1aj
144

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

"Aplicaciones de las Técnicas de Insumo Producto y Programación Lineal en los Modelos Interregionales"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

Ingeniero Civil

P R E S E N T A :

Gerardo Javier Montiel Salazar

FEBRERO 1983

I N D I C E

I N D I C E   D E   T A B L A S

7. Tabla (E), capítulo VII, pág. 77.
fuente: "The Structure and Growth of the Italian Economy",- L'Industria, pág. 115-6.

8. Tabla (F), capítulo VII, pág. 81.
fuente: "The Stability of Interregional Trading Patterns -- and Input-Output Analysis", pág. 818.

9. Tabla (G), capítulo VII, pág. 83.
fuente: "The Stability of Interregional Trading Patterns -- and Input-Output Analysis", pág. 821.

10. Tabla (H), capítulo VII, pág. 83.

11. Tabla (I), capítulo VII, pág. 90.
fuente: "The Efficiency of the Coal Industry", Henderson, - cuadro 19.

12. Tabla (J), capítulo VII, pág. 93.
fuente: "A Spatial Equilibrium Model of Livestock-Feed Economy", Fox, pág. 558.

P R O L O G O

Al tener este trabajo como objetivo principal el estudio correspondiente a los modelos interregionales,es para tratar de presentar un criterio unificado de la aplicación de las técnicas del insumo-producto y programación lineal en la fundamentación y conformación de dichos modelos. La relevancia que pueda tener ello, será el objetivo que se tratará de demostrar en el transcurso de este trabajo.

Este interés se basa en las conclusiones acerca de la estructura y funcionamiento de una economía, según un enfoque interregional, y nuestra mayor atención esta dirigida a los cambios estructurales que acompañan al crecimiento economico, problemas en los cuales, el análisis de insumo-producto y programación lineal constituyen una gran ayuda para su solución.

La primera parte de este trabajo presenta una introducción de la teoría interregional, el cual se hace en forma sencilla y cronológica los planteamientos básicos de un modelo interregional, ya sea visto desde un punto de vista de insumo-producto o de programacion lineal.

La segunda parte de este trabajo discute los principales tipos de aplicacion para los cuales parece adecuado el análisis interregional. En esta parte se muestra todo el campo de acción de las técnicas de insumo-producto y programación lineal dentro de la esfera economica así como sus diversos métodos de solución.

La tercera parte consiste en expresar las conclusiones y -- consideraciones finales que han sido obtenidas a partir de la -- elaboración de este trabajo, así como el de mencionar cual ha si do el avance de estas técnicas matemáticas dentro de este campo- y que se espera de ella en un futuro proximo.

Podemos concluir que la ingeniería de sistemas pueda dar -- una gran ayuda en la elaboración y perfeccionamiento en los estu dios que nos ocupan. Esto dará por resultado un mejor aprovechamiento de estas herramientas matemáticas dentro de la esfera eco nómica así como un auxiliar del análista en sus planteamientos - en este campo.

GERARDO JAVIER MONTIEL SALAZAR

I N T R O D U C C I O N

Para hablar acerca de los modelos interregionales, es necesario definir cuales son los objetivos que se persiguen al elaborar este trabajo, y que en base a estos hemos sustentado todo nuestro esfuerzo en el logro y demostración de los mismos, y para esto, será necesario definir en primera instancia que es un modelo interregional y para que nos sirve.

La ubicación de los modelos interregionales dentro del ámbito económico no esta aún bien definido, ya que con frecuencia es aglutinado dentro del campo de los modelos interindustriales, siendo que existen ciertas diferencias entre ambos, ya que los modelos interregionales hacen su análisis enfocado a las relaciones y parámetros estructurales entre regiones, mientras que en el análisis interindustrial se hace en base a industrias. Sin embargo, el análisis interindustrial proporciona en frecuentes ocasiones una guía en la elaboración del planteamiento teórico básico de los modelos interregionales.

El objetivo primordial de este trabajo será el de mostrar todas las aplicaciónes de las técnicas de insumo-producto y programación lineal en los modelos interregionales. A continuación se muestra el siguiente diagrama de flujo, que es una explicación en forma sencilla de para que nos sirve un modelo interregional y en que parte deben serutilizadas dichas técnicas matemáticas en la solución de nuestro problema.

Al final de cada capítulo se encuentra la bibliografía, endonde se especifican diversas lecturas que de una u otra forma - han colaborado en la preparación y elaboración del mismo, así como de ciertas lecturas complementarias donde se puede profundizar en una forma más detallada los conceptos tratados a lo largo del capítulo. También al final de los capítulos 4,5 y 6 podemos encontrar apéndices comolementarios al capítulo, y que son lecturas de diversos autores, con la única finalidad de lograr una mejor comprensión y complementación del capítulo en cuestión. La - diferencia por la cual existen estos apéndices y no se encuentren ubicados en las lecturas bibliográficas complementarias, es porque se ha considerado que dichas lecturas adicionales son de primordial interés para el mejor desarollo del trabajo y que por no encontrarse dentro de nuestros objetivos caería fuera del desarollo propuesto inicialmente para la elaboración del mismo.

Con lo que respecta al trabajo en sí, éste será dividido en tres partes: La primera parte, que comprende del capítulo 1 al 5, se refiere a la introducción y planteamientos básicos de la teoría del análisis interregional; La segunda parte, que comprende a los capítulos 6 y 7, consiste en la aplicación de los conceptos expuestos en la primera parte, ya que es aquí, donde realmente se ligan los elementos teóricos y prácticos del modelo interregional y puede considerarse como la parte medular del trabajo; y La tercera parte, que comprende al capítulo 8, se refiere a las conclusiones y recomendaciones generales que se hacen en base a las dos partes anteriores, así como la justificación y logros con respecto a los objetivos que se propusieron originalmente.

El capítulo 1, que se refiere al análisis interregional, -- nos habla acerca de todas las relaciones que existen entre dos o más regiones, así como, se procura dar un primer enfoque hacía - el porque de la utilización y aplicaciones de los modelos inter- regionales.

El capítulo 2, que se refiere a los sistemas interregionales, nos habla de los lineamientos generales que conforman un modelo- interregional, así como, la explicación de un ejemplo sencillo - de modelo interregional y en el cual se hablan de los elementos- estructurales que lo conforman con sus interrelaciones respecti- vas, aunque sólo se hace de manera didáctica, ya que la o tención de los elementos y parámetros se tratarán en el capítulo 7.

El capítulo 3, comprende a todo lo relacionado con el aná - lisis de insumo-producto y programación lineal enfocado hacía el análisis interregional, y es una introducción sobre como se debe enfocar cada modelo hacía estas técnicas matemáticas con su co - rresoondiente análisis introductorio para cada método.

El capítulo 4 y 5, se refieren a las teorías básicas del insumo-producto y la programación lineal, en ellos se habla de los fundamentos teóricos sobre estas técnicas, así como, de su composición y debida aplicación enfocados dentro del marco de un modelo interregional. La razón por la cual los fundamentos básicos - de estas técnicas aparecen hasta esta parte, y no al principio - del trabajo, se debe principalmente a que los estudios realizados sobre insumo-producto y programación lineal son tantos y tan extensos, que caería fuera de nuestros objetivos trazados originalmente tratar cada uno de los aspectos básicos sobre estas técnicas, razón por la cual, es más preferible dar en primer término los conceptos introductorios del modelo interregional, y dados éstos, se formula una teoría básica de estas técnicas con un enfoque hacía el análisis interregional. Podemos complementar el estudio correspondiente a estos capítulos por medio de apéndices y lecturas complementarias en la parte bibliográfica.

El capítulo 6, que se refiere a la aplicación de las técnicas de insumo-producto y programación lineal en la elección del programa de desarollo más adecuado para cada región en particular, y nos habla de los pasos necesarios que debemos seguir para lograr determinar cuál es el programa de desarollo o inversiones necesarias que debemos usar para obtener el mejor aprovechamiento de nuestros recursos, utilizando criterios de elección en base a estas técnicas matemáticas.

El capitulo 7 nos habla de los distintos modelos interregionales, y que se refiere a la explicación detallada y formal de cada modelo en cuestión.

El capítulo 8 y último de este trabajo, nos habla de las conclusiones y recomendaciones generales que se han hecho durante el desarollo de este trabajo y si se lograron los objetivos trazados desde un principio.

Durante el presente trabajo se busca dar énfasis sobre la creciente utilización de éstas técnicas dentro de este campo y la necesaria participación que debe tener el Ingeniero y el Economista en la solución y planteamiento de este tipo de problemas.

A N A L I S I S   I N T E R R E G I O N A L

I A N A L A S I S   I N T E R R E G I O N A L

I.1 Introducción.

Necesariamente antes de hablar de las técnicas de insumo- -producto y programación lineal, habrá que hacer un análisis para la comoaración en los planteamientos de cada método en cuestión.

La finalidad esencial en un MODELO INTERREGIONAL DE INSUMO-PRODUCTO ES EL ANALISIS RECIPROCO ENTRE EL COMERCIO Y LA PRODUCCION EN DOS O MAS REGIONES. Análogamente, la finalidad esencial- EN UN MODELO INTERREGIONAL DE PROGRAMACION LINEAL ES EL DE DETERMINAR LA DISTRIBUCION OPTIMA DE LOS RECURSOS ENTRE LAS REGIONES- POR ESTUDIARSE.

Una característica en común para ambos modelos sería el que las exportaciones (salidas) en una región, tendrán que transformarse necesariamente en importaciones (entradas) en otra región. Esto es aplicable a dos o más regiones, y a medida que aumente - el número de regiones en estudio, será más complicado su planteamiento y consecuentemente su análisis.

I.2 Modelos Interregionales Existentes.

A continuación se muestran cinco de los más importantes modelos interregionales, así como el año en que se elaboraron con- sus respectivos autores. También se muestra para cada modelo el- número de mercancías, regiones y ecuaciones que fueron necesa -- rias para el planteamiento básico de cada uno de ellos.

Estos conceptos, así como un ejemplo particular para cada - modelo, se verá más adelante en el capítulo 7.

MODELO	FECHA	AUTOR	MERCANCIAS	REGIONES	ECUACIONES
1.Modelo del comercio mundial.	1953	Neisser Modigliani	3	6	36
2.Modelo de la economía ganadera en los U.S.A.	1953	Fox	1	10	20
3.Modelo de insumo-producto de Italia	1953	Chenery-Clark	22	2	46
4.Modelo de insumo-producto de U.S.A.	1955	Moses	10	3	33
5.Modelo de programación lineal para la industria del carbón en los U.S.A.	1958	Henderson	2	14	36

Una característica en común para los cinco modelos es el -- que las exportaciones de una región se convierten necesariamente en las importaciones de otra. Entendiendose esto de una mejor --- forma: Los niveles de las exportaciones en cada región estará --- siempre en función de la demanda de importaciones en otras regiones, donde puede ser conocida la relación entre las exportaciones e importaciones. Esta relación de la forma en que se dividirá la demanda entre las fuentes alternativas de abastecimiento - se ha establecido en base a diferentes estudios, de los cuales - destacan principalmente los cinco modelos mencionados anterior - mente.

Para referirnos en una forma más concreta sobre este aspecto, hablaremos sobre el estudio hecho por Neisser Modigliani y - su modelo del comercio mundial, en el cual, él presupone que las importaciones constituyen una función del ingreso y que las ex - portaciones se consideran para cada una de las seis regiones como una función de la demanda total de importaciones de una deter minada clase de mercancía, estas funciones son definidas general mente en forma empírica, ya que su análisis análitico es muy com plejo debido a la gran variedad de factores que influyen en la - formación de sus parámetros.

De los otros cuatro modelos que se han mencionado, se utili zan expresamente las relaciones interindustriales, sobre este te ma se hablará más ampliamente en el capítulo 4.

Pese a que estamos englobando estos cuatro modelos en uno - solo, existen ciertas diferencias entre ellos, por ejemplo, los- dos modelos de insumo-producto (el de los Estados Unidos y el - de Italia) difieren en el número de los detalles que en forma re gional hace cada modelo, así como, en el número de mercancías, - aunque tienen en común que cada uno de ellos explica las exporta ciones de una región como una parte constante de la demanda to - tal de una mercancía dada en cada una de las demás regiones. De- éste análisis se determinan los niveles deproducción y los nive- les del comercio.

Haciendo en forma análoga para los modelos de programación lineal elaborados por Henderson y Fox para la industria del carbón de piedra y la economía ganadera respectivamente, difieren también en ciertos aspectos, ya que en el modelo de Henderson se determinan los niveles de producción en forma similar al de los modelos de insumo-producto, pero considerando que los niveles del consumo total son conocidos en cada región. Mientras que para el modelo de programación lineal de Fox, la demanda en cada región es una función del precio, siendo conocida la producción de ésta.

Una característica en común para estos dos modelos de programación lineal, es la de determinar el tipo óptimo de oferta partiendo del supuesto del costo agregado mínimo.[1]

I.3 Transmisión Interregional del Crecimiento Económico.

El proceso y desarollo económico en un país no aparece en forma uniforme sobre cada una de las regiones debido a la existencia de factores de tipo geográfico, político y social. Por esta razón es que existen en un mismo país ciertas regiones más desarolladas que otras.

Para hablar acerca de estos conceptos hay que empezar a estudiarlo desde su orígen, es decir, desde que se vislumbra en una región ciertos puntos de crecimiento económico y de desarollo, entendiendose como punto de crecimiento, al primer paso de desarollo en la larga cadena hacia lacreación de una atmósfera industrial, que sería el completo desarollo en una región.

Necesariamente para que una economía eleve sus niveles de -ingreso, debe desarollar uno o varios centros regionales de fuerza económica. Esta necesidad del surgimiento de "puntos de crecimiento" o "polos de crecimiento" durante el proceso de desarollo significa que una desigualdad interregional de crecimiento es -- una condición indispensable para el crecimiento mismo. Es decir, mientras todas las regiones mentengan mínimo o nulo su nivel de-desarollo no podrán tener un nivel de apoyo a todas sus exportaciones e importaciones, pero el haber regiones más desarolladas-que otras provocará que éstas empiezen a demandar y a necesitar-más elementos para su continuo desarollo y de esta forma obligar a las regiones de su alrededor a motivar su propio crecimiento.

Al analizar el proceso de crecimiento desequilibrado[2], siempre se podrá demostrar que un adelanto en un punto determinado,-provoca presiones y coacción hacia el crecimiento en puntos subsecuentes. Pero si todos estos puntos caen dentro del mismo espacio privilegiado del crecimiento (factores geográficos,políticos y sociales), serán especialmente débiles las fuerzas que -- producen la transmisión del crecimiento de una región, un país o un grupo de personas a otro.

Para entender mejor lo anteriormente señalado, a continuación se muestra como ejemplo al modelo interregional más sencillo, es decir, entre dos regiones. Así pues, al examinar estas -interacciones directas, llamaremos "Norte" a la región que ha experimentado el crecimiento y "Sur" a la región que se ha quedado atrás.

El crecimiento del Norte tendrá varias repercusiones económicas directas sobre el Sur, unas favorables y otras adversas. -Los efectos favorables consisten en la difusión del progreso del

Norte hacia el Sur, el incremento de las compras y las inversiones del Norte en el Sur, incremento que se producirá sin lugar a duda si las dos regiones son de alguna manera complementarias. - Además, el Norte puede absorber parte de la desocupación del Sur y así aumentar la productividad marginal de la fuerza de trabajo y los niveles de consumo per capita en el Sur.

Por otra parte, también pueden estar operando varios efectos desfavorables o de polarización, ya que las actividades manufactureras y de exportación del Sur, comparativamente ineficientes, pero creadoras de ingresos, puedan deprimirse como resultado de la competencia del Norte. Según el Norte tenga industrias que no existan en el Sur, será el grado de penetración comercial y, de dependencia del Sur con respecto al Norte.

En conclusión, se podría decir que el Norte en primera instancia pudiera parecer siempre el más favorecido, pero con el tiempo, la influencia del Norte haría crear la infraestructura adecuada en el Sur para lograr su propio desarollo, siendo un factor importante para esto, las adecuadas políticas económicas que tome el Sur en ciertos momentos.

Mencionado esto, se puede hacer notar, ya sea para dos regiones como en este caso, o para más de dos regiones, como se verá en el capítulo 7, el análisis interregional nos proporciona un importante instrumento en la elaboración y fundamentación de los modelos interregionales.

N O T A S

(1) El supuesto del costo agregado mínimo se refiere al incremento mínimo que puede sufrir una mercancía una vez que ha salido de la industria hasta el lugar de su venta.

B I B L I O G R A F I A

1. La Economía Política del Crecimiento, Baran Paul A.; México, F.C.E., 1973

2. Geografía, Subdesarollo y Regionalización, Bassols Batalla, Angel; México, Ed. Nuestro tiempo, 1975

3. La División Económica Regional de México, Textos Universi - tarios; U.N.A.M., 1970

4. Interregional and Regional Input-Output Analysis, Review of Economics and Statics, XXXIII, 1951

5. Inter-Regional and International Input-Output Analysis, Che nery,Hollis, 1956.

S I S T E M A S   I N T E R R E G I O N A L E S

II S I S T E M A S I N T E R R E G I O N A L E S

II.1 Introducción.

Para hablar acerca de lo que significa un sistema interre - gional, debemos partir de dos enfoques: a) Un sistema interregional basado en el resultado de la subdivisión de la economía na - cional en regiones; y b) Un sistema interregional basado en la - combinación de varios modelos económicos hechos a nivel nacional, y una vez logrado esto, es subdividido por regiones.

En base a lo anterior, se podría definir a un SISTEMA INTERREGIONAL COMO EL CONJUNTO DE SECTORES ECONOMICOS DE CADA REGION, SIENDO CADA REGION, CLASIFICADA y PUESTA EN EL LUGAR CORRESPON - DIENTE DENTRO DEL SISTEMA.

Para hacer una división regional de sectores con el fín de lograr su adecuada clasificación dentro del sistema, existen --- ciertas reglas ya prestablecidas que nos ayudan a su conforma -- ción. Mencionando los dos aspèctos fundamentales de estas reglas: a) La producción o el consumo de la misma mercancía en distin - tas zonas debe tratarse en sectores separados cuando dicha subdivisión produce un efecto significativo sobre la solución total;- b) Se debe tener particular interés en los totales regionales - de ingresos, ocupación y producción. Para estos casos, se debe - seleccionar una definición geográfica de regiones, siendo la misma para todos los sectores.

II.2 Modelo Interregional.

Por simplificación, consideraremos un modelo de dos regio -

nes, siendo éste, un análisis válido para más de dos regiones sin que surga modificación alguna en su planteamiento. A continuación se muestra la siguiente tabla, donde tenemos para cada sector un conjunto de relaciones contables.

T A B L A (2.A)

A / De	Región de Consumo a	Región de Consumo b	Producción de la Región
Región Productora			
a	X_i^{aa}	X_i^{ab}	X_i^{a}
b	X_i^{ba}	X_i^{bb}	X_i^{b}
Oferta en la Región	Z_i^{a}	Z_i^{b}	

Cuentas Interregionales para el Sector "i"

En la tabla anterior, los renglones nos muestran la distribución de la producción por zonas de consumo, mientras que las columnas nos muestran la distribución de abastecimientos en cada renglón. El elemento X_i^{ab}, indica la cantidad de mercancías que se produce en la región "a", para su correspondiente consumo en la región "b", es decir, el primer índice superior nos señala la región de orígen o partida de la mercancía, mientras que el segundo índice nos señala la región de destino o llegada de la mercancía, para su posterior consumo.

Haciendo un desarollo matemático con el fín de volver a definir las variables del modelo para una sola región:

Producción en "a"

$$X_i^a = X_i^{aa} + X_i^{ab} \quad \text{-------} \; (2.1)$$

Oferta en "a"

$$Z_i^a = X_i^{aa} + X_i^{ba} \quad \text{-------} \; (2.2)$$

Importaciones en "a"

$$M_i^a = X_i^{ba} = Z_i^a - X_i^{aa} \quad \text{-----} \; (2.3)$$

Exportaciones en "a"

$$E_i^a = X_i^{ab} = X_i^a - X_i^{aa} \quad \text{-----} \; (2.4)$$

Para poder completar el desarollo antes mencionado, es necesario hacer uso de ciertos supuestos del modelo fundamental para el análisis interindustrial, y que se refiere a las ecuaciones de equilibrio.

Haciendo una ecuación para la demanda (X_{ij}^a) de la región "a", y poniendola como una función de su propio nivel de producción (X_j^a)."Suponiendo que la función es lineal en el curso de una serie dada de producciones", tenemos una ecuación en forma de recta:

$$y = mx + b$$

donde sustituyendo nuestras variables nos queda:

$$X_{ij}^{a} = r_{ij} X_{j}^{a} + C$$

Al parámetro r_{ij} recibe el nombre de coeficiente marginal de insumo, éste parámetro será visto más ampliamente en el capítulo 4. La constante "C", incluye a cualesquiera elementos de costo fijo que no varíen con el nivel de producción, éste término por lo general se hace cero, y por tanto, la función nos queda:

$$X_{ij}^{a} = r_{ij} X_{j}^{a}$$

Expresando que para cada mercancía la oferta total es igual a la demanda total, la que a su vez está compuesta de la demanda intermedia (es el consumo de determinada mercancía, con el fin de transformarlo, y posteriormente redistribuirlo) más la demanda final (es el último paso de la mercancía, donde después de consumirse, es desechado o no puede utilizarse nuevamente), esto nos conduce a formular una ecuación de equilibrio similar a la enunciada para el modelo fundamental del insumo-producto, de tal suerte, que podemos hacer uso de ésta en forma análoga para el desarollo de nuestra ecuación, ya que si tenemos que dicha ecuación de equilibrio para el modelo de insumo-producto es:

$$\overset{\text{OFERTA}}{Z_i = M_i + X_i} = \overset{\text{DEMANDA}}{\sum_j X_{ij} + Y_i} = W_i + Y_i \quad (i=1,\ldots,n)$$

Donde:

Z_i = Oferta total de la mercancía "i"

X_i = Producción total de la mercancía "i"

M_i = Importaciones de la mercancía "i"
X_{ij} = Cantidad de la mercancía "i" consumida en el sector "j"
Y_i = Consumo final de la mercancía "i"
W_i = Consumo intermedio total de la mercancía "i" ($\sum_j X_{ij}$)

Está formula se desarollará de manera más formal en el capítulo 4, pues sólo es utilizada en este momento como base analógica para nuestro desarollo del modelo interregional.

Si transformamos a las ecuaciones 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 en una ecuación similar a la ecuación de equilibrio para el modelo de insumo-producto, tendremos:

Demanda en "a" Oferta en "a"

$$Z_i^a = \sum_j r_{ij}{}^a X_j^a + Y_i^a = X_i^{aa} + X_i^{ba} \qquad (i=1,\ldots,n) \quad \text{———} \ (2.5)$$

Donde:

Z_i^a = Oferta en la región "a"

$\sum_j r_{ij}{}^a X_j^a$ = Indica la suma para todos los valores de "j", es decir, la suma del renglón del producto del coeficiente marginal de insumo por su nivel de producción, en la región "a"

Y_i^a = Consumo final de la mercancía "i" en la región "a"
X_i^{aa} = Cantidad de mercancía "i" que se produce en la región "a" y se consume en la región "a"
X_i^{ba} = Cantidad de mercancía "i" que se produce en la región "b" y se consume en la región "a"

Existe una ecuación de la forma anterior, para cada mercancía y región. La solución de la ecuación para determinadas demandas finales debe formular un supuesto respecto a las fuentes de abastecimiento, que puede consistir simplemente en hacer que las importaciones representen una parte fija de la oferta total de cada mercancía. Siendo válido esto para dos o más regiones, llamaremos a estas proporciones "coeficientes de oferta". Estos coeficientes tendrán que definirse para cada fuente de abastecimiento (incluye la región misma) por medio de la siguiente ecuación:

$$X_i^{ab} = s_i^{ab} \, Z_i^b \qquad \text{------} \; (2.6)$$

Donde:

X_i^{ab} = Cantidad de la mercancía "i" que se produce en la región "a" y se consume en la región "b"

s_i^{ab} = Coeficiente de oferta; Propensión de "b" a consumir lo de "a"

Z_i^b = Oferta en la región "b"

Por tanto, el coeficiente de oferta se extiende a cualquier número de regiones, y nos da la idea de una determinada propensión marginal a importar de cada región, de tal forma que la suma de los coeficientes de oferta para una mercancía dada debe ser igual a 1.0 si incluimos la oferta intra-regional (oferta dentro de la región misma).

Este supuesto nos capacita para expresar la producción total de una mercancía dada, en una región, como función de las demandas totales en todas las regiones:

$$X_i^a = s_i^{aa} Z_i^a + s_i^{ab} Z_i^b \quad (i=1,\ldots,n) \text{ --- } (2.7)$$

Si resolvemos los niveles de producción correspondientes a determinadas demandas finales en todas las regiones sustituyendo de las ecuaciones 2.5, 2.6 y 2.7, nos queda:

$$X_i^a = (\sum_j s_i^{aa} r_{ij}^{a} X_j^a + \sum_j s_i^{ab} r_{ij}^{b} X_j^b) + (s_i^{aa} Y_i^a + s_i^{ab} Y_i^b) \text{ --- } (2.8)$$

Estas ecuaciones expresan que la producción total es igual a las cantidades empleadas en demandas intermedias de las dos regiones más los envíos hechos a ambas regiones para la demanda final. La ampliación a más de dos regiones se hace en forma directa.

Es necesario incluir dentro de cualquier modelo el consumo familiar, ya que es más sencillo tratar a algunos elementos de la demanda final como si dependieran del nivel de ingreso, es decir, el consumo familiar estará en función del nivel de ingreso de las familias.

Debido a que la ubicación de la producción depende de la del consumo, y éste no puede determinarse por separado del cálculo del ingreso creado en cada sector y región, las demandas finales (elementos autónomos) incluyen únicamente inversiones y gastos del gobierno.

II.3 Modelo Interregional.

A continuación se ofrece un ejemplo de modelo interregional, y en el cual se tratará de explicar su estructura y funcionamiento, hecho lo anterior únicamente para fines didácticos. Teniendo presente que el análisis formal se verá en el capítulo 7, en donde se explicarán el porque de cada elemento.

El modelo que se muestra a continuación se ha elaborado en forma arbitraria y que para llegar a la solución se debieron suponer ciertos elementos, y los cuales, iremos señalando en el transcurso del ejemplo.

Para la elaboración de un modelo interregional es necesario conocer de antemano las cuentas interindustriales de cada región así como hacer un estudio socioeconómico y de mercado en cada región con el fín de conocer la propensión a importar y exportar de cada sector en una región. En este caso, se ha elegido un modelo de dos regiones, con el fín de simplificar el problema que se tendría al suponer que mercancía tendría que ir a que región, ya que las exportaciones de una región tendrán que ir forzosamente a la otra.

En este modelo supondremos que existen dos regiones ("Norte" y "Sur"), a continuación se muestran las cuentas interindustriales de cada región, de las cuales, se obtendrán los coeficientes marginales de insumo.

Cuentas interindustriales para la región "Norte"

		SECTORES DE CONSUMO			Consumo Intermedio	Consumo Final	Consumo Total
		1	2	3	(W_i)	(Y_i)	(Z_i)
SECTORES DE COMPRA	1	40	70	50	160	100	260
	2	10	80	20	110	170	280
	3	40	30	60	130	90	220
	U_j	90	180	130	400	-	-
	V_j	170	100	90	-	360	-
	X_j	260	280	220	-	-	760

Cuentas interindustriales para la región "Sur"

		SECTORES DE CONSUMO			Consumo Intermedio	Consumo Final	Consumo Total
		1	2	3	(W_i)	(Y_i)	(Z_i)
SECTORES DE COMPRA	1	50	30	40	120	290	410
	2	70	60	20	150	100	250
	3	90	10	80	180	130	310
	U_j	210	100	140	450	-	-
	V_j	200	150	170	-	520	-
	X_j	410	250	310	-	-	970

Coeficientes de insumo región "Norte"

0.15	0.25	0.23
0.04	0.29	0.09
0.15	0.11	0.27

Coeficientes de insumo región "Sur"

0.12	0.12	0.13
0.17	0.24	0.06
0.22	0.04	0.26

(En el apéndice del cápitulo 4, se puede consultar acerca de la obtención de estos coeficientes)

Por medio de un estudio socioeconómico y de mercado se obtuvierón los coeficientes de oferta siguientes (arbitrarios)

	Coeficientes de oferta			
Sector	s^{N-N}	s^{S-N}	s^{N-S}	s^{S-S}
1	0.5	0.5	0.3	0.7
2	0.8	0.2	0.5	0.5
3	0.4	0.6	0.2	0.8

Si efectuamos el producto de los coeficientes marginales — de insumo por sus correspondientes de oferta nos queda la siguiente matriz "A" de coeficientes:

$$A = \begin{matrix} 0.08 & 0.13 & 0.12 & 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.03 & 0.23 & 0.07 & 0.09 & 0.12 & 0.03 \\ 0.06 & 0.04 & 0.11 & 0.04 & 0.01 & 0.06 \\ 0.08 & 0.13 & 0.12 & 0.08 & 0.08 & 0.09 \\ 0.01 & 0.06 & 0.02 & 0.09 & 0.12 & 0.03 \\ 0.09 & 0.07 & 0.16 & 0.18 & 0.03 & 0.21 \end{matrix}$$

Si a la matriz unitaria le restamos la matriz "A", obtenemos una solución parecida a la forma de Leontief y por lo tanto con la inversa de ésta por la demanda final, se obtiene la producción total del sistema. Los coeficientes de oferta significan que región se especializa en determinada mercancía.

A la multiplicación de los coeficientes de oferta y los de insumo producto se le llama consolidación de coeficientes, y a su conjunto (martiz "A") matriz interregional consolidada.

Cuando el modelo interregional se presenta en forma consolidada, sus propiedades son las mismas que las de una matriz ordinaria de Leontief (I-A), y puede resolverse por medio de la inversa. Las demandas deben transformarse primero en envíos para el consumo final, multiplicandose por los coeficientes apropiados de oferta. Estos envíos se multiplican entonces por las columnas correspondientes de la matriz inversa, y los resultados se suman por renglones para dar la solución de los niveles de producción que se indican en la última columna de la tabla (2.B).

$$(I - A) = \begin{matrix} 0.92 & -0.13 & -0.12 & -0.04 & -0.04 & -0.04 \\ -0.03 & 0.77 & -0.07 & -0.09 & -0.12 & -0.03 \\ -0.06 & -0.04 & 0.89 & -0.04 & -0.01 & -0.06 \\ -0.08 & -0.13 & -0.12 & 0.92 & -0.08 & -0.09 \\ -0.01 & -0.06 & -0.02 & -0.09 & 0.88 & -0.03 \\ -0.09 & -0.07 & -0.16 & -0.18 & -0.03 & 0.79 \end{matrix}$$

$$(I-A)^{-1} = \begin{matrix} 1.13 & 0.24 & 0.21 & 0.11 & 0.10 & 0.10 \\ 0.08 & 1.38 & 0.17 & 0.19 & 0.21 & 0.10 \\ 0.10 & 0.11 & 1.18 & 0.09 & 0.04 & 0.11 \\ 0.15 & 0.26 & 0.23 & 1.18 & 0.16 & 0.18 \\ 0.04 & 0.13 & 0.08 & 0.15 & 1.17 & 0.07 \\ 0.19 & 0.24 & 0.33 & 0.32 & 0.12 & 1.35 \end{matrix}$$

A continuación se muestra un modelo interregional, y en el cual se ponen todos los elementos que intervienen para su cálculo, como ya se había mencionado anteriormente, sólo se explica hasta este punto su elaboración y obtención de parámetros, ya que en el capítulo 7, se da una explicación detallada de cada elemento y un análisis formal usando técnicas de insumo-producto y programación lineal.

T A B L A (2.B)

M O D E L O   I N T E R R E G I O N A L

				SECTORES DE COMPRA						ELEMENTOS AUTONOMOS		PRODUCCION
				Norte			Sur			Demandas	Envíos	TOTAL
				1	2	3	1	2	3	(Y_i)	($s_i Y_i$)	(X_i)
S				1.13	0.24	0.21	0.11	0.10	0.10			
E		N	1	155.	44.6	13.0	27.8	8.40	15.6	100	137	264.50
C	P	O		0.06	1.36	0.17	0.19	0.21	0.10			
T	R	R	2	10.9	257.	10.5	48.1	17.6	15.8	170	186	359.69
O	O	T		0.10	0.11	1.16	0.09	0.04	0.11			
R	D	E	3	13.7	20.5	73.2	22.7	3.36	17.4	90	62	150.83
E	U			0.15	0.26	0.23	1.18	0.16	0.16			
S	C		1	20.6	48.4	14.3	299.	13.4	28.4	290	253	423.59
	C	S		0.04	0.13	0.08	0.15	1.17	0.06			
D	I	U	2	5.48	24.2	4.96	37.9	98.3	12.6	100	84	183.49
E	O	R		0.19	0.24	0.33	0.32	0.12	1.35			
	N		3	26.0	44.6	20.5	80.9	10.1	213.	130	158	195.47
										880	880	

B I B L I O G R A F I A

1. Methods of Regional Analysis and Introduction to Regional - Science, Isard, Walter; MIT Press, Cambridge, 1969

2. Interregional and International Input-Output Analysis, in - the Structural Interdependence of the Economy, Chenery, Ho- llis; 1956

4. Systematics: a New Aproach to Systems Analysis, Grindley -- Kit; London, Mc Graw-Hill, 1975

5. La Sociología y la Teoría Moderna de los Sistemas, Buckley- Walter; Buenos Aires, Ed. Amorrortu, 1975

6. A Dynamic Model, Revista Econometrica XX (1952) y XXI (1953), Holley, J., London.

7. Interregional and Regional Input-Output Analysis, A model - of a Space Economy, Isard, Walter; Review of Economics and- Statistics, XXXIII, 1951

8. Location and Space Economy, Isard, Water; MIT Press, Cam -- bridge, 1970.

A N A L I S I S D E I N S U M O -
P R O D U C T O Y P R O G R A M A
C I O N L I N E A L

III ANALISIS DE INSUMO-PRODUCTO Y PROGRAMACION LINEAL

III.1 Introducción.

Este capítulo tiene como objetivo principal dar un primer enfoque sobre en que consiste el insumo-producto y la programación lineal, así como tratar sus planteamientos teóricos y aplicarlos al modelo interregional, cuestión que se tratará en una forma más seria y detallada en el capítulo 7.

Para realizar el análisis de insumo-producto y programación lineal debemos primeramente saber cuál es su funcionamiento estructural, para ello, nos basaremos en el análisis de actividades.

Un método para análizar cualquier transformación económica en función de unidades elementales llamadas actividades, recibe el nombre de "análisis de actividades".

El empleo de estos análisis ha conducido a una exposición más generalizada de las relaciones entre el rendimiento productivo y los precios. EN EL TRABAJO EMPIRICO, SUMINISTRA LA ESTRUCTURA CONCEPTUAL PARA LA TECNICA MATEMATICA DE LA PROGRAMACION LINEAL QUE PUEDE UTILIZARSE EN LA DETERMINACION DE SOLUCIONES OPTIMAS PARA VARIAS CLASES DE PROBLEMAS DE UBICACION.[1]

EN EL ANALISIS DE ACTIVIDADES LA MERCANCIA TIENE UN SIGNIFICADO SEMEJANTE AL QUE SE EMPLEA EN LA TEORIA DE INSUMO-PRODUCTO. DESDE UN PUNTO DE VISTA IDEAL, UNA MERCANCIA ES HOMOGENEA EN TO-

DOS SUS USOS PERO EN LAS APLICACIONES EMPIRICAS SE CONVIERTE EN UN AGREGADO, SELECCIONADO DE TAL MANERA QUE REDUCE AL MINIMO EL EFECTO DE LA FORMACION DEL AGREGADO SOBRE LA PRODUCCION.

Mercancía primaria es cualquier insumo no producido dentro del sistema, y de aquí que su definición se encuentre basada en el modelo que se elige. Los consumos finales son aquellos que se estipulen de antemano y dependen también del modelo elegido, como en el análisis de insumo-producto.

Actividad es cualquier transformación posible, de proporciones fijas de insumos de mercancías, en proporciones fijas de producción de mercancías. Una actividad está representada matemáticamente por una columna de coeficientes, tal como en el sistema de Leontief, con un coeficiente para cada insumo y para cada producto. Expresando la actividad "j" como vector de columna:

$$A = \begin{vmatrix} a_{ij} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mj} \end{vmatrix}$$

donde un coeficiente positivo indica un producto y un coeficiente negativo un insumo.

Todas las actividades posibles pueden transcribirse juntas en forma de matriz, como sigue:

$$A = (A_1, \ldots, A_n) = \begin{array}{c} \text{"n" actividades} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \overbrace{a_{12} \quad \cdots\cdots\cdots}^{} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \quad \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}}\right\} \text{"m" mercancías}$$

Esta matriz recibe el nombre de " Matriz Tecnológica " , incluye a la matriz de Leontief (I - A), como un caso especial,- en que el número de actividades es igual al de mercancías. Sin - embargo, cuando existe cierta opción de actividad, el número de- actividades "n" será mayor que el número de mercancías "m" y ya- no será cuadrada la matriz.

Una actividad definida por la producción bruta en el sistema de Leontief (insumo-producto), se convierte en nivel de actividad en el análisis de actividades y en la programación lineal. Cualquier insumo o producción puede seleccionarse como unidad de medida, pero será más conveniente tomar como base la producción- de la mercancía principal.

El total de cada insumo empleado o de cada producto fabricado es:

$$X_{ij} = a_{ij} X_j$$

donde:

X_{ij} = Cantidad de la mercancía "i" consumida en el sector "j".
a_{ij} = Coeficiente marginal de insumo.

X_j = Nivel de producción de la mercancía "i" en el sector "j".

Esta ecuación debe ser utilizada con productos positivos e- insumos negativos. A una serie dada de niveles de actividad (en base a los niveles de producción) se le llama"programa" y se re presenta por un vector renglón ($X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$).

Los elementos autónomos que se aceptan como conocidos en el análisis de actividades, se llaman restricciones o impedimentos. Estos no sólo incluyen a las demandas finales de insumo-producto, sino también a las cantidades disponibles de recursos, y algunas veces a otras limitaciones. Para cada tipo de mercancía habrá -- una restricción, positiva para las producciones finales, negativa para los insumos primarios, y cero para los artículos intermedios. La columna de restricciones se define como:

$$B = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{vmatrix}$$

III.2 Análisis de Insumo-Producto.

El modelo de insumo-producto presupone como norma fundamental que cada mercancía está suministrada únicamente por un solo- sector de producción.

Al hacer una proyección de insumo-producto se presuponen -- dos etapas metodológicamente diferentes: a) calcular las demandas finales en todas las industrias, y b) Estimar la producción total que se necesita en todas las industrias para cubrir tanto estas demandas finales como las demandas intermedias de otras.

La técnica de insumo-producto debe ser más útil para analizar los efectos de los cambios radicales que se operan en la composición de las demandas finales. En el caso extremo, en que cambiaran proporcionalmente todas las demandas finales, proyectaría cambios proporcionales en todas las producciones. Por el contrario, en los casos en que hay un cambio radical en las demandas finales (Como en la movilización de guerra o en un desarollo económico de plan obligatorio) debe ponerese en marcha la técnica del insumo.producto.

La no negatividad de los niveles de actividad es necesario tanto para el insumo-producto como para la programación lineal, en el caso del insumo-producto no se necesita hacer un supuesto por separado, porque las producciones no negativas constituyen propiedad imprescindible en todas las matrices de Leontief (I-A), pero en programación lineal debe imponerse esta condición para impedir que aparezcan en la solución niveles negativos de actividad.

Los insumos utilizados por una actividad son únicamente función del nivel de dicha actividad, es decir, en el modelo de insumo-producto se presupone la condición lineal, más no es importante la proporcionalidad. Por el contrario, en la programación lineal es necesaria una función lineal homogénea ($X_{ij} = a_{ij} X_j$), a lo que se le conoce como el supuesto de proporcionalidad.

Tratando de ejemplificar los conceptos anteriormente mencionados, tomemos el ejemplo del capítulo 2. Supongamos que el gobierno quiere hacer un programa de inversiones en la región "Norte" con el fín de lograr una mayor producción de esta región y de esta forma tratar de equilibrar la producción de ambas regiones. Para esto, se incrementará al sector 1 y 3 de la región norte en 100 y 50 unidades respectivamente, se hará un análisis de la interdependencia estructural y se harán las conclusiones respectivas sobre la funcionalidad del programa de inversiones.

M O D E L O   I N T E R R E G I O N A L

	SECTORES DE COMPRA						ELEMENTOS AUTONOMOS		PRODUCCION
	Norte			Sur			Demandas	Envíos	TOTAL
	1	2	3	1	2	3	(Y_i)	($s_i Y_i$)	(X_i)
	1.13	0.24	0.21	0.11	0.10	0.10			
1	211.	44.6	17.2	33.3	8.40	18.8	200	187	333.33
	0.06	1.38	0.17	0.19	0.21	0.10			
2	15.0	257.	13.9	57.6	17.6	18.8	170	186	379.90
	0.10	0.11	1.16	0.09	0.04	0.11			
3	18.7	20.5	96.8	27.3	3.36	20.7	140	82	187.36
	0.15	0.26	0.23	1.16	0.16	0.16			
1	28.1	48.4	18.9	357.	13.4	33.9	290	303	499.70
	0.04	0.13	0.06	0.15	1.17	0.06			
2	7.48	24.2	6.56	45.5	98.3	15.0	100	84	197.04
	0.19	0.24	0.33	0.32	0.12	1.35			
3	35.5	44.6	27.1	96.9	10.1	253.	130	188	467.02

De esta tabla podemos concluir varios aspectos, en primer lugar, se puede observar el sistema de contabilidad interindustrial en donde se pueden comparar los incrementos necesarios que se tienen que hacer en cada sector para obtener la producción que se observa en la última columna. El programa de inversiones propuesto debe ver si es posible obtener los incrementos mostrados en la tabla anterior para cada sector y en que forma --- afecta al sistema y a las dos regiones, también debe estudiar en -- que forma perjudica o beneficia a la otra región, y si es factible para ésta tal incremento.

El modelo interregional tiene un mayor campo de acción que el modelo interregional, ya que aparte de manejar las cuentas en cada sector, toma en cuenta también las relaciones estructurales entre- las regiones en estudio. Así, el modelo interregional nos ayuda a- encontrar una adecuada guía entre la relación del comercio y la -- ubicación geográfica del mismo.

III.3 Análisis de Programación Lineal.

Cualquier opción entre usos alternativos de recursos puede -- plantearse como un problema de programación si: a) puede representarse convenientemente por los conceptos del análisis de actividades; y b) si puede definirse el objetivo de la política que se marca, como función de los niveles de actividad.

Si las diversas relaciones funcionales llenan los requisitos- de los supuestos de condición lineal entonces el problema será de- programación lineal. El problema general de programación lineal - puede plantearse en forma algebráica como sigue:

Para elevar al máximo o reducir el mínimo alguna función li - neal de los niveles de actividad, podemos expresarlos de la siguiente manera:

$$C = \sum_j c_j X_j \quad \text{———} (3.1)$$

$$\text{sujetos a} \quad \sum_j a_{ij} X_j \; B_i \quad (i=1 \ldots m) - (3.2)$$

$$\text{y} \quad X_i > 0 \quad (i=1 \ldots n) - (3.3)$$

Observando algunos detalles de estas ecuaciones, podemos decir: a) Necesitamos de cierta función de los niveles de actividad que nos capacite para escoger una solución con preferencia a otra. Esto es lo que se llama criterio o función objetiva; b) Existen formas alternativas para realizar la misma producción; c) Los factores primarios constituyen una parte del modelo tanto como las mercancías producidas, ya que en cualquier solución debe satisfacer las limitaciones de recursos así como llenar los requisitos de consumo final; d) Las restricciones consisten más bien en desigualdades que en igualdades.

Para complementar el enunciado del problema de programación es necesario formar una categoría de programas según el grado en que satisfagan estas ecuaciones. Se le da el nombre de solución a un conjunto de niveles de actividad que satisfaga solamente la ecuación (3.2). Si, además, consta únicamente de niveles de actividad no negativos, entonces recibe el nombre de solución factible, es decir, que satisface a las ecuaciones (3.2) y (3.3). A la solución factible que eleva al máximo a la ecuación (3.1) se le llama Programa Optimo.

Se facilita la obtención de la solución óptima para un problema de programación si se vuelve a plantear éste en términos de ecuaciones, en lugar de desigualdades. Esto se puede hacer agregando nuevas variables llamadas vectores sueltos o actividades disponibles para representar la diferencia que hay entre los términos que se encuentran a la izquierda y a la derecha en (3.2). En las ecuaciones de insumos primarios, la actividad disponible representa la falta de utilización de recursos. En las ecuaciones de producción final la actividad disponible representa la producción de una mercancía dada en exceso de las necesidades mínimas.

Si tienen algún valor las cantidades adicionales de determinada mercancía, este último tipo de actividad disponible tendrá un coeficiente positivo en la función objetiva. La falta de utilización de recursos primarios se supone, comúnmente, que no tienen ni costo ni valor.

En el capítulo 7, se ejemplifican y resuelven algunos modelos interregionales de programación lineal, y será hasta ese capítulo en donde se aplicarán dichos análisis enunciados anteriormente.

B I B L I O G R A F I A

1. Linear Programming and Economic Analysis, Doffman, Samuelson-y Solow; 1958

2. Decision Theory and Operations Research, Arrow, K; Operations Research, 1957

3. Mathematical Economics, Allen, R; The Macmillan Company, Nueva York, 1956

4. Leontief's Systems in the Light of Recent Results, Georgescu-Roegen, N.; Review of Economics and Statistics, XXXII, 1950

T E O R I A   B A S I C A   D E L
I N S U M O – P R O D U C T O

IV TEORIA BASICA DEL INSUMO-PRODUCTO

IV.1 Introducción.

Pese a que desde la época de Walras ya se contaba con un análisis formal de la interdependencia de las unidades económicas, ha sido durante los últimos 20 años cuando se ha desarollado en lo correspondiente a la economía aplicada, sus orígenes basados en los estudios de Leontief y su matriz de unsumo-producto a los estudios empíricos, ha llevado un gran avance en los estudios enfocados dentro del campo de insumo-producto y programación lineal.

El interés por el cual se ha desarrollado esta técnica matemática, esta basado en los diversos problemas económicos y sus posibles alternativas de solución, aunque tiene la desventaja de tener una gran variedad de problemas que no pueden tratarse fácilmente por medio de este ánalisis. Tales problemas se presentan cuando en los programas de producción hay cambios sustanciales, como puede ser durante períodos de reconstrucción, de desequilibrios de balanza de pagos, o en el caso en que existe un desarollo económico acelerado. Al mismo tiempo, el interés por los problemas de distribución que implican limitaciones de recursos específicos ha estimulado también el desarollo de los análisis de actividad y de programación lineal realizados por diversos autores. También hay que hacer notar, que los modelos interindustriales en donde existe toda una variedad de modelos matemáticos será una herramienta importante para el debido entendimiento y aplicación de los diversos modelos regionales e interregionales.

IV.2 Sistema de Contabilidad Interindustrial.

Para poder aplicar el análisis regional e interregional así como todo lo correspondiente a la matriz de insumo-producto o de programación lineal, debemos de apoyarnos en una política económica bien fundamentada, para poder entender y ligar todos los conceptos, en donde, una vez ya definidos, tomar la mejor estrategía o modelo de selección, este tipo de análisis cuantitativo de la interdependencia de las unidades de producción y de consumo en una economía moderna es la que recibe el nombre de economía interindustrial.

El análisis interindustrial es necesario para que una serie de problemas empíricos puedan ser resueltos, ya que resultan inadecuadas las técnicas del análisis del ingreso nacional[1]. Los modelos de equilibrio general de Walras y Pareto nos proporcionan el fundamento teórico de la economía interindustrial[2], estas teorías deben restringirse en su alcance y simplificarse en su forma con el fín de que puedan ser determinadas estadísticamente las relaciones funcionales, en cada caso, los conceptos teóricos tienen que volverse a formular para facilitar la medicion, y los modelos resultantes adquieren su característica particular.

El primer modelo empírico interindustrial fue formulado por el profesor Wassily Leontief, cuyo sistema se conoce con el nombre de "análisis de insumo-producto". El análisis de insumo-producto probablemente es solo el primero de varios métodos cuantitativos para el tratamiento de modelos interindustriales. Las aplicaciones del análisis económico pertenecen a varias categorías según sus objetivos y la naturaleza de las hipótesis formuladas.

Puesto que el análisis interindustrial se ocupa de las interrelaciones que surgen de la producción, la función primordial de las cuentas interindustriales es investigar el curso de las corrientes de bienes y servicios en su caso de uno a otro sector.

A continuación presentamos el cuadro básico del sistema de contabilidad interindustrial y que es también el cuadro más simple de la presentación del modelo de insumo-producto.

TABLA (A)

		SECTORES DE COMPRA											
		Consumo intermedio				Consumo final					Uso total = oferta total	Oferta	
		Sector 1...j...n			Consumo intermedio total	Inversión	Consumo	Gobierno	Exportaciones	Uso final total		Importaciones	Producción
Sector de producción	1	X_{11}	X_{1j} ...	X_{1n}	W_1	I_1	C_1	G_1	E_1	Y_1	Z_1	M_1	X_1
	2	(Cuadrante II)				(Cuadrante I)							
	i	X_{i1}	X_{ij} ...	X_{in}	W_i	I_j	C_j	G_j	E_j	Y_j	Z_j	M_j	X_j
	n	X_{n1}	X_{nj} ...	X_{nn}	W_n	I_n	C_n	G_n	E_n	Y_n	Z_n	M_n	X_n
Insumos producidos totales		U_1	U_j	U_n									
Insumos primarios (valor agregado)		V_1 (Cuadrante III)	V_j	V_n		V_I (Cuadrante IV)	V_C	V_G	V_E		V		V
Producción Total.		X_1	X_j	X_n		I	C	G	E	Y	Z	M	X

Donde:

Z_i = Oferta total de la mercancía "i"

X_i = Producción total de la mercancía "i"

M_i = Importaciones de la mercancía "i"

X_{ij} = Cantidad de la mercancía "i" consumida por el sector "j".

W_i = Consumo intermedio total de la mercancía "i" ($\sum_j X_{ij}$).

V_j = Consumo total de insumos primarios (valor agregado) en el sector "j".

U_j = Consumo total por el sector "j" de los insumos comprados de otras industrias ($\sum_i X_{ij}$).

Y_i = Demanda final de la mercancía "i".

El cuadrante I, contiene el consumo final de mercancías y servicios producidos, subdivididos en tipos principales de consumo. (más del 90 % del producto nacional bruto aparece dentro de esta categoría).

El cuadrante II, comprende la parte esencial de las cuentas interindustriales. Cada asiento X_{ij}, indica la cantidad de mercancía "i" consumida por el sector "j", deterinada a precios constantes. El consumo intermedio total de cualquier mercancía se encuentra identificada como W_i, y el total de compras hechas a otros sectores por una industria dada, como U_j.

El cuadrante III, contiene el empleo de insumos que son primarios, en el sentido de que no son producidos dentro del sistema. El pago total de insumos primarios por cada sector corresponde, en forma aproximada, al valor agregado en la producción y el costo de los insumos producidos fuera de un establecimiento dado.

Salvo cuando sea necesario hacer por separado las mediciones de los insumos, se empleará el término valor agregado (V_j) para indicar el consumo total de insumos primarios por un sector dado.

El cuadrante IV, contiene el insumo directo de factores primarios en el consumo final, estas transacciones no se incluyen en la mayoría de los modelos interindustriales, pero deben registrarse para poder hacer compatibles a los totales con los totales nacionales.

Las dos últimas columnas del cuadro, subdividen a la oferta total de cada mercancía entre importaciones y producción interna. Si cada mercancía se produce únicamente por un sector y no existen coproductos, la oferta total de la mercancía "i" es igual a la producción en el sector "i", más las importaciones de "i".

Estos conceptos conducen a dos ecuaciones de equilibrios y expresa que para cada mercancía la oferta total es igual a la demanda total, la que está compuesta de la demanda intermedia más la demanda final:

$$\underbrace{Z_i = M_i + X_i}_{\text{OFERTA}} = \underbrace{\sum_j X_{ij} + Y_i = W_i + Y_i}_{\text{DEMANDA}} \quad (i=1\ldots n) \text{ --- } (4.1)$$

esta ecuación es aplicable a las hileras de nuestro cuadro.

La siguiente ecuación se aplica a las columnas del cuadro y expresa que la producción total de cada sector es igual al valor de los insumos comprados de otros sectores más el valor agregado en ese sector:

$$X_j = \sum_j X_{ij} + V_j = U_j + V_j \quad (j=1\ldots n) \text{ --- } (4.2)$$

Estas dos ecuaciones pueden aceptarse como definiciones de demanda final (Y_i) y del valor de insumos primarios (V_j), res pectivamente. La demanda final (o consumo final) es la diferencia entre la oferta total de una mercancía disponible y la cantidad consumida en la producción. El valor agregado se define como la diferencia que hay entre el valor de la producción de un sector y los pagos por los insumos comprados de otros sectores productivos, es decir, que al valor de los insumos primarios es a lo que llamaremos valor agregado.

Es importante observar que no existe una necesaria relación entre los totales de las columnas individuales de la demanda final y del consumo total de cualquier insumo primario aislado. Desde el punto de vista contable, la diferencia importante entre los dos tipos de sectores, es que los sectores productivos deben tener presupuestos equilibrados (insumo total = producto total), pero los valores de los insumos primarios y de los consumos finales únicamente deben equilibrarse en el total global.

IV.3 Modelos Fundamentales de Insumo-Producto.

El objetivo principal del modelo de insumo-producto es explicar las magnitudes de las corrientes interindustriales en función de los niveles de producción en cada sector, para esto debe ser posible formar los sectores productivos de tal manera que para cada uno de ellos pueda suponerse una sola función de producción.

Para el modelo de insumo-producto de Leontief debemos tomar en cuenta los siguientes supuestos: a) Que un producto dado es suministrado únicamente por un sector; b) Que no existen coproductos; y, c) Que la cantidad de cada uno de los insumos utilizados en la producción por un sector, está totalmente determinada por el nivel de producción de dicho sector.

Estos supuestos del modelo de insumo-producto hacen posible formular una ecuación para la demanda (X_{ij}) de cada industria "j", de cada mercancía "i", como una función de su propio nivel de producción (X_j), suponiendo que estas funciones de insumo son lineales en el curso de una serie dada de producciones tenemos lo siguiente:

$$X_{ij} = \bar{X}_{ij} + a_{ij} X_j \quad \text{------} \ (4.3)$$

donde:

a_{ij} = Coeficiente marginal de insumo.

$\bar{X}_{ij}$ = Constante que incluye a cualesquiera elementos de costo fijo que no varían con el nivel de producción.

X_{ij} = Cantidad de mercancía "i" consumida en el sector "j".

Suponiendo que $\bar{X}_{ij} = 0$, ya que es conveniente tratar de simplificar la ecuación anterior por:

$$X_{ij} = a_{ij} X_j$$

En la forma más simplificada del modelo original de Leontief, las importaciones son determinadas fuera del sistema. Sustituyendo X_{ij} en la primera y última ecuación mencionadas en este tema, y cambiando el orden de los términos, nos da una ecuación de equilibrio para cada mercancía o sector:

$$X_i - \sum_j a_{ij} X_j = Y_i - M_i \quad (i=1...n) \quad \text{------} \ (4.4)$$

En este sistema de "n" ecuaciones, hay n niveles en incógnitas de producción (X_{ij}), n^2 parámetros (a_{ij}) que describen las funciones de insumo y dos series de n variables autónomas (Y_i y M_i), cuyos valores son especificados en un problema dado.

Cuando el intercambio comercial es importante, con frecuencia conviene hacer de las importaciones, variables dependientes, suponiendo una función lineal en el transcurso de ciertas operaciones, quedandonos de la siguiente manera dicha ecuación:

$$M_i = \bar{M}_i + m_i X_i \quad \text{----- (4.5)}$$

Donde:

M_i = Nivel de importaciones (en función de la oferta total de esa mercancía (Z_i)).

X_i = Nivel de producción nacional.

m_i = Coeficiente de importación.

Sustituyendo "m_i" en la ecuación de equilibrio (4.4) para cada mercancía, y reuniendo los terminos:

$$(1 + m_i) X_i - \sum_j a_{ij} X_j = \bar{Y}_i \quad (i=1....n) \quad \text{----- (4.6)}$$

$$\bar{Y}_i = Y_i + \bar{X}_{ij} - M_i \quad \text{----- (4.7)}$$

donde:

$\bar{Y}_i$ = Demanda total autónoma

Y_i = Demanda final

Las dos últimas ecuaciones constituyen las ecuaciones fundamentales del sistema de insumo-producto en el caso general, no obstante en un sentido más general constituyen una función simplificada de producción para la economía total.

Aunque los problemas mas usuales a los que se aplica el sistema de insumo-producto implican la especificación de las $\bar{Y}$ y la determinación de las X, es factible suponer un conjunto composti -

ble de n valores para algunas X y para algunas $\overline{Y}$, y además para determinar las restantes variables. En todos los casos es necesario resolver un sistema de n ecuaciones simultáneas con n incógnitas. La solución acerca de esto, puede escribirse de la siguiente forma:

$$X_i = p_{i1} \overline{Y}_1 + p_{i2} \overline{Y}_2 + \dots + p_{in} \overline{Y}_n \quad (i=1 \dots n) \quad \text{------} \; (4.6)$$

p_{ij} se deriva de los coeficientes "a_{ij}" y "m_i"

Este razonamiento representa una base para suponer que existe cierta relación entre insumos comprados por un sector y su nivel de producción.

IV.4 Introducción a Métodos de Solución.

Los métodos de aproximaciones sucesivas o de "iteración" pueden ser un poco complicados, pero en realidad, son bastante eficientes para solucionar los modelos de insumo-producto de dimensiones no muy grandes.

Cuando se recurre a sistemas de insumo-producto de más de tres sectores, la solución general se hace muy complicada para su cálculo por aproximaciones iterativas. Por tanto, sólo deben de adoptarse los métodos iterativos para encontrar soluciones particulares.

Para construir un sistema de insumo-producto se toman los datos contables de la matriz de transacciones[3] y suponfremos que las funciones de insumo son calculadas por la ecuación para la demanda de cada industria y de cada mercancía, mostrada en (4.3). --

Los coeficientes de insumo, se obtienen dividiendo cada compra interindustrial entre la producción total del sector, obteniendose la matriz resultante de coeficientes de insumo.

Suponiendose que se conocen las demandas finales de la matríz de transacciones, pero no se conocen los niveles de producción, nuestro problema consiste en resolver la serie de ecuaciones obtenidas de la ecuación de equilibrio para cada mercancía o sector, para las producciones totales.

Los métodos para lograr una solución general, o matríz inversa, de la forma de las ecuaciones (4.8) son más complicados que el procedimiento iterativo para garantizar soluciones aisladas y su solución deberá realizarse por medio de computadora. La desventaja que tiene la solución general es que una variación en uno cualquiera de los coeficientes de insumo, o de las funciones de importación, pueda afectar a cualesquiera de los elementos de esta solución, por tanto, no resulta económico computar la inversa de la matríz para sistemas que sean mayores de 40 O 50 sectores, a menos que se vayan a utilizar muy ampliamente los resultados que se obtengan.

IV.5 Análisis Básico de Insumo-Producto.

El análisis de insumo-producto es, en esencia, una teoría general simplificada de la producción. Los estudios del consumo, la inversión, y otros elementos de la demanda final, deben preceder al análisis de insumo-producto, pero en el modelo mismo estos elementos se aceptan como datos conocidos.

El modelo de insumo-producto toma como base de que en una economía es posible dividir a todas las actividades productivas en -

en sectores cuyas relaciones recíprocas puedan expresarse por medio de una serie de sencillas funciones de insumo.

Dentro del modelo de Leontief, se incluye o excluye algunos tipos de interdependencia entre las unidades económicas. De manera especial, se incluye la interdependencia que reulta de las — ventas de uno a otro sector, y del consumo de los mismos factores primarios. Excluye especificamente, a la sustitución entre - las producciones de sectores diferentes, ya sea en los consumos finales o como insumos para otros sectores, y la interdependencia no mercantil, bajo la forma de economías exteriores.

Las propiedades de los modelos de Leontief toman como base tres fundamentos: a) Cada mercancía (o grupo de mercancías) es suministrada por una sola industria o sector de producción; b) - El efecto total de llevar a cabo varios tipos de producción constituye la suma de los efectos separados; y c) Los insumos comprados por cada sector son solamente una función del nivel de producción de ese sector.

Mencionando lo anterior, podemos definir que un sector es:- una unión, tanto de procedimientos como de productos, que difieren en ciertos aspectos, pero que en su conducta es uniforme en lo que se refiere a las características empleadas como base para la formación de agregados, si estos corresponden a los tres planteamientos básicos del modelo.

Los coeficientes de insumo del sector ya consolidado, puede plantearse como sigue:

$$X_{(m+n)} = X_m + X_n$$

$$a_{i(m+n)} = \frac{X_{i(m+n)}}{X_{(m+n)}} = \frac{X_{im} + X_{in}}{X_m + X_n}$$

$$a_{i(m+n)} = \frac{a_{im} X_m + a_{in} X_n}{} = a_{im} \left(\frac{X_m}{X_m + X_n} \right) + a_{in} \left(\frac{X_n}{X_m + X_n} \right)$$

$$a_{i(m+n)} = W_m a_{im} + W_m a_{in} \quad \text{——} \; (4.9)$$

donde:

$$W_m = \left(\frac{X_m}{X_m + X_n} \right) \quad \text{y} \quad W_n = \left(\frac{X_n}{X_m + X_n} \right)$$

Si todos los coeficientes de insumo $a_{i(m+n)}$ del sector consolidado, no son afectados por los cambios en los niveles de producción, X_m y X_n, las demandas del sector consolidado para la producción de otros elementos serán iguales a la suma de las demandas de sus componentes.

Las decisiones respecto a la clasificación, se ven ayudadas si se adquiere conocimiento de las divisiones naturales de las series productivas que resultan de una combinación de factores económicos, técnicos y de ubicación.

Hablando de la función de insumo en particular, podemos ver que a causa del supuesto de no sustitución[4], la función de producción general es de la siguiente manera:

$$X_j = f(X_{1j}, X_{2j}, \ldots\ldots, X_{nj}) \quad \text{——} \; (4.10)$$

y adquiere la forma de requisitos mínimos para cada insumo:

$$X_j = X_{ij} / a_{ij} \quad (i=1,2,\ldots,n) \quad \text{——} \; (4.11)$$

La ecuación (4.11) expresa que se necesita una cantidad mínima de cada insumo para una producción dada. Por consiguiente, se fija la producción por cualesquiera límite que se alcance primero. La estabilidad,o mejor dicho, el grado de estabilidad de las funciones de insumo depende, en parte, de la manera de como se seleccionan los sectores y, en parte de las propiedades del sistema productivo.

IV.6 Soluciones de Insumo-Producto.

a) Soluciones Especiales:

Una solución especial para una serie de ecuaciones simultaneas sólo se aplica a un conjunto particular de valores para los términos constantes que, en nuestro caso, son las demandas finales. Por el contrario, la solución para un sistema dado puede hacerse por diversos métodos. Los métodos más usuales de solución para las ecuaciones simultáneas, son el de sustitución y el de eliminación. Puede utilizarse el método de Gauss-Seidel (cuando hay que hacer una sola iteración) y el método de Iteraciones Sucesivas (cuando hay que hacer dos o más iteraciones).

b) Solución General: (forma matricial)

La solución general puede emplearse con cualquier conjunto de demandas finales mientras se mantengan constantes los coeficientes estructurales. Al igual que en las soluciones especiales, podemos emplear la solución para las ecuaciones por medio de sustitución o eliminación, mencionados anteriormente.

A continuación mostramos el planteamiento básico de la solución general en forma matricial:

Matriz:

$$A = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

Elementos

Los niveles de producción y las demandas finales en el sistema de Leontief, puede escribirse como vectores de columna:

$$X = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{vmatrix} \qquad Y = \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{vmatrix}$$

Los conjuntos de coeficientes de capital y trabajo o de cualquier insumo de mercancías, constituyen vectores de hilera:

$$A = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$$

Para expresar el modelo de insumo-producto de la ecuación — (4.5) se necesitan dos matrices diagonales:

a) Matriz Unitaria:

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Matriz de coeficientes de importación:

$$M = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{vmatrix}$$

En el análisis de insumo-producto tenemos frecuentemente que hacer la multiplicación de una matriz por un vector de columna, - por ejemplo, el producto, el producto de la matriz tecnológica y- el vector de niveles de producción, es el vector de demandas in - termedias:

$$AX = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3) \\ (a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3) \\ (a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{vmatrix} \quad = W$$

Expresando los modelos de insumo-producto en términos de ma triz nos queda de la siguiente forma:

$$X_1 - (a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3) = Y_1$$
$$X_2 - (a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3) = Y_2$$
$$X_3 - (a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3) = Y_3$$

En forma de matriz, resulta:

$$X - AX = Y$$

Para efectuar la resta indicada podemos multiplicar X por la matriz unitaria, ya que IX = X. Lo que da:

$$IX - AX = (I - A)X = Y$$

que equivale a:

$$\begin{vmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & (1-a_{33}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{vmatrix}$$

La matriz (I - A) se llama matriz de Leontief, tiene la propiedad de que todos los elementos en la diagonal son positivos, mientras que los que están fuera de ésta son negativos o cero.

Cuando se agregan las importaciones al sistema, tenemos:

$$(1 + m_i)X_i - \sum_j a_{ij} X_j = Y_i \quad (i=1...n)$$

En forma de matriz, esta ecuación se escribe:

$$(I + M - A)X = Y$$

Para encontrar la solución general, expresada en la ecuación (4.8), necesitamos resolver X en una ecuación $aX = Y$, dividiendose dicha ecuación entre "a", lo que equivale a multiplicar por su recíproca: $X = (1/a)Y = a^{-1} Y$. La correspondiente operación en matrices para hallar 1/A se llama inversión de matriz, y el resultado constituye la matriz recíproca o inversa, A^{-1}. La inversa de A se define como la matriz que cuando se multiplica por A da la matriz unitaria, I. Por lo tanto, $AA^{-1} = I$. La inversa se define sólo para matrices cuadradas.

A continuación se muestra el desarrollo, basado en la definición de la inversa a la solución general del sistema de insumo-producto.

$$X = (I-A)^{-1}Y \quad ó \quad \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{vmatrix}$$

Donde:

t_{ij} = A los elementos de la matríz inversa (recíproca).

T = Matríz resultante.

En el sistema más general que incluye a las importaciones - inducidas, nos queda:

$$T = (I + M - A)^{-1}$$

En el capítulo 7, se verán todas las aplicaciones enuncia - das en este capítulo.

N O T A S

(1) En los libros "Linear Programming and Economic Analysis" - de Dorfman, Samuelson y Solow, capítulos 11 y 12; y "Ingreso Nacional" de Ruggles, Richard, podemos encontrar un estudio formal de las técnicas para el análisis del ingreso-nacional.

(2) En los libros "Historia de las Doctrinas Económicas" de -- Charles, Gide y Rist; y "Enseñanzas Básicas de los Grandes Economistas" de W. McConnel, John, podemos encontrar una - explicación detallada de los modelos de equilibrio general de Walras y Pareto.

(3) En el apéndice, que se encuentra al final de este capítulo se encuentra una explicación más amplia de lo que es una - matriz de transacciones.

B I B L I O G R A F I A

1. Aggregation in the Input-Output Model, Balderston, J y Whitin, T.; Economic Activity Analysis, 1954

2. Linear Programming and Economic Analysis, Doffman, Samuelson. and Solow; Mc Graw-Hill Company, New York, 1958

3. Problems of classification and Aggregation, on Leontief and - Others, Holzman, M; Studies in the Structure of the American Economy, Oxford University Press, Nuew York, 1953

4. Economía Interindustrial, Chenery, Hollis, y Clark, Paul; -- F.C.E., 1980

A P E N D I C E

CUADRO DE INSUMO-PRODUCTO

SISTEMA DE CUENTAS INTERINDUSTRIALES

		SECTORES QUE COMPRAN									
		USO INTERMEDIO		USO FINAL						OFERTA	
		SECTOR 1....J....N	Uso total Intermedio	Inversión	Consumo	Gobierno	Exportación	Uso total final	Uso total = oferta total	Importaciones	Producción
Sector Productor	1	$X_{11}...X_{1j}...X_{1n}$	W_1	I_1	C_1	G_1	E_1	Y_1	Z_1	M_1	X_1
		PARTE IV		PARTE I							
	i	$X_{i1}...X_{ij}...X_{in}$	W_i	I_i	C_i	G_i	E_i	Y_i	Z_i	M_i	X_i
	n	$X_{n1}...X_{nj}...X_{nn}$	W_n	I_n	C_n	G_n	E_n	Y_n	Z_n	M_n	X_n
Insumos totales producidos		U_1 U_j U_n									
Insumos producidos. (VALOR AGREGADO)		V_1 V_j V_n		V_I	V_c	V_g	V_e		V	V	
		PARTE II		PARTE III							
Producción total:		X_1 X_j X_n		I	C	G	E	Y	Z	M	X

FUENTE: Chenery y Clark. "Interindustry Economics." Wiley. 1959. pág. 16.

Fig. (1)

ESTRUCTURA DE UN CUADRO INSUMO-PRODUCTO.

compras / ventas	Sectores 1 .....N	Consumidores finales	
Sectores 1 ..... n	IV Demanda Intermedia Insumos	I Demanda final	Producción Bruta
	II Valor agregado	III A j u s t e s .	
	Producción Bruta		

Fig. (2)

3.- LOS COEFICIENTES TECNICOS.

La cantidad X_{ij} necesaria del sector i absorbida por el sector j para producir una unidad de producción bruta del sector j, se representa mediante el símbolo a_{ij} y se denomina coeficiente técnico; es una relación funcional entre insumos y producción bruta de carácter lineal, es decir, que los insumos de cada sector tendrán que variar en la misma proporción en que se modifique la producción bruta de ese sector.- Los coeficientes técnicos quedarán representados según los - símbolos utilizados por medio de la fórmula

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j} \qquad (1)$$

En consecuencia, los coeficientes técnicos se obtienen como el cociente de dividir cada insumo de un sector entre el valor bruto de la producción de ese sector. En otras palabras, un coeficiente técnico representa el monto de las- compras que tiene que efectuar un sector j a otro sector i,- para producir una unidad. "Si, por ejemplo, el sector j se- dedica a la producción de acero y el i a la de carbón de piedra, entonces el coeficiente técnico a_{ij} indica cuántas toneladas de carbón son necesarias producir una tonelada de ace-

MATRIZ DE LA ECONOMIA ITALIANA.

Sectores Productores	Sectores Compradores S	A	B	I	Uso intermedio total (W_i).	Uso final (Y_i)	Uso total (Z_i)
Servicios (S)	20	25	15	80	140	60	200
Agricultura (A)	0	25	0	120	145	105	250
Industria básica (B)	0	25	45	40	110	40	150
Otras Industrias (I)	0	0	0	80	80	320	400
Compras totales (U_j)	20	75	60	320	475		
Insumos Primarios (V_j)	180	175	90	80		525	
Producto total (X_j)	200	250	150	400			1 000

FUENTE: Chenery y Clark, "Interindustry Economics", Wiley, 1959, pág. 14.

Fig. (3)

ro" (3).

Los coeficientes técnicos de producción pueden obtenerse también por métodos de ingeniería, esto es, con conocimientos de los procesos tecnológicos de manufactura del producto dado. "En los países socialistas los coeficientes técnicos de producción se utilizan en la planeación y en el manejo de producción; se denominan normas técnicas y están determinadas ya sea estadísticamente o por métodos de ingeniería" (4).

Para nuestro ejemplo de la economía de Italia, los coeficientes técnicos del sector industria básica (B) serían:

$$a_{13} = \frac{15}{150} = 0.1$$

$$a_{23} = \frac{0}{150} = 0.0$$

$$a_{33} = \frac{45}{150} = 0.3$$

$$a_{43} = \frac{0}{150} = 0.0$$

Si ordenamos la serie completa de los coeficientes técnicos, correspondientes a todos los sectores que integran la economía, según una tabla rectangular, tendremos lo que - se ha convenido en llamar "matriz de coeficientes técnicos".

MATRIZ DE COEFICIENTES TECNICOS.

	Sector Servi-cios(S)	Sector Agricul tura(A)	Sector I. Bási ca (B)	Sector O. Ind. (T)
Sector Servicios (S)	0.1	0.1	0.1	0.2
Sector Agricultura (A)	0.0	0.1	0.0	0.3
Sector Ind. Básicas (B)	0.0	0.1	0.3	0.1
Sector O. Industrias (T)	0.0	0.0	0.0	0.2

Los coeficientes técnicos para nuestro cuadro de in- sumo-producto de la Fig. (1), donde la economía nacional fue dividida en n sectores productivos, serían:

MATRIZ DE COEFICIENTES TECNICOS

compras / ventas	Sector $_1$	Sector j	...	Sector $_n$
Sector 1	$a_{11} = \frac{X_{11}}{X_1}$	$a_{1j} = \frac{X_{1j}}{X_j}$	...	$a_{1n} = \frac{X_{1n}}{X_n}$
Sector i	$a_{i1} = \frac{X_{i1}}{X_1}$	$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$	...	$a_{in} = \frac{X_{in}}{X_n}$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
Sector n	$a_{n1} = \frac{X_{n1}}{X_1}$	$a_{nj} = \frac{X_{nj}}{X_j}$	...	$a_{nn} = \frac{X_{nn}}{X_n}$

En la práctica, las matrices de coeficientes técnicos suelen calcularse a partir de cuadros de insumo-producto valorados, en cualquier caso, los coeficientes técnicos deben ser considerados como ratios entre dos cantidades medidas en unidades físicas.

Obsérvese que los coeficientes técnicos reflejan la estructura de costos de cada industria y, en consecuencia dependen de los insumos y la producción bruta de cada sector.

<u>Análisis Matemático</u>.- De acuerdo con las definiciones precedentes, el equilibrio entre la producción bruta y el conjunto de los insumos correspondientes a cada sector, tal como aparece en nuestros ejemplos, puede ser definido por medio del siguiente sistema de n ecuaciones, ya que el número de ecuaciones que es preciso resolver es siempre igual al número de sectores en que la economía ha sido dividida.

$$
\begin{aligned}
(X_1 - X_{11}) - X_2 - \quad \ldots \quad - X_{1n} &= Y_1 \\
- X_{21} + (X_2 - X_{22}) - \quad \ldots \quad - X_{2n} &= Y_2 \qquad (2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
- X_{n1} - X_{n2} - \quad \ldots \quad + (X_n - X_{nn}) &= Y_n
\end{aligned}
$$

Si sustituímos en las ecuaciones (2) el conjunto de-los insumos de los diversos sectores productivos por sus equivalentes según la relación (1), obtendremos n ecuaciones de equilibrio entre las producciones brutas de todos los sectores, y la lista de bienes finales

$$(1 - a_{11}) X_1 - a_{12} X_2 - \dots a_{1n} X_n = Y_1$$

$$- a_{21} X_1 + (1 - a_{22}) X_2 - \dots - a_{2n} X_n = Y_2 \qquad (3)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$- a_{n1} X_1 - a_{n2} X_2 - \dots + (1 - a_{nn}) X_n = Y_n$$

Si se suponen conocidos los coeficientes técnicos y se admite una hipótesis cualquiera sobre las demandas finales, el sistema de ecuaciones (3) tiene solución; lo que quiere decir que pueden hallarse los valores de las producciones brutas de cada sector necesarios para satisfacer esas demandas finales, calculadas aquellas, mediante la utilización de la matriz de coeficientes técnicos se determinarían todas las transacciones intersectoriales.

Teóricamente, resolvemos así el problema; establecida una demanda final, podemos cuantificar las producciones brutas de cada sector.

Pero desde el punto de vista práctico, en la forma antes descrita no habría posibilidades de operar puesto que el número de ecuaciones que es preciso resolver es igual al número de sectores en que la economía ha sido dividida, ya que resultaría ser muy laborioso aún para un número relativamente discreto de sectores e incluso irrealizable para un nuevo sistema de ecuaciones que exigiría un supuesto diferente sobre las demandas finales.

Volviendo a las ecuaciones (3) y tomando en cuenta que la demanda final es un sector autónomo en cierto sentido, podríamos expresar las producciones brutas en forma explícita, esto se puede hacer mediante la operación matemática de invertir la matriz de coeficientes técnicos, con lo que se llegaría finalmente al siguiente conjunto de ecuaciones.

$$X_1 = A_{11} Y_1 + A_{12} Y_2 + \dots + A_{1n} Y_1$$

$$X_2 = A_{21} Y_1 + A_{22} Y_2 + \dots + A_{2n} Y_2 \qquad (4)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$X_n = A_{n1} Y_1 + A_{n2} Y_2 + \dots + A_{nn} Y_n$$

El lenguaje matemático, la matriz

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{matrix}$$

formadapor las constantes A_{ij} que aparecen en los segundos - miembros de las ecuaciones (4), se conoce como la inversa de la matriz.

$$\begin{matrix} (1 - a_{11}) & - a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & - a_{n2} & \dots & (1-a_{nn}) \end{matrix}$$

Formada por las constantes a_{ij} que aparecen en los primeros miembros de las ecuaciones (3). Esta matriz se conoce con el nombre de "Matriz de Leontief" (5).

A las constantes A_{ij} se le designa como "coeficientes de requisitos directos e indirectos por unidad de demanda final".

Conocidos estos coeficientes estamos en posibilidad de resolver el sistema de ecuaciones (4) tantas veces como grupos de demandas finales sustituyamos.. Fijada una variación de la demanda final, podríamos cuantificar la producción bruta que sería necesario alcanzar en cada sector para satisfacer esa demanda final. Calculadas las producciónes brutas se pódría a su vez mediante la matriz de coeficientes técnicos cuantificar las transacciones intersectoriales. Y así sucesivamente para cada variación de la demanda final. De aquí el porqué se les nombre coeficientes de requisitos directos e indirectos por unidad de demanda final.

A título de ejemplo, se presenta una matriz para tres sectores industriales, en donde se indican los flujos interindustriales, la demanda final y el valor agregado.

MATRIZ DE FLUJOS.

Industrias	I Carbón	II Electricidad	III Automóviles	Demanda final	Producción bruta
Carbón	0	20	5	25	50
Electricidad	20	0	10	10	40
Automóviles	0	0	0	50	50
Valor agregado	30	20	35	85	
Valor bruto de la producción	50	40	50		

Los coeficientes técnicos serán.

MATRIZ DE COEFICIENTES TECNICOS.

INDUSTRIAS	Sector I	Sector II	Sector III
Sector I	0.0	0.5	0.1
Sector II	0.4	0.0	0.2
Sector III	0.0	0.0	0.0

Si la matriz de los coeficientes técnicos le restamos la matriz unitaria I.

$$\left[I - A \right] = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 & -0.1 \\ -0.4 & 1.0 & -0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

la matriz inversa será.

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.625 & 0.25 \\ 0.50 & 1.250 & 0.30 \\ 0.00 & 0.000 & 1.00 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la inversa por el vector demanda final, obtendremos la producción bruta de cada sector del cuadro original.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.625 & 0.25 \\ 0.50 & 1.250 & 0.30 \\ 0.00 & 0.000 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Supongamos ahora una variación de la demanda final - de 5 unidades en cada uno de sus renglones.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.625 & 0.25 \\ 0.50 & 1.250 & 0.30 \\ 0.00 & 0.00 & 1.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60.625 \\ 50.250 \\ 55.000 \end{pmatrix}$$

Con base a los niveles de producción calculados, podemos obtener las transacciones interindustriales, usando la ecuación $X_{ij} = a_{ij} \; X_j$.

HIPOTESIS DE UN AUMENTO DE 5 UNIDADES EN LA DEMANDA FINAL

Sectores	I	II	III	Demanda final	Producción bruta
I	0.000	25.125	5.500	30	60.625
II	24.250	0.000	11.000	15	50.250
III	0.000	0.000	0.000	55	55.000
Valor agregado	36.375	25.125	38.500	100	
Producción bruta	60.625	50.250	55.000		

C A P I T U L O I I I .

LA MATRIZ DE INSUMO - PRODUCTO.

(EL CASO DE MEXICO)

México ha construído dos cuadros de insumo-producto. Uno para el año de 1950 y otro para el año de 1960. La elaboración de estos cuadros corrió a cargo del Banco de México, S. A., cuya publicación fue en el año de 1959 y 1967 respectivamente. Ambos cuadros proporcionan "datos necesarios tanto para elaborar un sistema de cuentas nacionales más completo y detallado que los anteriores, como para hacer proyecciones económicas y otras aportaciones de carácter econométrico de utilidad para realizar trabajos destinados a preparar los planes de desarrollo de la economía mexicana" (1).

"Las estimaciones de los cuadros de insumo-producto han permitido realizar una confronta general de las estadísticas económicas disponibles, porque en el ordenamiento de la información en forma matricial, o sea en cuadros de doble entrada, se han relacionado datos que muestran simultáneamente: a) la estructura de la oferta y la demanda de las mercancías y servicios; b) las interrelaciones entre las ramas de la actividad económica dedicadas a la producción de mercancías y servicios; c) la parte que de dicha producción, y de la importación, se destina al abastecimiento de la demanda final; y d) la composición y origen de los insumos en que se incurre para obtener la producción de cada rama de actividad, incluyendo los pagos a los factores que intervienen en la producción de referencia" (2).

Sendas publicaciones se desprendieron de los cuadros mencionados, denominadas "La Estructura Industrial de México" para cada año. La matriz insumo-producto de 1950 tuvo como principal fuente de información los datos obtenidos en los censos económicos de aquel año. En esta matriz, la economía nacional se dividió en 34 ramas productivas, de las cuales 10 correspondieron a las actividades primarias, 14 a la industria de transformación y 10 a los servicios. Se incluyeron además seis sectores de demanda final. Para la matriz insumo-producto de 1960, basada en los censos económicos de aquel año, se aprovecharon las experiencias obtenidas en la ejecución del trabajo antes mencionado; contiene modificaciones sustanciales en relación a la de 1950, pues si bien los sectores de demanda final son los mismos, la actividad económica nacional se dividió en 45 ramas productivas, de las cuales 7 corresponden a las actividades primarias, 28 a la industria de transformación y 10 a los servicios. Se -

adicionan además cuatro cuentas auxiliares. El incremento del número de sectores en la industria de tránsformación de la matríz de 1950, obedeció a la necesidad de hacer resaltar la importancia económica mostrada por algunas ramas industriales en el año de 1960.

Los cuadros A y B muestran la lista de los sectores que componen las matrices de insumo-producto de 1950 y 1960, respectivamente, incluídos los conceptos de demanda final y valor agregado.

El cuadro C muestra en forma conparativa la composición de la estructura de la industria de transformación adoptada en cada matriz. Como se podrá observar, "al diseñar la estructura de la matriz insumo-producto de 1960, se consideró conveniente exponer en forma más detallada las relaciones intersectoriales e interindustriales, para lo cual se subdividieron aquellos grupos o ramas industriales de relevante importancia económica, o que durante la última década acusaron un crecimiento vigoroso, o un alto grado de integración, o, finalmente, gran heterogèneidad en sus productos o en sus insumos". (3).

C U A D R O   A.

SECTORES QUE COMPONEN LA ESTRUCTURA
DE LA MATRIZ DE INSUMO – PRODUCTO DE 1950

SECTORES PRODUCTORES.

1 Agricultura
2 Ganadería
3 Silvicultura
4 Caza y Pesca
5 Extracción de minerales de metales no ferrosos
6 Extracción de minerales de hierro
7 Extracción de petróleo y gas natural
8 Otras industrias extractivas
9 Plantas metalúrgicas de metales no ferrosos
10 Refinación de petróleo y productos derivados del carbón
11 Industrias manufact. de prod. alimenticios, de bebidas y tabaco
12 Fabricación de textiles
13 Fabricación de calzado, prendas de vestir u otros artículos confeccionados con productos textiles.
14 Industrias de madera y corcho
15 Pastas de celulosa, papel y cartón y sus productos
16 Imprenta, editorial e industrias conexas
17 Industrias del cuero y prod. de cuero, exceptuando el calzado
18 Fabricación de productos de hule
19 Fabricación de substancias y productos químicos
20 Fabricación de productos minerales no metálicos
21 Siderurgia y fabricación de productos metálicos
22 Construcción de maquinaria
23 Construcción de equipo de transporte
24 Otras industrias de transformación
25 Construcción e instalaciones
26 Electricidad, incluyendo su distribución
27 Producción de películas cinematográficas
28 Transportes, almacenaje y comunicaciones
29 Comercio
30 Seguros a empresas
31 Alquileres de construcciones
33 Servicios de esparcimiento.
34 Otros servicios, agua, etc.

SECTORES DE DEMANDA FINAL

Consumo privado
Consumo de gobierno
Inversión en capital fijo de las empresas
Inversión en capital fijo del gobierno
Exportaciones

VALOR AGREGADO

Sueldos y salarios
Prestaciones sociales
Intereses
Reservas para amortización y depreciación
Impuestos
Utilidades.

CUADRO 8

SECTORES QUE COMPONEN LA ESTRUCTURA DE LA MATRIZ DE INSUMO / PRODUCTO DE 1960.

SECTORES PRODUCTORES

1 Agricultura
2 Ganadería
3 Silvicultura
4 Pesca y Caza
5 Explotación de minas metálicas
6 Explotación de minerales no metálicos (excluye petróleo)
7 Extracción y refinación de petróleo.-Fabricación de productos derivados de carbón
8 Matanza de ganado y de aves.-Preparación y conserv. de carnes.-Fabricac. y tratam. productos lácteos.
9 Molienda de trigo de nixtamal.-Manufactura productos panadería y pastel.- Fabricación tortillas.
10 Manufactura de otros productos alimenticios
11 Elaboración de bebidas
12 Manufacturas de productos de tabaco
13 Hilado, tejido y acabado de textiles.-de fibras blandas, excepto los tejidos de punto.
14 Otras industrias textiles.
15 Fabricación de calzado - prendas de vestir - Tejidos de punto.
16 Industrias de madera y corcho
17 Fabricación de papel y productos de papel
18 Imprenta, editoriales e industrias conexas
19 Industrias del cuero y productos de cuero (excluye calzado y otras prendas de vestir)
20 Fabricación y reparación de productos de hule
21 Fabricación de productos químicos básicos orgánicos e inorgánicos
22 Fabricac. fibras sintéticas, resinas - Materiales plásticos, Elastómeros - hule sintético.
23 Fabricación y mezcla de abonos, fertilizantes e insecticidas
24 Producción de jabones y detergentes y otros productos para lavado y aseo
25 Fabricación de productos farmacéuticos medicinales
26 Fabricación de perfumes, cosméticos y otros artículos de tocador
27 Otras industrias químicas
28 Fabricación de productos minerales no metálicos (excepto de petróleo y del carbón)
29 Industrias metálicas básicas - Fundiciones de fierro, acero y otros metales
30 Fabricación y reparación de productos metálicos (excepto maquinaria y equipo de transporte)
31 Construcción y reparación de maquinaria (excepto maquinaria y equipo eléctrico)
32 Construcción y reparación de maquinaria, aparatos, accesorios y artículos eléctricos.
33 Construcción y reparación de equipo y material de transporte (excepto construcción de vehículos automóviles)
34 Construcción de vehículos automóviles.
35 Industrias manufactureras diversas (excluye producción de películas cinematográficas)
36 Construcción e instalaciones
37 Electricidad
38 Producción, distribución y exhibición de películas cinematográficas y otros servicios de esparcimiento.
39 Transportes
40 Comunicaciones
41 Comercio
42 Alquileres de inmuebles
43 Servicios de preparación de alimentos y bebidas y alojamientos temporales.
44 Servicios de créditos, seguros y finanzas
45 Otros servicios, inclusive los no mencionados en el catálogo.

SECTORES DE DEMANDA FINAL.

Consumo privado
Consumo del gobierno
Inversión en capital fijo de las empresas
Inversión en capital fijo del Gobierno
Cambio en inventarios
Exportaciones

VALOR AGREGADO.

Sueldos, salarios y prestaciones sociales
Ingresos de capital y mixtos
Asignaciones por consumo de capital (Depreciación)
Impuestos indirectos menos subsidios

[illegible]

[illegible] y [illegible]
Mantenimiento y reparación
[illegible]
No asignados.

CUADRO C

ESTRUCTURA DE LA INDUSTRIA DE TRANSFORMACION, POR RAMAS O SECTORES PRODUCTIVOS, EN LAS MATRICES INSUMO-PRODUCTO DE 1950 y 1960.

Matriz insumo-producto 1950 Rama	Matriz insumo-producto 1960 Rama
11 Industrias manufactureras de productos alimenticios, de bebidas y de tabaco.	8 Matanza de ganado y de aves; preparación y conservación de carnes; fabricación y tratamiento de productos lácteos. 9 Molienda de trigo y de nixtamal; manufactura de productos de panadería y pastelería; fabricación de tortillas. 10 Manufactura de otros productos alimenticios. 11 Elaboración de bebidas. 12 Manufactura de productos de tabaco.
12 Fabricación de textiles.	13 Hilado, tejido y acabado de textiles de fibras blandas, excepto los tejidos de punto.* 14 Otras industrias textiles.
13 Fabricación de calzado, prendas de vestir e otros artículos confeccionados con productos textiles.	15 Fabricación de calzado, prendas de vestir, tejidos de punto, etc.*
14 Industrias de la madera y del corcho.	16 Industrias de la madera y el corcho, incluye la fabricación y reparación de muebles de madera y sus accesorios.
15 Pastas de celulosa; papel y cartón y sus productos.	17 Fabricación de papel y productos de papel.
16 Imprenta, editorial e industrias conexas.	18 Imprentas, editoriales e industrias conexas.
17 Industrias del cuero y productos de cuero, exceptuando el calzado.	19 Industrias del cuero y productos del cuero, excluye calzado y otras prendas de vestir.
18 Fabricación de productos de hule.	20 Fabricación y reparación de productos de hule.
19 Fabricación de substancias y productos químicos.	21 Fabricación de productos químicos básicos orgánicos e inorgánicos. 22 Fabricación de fibras sintéticas, resinas, materiales plásticos, elastómeros y hule sintético. 23 Fabricación y mezcla de abonos, fertilizantes e insecticidas. 24 Producción de jabones, detergentes y otros productos para lavado y aseo. 25 Fabricación de productos farmacéuticos medicinales. 26 Fabricación de perfumes, cosméticos y otros artículos de tocador. 27 Otras industrias químicas.*
20 Fabricación de productos minerales no metálicos, exceptuando los derivados del petróleo y del carbón.	28 Fabricación de productos minerales no metálicos, excepto los del petróleo y del carbón.
21 Siderurgia y fabricación de productos metálicos, excepto maquinaria y equipo de transporte.	29 Industrias metálicas básicas; fundiciones de fierro, bronce y otros metales. 30 Fabricación y reparación de productos metálicos, excepto maquinaria y equipo de transporte.*
22 Construcción de maquinaria.	31 Construcción y reparación de maquinaria, exceptuando la maquinaria eléctrica.* 32 Construcción y reparación de maquinaria, aparatos, accesorios y artículos eléctricos.
23 Construcción de equipo de transporte.	33 Construcción y reparación de equipo y material de transporte, excepto la construcción de vehículos automóviles. 34 Construcción de vehículos automóviles.
24 Otras industrias de transformación.	35 Industrias manufactureras diversas, excluye la producción de películas cinematográficas.*

"De acuerdo con este criterio, se encontró que la importancia económica del grupo o rama 11, Productos alimenticios, bebidas y tabaco, de la matriz de 1950 es muy significativa, dado que en dicho año representó el 38.6% (7 131 millones) del producto total de la industria de transformación, cifra que para 1960 alcanzó el 39.5% (29 455 millones). Por otra parte es evidente la diversidad de los productos de las industrias agrupadas en esa rama, así como la naturaleza de los insumos y los procesos de manufactura. Así pués, la rama 11 se desglosó en cinco ramas industriales cuyo detalle figura en el cuadro 8" (4).

Se podrá concluir que los sectores 11, 12, 19, 21, 22 y 23 de la matriz insumo-producto de 1950, fueron desglosados en varios sectores en la matriz de 1960, de acuerdo con los criterios antes mencionados.

Recalcando un poco más y a riesgo de incurrir en repeticiones, diremos para el cuadro insumo-producto de 1960 que además de los usos que tiene para fines de planificación económica, constituye una confronta de los datos disponibles en el país. Así pués, el cuadro muestra el destino de la producción de cada rama industrial de acuerdo con sus posibles usos (finales como exportación, consumo o formación -

interna bruta de capital; y usos intermedios cuando la producción de una rama se utiliza por otra rama para su elaboración posterior), y, por otra parte, presenta las materias primas y mercancias necesarios para la producción de cada rama. "Debido a ésto fue posible localizar y superar, en parte, mediante estimaciones o sustitución por cifras alternativas, las principales deficiencias de la información estadística disponible, cuando las cifras originales utilizadas dieron lugar a incongruencias en el proceso de integración del cuadro" (5).

Como fuentes de información para 1960, "se dispuso de los censos económicos levantados por la Dirección General de Estadística (censos agrícola, ganadero y ejidal, censo industrial, censo comercial, censo de transportes y censo de servicios), se consultaron las estadísticas continuas de la Dirección General de Estadística, los anuarios estadísticos de comercio exterior, muestras de ingresos y gastos y cuentas públicas, así como toda la información de que se pudo disponer, tanto de fuentes oficiales como de privadas" (6).

El banco de México, S. A., además de los cuadros de insumo-producto de 1950 y 1960 de la economía nacional, ha elaborado matrices para varios estados y regiones del país,-

correspondientes a diversos años. La siguiente es una relación de tales estudios.

No.	DATOS DE	ESTADOS Y REGIONES	NO. DE MATRICES PARCIALES CONSOLIDADAS EN LAS CORRESPONDIENTES ESTATALES Y REGIONALES.
1.-	1960	OAXACA	7
2.-	"	SINALOA	4
3.-	1962	COMARCA LAGUNERA	4
4.-	1963	CAMPECHE	2
5.-	"	COAHUILA	5
6.-	"	CUENCA DEL PAPALOAPAN	6
7.-	"	NAYARIT	3
8.-	"	QUINTANA ROO	2
9.-	"	VERACRUZ	12
10.-	1964	CHIHUAHUA	6
11.-	1965	BAJA CALIFORNIA	4
12.-	"	GUERRERO	4
13.-	"	NUEVO LEON	4
14.-	"	SONORA	11
15.-	"	TAMAULIPAS	6

13 correspondieron a entidades completas, y 2 a las regiones de Comarca Lagunera y Cuenca del Papaloapan. Se agregaron las matrices parciales correspondientes a las zonas en que fueron divididos estados y regiones, para obtener las matrices estatales y regionales.

La economía en estas matrices está dividida en 32 sectores, de los cuales 8 pertenecen a las actividades primarias, 14 a la industria de transformación y 10 a las actividades terciarias. El cuadro D presentá una lista de los sectores que componen dichas matrices. (CUADRO D)

C U A D R O D.

SECTORES QUE COMPONEN LA ESTRUCTURA DE LAS MATRICES ESTATALES Y REGIONALES.

<u>SECTORES PRODUCTORES</u>

1.- Agricultura
2.- Ganadería
3.- Silvicultura
4.- Caza y Pesca
5.- Extracción de mineral de hierro
6.- Otras industrias extractivas
7.- Extracción de metales ferrosos
8.- Extracción y refinación de petróleo
9.- Industrias, manufacturas de prod. alimenticios, de bebidas y tabaco
10.- Fabricación de textiles
11.- Fabricación de calzado y prendas de vestir
12.- Industrias de madera y el corcho
13.- Papel, cartón y sus productos
14.- Imprenta, editorial e industrias conexas
15.- Industrias del cuero y productos de cuero, excepto calzado
16.- Fabricación de productos de hule
17.- Fabricación de substancias y productos químicos
18.- Fabricación de productos minerales no metálicos
19.- Siderurgia y fabricación de productos metálicos
20.- Construcción de maquinaria y equipo eléctrico
21.- Construcción y reparación de equipo de transporte.
22.- Otras industrias de transformación
23.- Construcción e instalaciones
24.- Electricidad, incluyendo su distribución
25.- Producción de películas cinematográficas
26.- Transportes, almacenaje y comunicaciones
27.- Márgenes de comercio
28.- Alquiler de construcciones
29.- Hoteles, restaurantes, cafés
30.- Otros servicios públicos y privados
32.- Banca, seguros, fianzas, etc.

<u>SECTORES DE DEMANDA FINAL</u>

<u>EXTERIOR:</u>

1.- propio estado
2.- estados vecinos
3.- resto del país
4.- extranjero

<u>RESIDENTES:</u>

1.- Consumo privado
2.- Inversión de las empresas
3.- Consumo e inversión del gobierno

<u>VALOR AGREGADO</u>

Reservas para amortización y depreciación
Sueldos, salarios y prestaciones sociales
Ingresos mixtos y prestaciones sociales
Impuestos al gobierno

Lo esporádico de los estudios que corresponden a las matrices estatales y regionales revela una falta de elaboraciones periódicas a nivel regional. La periodicidad de tales estudios redundará en beneficio de la economía nacional, ya que enriquecerán las informaciones estadísticas sobre la producción sectorial a nivel nacional y estatal, y lo que es más importante, propiciarán la realización de los planes de desarrollo económico que ineludiblemente repercutirá en beneficio de todos los mexicanos.

CUADRO 8.9. *Cuadro de insumo-producto de la economía norteamericana, 1947*
($a_{ij} \times 10^4$
Los totales de columna y de hilera en 10 millones de dólares)

		Coeficientes (a_{ij}), columnas 1–29	Demanda intermedia total (30)	Demanda final: Exportaciones (31)	Demanda final: Interna (32)	Demanda final: Total (33)	Demanda total (34)	
1	Vegetales	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
2	Astilleros	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2
3	Carne y derivados	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3
4	Alimentos enlatados	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4
5	Pesca	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5
6	Harinas	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6
7	Transporte	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7
8	Industria n.e.c.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	8
9	Equipo de transporte	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	9
10	Productos de caucho	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	10
11	Textiles	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	11
12	Maquinaria	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	12
13	Hierro y acero	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	13
14	Prod. minerales no metálicos	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	14
15	Productos de madera	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15
16	Productos químicos	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	16
17	Impresión y publicación	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	17
18	Agricultura y silvicultura	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	18
19	Minerales no metálicos	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	19
20	Destilados del petróleo	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	20
21	Metales no ferrosos	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	21
22	Minería de metales	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	22
23	Productos del carbón	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	23
24	Comercio	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	24
25	Papel y derivados	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	25
26	Energía eléctrica	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	26
27	Minería carbonífera	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	27
28	Servicios	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	28
29	Petróleo y gas natural	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	29
30	Total intersectorial (U_j)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
31	Producción total (X_j)	[illegible]						
32	Importaciones (M_j)	[illegible]						
33	Oferta total (Z_j)	[illegible]						

Cuadro B-12. *Inversa de la matriz de Leontief para la economía norteamericana, 1947*

	1 Vestidos	2 Astilleros	3 Cuero	4 Alimentos enlatados	5 Pesca	6 Harinas	7 Transportes	8 Industria n.e.e.	9 Equipo de transporte	10 Caucho	11 Textiles	12 Maquinaria y equipo eléctrico	13 Hierro y acero	14 Productos minerales no metálicos
1 Vestido	1.1853	0.0031	0.0505	0.0069	0.0300	0.0005	0.0005	0.0021	0.0023	0.0050	0.0071	0.0001	0.0001	0.0000
2 Astilleros	0.0002	1.5159	0.0005	0.0005	0.0266	0.0048	0.0030	0.0023	0.0017	0.0003	0.0023	0.0003	0.0046	0.0006
3 Cuero	0.0736	0.0003	1.2782	0.0020	0.0005	0.0003	0.0003	0.0013	0.0020	0.0005	0.0005	0.0013	0.0002	0.0001
4 Alimentos enlatados	0.0151	0.0020	0.1811	1.3779	0.0017	0.0692	0.0037	0.0071	0.0033	0.0190	0.0130	0.0326	0.0019	0.0029
5 Pesca	0.0002	0.0021	0.0006	0.0562	1.0085	0.0005	0.0001	0.0027	0.0021	0.0004	0.0002	0.0005	0.0001	0.0001
6 Harinas	0.0189	0.0008	0.0146	0.0592	0.0076	1.1149	0.0004	0.0020	0.0012	0.0071	0.0255	0.0007	0.0007	0.0009
7 Transportes	0.0271	0.0278	0.0280	0.0437	0.0147	0.0672	1.0619	0.0227	0.0454	0.0372	0.0402	0.0137	0.0452	0.0727
8 Industria n.e.e.	0.0229	0.2134	0.0020	0.0015	0.0227	0.0532	0.0064	1.0421	0.3159	0.0410	0.0712	0.0160	0.0041	0.0034
9 Equipo de transporte	0.0015	0.0721	0.0050	0.0060	0.0032	0.0073	0.0177	0.0027	1.2734	0.0127	0.0074	0.0056	0.0071	0.0037
10 Caucho	0.0017	0.0051	0.0021	0.0002	0.0007	0.0037	0.0073	0.0058	0.0432	1.0174	0.0034	0.0056	0.0016	0.0076
11 Textiles	0.0043	0.0209	0.0092	0.0591	0.0015	0.0221	0.0039	0.0540	0.0214	0.2037	1.2379	0.0075	0.0026	0.0135
12 Maquinaria y equipo eléctrico	0.0052	0.3227	0.0037	0.0047	0.0051	0.0052	0.0116	0.0216	0.1645	0.0131	0.0074	1.3376	0.0137	0.0059
13 Hierro y acero	0.0076	0.1563	0.0172	0.0324	0.0149	0.0154	0.0129	0.0324	0.2624	0.0226	0.0149	0.2195	1.4600	0.0138
14 Prod. minerales no metálicos	0.0015	0.0043	0.0013	0.0105	0.0008	0.0027	0.0015	0.0075	0.0271	0.0043	0.0020	0.0140	0.0154	1.0381
15 Productos de madera	0.0067	0.0754	0.0157	0.0105	0.0016	0.0062	0.0024	0.0172	0.0139	0.0141	0.0077	0.0188	0.0074	0.0128
16 Productos químicos	0.0674	0.0722	0.0029	0.0725	0.0178	0.1419	0.0101	0.0541	0.0617	0.2024	0.1276	0.0363	0.0738	0.0438
17 Impresión	0.0018	0.0029	0.0041	0.0070	0.0013	0.0063	0.0070	0.0037	0.0029	0.0037	0.0041	0.0040	0.0040	0.0030
18 Agricultura y silvicultura	0.1557	0.0112	0.1319	0.6442	0.0248	0.7644	0.0048	0.0203	0.0164	0.0555	0.3350	0.0057	0.0054	0.0116
19 Minerales no metálicos	0.0012	0.0010	0.0016	0.0022	0.0098	0.0073	0.0005	0.0081	0.0031	0.0032	0.0020	0.0071	0.0749	0.0481
20 Derivados del petróleo	0.0032	0.0093	0.0075	0.0131	0.0525	0.0178	0.0427	0.0050	0.0129	0.0153	0.0133	0.0093	0.0239	0.0334
21 Metales no ferrosos	0.0038	0.0750	0.0042	0.0062	0.0039	0.0049	0.0047	0.0079	0.0506	0.0077	0.0042	0.1068	0.0109	0.0085
22 Minería de metales	0.0008	0.0053	0.0012	0.0017	0.0002	0.0014	0.0013	0.0082	0.0244	0.0025	0.0012	0.0161	0.0422	0.0040
23 Productos del carbón	0.0019	0.0023	0.0036	0.0014	0.0033	0.0523	0.0027	0.0253	0.0172	0.0014	0.0025	0.0143	0.0705	0.0201
24 Comercio	0.0578	0.0279	0.0356	0.0474	0.0156	0.0203	0.0215	0.0419	0.0419	0.0449	0.0556	0.0109	0.0500	0.0311
25 Papel	0.0153	0.0256	0.0417	0.0227	0.0033	0.0103	0.0048	0.0227	0.0317	0.0270	0.0181	0.0158	0.0185	0.1079
26 Luz y energía eléctrica	0.0091	0.0129	0.0077	0.0077	0.0025	0.0094	0.0034	0.0133	0.0136	0.0162	0.0152	0.0122	0.0197	0.0205
27 Minería carbonífera	0.0043	0.0052	0.0038	0.0212	0.0013	0.0034	0.0223	0.0051	0.0089	0.0101	0.0073	0.0073	0.0297	0.0373
28 Servicios	0.0529	0.0512	0.0721	0.1870	0.0459	0.1148	0.0678	0.0862	0.0478	0.0507	0.0673	0.0476	0.0592	0.0419
29 Petróleo crudo	0.0049	0.0058	0.0745	0.0090	0.0151	0.0105	0.0266	0.0043	0.0082	0.0036	0.0078	0.0734	0.0153	0.0307
Prop. de import. (m_j)	0.037	0.058	0.010	0.046	0.110	0.062	0.012	0.034	0.004	0.001	0.015	0.007	0.062	0.010
Prop. de prod. interna $\left(\frac{1}{1+m_j}\right)$	0.963	0.945	0.990	0.956	0.901	0.939	0.988	0.967	0.996	0.999	0.985	0.994	0.939	0.991

	15 Productos de madera	16 Productos químicos	17 Impresión	18 Agricultura y silvicultura	19 Minerales no metálicos	20 Derivados del petróleo	21 Metales no ferrosos	22 Minería de metales	23 Productos del carbón	24 Comercio	25 Papel	26 Luz y energía eléctrica	27 Minería carbonífera	28 Servicios	29 Petróleo crudo
1 Vestido	0.0010	0.0021	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0004	0.0001	0.0001	0.0000	0.0003	0.0020
2 Astilleros	0.0005	0.0003	0.0002	0.0004	0.0001	0.0006	0.0004	0.0001	0.0006	0.0005	0.0001	0.0005	0.0001	0.0001	0.0009
3 Cuero	0.0025	0.0006	0.0013	0.0002	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001	0.0004	0.0004	0.0059	0.0002	0.0001	0.0010	0.0009
4 Alimentos enlatados	0.0025	0.0701	0.0027	0.0039	0.0020	0.0025	0.0028	0.0015	0.0015	0.0023	0.0101	0.0008	0.0017	0.0015	0.0003
5 Pesca	0.0001	0.0017	0.0001	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009
6 Harinas	0.0035	0.0121	0.0004	0.0016	0.0004	0.0005	0.0005	0.0004	0.0003	0.0004	0.0017	0.0001	0.0004	0.0007	0.0001
7 Transportes	0.0482	0.0122	0.0145	0.0443	0.0166	0.0432	0.0425	0.0142	0.1161	0.0130	0.0337	0.0144	0.0041	0.0137	0.0019
8 Industria n.e.e.	0.0040	0.0068	0.0073	0.0027	0.0013	0.0012	0.0033	0.0007	0.0015	0.0001	0.0229	0.0009	0.0007	0.0112	0.0008
9 Equipo de transporte	0.0022	0.0040	0.0029	0.0062	0.0173	0.0029	0.0050	0.0025	0.0041	0.0151	0.0028	0.0048	0.0010	0.0190	0.0014
10 Caucho	0.0027	0.0030	0.0014	0.0063	0.0023	0.0039	0.0012	0.0038	0.0013	0.0020	0.0020	0.0007	0.0003	0.0024	0.0008
11 Textiles	0.0232	0.0131	0.0096	0.0096	0.0015	0.0010	0.0018	0.0011	0.0010	0.0005	0.0176	0.0012	0.0010	0.0033	0.0009
12 Maquinaria y equipo eléctrico	0.0121	0.0048	0.0094	0.0015	0.0050	0.0726	0.0290	0.0162	0.0054	0.0065	0.0037	0.0082	0.0139	0.0109	0.0017
13 Hierro y acero	0.0439	0.0290	0.0050	0.0107	0.0326	0.0219	0.0504	0.0762	0.0127	0.0144	0.0135	0.0112	0.0105	0.0083	0.0008
14 Prod. minerales no metálicos	0.0101	0.0111	0.0019	0.0019	0.0025	0.0019	0.0084	0.0037	0.0067	0.0018	0.1031	0.0041	0.0009	0.0012	0.0001
15 Productos de madera	1.2736	0.0105	0.0134	0.0078	0.0031	0.0071	0.0093	0.0166	0.0057	0.0037	0.0677	0.0035	0.0752	0.0042	0.0002
16 Productos químicos	0.0227	1.2666	0.0134	0.0203	0.0295	0.0384	0.0120	0.0267	0.0160	0.0067	0.0519	0.0057	0.0213	0.0133	0.0066
17 Impresión	0.0032	0.0054	1.1391	0.0055	0.0031	0.0034	0.0045	0.0011	0.0021	0.0139	0.0065	0.0015	0.0012	0.0500	0.0010
18 Agricultura y silvicultura	0.0561	0.1045	0.0097	1.4165	0.0054	0.0067	0.0062	0.0030	0.0024	0.0015	0.0215	0.0017	0.0010	0.0078	0.0012
19 Minerales no metálicos	0.0250	0.0150	0.0012	0.0023	1.0126	0.0015	0.0025	0.0005	0.0007	0.0004	0.0044	0.0004	0.0009	0.0009	0.0091
20 Derivados del petróleo	0.0136	0.0735	0.0057	0.0258	0.0121	1.3098	0.0164	0.0095	0.0423	0.0015	0.0174	0.0182	0.0054	0.0042	0.0018
21 Metales no ferrosos	0.0050	0.0264	0.0065	0.0026	0.0032	0.0025	1.4301	0.0046	0.0025	0.0037	0.0032	0.0022	0.0033	0.0030	0.0004
22 Minería de metales	0.0017	0.0084	0.0010	0.0007	0.0041	0.0010	0.1420	1.0012	0.0067	0.0038	0.0011	0.0025	0.0011	0.0004	0.0001
23 Productos del carbón	0.0101	0.0120	0.0021	0.0015	0.0032	0.0076	0.0113	0.0022	1.2914	0.0021	0.0342	0.0135	0.0017	0.0017	0.0002
24 Comercio	0.0266	0.0460	0.0230	0.0357	0.0156	0.0062	0.1628	0.0151	0.0119	1.0203	0.0552	0.0218	0.0103	0.0163	0.0017
25 Papel	0.0064	0.0233	0.2793	0.0060	0.0205	0.0051	0.0106	0.0023	0.0027	0.0285	1.4945	0.0027	0.0020	0.0166	0.0008
26 Luz y energía eléctrica	0.0279	0.0722	0.0092	0.0054	0.0273	0.0076	0.0241	0.0796	0.0161	0.0177	0.0138	1.1034	0.0713	0.0110	0.0028
27 Minería carbonífera	0.0056	0.0131	0.0040	0.0024	0.0074	0.0049	0.0092	0.0073	0.2931	0.0040	0.0124	0.0067	1.0076	0.0032	0.0004
28 Servicios	0.0062	0.0603	0.0418	0.1137	0.0624	0.0434	0.0529	0.0094	0.0329	0.1717	0.0473	0.0276	0.0239	1.1236	0.0120
30 Petróleo crudo	0.0095	0.0195	0.0024	0.0119	0.0112	0.0214	0.0159	0.0056	0.1044	0.0044	0.0103	0.0169	0.0032	0.0025	1.0118
Prop. de import. (m_j)	0.027	0.049	0.001	0.018	0.158	0.017	0.046	0.392	0.004	0.002	0.089	0.031	0.001	0.001	0.059
Prop. de prod. interna $\left(\frac{1}{1+m_j}\right)$	0.974	0.954	0.999	0.982	0.870	0.983	0.940	0.718	0.996	0.998	0.918	0.998	1.000	0.999	0.947

Cuadro 8.6. Cuadro de insumo-producto de la economía japonesa

($a_{ij} \times 10^4$; Los totales de columna y de hilera en 100 millones de yen)

Coeficientes (a_{ij})

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	Vestidos	[illegible]			[illegible]		[illegible]	[illegible]								[illegible]
2	Astilleros					[illegible]		[illegible]								
3	Cuero y derivados	[illegible]		[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]			
4	Alimentos enlatados				[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]							[illegible]	
5	Pesca				[illegible]											
6	Harinas				[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]			[illegible]			[illegible]	
7	Transporte	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	Industria n.e.c.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]	[illegible]		[illegible]
9	Equipo de transporte							[illegible]		[illegible]						
10	Productos de caucho	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	Textiles	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	Maquinaria	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	Hierro y acero		[illegible]		[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	Prod. minerales no metálicos		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	Productos de madera	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	Productos químicos	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
17	Impresión y publicación	[illegible]	[illegible]		[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]			
18	Agricultura y silvicultura	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]
19	Minerales no metálicos				[illegible]			[illegible]	[illegible]		[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	
20	Derivados del petróleo	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
21	Metales no ferrosos	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
22	Minería de metales												[illegible]	[illegible]	[illegible]	
23	Productos del carbón	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
24	Comercio	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
25	Papel y derivados	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
26	Energía eléctrica	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
27	Minería carbonífera	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
28	Servicios	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
29	Petróleo y gas natural							[illegible]							[illegible]	
30	Total interindustrial (U_j)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
31	Producción total (X_j)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
32	Importaciones (M_j)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
33	Oferta total (Z_j)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Coeficientes (a_{ij}) (columnas 16–29); Demanda intermedia total (30); Demanda final: Exportaciones (31), Interna (32), Total (33); Demanda total (34)

	16–29	30	31	32	33	34
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
17	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
19	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
21	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
22	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
23	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
24	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
25	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
26	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
27	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
28	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
29	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
30	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
31	[illegible]					
32	[illegible]					
33	[illegible]					

Cuadro 5-10. *Inversa de la matriz de Leontief para la economía japonesa, 1951*

	1 Vestidos	2 Astilleros	3 Cuero	4 Alimentos enlatados	5 Pesca	6 Harinas	7 Transporte	8 Industria n.e.c.	9 Equipo de transporte	10 Caucho	11 Textiles	12 Maquinaria y equipo eléctrico	13 Hierro y acero	14 Productos minerales no metálicos
1 Vestidos	1.0545	0.0025	0.0014	0.0010	0.0003	0.0040	0.0001	0.0005	0.0006	0.0006	0.0011	[illegible]	[illegible]	0.0009
2 Astilleros	0.0002	1.0003	[illegible]	0.0003	0.0052	0.0002	0.0094	0.0103	0.0002	0.0043	0.0002	[illegible]	[illegible]	0.0005
3 Cuero	0.0016	0.0055	1.2715	0.0101	0.0003	0.0305	0.0005	0.0007	0.0733	0.0106	0.0002	[illegible]	[illegible]	0.0001
4 Alimentos enlatados	0.0016	0.0037	0.0036	1.1541	0.0396	0.0046	0.0063	0.0035	0.0032	0.0072	0.0472	[illegible]	[illegible]	0.0036
5 Pesca	0.0030	0.0019	0.0015	0.0112	1.0011	0.0012	0.0009	0.0020	0.0010	0.0057	0.0050	[illegible]	[illegible]	0.0017
6 Harinas	0.0073	0.0014	0.0062	0.1041	0.0104	1.0020	0.0017	0.0038	0.0014	0.0049	0.0103	0.0012	0.0038	0.0016
7 Transporte	0.0169	0.0253	0.0422	0.0278	0.0104	0.0155	1.0219	0.0241	0.0299	0.0207	0.0162	0.0271	0.0299	0.0519
8 Industria n.e.c.	0.0167	0.1026	0.0725	0.0297	0.0056	0.0104	0.0010	1.0574	0.0011	0.0095	0.0308	0.0512	0.0065	0.0064
9 Equipo de transporte	0.0011	0.0718	0.0011	0.0009	0.0045	0.0006	0.0125	0.0210	1.1132	0.0019	0.0018	0.0010	0.0045	0.0015
10 Caucho	0.0107	0.0052	0.0074	0.0033	[illegible]	[illegible]	0.0185	0.0049	0.0043	1.0266	0.0137	[illegible]	[illegible]	0.0290
11 Textiles	1.0265	0.0302	0.0056	0.0053	0.1307	0.0145	0.0244	0.0523	0.0353	0.3853	1.0059	0.0161	[illegible]	0.0130
12 Maquinaria y equipo eléctrico	0.0117	0.2176	0.0437	0.0022	0.0028	0.0023	0.0134	0.0076	0.0729	0.0047	0.0109	0.3617	0.0138	0.0057
13 Hierro y acero	0.0204	0.0941	0.0131	0.0415	0.0254	0.0065	0.0040	0.0766	0.0185	0.0172	0.0258	0.7192	1.2544	0.0053
14 Prod. minerales no metálicos	0.0027	0.0157	0.0023	0.0124	0.0063	0.0318	0.0047	0.0110	0.0226	0.0030	0.0031	0.0193	0.0213	1.0464
15 Productos de madera	0.0015	0.0447	0.0043	0.0585	0.0045	0.0018	0.0151	0.0330	0.0247	0.0047	0.0142	0.0217	[illegible]	[illegible]
16 Productos químicos	0.1038	0.0320	0.0395	0.0576	0.0291	0.0022	0.0260	0.1552	0.0356	0.2570	0.2153	0.0354	0.0543	0.0706
17 Impresión	0.0035	0.0015	0.0314	0.0022	0.0010	0.0028	0.0042	0.0145	0.0016	0.0020	0.0023	0.0017	0.0021	0.0019
18 Agricultura y silvicultura	0.2190	0.0361	0.5338	0.2305	0.0270	0.6215	0.0263	0.0530	0.0226	0.1154	0.4259	0.0235	[illegible]	0.1458
19 Minerales no metálicos	0.0016	0.0076	0.0007	0.0017	0.0007	0.0066	0.0012	0.0045	0.0026	0.0030	0.0016	0.0302	0.0040	0.0037
20 Derivados del petróleo	0.0055	0.0122	0.0043	0.0033	0.0165	0.0022	0.0309	0.0070	0.0123	0.0073	0.0254	0.0081	0.0133	0.0108
21 Metales no ferrosos	0.0110	0.0301	0.0045	0.0056	0.0116	0.0013	0.0178	0.0554	0.0950	0.0100	0.0120	0.2461	0.0424	0.0130
22 Minería de metales	0.0133	0.0231	0.0014	0.0097	0.0021	0.0012	0.0045	0.0171	0.0256	0.0040	0.0036	0.0137	0.5621	0.0052
23 Productos del carbón	0.0064	0.0382	0.0035	0.0049	0.0071	0.0025	0.0075	0.0117	0.0358	0.0065	0.0077	0.0416	0.1165	0.0164
24 Comercio	0.0070	0.0464	0.0066	0.0318	0.0246	0.0403	0.0231	0.0425	0.0581	0.0558	0.0435	0.0496	0.0292	0.0274
25 Papel	0.0305	0.0112	0.0063	0.0293	0.0073	0.0102	0.0116	0.0772	0.0132	0.0258	0.0210	0.0255	0.0561	0.0218
26 Luz y energía eléctrica	0.0139	0.0102	0.0076	0.0065	0.0021	0.0063	0.0165	0.0151	0.0379	0.0143	0.0127	0.0192	0.0217	0.0307
27 Minería carbonífera	0.0219	0.0420	0.0456	0.0216	0.0059	0.0068	0.0723	0.0123	0.0389	0.0232	0.0261	0.0465	[illegible]	0.1126
28 Servicios	0.0945	0.0726	0.0702	0.0555	0.0410	0.0357	0.0659	0.0228	0.0450	0.0298	0.0559	0.0543	0.0467	0.0186
29 Petróleo crudo	0.0322	0.0073	0.0018	0.0014	0.0190	0.0008	0.0209	0.0026	0.0030	0.0041	0.0022	0.0016	0.0145	0.0041
Prop. de import. (m_j)	0.143	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	0.122	0.044	0.031	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Prop. de prod. interna $\left(\frac{1}{1+m_j}\right)$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Cuadro 5-10. *Inversa de la matriz de Leontief para la economía japonesa, 1951 (Continuación)*

	15 Productos de madera	16 Productos químicos	17 Impresión	18 Agricultura y silvicultura	19 Minerales no metálicos	20 Derivados del petróleo	21 Metales no ferrosos	22 Minería de metales	23 Productos del carbón	24 Comercio	25 Papel	26 Luz y energía eléctrica	27 Minería carbonífera	28 Servicios	29 Petróleo crudo
1 Vestidos	0.0045	0.0657	0.0035	0.0029	0.0046	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0003	0.0007	0.0020	0.0004	0.0015	0.0000
2 Astilleros	0.0003	0.0508	0.0003	0.0001	0.0002	0.0001	0.0003	0.0001	0.0008	0.0001	0.0003	0.0004	0.0002	[illegible]	0.0000
3 Cuero	0.0001	0.0002	0.0001	0.0003	0.0001	0.0000	0.0001	0.0000	0.0011	0.0001	0.0001	0.0003	0.0001	0.0005	0.0000
4 Alimentos enlatados	0.0031	0.0271	0.0064	0.0028	0.0017	0.0015	0.0020	0.0020	0.0025	0.0045	0.0037	0.0027	0.0021	0.0409	0.0003
5 Pesca	0.0013	0.0191	0.0021	0.0017	0.0007	0.0003	0.0008	0.0009	0.0009	0.0006	0.0015	0.0092	0.0008	0.0049	0.0001
6 Harinas	0.0050	0.0073	0.0030	0.0104	0.0008	0.0006	0.0009	0.0005	0.0010	0.0016	0.0033	0.0015	0.0011	0.0140	0.0002
7 Transporte	0.0534	0.0388	0.0293	0.0071	0.0151	0.0054	0.0312	0.0090	0.0755	0.0129	0.0513	0.0414	0.0227	0.0124	0.0026
8 Industria n.e.c.	0.0011	0.0006	0.0008	0.0002	0.0003	0.0002	0.0463	0.0003	0.0004	0.0029	0.0004	0.0006	0.0005	0.0051	0.0001
9 Equipo de transporte	0.0021	0.0013	0.0017	0.0003	0.0003	0.0004	0.0007	0.0005	0.0014	0.0013	0.0013	0.0014	0.0007	0.0107	0.0002
10 Caucho	0.0041	0.0093	0.0076	0.0049	0.0109	0.0023	0.0044	0.0152	0.0061	0.0069	0.0093	0.0063	0.0074	0.0042	0.0002
11 Textiles	0.0732	0.0212	0.0240	0.0104	0.0163	0.0037	0.0255	0.0095	0.0077	0.0047	0.0403	0.0059	0.0073	0.0119	0.0004
12 Maquinaria y equipo eléctrico	0.0236	0.0494	0.0104	0.0079	0.0030	0.0012	0.0026	0.0026	0.0123	0.0030	0.0042	0.0172	0.0192	0.0222	0.0007
13 Hierro y acero	0.0133	0.0418	0.0762	0.0094	0.1467	0.0279	0.0339	0.1056	0.1274	0.0246	0.0410	0.0874	0.1214	0.0352	0.0384
14 Prod. minerales no metálicos	0.0051	0.0124	0.0053	0.0030	0.0044	0.0019	0.0074	0.0028	0.0052	0.0003	0.0130	0.0054	0.0041	0.0037	0.0004
15 Productos de madera	1.1432	0.0064	0.0052	0.0016	0.0121	0.0032	0.0036	0.0029	0.0091	0.0037	0.0110	0.0278	0.0232	0.0017	0.0003
16 Productos químicos	0.0590	1.3166	0.0716	0.0738	0.0352	0.0256	0.0259	0.0330	0.0333	0.0079	0.0707	0.0231	0.0233	0.0319	0.0010
17 Impresión	0.0012	0.0018	1.0072	0.0007	0.0009	0.0016	0.0012	0.0009	0.0012	0.0026	0.0141	0.0023	0.0012	0.0105	0.0005
18 Agricultura y silvicultura	0.5309	0.1028	0.0342	1.0400	0.0297	0.0063	0.0173	0.0194	0.0300	0.0126	0.1213	0.0327	0.0431	0.0375	0.0078
19 Minerales no metálicos	0.0009	0.0062	0.0041	0.0006	1.0007	0.0010	0.0025	0.0036	0.0009	0.0003	0.0103	0.0007	0.0096	0.0036	0.0001
20 Derivados del petróleo	0.0040	0.0062	0.0050	0.0019	0.0203	1.0347	0.0066	0.0046	0.0084	0.0015	0.0036	0.0074	0.0034	0.0034	0.0018
21 Metales no ferrosos	0.0073	0.0325	0.0111	0.0033	0.0214	0.0022	1.3538	0.0230	0.0090	0.0023	0.0129	0.0509	0.0096	0.0101	0.0012
22 Minería de metales	0.0317	0.0184	0.0025	0.0013	0.0062	0.0015	0.1367	1.0052	0.0045	0.0003	0.0031	0.0074	0.0143	0.0022	0.0011
23 Productos del carbón	0.0030	0.0403	0.0065	0.0027	0.0191	0.0031	0.0140	0.0007	1.2531	0.0023	0.0052	0.0060	0.0073	0.0033	0.0021
24 Comercio	0.0203	0.0456	0.0510	0.0186	0.0706	0.0075	0.0252	0.0145	0.0310	1.0109	0.0354	0.0295	0.0152	0.0747	0.0027
25 Papel	0.0101	0.0935	0.5539	0.0073	0.0037	0.0067	0.0077	0.0033	0.0073	0.0232	1.5490	0.0054	0.0041	0.0166	0.0009
26 Luz y energía eléctrica	0.0176	0.0320	0.0171	0.0037	0.0174	0.0061	0.0707	0.0172	0.0292	0.0019	0.0274	1.0259	0.0335	0.0076	0.0033
27 Minería carbonífera	0.0148	0.0722	0.0282	0.0015	0.0347	0.0036	0.0271	0.0130	0.3904	0.0048	0.0301	0.2737	1.0327	0.0111	0.0030
28 Servicios	0.0305	0.0913	0.1377	0.0249	0.0333	0.0135	0.0403	0.0293	0.0458	0.1168	0.0633	0.0356	0.0424	1.0803	0.0124
29 Petróleo crudo	0.0017	0.0027	0.0024	0.0008	0.0093	0.4232	0.0040	0.0019	0.0045	0.0006	0.0023	0.0031	0.0073	0.0014	1.0186
Prop. de import. (m_j)	0.004	0.043	0.009	0.311	0.121	0.241	0.035	0.544	0	0	0.032	0	0.094	0	[illegible]
Prop. de prod. interna $\left(\frac{1}{1+m_j}\right)$	0.996	0.958	0.992	0.763	0.892	0.806	0.966	[illegible]	1.000	1.000	0.969	1.000	0.913	1.000	0.109

CUADRO 8-7. *Cuadro de insumo-producto de la economía italiana, 1950*

($a_{ij} \times 10^4$. Los totales de columna y de hilera en 100 millones de liras)

Coeficientes (a_{ij})

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	Vestidos	881										8				1
2	Astilleros															
3	Cuero y derivados	1	6	3301					8	22	4		3			4
4	Alimentos enlatados			1230	353		5		1		15	10		3		32
5	Pesca				41											
6	Hulleras			1	1150							2				
7	Transportes	22	101	21	43	32	69	125	25	88	36	47	63	142	373	376
8	Industria n.e.p.	41	135	82		302			251	261	114	3	116	11		213
9	Equipo de transporte									104						
10	Productos de caucho	31	37	33				343	21	388	1171	4	37	1		1
11	Textiles	1881	43	196		1331			80	84	1184	4318	10		12	99
12	Maquinaria		2201						61	650			1131	2		4
13	Hierro y acero	1	2156	22	45				2141	1503	101		1307	2231	81	81
14	Prod. minerales no metálicos	2	160	6	4				126	133			136	101	659	150
15	Productos de madera	1	299	111	19				117	150		3	61	15		2499
16	Productos químicos	247	91	663	74			2	229	174	1773	689	117	101	416	186
17	Impresión y publicación															
18	Agricultura y selvicultura	69		35	2417		2722	109	26	1	23	1440	1	4	170	3087
19	Minerales no metálicos		4	4	33				11	2	23	4	6	41	698	1
20	Derivados del petróleo	20	25	18	43	491	3	1471	121	153	116	63	109	134	318	38
21	Metales no ferrosos	2	579	3	4				277	824	9		619	195	13	10
22	Minería de metales													67	3	
23	Productos del carbón	4	43	6	8			13	37	54	133	4	62	303	173	4
24	Comercio	273	171	251	230	101	408	240	63	181	226	352	176	62	322	331
25	Papel y derivados	2		31	9				32		42	7			339	14
26	Energía eléctrica	1	191	14	13		49	373	79	107	93	85	86	315	350	31
27	Minería carbonífera	6	32	11	87		8	337	20	6	26	41	18	108	107	4
28	Servicios	311	90	171	374	160	211	263	162	60	139	114	65	77	212	210
29	Petróleo y gas natural				1			21	10	1	7	4	6	16	19	
30	Total interindustrial (U_j)	1741	337	1836	13737	37	7013	1133	1741	7000	603	6572	1705	3363	616	1023
31	Producción total (X_j)	2023	430	1741	20113	243	7392	1374	3788	1848	837	11516	2917	3040	1676	1428
32	Importaciones (M_j)	31	150	32	1151	1	36	3	261	73	123	595	338	815	82	107
33	Oferta total (Z_j)	2700	580	1743	21347	216	7432	1371	4033	3097	1053	12112	1153	3357	1758	1535

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30 Demanda intermedia total	31 Demanda final: Exportaciones	32 Demanda final: Interna	33 Demanda final: Total	34 Demanda total
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	60	231	2587	5559	3766
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6	183	417	660	663
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	561	25	1182	1518	1753
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3604	621	15219	15841	31347
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	84	0	159	159	243
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4604	252	2600	2851	7452
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	749	113	5413	5526	6274
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	617	212	2369	2530	5072
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	594	313	3492	3728	3923
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	418	72	627	637	1056
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	8861	1758	3403	5161	13113
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1601	601	5592	2522	4123
13	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4033	137	503	640	4693
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	443	55	1258	1317	1759
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	665	69	804	873	1538
16	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	8106	331	1381	3117	7036
17	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	13	631	644	644
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	23150	1066	7944	6510	30149
19	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	410	172	339	491	611
20	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1494	96	334	433	1928
21	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1193	27	6	33	1275
22	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	239	41	0	41	280
23	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	423	8	399	397	845
24	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2418	648	18031	19576	22114
25	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	778	27	229	255	1033
26	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1286	10	921	925	2212
27	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	811	0	−13	−13	858
28	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5363	0	6354	1564	6372
29	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	612	3	0	0	643
30	6126	498	6824	37	7284	635	38	409	1226	650	141	83	745	8	81332	7652	63835	58487	151693
31	8678	830	31284	749	1716	1612	249	867	10114	985	3201	113	6395	43					
32	630	8	1650	61	313	271	30	18	0	65	19	764	2	444					
33	7306	844	33100	817	1879	1374	298	885	19141	1033	2330	537	6323	444					

CUADRO 8-11. *Inversa de la matriz de Leontief para la economía italiana, 1950*

	1 Vestido	2 Astilleros	3 Cuero	4 Alimentos enlatados	5 Pesca	6 Harinas	7 Transporte	8 Industria n.e.c.	9 Equipo de transporte	10 Caucho	11 Textiles	12 Maquinaria y equipo eléctrico	13 Hierro y acero	14 Productos minerales no metálicos
1 Vestido	1.0276	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000
2 Astilleros		1.0000												
3 Cuero	0.0011	0.0008	1.4414	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0013	0.0034	0.0007	0.0000	0.0004	0.0000	0.0002
4 Alimentos enlatados	0.0069	0.0017	0.1896	1.0442	0.0018	0.0068	0.0022	0.0023	0.0019	0.0103	0.0267	0.0314	0.0024	0.0034
5 Pesca	0.0000	0.0000	0.0007	0.0041	1.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6 Harinas	0.0069	0.0007	0.0251	0.1659	0.0014	1.0352	0.0007	0.0006	0.0060	0.0028	0.0097	0.0026	0.0022	0.0011
7 Transporte	0.0080	0.0169	0.0505	0.0071	0.0071	0.0117	1.0139	0.0176	0.0193	0.0097	0.0115	0.0135	0.0060	0.0316
8 Industria n.e.c.	0.0037	0.0148	0.0052	0.0004	0.0010	0.0002	0.0005	1.0336	0.0413	0.0131	0.0013	0.0150	0.0023	0.0008
9 Equipo de transporte									1.0520					
10 Caucho	0.0022	0.0035	0.0064	0.0063	0.0003	0.0002	0.0031	0.0044	0.0567	1.9163	0.0015	0.0068	0.0016	0.0012
11 Textiles	0.2753	0.0073	0.0025	0.0016	0.2229	0.0027	0.0073	0.0102	0.0205	0.2340	1.7425	0.0034	0.0010	0.0062
12 Maquinaria y equipo eléctrico	0.0000	0.2484	0.0001	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0009	0.0818	0.0301	0.0030	1.1512	0.0003	0.0000
13 Hierro y acero	0.0028	0.4055	0.0159	0.0084	0.0129	0.0002	0.0007	0.3210	0.3927	0.0343	0.0038	0.2017	1.9130	0.0103
14 Prod. minerales no metálicos	0.0013	0.0214	0.0025	0.0009	0.0007	0.0004	0.0003	0.0176	0.0318	0.0071	0.0312	0.0185	0.0193	1.0722
15 Productos de madera	0.0004	0.0410	0.0216	0.0027	0.0000	0.0003	0.0001	0.0150	0.0299	0.0011	0.0008	0.0130	0.0032	0.0018
16 Productos químicos	0.1424	0.0316	0.1394	0.0020	0.0281	0.0144	0.0139	0.0693	0.0593	0.2410	0.1556	0.0338	0.0300	0.0820
17 Impresión														
18 Agricultura y silvicultura	0.2026	0.0160	0.3236	0.0060	0.0103	1.0298	0.0107	0.0181	0.0180	0.0503	0.3441	0.1070	0.0964	0.0239
19 Minerales no metálicos	0.0059	0.0049	0.0027	0.0041	0.0008	0.0011	0.0037	0.0037	0.0352	0.0375	0.0341	0.0342	0.0100	0.1006
20 Derivados del petróleo	0.0127	0.0206	0.0079	0.0083	0.0145	0.0051	0.1595	0.0337	0.0334	0.0333	0.0174	0.0182	0.0319	0.0413
21 Metales no ferrosos	0.0032	0.0818	0.0045	0.0013	0.0019	0.0006	0.0004	0.1142	0.0369	0.0075	0.0324	0.0810	0.0433	0.0033
22 Minería de metales	0.0017	0.0107	0.0015	0.0005	0.0007	0.0004	0.0005	0.0341	0.0174	0.0031	0.0331	0.0103	0.0104	0.0015
23 Productos del carbón	0.0232	0.0184	0.0023	0.0016	0.0311	0.0378	0.0325	0.0170	0.0161	0.0184	0.0335	0.0140	0.0184	0.0216
24 Comercio	0.0540	0.0224	0.0379	0.0480	0.0173	0.0544	0.0270	0.0144	0.0278	0.0350	0.0324	0.0153	0.0145	0.0281
25 Papel	0.0055	0.0015	0.0059	0.0013	0.0307	0.0009	0.0239	0.0018	0.0329	0.0112	0.0231	0.0012	0.0014	0.0408
26 Luz y energía eléctrica	0.0123	0.0381	0.0294	0.0035	0.0045	0.0057	0.0103	0.0274	0.0358	0.0342	0.0231	0.0350	0.0347	0.0378
27 Minería carbonífera	0.0077	0.0181	0.0093	0.0013	0.0027	0.0013	0.0412	0.0130	0.0145	0.0133	0.0109	0.0117	0.0036	0.0435
28 Servicios	0.0263	0.0180	0.0435	0.0493	0.0239	0.0497	0.0341	0.0435	0.0210	0.0338	0.0373	0.0140	0.0203	0.0314
29 Petróleo crudo	0.0043	0.0014	0.0036	0.0031	0.0135	0.0020	0.0493	0.0092	0.0105	0.0132	0.0063	0.0074	0.0132	0.0151
Prop. de import. (m_j)	0.010	0.349	0.013	0.055	0.003	0.005	0	0.079	0.019	0.144	0.024	0.130	0.102	0.049
Prop. de prod. interna $\left(\frac{1}{1+m_j}\right)$	0.990	0.741	0.985	0.948	0.997	0.995	1.000	0.927	0.981	0.892	0.976	0.880	0.902	0.953

CUADRO 8-11. *Inversa de la matriz de Leontief para la economía italiana, 1950* (Continuación)

	15 Productos de madera	16 Productos químicos	17 Impresión	18 Agricultura y silvicultura	19 Minerales no metálicos	20 Derivados del petróleo	21 Metales no ferrosos	22 Minería de metales	23 Productos del carbón	24 Comercio	25 Papel	26 Luz y energía eléctrica	27 Minería carbonífera	28 Servicios	29 Petróleo crudo
1 Vestido	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0003	0.0000
2 Astilleros															
3 Cuero	0.0008	0.0001	0.0029	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0006	0.0000
4 Alimentos enlatados	0.0025	0.0121	0.0086	0.0094	0.0025	0.0100	0.0026	0.0036	0.0007	0.0008	0.0155	0.0002	0.0003	0.0070	0.0000
5 Pesca	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000
6 Harinas	0.0117	0.0070	0.0024	0.0290	0.0004	0.0018	0.0006	0.0010	0.0002	0.0002	0.0048	0.0001	0.0002	0.0020	0.0000
7 Transporte	0.0311	0.0182	0.0119	0.0029	0.0011	0.0036	0.0254	0.0030	0.0510	0.0007	0.0140	0.0017	0.0010	0.0014	0.0001
8 Industria n.e.c.	0.0271	0.0083	0.0042	0.0002	0.0002	0.0002	0.0021	0.0008	0.0001	0.0001	0.0046	0.0000	0.0001	0.0002	0.0000
9 Equipo de transporte												0.0002	0.0000	0.0201	
10 Caucho	0.0014	0.0005	0.0035	0.0001	0.0009	0.0001	0.0012	0.0001	0.0019	0.0000	0.0087	0.0002	0.0000	0.0001	0.0000
11 Textiles	0.0078	0.0150	0.0463	0.0005	0.0002	0.0004	0.0010	0.0021	0.0010	0.0011	0.0816	0.0001	0.0001	0.0056	0.0000
12 Maquinaria y equipo eléctrico	0.0009	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
13 Hierro y acero	0.0107	0.0050	0.0136	0.0002	0.0001	0.0002	0.0191	0.0005	0.0001	0.0001	0.0043	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000
14 Prod. minerales no metálicos	0.0244	0.0032	0.0022	0.0034	0.0001	0.0002	0.0064	0.0007	0.0002	0.0012	0.0056	0.0002	0.0001	0.0024	0.0000
15 Productos de madera	1.3237	0.0022	0.0181	0.0003	0.0001	0.0001	0.0035	0.0002	0.0002	0.0020	0.0146	0.0000	0.0000	0.0003	0.0000
16 Productos químicos	0.0333	1.4910	0.1959	0.0285	0.0249	0.0273	0.0780	0.1224	0.0141	0.0039	0.2224	0.0029	0.0083	0.0729	0.0003
17 Impresión			1.0000												
18 Agricultura y silvicultura	0.4300	0.0074	0.0504	1.1842	0.0036	0.0070	0.0090	0.0205	0.0034	0.0023	0.1145	0.0012	0.0040	0.0115	0.0000
19 Minerales no metálicos	0.0041	0.0280	0.0027	0.0012	1.0005	0.0009	0.0030	0.0023	0.0004	0.0003	0.0110	0.0001	0.0002	0.0007	0.0000
20 Derivados del petróleo	0.0132	0.0243	0.0254	0.0062	0.0098	1.0157	0.0253	0.0103	0.0137	0.0026	0.0260	0.0120	0.0027	0.1031	0.0015
21 Metales no ferrosos	0.0040	0.0366	0.0135	0.0037	0.0005	0.0005	1.2491	0.0022	0.0003	0.0001	0.0066	0.0000	0.0002	0.0004	0.0000
22 Minería de metales	0.0012	0.0171	0.0211	0.0004	0.0001	0.0003	0.1320	1.0014	0.0003	0.0001	0.0035	0.0003	0.0001	0.0003	0.0000
23 Productos del carbón	0.0039	0.0109	0.0056	0.0007	0.0030	0.0007	0.0105	0.0033	1.0606	0.0020	0.0078	0.0001	0.0004	0.0049	0.0001
24 Comercio	0.0446	0.0347	0.0299	0.0133	0.0031	0.0053	0.0058	0.0110	0.0412	1.0017	0.0306	0.0040	0.0015	0.0042	0.0001
25 Papel	0.0038	0.0101	0.4128	0.0005	0.0002	0.0002	0.0009	0.0000	0.0032	0.0030	1.0901	0.0001	0.0001	0.0050	0.0000
26 Luz y energía eléctrica	0.0102	0.0595	0.0339	0.0029	0.0074	0.0035	0.1007	0.0250	0.0125	0.0038	0.0354	1.0006	0.0071	0.0074	0.0052
27 Minería carbonífera	0.0054	0.0219	0.0114	0.0008	0.0015	0.0014	0.0120	0.0035	0.3677	0.0011	0.0213	0.0302	1.0049	0.0021	0.0002
28 Servicios	0.0497	0.0398	0.0378	0.0259	0.0015	0.0239	0.0117	0.0062	0.0101	0.0440	0.0731	0.0118	0.0020	1.0451	0.0011
29 Petróleo crudo	0.0043	0.0091	0.0058	0.0012	0.0021	0.3188	0.0078	0.0023	0.0098	0.0008	0.0036	0.0050	0.0028	0.0010	1.0089
Prop. de import. (m_j)	0.075	0.094	0.009	0.108	0.053	0.136	0.317	0.122	0.031	0	0.049	0.002	7.029		10.326
Prop. de prod. interna $\left(\frac{1}{1+m_j}\right)$	0.930	0.914	0.991	0.934	0.922	0.880	0.759	0.891	0.980	1.000	0.933	0.991	0.125		0.090

T E O R I A B A S I C A D E L A -
P R O G R A M A C I O N L I N E A L

V TEORIA BASICA DE LA PROGRAMACION LINEAL

V.1 Introducción.

La programación lineal es una aplicación de las técnicas matemáticas contemporaneas, su inicio data apenas de unos cuantos años y por tanto, existe poca literatura tanto matemática como económica sobre este tema. En torno a esta materia que se remonta al año de 1920, el Dr. George B. Dantzig publicó su primer informe sobre el método simplex en el año de 1947.

Los problemas de programación lineal tienen la siguiente estructura: a) Existe cierto objetivo a alcanzar, tal como un beneficio máximo, costo mínimo, o mínimo período de tiempo, del sistema que se estudia; y b) Hay un gran número de variables que deben manejarse simultaneamente.

Normalmente hay varias clases de variables en un problema, algunas de éstas salen del sistema (productos), mientras que otras son entradas (recursos).

De esta forma, la programación lineal tiende a asociarse con situaciones complejas, muchas variables que se interrelacionan, y objetivos competitivos junto con la optimización de algún criterio de efectividad del sistema. Un modelo de programación lineal puede establecer una relación con un problema dado, sólo si las relaciones algebraicas entre las variables son lineales o pueden aproximarse con precisión por medio de ecuaciones de primer orden.

El problema básico de la programación lineal es simplemente el hacer máximo o mínimo una función lineal de la forma:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots\dots + c_n x_n \quad \text{——} \; (5.1)$$

Ahora bien, si suponemos que las variables pueden tener cualquier valor, el problema es trivial, puesto que podemos hacer que cada variable que tenga un coeficiente positivo se haga tan grande como queramos y el valor de la función se hace arbitrariamente grande. O también mínimamente, si todos los coeficientes son positivos, podemos hacer que cada variable se haga nula y entonces el valor de la función se hace cero. En cualquier caso, el problema es trivial, ya que no existen restricciones en las variables.

Los problemas lineales pertenecen a una familia de procesos de series en cadena, en economía esto se llama proceso irreversible, es decir, que en un momento dado no es posible tratar de dividir el modelo así como añadir alguna variable adicional una vez iniciado nuestro proceso de cálculo, ya que sería necesario volver a replantear nuestro problema.

Se puede ver que en casi todos los casos, el contexto del problema no permite la asignación de valores negativos a las variables. Esto constituye un requisito formal en los problemas de programación lineal.

Se observará que el tratamiento de las desigualdades es diferente en la programación lineal que en muchas otras aplicaciones matemáticas, Ordinariamente, cuando no está impuesta la restricción de no negatividad, se añade a ambos tipos de restricción una variable de holgura para convertirla en una ecuación. Entonces todas las variables pueden ser positivas o negativas, y por lo tanto, la variable de holgura tome un valor, ya sea positivo o negativo, que pueda establecer la igualdad.

Una vez que las desigualdades que existen en las restricciones se han convertido en igualdades, el conjunto de restricciones se convertirá en una serie de ecuaciones lineales de n incógnitas.

Es factible tener sistemas de ecuaciones tales que no existan soluciones posibles. Ya que sólo pueden sustituirse en la función lineal las soluciones posibles, si éstas no existieran, la función no podría ser entonces optimizada.

Diremos simplemente, que el problema de programación lineal establecido de esa manera no tiene ninguna solución posible.

V.2 Problema General de la Programación Lineal.

El problema general de programación lineal consiste en encontrar un vector ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) que maximice o minimice la forma lineal, es decir, la función objetiva:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n$$

sujeta a las restricciones lineales:

$$x_j \geq 0 \qquad j=1,2,\ldots, n$$

y

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad (5.2) \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Donde las a_{ij}, b_i y a_j son constantes dadas y m n. Siempre se supondrá que estas ecuaciones serán multiplicadas por (-1) -- cuando sea necesario hacer todas las $b_i > 0$.

Una solución posible al problema de programación lineal, es un vector $X = (x_1, x_2, \ldots , x_n)$, el cual satisface las condiciones anteriores. Una solución posible básica, es una solución - posible con no más de mx_i positivas. Una solución básica no degenerada es una solución posible básica con exactamente mx_i positivas. Una solución posible mínima es una solución posible que también minimiza a la ecuación:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_m p_m = P_0$$

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots + x_m c_m = Z_0$$

donde:

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$; $x_i > 0$, $i=1,2,\ldots,m$

$P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, es el conjunto asociado de -- vectores.

c_i = Coeficientes de costo de la función objetivo.

Z_0 = Valor de la función.

V.3 Planteamiento General de la Programación Lineal.

Es importante hacer notar que no existen grupos de procedimientos o técnicas generales para que podemos aplicar y probar - las fórmulas de la programación lineal en un cierto problema dado. Cuando se analiza un problema nuevo y complejo dentro del -- marco teórico de la programación lineal, se hará por medio de --

una serie de procesos que se dan en cadena.

Nuestro primer paso hacía el desarollo de estos problemas, - consistiría en definir las variables del problema, así como determinar las interrelaciones entre estas variables, las restricciones resultantes y la función objetiva apropiada. Los problemas basados, ya sea en datos reales o en datos de pruebas, se resuelven utilizando un cierto modelo inicial, y las soluciones se comparan con los resultados esperados. Estos estudios sugerirán que deben- definirse e introducirse nuevas variables en el sistema, así como, las variables previamente definidas que deben ser eliminadas. También esto puede dar como resultado ciertos cambios en la función- objetiva y en sus restricciones, o una revaluación de los datos - de prueba, entonces se resuelve el problema con el nuevo planteamiento en forma similar al anterior. Este proceso para formular - un modelo correcto, continúa hasta convencerse de que el modelo - resultante se aproxima a la situación real en un grado aceptable.

Si al desarollar las restricciones en un problema dado se determina que ciertas de las relaciones no son lineales, se pueden- hacer las siguientes suposiciones:

a) Las expresiones que tienen esa dificultad son sustituidas por funciones lineales apropiadas.
b) Se redefine el problema, con el fín de encontrar el formato de programación lineal.
c) Usar otras técnicas para resolver el problema.

V.4 Problemas Interindustriales.

A manera de introducción, es importante tener en cuenta que- para la resolución de los modelos interregionales de programación lineal se debe tener un amplio conocimiento acerca del plantea —

miento básico en la construcción de un modelo de programación lineal.

Para poder expresar lo anteriormente dicho, se buscará como un primer paso para la obtención de los modelos interregionales, la aplicación del modelo más simple y en el cual se tratarán de explicar los conceptos de programación lineal, para que, una vez ya comprendidos y enfocados estos conceptos, podemos utilizarlos adecuadamente en nuestras definiciones del modelo interregional. el siguiente modelo que presentamos es del tipo interindustrial, y en el cual se análizará en su forma simplificada.

La primera aplicación de las técnicas de programación lineal, en el campo de la economía, fué en el área del análisis interindustrial o análisis de insumo-producto.

Consideremos una economía solamente de tres industrias básicas: ferrocarriles, aceros y carbón, y a una cuarta categoría para todas las industrias. Deseamos analizar las interrelaciones de estas industrias en términos de las ventas de una a otra y de otros elementos de su economía, durante un período de tiempo base, por ejemplo, un año. Este análisis puede fácilmente realizarse refiriéndonos a la tabla (B), de insumo-producto.

Cada elemento de la tabla representa una actividad total de ventas para cada industria, ocurrida durante el tiempo de período base. Por ejemplo, la primera fila de la tabla describe las ventas de la industria ferrocarrilera a cada una de las otras industrias. El primer elemento de la fila 1, representa las ventas totales de la industria ferrocarrilera a la industria ferrocarrilera (ventas intraindustriales); el segundo elemento describe las ventas totales de la industria ferrocarrilera a la industria del acero; el tercer elemento, las ventas totales a la industria del carbón; el cuarto elemento, las ventas totales a otras industrias, y el quinto elemento, las ventas totales de la industria ferrocarrilera, y es a lo que hemos llamado los consumidores de demanda final. En general, la demanda final consiste en aquellos elementos de la economía que consumen los diferentes artículos producidos, pero no contribuyen a su vez con productos de su propia fabricación. En la categoría de demanda final generalmente incluímos el comercio extranjero, las operaciones gubernamentales y las operaciones locales en forma particular. La producción total requerida por los segmentos de demanda final de la economía, recibe el nombre de lista de bienes. La suma de las ventas incluidas en estos cinco elementos, representa las ventas totales de la industria ferrocarrilera durante el período base. Podríamos repetir en forma similar para las otras tres filas de la tabla. Por columnas, observamos que cada elemento representa las compras totales de la industria a las otras industrias para sostener sus operaciones durante el período base.

TABLA DE INSUMO-PRODUCTO

	Ventas a FF.CC.		Ventas a Acero		Ventas a Carbón		Ventas a Otros		Ventas a FD		Total Ventas
Ventas a FF.CC.	Ventas a FF.CC.	+	FF.CC. a Acero	+	FF.CC. a Carbón	+	FF.CC. a Otros	+	FF.CC. a FD	=	Total ventas por FF.CC.
	x_{11}		x_{12}		x_{13}		x_{14}		v_1		x_1
Ventas por Acero	Acero a FF.CC.	+	Acero a Acero	+	Acero a Carbón	+	Acero a Otros	+	Acero a FD	=	Total ventas por Acero
	x_{21}		x_{22}		x_{23}		x_{24}		v_2		x_2
Ventas por Carbón	Carbón a FF.CC.	+	Carbón a Acero	+	Carbón a Carbón	+	Carbón a Otros	+	Carbón a FD	=	Total ventas por carbón
	x_{31}		x_{32}		x_{33}		x_{34}		v_3		x_3
Ventas por Otros	Otros a FF.CC.	+	Otros a Acero	+	Otros a Carbón	+	Otros a Otros	+	Otros a FD	=	Total ventas por Otros
	x_{41}		x_{42}		x_{43}		x_{44}		v_4		x_4

T A B L A (B)

A continuación definiremos las siguientes variables con el fín de poder construir el siguiente conjunto de ecuaciones lineales y con las cuales se establecen las interrelaciones de nuestra situación económica, tal como se muestra enseguida:

x_i = Producto total de la industria "i" durante el período base.

x_{ij} = Ventas totales de la industria "i" a la industria "j" durante el período base.

y_i = Cantidad de la demanda final, para la industria "i".

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_{11} - x_{12} - x_{13} - x_{14} &= y_1 \\
x_2 - x_{21} - x_{22} - x_{23} - x_{24} &= y_2 \\
x_3 - x_{31} - x_{32} - x_{33} - x_{34} &= y_3 \\
x_4 - x_{41} - x_{42} - x_{43} - x_{44} &= y_4
\end{aligned}
\qquad \text{——— (5.3)}
$$

En la ecuación (5.3) define que la información de insumo-producto puede servirnos para explicarnos la relación entre los productos totales, las ventas totales y las demandas finales para un período de tiempo dado.

Designando a las x_i y las x_{ij} conocidas para el período de tiempo dado por $\bar{x}$ y $\bar{x}_{ij}$. Para la industria ferrocarrilera se observa que estas releciones son:

$$
\frac{\bar{x}_{11}}{\bar{x}_1} \qquad \frac{\bar{x}_{21}}{\bar{x}_1} \qquad \frac{\bar{x}_{31}}{\bar{x}_1} \qquad \frac{\bar{x}_{41}}{\bar{x}_1}
$$

y nos presentan los porcentajes de insumo para cada una de las otras industrias requeridas para producir una unidad de producto de la industria ferrocarrilera.

Si tratamos de desarollar nuestra ecuación (5.3) en función de lo anterior, nos queda:

Sea $a_{ij} = \dfrac{\bar{x}_{ij}}{\bar{x}_j}$ = Cantidad de la industria "i" que es necesaria para producir una unidad del articulo "j".

Las a_{ij} reciben el nombre de coeficientes de insumo-producto, vistas ya anteriormente en el capitulo IV.

Para el periodo de tiempo base, tenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 - a_{11}\bar{x}_1 - a_{12}\bar{x}_2 - a_{13}\bar{x}_3 - a_{14}\bar{x}_4 &= \bar{y}_1 \\
\bar{x}_2 - a_{21}\bar{x}_1 - a_{22}\bar{x}_2 - a_{23}\bar{x}_3 - a_{24}\bar{x}_4 &= \bar{y}_2 \\
\bar{x}_3 - a_{31}\bar{x}_1 - a_{32}\bar{x}_2 - a_{33}\bar{x}_3 - a_{34}\bar{x}_4 &= \bar{y}_3 \\
\bar{x}_4 - a_{41}\bar{x}_1 - a_{42}\bar{x}_2 - a_{43}\bar{x}_3 - a_{44}\bar{x}_4 &= y_4
\end{aligned} \quad \text{—— (5.4)}$$

en forma matricial, podemos escribir la ecuación (5.4), como - sigue:

$$(I - A)\bar{X} = \bar{Y} \quad \text{---- (5.5)}$$

donde:

$$A = (a_{ij}) \ ; \ \bar{X} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{vmatrix} \quad y \quad \bar{Y} = \begin{vmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{vmatrix}$$

La matriz (I-A) es conocida como matriz de Leontief (capí tulo IV).

Los coeficientes de insumo-producto describen la actividad - de la economía no solamente para el período de tiempo base, sino- también para períodos futuros, podemos determinar un vector de -- producción "X", que satisfaga un vector "Y", predeterminado de de manda final. Con esto sólo tratamos de decir que el problema gene ral para la economía de insumo-producto consiste en encontrar un-vector "X" que satisfaga las restricciones:

$$X \geqslant 0$$

$$(I - A)X = Y \quad \text{———} \; (5.6)$$

donde "Y" es un vector de demanda final dado, no negativo, y diferente de cero, y A es una matriz dada de coeficientes de insumo - producto. Para el problema que estamos considerando, o sea, aquél con demanda final diferente de cero, puede verse que $1 \geqslant a_{ij} \geqslant 0$ - (capítulo IV), y por tanto recibe el nombre de modelo abierto.

Sea una matriz "A", que satisface la condición:

$$\sum_{i=1}^{m} \left| a_{ij} \right| \leqslant 1 \qquad \text{para } j=1,2,\ldots,m$$

entonces (I-A) es no singular. Entonces, tenemos que las ecuaciones (5.5) y (5.6) tienen la solución:

$$X = (I - A)^{-1} Y$$

El tratamiento inicial dado al modelo interindustrial, como un problema de programación lineal, interpreta las igualdades de las ecuaciones antes vistas como un sistema de desigualdades:

$$(I - A)X \lesseqgtr Y \quad \text{———} \; (5.7)$$

Una formulación alterna del problema, podría requerir que el sistema antes mencionado fuera una mezcla de desigualdades, el sistema correspondiente de igualdades es:

$$(I - A)X + W = Y \quad \text{———} \; (5.8)$$

donde W es un vector columna, cuyas componentes w_i son vectores de holgura no negativos. Este último sistema consiste en n ecuaciones con 2n variables (para un vector columna "n" dimensional). La función objetiva puede tener varias interpretaciones, por ejemplo, si c_j es la utilidad por unidad de artículo "j" producido, entonces una función objetiva asociada sería maximizar el beneficio cX, donde $c = (c_1, c_2, \ldots\ldots, c_m)$ es un vector fila. Los coeficientes de costo de las variables de holgura se toman como cero. Otra función objetiva, podría ser la que exige la solución que maximice el producto de una industria particular o de una combinación de industrias.

Además de las restricciones en los sistemas anteriores, el modelo interindustrial podría estipular que el nivel de producción (actividad) x_i para la industria "i", no deberá exceder una capacidad de producción disponible conocida para la industria "i". Designando estos niveles de capacidad por L_i y sea el vector nivel de capacidad $L = (l_1, l_2, \ldots\ldots, l_m)$ un vector columna no negativo, entonces $X \leqq L$. Puesto que estamos examinando nuestra economía durante un período de tiempo particular, podemos suponer que para ciertas industrias, una parte de la producción en el período anterior, fue usada para almacenar unidades acabadas. Estas unidades estarán disponibles para su distribución en el siguiente período de tiempo, y pueden ser aplicadas para satisfacer los nuevos requerimentos de la demanda final.

En nuestro modelo representemos por s_{0i}, al almacenamiento del producto "i" disponible de lo producción anterior, y sea el vector de almacenamiento, $S_0 = (s_{01}, s_{02}, \ldots\ldots, s_{0m})$, un vector en el siguiente problema de programación lineal.

Maximizar:

$$cX$$

sujeta a

$$(I - A)X + W = Y - S_0 \quad \text{------} \quad (5.9)$$

$$X + U = L$$
$$X \geqslant 0$$

donde $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ es un vector columna no negativo,- y donde las u_i representan la capacidad no usada de la industria- "i". Si, para cierta i, $y_i - s_{0i} \leqslant 0$, entonces la demanda para la- industria "i" será satisfecha de sus existencias, y la demanda final efectiva para la industria "i", durante ese período de tiempo, será igual a cero. Sin embargo, suponemos que al menos una $y_i - s_{0i} \geqslant 0$.

El sistema (5.9) recibe el nombre de modelo estático de — Leontief, debido a que considera la economía durante un período - de tiempo. Una aplicación más amplia del modelo interindustrial,- consiste en su uso para interpretar el comportamiento de una economía durante varios períodos de tiempo. A continuación se verá - la formulación particular de programación lineal de un modelo similar, pero dinámico, que fue dado por Wagner. Para hacer esto, - haremos que: n igual al número total de períodos considerados y - sea $t = 1,2,\ldots,n$ cualquier período particular de tiempo. Enton - ces, para cualquier t, tenemos los vectores columna no negativos:

$X_t = (x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tn})$ = el vector producción

$Y_t = (y_{t1}, y_{t2}, \ldots, y_{tn})$ = el vector de demanda final.

$S_t = (s_{t1}, s_{t2}, \ldots, s_{tn})$ = El vector de existencias debidas a la producción no usada antes, incluyendo el tiempo t. Estas existencias están disponibles para un tiempo t + 1.

$U_t = (u_{t1}, u_{t2}, \ldots, u_{tn})$ = El vector de capacidad no usada.

supondremos que contamos con el vector de almacenamiento inicial S_0 y que el vector básico de nivel de capacidad L, es el mismo para todos los períodos de tiempo.

La principal diferencia entre nuestros modelos estático y dinámico es que en el modelo dinámico, consideramos la previsión para llenar los requerimientos de demandas finales futuras. Entre uno y otro período de tiempo, añadiremos a L, un vector columna no negativo V_t, el cuál representa a las capacidades disponibles adicionales. Para hacer esto, necesitamos además de la matriz de Leontief apropiada (I - A), el conocimiento de la correspondiente matriz cuadrada (dimensión "m") de coeficientes de capital,[1] llamada "B". B es una matriz de números no negativos, en el cual la columna j representa los insumos de cada industria necesarias para construir una unidad de capacidad para la industria "j".

Sea:

$V_t = (v_{t1}, v_{t2}, \ldots, v_{tn})$ = El vector no negativo de capacidad de expansión.

donde v_{t1} es la capacidad adicional para la industria "i" en un -

período t. Entonces la fila i del producto $BV_t = (b_{i1} v_{t1} + b_{i2} v_{t2} + \ldots\ldots , + b_{in} v_{tn})$ representa la cantidad de la producción de la industria "i", que se usa para construir la capacidad adicional en un período de tiempo t, para todas las industrias de nuestra economía. Esta producción no está disponible para satisfacer los requerimentos de la domanda final. En el siguiente modelo, supondremos que la capacidad de producción adicional, estará disponible en el siguiente período de tiempo (t+1). También se supondrá que las matrices (I - A) y B, son aplicables a todos los períodos de tiempo "n", y que los requerimentos de demanda final final serán satisfechos. Podemos, para cada período de tiempo, plantear las condiciones anteriores en la forma siguiente:

$$(I - A)X_t + S_{t-1} = Y_t + BV_t + S_t \quad \text{------} \; (5.10)$$

$$X_t + U_t = L + \sum_{q=1}^{t-1} V_q \quad \text{------} \; (5.11)$$

para t=1,2,....,m

La primera de las dos ecuaciones antes mencionadas establece que, para cualquier t, el producto total más las existencias anteriores es igual a la demanda final y a los requerimentos de expansión de capacidad para el producto, más las existencias no usadas en el período actual. La segunda ecuación iguala a la producción usada y no usada, a la suma de la capcidad inicial y a los aumentos adicionales en la capacidad de producción anteriores;

Reagrupando las anteriores ecuaciones, nos queda:

$$(I - A)X_t - BV_t - S_t + S_{t-1} = Y_t$$

$$X_t - \sum_{q=1}^{t-1} V_q + U_t = L \qquad (5.12)$$

Para cualquier conjunto dado de Y_t, L_t y S_0, podemos establecer la tabla de coeficientes tal y como se muestra a continuación:

	X_1	V_1	S_1	U_1	X_2	V_2	S_2	U_2	....	X_n	V_n	S_n	U_n
$Y_1 - S_0$	(I-A)	-B	-I										
L	I			I									
Y_2			I		(I-A)	-B	-I						
L		-I			I			I					
⋮									⋱				
Y_n										(I-A)	-B	-I	
L		-I				-I				I			I

T A B L A (C)

Los sistemas de esta clase se llaman sistemas triangulares en bloques. Dada una función objetiva apropiada, que podría incluir costos de producción, de expansión y de almacenamiento, el problema puede ser resuelto por el procedimiento simplex. Existen ciertos métodos que nos permiten reducir la cantidad de cálculos, aprovechando la configuración triangular en bloques (con su alta densidad de elementos nulos) o bien reducir el número de ecuaciones por transformación del sistema (ver estudios de Dantzig y -Wagner[2]).

V.5 Aplicación de la Programación Lineal.

Uno de los principales objetivos que se fijarón para el desarrollo del inciso anterior, fue para lograr el enfoque adecuado de todas las aplicaciones de la programación lineal. También se había mencionado que nuestro estudio del modelo interindustrial con todos sus alcances y perspectivas, serían de una gran ayuda sobre el planteamiento a los modelos regionales e interregionales, que veremos en capítulos posteriores.

Sin duda, todo lo que se ha hablado en éste capítulo tiene - la finalidad de lograr un mejor enfoque y herramientas básicas necesarias para un mejor entendimiento a los desarollos matemáticos posteriores.

Al final de éste capítulo se muestra un apéndice, donde se - pueden encontrar lecturas de diversos autores, donde se profundizan ciertos temas que debido a no estar dentro de nuestros objetivos, no se pudieron explicar más ampliamente. También se pueden - encontrar algunas lecturas complementarias así como algún desarrollo matemático hecho en forma más amplia, que en el capítulo se - haya simplificado u omitido.

N O T A S

(1) En el libro "Economía Interindustrial" de Chenery y Clark, en el capítulo 3, podemos encontrar una explicación más -- amplia sobre los coeficientes de capital.

(2) En casi todos los libros sobre el tema de programación lineal, puede encontrarse la forma de reducir el número de ecuaciones por transformación del sistema, pero en estudios de Dantzig y Wagner, son vistos con un enfoque hacia la utilización del método simplex.

B I B L I O G R A F I A

1. The Theory of Linear Economic Models, Gale, David; McGraw-Hill, 1960

2. Linear Programming and Network Flows, Mokhtar S. Bazarra- Jarris, John; New York, Ed. Willey, 1977

3. Programación Lineal, Métodos y Aplicaciones, Gass, Saul ; México, Ed. Continental, 1966

4. Linear Systems Analysis; Lewis, Laurel J.; McGraw-Hill, 1969

A P E N D I C E

La comprensión y desarrollo completos de los aspectos teóricos y de cómputo de la programación lineal, requieren una mezcla de los conceptos y de las técnicas básicas de un cierto número de tópicos matemáticos. En este capítulo presentaremos y discutiremos solamente aquellos elementos de esos tópicos que faciliten la discusión necesaria en los capítulos subsecuentes, o que ayuden al lector a aplicar el material que va a ser descrito.

1. Matrices y determinantes

Una *matriz* es un arreglo rectangular de mn números, dispuestos en m filas y n columnas en la forma siguiente:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

Tal arreglo generalmente va encerrado en paréntesis y recibe el nombre de matriz A. Las a_{ij} individuales son llamadas *elementos*. Algunas veces designamos la matriz A por (a_{ij}). Para cualquier m o n y cualesquiera elementos a_{ij} tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

La matriz A se llama *cuadrada* si $m = n$ y se dice que es de orden n.

Un *vector columna*, es una matriz con solamente una columna y un *vector fila* es una matriz con solamente una fila. Una *matriz diagonal*, es una matriz cuadrada cuyos elementos son todos iguales a cero, excepto aquellos situados en la diagonal principal, que son aquellos a_{ij} para los cuales $i \neq j$.

Una *matriz unidad*, o *matriz de identidad*, es una matriz diagonal, cuyos elementos diagonales son 1. Una matriz unitaria de orden n se designa por I_n o simplemente I. Para $n = 3$, tenemos

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La *matriz traspuesta*, A', de una matriz A es

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o sea, que las filas y las columnas están intercambiadas.

Dos matrices son iguales, solamente si sus elementos correspondientes son iguales. Por consiguiente, las dimensiones correspondientes, m y n, deberán también ser iguales.

Una matriz cuadrada A es *triangular* si todas sus $a_{ij} = 0$ para $i > j$ o si todas sus $a_{ij} = 0$ para $i < j$. La matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0_{41} & 0_{42} & 0_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

es triangular.

Una matriz A es simétrica, si $A = A'$, o sea si $a_{ij} = a_{ji}$. Una matriz es oblicuamente simétrica, si $A = -A'$, o sea si $a_{ij} = -a_{ji}$. Esta última condición implica que todas las $a_{ij} = 0$ para $i = j$.

Una matriz nula tiene todos sus elementos iguales a cero y se designa por $0 = (0)$. En los siguientes capítulos la matriz 0 se usará para designar, sea un vector columna nulo, sea un vector fila nulo.

Definiremos a continuación las operaciones de suma y multiplicación de matrices.

Dado cualquier escalar α y cualquier matriz A, el producto αA está dado por

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha a_{ij})$$

Dado cualquier par de matrices $m \times n$, A y B, la suma
A + B = C está dada por

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij} + b_{ij})$$

Las propiedades de la multiplicación escalar y de la suma de matrices son:

(*a*) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Ley asociativa)
(*b*) $A + B = B + A$ (Ley conmutativa)
(*c*) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (Ley distributiva)
(*d*) $A + O = A$

donde A, B y C son todas de dimensiones $m \times n$ y α y β son escalares.

La multiplicación de dos matrices A y B, se define solamente bajo la suposición de que el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Bajo esta suposición, los elementos del producto AB = C se definen en la forma siguiente:

El elemento en la hilera *i* y en la columna *j* de la matriz C, es igual a la suma de los productos de los elementos de la fila *i* de A, multiplicada por los elementos correspondientes de la columna *j* de B. Por ejemplo,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = C$$

donde $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

El producto de una matriz A de dimensiones $m \times n$ y una matriz B de dimensiones $n \times q$, da como resultado una matriz C de dimensiones $m \times q$. El lector podrá verificar fácilmente que la multiplicación de matrices no es conmutativa; o sea que en general, $AB \neq BA$.

La multiplicación de matrices tiene las siguientes propiedades:

(*a*) $(AB)C = A(BC)$ (Ley asociativa)
(*b*) $(A + B)C = AC + BC$
$C(A + B) = CA + CB$ (Ley distributiva)

(c) $$\alpha(AB) = (\alpha A)B = (A)(\alpha B)$$
(d) $$AI = IA = A$$

donde las matrices A, B, C e I tienen las dimensiones correctas y α es un escalar. Notemos que $(AB)' = B'A'$.

Asociado con cualquier matriz cuadrada A, existe un número llamado el *determinante* de A. El determinante de A, designado por $|A|$, se obtiene como la suma de todos los productos posibles, en cada uno de los cuales aparece uno y solamente uno de los elementos de cada fila y cada columna de A, asignándole a cada producto un signo positivo o negativo de acuerdo con la siguiente regla: Consideremos los elementos en un producto dado, unidos en pares por segmentos de líneas (véase ejemplo abajo). Si el número total de tales segmentos con pendiente hacia la derecha es impar, deberá marcarse con signo positivo al producto; en otra forma el prefijo será un signo negativo. (Cada determinante tiene $n!$ de tales productos donde n es el orden de la matriz[1])

Para $n = 3$, tenemos
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
y
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Las líneas para determinar el signo del tercer término, se han dibujado en el arreglo del determinante.

Las siguientes propiedades de los determinantes pueden ser verificadas a partir de la definición anterior:

1. Si cada elemento de una columna o de una hilera de un determinante es cero, entonces el valor del determinante es cero.

2. El valor de un determinante no cambia si sus columnas y filas correspondientes se intercambian.

3. Si $|B|$ es el determinante formado por el intercambio de dos columnas o filas en $|A|$, entonces $|B| = -|A|$.

4. Si dos columnas o filas de un determinante son idénticas, entonces el determinante tiene un valor cero.

5. Si cada elemento de una columna o de una fila de un determinante se multiplica por un número fijo k, entonces el valor del determinante queda multiplicado por k.

---

[1] La notación factorial de $n!$ se define como $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$, donde $0! = 1$.

6. El valor de un determinante no cambia si a cada elemento de una columna o una fila, añadimos k veces el correspondiente elemento de otra columna o fila.

El *rango* de cualquier matriz A, es el orden del mayor arreglo cuadrado en A, cuyo determinante no se desvanece, o sea no tiene un valor cero.

Se dice que una matriz cuadrada A es *no singular*, si su determinante no es igual a cero. Si $|A| = 0$, la matriz es *singular*.

El menor D_{ij}, del elemento a_{ij}, es el determinante obtenido a partir de la matriz cuadrada A, eliminando la i^{ava} hilera y la j^{ava} columna.

El cofactor A_{ij} del elemento a_{ij} es igual a $(-1)^{i+j}D_{ij}$. A_{ij} se denomina el menor con signo del elemento a_{ij}.

La *adjunta* de una matriz $n \times n$, A, es otra matriz $n \times n$, $J = (A_{ji})$, en la cual el elemento en la fila i y en la columna j es el cofactor del elemento en la fila j y en la columna i de A. Tenemos

$$J = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Una matriz B recibe el nombre de *inversa* de la matriz cuadrada A, si $AB = I$. La inversa de A se designa por A^{-1}. Para cualquier matriz cuadrada no singular A, existe una A^{-1} única, tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Puede demostrarse que, si $|A| \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} J$$

Podemos observar que solamente las matrices cuadradas no singulares tienen inversas. También notemos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ejemplo. Sea la siguiente colección de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_0 \\ \hline 3x_1 - & x_2 + & 2x_3 + & x_4 & & & = 7 \\ 2x_1 - & 4x_2 & & & + x_5 & & = 12 \\ -4x_1 - & 3x_2 + & 8x_3 & & & + x_6 & = 10 \end{array}$$

Tenemos como una solución inicial de punto extremo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 7$, $x_5 = 12$, $x_6 = 10$, la cual en notación vectorial está dada por

$$7P_4 + 12P_5 + 10P_6 = P_0 \tag{3.10}$$

Aquí los vectores de la base, P_4, P_5, P_6, son vectores unitarios. Deseamos introducir el vector P_1 para obtener otra solución de punto extremo. La representación de P_1 en términos de los vectores base es simplemente

$$3P_4 + 2P_5 - 4P_6 = P_1 \tag{3.11}$$

esto es,
$$x_{41} = 3 \qquad x_{51} = 2 \qquad x_{61} = -4$$

Si multiplicamos (3.11) por θ y restamos el resultado de (3.10), tenemos

$$(7 - 3\theta)P_4 + (12 - 2\theta)P_5 + (10 + 4\theta)P_6 + \theta P_1 = P_0 \quad (3.12)$$

Puesto que $x_{41} = 3$ y $x_{51} = 2$ son ambas positivas, determinamos θ_0 valorizando para esta x_{i1} positiva,

$$\theta = \theta_0 = \text{mín}\,\frac{x_i}{x_{i1}} = 7/3 †$$

Sustituyendo este valor en (3.12), eliminamos P_4 de la base para obtener

$$22/3 P_5 + 58/3 P_6 + 7/3 P_1 = P_0$$

o la solución de punto extremo $x_1 = 7/3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 22/3$, $x_6 = 58/3$.

Si, en lugar de P_1, hubiéramos tratado de una manera similar de obtener una solución extrema con P_2, donde

$$-P_4 - 4P_5 - 3P_6 = P_2$$

hubiéramos desarrollado la siguiente expresión para P_0 en términos de P_4, P_5, P_6, P_2:

$$(7 + \theta)P_4 + (12 + 4\theta)P_5 + (10 + 3\theta)P_6 + \theta P_2 = P_0 \quad (3.13)$$

Por (3.13) observamos que cualquier $\theta > 0$ proporciona una solución posible $x_1 = 0$, $x_2 = \theta$, $x_3 = 0$, $x_4 = 7 + \theta$, $x_5 = 12 + 4\theta$, $x_6 = 10 + 3\theta$. Aquí, puesto que todas las $x_{i2} < 0$, no obtenemos una nueva solución de punto extremo.

Una manera más eficiente de interpretar el problema es como una transformación realizada por el procedimiento de eliminación. Aquí separamos los coeficientes de las ecuaciones y formamos la siguiente tabla:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0	θ
3	−1	2	1	0	0	7	$7/3 = \theta_0$
2	−4	0	0	1	0	12	6
−1	−3	8	0	0	1	10	

Como deseamos introducir P_1 dentro de la base, nuevamente formamos las relaciones x_i/x_{i1} para $x_{i1} > 0$. Puesto que $\theta_0 = 7/3$ es el mínimo de estas relaciones, hacemos al elemento 3 de P_1 el elemento pivote del procedimiento de eliminación, marcándolo con un círculo. Esto es, eliminaremos x_1 de todas las ecuaciones excepto de la primera. Si efectuamos la transformación de eliminación, obtenemos una nueva tabla. Aquí $x_1 = 7/3$, $x_5 = 22/3$, $x_6 = 58/3$ y $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

† Formamos las relaciones para las i en la solución actual. Aquí, $i = 4, 5, 6$.

P'_1	P'_2	P'_3	P'_4	P'_5	P'_6	P'_0	θ
1	$-1/3$	$2/3$	$1/3$	0	0	$7/3$	
0	$-10/3$	$-4/3$	$-2/3$	1	0	$32/3$	
0	$-13/3$	$22/3$	$4/3$	0	1	$28/3$	

Tenemos ahora una base de P_1, P_5, P_6, con P_2, P_3, P_4 dados explícitamente en términos de estos vectores de la base, esto es,

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{1}{3}P_1 - \tfrac{10}{3}P_5 - \tfrac{13}{3}P_6 &= P_2 \\
\tfrac{2}{3}P_1 - \tfrac{4}{3}P_5 + \tfrac{22}{3}P_6 &= P_3 \\
\tfrac{1}{3}P_1 - \tfrac{2}{3}P_5 + \tfrac{4}{3}P_6 &= P_4
\end{aligned}
$$

Así pues, si deseamos obtener una solución de punto extremo con P_3 en la base, podríamos empezar con la segunda tabla y determinar θ_0 como antes, y transformar esta tabla mediante las fórmulas de eliminación. La tabla resultante daría como resultado la representación de los vectores que no se encontraban en la base en términos de los vectores de la nueva base.

EJEMPLO 3.7.

Calcular la inversa de

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Primero aumentamos la matriz con I_3. Y entonces efectuamos una serie de operaciones por fila como sigue:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Dividiendo por 2 la fila 1 tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Restando el triple de la fila 1 a la fila 2, queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 9/2 & 3 & -3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Restándole la fila 1 a la 3 llegamos a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 9/2 & 3 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Dividiendo la segunda fila por 9/2 obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2/9 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Restándole 1/2 de la fila 2 a la 1 tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 2/3 & -1/9 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2/9 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Restando los 5/2 de la fila 2 a la fila 3 queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 2/3 & -1/9 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & -5/3 & 1/3 & -5/9 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Dividiendo la fila 3 por $-5/3$ llegamos a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 2/3 & -1/9 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/3 & -3/5 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Restándole 5/3 de la fila 3 a la fila 1 nos conduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/3 & -3/5 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Restándole 2/3 de la fila 3 a la fila 2 queda finalmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/3 & -3/5 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1 \\ -1/5 & 0 & 2/5 \\ -1/5 & 1/3 & -3/5 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

La demostración es que $A^{-1}A = I$ y el lector puede verificar que (3.14) es correcto, multiplicando directamente.

Más arriba se han mostrado los cálculos con todos los detalles para mayor claridad, pero en la práctica ordinaria (3.7) se escribiría directamente a partir de (3.4), (3.10) directamente a partir de (3.7), y (3.13) directamente a partir de (3.10).

Si tenemos dos matrices no singulares de las mismas dimensiones, A y B, son equivalentes, puesto que podemos obtener una a partir de la otra por medio de una serie de 6 transformaciones elementales. Un camino a utilizar podría ser el reducir A a I por transformaciones elementales y entonces convertir I en B por otra serie distinta de dichas transformaciones. O sea, puede decirse que dos matrices cuadradas de las mismas dimensiones son equivalentes si tienen el mismo rango.

Supongamos que tenemos una matriz de orden $m \times n$ que se reduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Es obvio que cualquier matriz de orden $m \times n$ $(n \geqslant m)$ puede reducirse a (3.15) si existe alguna combinación de m o de n columnas a partir de las cuales puede formarse una matriz no singular. O sea, que ampliamos la explicación anterior: Dos matrices de orden $m \times n$ $(n \geqslant m)$ son equivalentes si tienen el mismo rango.

Es evidente que el argumento se aplica igualmente si $n < m$. El lector observará también que estas definiciones son equivalentes diciendo que cualquier matriz de orden $m \times n$ de rango m, es igual al producto de una serie de transformaciones elementales por una matriz de la forma general (3.15).

El lector puede preguntarse qué condiciones debe cumplir una matriz cuadrada para ser singular. Una matriz cuadrada es singular, si una o más de sus filas es *linealmente dependiente* de las otras filas, o si una o más de sus columnas son *linealmente dependientes* de las restantes columnas. Por ejemplo, en la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 4 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

la tercera columna es igual a 4 veces la primera columna menos 3 veces la segunda y es, por consiguiente, linealmente dependiente de ellas. La siguiente reducción de la matriz demuestra que el rango de la matriz es dos.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 4 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 18 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En general, el rango de una matriz es igual al más pequeño de los números de filas y columnas independientes. Una matriz cuadrada es no singular únicamente si todas sus filas y todas sus columnas son linealmente independientes.

3-4. Sistemas de ecuaciones

Vamos a aplicar la teoría precedente a la resolución de sistemas de ecuaciones. Supongamos que tenemos:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m \end{array} \qquad (3.16)$$

En forma matricial esto puede escribirse así

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (3.17)$$

Es decir, si multiplicamos la matriz de orden $m \times m$ de los coeficientes (que llamaremos A) por el vector columna de las variables (X), obtenemos el último término de (3.16). La columna de las constantes puede, desde luego, considerarse como un vector columna que llamaremos b.

Entonces (3.17) es equivalente a

$$AX = b \qquad (3.18)$$

Multiplicando los dos lados por la izquierda por A^{-1} tenemos

$$A^{-1}AX = IX = X = A^{-1} b \qquad (3.19)$$

De acuerdo con (3.19), para resolver m ecuaciones con m incógnitas debemos hallar la inversa de la matriz de los coeficientes y multiplicarla por el vector columna de las constantes. El resultado será un vector columna X que es la solución.

El mejor esquema de calculo para hacer esto, es seguir un procedimiento similar al descrito en la Sección 3-3 para hallar la inversa. En vez de calcular la inversa, podemos formar la matriz aumentada (A, b) que escribimos simbólicamente

$$\left|\begin{array}{c|c} \quad A \quad & \; b \; \end{array}\right| \tag{3.20}$$

Aplicamos ahora las transformaciones de *fila* necesarias para reducir A a su forma identidad. Para la parte de (3.20) designada por A, tenemos:

$$E_p \ldots E_3E_2E_1A = A^{-1}A = I$$

como deseábamos.

En la parte de (3.20) designada por b, tenemos

$$E_p \ldots E_3E_2E_1b = A^{-1}b$$

En otras palabras, aplicando a b las mismas transformaciones que aplicamos a A, hemos convertido b en $A^{-1}b$ que es el vector solución en virtud de (3.19). De esta forma calculamos $A^{-1}b$ sin calcular A^{-1} y sin efectuar la multiplicación de A^{-1} por b.

Si por alguna razón deseamos hallar la inversa de A, podemos obtenerla por medio de la matriz aumentada.

$$\left|\begin{array}{c|c|c} \quad A \quad & \quad I \quad & \; b \; \end{array}\right| \tag{3.21}$$

Después de las correspondientes operaciones de filas, tendremos

$$\left|\begin{array}{c|c|c} \quad I \quad & \quad A^{-1} \quad & A^{-1}b \end{array}\right| \tag{3.22}$$

3. Problemas dietéticos

En la Sección 2 del Cap. 1, definimos y formulamos el problema dietético básico, en términos de un problema de programación lineal. A continuación discutiremos el modelo particular de programación lineal de un problema dietético, y revisaremos su solución correspondiente para determinar si se puede aplicar la formulación del Cap. 1. Tal análisis es típico para los problemas de programación lineal en general, y es recomendable cuando intentamos describir una situación compleja, por medio de un modelo lineal elemental. Los modelos de tales situaciones generalmente comienzan como modelos sencillos pero usando esos modelos modestos como base, el investigador está en disposición de desarrollar modelos más cercanos a la realidad. Para ilustrar este proceso, describiremos brevemente varios ajustes al modelo del problema dietético, que tienden a hacerlo una representación más cercana de las situaciones de la vida real.

Históricamente, el problema dietético de Stigler [92] fue el primer problema de programación lineal extenso y complicado que fue resuelto por el método simplex. En este caso el problema era determinar qué cantidades de 77 alimentos, deberían ser comprados con objeto, no solamente de proporcionar el costo mínimo, sino también satisfacer las necesidades mínimas de nueve elementos nutritivos, por ejemplo, vitamina A, niacina y tiamina. Las compras resultantes debían formar una dieta adecuada para sostener una persona por un año. La formulación básica de programación lineal de este problema, se hizo en términos de 9 ecuaciones y 86 variables, incluyendo 9 variables de holgura. La solución final obtenida por el método simplex, fue por supuesto, una solución mínima verdadera. Sin embargo, puesto que el procedimiento simplex trata solamente en términos de soluciones básicas, solamente 9 de los alimentos posibles fueron expresados en la solución mínima con un nivel positivo. Así pues, la dieta obtenida por los métodos de programación lineal resultaba en la compra de cantidades variables de harina de trigo, harina de maíz, leche evaporada, mantequilla de cacahuate, manteca, hígado de res, col, papas y espinacas, y su costo era de Dls. 39.67 (para el año de 1939). La solución obtenida por Stigler, usando un procedimiento sistemático de prueba y error, requería solamente 5 alimentos: harina de trigo, leche evaporada, col, espinacas y frijoles deshidratados y su costo era de Dls. 39.93. Tales dietas, a pesar de ser bastante económicas, resultan ciertamente poco apetitosas para consumirlas en un cierto periodo de tiempo, y esta selección de alimentos solamente se justificaría en la dieta de un campo de concentración. Como Stigler hace notar, "nadie recomienda alguna de estas dietas (*o sea dietas verdaderas de costo mínimo*) y menos aún a todas ellas." También cita una dieta de bajo costo elaborada en 1939, que fue formulada por un dietético y que costaba Dls. 115. La diferencia en costo fue atribuida a que el dietético relacionó el problema con las necesidades de buen sabor, variedad de la dieta y el prestigio de ciertos alimentos. Empezando con nuestra formulación básica, ¿cómo podríamos modificar nuestro procedimiento o modelo, para llenar estos requerimientos dietéticos adicionales?

Aquí tenemos una solución correcta al problema tal como se ha establecido; sin embargo, esta solución correcta resulta inaceptable para ser ejecutada. Con objeto de vencer este defecto, podríamos buscar soluciones óptimas alternas y formar varias combinaciones convexas de estas soluciones. En esta forma estaríamos en disposición de seleccionar una dieta que incluyera más de 9 alimentos. O bien, podríamos buscar las dietas que siguen a la dieta de costo mínimo, con la esperanza de que una de ellas pudiera ser aceptable. Finalmente, podríamos revaluar la formulación de programación lineal del problema, para ver si realmente describe el problema que se investiga.

Para corregir las deficiencias inherentes a la solución del problema original, se ve la necesidad de una reformulación de este problema de programación lineal. El nuevo problema deberá permitirnos más de 9 alimentos en la solución mínima, y también tomar en cuenta consideraciones de las preferencias del gusto humano para ciertos alimentos. Estos alimentos pueden ser introducidos en el modelo mediante desigualdades que fuercen a ciertos alimentos a encontrarse en la solución final cuando menos en una cantidad mínima.[1] Podríamos también determinar pesos preferentes y agregarlos a los correspondientes coeficientes de costo. Otro método de ataque al problema dietético general, que introduciría más variedad, sería subdividirlo en pequeños problemas dietéticos, cada uno de los cuales incluiría solamente una clase sencilla de alimentos. En este proceso de suboptimización, podríamos tener el problema de seleccionar las dietas de costo mínimo para verduras, o frutas, o carnes, y la dieta compuesta sería una solución al problema general. En estos intentos de introducir más realismo en el problema, sufrimos un aumento correspondiente en el costo de la dieta resultante. Si el problema se somete a más restricciones, el costo, en general, aumentará, y esto permitirá al investiga-

[1] Deberá notarse que tales desigualdades de límite inferior, no aumentan el tamaño del modelo de programación lineal. Por ejemplo, si nuestros límites inferiores son a_j, entonces el conjunto de desigualdades es de la forma $x_j \geq a_j$. Introduciendo variables de holgura no negativas, tenemos $x_j - y_j = a_j$, o bien $x_j = y_j + a_j$. En nuestro conjunto original de restricciones, necesitamos sustituir solamente $y_j + a_j$ por las correspondientes x_j, y por tanto el número de restricciones y variables permanece igual que en la formulación original.

dor determinar el valor relativo del costo en dólares relacionado con el gusto y la variedad.[1]

Existen, sin embargo, muchas situaciones donde la formulación de programación lineal al problema dietético básico es aplicable. Estos problemas se refieren a mezclas de alimentos de costo mínimo para animales de granja, o a la mezcla de varios elementos, por ejemplo, agentes químicos o fertilizantes, para llenar los requerimientos mínimos al menor precio. La aplicación de las técnicas de programación lineal a estos problemas, es bastante directa. Para ilustrar un problema típico, y también para poner a la disposición del lector un ejemplo un poco mayor sobre un cómputo simplex típico, a continuación presentamos el cálculo de una dieta diaria de costo mínimo propuesto por Waugh [100]. La formulación y cálculo de este problema se debe a Goldstein [51*a*]. Los cálculos se dan en la Tabla 11.2, páginas 290 hasta 293.

Este problema incluye la selección de 10 alimentos para llenar los requerimientos mínimos de alimentos nutritivos digeribles, proteínas digeribles, calcio y fósforo. Los alimentos están tabulados en la Tabla 11.2. El modelo de programación lineal consiste en 4 ecuaciones con 14 variables, y los cálculos se inician con una base completamente artificial. Los costos y las variables para los alimentos se refieren a unidades de 100 lb. Los elementos en exceso se encuentran en unidades de 1 lb y tienen un costo cero. La solución mínima implica la compra de 18 771 lb de sorgo; 0.061-42 lb de exceso de fósforo; 17 020 lb de alimento de gluten; y 58 528 lb de harinas regulares, con un costo total de Dls. 2 2798. En la sección final de la Tabla 11.2, hemos presentado solamente los elementos $z_j - c_j$ y la columna P_0 y hemos dejado el resto de los elementos para que sean calculados por el lector. Es evidente que estos elementos no se requieren para la tabla simplex correspondiente a la solución mínima, a menos que deseáramos desarrollar todas las soluciones mínimas múltiples. En este caso no hay tales soluciones.

Goldstein, en sus cálculos, ejemplifica tres criterios diferentes para seleccionar el vector que debe entrar en la base. El criterio standard; que es el más fácilmente aplicable, o sea, seleccionar el elemento máx $(z_j - c_j) > 0$, fue usado para pasar de la pri-

[1] El lector podrá consultar un trabajo reciente efectuado por Wolfe [102] donde resuelve un problema dietético de Stigler modificado con una función (objetiva) preferente cuadrática. Este tratamiento introduce más realismo y variedad en la dieta óptima.

mera a la segunda base, de la cuarta a la quinta y de la sexta a la séptima. El criterio usado para pasar de la segunda a la tercera base, fue que el vector seleccionado debería reducir el valor de la función objetiva lo más posible. Para simplificar la aplicación de esta regla, la selección fue limitada ya sea a x_1 o x_{10}, esto es, a las dos variables con los mayores elementos $z_j - c_j$. Al pasar de la tercera a la cuarta base, el vector fue selecionado no solamente para reducir el valor de la función objetiva, sino también para eliminar un vector artificial. Este criterio permite que la solución se "acerque más" a una solución posible. Finalmente, como existía cierto interés en la solución posible mínima, que no incluía excesos de elementos nutritivos, la variable x_3 fue escogida en vez de x_1, para entrar de la quinta a la sexta solución.

Tabla 11.2. Solución simplex al problema de Waugh

i	Base	c		Maíz	Avena	Sorgo	Salvado	Harinas regulares	Harina de linaza	Harina de algodón	Harina de soya
				2.40	2.52	2.18	2.24	2.44	3.82	3.55	3.70
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
1	P_9	w	74.2	78.6	70.1	80.1	67.2	78.9	77.6	70.6	78.5
2	P_{10}	w	14.7	6.5	9.4	8.8	13.7	16.1	30.4	32.8	37.1
3	P_{11}	w	0.14	0.02	0.09	0.03	0.14	0.09	0.41	0.20	0.20
4	P_{12}	w	0.55	0.27	0.34	0.30	1.29	0.71	0.86	1.22	0.59
5			0	−2.40	−2.52	−2.18	−2.14	−2.44	−3.82	−3.55	−3.70
6			59.59	85.39	79.93	89.23	87.33	95.8	108.67	104.82	116.45
	P_9	w	43.09023	64.84663	50.2105	61.4500	38.2331	44.5340	12.6785	1.19558	0
	P_8	3.70	0.39623	0.17520	0.25337	0.23720	0.36927	0.43396	0.81941	0.88410	1
	P_{11}	w	0.03698	−0.075552	0.024125	−0.03167	0.04399	−0.02253	0.19096	−0.02936	0
	P_{12}	w	0.31623	0.16663	0.19051	0.16005	1.07213	0.43396	0.37655	0.69538	0
			1.46603	−1.75176	−1.58254	−1.3024	−0.77369	−0.83134	−0.7882	−0.27856	0
			43.44943	64.85771	50.4251	61.4054	39.3282	45.2651	13.2301	1.56890	0
	P_1	2.40	0.66439	1	0.77430	0.94508	0.58927	0.69132	0.19549	0.015480	0
	P_8	3.70	0.27979	0	0.11771	0.071090	0.26603	0.31263	0.78516	0.88058	1
	P_{11}	w	.053964	0	0.043910	−0.007446	0.05905	−0.005162	0.20195	−0.02930	0
	P_{12}	w	0.205455	0	0.061490	0.002074	0.97394	0.33576	0.34398	0.69530	0
			2.05023	0	−0.22616	0.35544	0.25550	0.37080	−0.44575	−0.24647	0
			0.25045	0	0.10540	−0.00537	1.03299	0.33359	0.54593	0.66591	0
	P_1	2.40	0.24520	1	0.64580	0.94365	−1.30650	0	−0.50655	−1.4006	0
	P_8	3.70	0.00003	0	0.06003	0.069175	−0.63337	0	0.46751	0.22877	1
	P_{11}	w	0.057098	0	0.04185	−0.007413	0.07389	0	0.20719	−0.01880	0
	P_5	2.44	0.00659	0	0.18132	0.006122	2.87505	1	1.01541	2.05252	0
			2.40167	0	−0.29135	0.35613	−0.82475	0	−0.80535	−1.01925	0
			0.05710	0	0.04185	−0.007413	0.07389	0	0.20719	−0.01880	0
	P_1	2.40	0.30028	1	0.69205	0.93671	−1.32721	0	−0.30666	−1.41873	0
	P_8	3.70	0.07050	0	0.04559	0.07171	−0.65565	0	0.39064	0.24520	1
	P_7	2.60	0.16353	0	0.12545	−0.02173	0.21163	0	0.59343	−0.05383	0
	P_5	2.44	0.413005	0	0.02946	0.03126	2.62452	1	0.31231	2.11624	0
			2.41441	0	−0.25152	0.33467	−0.80822	0	−0.78200	−1.02106	0
			0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P_3	2.18	0.32057	1.06758	0.73883	1	−1.4169	0	−0.32739	−1.5146	0
	P_8	3.70	0.04751	−0.076556	−0.007395	0	−0.55704	0	0.42012	0.35351	1
	P_7	2.60	0.17034	0.02267	0.14113	0	0.18155	0	0.55418	−0.06589	0
	P_5	2.44	0.40293	−0.03337	0.00371	0	2.66881	1	0.32315	2.16358	0
			2.3008	−0.37642	−0.54642	0	−0.30598	0	−0.66595	−0.48717	0
	P_3	2.18	0.18771								
	P_{10}	0	0.06142								
	P_7	2.60	0.17020								
	P_5	2.44	0.58328								
			2.2758	−0.3446	−0.5432	0	−0.05964	0	−0.85174	−0.64364	−0.44226

Tabla 21.2. Solución simplex al problema de Waugh —(continúa)

	i	Base	c	Alimento de gluten	Maíz machacado	Nutritivos en exceso	Proteínas en exceso	Calcio en exceso	Fósforo en exceso	Base artificial			
				2.60	2.54	0	0	0	0	w	w	w	w
				P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}	P_{17}	P_{18}
I.	1	P_{15}	w	16.3	84.5	−1	0	0	0	1	0	0	0
	2	P_{16}	w	21.3	6.0	0	−1	0	0	0	1	0	0
	3	P_{17}	w	0.68	0.22	0	0	−1	0	0	0	1	0
	4	P_{18}	w	0.62	0.71	0	0	0	−1	0	0	0	1
	5			−2.60	−2.54	0	0	0	0	0	0	0	0
	6			95.00	93.43	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0
II.		P_{15}	w	31.2313	67.5728	−1	2.11530	0	0	1		0	0
		P	3.70	0.57412	0.21563	0	−0.02695	0	0	0		0	0
		P_{17}	w	0.33073	0.16394	0	0.007105	−1	0	0		1	0
		P_{18}	w	0.48127	0.55278	0	0.015903	0	−1	0		0	1
				−0.47576	−1.7422	0	−0.099730	0	0	0		0	0
				32.0432	65.3195	−1	2.13531	−1	−1	0		0	0
III.		P	2.40	0.35162	1.04201	−0.015423	0.03263	0	0			0	0
		P	3.70	0.49974	0.03307	0.0027018	−0.03267	0	0			0	0
		P_{17}	w	0.34304	0.11050	−0.004094	0.007842	−1	0			1	0
		P_{18}	w	0.40101	0.40914	0.002370	0.010466	0	−1			0	1
				0.56793	0.05324	−0.027016	−0.042572	0	0			0	0
				0.74405	0.59970	1.002176	0.015302	−1	−1			0	0
IV.		P	2.40	−0.33053	0.70701	−0.02087	0.011269	0	2.04095			0	
		P	3.70	0.11942	−0.34476	0.009120	−0.03234	0	0.92347			0	
		P_{17}	w	0.34915	0.15650	−0.006055	0.00500	−1	−0.01524			1	
		P	2.44	1.15578	1.20777	0.007185	0.030503	0	−2.13198			0	
				−0.078133	−0.37185	−0.025572	−0.05421	0	1.31230			0	
				0.34915	0.19680	−0.006055	0.00500	0	−0.01524			0	
V.		P	2.40	0	0.39056	−0.02301	0.015057	−0.96473	2.02625				
		P	2.70	0	−0.41207	0.007159	−0.04507	0.34203	0.92568				
		P	2.60	1	0.50365	−0.007016	0.022913	−2.86412	−0.04365				
		P	2.44	0	0.54033	0.005758	0.003271	3.20050	−2.90031				
				0	−0.32782	−0.02205	−0.057473	−0.22372	1.10555				
				0	0	0	0	0	0				
VI.		P	2.15	0	0.42363	−0.02241	0.02937	−1.02992	2.16316				
		P	2.70	0	−0.45245	0.00255	−0.01653	0.41589	0.77357				
		P	2.60	1	0.57255	−0.002492	0.02434	−2.5560	0.00228				
		P	2.44	0	0.52729	0.022459	0.003138	3.4227	−2.96792				
				0	−0.47600	−0.02200	−0.05901	0.14135	0.34210				
VII.		P	2.15										
		P_{14}	0										
		P	2.60										
		P	2.44										
				0	−0.28223	−0.02211	−0.03403	−0.01257	0				

APLICACIONES DE LAS TECNICAS DE INSUMO-PRODUCTO Y PROGRAMACION LINEAL A LOS PROGRAMAS DE DESAROLLO

VI APLICACIONES DE LAS TECNICAS DE INSUMO-PRODUCTO Y PROGRAMACION LINEAL A LOS PROGRAMAS EN DESAROLLO

VI.I Introducción.

Un programa de desarollo aspira a encontrar una mejor combinación de los parámetros estructurales en nuestra economía, esto es, basado principalmente por medio del cambio, ya sean estos, institucionales, económicos o tecnológicos, así como otras medidas que lleguan a producir el incremento máximo en futuros ingresos. Las técnicas analíticas que empleen, deben incluir un mecanismo para hacer la elección entre varias alternativas como un medio para lograr sólidos resultados.

En la práctica, los criterios para la elección de inversiones se han separado, en gran medida, de las técnicas para la proyección de la demanda y la producción (Samuelson). Cuando el problema de desarollo se formula en términos de programación lineal, es evidente que este procedimiento, sólo proporciona una primera aproximación al resultado deseado. Podemos considerar a la elección de las inversiones como una selección entre distintos tipos de actividades para alcanzar una solución óptima. Si se utilizan los precios existentes como una guía para efectuar esta selección, éstos no toman en cuenta las diferencias entre los precios del mercado y los costos de sustitución de los insumos. Sobre un fundamento teórico, debemos emplear técnicas de programación lineal en vez de insumos-producto a fin de combinar la construcción de proyecciones firmes con la realización de elecciones eficientes entre los usos alternativos de los recursos.

Como la programación lineal es un desarollo teórico más reciente y su aplicación requiere de un mayor número de datos que el insumo-producto, su empleo en el análisis de las economías en forma integral, todavía se encuentra en una etapa no muy desarrollada. Para las aplicaciones prácticas de las dos técnicas a utilizar, una combinación entre ambas, nos ofrece la mejor opción que puede esperarse para un futuro próximo.

El empleo de los conceptos de una estructura de programación lineal puede contribuir de varios modos a la formación de programas de desarollo. En primer lugar, el modelo más completo que se utiliza en la programación lineal pone claramente de manifiesto, por una parte, la relación que existe entre las proyecciones de los niveles de producción y la utilización de los recursos, y por otro lado, los criterios para la elección de las inversiones. Aún cuando no se dispone de datos suficientes para emplear esa clase de modelo en su totalidad, la secuencia lógica de las soluciones de programación lineal nos puede servir de guía a mejores métodos de aproximación, así como la construcción y solución de los modelos de programación lineal sobre una base experimental, que nos proporciona un conocimiento más profundo del significado cuantitativo de las relaciones recíprocas entre las decisiones de cada sector, las que se omiten en técnicas más sencillas. Es muy necesario hacer esta prueba antes de intentar una aplicación a gran escala.

VI.2 El Problema Formal de la Programación Lineal en los Programas de Desarollo.

Considerando, en primer término, hasta que grado se adaptan los programas de desarollo a la estructura conceptual de la programación lineal,,diremos que, el problema formal de la programación lineal consiste en elevar al máximo (o reducir al mínimo) una función de los niveles de actividad, sujeta a una serie de restricciones lineales en estas variables. Al hacer la planeación del desarollo, casi siempre se considera que la función que ha de elevarse al máximo es el producto nacional. Los demás objetivos que se pudieran plantear (ocupación, equilibrio de la balanza de pagos, distribución del ingreso, composición deseada de mercancías de consumo, disponibilidad de mano de obra y recursos naturales, oferta de capital = ahorros nacionales + emprestitos del exterior, etc,) pueden considerarse como restricciones que sirven para calificar el objetivo principal.

La naturaleza de estas restricciones determina las actividades que deben incluirse en el modelo. Debemos tener ahora en cuenta una composición variable de comercio exterior tratando como actividades a la importación y a la exportación. Otras actividades posibles incluyen la formación de capital, el adiestramiento de la mano de obra, y el consumo de determinadas mercancías. Que una elección, que afecte a una función económica dada, debe incluirse en el modelo, o decidirse de antemano, dependiendo de que el resultado pudiera influir en el resto de la solución, de tal manera de que no pueda tomarsele en cuenta adecuadamente de otra forma.

Ejemplificando la naturaleza de la solución de programación lineal partiendo de proyecciones globales de ingreso, del consumo, y de los recursos totales de la inversión[1], en este caso, la diferencia esencial entre el modelo de programación lineal y el análisis de insumo-producto es que los niveles de importación y exportación en cada sector tienen que ser determinados partiendo de la solución. Como en la primera aproximación se consideran fijas las demandas internas de cada mercancía por el pronóstico del nivel de ingreso, una desición dada respecto a la inversión significa que se importará o se exportará la diferencia entre la producción y la demanda interna de cada mercancía.

Hasta la fecha, las investigaciones prácticas se han limitado al empleo del análisis de insumo-producto para probar la consistencia de los programas. Se está acrecentando el empleo de la programación lineal para el estudio de los problemas de industrias aisladas.

El principal obstáculo para la rápida adopción de la programación lineal en la planeación nacional, es la fuerte demanda de datos que exige. La construcción de un cuadro de insumo-producto de 40 a 50 sectores, con una subdivisión correspondiente de la demanda final, constituye una gran presión sobre recursos estadísticos de muchos países, y por el momento no es muy factible la adopción de un análisis de actividades en forma muy pormenorizada. La evolución más probable de la técnicas de programación lineal consiste, por tanto, en desarrollar primeramente modelos que incluyan actividades alternativas únicamente en los sectores donde éstas son decisivas para la solución.

El modelo que debe seguirse para determinar si deben incluirse actividades en el modelo, ha de ser el grado en el que la elección entre ellas dependa la solución del sistema. Además de las importaciones y exportaciones, en algunos casos, las técnicas alternativas de producción que empleen insumos diferentes pueden tener que analizarse dentro del sistema de equilibrio general.

VI.3 El Insumo-Producto y la Programación Lineal en la Selección de los Programas en Desarollo.

Una importante contribución de la programación lineal es la de proporcionar una mejor comprensión de la naturaleza del costo de los factores que deben emplearse para tomar las decisiones de inversión, así como, una técnica para calcular su magnitud en forma de precios de compensación.

La programación lineal cuando se aplica a una economía integral, constituye una extensión y una generalización del análisis de insumo-producto, a su vez, proporciona un medio para calcular los efectos que sobre la economía tiene un programa económico propuesto, Aún cuando los resultados de estos cálculos no satisfagan a todas las limitaciones de recursos, pueden utilizarse como una base para mejorar el programa de prueba.

Los métodos formales de programación proporcionan un medio para llevar a cabo estas modificaciones, cualquiera que sea el método empleado para trazar el programa. Los conceptos de la programación lineal ofrecen, en forma idealizada, los nexos necesarios entre los niveles del análisis. En contraste con otros modelos o métodos para obtener programas firmes, como partes de la solución, producen pruebas de eficiencia en forma de precios. El empleo de estos precios contables o de compensación descentralizaría las decisiones respecto a la inversión y serviría de orientación hacía el uso de medidas directas por parte del gobierno o particulares. Además la solución correcta del precio puede ser más importante que las metas firmes[2], por tanto, puede sostenerse que la valorización correcta de la verdadera contribución de los proyectos alternativos de inversión de ingreso nacional[3] es, por lo menos, tan importante como el equilibrio de la oferta y la demanda de diversas mercancías.

N O T A S

(1) En el libro "Análisis y Proyecciones para el Desarrollo Económico", Vol. III, Naciones Unidas, Cepal, 1957.

(2) Término usado para definir las metas originalmente propuestas.

B I B L I O G R A F I A

1. Methods of Regional Analysis and Introduction to Regional -- Science, Isard, Walter; MIT Press, Cambridge, 1969

2. Location and Space Economy, Isard, Walter; MIT Press, Cam -- bridge, 1970

3. Diagnostico Económico Regional, Fernando Zamora Millán; Instituo Méxicano de Investigaciones Económicas (SIC), 1971

4. La división Económica Regional de México, Textos Universitarios; U.N.A.M., 1970

5. Approaches to Economic Development, Buchanan-Ellis; Twentieth Century Fund, New York, 1955

6. Teoría del Desarollo Económico, F.C.E, Lewis, W.A.; México,-1957

7. Resource Allocation for Economic Development, Chenery-Kretschmer; Econometrica, XXIV, 1956

8. Comisión Económica para la America Latina, Análisis y Proyecciones para el Desarollo Económico, I, Introducción a la Técnica de la Programación (E/CN.12/363, junio de 1955)

Cuadro 11-1. Modelo VIII: Programación del desarrollo

Mercancía	Base*	Actividades: 1 Bienes finales E_1	X_1	M_1	2 Agricultura E_2	X_2	M_2	3 Industria básica E_3	X_3	M_3	4 Servicios X_4	Disponibilidad de recursos D_5	D_6	B_i	P_i	P_iB_i
I. Análisis de precios a_{1j}		−1.0	0.8	1.0												
(1) Mercancía 1 (bienes finales)														320		
	a	−2.33	1.86	2.33											2.33	745
	b	−2.33	1.86	2.33											2.33	745
	c	−2.27	1.81	2.27											2.27	729
	d	−2.25	1.81	2.26											2.20	724
a_{2j}			−0.3		−1.0	0.9	1.0									
(2) Mercancía 2 (productos agrícolas)														105		
	a		−0.78		−2.59	2.33	2.59								2.59	272
	b		−0.78		−2.59	2.33	2.59								2.59	272
	c		−0.78		−2.54	2.29	2.54								2.54	267
	d		−0.78		−2.54	2.29	2.54								2.54	267
a_{3j}			−0.1			−0.1		−1.0	0.7	1.0						
(3) Mercancía 3 (materiales básicos)														40		
	a		−0.27			−0.27		−2.66	1.86	2.66					2.66	106
	b		−0.27			−0.27		−2.66	1.86	2.66					2.66	106
	c		−0.23			−0.23		−2.29	1.60	2.29					2.29	92
	d		−0.23			−0.23		−2.26	1.58	2.26					2.26	91
a_{4j}			−0.1			−0.1			−0.1		0.9					
(4) Mercancía 4 (servicios)														60		
	a		−0.13			[illegible]			−0.76		[illegible]				0.61	37
	b		[illegible]			[illegible]			[illegible]		[illegible]				[illegible]	37
	c		[illegible]			[illegible]			[illegible]		[illegible]				[illegible]	37
	d		[illegible]			[illegible]			[illegible]		[illegible]				[illegible]	43

Mercancía	Base*	E_1	X_1	M_1	E_2	X_2	M_2	E_3	X_3	M_3	X_4	D_5	D_6	B_i	P_i	P_iB_i
f_{5j}		0.9		−1.0	1.0		−1.1	0.8		−0.9		−1		−20		
(5) Divisas	a	0		0	0		0	0		0		0			0	0
	b	2.65		−2.95	2.95		−3.25	2.13		−2.09		−2.95			2.95	−59
	c	2.29		−2.54	2.54		−2.79	2.03		−2.29		−2.54			2.54	−51
	d	2.25		−2.51	2.51		−2.76	2.01		−2.26		−2.51			2.51	−50
f_{6j}			−0.06			−0.29			−0.14		−0.74		−1	−300		
(6) Mano de obra	a														0	0
	b														0	0
	c														0	0
	d														0	0
(7) Función criterio (capital) c_j		0	0.7	0	0	1.0	0	0	1.40	0	0.89	0	0	Mínimo		
II. Cambios (z_{ij})	a	−2.33	0	2.33	−2.59	0	2.59	−3.06	0	2.66	0	0	0			
	b	0.33	0	−0.62	0.37	0	−0.65	−0.33	0	0	0	−2.95	0			
	c	0.2	0	−0.28	0	0	−0.20	−0.26	−0.26	0	0	−2.54	0			
	d	0	0	−0.25	−0.03	0	−0.17	−0.25	−0.35	0	0	−2.51	0			
III. Nivel de actividad (x_j)	a	0	400	0	0	250	0	0	150	0	200	20	47			
	b	0	400	0	0	250	0	0	119	22	195	0	38			
	c	0	400	0	23	392	0	0	0	115	194	0	55			
	d	99	524	0	0	290	0	0	0	122	215	0	60			
IV. Capital total (c_jx_j)																Capital utilizado†
	a		280			500			270		110					1150
	b		280			509			213		103					1101
	c		280			654			0		103					1070
	d		367			583			0		118					1068

* Las seis actividades en cada base están indicadas por niveles positivos de actividad y márgenes cero.

† El capital total utilizado es igual a los totales de hilera y de columna, que son diferentes por pequeñas diferencias debidas a que se redondearon las cifras.

Cuadro 9-5. *Necesidades de capital y mano de obra por millón de dólares de exportaciones y reposición de importaciones de los Estados Unidos: cálculos adicionales del comercio de 1951* *

	Naturaleza del cálculo		*Capital (10^3 1947)*	*Trabajo (10^3 años-hombre)*	*Proporción C/T imp. ÷ C/T exp.*
A.	Todos los 192 sectores, incluyendo la reposición de capital	Exp.	225.65	173.91	1.0577
		Imp.	230.34	167.81	
C1.	154 sectores que no son de servicios (agregado a 50 por las demandas indirectas)	Exp.	214.10	167.61	1.1112
		Imp.	230.59	160.46	
C4.	154 sectores que no son de servicios, sectores no agregados (agregados a 50 para las demandas indirectas)	Exp.	156.22	168.77	1.3410
		Imp.	186.82	150.51	
D.	173 sectores no de recursos. Reposición de capital incluida	Exp.	257.71	224.23	0.8813
		Imp.	209.27	206.61	

cada mil millones de liras de producción OSP de diferentes clases *

Importaciones requeridas	Barcos Cantidad (tons.)	Barcos Valor (miles de liras)	Aeroplanos Cantidad (tons.)	Aeroplanos Valor (miles de liras)	Automotores Cantidad (tons.)	Automotores Valor (miles de liras)	Aparatos electrónicos Cantidad (tons.)	Aparatos electrónicos Valor (miles de liras)	Municiones Cantidad (tons.)	Municiones Valor (miles de liras)
Mineral de hierro	872.7	3.7	457.0	1.9	522.7	2.2	274.7	1.1	432.9	1.8
Chatarra	517.7	8.5	268.1	4.4	310.1	5.1	164.2	2.7	255.2	4.2
Aleaciones ferrosas		0.5		0.3		0.3		0.2		0.5
Prods. de acero finales		4.1		2.1		2.3		1.2		2.0
Cobre	68.3	18.5	64.3	17.9	36.9	10.3	72.3	20.2	50.5	14.1
Plomo	2.1	0.3	1.3	0.2	1.2	0.2	14.2	2.1	0.6	0.1
Estaño	62.0	7.5	41.7	4.8	40.6	4.7	29.5	3.4	37.8	4.3
Níquel	5.1	3.1	1.5	0.9	1.9	1.2	4.5	2.7	1.2	0.7
Otros mets. no ferrosos		0.4		1.8		0.9		2.1		0.9
Derivados del petróleo		2.8		2.8		2.5		1.8		2.8
Petróleo crudo	680.2	8.7	1,259.1	16.0	715.5	9.2	543.0	7.0	657.8	7.4
Coque y deriv. del carb.		1.3		0.2		0.2		0.1		0.2
Carbón	1,665.1	19.2	1,196.8	13.8	1,086.3	12.5	923.9	10.6	1,065.3	14.7
Otros minerales		1.7		1.8		1.3		2.4		1.4
Productos mecánicos		10.1		6.4		6.6		6.6		2.9
Productos químicos		1.7		1.8		1.9		2.3		4.4
Tolueno	—	—	—	—	—	—	—	—	53.3	5.7
Tejidos de algodón	—	—	—	—	—	—	—	—	45.0	9.0
Material de construcc.		1.6		0.7		1.2		2.6		0.3
Madera	431.5†	4.1	522.1†	4.9	210.7†	2.0	179.8†	1.7	566.0†	5.4
Algodón, lana y otros productos agrícolas		1.3		2.7		2.5		0.8		1.5
Otros prod. industriales		1.6		1.9		5.8		2.7		3.4
Total		107.0		83.1		72.9		74.3		89.7

* Valor de las importaciones y de la producción a precios de 1950, importaciones CIF. Un mil millones de liras es igual a 1 600 000 dólares.
† Miles de metros cúbicos.

Cuadro 4.2. Valor agregado y ocupación industrial creada en la totalidad de la economía italiana por cada mil millones de liras de producción OSP de diferentes clases *

Industria que los utiliza	Barcos Valor agregado (miles de liras)	Barcos Ocupación (años-hombre)	Aeroplanos Valor agregado (miles de liras)	Aeroplanos Ocupación (años-hombre)	Automotores Valor agregado (miles de liras)	Automotores Ocupación (años-hombre)	Aparatos electrónicos Valor agregado (miles de liras)	Aparatos electrónicos Ocupación (años-hombre)	Municiones Valor agregado (miles de liras)	Municiones Ocupación (años-hombre)
Mecánica		619		774		707		894		849
Barcos	247.3									
Aeroplanos			442.2							
Automotores					420.3					
Eléctrica	15.3		1.5		12.7		552.0		0.5	
Municiones									522.7	
Otras	137.7		57.6		24.2		20.2		25.7	
Metalurgia		213		140		133		102		116
Ferrosa	174.0		90.2		104.5		54.2		86.4	
No ferrosa	28.0		42.2		21.8		42.5		23.6	
Energía		25		27		19		15		18
Fuerza eléctrica	60.5		52.8		39.6		36.4		35.9	
Petróleo	27.5		51.6		29.8		20.7		26.3	
Deriv. del carbón	13.4		8.1		7.8		5.7		9.3	
Minería	24.9	22	24.0	21	17.9	15	24.0	20	19.7	17
Química	14.4	12	14.5	12	13.7	12	16.3	15	37.1	33
Otras industrias		52		48		79		64		50
Mats. de construcc.	13.5		6.4		9.6		20.5		2.9	
Madera	11.5		13.9		5.5		4.5		14.7	
Textiles	3.1		6.3		8.2		2.7		3.3	
Otras	7.3		8.2		18.6		16.9		13.1	
Agricultura	12.0	n.d.	13.9	n.d.	8.3	n.d.	7.3	n.d.	16.4	n.d.
Servicios	104.6	n.d.	82.3	n.d.	171.6	n.d.	99.7	n.d.	76.8	n.d.
Total	805.2	913	913.3	1,022	927.0	955	925.7	1,100	914.6	1,083

* Valor agregado y producción a precios de 1950. Un mil millones de liras es igual a 1 600 000 dólares.

	Por uso de la producción					
	Final (w baja)			*Intermedia (w alta)*		
Por el tipo de insumo	III. *Manufactura final*	*w*	*u*	II. *Manufactura intermedia*	*w*	*u*
	3 Vestidos	0.12	0.69	13 Hierro y acero	0.78	0.66
	4 Astilleros	0.14	0.58	22 Papeles y sus productos	0.78	0.57
	8 Cuero y sus productos	0.37	0.66	28 Derivados del petróleo	0.68	0.65
	1 Alimentos enlatados	0.15	0.61	19 Metales no ferrosos	0.81	0.61
Manufactura (u alta)	2 Harinas	0.42	0.89	16 Productos químicos	0.69	0.69
	5 Equipo de transporte	0.20	0.60	23 Productos del carbón	0.67	0.63
	7 Maquinaria	0.28	0.51	11 Productos de caucho	0.48	0.51
	15 Muebles y prod. de madera	0.38	0.61	12 Textiles	0.57	0.69
	14 Prod. minerales no met.	0.30	0.47	9 Impresión y publicación	0.46	0.49
	10 Industria n.e.c.	0.20	0.43			
	IV. *Producción primaria final*			I. *Producción primaria intermedia*		
	A Mercancías			17 Agricultura y silvicultura	0.72	0.31
Producción primaria (u baja)	6 Pesca	0.36	0.24	27 Minería de carbón	0.87	0.23
	B Servicios			20 Minería de metales	0.93	0.21
	25 Transportes	0.26	0.31	29 Petróleo y gas natural	0.97	0.15
	21 Comercio	0.17	0.16	18 Minerales no metálicos	0.52	0.17
	26 Servicios	0.34	0.19	24 Energía eléctrica	0.59	0.27

* Los sectores están numerados en orden de triangulación del cuadro 8-3. Los valores de w y u son los promedios para Italia, el Japón y los Estados Unidos del cuadro 8-13.

CUADRO 8-3. *Ordenamiento de sectores en disposición triangular*

Sector (clasificación no estándar) *	*Clasificación de países*				*Por ciento de las transacciones sobre la diagonal* (t_i, t_j) †							
	J	*I*	*E.U.*	*N*	*Japón*		*Italia*		*Estados Unidos*		*Noruega*	
					Hilera	*Col.*	*Hilera*	*Col.*	*Hilera*	*Col.*	*Hilera*	*Col.*
1. Alimentos enlatados (4)	1	10	1	2	9.7	0	2.4	**	4.0	0	1.4	0
2. Harinas (6)	3	11	2	3	4.6	0.2	9.6	**	43.3	4.6	41.1	0.3
3. Vestidos (1)	6	4	5	4	6.7	**	4.0	0	0.5	0	2.0	0
4. Astilleros (2)	4	3	7	5	5.0	0	0	0	15.3	0.7	2.1	0
5. Equipo de transporte (9)	7	2	4	6	12.9	‡	0	0	11.8	0	0.3	0
6. Pesca (5)	2	12	6	18	10.2	3.2	0.4	16.3	10.4	0	9.3	1.4
7. Maquinaria (12)	11	5	8	9	10.5	1.1	0.6	0	5.0	0.3	2.6	0.9
8. Cuero (3)	12	6	9	7	1.2	3.7	0.5	**	2.3	0.2	0.5	0
9. Impresión (17)	5	1	3	1	28.3	**	0	0	50.2	*	26.6	0
10. Industria, n.e.c. (8)	8	7	10	8	12.4	0.4	2.6	0.7	16.5	2.1	11.0	**
11. Caucho (10)	9	8	12	13	39.2	**	2.7	1.2	17.0	0	5.9	1.0
12. Textiles (11)	10	9	15	14	2.6	0.4	1.2	0.1	3.5	1.4	3.0	1.0
13. Hierro y acero (13)	13	13	13	17	4.9	0.6	0.8	0.7	5.4	2.1	0.9	0.4
14. Productos minerales no metálicos (14)	14	15	14	10	8.2	3.4	4.5	0.6	6.8	2.2	10.1	**
15. Muebles y productos de madera (15)	16	14	11	12	10.1	0.8	4.7	2.9	11.9	1.1	0.4	0.1
16. Productos químicos (16)	15	18	16	16	8.1	13.1	3.6	7.6	14.9	8.1	0.7	13.9
17. Agricultura y silvicultura (18)	17	17	17	15	6.1	3.1	0.9	3.3	0.3	9.5	6.0	7.2
18. Minerales no metálicos (19)	13	20	18	20	18.2	9.6	0.6	2.1	4.5	6.4	8.3	5.0
19. Metales no ferrosos (21)	19	19	19	19	6.5	3.3	0	7.6	1.8	6.1	1.6	4.6
20. Minería metálica (22)	21	21	20	21	0	22.3	0	1.5	1.2	9.1	0	4.6
21. Comercio (24)	23	23	21	24	4.2	2.6	0.3	1.2	3.8	4.0	2.5	1.9
22. Productos de papel (25)	25	16	22	11	1.0	20.1	23.4	8.3	4.3	15.4	11.4	0.5
23. Productos de carbón (23)	22	25	23	22	7.4	3.5	0.1	6.6	2.0	1.9	35.3	0
24. Energía eléctrica (26)	20	26	24	27	19.6	9.6	0.3	3.9	17.7	2.8	0	3.1
25. Transportes (7)	24	22	25	23	3.9	7.6	1.6	1.5	4.1	7.6	2.9	0.4
26. Servicios (28)	27	24	26	25	0.1	17.8	0.9	3.6	0.4	11.0	0.4	13.2
27. Minería de carbón (27)	26	27	27	28	1.9	20.4	1.9	15.0	0.2	10.5	0	31.2
28. Productos de petróleo (20)	28	28	28	26	0.1	8.7	0.1	6.4	0.1	13.6	7.7	26.9
29. Petróleo y gas natural (29)	29	29	29	§	0	22.4	0	6.9	0	3.1		
TOTAL					5.7	5.7	1.9	1.9	5.4	5.4	4.2	4.2

* Los números entre paréntesis son los números de código original.

** No se diferencia en el cuadro noruego.

‡ Indica menos que el dígito significativo.

† $t_i = \frac{1}{X_i}\sum_{j>i} X_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, 29)$, $t_j = \frac{1}{X_j}\sum_{i<j} X_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots, 29)$.

M O D E L O S   R E G I O N A L E S   E -
I N T E R R E G I O N A L E S   D E   I N S U
M O - P R O D U C T O   Y   P R O G R A M A -
C I O N   L I N E A L

VII MODELOS REGIONALES E INTER-REGIONALES DE INSUMO-PRODUCTO Y PROGRAMACION LINEAL

VII.1 Introducción.

Los estudios de insumo-producto que se han aplicado hasta la fecha provienen todos ellos del trabajo del "Proyecto de Investigaciones Económicas" de la Universidad de Harvard. El trabajo de los primeros años del "Proyecto Harvard" sobre el análisis interregional ha sido basado en los informes de Leontief (1953) e Isard (1951 y 1953). Leontief propuso un "modelo regional equilibrado" que pudiera utilizarse para dividir la solución de un modelo nacional en componentes regionales, y se basó como primera aproximación, en que se pudiera nombrarse a las industrias bajo el sinonimo de "nacionales" o "locales". Se supuso que para las industrias locales la demanda regional estaría suministrada enteramente de fuentes locales, y que tales industrias estarían equilibradas regionalmente. Por otra parte, para las industrias nacionales se supuso que cada región productora abastecería una proporción constante de la demanda en cada región consumidora. Se reconoce que este planteamiento acerca de las industrias nacionales sólo era una aproximación a medias, pero ofrece la gran ventaja de que puede probarse ampíricamente el modelo con sólo el empleo de los datos de la producción y el consumo.

Las pruebas del modelo regional equilibrado, de acuerdo con el informe de Isard (1953), demostraron que, aunque podrían describirse como locales un número considerable de sectores, se necesitaba darle a éstos un refinamiento adicional al concepto -

de una industria nacional en la que no se afectara el tipo de la oferta por la ubicación de la demanda. Una gran proporción de industrias no locales quedan incluídas dentro de una categoría intermedia en la que la ubicación de la demanda así como la distribución de la capacidad de producción determinan corrientes interregionales.

Isard en el año de 1951 propuso un modelo alternativo de insumo-producto que hace un planteamiento básico totalmente distinto respecto de las industrias no localizadas. El sugirió que una mercancía abastecida por una región debe considerarse como un insumo diferente de una mercancía similar suministrada por otra fuente, y que deben emplearse para cada uno de los coeficientes separados de insumo. Leontief por el contrario, en relación con las mercancías nacionales, aparecerían como en un caso especial en el cual las proporciones entre el insumo abastecido por diferentes lugares son las mismas para todos los usos y en todas las regiones.

El modelo de Isard no ha sido aplicado en el trabajo empírico porque requeriría información respecto a la fuente de abasto de cada mercancía y de cada sector usuario.

Isard y Leontief intentarón explicar la variación en la oferta de mercancías no localizadas introduciendo regiones de distinta categoría. Se supuso que la oferta y la demanda de algunas mercancías se equilibraría dentro de regiones bastante pequeñas, y que en otras se equilibraría en zonas de distintas dimensiones. Sin embargo, los experimentos llevados a cabo con diferentes agrupamientos de estados no revelaron ninguna subdivisión en dos regiones en forma satisfactoria en los Estados Unidos. El problema fundamental parece consistir en que se sobreponen las zonas del mercado para distintas mercancías, y que se necesitaría cierto número de subdivisiones diferentes a fín de producir el equilibrio regional. Estos experimentos proporcionaron una orientación útil para posteriores investigaciones, y de los cuales mencionaremos más adelante al ver algunos ejemplos de modelos interregionales hechos por diversos autores, con sus respectivos rasgos distintivos.

Con lo que respecta a los modelos de programación lineal, existen fuentes alternativas de abastecimiento de mercancías que pueden ser fácilmente sustituídas por otras en determinado momento si así lo requerimos, en estos casos, puede sugerirse el empleo de la programación lineal como un medio para superar las dificultades del análisis interregional. Podemos introducir algunas actividades para algunas partes del modelo al mismo tiempo que para el resto se mantiene la misma estructura de insumo-producto. Sin embargo, los análisis que se han hecho hasta la fecha han admitido como ya determinadas a las demandas totales regionales, y sólo han estudiado el tipo óptimo de oferta para una sola industria considerada aisladamente. Si no hubiesen demasiadas industrias que requieren un estudio más detallado, no sería muy difícil combinar éste método con una solución global interindustrial por medio de un procedimiento iterativo.

El empleo de modelos de programación para la distribución entre regiones de productos básicos industriales ha sido sugerido por varios autores (Henderson y Fox). Estos resultados son particularmente interesantes para compararlos con los estudios de insumo-producto, porque ponen de manifiesto tanto las ventajas como las dificultades del método de programación.

VII.2 Modelos Interregionales de Insumo-Producto.

A continuación mostramos algunos modelos interregionales de insumo-producto con el fín de poder ejemplificar la utilización de los diversos desarollos que fueron anteriormente mencionados (capítulos 2, 3 y 6) y que vienen a ser el esquema general de nuestros objetivos principales de todo el trabajo elaborado anteriormente. En la introducción, se dierón algunos enfoques básicos de el modelo inicial desarrollado por Leontief e Isard, que en sí, es el modelo en el cual diversos autores han hecho sus estudios y en que se ha procurado dar una aplicación práctica sobre estas cuestiones. Cabe señalar que para cada modelo desarollado, el autor ha cambiado o reformado algún aspecto del modelo fundamental, por el cual ha tomado éste, un rasgo distintivo, y que se irán señalando conforme se vayan presentando. Se ha procurado respetar hasta donde es posible, las explicaciones y notación del autor, con el fín de un mejor desarollo y comprensión entre uno y otro modelo, y con el fín de lograr una mayor diferenciación en los modelos expuestos.

a) Modelo de Dos Regiones de La Economía Italiana:

El modelo interregional de la economía italiana se proyectó con el objeto de cubrir la diferencia entre un análisis puramente regional y los proyectos nacionales.

La aplicación especifica para la que fué ideado el análisis del mismo, en alto grado, fué la de determinar la elección de los sectores y el método de estimación de los coeficientes estructurales. A semejanza con el modelo de Leontief e Isard, se túvo que confiar principalmente en las cifras de la producción regional de cada sector y, de modo indirecto, obtener sistemas comerciales --

partiendo de la aplicación de los coefiecientes del insumo nacional. Los inconvenientes de este procedimiento son menos importantes cuando sólo se distinguen dos regiones, porque no hay duda alguna respecto al destino de las mercancías.

La lógica que se siguió al separar la economía italiana en dos regiones es más aparente de lo que sería para la mayor parte de los países. La industria se encuentra sumamente concentrada en el norte, lo que hace que el cálculo de los coeficientes de la oferta regional sea más fácil que en otra región donde la industria se encuentra ampliamente diseminada.

Se obtuvierón los coeficientes de insumo agrupando la matriz original italiana en 22 sectores. Los coeficientes del sector familiar, qu deben incluirse en un modelo regional debido al efecto que el lugar del consumo tiene sobre la ubicación de la producción, se determinarón partiendo de estudios preliminares de los presupuestos. Se calcularón coeficientes propios para cada región.

El análisis se proyectó para medir los efectos de un programa combinado de inversiones públicas y privadas, se supuso que un incremento en la autosuficiencia regional daría por resultado sectores donde pareciera probable la inversión, de manera particular, en las industrias orientadas hacía los mercados. También fuerón calculados los coeficientes de oferta de la capacidad y la producción existentes en cada región.

El modelo que se presenta a continuación en las tablas (D) y (E) están basados en las ecuaciones (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) y (2.8) que se mencionaron anteriormente en el capítulo 2. En la tabla (D) se indican los coeficientes de oferta de las dos regiones. Estos indican las proporciones en que se espera sea abastecida una mercancía, de cada región y de las importaciones.-

El total de los coeficientes de oferta es 1.0 en cada caso, salvo los errorres cometidos al redondear las cifras. Se dió por hecho que los diez primeros sectores eran "nacionales", y en similitud al modelo de Leontief, por tener idénticas estructuras de la oferta determinadas por la capacidad muy pequeña en la mayoría de estos sectores en el sur. Los 8 sectores últimos pueden identificarse como locales, ya que sus coeficientes de oferta de la región correspondiente son aproximadamente de 1.0, y de cero los que provienen de otras partes.

Los restantes sectores "mixtos" incluyen a la agricultura, la elaboración de alimentos y la refinación del petróleo, lo que abarca al 85 % de toda la producción de mercancías en el sur. En cada caso, el sur es un exportador neto para el norte, pero la ubicación de la demanda tiene un efecto sustancial para determinar la fuente de abastecimiento. Se redujeron los coeficientes de oferta para estos sectores del saldo comercial neto existente, suponiendo que, hasta donde es posible, se cubre la demanda local con la oferta local. Los insumos que ingresan en las inversiones públicas y privadas, con un total de 150 mil millones de liras, constituyen las demandas finales cuyos efectos han de ser determinados. No se supuso ninguna variación variación en las exportaciones o en los gastos corrientes del gobierno.

Demanda en el:	NORTE			SUR		
Oferta del:	Norte	Sur	Importaciones	Norte	Sur	Importaciones
Sectores Nacionales						
1. Textiles	0.93	0.05	0.02	0.93	0.05	0.02
2. Fibras artificiales	0.86	0.01	0.13	0.86	0.01	0.13
3. Metales ferrosos	0.82	0.09	0.09	0.82	0.09	0.09
4. Metales no ferrosos	0.55	0.21	0.24	0.55	0.21	0.24
5. Productos metálicos	0.86	0.05	0.08	0.86	0.05	0.08
6. Minería	0.59	0.33	0.08	0.59	0.33	0.08
7. Papel	0.92	0.04	0.04	0.92	0.04	0.04
8. [illegible]	0.85	0.04	0.11	0.85	0.04	0.11
9. Otras industrias	0.82	0.17	0.01	0.82	0.17	0.01
10. Productos químicos	0.85	0.08	0.07	0.85	0.08	0.07
Sectores Mixtos						
11. Agricultura	0.84	0.07	0.08	-	0.92	0.08
12. Alimentos enlatados	0.86	0.11	0.03	-	0.97	0.03
13. Refinación de combustibles	0.34	0.04	0.62	-	0.20	0.80
14. Refinación de petróleo	0.75	0.18	0.07	-	0.93	0.07
Sectores Locales						
15. Vestidos	0.99	-	0.01	-	0.99	0.01
16. Muebles	0.99	-	0.01	-	0.99	0.01
17. Minerales no metálicos	0.96	-	0.04	-	0.96	0.04
18. Construcción	1.00	-	-	-	1.00	-
19. Gas y coque	0.98	-	0.02	-	0.98	0.02
20. Energía eléctrica	0.99	-	0.01	-	1.00	-
21. Servicios	1.00	-	-	-	1.00	-
22. Transportes	1.00	-	-	-	1.00	-
23. Unidades familiares	1.00	-	-	-	1.00	-

T A B L A (D)

En la tabla (E) se muestra la subdivisión de esta demanda en fuentes de abastecimiento y solución final.

TABLA (E)

Solución al Modelo Regional Italiano[1]

	Incremento en los envíos para la demanda final[2]				Incremento en la producción			
	Norte	Sur	Importaciones	Total	Norte	Sur	Importaciones	Total
Sectores nacionales:								
1-2. Textiles	-	-	-	-	44	2	1	4[illegible]
3-5. Metales y productos metálicos	41	3	1	45	83	8	6	97
6-10. Otras industrias	2	-	-	3	36	5	3	44
Sectores mixtos:								
11. Agricultura	-	-	-	-	60	5[illegible]	3	127
12. Alimentos enlatados	-	-	-	-	41	59	3	104
13-14. Combustibles	-	3	-	3	6	9	[illegible]	22
Sectores locales:								
15. Vestidos	-	-	-	-	8	10	-	18
16. Muebles	-	4	-	4	3	8	-	11
17. Minerales no metálicos	-	18	1	19	1	20	1	22
18. Construcción[2]								
19-20. Gas y electricidad	-	3	-	3	9	7	-	16
21. Servicios	9	2	-	11	61	41	-	102
22. Transportes	-	-	-	-	11	10	-	21
23. Unidades familiares[3] (valor agregado)	-	63	-	63	160	194	-	354
Totales:	52	96	2	150	524	431	31	985

(1) Las cifras están en miles de millones de liras.

(2) Los insumos de la construcción han sido colocados directa - mente en el sector de producción.

(3) La producción total de las familias incluye los impuestos - y es aproximadamente igual al ingreso generado en la región.

De los resultados mostrados anteriormente, podemos decir que existen tres rasgos generales que tienen un particular interés: - a) La distribución de los ingresos entre las regiones; b) Los efectos del programa de inversiones sobre la balanza regional de pagos; y c) Los diferentes papeles de los sectores localizados y no localizados. Aunque una cantidad mayor de datos más exactos haría cambiar los detalles del análisis, sería muy improbable que llegasen a cambiar las conclusiones generales sobre estos puntos.

En la tabla (E), se muestra que la inversión de 150 mil millones de liras producen un ingreso de 354 mil millones de liras- (suma total del sector 23) en toda Italia, más 31 mil millones- de liras de importaciones. De los recursos totales de 385 mil millones que se necesitaban para sostener el programa, únicamente - cerca de la mitad representan valor agregado dentro de la misma - región del sur. Como del valor agregado en el sur, 63 mil millones aparecen en el proceso de la inversión, los efectos inducidos de la inversión sobre los ingresos en el norte (160 mil millones) conllevan a los del sur (131 mil millones). Estos resultados tienen cierta significación política, ya que sugieren que un- programa de inversiones públicas en el sur, en términos de los ingresos creados, será tan benefico para el norte como para el sur.

Cuando no se toman en cuenta los efectos de la demanda del norte con respecto a las importaciones que recibe del sur, el incremento del ingreso en esta región es de 165 en lugar de 194 mil millones de liras. Esta diferencia de 18 % sirve de ejemplo a la importancia de la "repercusión del comercio exterior" dentro de un país considerado aisladamente.

La estructura del comercio interregional entre la región sur y la norte constituye un ejemplo típico de la que existe entre las zonas subdesarolladas y las adelantadas. Como el sur importa una gran parte de sus productos manufacturados, un incremento en la inversión produce un fuerte efecto en la balanza regional de pagos. De los 150 mil millones de liras invertidos, 54 mil millones se invierten directamente en mercancías que no se han producido localmente, muchas de las cuales vienen del norte. Las importaciones totales de la región, del norte y del exterior, que se necesitan por el incremento regional de 194 mil millones (no indicados), lo que da una propensión marginal neta a importar de 0.42.

Por último, se puede tomar como una guía, la forma en que se divide el ingreso entre los sectores localizados y los no localizados en las dos regiones. Para el país en su totalidad, puede calcularse que del ingreso resultante del programa de inversión, el 55 % se produce en los sectores locales, de acuerdo con la clasificación que se ha hecho de ellos. No obstante, en el sur el 68 % del ingreso se produce en sectores locales, en tanto que en el norte la proporción es del 42 %. Esta diferencia se debe al hecho de que la inversión inicial se realizó en el sur, pero se hace más grande esta diferencia por la ubicación predominante de los sectores nacionales en el norte.

b) Modelo de Tres Regiones de la Economía Norteamericana:

Aunque un aumento en el número de regiones a más de dos no produce un efecto en el planteamiento teórico básico del modelo interregional, los problemas empíricos se hacen más difíciles. En este caso, ya no es posible suponer que la exportación de una sola región se convierte en la importación de otra, y son esenciales las determinaciones directas del comercio interegional.

El modelo de tres regiones de los Estados Unidos, construído por Moses, representa un gran adelanto en el desarollo empírico de los modelos interregionales. Es el primer estudio que emplea sistemáticamente los cálculos directos del comercio interregional, y que hace la prueba de la estabilidad de los coeficientes comerciales en el curso de varios años.

El análisis de Moses utiliza el amplio estudio de insumo-producto de 1947, para la economía norteamericana, el trabajo de Isard y Leontief realizado con datos de 1939 proporcionó la base para dividir a los Estados Unidos en tres regiones: el Este, el medio Oeste y el Oeste. El Oeste (estados montañeses y la costa del pacífico) constituye una región natural, como lo es el sur de Italia, aunque solo produce cerca del 15 % del ingreso total del país. La división del resto del país es más o menos arbitraria. En la definición del Este se incluye a la Nueva Inglaterra, y las regiones del Atlántico de la parte media y del sur, constituyendo el resto del territorio la parte correspondiente al Medio Oeste.

El modelo analítico para el estudio de Moses se ofrece también de las ecuaciones (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) y (2.8) que han sido mencionadas en el capítulo 2. Los coeficientes de oferta regional o coeficientes comerciales, como les llamaba Mo -

ses, para estas tres regiones se muestran en la tabla (F). Para las mercancías, éstos se calcularon partiendo del comercio interregional bruto de 1947, obtenido principalmente de un muestreo de cargas de furgones de ferrocarril. Para los sectores Localizados, que en este modelo, tiene un mayor número de globales, represen - tan únicamente prestaciones y servicios, los coeficientes, se obtienen de los datos de la producción y el consumo, empleando consideraciones de ubicación.

Demanda en el:	I. ESTE				II. MEDIO OESTE				III. OESTE			
Oferta en el:	I	II	III	Importaciones	I	II	III	Importaciones	I	II	III	Importaciones
Sectores no Locales:												
1. Agricultura	0.47	0.32	0.07	0.14	0.04	0.85	0.10	0.02	0.00	0.10	0.85	0.04
2. Animales y sus productos	0.37	0.57	0.03	0.04	0.08	0.84	0.08	0.00	0.02	0.30	0.60	0.02
3. Minería	0.79	0.13	0.00	0.08	0.20	0.68	0.02	0.10	0.00	0.01	0.99	0.00
4. Madera y derivados	0.71	0.10	0.11	0.08	0.05	0.69	0.20	0.06	0.00	0.02	0.98	0.01
5. Manufacturas	0.74	[illegible]	0.02	0.04	0.20	0.75	0.03	0.01	0.00	0.24	0.65	0.02
6. Petróleo y gas natural	0.17	0.64	0.00	0.19	0.01	0.97	0.02	0.00	0.00	0.01	0.56	0.42
Sectores Locales:												
7. Energía eléctrica	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
8. Transportes y comunicaciones	0.99	0.00	0.02	0.00	0.00	1.00	0.01	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
9. Comercio, finanzas	0.98	0.02	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.98	0.00
10. Otros servicios	1.00	0.00	0.00	0.00	0.04	[illegible]	0.02	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
11. Unidades familiares	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00

TABLA (F)

En este nivel de formación de globales, ninguno de los seis sectores no localizados se ajusta mucho al concepto de Leontief de una industria nacional. La simplificación de todas las manufacturas en un solo sector, impide realizar un análisis más detallado de las industrias a la que es probable se aplique este supuesto. Como las regiones en este modelo constituyen grandes unidades económicas diversificadas, de todos los grupos principales de mercancías catalogadas, éstas tienden a abastecer a más de la mitad de sus propias necesidades. La única excepción a esta generalización nos la ofrece las importaciones de productos animales, de petroleo y gas natural en el Este. Por el contrario, únicamente siete de los 99 coeficientes que representan el comercio interregional llegan a 0.20. Esto contrasta con los 16 de los 92 coeficientes del modelo italiano, la diferencia se debe, a la formación de globales de todas las manufacturas en el modelo norteamericano y a la falta de industria en la región sur de Italia.

El modelo al que Moses ha aplicado su modelo es hipotético, pero en cuanto a los conceptos es similar al ejemplo italiano. Presupone un incremento de 10 % en todos los artículos de uso final que no son de consumo (inversiones, gastos del gobierno y exportaciones) en la sola región oriental. Los incrementos en los niveles de producción en cada región sobre este planteamiento hecho, se indica en la tabla (G).

A pesar de las diferencias estructurales existentes entre Italia y los Estados Unidos, y la distinta composición de la demanda final, hay bastante similitud en el tipo de creación del ingreso en los dos análisis. Se ofrece una comparación entre ellos en la tabla (H), en la cual se ha combinado el Medio Oeste con el Oeste para formar una sola región.

T A B L A (G)

Solución al Modelo Regional Norteamericano[1]

	Incremento en la producción por región		
	I	II	III
Sectores no locales:			
1. Agricultura	27	70	17
2. Animales y sus productos	55	146	17
3. Minería	13	7	2
4. Productos de madera	7	4	3
5. Manufacturas	414	264	33
6. Gas y petróleo	4	25	1
Sectores locales:			
7. Energía eléctrica	13	6	0
8. Transportes y comunicaciones	72	30	6
9. Comercio, finanzas	174	72	11
10. Otros servicios	243	96	19
11. Unidades Familiares	696	310	50

(1) Los datos publicados no permiten hacer un cálculo de los incrementos en los envíos para la demanda final.

T A B L A (H)

Comparación de los Análisis Regionales (en porcientos)

	ITALIA		ESTADOS UNIDOS	
	Sur	Norte	Este	Oeste
1. División inicial del ingreso	25	75	42	56
2. División del incremento en los envíos para la demanda final	63	37		
3. División del ingreso total producido.	55	45	56	34
4. Distribución del ingreso por sectores:				
a) local	68	42	73	39
b) no local	32	56	27	61
5. Propensión marginal a importar	0.42	-	0.30	-

En la región de orígen (región sur de Italia y la región oriental de los Estados Unidos), ocurre el incremento en el ingreso principalmente en los sectores locales (68 % en Italia y 73 % en los Estados Unidos). Para las otras regiones simplemente serán el complemento a estos porcentajes. El 58 % del incremento en el norte de Italia y 61 % del aumento en las zonas medias y occidental viene de sectores no localizados. Sin embargo, como la región oriental de los Estados Unidos es más autosuficiente que la región sur italiana, en la región oriental norteamericana se efectua un incremento total en el ingreso más grande (66 %) que el de la parte sur de Italia (55 %).

La validez empírica de los análisis interregionales de este tipo depende de la estabilidad de los coeficientes de la oferta regional. Como los sectores de servicios, que producen del 30 al 50 % del ingreso nacional, proporcionan un sólido argumento para diferenciar los efectos regionales. El alcance de la especialización depende de la dotación de recursos, del grado de desarollo económico, y de la dimensión de las regiones diferenciadas. La especialización y los coeficientes de oferta estable pueden ser el resultado de la falta de recursos naturales, como del petróleo y el gas en la zona oriental de los Estados Unidos; de la concentración de la producción, como la de automoviles en el norte de Italia; o de la diferenciación de productos en relación con la fuente de abastecimiento. En cada uno de estos casos habrán diferencias sustanciales en el costo de los abastecimientos provenientes de distintos puntos de orígen, y tendrán tendencia a persistir los tipos existentes de la oferta.

La única prueba empírica de la estabilidad de los coeficientes de la oferta regional es la que describió Moses. El calculó dichos coeficientes para los primeros cinco grupos de mercancías-de los años de 1947, 1948 y 1949. La variación media de año en - año fué de 0.013. Cuando se emplearon los coeficientes de 1949 -- con los datos de 1947, el error medio en el pronóstico de los 15- embarques totales regionales fué de 4 %, y fué de 12 % para las - corrientes interregionales individuales (Moses en 1955 ofrece los detalles sobre esta prueba). La omisión de la región occidental- reduce el error medio para las corrientes individuales del 12 al- 6 %. Aún cuando no se han hecho pruebas en períodos más largos, - éstos resultados son lo bastante confiables como para justificar- nuevas pruebas más amplias con base en una menor formación de -- agregados.

Para emplear el tipo de modelo que se ha mencionado, no es - necesario que sean constantes los coeficientes de la oferta regional, sino únicamente que éstos puedan ser predecidos anteriormente. Los coeficientes de oferta son los menos pronosticables cuando sólo hay pequeñas diferencias en el costo de los abastecimientos provenientes de diferentes orígenes, o cuando son efectivas - las limitaciones de la capacidad. En el primer caso, pequeños cambios de precios pueden producir grandes variaciones en el sistema comercial, como en los mercados internacionales de productos relativamente homogéneos. Cuando son de importancia las limitaciones- de la capacidad, la cantidad que se importe depende hasta cierto- punto del nivel de la demanda en cada región, y los coeficientes- de la oferta pueden variar considerablemente. Los modelos que permiten elegir entre fuentes de abastecimiento alternativas (modelos interregionales de programación lineal) pueden arrojar alguna luz sobre la significación cuantitativa de estos factores en - los casos reales.

VII.3 Modelos Interregionales de Programación Lineal.

A continuación se presentan algunos ejemplos de modelos interregionales de programación lineal, con el fín de poder ejemplificar la utilización de los diversos desarollos que fueron anteriormente mencionados (capítulo 2, 3 y 6) y que viene a ser el esquema general de nuestros objetivos principales de todo el trabajo - elaborado anteriormente.

La utilización de la programación lineal como un medio para - superar las dificultades del análisis interregional, cuando existen fuentes de abastecimiento alternativas, nos pueden dar una -- guía sobre el nivel de la demanda en cada región y los coeficientes de la oferta.

El empleo de modelos de programación lineal para la distribución entre regiones de productos básicos industriales de Henderson (modelo de la industria del carbón de piedra) y Fox (modelo para el alimento de ganado) nos sirven como ejemplo para la - comprensión sobre estos conceptos y nos dan una mejor idea acerca de los lineamientos generales sobre el modelo de programación interregional.

a) Modelo de la Industria del Carbón de Piedra:

En el estúdio realizado por Henderson se divide a los Esta - dos Unidos en 14 regiones, de las cuales 11 producen carbón de -- piedra. En cada región se distinguen dos tipos de producción, la- que se obtiene de la extracción subterranea y de la superficie, - porque son diferentes sus costos de producción. Los datos para el modelo que a continuación se presentan están basados en los si -- guientes puntos:

1) La capacidad de cada uno de los tipos de producción de cada región.
2) El total de la demanda regional de carbón.
3) Costo total por unidad de producción de cada tipo en cada - región.
4) Costo por unidad de transporte a cada punto de destino. De esta manera, el modelo sólo contiene los resultados del análisis interindustrial en forma de producción, demandas totales y costos de transporte, que en vez de una forma expresa de estructura interindustrial. No obstante, mientras las demandas y los costos no se vean demasiados afectados por la- solución, es válido esta división del análisis.

Pueden ordenarse estos datos en la forma del modelo clásico- para el transporte de Hitchock-Koopmans[1], cambiando los costos -- de la producción y el transporte en un sólo costo de remisión para cada combinación de puntos de orígen y lugares de destino. Hay 22 puntos de orígen y 14 lugares de destino, o sea 308 remisiones teóricamente posibles, peró sólo se recopilaron los datos de las- 168 remisiones que, de modo cocebible, se pudieran utilizar. El - problema de la programación lineal en este modelo sería el de que se satisfagan las demandas regionales dadas a un costo total mínimo.

En el modelo más general de programación lineal interregional, existen dos tipos de ecuaciones en la solución cuantitativa de este modelo. Primero, el total de las corrientes del producto a una región dada debe ser igual a la demanda total en esa región. No - obstante como contraste con los modelos de insumo-producto, cada-una de estas corrientes se trata como variable separada más que - como una fracción constante de la demanda regional. Segundo, la - oferta total dada de una región no debe exceder de su capacidad - para cada tipo de producción. Este tipo de ecuación no existe en- el modelo de insumo-producto.

Como cada embarque en el modelo se registra tanto como una - ecuación de oferta como de demanda y no hay demandas interindus - triales, las ecuaciones cuantitativas del modelo del transporte - pueden representarse en la tabla (I), que corresponde al cuadro (2.A) que se vió en el capítulo 2. En esta tabla se presentan - los ecuaciones de demanda en columnas y las de la oferta en hileras. No se incluyen los coeficientes de insumo puesto que todos - son la unidad. Se indica la solución cuantitativa óptima para el- modelo de 1947. Por ejemplo, la cuarta ecuación de demanda en la- solución, expresa que la demanda total de 107 en la región 4 está- suministrada por 99 unidades de producción subterranea de la re - gión 3 y 8 unidades de la producción de superficie de la región 4. La primera ecuación de la oferta indica que la capacidad subterranea de 226 en la región 1 remite 78 a la región 1, 48 a la región 5, 47 a la región 14, y tiene una capacidad no utilizada de las - 53 restantes. Como se incluye la capacidad excedente, la oferta - total es igual a la demanda total.

Hay 36 ecuaciones en este modelo, y el teorema básico de programación lineal nos asegura que habrán únicamente 36 variables - positivas en la solución. De éstas, en el presente caso 7 representan la capacidad no utilizada, así pues, solamente hay 29 embarques positivos de las 306 posibilidades consideradas primeramente. Veinte son embarques para el consumo dentro de la región - productora y 9 son movimientos interregionales. Las exportaciones provienen casi totalmente de las tres primeras regiones que tie -

nen excedente, pero se diseminan entre ocho regiones deficitarias. Una característica en común en todos los modelos de programación-lineal es que ninguna región puede tanto importar como exportar.- Por medio de un cálculo similar se determinan en la solución óptima los precios unitarios y las regalías correspondientes.

Henderson ha calculado soluciones para los años de 1947, 1949 y 1951, y las ha comparado con los embarques reales en esos años. Si su planteamiento teórico con respecto al costo es correcto, la diferencia en costo total entre el tipo óptimo y los tipos observados asciende a cerca del 10 %, o sea 200 millones de dolares. - La diferencia es más grande en 1949, cuando hubo un gran descenso en la demanda, que en 1947, porque tanto los industriales como --- los sindicatos se pusieron de acuerdo a fin de lograr una reduc - ción entre todos los distritos antes que dejar los efectos tota - les recayeran sobre los productores de alto costo.

A continuación se muestra la tabla (I) donde se encuentra-la solución del costo mínimo para las remisiones de carbón en el-modelo de Henderson.

T A B L A (I)

Solución del Costo Mínimo para las Remisiones en el Modelo de Henderson (1947)[1]

Localización de la Demanda

Región de oferta[2]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Capacidad excedente	Oferta total (capacidad)
1. Sub.	78				48									47	52	226
Sup.	143															143
2. Sub.							35					29	123		104	382
Sup.		66										31				97
3. Sub.			99	99		43		12							17	271
Sup.			40													40
4. Sup.															50	50
Sup.				8												8
5. Sub.					65											65
Sup.					52											52
6. Sub.						165										165
Sup.						75										75
7. Sub.															13	13
Sup.							28									28
8. Sub.								1								1
Sup.								3								3
9. Sub.									21		9				7	37
Sup.									7							7
10. Sub.										17					3	20
Sup.										1						1
11. Sub.											1					1
Sup.											1					1
Demanda total	221	60	140	107	165	223	63	16	29	18	11	60	123	47	336	1686

(1) Las unidades son 10^{13} Btu.

(2) Regiones (sub. denota minería subterranea; sup. denota minería de superficie): 1. Pa., Md; 2. W., Va.; 3. Va., Ky., D.C.; 4. Ala., Tenn., Ga., C.N., C. S., Fla, Miss, La.; 5. Ohio; 6. Ill., Ind., Mich.; 7. Ia., Mo., Kan., Ark., Okla., Tex.; 8. D.N., D.S., Neb.; 9. Mont., Wyo., Utah, Idaho; 10. Colorado, N.M., Ariz., Calif., Nev.; 11. Wash., Oreg.; 12. Me., Vt., N.H., Mass., Conn., R.I., 13. N.Y., N.J., Del.; 14. Minn., Wis.

b) Modelo para el Alimento de Ganado:

Un modelo interregional de comercio más general de una sola-mercancía, en el que tanto la oferta como la demanda son funcio - nes del precio, ha sudo analizado por Samuelson en un estudio en-el año de 1952. El demuestra que la solución lineal de este modelo no lineal incluye la solución del modelo más sencillo de transpor te de Hitchcock-Koopmans, y que por aproximaciones sucesivas con-vergirán en una solución iterativa[2]. Aunque no es probable que en muchos casos se puedan averiguar las funciones de la oferta y la-demanda que se necesiten para completar este tipo de modelo, Fox-en el año de 1953 ha utilizado una versión modificada del modelo-para estudiar el comercio interregional del alimento para el gana do.

El modelo empleado por Fox difiere del de Henderson en dos - aspectos: a) La demanda de alimentos para el ganado en cada re -- región se supone que es una función lineal de su precio; y b) Más que la capacidad, se considera conocida la producción en cada re - gión. Quitando estos dos puntos, podemos decir en rasgos genera - les que el modelo de Fox es semejante al modelo de Henderson.

Fox, en su modelo divide a los Estados Unidos en diez regio- nes de acuerdo con la ubicación del consumo y de la producción. - Se consideran conocidos los costos del transporte como se hizo en forma anterior en el modelo de Henderson, pero se supone que los-precios se ajustan en cada región a fín de igualar la oferta y la demanda. Ya que se empleó para todas las regiones la misma fun -- ción de la demanda (con valores adecuados de las variables prede terminadas que fueron interesantes), la solución del sistema re- sultó ser bastante sencilla a pesar de lo complicado que es traba jar con un modelo no lineal. Aparte de los ajustes en el nivel de la demanda, la lógica de la solución es la misma que en el modelo de Henderson e incluye la reducción al mínimo de los costos de transporte. Se muestra el resultado en la tabla (J) que en la forma similar a la tabla (I), pero que incluye los precios así como las cantidades embarcadas.

Podemos comparar estos resultados con la solución óptima obtenida para el movimiento del carbón de piedra. Aún cuando los costos de transporte constituyen una pequeña parte en el precio total en el presente caso, los embarques interregionales sólo representan el 12 % de la producción total en comparación con el 35 % en el caso del carbón. Es explicable esta diferencia, en gran parte, por el hecho de que la tierra para la producción del forraje se puede conseguir de una manera más fácil que los recursos carboníferos (también se utiliza un número algo menor de regiones). Los precios de entrega de alimentos para animales varían de $ 1.17 a $ 1.57 por bushel, lo que es mucho menos de la escala de 15 a 35 centavos por dolar por millón de Btu de carbón de piedra. En ambos casos, el precio más alto se encuentra en la costa del pacífico, y depende del costo de la importación.

Un factor importante es, que la falta de mercancías no agrícolas puede conducir a la inestabilidad a corto plazo en los tipos de abastecimiento debido a los cambios atmosféricos. Fox demuestra que las condiciones de sequía, como las que realmente han sucedido, ocasionarían un cambio muy grande en la producción y en el tipo óptimo de comercio aún cuando los tipos de producción normal son completamente estables.

A continuación presentamos la tabla (J) donde se muestra las soluciones cuantitativas y de precio de los embarques de alimento para el ganado en los años de 1949 y 1950.

T A B L A (J)

Soluciones Cuantitativas y de Precio de los Embarques de Alimento de Ganado, 1949-1950[1]

Región productora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Producción total	Precio[2]
1. Noroeste	7.4 0										7.4	1.52
2. "Cinturón del maíz	1.7 0.22	47.7 0				1.9 0.16	2.3 0.22	1.6 0.15			55.1	1.31
3. Región de los Grandes Lagos	2.8 0.31		15.6 0								18.4	1.21
4. Planicies del norte	1.8[3] 0.36			13.3 0				1.4 0.26		1.9 0.41	18.4	1.17
5. Montes Apalaches					8.6 0						8.6	1.46
6. Sureste						4.6 0					4.6	1.52
7. Delta del Misisipí							3.2 0				3.2	1.45
8. Planicies del Sur								5.7 0			5.7	1.43
9. Región de las Rocallosas									2.9 0	0.4 0.30	3.3	1.27
10. Región del Pacífico										2.7 0	2.7	1.57
Demanda total	13.8	47.7	15.6	13.3	10.6	6.6	4.7	7.2	2.9	5.0	127.6	
Precio	1.52	1.31	1.21	1.17	1.46	1.52	1.45	1.43	1.27	1.57		

(1) Producción en millones de toneladas y el precio en dolares por Bushel (1 bushel = 35.2 litros).

(2) El precio en cada región de importación, menos los costos del transporte. Los costos del transporte están en negro.

(3) Reasignando arbitrariamente de reexportaciones vía "cinturón"del maíz.

VII.4 Comparción de Resultados entre el Insumo-Prodcuto y la - Programación Lineal.

Los resultados que se muestran en el inciso anterior nos permiten comparar los enfoques del insumo-producto y la programación lineal con el análisis regional. El insumo-producto supone la persistencia tanto de los coeficientes técnicos como de los tipos de oferta existentes, en tanto que en la programación lineal se presupone que se harán los ajustes en forma más eficiente de acuerdo a las cambiantes condiciones. Aunque no hemos hecho un análisis - de los dos últimos casos empleando como comparación un modelo de- insumo-producto, dos rasgos de las soluciones de programación son apropiados para hacer el diseño de un modelo de esa naturaleza. - Primero, se ha demostrado que en casi todos los casos es eficaz - utilizar plenamente los recursos nacionales antes de importar. En segundo lugar, la estabilidad de los tipos de corrientes en la solución óptima es completamente marcada para el modelo de carbón - de piedra. Aunque hubo un fuerte descenso en la demanda durante - el período analizado, de las 36 remisiones positivas y capacidades no utilizadas, 29 fueron las mismas en el curso de los tres años.

El modelo de programación es preferible cuando hay que hacer recomendaciones políticas y suficiente cantidad de datos, pero para analizar el funcionamiento real del sistema económico la elección entre un sector y otro puede no verse de una manera muy clara. Aunque en el modelo de Henderson no establece esta característica de comparación, es sumamente probable que un pronóstico de - las producciones de 1949 basado en los tipos de oferta de 1947 -- habrían sido más aproximados al resultado real que la solución programada. En un segundo cálculo, Henderson trató de tomar en consideración los efectos de la política sindical obrera reduciendo la capacidad productiva a fín de adaptarla a la semana de trabajo --

más corta impuesta por el sindicato. Por esta razón redujo las - desviaciones netas absolutas, entre lo que había calculado y los- resultados verdaderos, del 42 al 10 % de la demanda total. Es probable que introduciendo tales requisitos a un comportamiento so - cialmente eficiente será posible desarrollar modelo que, para las- finalidades de predicción, sean superiores al insumo-producto o a la programación lineal en la forma que revisten actualmente. Como óptimas desde un punto de vista social, porque no toman en consideración la variable del costo social de la desocupación en regiones diferentes.

N O T A S

(1) En el libro "Linear Programming and Economic Analysis" de Dorfman, Samuelson y Solow, en el capítulo 5, 1958; y en un estudio de Manne, 1956.

(2) En el apéndice del capítulo 5, podemos encontrar diferentes formas de enfocar a problemas de solución por medio de soluciones iterativas.

B I B L I O G R A F I A

1. Inter-Regional and International Input-Output Analysis, Chenery, Hollis; The Structural Interdependence of the Economy, 1956

2. Regional Analysis; The Structure and Growth of the Italian Economy, 1953

3. A Spatial Equilibrium Model of Livestock-Feed Economy in the United States, Fox, K; Econometrica, XXI, 1953

4. The Efficiency of the Coal Industry, Henderson, J.; Harvard University Press, Cambridge, 1958

5. Allocation in Space, Lefeber, L.; North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958

6. Some Empirical Results and Problems of Regional Input-Output Analysis, Isard, Walter; Studies in the Structure of the American Economy

C O N C L U S I O N E S   G E N E R A L E S

VIII C O N C L U S I O N E S   G E N E R A L E S

Aunque ya se han dado ciertas conclusiones que en forma particular hemos hecho en los últimos incisos de cada capítulo en cuestión, es bien importante tratar de englobar todos estos aspectos en este punto en especial.

A continuación se tratará de presentar los aspectos generales en una forma más o menos ordenada y que al final pueda servirnos de utilidad para nuestros objetivos fijados al iniciar este trabajo.

1) La posibilidad de emplear los distintos tipos de análisis interregionales debe determinarse partiendo de su estructura y de la estabilidad de los parámetros que pueden calcularse para ellos. Aunque en términos generales los coeficientes de oferta probablemente son más variables que los coeficientes técnicos de insumo-producto, sería recomendable conocer de antemano cuáles coeficientes de insumo que no son mercancías y que han sido suministrados localmente. La simple división entre mercancías locales y no locales mejora considerablemente el realismo de algunos aplicaciones de los modelos de insumo-producto. Sin embargo, para la mayoría de los artículos manufacturados es necesario realizar estudios más detallados respecto a los tipos de la oferta en el curso del tiempo, antes de que se pudiera saber lo suficiente acerca del alcance de sus variaciones.

2) El aumento de una dimensión regional a los modelos interindustriales nos complica aún más el problema de la formación de agregados[1], ya que el número de datos que se nece-

sitan, crece en proporción al cubo. Por lo tanto, es probable que los modelos interregionales se proyecten para objetivos muy particulares, como en los ejemplos que se han expuesto a lo largo del capítulo 7, en vez de ser usados para problemas en general. Una manera de reducir los costos de los modelos interregionales, consiste en emplear la formación de agregados en los análisis multiregionales, y dentro de la región aislada que se considera de principal interés, un análisis más detallado de las mercancías. Para algunos estudios, en los que en la región dada representa una pequeña parte de la economía total, pueden pasarse totalmente inadvertidas las repercusiones interregionales — sin que haya mucha pérdida en la exactitud.

3) Si tomamos en cuenta las consideraciones hechas en los dos incisos anteriores, podemos sugerir ciertos tipos de problemas para los cuales pueda ser útil el análisis interregional:

a. Para determinar los efectos sobre la ocupación en distintas regiones, de los gastos del gobierno o de otras políticas.

b. Como orientación para el desarollo de la política regional. Con este fín, el modelo de la región de que se trata puede ser algo más detallado que el modelo para el resto de la economía. En los casos en que sea factible, dede incluirse la elección de fuentes de abastecimiento para los sectores más importantes.

c. En el análisis del comercio interregional e internacional. En este caso, es sumamente importante la estabilidad de los coeficientes de la oferta, y si no se utilizan métodos formales de programación lineal, se hará necesario realizar análisis complementarios de localización. No obstante, en los casos en que los contro les sobre la importación representen un instrumento en la política del gobierno, son más predicibles los tipos de la oferta y pueden emplearse dichos modelos para resolver las implicaciones de políticas diversas.

4. Para estudiar la eficacia de la distribución de los recursos entre las regiones. Aunque en los estudios hechos por Henderson y Fox son los únicos que hasta ahora se conocen de este tipo, debe existir la posibilidad de hacer análisis de programación lineal de otros productos homogéneos que tengan limitaciones de capacidad y de recursos que tengan aplicaciones alternativas.

La duda que existe entre el utilizar un modelo de insumo-producto y un modelo de programación lineal puede disiparse, o al menos aclararse un poco, con el estudio efectuado en este trabajo y en el cual se trato de poner en un mayor relieve las ventajas y desventajas que tiene uno u otro modelo en un cierto problema dado, pero donde la última palabra de cuál modelo deberá utilizarse dependerá exclusivamente del analista, pudiendo también existir una tercera opción, que parece ser en lo futuro la mejor, y que sería una combinación de ambas técnicas en el trato a un problema dado.

Para el análisis descriptivo, el insumo-producto tiene varias ventajas sobre la programación lineal, ya que ésta requiere de mucha más información de la que se dispone para muchos sectores, en la actualidad, y que todavía permanece sin ser probado su supuesto de realización óptima[2] como medio para describir los efectos de las fuerzas reales del mercado.

La programación lineal tiene bastante eficacia para efectuar la elección entre políticas alternativas del gobierno, ya que proporciona un método sistemático para alcanzar una solución óptima.

Sin embargo, el punto esencial es que no existe una contradicción- en dos cosas a la vez entre la programación lineal y el insumo-producto, y que pueden combinarse en un momento dado, cuando las circunstancias favorescan a ello. Una serie dada de parámetros en un modelo de insumo-producto representa una de muchas soluciones posibles para un modelo más general de programación lineal. La elección de las actividades puede basarse en una función de criterio, o bien pueden emplearse estas alternativas para distintos sectores dentro del mismo modelo.

Estas consideraciones nos pueden ayudar en un momento dado a ver con más claridad y seguridad la forma en que se debe enfocar- al problema en cuestión. Las conclusiones que se muestran en éste capítulo nos pueden ayudar a la mejor comprensión y utilización - de estos conceptos y una de las razones base para la elaboración- de este trabajo.

N O T A S

(1) En el libro "Economía Interindustrial" de Chenery y Clark, en el capítulo 1, podemos encontrar un análisis más detallado de la formación de agregados.

(2) Más que no haberse probado este supuesto, no se han hecho suficientes estudios al respecto como para dar una posición afirmativa a este supuesto de realización óptima.