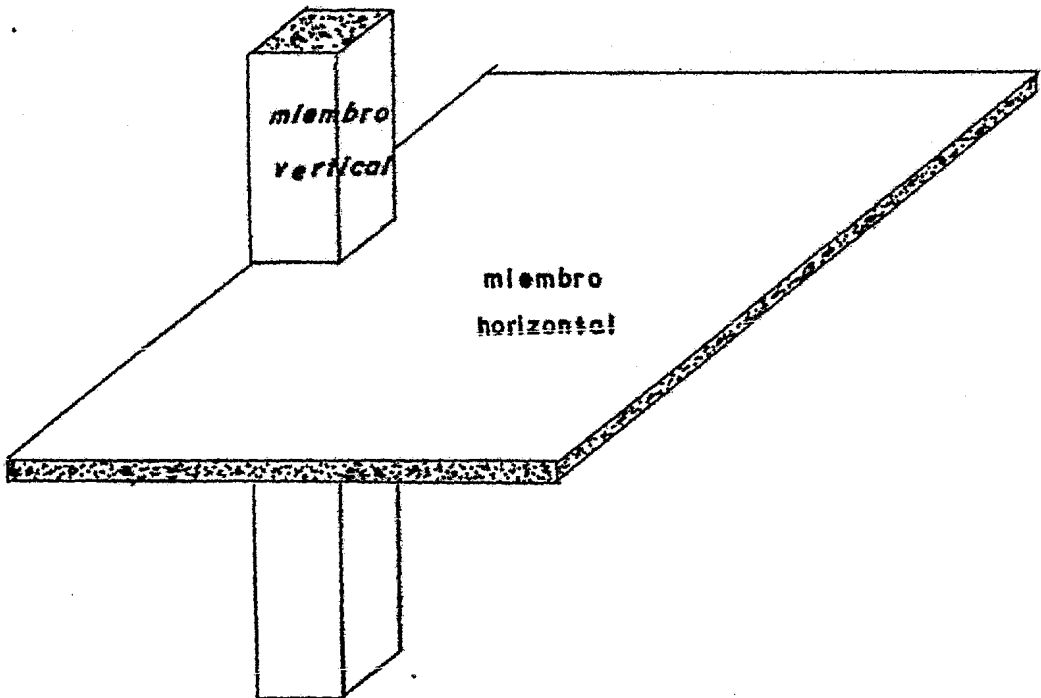
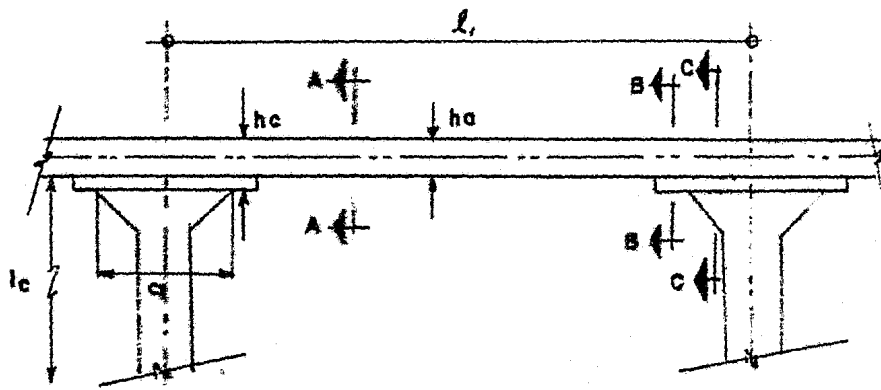
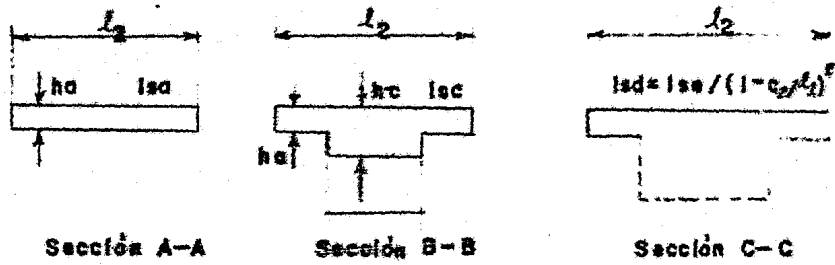


Fig.17 Conexión para transmisión de momento con eficiencia cercana a cero



Sección transversal del sistema de piso



Sección A-A

Sección B-B

Sección C-C

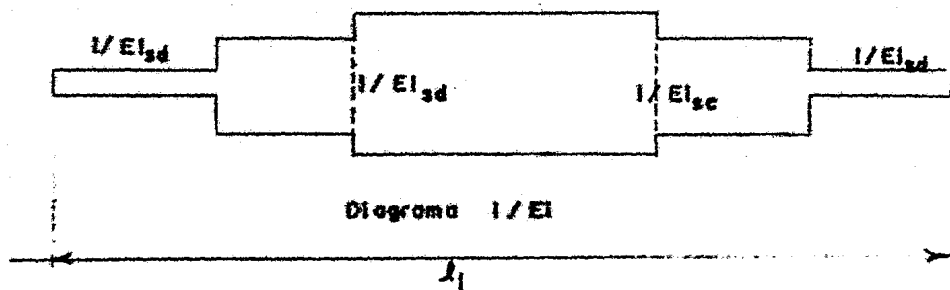


Diagrama 1/EI

Fig. 18 Secciones para calcular la rigidez viga-losa  $K_{2b}$

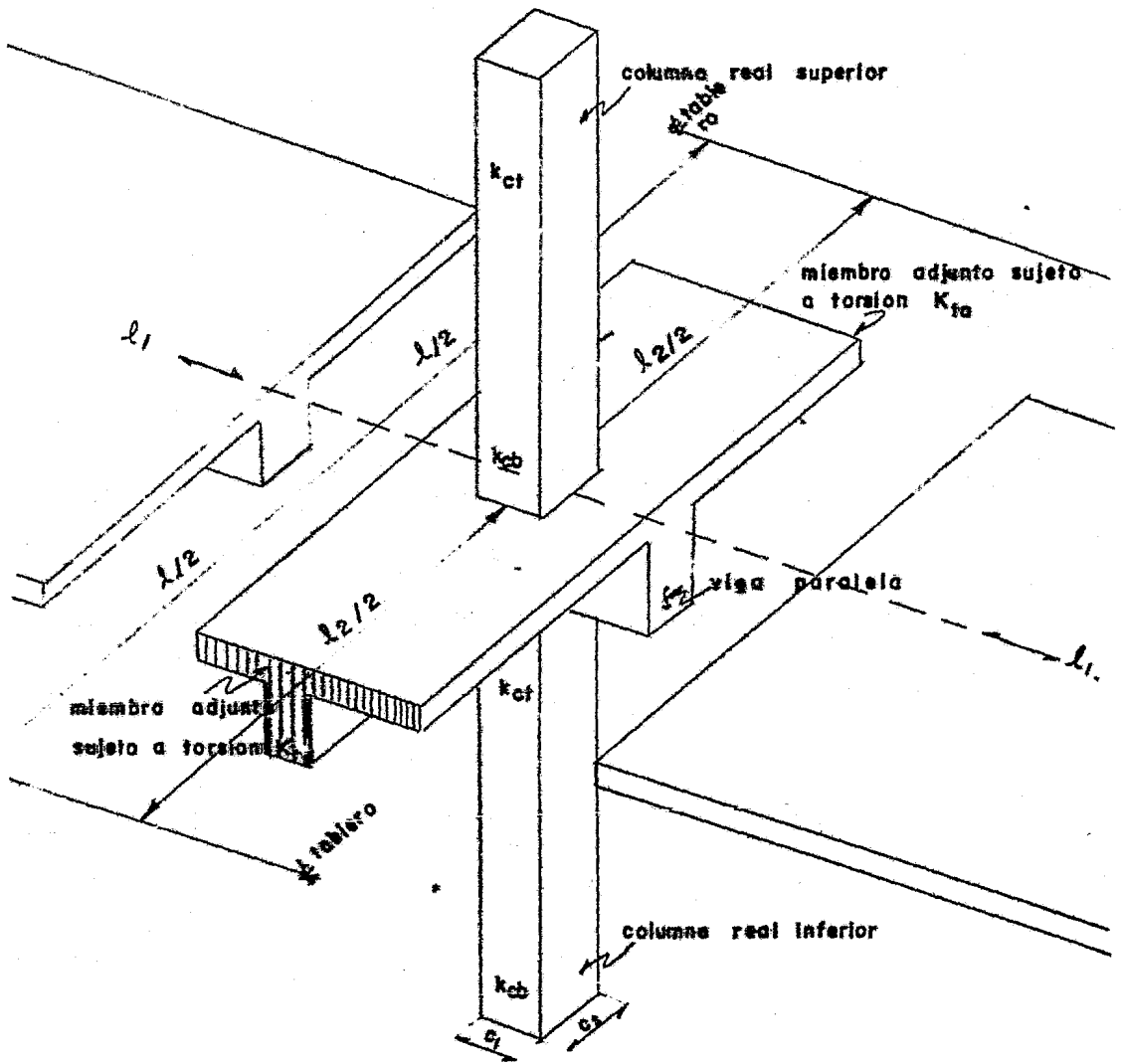
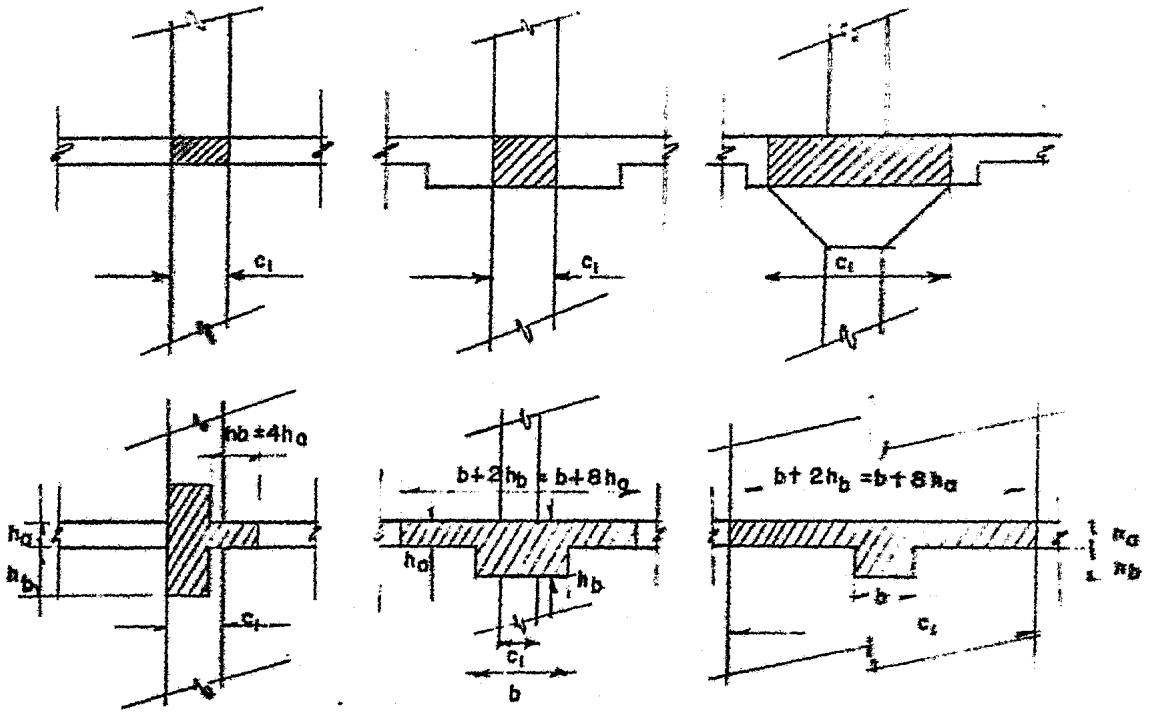


Fig. 19 -Columna equivalente





Definición de la viga transversal que trabaja a torsión

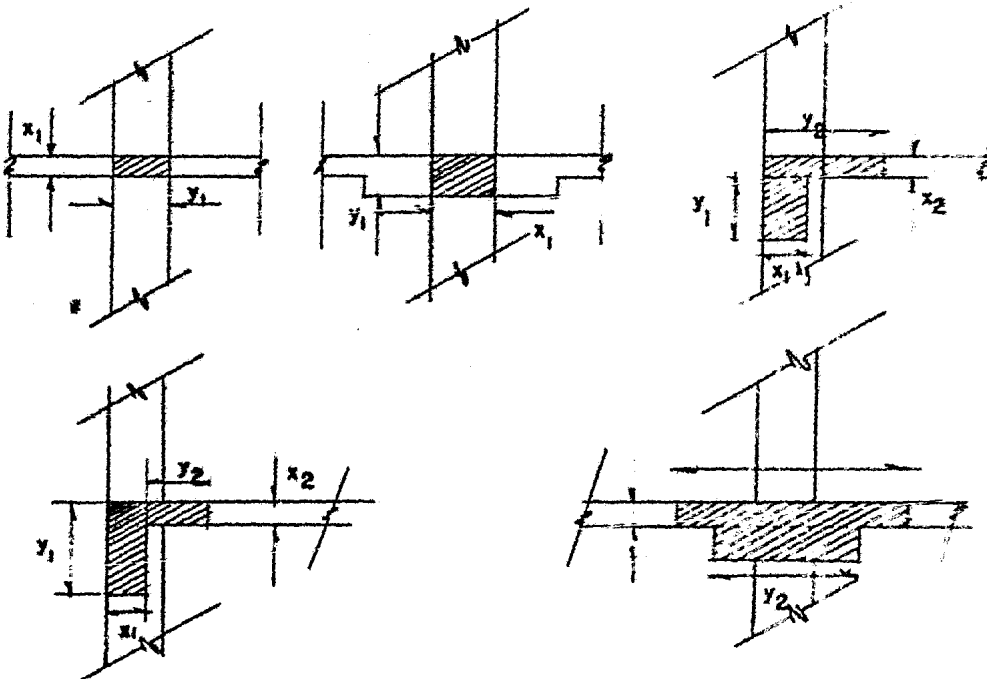


Fig 20 Secciones transversales para determinar el parámetro C

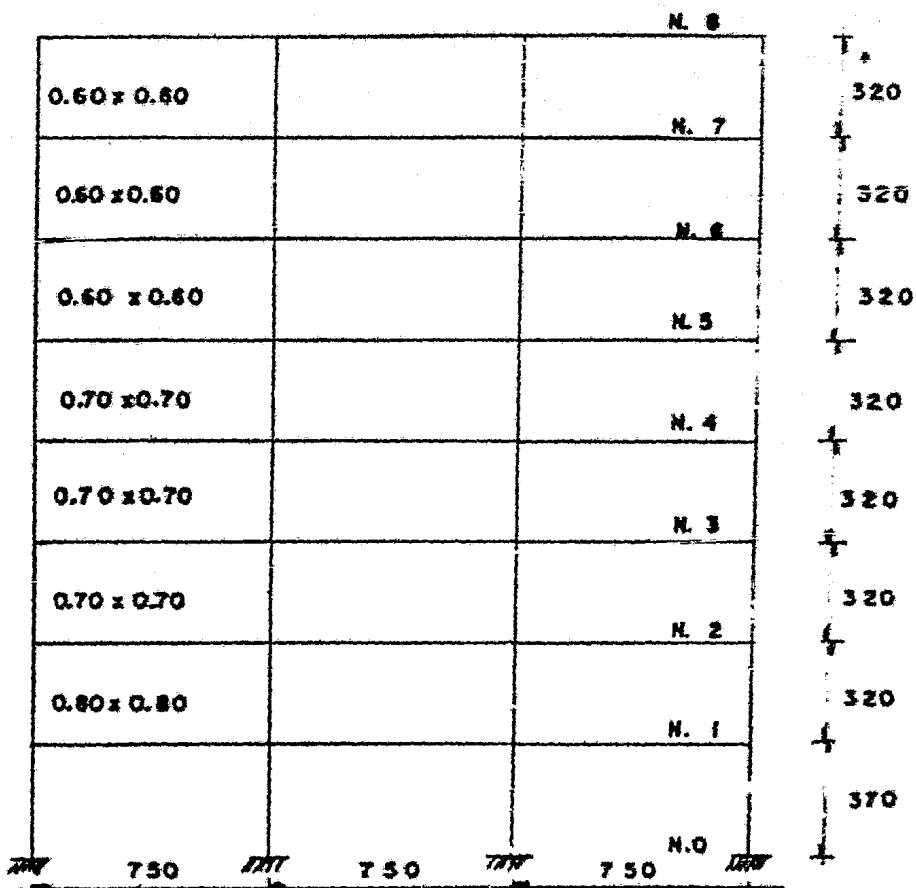
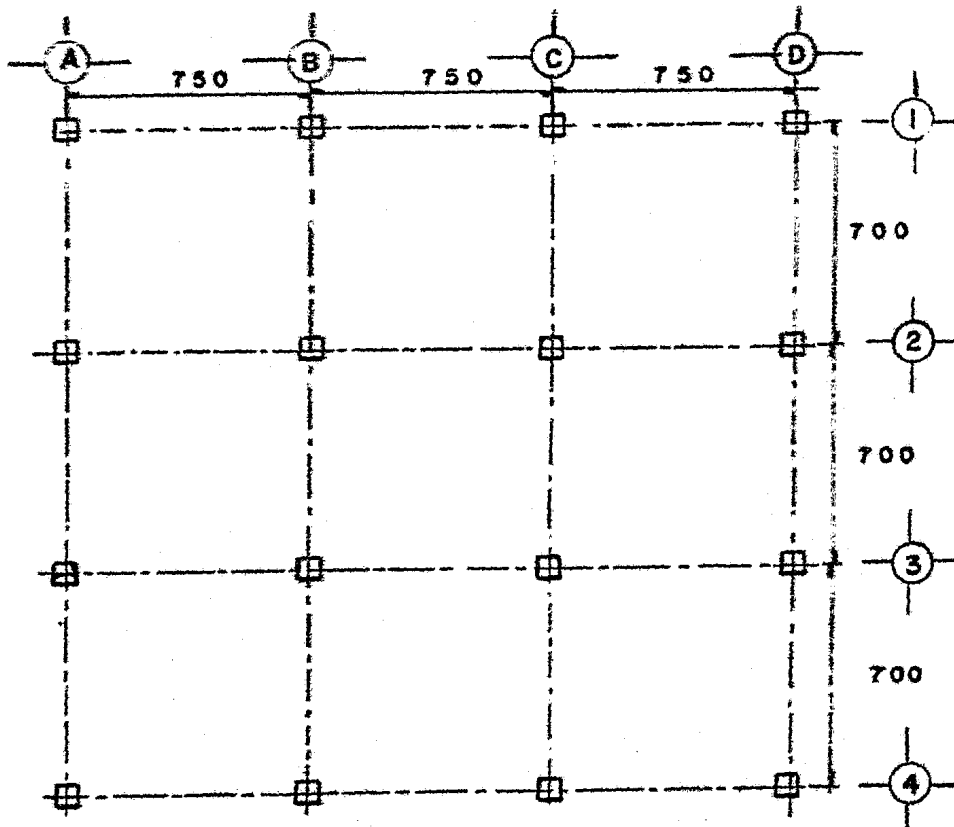


Fig. 21 Planta tipo y alzado eje 3

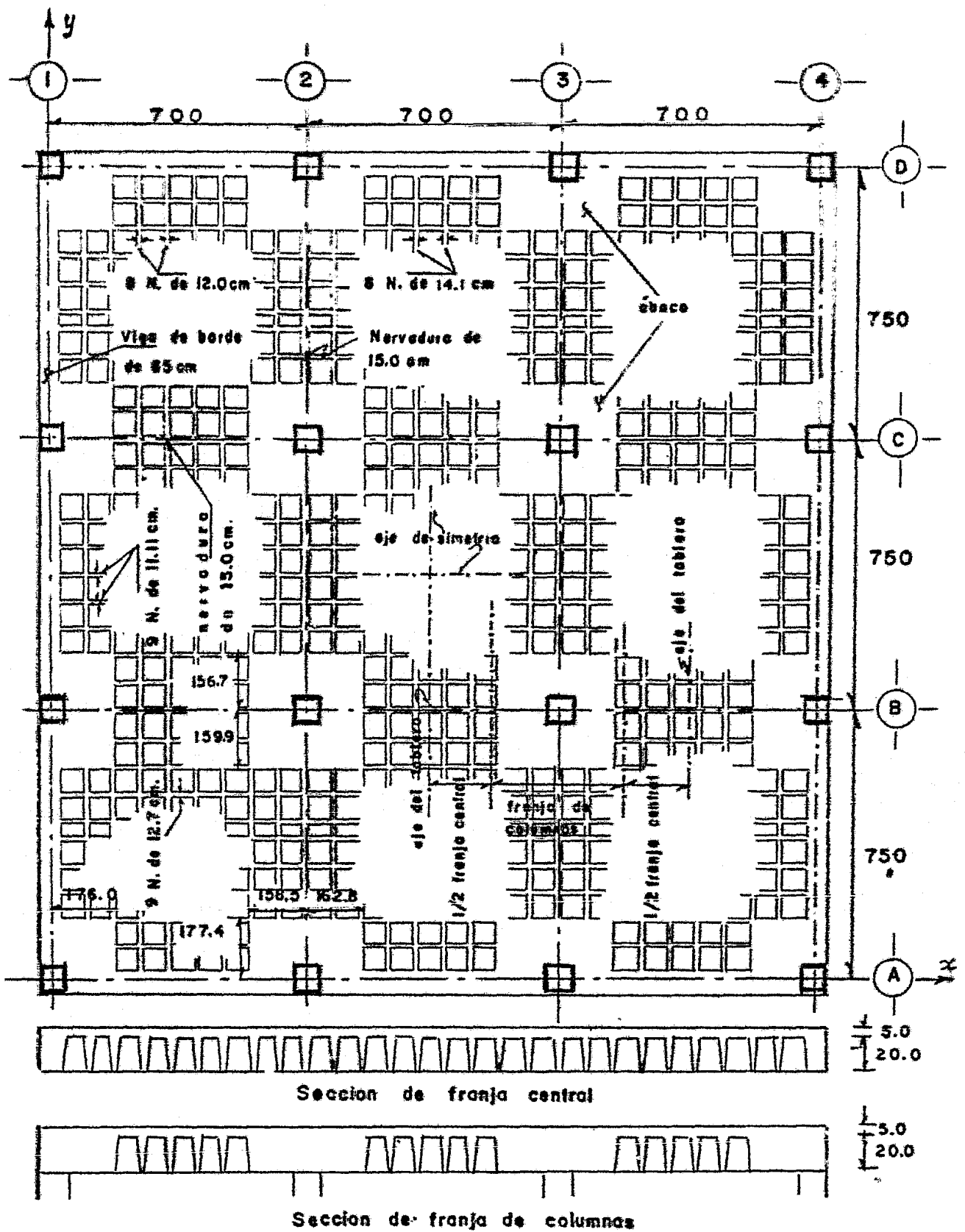
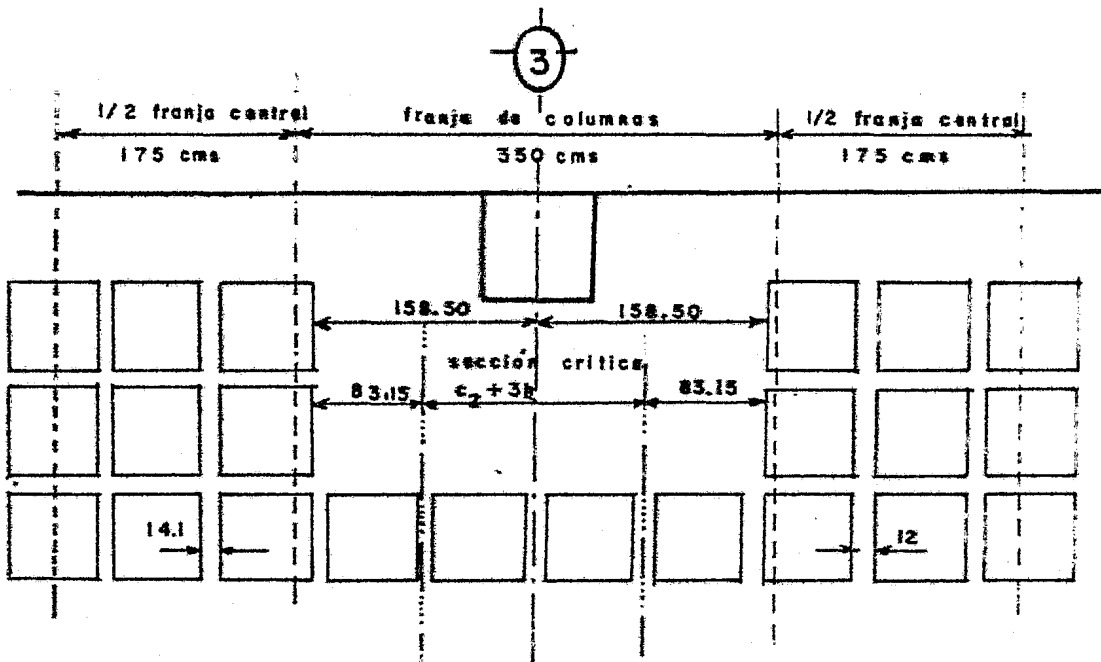
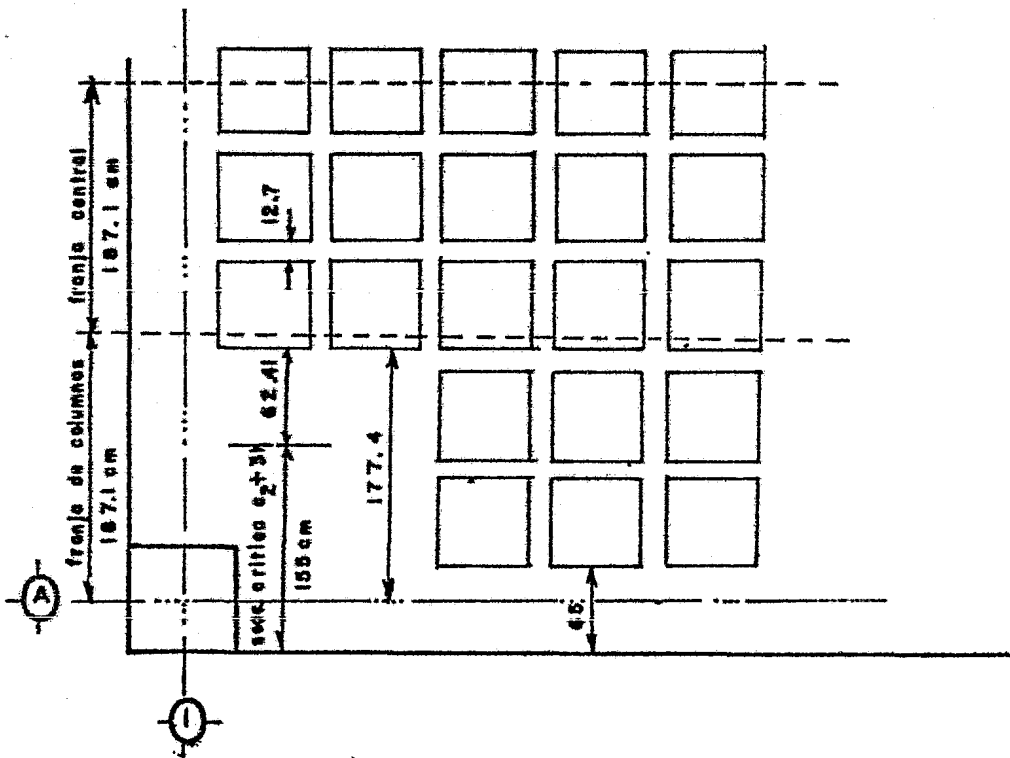


Fig. 22 Distribución de nervaduras

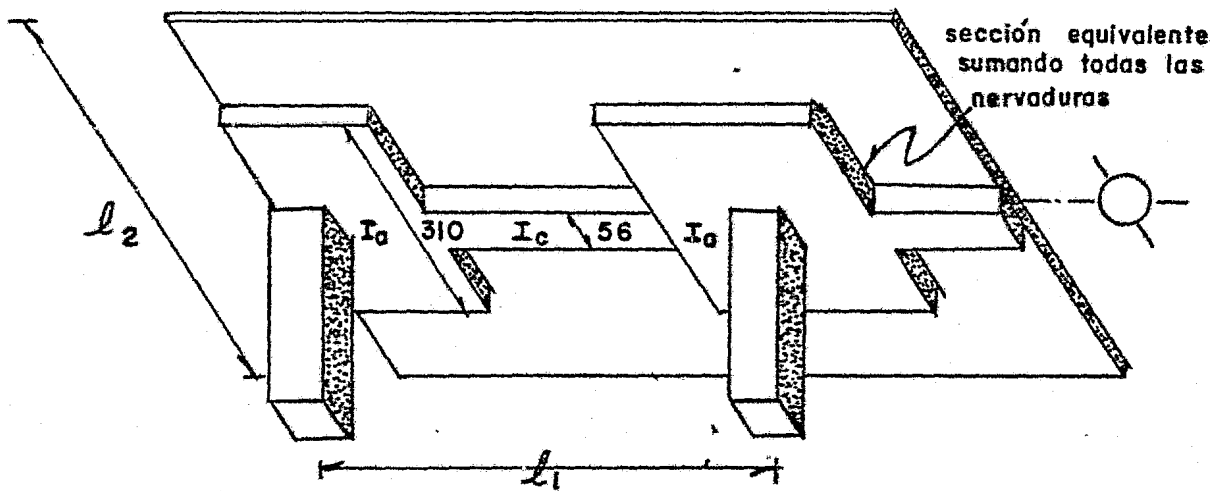


Distribución de nervaduras eje 3

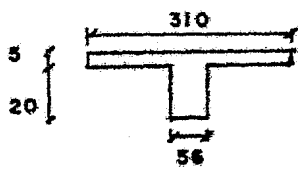


Distribución de nervaduras eje A

Fig 22 Continuación



Idealización de la viga equivalente



$I_c = 142154 \text{ cm}^4$

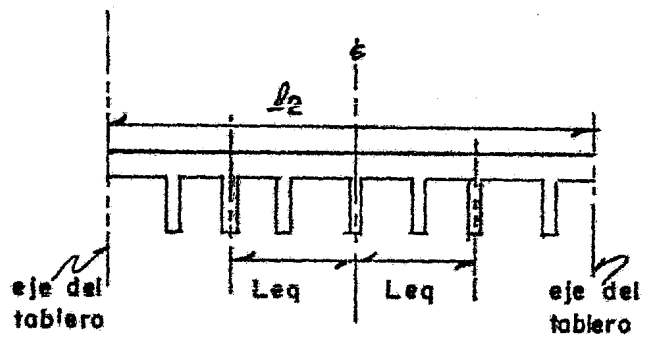
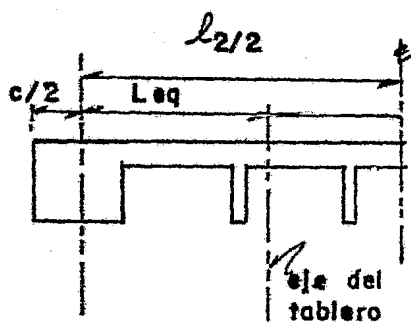


Fig 23 Ancho para calcular momentos de inercia