



# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

26  
95

APLICACION DE LAS COMPUTADORAS  
AL ANALISIS ESTRUCTURAL

## TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Título de  
INGENIERO CIVIL

presenta

ALBERTO GUZMAN FUENTES

MEXICO, D. F.

1983



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# APLICACION DE LAS COMPUTADORAS

## AL ANALISIS ESTRUCTURAL

- 1 INTRODUCCION
- 2 TEORIA
  - 2.1 Introducción
  - 2.2 Generalidades
  - 2.3 Método de las Rigideces
    - 2.3.1 Ecuación de continuidad
    - 2.3.2 Relación Esfuerzo - Deformación (Ley de Hooke)
    - 2.3.3 Equilibrio
    - 2.3.4 Proceso algebraico
  - 2.4 Método de las Flexibilidades
    - 2.4.1 Equilibrio
    - 2.4.2 Ley de Hooke
    - 2.4.3 Ecuación de continuidad
    - 2.4.4 Proceso algebraico
  - 2.5 Análisis de armaduras
    - 2.5.1 Vector de desplazamientos
    - 2.5.2 Vector de deformaciones
    - 2.5.3 Vector de cargas externas
    - 2.5.4 Vector de fuerzas internas

- 2.5.5 Rigidez de barra
- 2.5.6 Ecuación de continuidad
- 2.6 Rigidez de barra plana
- 3. DIAGRAMA DE FLUJO
  - 3.1 Marcos planos
  - 3.2 Armaduras planas
- 4. PROGRAMAS
  - 4.1 Marcos planos
  - 4.2 Armaduras Planas
- 5. EJEMPLOS
  - 5.1 Marcos planos
  - 5.2 Armaduras planas
- 6 COMENTARIOS

INTRODUCCION

El presente trabajo está enfocado a una introducción práctica de lo que es el análisis estructural aplicando una herramienta tan poderosa como es la computadora electrónica.

Con el surgimiento de esta herramienta, es posible analizar varias alternativas de solución y así lograr que las estructuras sean económicas y seguras desde un punto de vista ingenieril.

La computadora representa la culminación de una serie de -- herramientas de cálculo, tales como el ábaco, la regla de cálculo, tablas, microprocesadores, etc., las cuales se han aplicado en el desarrollo de la ingeniería y la ciencia.

Desde el principio de todos los tiempos, el hombre ha manipulado datos y, utilizando los métodos y dispositivos de comunicación que están a su disponibilidad, ha podido pasar la información a otros hombres; en las cavernas prehistóricas, -- cuando se han descubierto grabados en las rocas de figuras, palabras, losas de piedra con jeroglíficos y mapas de - - -

batallas, queda ilustrado este esfuerzo primitivo para procesar y transmitir la información.

El hombre reconoció desde un principio lo valioso que podía ser desarrollar herramientas que le ayudarán en su trabajo físico y mental; en esta forma el hacha llegó a ser una extensión de la mano que lo ayudó a aumentar su fuerza a fin de partir troncos; el telescopio, una extensión del ojo para identificar objetos lejanos, la bicicleta una extensión de las piernas y el teléfono una extensión del oído.

A medida que la civilización progresó, el genio del hombre ideó nuevas formas de controlar las fuerzas de la naturaleza, reemplazó la fuerza animal por la fuerza de los motores y con estos ha dado por resultado el empleo de la transportación en aviones a reacción, la exploración en el espacio y la computadora electrónica una extensión del cerebro.

Siendo una de las maravillas de esta era la computadora electrónica, trabaja tan rápidamente, que la mayoría de las personas cegadas por el impacto que les produce el funcionamiento de estas máquinas, llegan a creer, que en realidad piensan por sí mismas, y que llegarán en esta forma a revolucionar de alguna manera inexplicable la estructura total de nuestro mundo; en cuanto a la forma en que un montón de acero que - - -

encierra circuitos electrónicos pueden llegar a lograr esta -  
revolución no entra en las figuraciones del neófito; pero es  
esencial considerar desde el principio a estas máquinas como  
herramientas que pueden ayudar al trabajo mental de naturale-  
za repetitiva y que en primer lugar, nada pueden hacer sin  
que un ser humano les haya dado las instrucciones necesarias  
para hacerlo.

La aparición de estos dispositivos ha originado verdaderas re-  
voluciones tecnológicas sociales y económicas.

Uno de los principales eventos que dieron lugar a dichos pro-  
cesos son los siguientes:

En el año de 1642 Blas Pascal inventa la primera máquina de  
sumar.

En el año de 1694 Godolfredo Leibnitz crea la primera máquina  
de multiplicar.

En el año de 1686 Issac Newton formula teorías que describen  
un universo que se rige según leyes físicas exactas y simples.

En el Siglo XIX los físicos Boltzmann y Gibbs introducen el  
concepto de "Comportamiento más probable de los fenómenos - -

físicos". Estas ideas que posteriormente se extienden a otros campos, inician una era de estudios estadísticos.

La ciencia, la tecnología y los negocios avanzan rápidamente, hacia fines del siglo, se agregan las comunicaciones telegráficas.

En todos los órdenes, las crecientes masas de datos, que se manejan superan las posibilidades de los precarios métodos existentes para procesar información.

En el año de 1834 Charles Babbage comienza la construcción de la primera computadora, capaz de leer datos perforados en código, en tarjetas de cartulina, procesarlos a imprimir resultados. Babbage adopta la idea de las tarjetas inspirando en un telar que las utiliza, creado poco tiempo atrás por José Jacquard.

En el año de 1890 Herman Hollerit crea el equipo de tabulación y estadística, a base de tarjetas perforadas, para realizar un censo de población.

En el año de 1940 Norbert Winer enuncia la Cibernética. Esta nueva ciencia basada en la teoría de los mensajes, tiende a un lenguaje común a todas las ramas del saber humano: un "Esperanto de la ciencia" que permita una comunicación más directa

entre los científicos de distintas especialidades para solucionar problemas comunes a ellos mediante las máquinas automáticas.

En el año de 1944 Howard Aiken crea la primera computadora mecánica: la Mark I. Este primer "Amplificador Automático de Inteligencia" puede "Aprender", y procesar la información a increíbles velocidades.

Tres siglos han pasado desde la sumadora de Pascal, pero la ciencia y la tecnología, especialmente la Electrónica avanzan a pasos agigantados, y la evolución de la computadora es acelerada desde el principio; en muy pocos años esta revolucionaria máquina había de transformarse en uno de los más útiles y fieles aliados del hombre.

En el año de 1954. Aparecen los primeros sistemas de "Teleprocesamiento de Datos", que posibilitan la descentralización de los procesos mediante unidades remotas que se comunican con la computadora a través de líneas telefónicas, telegráficas o de televisión, o bien por ondas electromagnéticas.

Después de analizar esta breve historia de las computadoras nos toca una gran responsabilidad: canalizar la enorme potencia de la computadora en beneficio de la humanidad, para que las próximas generaciones dispongan de útiles autómatas para

las liberen de pesados y rutinarios trabajos.

En resumen la computadora más que una nueva herramienta de -- cálculo, representa enfoques diferentes en métodos, conceptos y formación ingenieril.

Hay un punto que cabe hacer notar; la computadora como ante-- riormente se dijo es una herramienta y como tal no resolverá los problemas si uno no se le "indica" como resolverlos, en otras palabras la computadora procesa algoritmos no resuelve problemas y para esto será necesario tener una metodología al gorítmica en la resolución de cada uno de los problemas que se nos presenten.

Es de mi interés presentar en este trabajo la aplicación de esta herramienta, la computadora en el campo del análisis es-- tructural de marcos rígidos y armaduras planas.

El análisis de marcos rígidos y armaduras planas se realiza mediante el método de las rigideces, el cual se puede manejar matricialmente con cierta facilidad.

TEORIA

2.1 Introducción

En este capítulo se presentarán en forma sistemática los métodos de análisis más conocidos: El método de flexibilidades y el método de las rigideces. Sería conveniente primero recordar algunos conceptos fundamentales con el objetivo de fijar ideas.

Se presentará en que consiste el problema del análisis estructural, se revisarán en forma integrada los principios fundamentales para la solución de estructuras. A continuación se discutirán en forma detallada los métodos que anteriormente fueron mencionados, sin olvidar que estos métodos de análisis son válidos para estructuras de comportamiento lineal.

2.2 Generalidades

Planteamiento del problema.- Fijaremos nuestro objetivo considerando el caso de estructuras como vigas armaduras y - -

marcos planos ó tridimensionales; en donde sus miembros tienen una dimensión mayor que las otras dos, que es su longitud. Estos miembros a los cuales comunmente se les llaman bárras, se intersectan en puntos a los que llamaremos nodos, puntos nodales ó simplemente nudos.

Una función importante de este tipo de estructuras, como las que se acaban de mencionar, es la siguiente: soportar en forma adecuada ciertas solicitaciones o cargas a las que se verán sujetas. En donde las cargas pueden ser de cualquier forma: fuerzas concentradas, cargas repartidas, momentos, etc. y estar aplicadas en cualquier punto de la estructura.

Pueden también estar sujetas a otro tipo de cargas aplicadas indirectamente, como son las debidas o incrementos de temperatura, desplazamientos en los apoyos, esfuerzos residuales en los miembros, etc.

De cualquier manera nuestro problema de análisis estructural se reduce a determinar, los esfuerzos resultantes, los desplazamientos en los nodos y las reacciones en la estructura; se describirán a continuación cada uno de estos conceptos.

Esfuerzos resultantes.- Nos estamos refiriendo desde luego a las fuerzas internas que actúan en los miembros de la - - -

estructura, los cuales son producidos o generados por las cargas aplicadas externamente.

Como ya sabemos, existen en general seis tipos distintos de estas acciones internas ó elementos mecánicos: La fuerza - - axial, dos fuerzas cortantes que actuan en direcciones orto--gonales, un momento torsionante y dos momentos flexionantes que también actuan en direcciones ortogonales; representando--las en forma ordenada para cada miembro de la estructura en forma de vector:  $[P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \text{ y } P_6]$ , como ya se menciono, siendo  $P_1$  la fuerza axial,  $P_2$  y  $P_3$  las cortantes,  $P_4$  y  $P_5$  los momento flexionantes y  $P_6$  el momento torsionante.

Los desplazamientos.- Estos también son producidos indirecta--mente por las cargas externas aplicadas a la estructura. Como se mencionó anteriormente, las fuerzas aplicadas externa--mente a la estructura ocasionan que en los miembros se desarrol--len fuerzas internas, las cuales a su vez producen deformaciones en las barras unidas en un mismo punto tendrán efectos acumulativos. Estos efectos acumulativos de las deformaciones de las barras, las cuales son los que nos producen los desplazamientos en los puntos nodales de la estructura. Será conveniente entonces diferenciar desde ahora las deformacio--nes de los miembros y los desplazamientos de los nodos, ya - que para los dos métodos de análisis que se presentarán, - -

los desplazamientos juegan un papel importante.

De igual forma que los elementos mecánicos, las deformaciones para cada barra podrán expresarse como un vector, al igual que los desplazamientos para cada nodo.

Para terminar, cuando hablamos de reacciones nos estamos refiriendo a las fuerzas que deben producirse en aquellos puntos en donde está apoyada la estructura, los que garantizan que esta se encuentra en equilibrio y es estable.

Recordemos que al referirnos a las condiciones de equilibrio, estamos implicando tanto el equilibrio externo de la estructura en conjunto, como el de partes de la misma, idealizándolas como cuerpo libre. Para que se cumpla la condición de equilibrio en cualquier análisis, debemos tener que las fuerzas externas y reacciones en los apoyos deben satisfacer en general las seis ecuaciones siguientes:

$$\sum F_x=0$$

$$\sum F_y=0$$

$$\sum F_z=0$$

$$\sum M_x=0$$

$$\sum M_y=0$$

$$\sum M_z=0$$



Estas ecuaciones se tendrán que cumplir para cada uno de los miembros estructurales y nodos de la estructura, al considerar

en ellos las fuerzas externas y esfuerzos internos resultan--  
tos del análisis.

Por tanto las condiciones de equilibrio son relaciones entre las fuerzas externas y las fuerzas internas. Si, como se dijo anteriormente, estas podemos representarlas como vectores, entonces las ecuaciones de equilibrio quedan expresadas como una ecuación matricial.

Además debemos satisfacer para cualquier estructura la compatibilidad, que se refiere al hecho de que no se pueden presentar discontinuidades en los miembros, puntos nodales ó puntos en los cuales se apoya la estructura. Entonces las condiciones de compatibilidad son relaciones entre los desplazamientos nodales y las deformaciones en las barras, y si ambas las representamos como vectores, las condiciones de compatibilidad también se pueden representar como una ecuación matricial.

Debemos notar, que estamos considerando que el material de la estructura es elástico lineal, es decir rige la Ley de Hooke, los desplazamientos de la misma son pequeños y que no existe interacción entre los efectos de la carga axial y flección en los miembros de la estructura, por lo tanto podremos aplicar el principio de superposición de causas y efectos en el análisis.

La Ley de Hooke nos está relacionando las fuerzas internas - las deformaciones, por lo tanto podemos expresarlas como una ecuación matricial, si tanto las fuerzas como las deformaciones se pueden expresar como vectores.

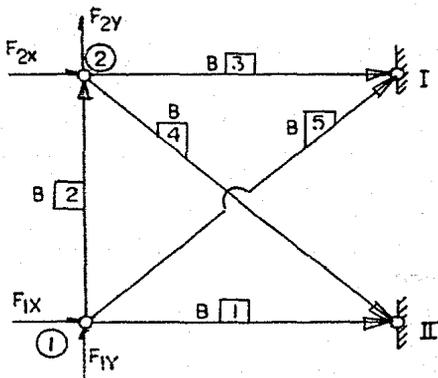
Para poder asociar a ciertas direcciones conocidas nuestros datos (acciones externas o sollicitaciones) así como nuestros resultados, (desplazamientos, deformaciones, esfuerzos resultantes), del análisis de una estructura cualquiera. se definirá para cada problema un sistema general de referencia para cada barra de la misma estructura. Tanto las cargas externas como los desplazamientos de los puntos nodales quedarán referidos al sistema general o global de ejes coordenados, mientras que las deformaciones y esfuerzos de las barras estarán siempre referidas a sus sistemas locales respectivos.

La nomenclatura que vamos a utilizar para representar los parámetros involucrados en el análisis son los siguientes:

		(Arreglo)
Desplazamientos de los nudos	d	$[d]$
Deformaciones de las barras	e	$[e]$
Acciones en las barras esfuerzos internos	p	$[p]$
Cargas en los nudos fuerzas externas	f	$[f]$

Para nuestra convención de signos tomaremos los alargamientos con signo positivo (+) y los acortamientos con signo (-), puesto que los primeros son provocados por fuerzas de tensión que tradicionalmente se les asocia el signo positivo y las segundas fuerzas de compresión con signo negativo. Todo esto será válido aplicando un desplazamiento positivo al nudo que corresponda.

Para nuestro fin consideremos la siguiente figura:



lo cual nos representa una estructura unidimensional que servirá de base para derivar las expresiones matriciales de los métodos antes mencionados de Rigideces y Flexibilidades.

En la anterior figura se puede observar que se tienen los nodos ① y ②, con cinco barras B1, B2, B3, B4 y B5, todas ellas orientadas según el sistema de referencia global.

Por otro lado nos interesa:

1º Determinar desplazamientos de los nodos de la estructura-

① y ②,

2º Deformaciones de cada una de las barras e1, e2, e3, e4 y e5.

3º Fuerzas axiales o esfuerzos internos en cada barra P1, P2, P3, P4 y P5.

Partiendo de los siguientes datos:

1º "Fuerzas externas P

2º Geometría de la estructura: (Para nuestro caso de estudio).

La B-1 liga al nodo ① con el apoyo II

La B-2 liga al nodo ① con el nodo ②

La B-3 liga al nodo ② con el apoyo I

La B-4 liga el nodo ② con el apoyo II

La B-5 liga el nodo ① con el apoyo I

3º Propiedades de cada barra

$A_i, E_i, L_i$                       donde:

$A_i$ = Area de la sección transversal de la barra  $i$

$E_i$ = Módulo de elasticidad de la barra  $i$

$L_i$ = Longitud inicial de la barra  $i$

y considerando además las siguientes hipótesis:

- 1.- Las barras son elásticas (Ley de Hooke)
- 2.- Los nodos son pequeños comparados con las longitudes de las barras que conectan.
- 3.- Los desplazamientos de los nodos son pequeños
- 4.- Los apoyos son completos y los nodos están totalmente libres.
- 5.- Las fuerzas actuantes están aplicadas únicamente en los puntos nodales y en las direcciones en que esté definida la posibilidad de desplazamiento.

Como ya definimos nuestros objetivos, datos e hipótesis de --

las que se partirán y tomando en cuenta la nomenclatura anterior, aplicaremos para la estructura en estudio los tres grupos de ecuaciones que representan los tres principios básicos que se dieron en el párrafo anterior:

1.- Ecuaciones de continuidad

2.- Ecuaciones Esfuerzo-Deformación o sea Ley de Hooke

3.- Ecuaciones de Equilibrio

Al aplicar los tres principios básicos en el orden anterior nos conduce al método de las Rigideces, mientras que si los aplicamos en orden inverso: equilibrio, Ley de Hooke y continuidad, llegaremos al establecimiento del método de las flexibilidades.

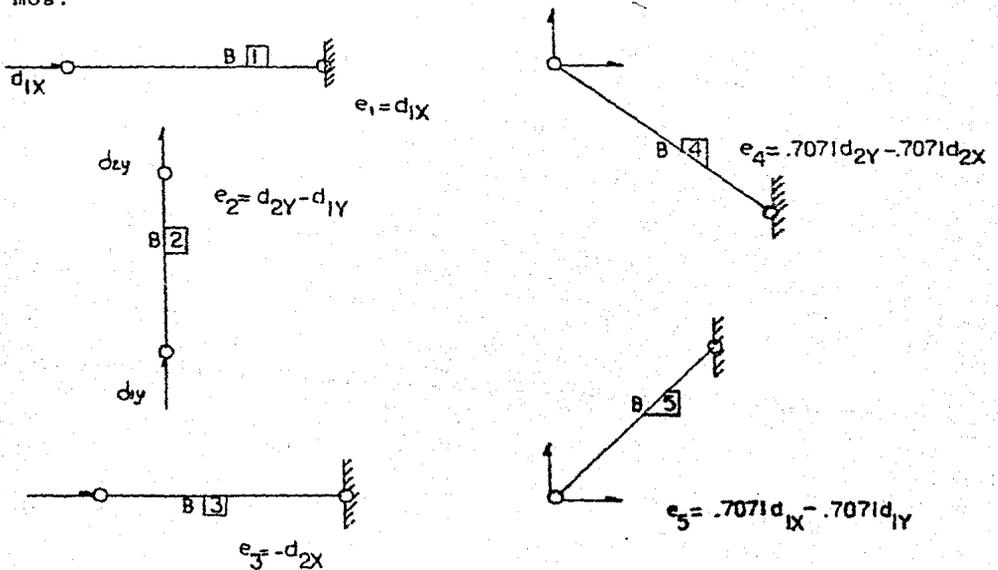
Primeramente aplicaremos estas ecuaciones a la estructura anterior en el orden 1, 2, y 3, por lo tanto trataremos en primer lugar el método de las Rigideces.

2.3 Método de las Rigideces

2.3.1 Ecuación de continuidad

Como ya vimos estas ecuaciones nos relacionan las deformaciones de las barras con los desplazamientos de los nudos a los que conecta.

Para la estructura que en particular estamos estudiando tenemos:



Las ecuaciones anteriores pueden deducirse de la figura, ya que cuando en el sistema actúan las fuerzas  $F_{1x}$ ,  $F_{1y}$ ,  $F_{2x}$  y  $F_{2y}$  que se ilustran, resultan las deformaciones de las barras B-1, B-2, B-3, B-4 y B-5.

Entonces resultará fácil expresar las deformaciones de las -

cinco barras en función de los desplazamientos de los dos nodos de la estructura, por tanto tendremos:

$$\begin{aligned}
 e1 &= -d1x + 0d1y + 0d2x + 0d2y \\
 e2 &= 0d1x - d1y + 0d2x + d2y \\
 e3 &= 0d1x + 0d1y - d2x + 0d2y \\
 e4 &= 0d1x + 0d1y - d2x + .7071d2y \\
 e5 &= .7071d1x - .7071d2x + 0d2x + 0d2y
 \end{aligned}$$

Podemos expresarlas también:

$$\begin{aligned}
 e1 &= (-1) d1x + (0) d1y + (0) d2x + (0) d2y \\
 e2 &= (0) d1x + (-1) d1y + (0) d2x + (0) d2y \\
 e3 &= (0) d1x + (0) d1y + (-1) d2x + (0) d2y \\
 e4 &= (0) d1x + (0) d1y + (-.7071) d2x + (.7071) d2y \\
 e5 &= (-.7071) d1x + (-.7071) d1y + (0) d2x + (0) d2y
 \end{aligned}$$

En forma matricial la expresaríamos como:

$$\begin{bmatrix} e1 \\ e2 \\ e3 \\ e4 \\ e5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -.7071 & .7071 \\ -.7071 & -.7071 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d1x \\ d1y \\ d2x \\ d2y \end{bmatrix} \text{ --- } \textcircled{2}$$

Que reduciendo nos queda:

$$[e] = [a][d] \text{ ----- } \textcircled{3}$$

La ecuación anterior es la expresión matricial de las ecuaciones de continuidad.

A la matriz  $[a]$  se le conoce con el nombre de matriz de continuidad, ya que relaciona los desplazamientos de los puntos nodales  $[d]$  con las deformaciones de las barras  $[e]$

### 2.3.2 Relaciones Esfuerzo - Deformación

Puesto que estamos partiendo de la hipótesis de la que los miembros de la estructura son de material elástico lineal, tenemos que las deformaciones y las fuerzas internas que se presentan en cada una de ellas son proporcionales. Esta proporcionalidad nos la da la Ley de Hooke si recordamos:  $\sigma = E \epsilon$

$$\text{como } \sigma = \frac{P}{A} \text{ y } \epsilon = \frac{e}{L}$$

Podemos expresar lo anterior como:

$$P = k_i e_i \quad ; \quad \text{donde:}$$

$P_i$  = Es la fuerza axial interna en la barra  $i$

$K_i$  = Es la rigidez axial de la barra  $i$

$e_i$  = Deformación axial total que se presenta en la barra al actuar sobre ella la fuerza  $P$ .

Para nuestro ejemplo que sirve de base para el desarrollo del método tenemos:

$$P_1 = K_1 e_1 \quad \text{donde} \quad K_1 = \frac{E_1 A_1}{L_1}$$

$$P_2 = K_2 e_2 \quad K_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2}$$

$$P_3 = K_3 e_3 \quad K_3 = \frac{E_3 A_3}{L_3}$$

$$P_4 = K_4 e_4 \quad K_4 = \frac{E_4 A_4}{L_4}$$

$$P_5 = K_5 e_5 \quad K_5 = \frac{E_5 A_5}{L_5}$$

Si expresamos estas relaciones esfuerzo-deformación en forma matricial obtenemos:

$$\begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e1 \\ e2 \\ e3 \\ e4 \\ e5 \end{bmatrix}$$

En forma reducida podemos escribir:

$$[P] = [K] [e] \text{ ----- } \textcircled{4}$$

en donde:

[P] = vector de fuerzas internas en las barras.

[K] = matriz de Rigideces de barra (la matriz sera diagonal para el caso en que se considere unicamente rigidez axial de las barras)

[e] = vector de deformaciones de las barras

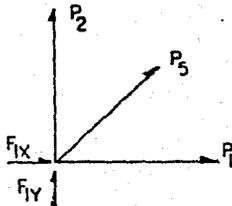
### 2.3.3 Equilibrio

Cuando se establecieron las condiciones de equilibrio se mencionó que estas deberian cumplirse para toda la estructura, partes de esta y aun para los puntos nodales de la misma estructura.

Cuando uno se refiere a un punto nodal, es necesario considerar a este como un cuerpo libre y tomar en cuenta todas las fuerzas que concurren a dicho punto.

Para la estructura que estamos estudiando los diagramas de -- cuerpo libre de los puntos nodales son los siguientes:

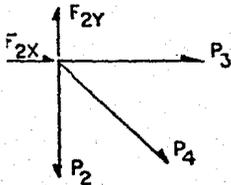
Nudo ①



$$F_{xi}=0; F_{1x} + P_1 + .7071P_5=0$$

$$F_{yi}=0; F_{1y} + P_2 + .7071P_5=0$$

Nudo ②



$$F_{xi}=0; F_{2x} + P_3 + 0.7071P_4=0$$

$$F_{yi}=0; F_{2y} - P_2 - 0.7071P_4=0$$

En este caso tendremos para cada nudo dos ecuaciones de equilibrio.

Estas ecuaciones nos expresan el equilibrio de los puntos --

nodales de la estructura.

De igual manera que hicimos con los desplazamientos, expresaremos ahora las fuerzas externas  $F1x$ ,  $F1y$ ,  $F2x$  y  $F2y$ , en función de las fuerzas resultantes internas de la siguiente forma:

$$F1x = - IP1 + 0P2 + 0P3 + 0P4 - 0.7071P5$$

$$F1y = + 0P1 - IP2 + 0P3 + 0P4 - 0.7071P5$$

$$F2x = 1 0P1 + 0P2 - IP3 - .7071P4 + 0P5$$

$$F2y = + 0P1 + P2 + 0P3 + .7071P4 + 0P5$$

El cual se puede expresar matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} F1x \\ F1y \\ F2x \\ F2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -.70 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -.70 \\ 0 & 0 & -1 & -.70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +.70 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{bmatrix}$$

#### 2.3.4 Proceso algebraico

Ahora comparando la matriz de continuidad  $[a]$  que multiplica

al vector de desplazamientos  $[d]$  en la ecuación (2), con la matriz que multiplica al vector de fuerzas en las barras  $[P]$  en la ecuación anterior, se nota que esta última es su transpuesta. Desde luego que este hecho no es casual, como se verá más adelante. Por consiguiente la ecuación matricial se puede escribir de la siguiente manera:

$$[f] = [a]^T [P] \text{-----} \textcircled{5}$$

Resumiendo las tres ecuaciones de los tres principios básicos a los que hemos llegado:

CONTINUIDAD	$[e] = [a] [d] \text{-----}$	$\textcircled{3}$
ESF.-DEF.	$[P] = [k] [e] \text{-----}$	$\textcircled{4}$
EQUILIBRIO	$[F] = [a]^T [P] \text{-----}$	$\textcircled{5}$

Realizando los siguientes procesos algebraicos:

sustituyendo la ecuación  $\textcircled{3}$  en la ecuación  $\textcircled{4}$  y obtenemos las acciones en función de los desplazamientos de la siguiente manera:

$$[P] = [k] [a] [d] \text{---} \textcircled{5^1}$$

Sustituyendo la ecuación  $\textcircled{5^1}$  en la ecuación  $\textcircled{5}$

Por lo tanto obtenemos:

$$[F] = [a]^T [k] [a] [d] \text{----} \textcircled{6}$$

Finalmente se ha llegado a una expresión que nos relaciona -- las fuerzas externas actuando en la estructura con los desplazamientos de sus puntos nodales.

Esta relación se logra a través del producto matricial --  $[a]^T [k] [d]$ ; a este producto matricial se le denomina Matriz de Rigideces de la Estructura y se acostumbra representar con  $[K]$ , por lo cual la ecuación  $\textcircled{6}$  se puede escribir de la siguiente forma:

$$[F] = [K] [d] \text{-----} \textcircled{7}$$

donde:

$[d]$ ; Vector de desplazamientos; los desplazamientos de los puntos nodales de la estructura representan las incógnitas en nuestro problema. Por lo que el método de rigideces sea un caso particular del método de los desplazamientos que se revisará posteriormente.

$[K]$ ; Matriz de Rigideces de la estructura la cual puede formarse a partir de las propiedades geométricas y

mecánicas de las barras y el material.

$[F]$  ; Vector de cargas externas que le son aplicadas a la estructura.

Recordando nuestra algebra matricial la ecuación (7) no es otra cosa que un sistema de ecuaciones lineales, en que  $[F]$  es el vector de términos independientes,  $[K]$  es la matriz de coeficiente y  $[d]$  es el vector de incógnitas por lo tanto al determinar el vector  $[d]$ , lo que realmente se esta haciendo es encontrar la solución del sistema de ecuaciones (7); siguiendo el siguiente procedimiento algebraico.

Multiplicando ambos miembros por  $[K]^{-1}$ , tendremos:

$$[K]^{-1} [F] = [K]^{-1} [K] [d]$$

como ya sabemos  $[K]^{-1} [K] = [I]$

donde  $[I]$  es la matriz identidad

entonces  $[K]^{-1} [F] = [d]$

Por lo que  $[d] = [K]^{-1} [F]$  ----- (8)

en donde  $[K]^{-1}$  representa la inversa de la matriz de rigideces de la estructura.

Una vez obtenidos los desplazamientos de la estructura por cualquiera de los métodos antes expuestos, no implica que --

nuestro problema de análisis este totalmente resuelto.

Para esto es necesario determinar otras cantidades, sin embargo una vez obtenido el vector  $[d]$ , procedemos a sustituir en la ecuación (3) y encontramos las deformaciones de las barras y a partir de estas y por medio de la ecuación (4) podemos obtener las resultantes de esfuerzos internos en las barras de la estructura  $[P]$ .

El análisis quedará completo cuando se determinen adicionalmente las reacciones en los apoyos de la estructura.

Resumiendo el método de las Rigideces:

- 1.- Obtener  $[K]$  a partir de  $[a]^T [K] [a]$
- 2.- Obtener  $[d]$  a partir de  $[F] = [k] [d]$
- 3.- Calcular  $[P]$  a partir de  $[P] = [K] [a] [d]$
- 4.- Determinar las reacciones en los apoyos

Finalmente podríamos comprobar el equilibrio de la estructura mediante la obtención de  $F$  a partir de  $P$  con la ecuación:

$$[F] = [a]^T [P] .$$

## 2.4 Método de las Flexibilidades

Pasemos ahora al análisis del método de las flexibilidades, como se mencionó en párrafos anteriores, implica también la aplicación de los tres principios fundamentales como se les ha llamado, pero ahora en el orden inverso es decir: Equilibrio, Ley de Hooke y Continuidad.

Para lo cual tomemos nuevamente la estructura que empleamos para desarrollar el método de las Rigideces y aplicando el primer principio.

### 2.4.1 Equilibrio

Como se dijo anteriormente, la expresión matricial de equilibrio que relaciona las fuerzas externas de la estructura, con las fuerzas en las barras, resultó :

$$[F] = [a]^T [P] \text{ ----- } \textcircled{1}$$

Cuando la estructura que se está analizando es insostática la matriz de equilibrio  $[a]^T$  es una matriz cuadrada y no singular, es decir el sistema de ecuaciones  $[F] = [a]^T [P]$ ; es determinado.

Por lo anterior podemos deducir: que para ese tipo de estructuras las ecuaciones de equilibrio son suficientes para completar el análisis. Para una estructura hiperestática la matriz  $[a]^T$  será rectangular y tendrá un número de columnas adicionales que serán igual al grado de hiperestaticidad que se tenga. En este caso como ya se vio las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para resolver el problema.

Para convertir a la estructura en isostática, el primer paso a seguir consiste en romper la continuidad, con un sistema adicional de redundantes. Lo anterior podemos conseguir matricialmente si particionamos el vector de acciones en las barras  $[p]$  como sigue:

$$[p] = \begin{bmatrix} P_0 \\ \vdots \\ R \end{bmatrix} \quad \text{en donde: } \text{-----} \text{ (2)}$$

$[P_0]$  representa las acciones isostáticas y  $[R]$  las redundantes. De igual manera podemos particionar la matriz  $[a]^T$  en:

$$[a]^T = \begin{bmatrix} a_0^T & \vdots & a_R^T \end{bmatrix} \quad \text{en donde } \text{-----} \text{ (3)}$$

La matriz  $[a_0]^T$  es la matriz de continuidad de la estructura isostática. Es entonces cuando surge la necesidad de elegir una estructura isostática  $[a_0]^T$ , cuadrada y no singular.

Tomando en cuenta las expresiones (2) y (3) sustituyendo en la ecuación (1).

$$[F] = \begin{bmatrix} a_o^T & \vdots & a_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_o \\ \vdots \\ P_R \end{bmatrix}$$

efectuando el producto matricial tenemos:

$$[F] = [a_o^T] [P_o] + [a_R^T] [P_R] \text{ ---- (4)}$$

Puesto que  $[a_o^T]$  es una matriz cuadrada y no singular, se puede determinar de la expresión (4), las acciones de la estructura isostática  $P_o$  que son desconocidas, de la siguiente manera:

$$[F] = [a_o^T] [P_o] + [a_R^T] [R]$$

$$\text{despejando } [a_o^T] [P_o] = [F] - [a_R^T] [R]$$

multiplicando ambos miembros por  $[a_o^T]^{-1}$  :

$$[a_o^T]^{-1} [a_o^T] [P_o] = [a_o^T]^{-1} [F] - [a_o^T]^{-1} [a_R^T] [R]$$

como ya sabemos  $[a_o^T]^{-1} [a_o^T] = [I]$ ; podemos escribir entonces:

$$[P_o] = [a_o^T]^{-1} [F] - [a_o^T]^{-1} [a_R^T] [R] \text{ ---- (5)}$$

No es difícil observar que el vector de fuerzas internas particionado puede escribirse en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} P \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_o \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_o^T \\ 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[a_o^T]^{-1} [a_R^T] \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$$

donde  $[o]$  es la matriz nula

$[I]$  es la matriz identidad, tal es que:

$$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$$

Llamando:

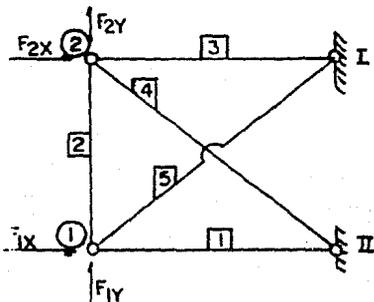
$$\begin{bmatrix} b_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_o^T \\ 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[a_o^T]^{-1} [a_R^T] \\ I \end{bmatrix}$$

Podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \quad \text{----- } \textcircled{6}$$

Apliquemos estos conceptos a nuestro caso de estudio:

escogiendo la barra  $[5]$  como redundante:



La matriz de equilibrio  $[a]^T$  resulta:

$$[a]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -.70 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \vdots & -.70 \\ 0 & -1 & 0 & -.70 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .70 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$[a_o]^T$ 
 $[a_R]^T$

Barras de la estructura esostática.
Barra redundante

$$[a_o]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -.70 \\ 0 & 1 & 0 & .70 \end{bmatrix}$$

$$[a_R]^T = \begin{bmatrix} -.70 \\ -.70 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y determinando las matrices  $[a_o^T]$ ,  $[a_R^T]$  y  $[a_o^T]^{-1}$ , podemos determinar las matrices  $[b_o]$  y  $[b_R]$  como sigue:

$$[b_o] = \begin{bmatrix} [a_o^T]^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [b_R] = \begin{bmatrix} -[a_o^T] & [a_R^T] \\ I \end{bmatrix}$$



donde  $[f]$  es una matriz formada por las flexibilidades de --  
 las barras, para nuestro caso:

$$\begin{bmatrix} e1 \\ e2 \\ e3 \\ e4 \\ e5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{bmatrix}$$

donde  $f = \frac{1}{K} = \frac{L}{EA}$ ; para todas la barras

sustituyendo la ecuación (6) en la ecuación (7) obtenemos:

$$[e] = [f] [b_0] [F] + [f] [b_R] [R] \text{ ----- (8)}$$

que es la expresión que nos da la Ley de Hooke para el método  
 de las flexibilidades:

#### 2.4.3 Ecuación de Continuidad

La que representaremos matricialmente de la siguiente manera  
 para el método de las flexibilidades:

$$[d] = [b_0^T] [e] \text{ ----- (9)}$$

Haciendo un resumen de las ecuaciones matriciales que se han obtenido:

$$[P] = [b_0] [F] + [b_R] [R] \quad \text{Equilibrio ---- } \textcircled{6}$$

$$[e] = [f] [b_0] [F] + [f] [b_R] [R] \quad \text{Ley de Hooke --- } \textcircled{7}$$

$$[d] = [b_0^T] [e] \quad \text{Continuidad --- } \textcircled{9}$$

#### 2.4.4 Proceso algebraico

Si observamos que no podemos evaluarlas ya que están en función de las redundantes desconocidas  $[R]$ . Para eliminar de estas expresiones  $\textcircled{5}$  y  $\textcircled{8}$ ; hagamos lo siguiente:

Para que exista continuidad en la estructura, necesariamente los desplazamientos relativos de las barras redundantes deberán ser igual a cero, por lo tanto:

$$\Delta_R = [b_R^T] [e] ; \quad \text{ahora}$$

sustituyendo la ecuación  $\textcircled{8}$  en la anterior ecuación:

$$[0] = [b_R^T] \left[ [f] [b_0] [F] + [f] [b_R] [R] \right]$$

$$[0] = [b_R^T] [f] [b_0] [F] + [b_R^T] [f] [b_R] [R]$$

Podemos demostrar que el producto de  $[bR^T][f][bR]$  es cuadrado y no singular, si notamos que  $[f]$  es diagonal con, todos los elementos de la diagonal principal diferentes de cero. Por lo que podemos despejar  $[R]$  de la ecuación anterior.

$$[R] = - \left[ [bR^T][f][bR] \right]^{-1} [bR^T][f][b_0][F]$$

sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (6), tenemos:

$$[P] = [b_0][F] - [bR] \left[ [bR^T][f][bR] \right]^{-1} [bR^T][f][b_0][F]$$

que podemos escribir como sigue:

$$[P] = \left\{ [b_0] - [bR] \left[ [bR^T][f][bR] \right]^{-1} [bR^T][f][b_0] \right\} [F]$$

si a la expresión encerrada con llaves la llamamos  $[b]$  como se indica, tenemos:

$$[P] = [b][F] \text{ ---- } (10)$$

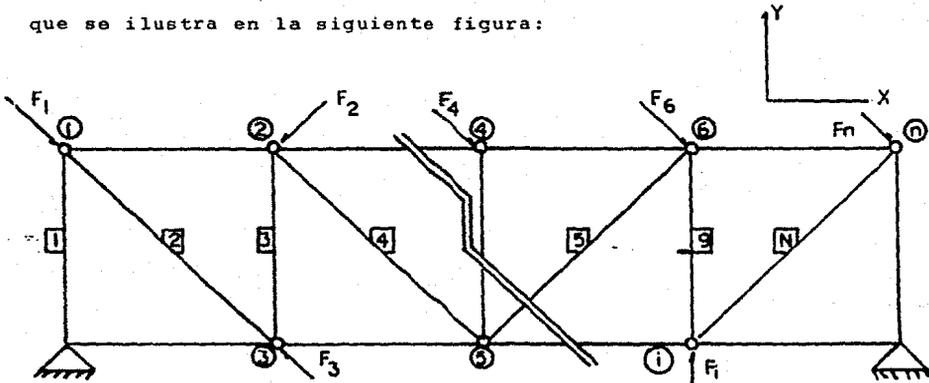
con esta última expresión podemos ya determinar los valores desconocidos de dicho vector  $[P]$ .

## 2.5 Análisis de armaduras

Con el objeto de generalizar las ideas presentadas, se revisará en esta sección estructuras como las que nos encontramos en la realidad:

### Armaduras planas

Supongamos que queremos analizar una armadura plana como la que se ilustra en la siguiente figura:



La cual tiene  $n$  nudos,  $N$  barras y  $n$  cargas externas aplicadas en los puntos nodales de la armadura; consideremos el sistema de referencia  $x, y$ , como se indica.

Antes de aplicar las ecuaciones fundamentales, es necesario estudiar los vectores o matrices implícitos en cada una de ellas.

### 2.5.1 Vector de desplazamientos

Podemos observar en la figura que cada uno de los nudos, incluyendo los apoyos tiene dos posibilidades de desplazamiento, en las direcciones ortogonales X e Y. Existen dos grados de libertad por cada nudo de la armadura, por lo tanto el vector de desplazamientos resulta:

$$[d] = \begin{bmatrix} d1x \\ d1y \\ \hline d2x \\ d2y \\ \hline \vdots \\ dnx \\ dny \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{nudo } 1 \\ \\ \text{nudo } 2 \\ \\ \\ \text{nudo } n \end{array}$$

El orden del vector de desplazamientos es de  $2N_n \times 1$ , siendo  $N_n$  el número de nudos, en cuanto el signo del desplazamiento este estará en función del sistema global de referencia.

Para cuando se tengan  $N_c$  sistemas de cargas externas, se obtendrán un vector desplazamiento para cada sistema de carga.

### 2.5.2 Vector de Deformaciones

Si observamos que las barras de la armadura únicamente pueden aceptar esfuerzos axiales, de tensión o compresión; la forma del vector de deformaciones será igual a la del caso de la estructura unidimensional. por lo tanto:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{barra 1} \\ \text{barra 2} \\ \\ \text{barra n} \end{array}$$

El orden del vector de deformaciones es  $NB \times 1$  siendo NB el número de barras de la armadura.

De igual manera, para cuando se tengan  $N_c$  sistemas de carga, el vector se convierte en una matriz de orden  $NB \times N_c$ .

Las deformaciones de las barras son positivas si están a tensión y negativas cuando están a compresión.

### 2.5.3 Vector de cargas externas

Haciendo una similitud a los desplazamientos, las

- - -

las solicitaciones pueden expresarse vectorialmente de la siguiente manera:

$$[F] = \begin{bmatrix} F1x \\ F1y \\ F2x \\ F2y \\ \vdots \\ Fnx \\ Fny \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{nudo } \textcircled{1} \\ \\ \text{nudo } \textcircled{2} \\ \vdots \\ \text{nudo } \textcircled{n} \end{array}$$

El orden del vector fuerzas es de  $2N \times 1$

Cuando se tienen  $N_c$  sistemas de carga, las fuerzas dependerán de la dirección de estas, con respecto al sistema global de referencia  $X, Y$ .

#### 2.5.4 Vector de fuerzas internas

Estas fuerzas que están sujetas a tensión o compresión, están referidas al sistema local en cada barra, y como en armaduras, estas sólo transmiten esfuerzos axiales se tiene:

$$[P] = \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ \vdots \\ Pn \end{bmatrix}$$

El orden del vector de fuerzas internas es de  $NB \times 1$

Cuando se tiene  $N_c$  sistemas de cargas resulta una matriz de  $NB \times N_c$ . De igual manera será positivo cuando esté sujeta a tensión, y negativa cuando esté a compresión.

#### 2.5.5 Rigidez de barra

La relación carga-deformación para cada barra se obtiene a -- partir de la rigidez axial de barra, puesto que en cada barra solo existen esfuerzos de tensión y de compresión.

Esta rigidez se había definido anteriormente como:

$$K_i = \frac{E_i A_i}{L_i}$$

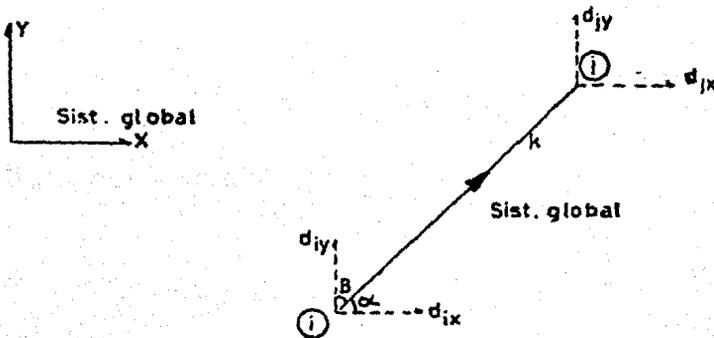
Analizado lo anterior, estamos en posibilidad de aplicar las tres ecuaciones fundamentales del método de las rigideces, en la forma ordenada: Continuidad, Ley de Hooke y Equilibrio, aplicando primero:

#### 2.5.6 Ecuación de Continuidad

$$\text{continuidad } [e] = [a] [d]$$

Cuando se resuelven armaduras, la relación anterior se verá -  
afectada por la geometría de la estructura.

Revisando la barra K-esima de incidencias:



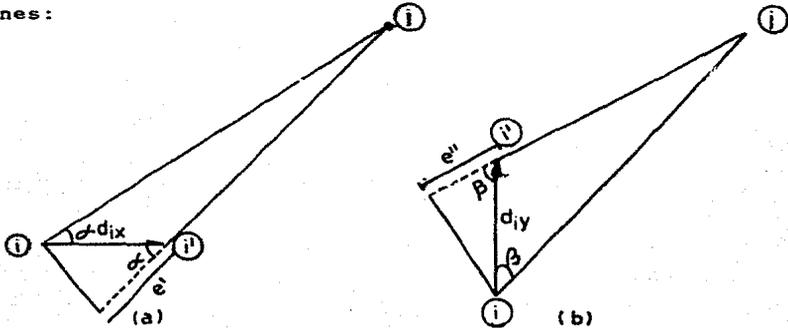
Cada uno de los extremos de la barra sufre los desplazamientos correspondientes al nudo, es decir:

$$[d_i] = \begin{bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \end{bmatrix} ; [d_j] = \begin{bmatrix} d_{jx} \\ d_{jy} \end{bmatrix}$$

La deformación en sistema local esta dado por la proyección de la diferencia de los desplazamientos sobre el eje de la barra.

Lo anterior no es más que un cambio de ejes coordenados en el que se tiene el trabajo uniaxial de las barras.

Ilustrando las deformaciones resultantes de desplazamientos arbitrarios de los nudos de las barras en las dos direcciones:



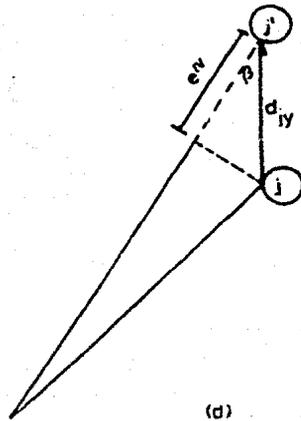
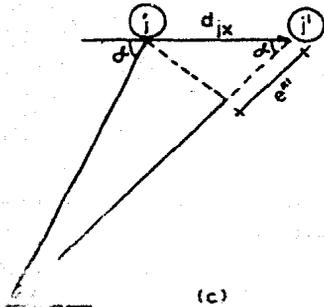
En las anteriores figuras a y b se muestra lo que sucede a la barra de una armadura cuando está sujeta a los desplazamientos indicados, en direcciones globales X e Y.

Considerando las figuras a y b, en ambos casos se producen acortamientos a los que llamamos  $e'$  y  $e''$ , los que podemos expresar en función de los ángulos directores de la barra

y B:

$$e' = -d_{ix} \cos \alpha$$

$$e'' = -d_{iy} \cos \beta$$



De igual manera para las figuras c y d

$$e^{III} = + dx \cos$$

$$e^{IV} = + dx \cos B$$

Superponiendo estas deformaciones se estará en posibilidad de tener una relación de continuidad para la barra en cuestión: es decir:

$$e = e^I + e^{II} + e^{III} + e^{IV}$$

$$= (dx - dx \cos + (dy - dy) \cos B$$

Ordenándolo matricialmente obtenemos:

$$e_k = \begin{bmatrix} -\cos k & -\sin k & \sin k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Así podemos generalizar para todos los miembros de la estructura:

$$e_k = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -c & -s & \cdot & \cdot & c & s & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ dx \\ dy \\ \cdot \\ \cdot \\ dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Recapitulando resulta claro que la matriz de continuidad a puede formarse siguiendo los siguientes pasos:

- 1.- Definir los ejes locales de cada barra
- 2.- Definir las proyecciones unitarias de los desplazamientos en ejes globales.
- 3.- Colocar las proyecciones de sus extremos con los signos que le correspondan a cada barra.

Las otras dos ecuaciones, Ley de Hooke y Equilibrio no cambian con respecto al caso unidimensional, por lo que no se desarrollan.

Rigidez de barra plana

En párrafos anteriores se trató el caso particular de armaduras, este tipo de estructuras cuyos elementos trabajan exclusivamente a fuerza axial, la rigidez de los mismos elementos se puede representar, como ya se había visto con un sólo término:  $\frac{EA}{L}$ ; y mediante la aplicación de la Ley de Hooke, tenemos:

$$[P_i] = [K_i] [e_i]$$

Para el caso de estructuras cuyas barras se conectan mediante nudos rígidos en lugar de articulaciones, la rigidez de cada elemento de la estructura a la que también se le llama viga, se compone de más términos debido a sus otras formas de trabajo.

Nuevamente, los términos de la rigidez de cada barra podemos agruparlos en forma de matriz, a la cual comúnmente se le llama matriz de rigidez de cada barra, como esta matriz ya contiene más elementos, a diferencia de la matriz de rigidez de una armadura, esta ya no será diagonal, por lo que se dijo anteriormente.

Nuevamente la Ley de Hooke expresada matricialmente queda:

$$[P]_i = [K]_i [e]_i$$

Para nuestro caso los vectores  $[p]_i$  y  $[e]_i$  tendrán la siguiente forma:

$$[P]_i = \begin{bmatrix} PA1i \\ PA2i \\ MAi \\ PB1i \\ PB2i \\ MBi \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{Nudo} \\ \text{Origen A} \\ \text{Nudo} \\ \text{Extremo B} \end{array} \right\} \quad [e]_i = \begin{bmatrix} eA1i \\ eA2i \\ \theta Ai \\ eB1i \\ eB2i \\ eBi \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{Nudo} \\ \text{Origen A} \\ \text{Nudo} \\ \text{Extremo B} \end{array} \right\}$$

Donde:

$P_{A1i}$  = Es la fuerza en dirección local  $x$  en el extremo A de la barra  $i$ .

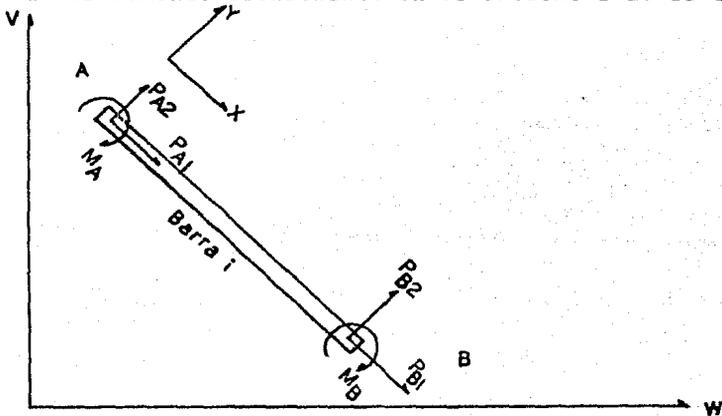
$P_{A2i}$  = Es la fuerza en dirección local  $y$  en el extremo A de la barra  $i$ .

$M_{Ai}$  = Es el momento flexionante en el extremo A de la barra  $i$

$P_{B1i}$  = Es la fuerza en dirección local  $x$  en extremo B de la barra  $i$ .

$P_{B2i}$  = Es la fuerza en dirección local  $y$  en extremo B de la barra  $i$ .

$M_{Bi}$  = Es el momento flexionante en el extremo B de la barra  $i$



En la misma forma los elementos del vector  $[e]_i$  son:

$e_{A1i}$  = Es la deformación en la dirección local  $x$  en el extremo A de la barra  $i$ .

$e_{A2i}$  = Es la deformación en la dirección local y en el extremo A de la barra i.

$\theta_{Ai}$  = Giro del extremo A de la barra i.

$e_{B1i}$  = Es la deformación en la dirección local x en el extremo B de la barra i.

$e_{B2i}$  = Es la deformación en la dirección local x en el extremo B de la barra i.

$\theta_{Bi}$  = Giro del extremo B de la barra i.

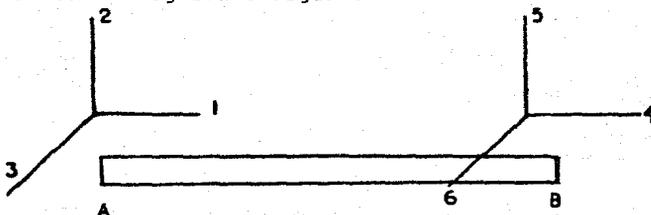
Si nos damos cuenta tanto el vector  $[P]_i$  como el vector  $[e]_i$  tienen seis elementos cada uno de ellos, por lo tanto para que sea compatible la matriz de rigidez de viga  $[K]_i$  tendrá que ser una matriz cuadrada de orden 6x6:

$$[P]_i = [K]_i [e]_i$$

(6x1) (6x6) (6x1)

Prosigamos a obtener la matriz  $[K]$  de rigidez de barra.

Enumeremos los grados de libertad de una barra plana, como se muestra en la siguiente figura:



Como puede observarse, la barra tiene seis grados de libertad, tres para cada extremo de la barra.

Para obtener la matriz de rigidez de la viga  $[K]_i$  se partirá del concepto de rigidez. La fuerza que hay que aplicar a la barra para producirle una deformación unitaria.

Idealizando la barra  $i$  : tiene una sección transversal constante, la cual tiene una área  $A$ , módulo de elasticidad  $E$  y un momento de inercia  $I$ .

Con el objeto de ir formando la matriz de rigidez de barra  $i$ ,  $[K]_i$ , daremos desplazamientos unitarios a los grados de libertad del nudo origen, y señalaremos cuales serían los elementos mecánicos que obtendríamos para cada uno de ellos en la barra.

a) Primero damos una deformación unitaria de la barra en la dirección 1.



Las fuerzas que se producen en la barra al deformarla son:

En la dirección 1 :  $E^A/L$   
 En la dirección 2 : 0  
 En la dirección 3 : 0  
 En la dirección 4 :  $-E^A/L$   
 En la dirección 5 : 0  
 En la dirección 6 : 0

Como podemos observar el grado de libertad esta desacoplado de las direcciones 2, 3, 4, 5 y 6, puesto que por los resultados obtenidos, el efecto en dichas direcciones es nulo.

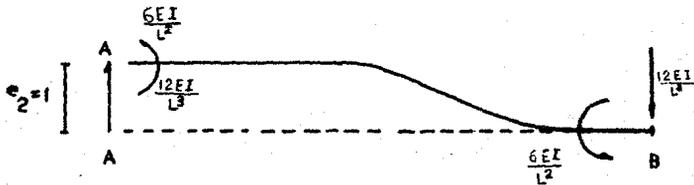
Con el fin de no confundirnos trataremos los términos dirección y grados de libertad indiferentemente.

Colocando este primer renglón en nuestra matriz de rigidez --

[K];

$$[K]_i = \begin{matrix} \text{dir. 1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{dir. 6} \end{matrix} \begin{bmatrix} F1 & F2 & F3 & F4 & F5 & F6 \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Ahora daremos una deformación unitaria a la barra en la --  
 dirección 2, por lo tanto tenemos:



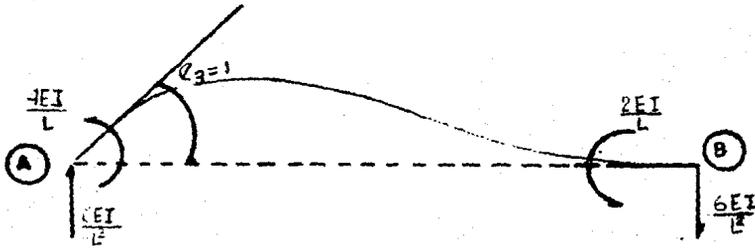
Las fuerzas que se producen en la barra al deformarla son:

- En la dirección 1 : 0
- En la dirección 2 :  $12EI/L^3$
- En la dirección 3 :  $6EI/L^2$
- En la dirección 4 : 0
- En la dirección 5 :  $-12EI/L^3$
- En la dirección 6 :  $6EI/L^2$

Por lo tanto tenemos el segundo renglón de la matriz K :

$$[K] = \begin{matrix} & & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 \\ \text{dir. 1} & & \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \end{array} \right] \\ \text{dir. 2} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \text{dir. 6} & & & & & & & \end{matrix}$$

c) Ahora daremos un giro a la barra en la dirección 3:



Las fuerzas que se producen en la barra al aplicar el giro:

- En la dirección 1 : 0
- En la dirección 2 :  $6EI/L^3$
- En la dirección 3 :  $4EI/L$
- En la dirección 4 : 0
- En la dirección 5 :  $-6EI/L^2$
- En la dirección 6 :  $2EI/L$

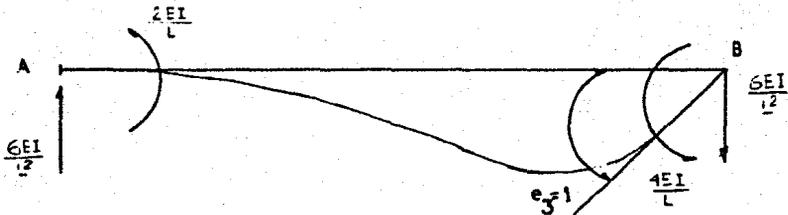
Por lo tanto obtenemos el tercer renglón de la matriz K

$$[K]_i = \begin{matrix} & & F1 & F2 & F3 & F4 & F5 & F6 \\ \text{dir. 1} & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \text{dir. 2} & & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \text{dir. 3} & & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \text{dir. 6} & & & & & & & \end{matrix}$$

Las fuerzas que se producen en la barra al deformarla son:

- En la dirección 1 : 0
- En la dirección 2 :  $-12EI/L^3$
- En la dirección 3 :  $-6EI/L^2$
- En la dirección 4 : 0
- En la dirección 5 :  $12EI/L^3$
- En la dirección 6 :  $-6EI/L^2$

f) Giro en la barra dirección 6:



Las fuerzas que se producen al girar la barra son:

- En la dirección 1 : 0
- En la dirección 2 :  $6EI/L^2$
- En la dirección 3 :  $2EI/L$
- En la dirección 4 : 0
- En la dirección 5 :  $-6EI/L^2$
- En la dirección 6 :  $4EI/L$

Ensamblando toda la matriz con sus 6 grados de libertad:

Para el extremo B siguiendo el mismo procedimiento tenemos:

d) Deformación unitaria a la barra dirección 4:



Las fuerzas que se producen en la barra al deformarla son:

En la dirección 1 :  $-E^A/L$

En la dirección 2 : 0

En la dirección 3 : 0

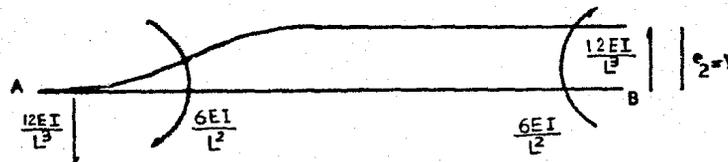
En la dirección 4 :  $E^A/L$

En la dirección 5 : 0

En la dirección 6 : 0

Por lo tanto obtenemos el 4 renglón de la matriz K .

e) Deformación unitaria a la barra dirección 5:



$$[K]_i = \begin{matrix} & \begin{matrix} F1 & F2 & F3 & F4 & F5 & F6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{dir. 1} \\ \text{dir. 2} \\ \text{dir. 3} \\ \text{dir. 4} \\ \text{dir. 5} \\ \text{dir. 6} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Es de mucha importancia hacer notar que la matriz  $K$  : es una matriz simétrica.

## DIAGRAMAS DE FLUJO

Análisis de marcos rígidos y armaduras planas.

En este capítulo se presentarán los diagramas de flujo para los programas de análisis de marcos rígidos y armaduras planas, pero antes se describirán las variables que en forma general integran los programas:

ASAT (I,J): Matriz de rigideces

P(I,J): Vector de acciones externas

X(I,J): Vector de desplazamientos

NPE(I): Vector de grados de libertad

EA(I,J): Matriz EA

ESAT(I,J): Matriz

EASAT(I,J): Matriz de Rigideces

INDEX(I): Indice

F(I): Fuerzas y momentos resultantes

NP: Número de grados de libertad de la estructura

NM: Número de miembros de la estructura

NLC: Número de condiciones de carga

E: Módulo de elasticidad =  $10,000 F_e$

II: Contador

JJ: Contador de condiciones de carga

H: Proyección horizontal de la barra

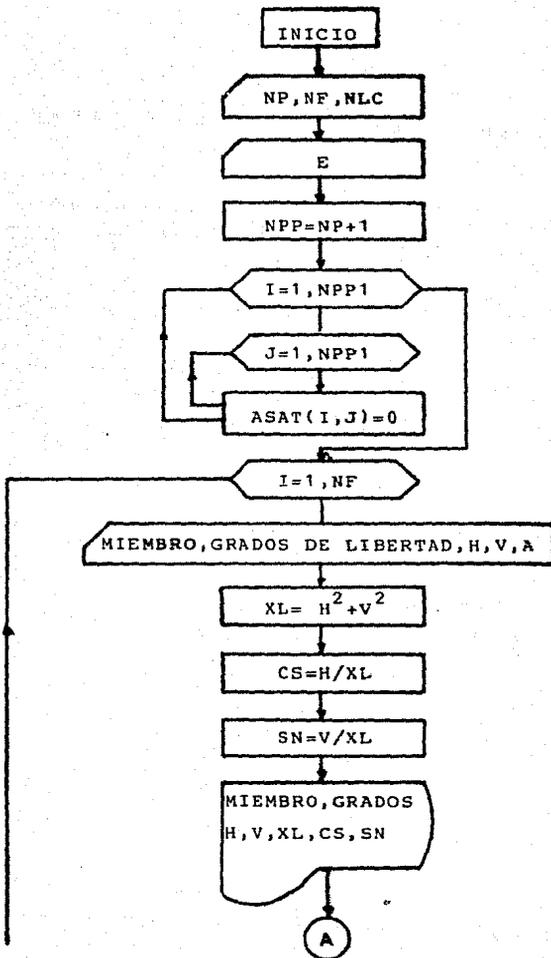
V: Proyección vertical de barra

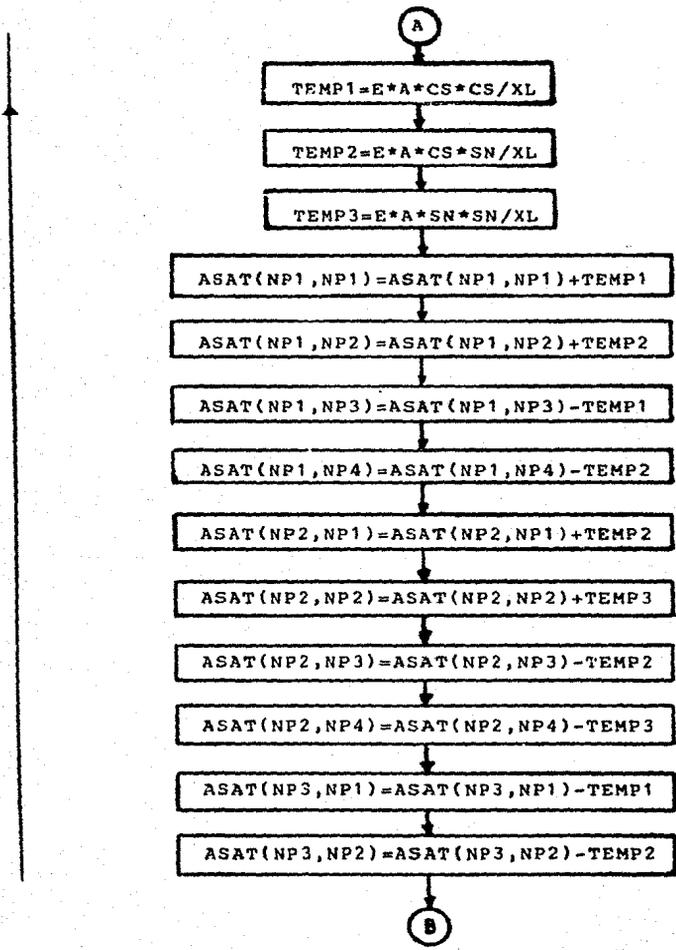
A: Area de la sección transversal

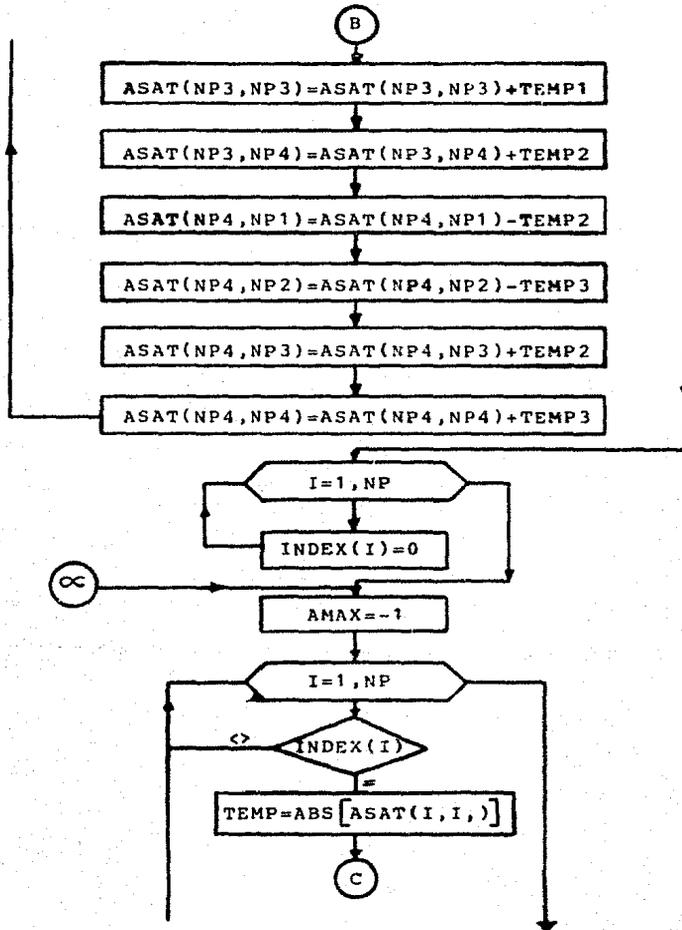
XI: Inercia de la sección transversal

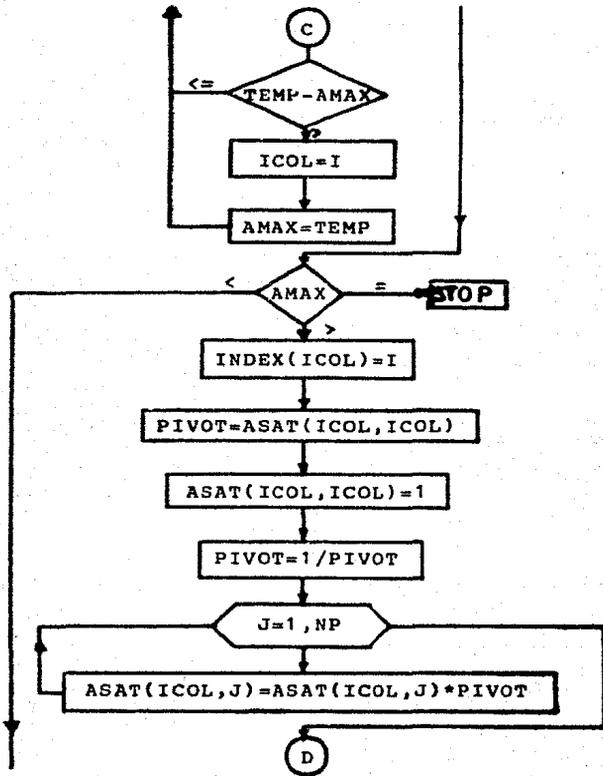
XL: Longitud efectiva de la barra

METODO DE LAS RIGIDECES  
DIAGRAMA DE FLUJO  
ARMADURA

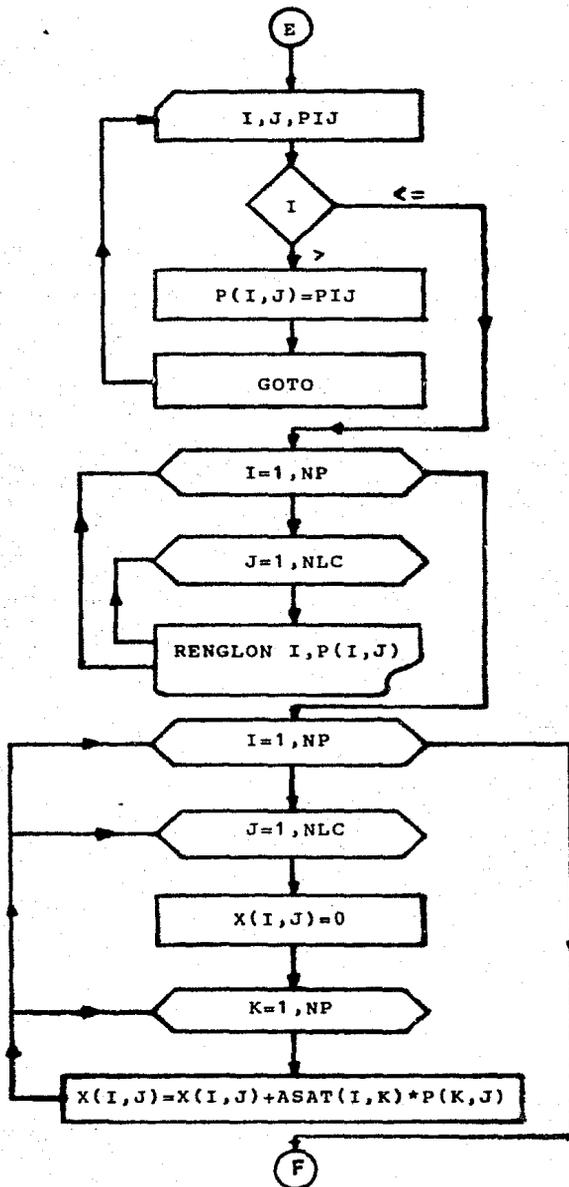












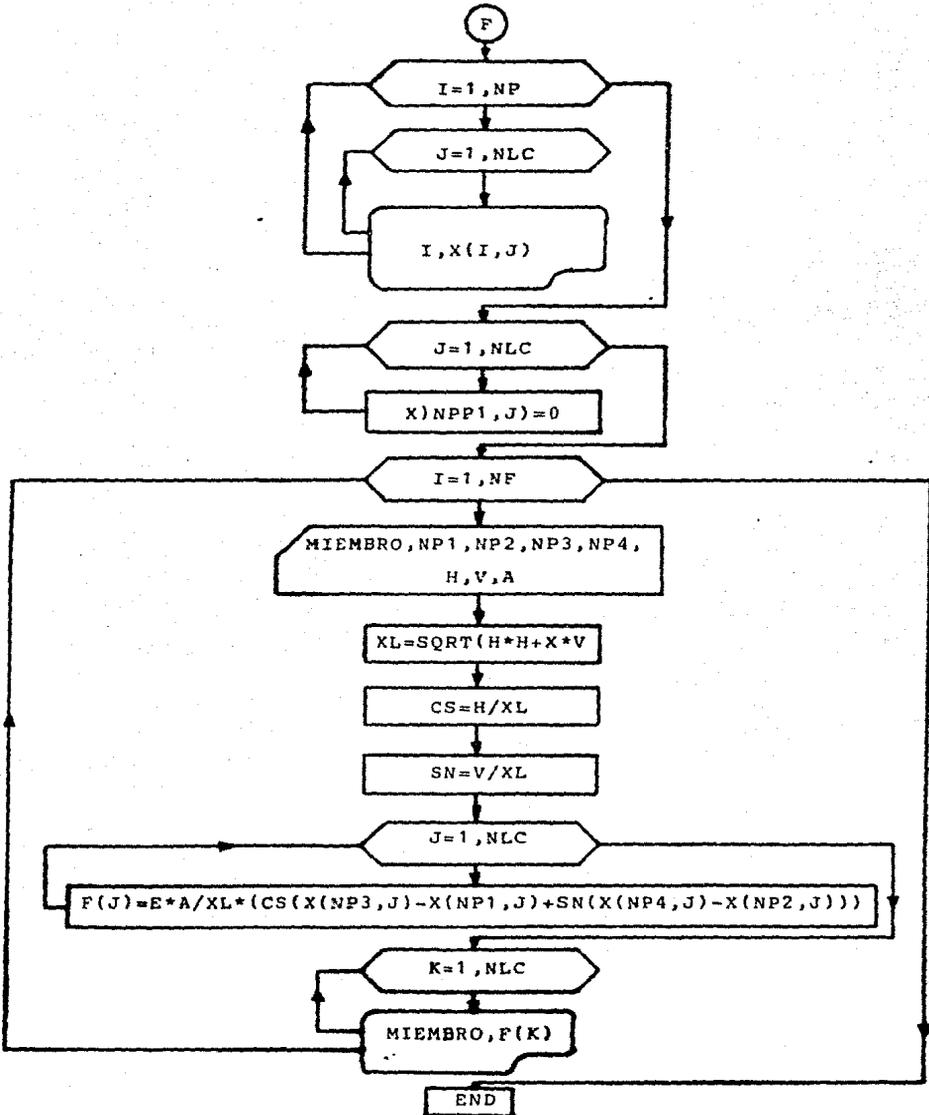
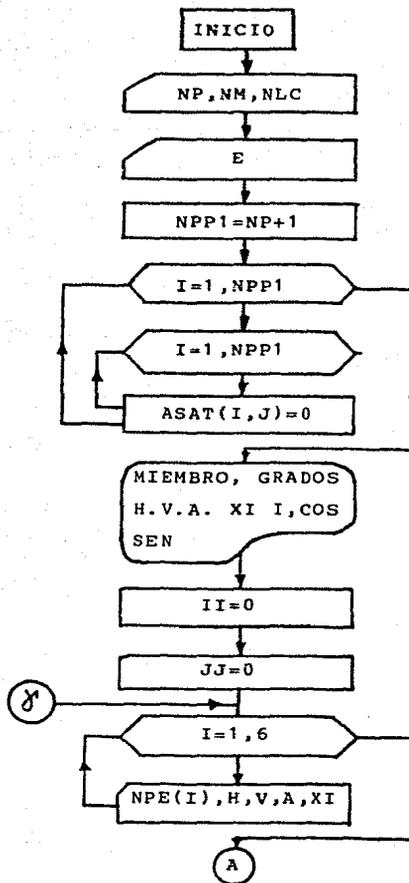
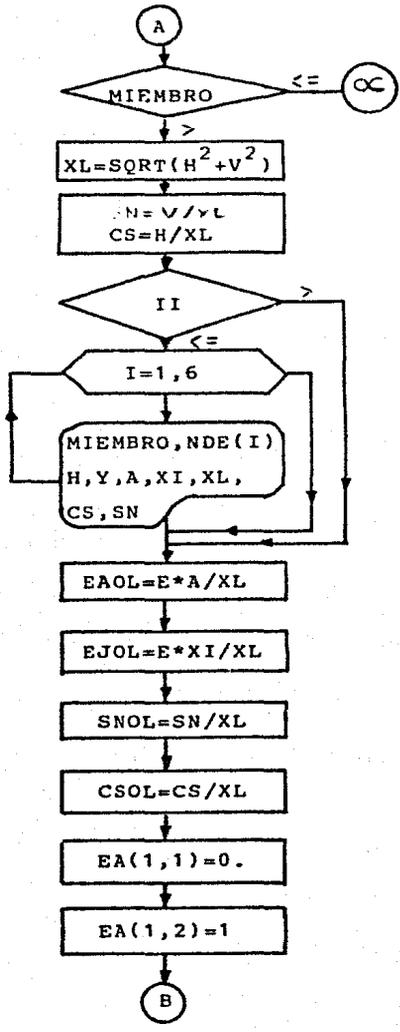
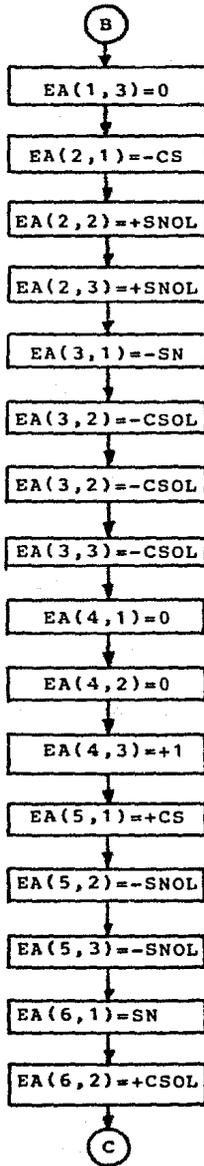


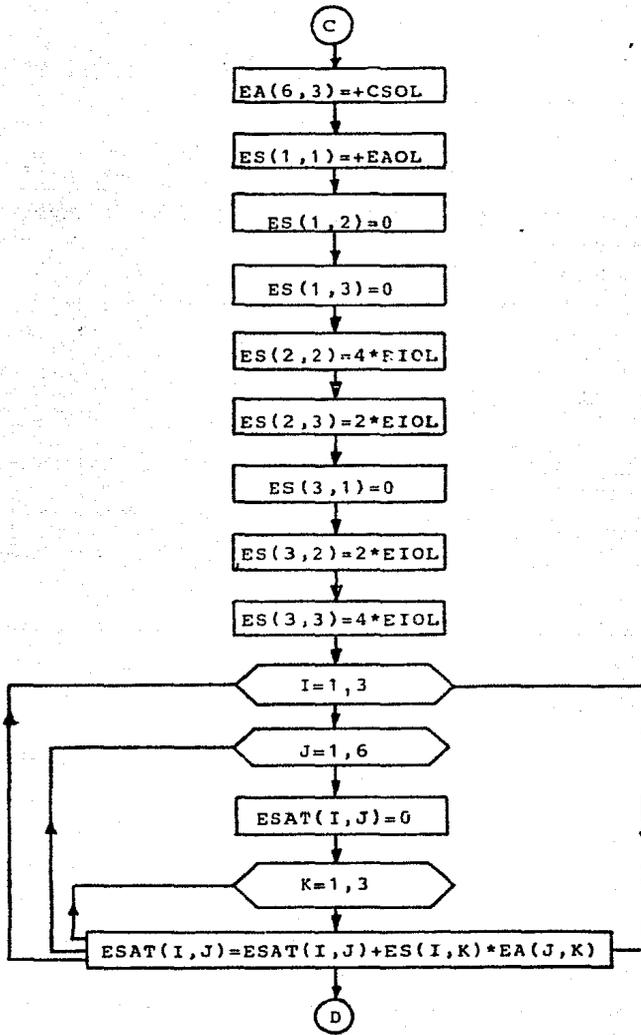
DIAGRAMA DE FLUJO

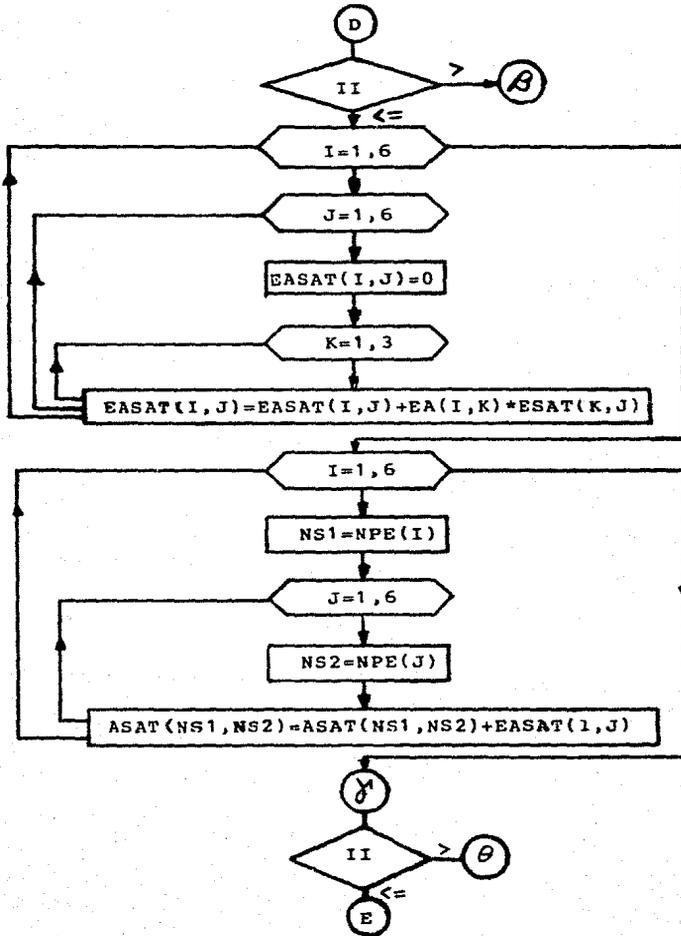
MARCOS PLANOS

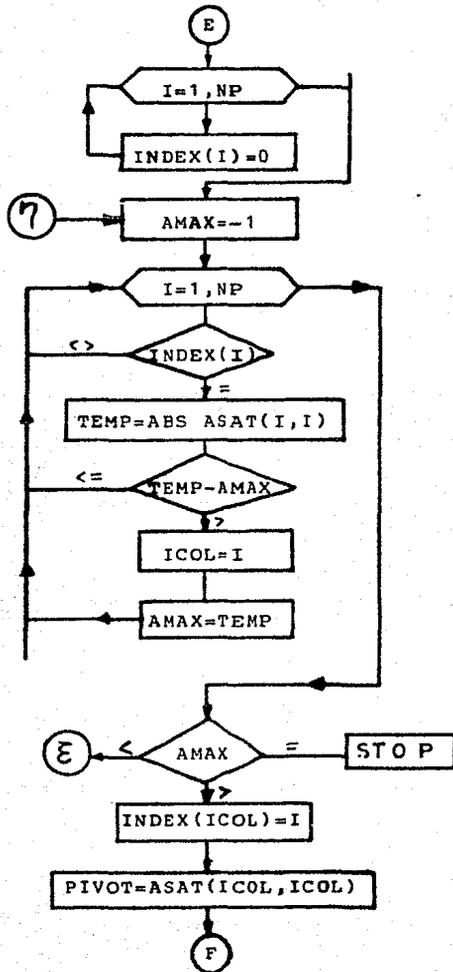


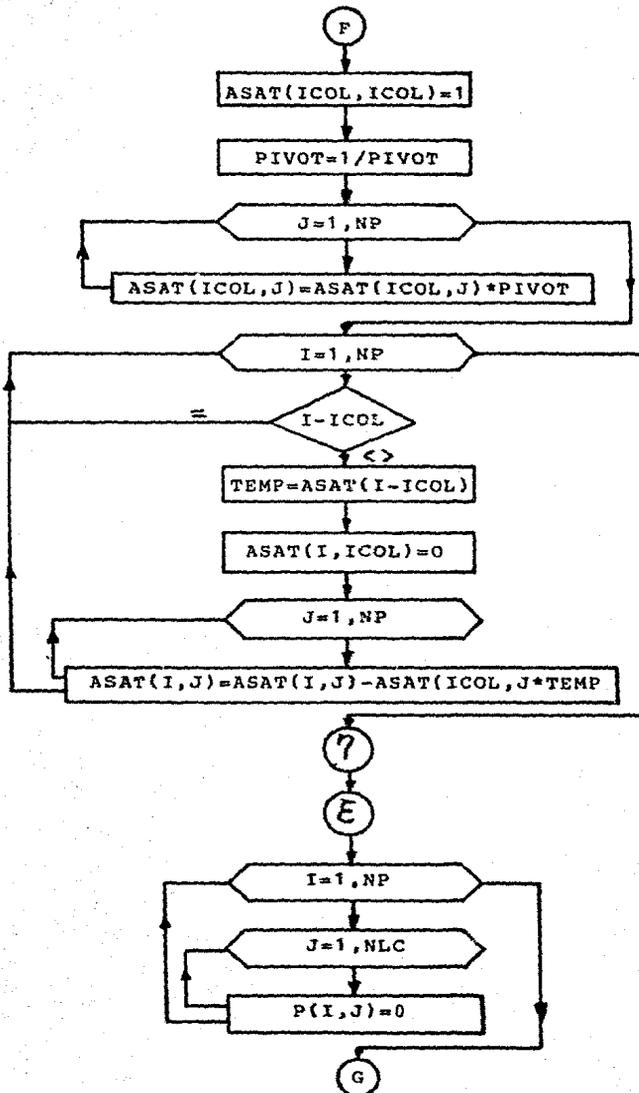


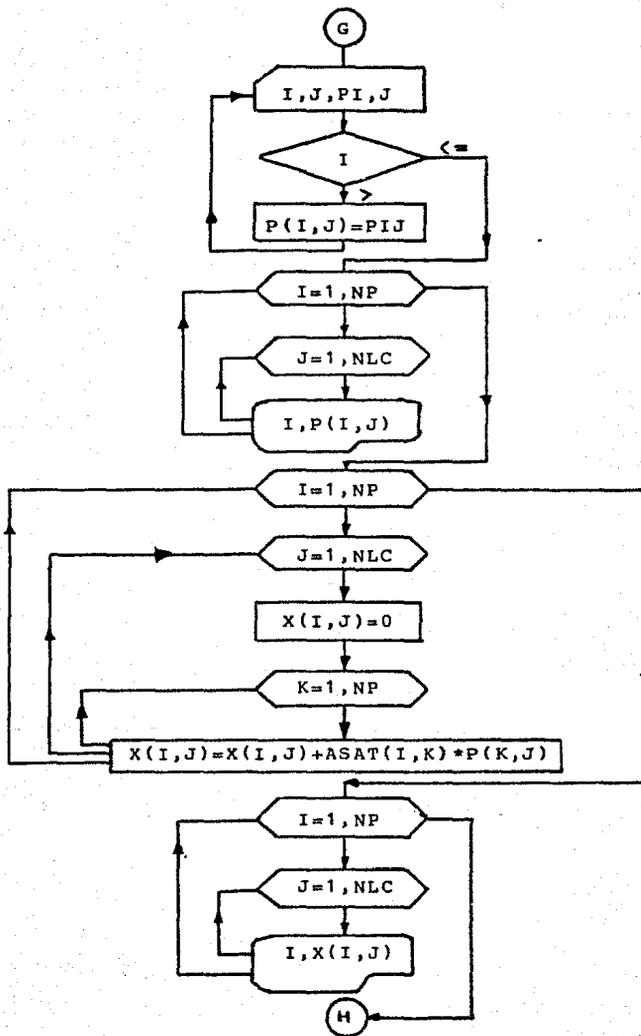


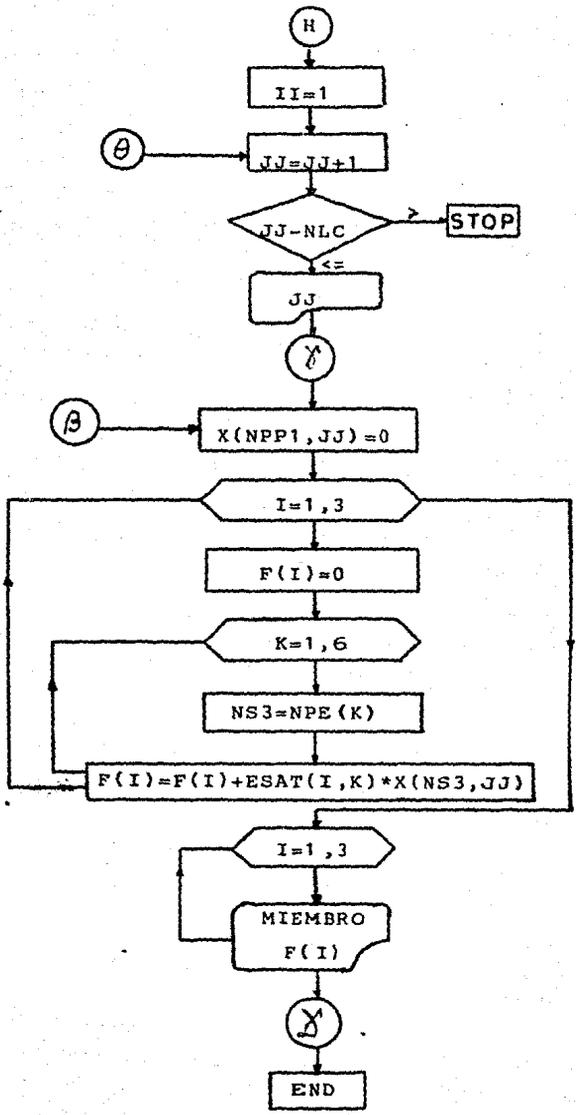












## PROGRAMAS

Los programas están escritos en lenguaje Basic aunque no es un lenguaje propiamente técnico, nos permite cierta facilidad para manejar los algoritmos de los programas en cuestión. Si seguimos los programas línea a línea, nos podremos dar cuenta que la matriz de rigideces está formada en una manera práctica y sencilla, de tal forma que nos permita visualizar el manejo del problema.

La entrada de datos a los programas es igual:

En primer lugar damos los grados de libertad NP, 6 para marcos y 4 para armaduras (para cada barra), número de miembros NM, número de condiciones de carga NLC.

Como anteriormente se menciona se darán los grados de libertad según correspondan, origen y destino de cada miembro respectivamente; daremos la proyección horizontal H, y la proyección vertical V de cada miembro sin importar el signo, para que posteriormente se calcule la longitud L del miembro, daremos el módulo de elasticidad E, el área de la sección - - -

transversal  $A$  de cada barra, y el momento de inercia  $I$  para cada barra.

Por otra parte daremos las acciones a las que esta sujeta -- nuestra estructura  $P(I,J)$ .

Como resultado obtendremos para los marcos:

Los desplazamientos para cada una de las condiciones de carga  $X(NP,NLC)$ , la fuerza axial, el momento inicial y momento final actuando en cada miembro.

En el caso de las armaduras obtendremos la fuerza axial que actua en cada miembro y su deformación correspondiente.

```

10      DIM ASAT(21,21), P(20,6), X(21,4), F(4), INDEX(20)
15      OPEN # 1, "SALIDA LIST", OUTPUT
16      OPEN # 5, "ARCCIN.DAT", INPUT
17      OPEN # 4, "ARCCSI.DAT", INPUT
20      INPUT NP, NF, NLC
30      INPUT E
40      NPP1 = NP+1
50      FOR I=1 TO NPP1
60          FOR J=1 TO NPP1
70              ASAT(I,J)=0
80          NEXT J
90      NEXT I
100     PRINT # 1 "ANALISIS DE ARMADURAS"
110     PRINT # 1
120     PRINT # 1 "MIEMBRO NP1 NP2 NP3 NP4, H, V, A, L, CS, SN"
130     FOR I=1 TO NF
140         INPUT # 5 MEMNO, NP1, NP2, NP3, NP4, H, V, A
160         PRINT "LECTURA DE MATRIX ELEMENTO = ", MEMNO
150         XL=SQR(H*H + V*V)
160         CS=H/XL
170         SN=V/XL
180         PRINT # 1 MEMNO, NP1, NP2, NP3, NP4, H, V, XL, CS, SN
190         TEMP1=E*AKCS*CS/XL
200         TEMP2=E*AKCS*SN/XL
210         TEMP3=E*AKSN*SN/XL

220     REM FORMACION DE LA MATRIZ DE RIGIDECES

230         ASAT(NP1,NP1)=ASAT(NP1,NP1) + TEMP1
240         ASAT(NP1,NP2)=ASAT(NP1,NP2) + TEMP2
250         ASAT(NP1,NP3)=ASAT(NP1,NP3) - TEMP1
260         ASAT(NP1,NP4)=ASAT(NP1,NP4) - TEMP2
270         ASAT(NP2,NP1)=ASAT(NP2,NP1) + TEMP2
280         ASAT(NP2,NP2)=ASAT(NP2,NP2) + TEMP3
290         ASAT(NP2,NP3)=ASAT(NP2,NP3) - TEMP2
300         ASAT(NP2,NP4)=ASAT(NP2,NP4) - TEMP3
310         ASAT(NP3,NP1)=ASAT(NP3,NP1) - TEMP1
320         ASAT(NP3,NP2)=ASAT(NP3,NP2) - TEMP2
330         ASAT(NP3,NP3)=ASAT(NP3,NP3) + TEMP1
340         ASAT(NP3,NP4)=ASAT(NP3,NP4) + TEMP2
350         ASAT(NP4,NP1)=ASAT(NP4,NP1) - TEMP2
360         ASAT(NP4,NP2)=ASAT(NP4,NP2) - TEMP3
370         ASAT(NP4,NP3)=ASAT(NP4,NP3) + TEMP2
380         ASAT(NP4,NP4)=ASAT(NP4,NP4) + TEMP3
390     NEXT I
400     FOR I=1 TO NP
410         INDEX(I)=0
420     NEXT I
430     AMAX=-1.0
440     FOR I=1.0 TO NP
450         IF INDEX(I) < 0 GO TO 500
460         TEMP=ABS(ASAT(I,I))
470         IF (TEMP-AMAX) <= 0 GO TO 500
480         ICOL=I
490         AMAX=TEMP

```

```

500  NEXT I
510  IF AMAX < 0 GO TO 690
520  IF AMAX=0 GO TO 9999
530  INDEX(ICOL)=I
540  PIVOT=ASAT(ICOL,ICOL)
550  ASAT(ICOL,ICOL)=1.0
560  PIVOT=1.0/PIVOT
570  FOR J=1 TO NP
580      ASAT(ICOL,J)=ASAT(ICOL,J)*PIVOT
590  NEXT J
600  PRINT : PRINT : PRINT
600  FOR I=1 TO NP
160      PRINT "PROCEDIMIENTO LARGO NP = ":NP;I
610      IF(I-ICOL)=0 GO TO 670
620      TEMP=ASAT(I,ICOL)
630      ASAT(I,ICOL)=0.0
640      FOR J=1 TO NP
650          ASAT(I,J)=ASAT(I,J)-ASAT(ICOL,J)*TEMP
660      NEXT J
670  NEXT I
680  GO TO 430
690  FOR I=1 TO NP
700      FOR J=1 TO NLC
710          P(I,J)=0
720      NEXT J
730  NEXT I
740  INPUT # 6 I,J,PIJ
755  IF I <= 0 THEN 780
760  P(I,J)=PIJ
770  GO TO 740
780  PRINT # 1 "EL VECTOR DE ACCIONES EXTERNAS"
790  FOR I=1 TO NP
800      FOR J=1 TO NLC
810          PRINT # 1 "RENGLON" I, P(I,J)
820      NEXT J
830  NEXT I
840  FOR I=1 TO NP
160      PRINT "TERCER PASO NP = ":NP;I
850      FOR J=1 TO NLC
860          X(I,J)=0.0
870          FOR K=1 TO NP
880              X(I,J)=X(I,J) + ASAT(I,K)*P(K,J)
890          NEXT K
900      NEXT J
910  NEXT I
920  PRINT # 1
930  PRINT # 1 "LA MATRIZ DE DESPLAZAMIENTOS"
940  FOR I=1 TO NP
950      FOR J=1 TO NLC
960          PRINT # 1 I,X(I,J)
970      NEXT J
980  NEXT I
990  PRINT # 1
1000 PRINT # 1 "FUERZAS EN LOS MIEMBROS"
1010 FOR J=1 TO NLC

```

File USK1:ALBER2.BAS(77.25) printed on 12/10/82

```
1020      X(NP1, I)=0
1030      NEXT I
1035      CLOSE # 5
1036      OPEN # 5, "ARCCIN.DAT", INPUT
1040      FOR I= 1 TO NF
1050          INPUT # 5 MEMNO, NP1, NP2, NP3, NP4, H, V, A
1060          PRINT "ULTIMO PASO C/LECTURA ", MEMNO
1070          XL=SQR(H*H + V*V)
1075          CS=H/XL
1080          SN=V/XL
1090          FOR J=1 TO NLC
1100              F(J)=E*A/XL*(CS*(X(NP3, J)-X(NP1, J)) + SN*(X(NP4, J) - X(NP2
1110                  , J)))
1120          PRINT # 1
1130          FOR K=1 TO NLC
1140              PRINT # 1, MEMNO, F(K)
1150          NEXT K
1160      NEXT I
1165      CLOSE # 1
1166      XCALL SPOOL, "SALIDA.LST"
1180      CLOSE # 5
1190      CLOSE # 6
9999      END
```

File DSK1:ANALIS.BAS[77,25] printed on 11/26/82

```
0010 DIM ASAT(21,21),P(20,6),X(21,6),NPE(6),EA(6,3)
0020 DIM ES(3,3),ESAT(3,6),EASAT(6,6),INDEX(20),F(3)
0030 OPEN # 1,"SALIDA.LST",OUTPUT
0040 OPEN # 5,"ALBERT.DAT",INPUT
0050 OPEN # 6,"ALBER2.DAT",INPUT
0060 INPUT "VALORES DE NP, NM, NLC ...";NP,NM,NLC
0070 INPUT "VALORES DE E ...";E
0080 NPP1 = NP + 1
0090 FOR I = 1 TO NPP1
0100     FOR J = 1 TO NPP1
0110         ASAT(I,J) = 0
0120     NEXT J
0130 NEXT I
0140 PRINT # 1 "ANALISIS DE MARCOS RIGIDOS POR EL METODO DE LAS RIGIDESES"
0150 PRINT # 1
0160 PRINT # 1
0170 PRINT # 1;"MIEMRO H V A I L COS SEN NP1 NP2 NP3 NP4 NP5 NP6"
0180 PRINT # 1
0190 II = 0
0200 JJ = 0

0210 DIEZ'Y'OCHO:
0220 INPUT # 5 MEMNO
0230 FOR I = 1 TO 6
0240     INPUT # 5 NPE(I)
0250 NEXT I
0260 INPUT # 5 H, V, A, XI
0270 IF MEMNO <= 0 GO TO OCHENTA'Y'SIETE
0280 XL = SQR(H**2 + V**2)
0290 CS = H/XL
0300 SN = V/XL
0310 IF II <= 0 THEN PRINT # 1 "MEMNO = ";MEMNO," H = ";H," V = ";V, : &
PRINT # 1 " A = ";A," XI = ";XI," XL = ";XL," CS = ";CS,
FOR I = 1 TO 6
PRINT # 1 "NPE(";I;") = ";NPE(I),
NEXT I : PRINT # 1
0320 EAOL = E*A/XL : EIOL = E*XI/XL : SNOL = SN/XL : CSOL = CS/XL
0330 EA(1,1) = 0 : EA(1,2) = +1 : EA(1,3) = 0 : EA(2,1) = -CS
0340 EA(2,2) = +SNOL : EA(2,3) = +SNOL : EA(3,1) = -SN : EA(3,2) = -CSOL
0350 EA(3,3) = -CSOL : EA(4,1) = 0 : EA(4,2) = 0 : EA(4,3) = +1
0360 EA(5,1) = +CS : EA(5,2) = -SNOL : EA(5,3) = -SNOL : EA(6,1) = SN
0370 EA(6,2) = +CSOL : EA(6,3) = +CSOL : ES(1,1) = +EAOL : ES(1,2) = 0
0380 ES(1,3) = 0 : ES(2,1) = 0 : ES(2,2) = 4.0*EIOL : ES(2,3) = 2.0*EIOL
0390 ES(3,1) = 0.0 : ES(3,2) = 2.0*EIOL : ES(3,3) = 4.0*EIOL
0400 FOR I = 1 TO 3
0410     FOR J = 1 TO 6
0420         ESAT(I,J) = 0
0430     FOR K = 1 TO 3
0440         ESAT(I,J) = ESAT(I,J) + ES(I,K)*EA(J,K)
0450     NEXT K
0460 NEXT J
0470 NEXT I
0480 IF II > 0 THEN GOTO CIENTO'CINCUENTA'Y'SEIS
0490 FOR I = 1 TO 6
0500     FOR J = 1 TO 6
```



File DSK1:ANALIS.BASC77.25J printed on 11/26/82

```
0940 CIENTO'VEINTE'Y'DOS:
0950   INPUT * 6 I, J, PIJ
0960   IF I > 0 THEN P(I,J) = PIJ : GO TO CIENTO'VEINTE'Y'DOS
0970   PRINT * 1 "LA MATRIZ DE ACCIONES EXTERNAS"
0980   PRJNT * 1
0990   FOR I = 1 TO NP
1000     FOR J = 1 TO NLC
1010       PRINT * 1 I,P(I,J),
1020     NEXT J
1030   PRINT * 1
1040   NEXT I
1050   FOR I = 1 TO NP
1060     FOR J = 1 TO NLC
1070       X(I,J) = 0
1080       FOR K = 1 TO NP
1090         X(I,J) = X(I,J) + ASAT(I,K) * P(K,J)
1100       NEXT K
1110     NEXT J
1120   NEXT I
1130   PRINT * 1 "LA MATRIZ DE DESPLAZAMIENTO ES"
11350  PRINT "LA MATRIZ DE DESPLAZAMIENTO ES"
1140   FOR I = 1 TO NP
1150     FOR J = 1 TO NLC
1160       PRINT * 1 I,X(I,J)
1170     NEXT J
1180   NEXT I
1190   II=1

1200 CIENTO'CUARENTA'Y'OCHO:
1210   JJ=JJ+1
1220   IF(JJ-NLC) > 0 GO TO FIN
1230   PRINT * 1
1240   PRINT * 1 "CONDICION DE CARGA No", JJ
1250   PRINT * 1
1260   PRINT * 1 "MIEMRO FUERZA AXIAL MOMENTO"
1270   CLOSE * 5
1280   OPEN * 5, "ALBERT.DAT", INPUT
1290   GO TO DIEZ'Y'OCHO

1300 CIENTO'CINCUENTA'Y'SEIS:
1310   X(NPPI,JJ) = 0
1320   FOR I = 1 TO 3
1330     F(I) = 0
1340     FOR K = 1 TO 6
1350       NS3 = NPE(K)
1360       F(I) = F(I) + ESAT(I,K)*X(NS3,JJ)
1370     NEXT K
1380   NEXT I
1390   FOR I = 1 TO 3
1400     IF I = 1 THEN PRINT * 1 : PRINT * 1 MEMNO,
1410     PRINT * 1 F(I),
1420   GO TO DIEZ'Y'OCHO
```

File DSK1:ANALIS.BASE[77.25] printed on 11/26/82

1430 FIN:  
1440 CLOSE # 1  
1450 CLOSE # 5  
1460 CLOSE # 6  
1470 XCALL SPOOL, "SALIDA.LST", "SPOL1"  
1480 END

EJEMPLOS

Para mostrar cómo se manejan los programas, en este capítulo se presentan tres ejemplos, los cuales considero ejemplificativos para dicho fin.

Ejemplo # 1

PROBLEMA No. 1

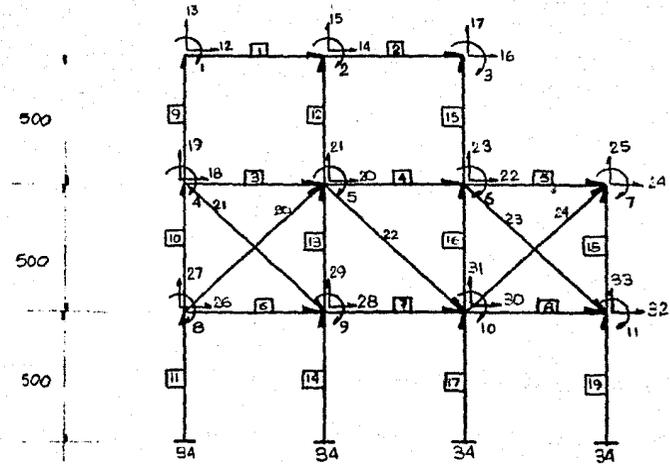
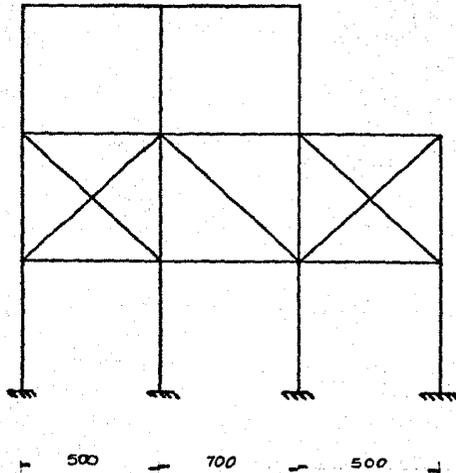
DATOS GENERALES:

NP = 33

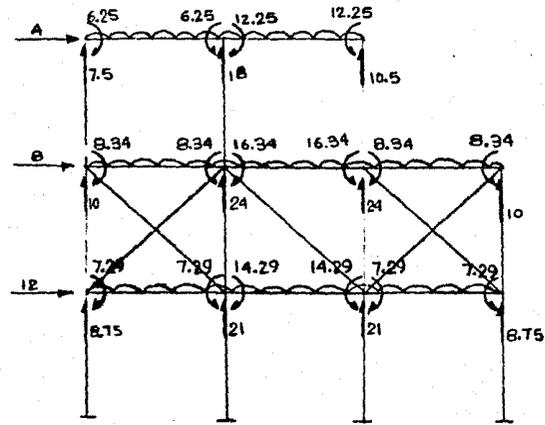
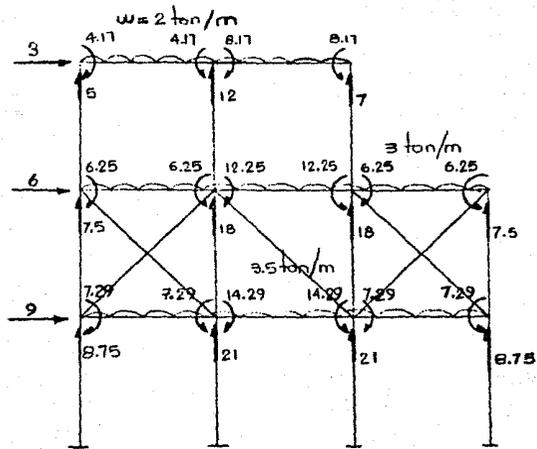
NM = 24

NLC = 2

E = 160.0 KG/cm<sup>2</sup>



CONFIGURACION DE LA ESTRUCTURA



CONDICIONES DE CARGA

CONFIGURACION DE LA ESTRUCTURA

MIEMBRO	NP1	NP2	NP3	NP4	NP5	NP6	II	V	A	I
1	1	12	13	2	14	15	500	0	1 000	133 333
2	2	14	15	3	16	17	700	0	1 000	133 333
3	4	18	19	5	20	21	500	0	1 200	160 000
4	5	20	21	6	22	23	700	0	1 200	160 000
5	6	22	23	7	24	25	500	0	1 200	160 000
6	8	26	27	9	28	29	500	0	1 200	160 000
7	9	28	29	10	30	31	700	0	1 200	160 000
8	10	30	31	11	32	33	500	0	1 200	160 000
9	4	18	19	1	12	13	0	500	900	67 500
10	8	26	27	4	18	19	0	500	1 200	160 000
11	34	34	34	8	26	27	0	500	1 600	213 333
12	5	20	21	2	14	15	0	500	900	67 500
13	9	28	29	5	20	21	0	500	1 200	160 000
14	34	34	34	9	28	29	0	500	1 600	213 333
15	6	22	23	3	16	17	0	500	900	67 500
16	10	30	31	6	22	23	0	500	1 200	160 000
17	34	34	34	10	30	31	0	500	1 600	213 333
18	11	32	33	7	24	25	0	500	1 200	160 000
19	34	34	34	11	32	33	0	500	1 600	213 333
20	8	26	27	5	20	21	500	500	400	13 333
21	4	18	19	9	28	29	500	-500	400	13 333
22	5	20	21	10	30	31	700	-500	400	13 333
23	6	22	23	11	32	33	500	-500	400	13 333
24	10	30	31	7	24	25	500	500	400	13 333

CONDICIONES DE CARGA

GRADO	CONDICION No. 1		CONDICION No. 2	
1	1	4.17	2	6.25
2	1	4	2	6
3	1	-8.17	2	-12.25
4	1	6.25	2	8.34
5	1	6	2	8.0
6	1	-6	2	-8
7	1	-6.25	2	-8.34
8	1	7.29	2	7.29
9	1	7.0	2	7.0
10	1	-7	2	-7
11	1	-7.29	2	-7.29
12	1	3	2	4
13	1	4.17	2	7.5
14	1	0	2	0
15	1	12	2	18
16	1	0	2	0
17	1	7	2	10.5
18	1	6	2	8
19	1	7.5	2	10
20	1	0	2	0
21	1	18	2	24
22	1	0	2	0
23	1	18	2	24
24	1	0	2	0
25	1	7.5	2	10
26	1	9	2	12
27	1	8.75	2	8.75
28	1	0	2	0
29	1	21	2	21
30	1	0	2	0
31	1	21	2	21
32	1	0	2	0
33	1	8.75	2	8.75

ANALISIS DE MARCOS RIGIDOS POR EL METODO DE LAS RIGIDIDADES

MIEMBRO	H	V	A	U	L	COS	SEN	NP1	NP2	NP3	NP4	NP5	NP6
MEMNO = 1	H = 500			V = 0				A = 1000				XI = 133333	
XL = 500	CS = 1			SN = 0				NPE(1) = 1					
NPE(2) = 12								NPE(3) = 13				NPE(4) = 2	
NPE(5) = 14								NPE(6) = 15					
MEMNO = 2	H = 700			V = 0				A = 1000				XI = 133333	
XL = 700	CS = 1			SN = 0				NPE(1) = 2					
NPE(2) = 14								NPE(3) = 15				NPE(4) = 3	
NPE(5) = 16								NPE(6) = 17					
MEMNO = 3	H = 500			V = 0				A = 1200				XI = 160000	
XL = 500	CS = 1			SN = 0				NPE(1) = 4					
NPE(2) = 1R								NPE(3) = 19				NPE(4) = 15	
NPE(5) = 20								NPE(6) = 21					
MEMNO = 4	H = 700			V = 0				A = 1200				XI = 160000	
XL = 700	CS = 1			SN = 0				NPE(1) = 5					
NPE(2) = 20								NPE(3) = 21				NPE(4) = 6	
NPE(5) = 22								NPE(6) = 23					
MEMNO = 5	H = 500			V = 0				A = 1200				XI = 160000	
XL = 500	CS = 1			SN = 0				NPE(1) = 6					
NPE(2) = 22								NPE(3) = 23				NPE(4) = 7	
NPE(5) = 24								NPE(6) = 25					
MEMNO = 6	H = 500			V = 0				A = 1200				XI = 160000	
XL = 500	CS = 1			SN = 0				NPE(1) = 8					
NPE(2) = 26								NPE(3) = 27				NPE(4) = 9	
NPE(5) = 28								NPE(6) = 29					
MEMNO = 7	H = 700			V = 0				A = 1200				XI = 160000	
XL = 700	CS = 1			SN = 0				NPE(1) = 9					
NPE(2) = 28								NPE(3) = 29				NPE(4) = 10	
NPE(5) = 30								NPE(6) = 31					
MEMNO = 8	H = 500			V = 0				A = 1200				XI = 160000	
XL = 500	CS = 1			SN = 0				NPE(1) = 10					
NPE(2) = 30								NPE(3) = 31				NPE(4) = 11	
NPE(5) = 32								NPE(6) = 33					
MEMNO = 9	H = 0			V = 500				A = 900				XI = 67500	
XL = 500	CS = 0			SN = 1				NPE(1) = 4					
NPE(2) = 18								NPE(3) = 19				NPE(4) = 1	
NPE(5) = 12								NPE(6) = 13					
MEMNO = 10	H = 0			V = 500				A = 1200				XI = 160000	
XL = 500	CS = 0			SN = 1				NPE(1) = 8					
NPE(2) = 26								NPE(3) = 27				NPE(4) = 4	
NPE(5) = 18								NPE(6) = 19					
MEMNO = 11	H = 0			V = 500				A = 1600				XI = 213333	
XL = 500	CS = 0			SN = 1				NPE(1) = 34					
NPE(2) = 34								NPE(3) = 34				NPE(4) = 8	
NPE(5) = 26								NPE(6) = 27					
MEMNO = 12	H = 0			V = 500				A = 900				XI = 67500	
XL = 500	CS = 0			SN = 1				NPE(1) = 5					
NPE(2) = 20								NPE(3) = 21				NPE(4) = 2	
NPE(5) = 14								NPE(6) = 15					
MEMNO = 13	H = 0			V = 500				A = 1200				XI = 160000	
XL = 500	CS = 0			SN = 1				NPE(1) = 9					
NPE(2) = 28								NPE(3) = 29				NPE(4) = 5	
NPE(5) = 20								NPE(6) = 21					
MEMNO = 14	H = 0			V = 500				A = 1600				XI = 213333	
XL = 500	CS = 0			SN = 1				NPE(1) = 34					
NPE(2) = 34								NPE(3) = 34				NPE(4) = 9	
NPE(5) = 28								NPE(6) = 29					
MEMNO = 15	H = 0			V = 500				A = 900				XI = 67500	
XL = 500	CS = 0			SN = 1				NPE(1) = 6					
NPE(2) = 22								NPE(3) = 23				NPE(4) = 3	

MEMNO = 14	H = 0	U = 500	A = 1200	XI = 160000
XL = 500	CS = 0	SN = 1	NPE( 1 ) = 10	NPE( 4 ) = 6
NPE( 2 ) = 30		NPE( 3 ) = 31		
NPE( 5 ) = 22		NPE( 6 ) = 23		
MEMNO = 17	H = 0	U = 500	A = 1200	XI = 213333
XL = 500	CS = 0	SN = 1	NPE( 1 ) = 34	NPE( 4 ) = 10
NPE( 2 ) = 34		NPE( 3 ) = 34		
NPE( 5 ) = 30		NPE( 6 ) = 31		
MEMNO = 18	H = 0	U = 500	A = 1200	XI = 160000
XL = 500	CS = 0	SN = 1	NPE( 1 ) = 11	NPE( 4 ) = 7
NPE( 2 ) = 32		NPE( 3 ) = 33		
NPE( 5 ) = 24		NPE( 6 ) = 25		
MEMNO = 19	H = 0	U = 500	A = 1600	XI = 213333
XL = 500	CS = 0	SN = 1	NPE( 1 ) = 34	NPE( 4 ) = 11
NPE( 2 ) = 34		NPE( 3 ) = 34		
NPE( 5 ) = 32		NPE( 6 ) = 33		
MEMNO = 20	H = 500	U = 500	A = 400	XI = 13333
XL = 707.107		CS = 707107		SN = 707107
NPE( 1 ) = 8		NPE( 2 ) = 24		NPE( 3 ) = 27
NPE( 4 ) = 5		NPE( 5 ) = 20		NPE( 6 ) = 21
MEMNO = 21	H = 500	U = -500	A = 400	XI = 13333
XL = 707.107		CS = 707107		SN = -707107
NPE( 1 ) = 4		NPE( 2 ) = 18		NPE( 3 ) = 19
NPE( 4 ) = 9		NPE( 5 ) = 28		NPE( 6 ) = 29
MEMNO = 22	H = 700	U = -500	A = 400	XI = 13333
XL = 860.233		CS = 813733		SN = -581238
NPE( 1 ) = 5		NPE( 2 ) = 20		NPE( 3 ) = 21
NPE( 4 ) = 10		NPE( 5 ) = 30		NPE( 6 ) = 31
MEMNO = 23	H = 500	U = -500	A = 400	XI = 13333
XL = 707.107		CS = 707107		SN = -707107
NPE( 1 ) = 6		NPE( 2 ) = 22		NPE( 3 ) = 23
NPE( 4 ) = 11		NPE( 5 ) = 32		NPE( 6 ) = 33
MEMNO = 24	H = 500	U = 500	A = 400	XI = 13333
XL = 707.107		CS = 707107		SN = 707107
NPE( 1 ) = 10		NPE( 2 ) = 30		NPE( 3 ) = 31
NPE( 4 ) = 7		NPE( 5 ) = 24		NPE( 6 ) = 25

#### LA MATRIZ DE ACCIONES EXTERNAS

1	417000	1	625000
2	400000	2	600000
3	-817000	3	-1.225E6
4	625000	4	834000
5	600000	5	800000
6	-600000	6	-800000
7	-625000	7	-834000
8	729000	8	729000
9	700000	9	700000
10	-700000	10	-700000
11	-729000	11	-729000
12	3000	12	4000
13	4170	13	7500
14	0	14	0
15	12000	15	18000
16	0	16	0
17	7000	17	10500
18	6000	18	8000
19	7500	19	10000
20	0	20	0
21	18000	21	24000
22	0	22	0

23	10000	24	10000
24	0	24	0
25	7500	25	10000
26	9000	26	12000
27	8750	27	8750
28	0	28	0
29	21000	29	21000
30	0	30	0
31	21000	31	21000
32	0	32	0
33	8750	33	8750

LA MATRIZ DE DESPLAZAMIENTO ES

1	2.33262
1	3.28474
2	1.78514
2	2.43405
3	-3.04709
3	-4.81312
4	1.3507
4	1.87061
5	1.43494
5	1.94468
6	-1.11578
6	-1.13628
7	-1.48672
7	-2.06501
8	2.77831
8	3.39328
9	2.07646
9	2.51086
10	684197
10	1.17013
11	1.32052
11	2.08443
12	3187.32
12	4235.96
13	123.449
13	174.003
14	3179.08
14	4224.74
15	-1.40517
15	-544939
16	3169.72
16	4211.5
17	168.473
17	222.738
18	1913
18	2554.72
19	162.53
19	138.477
20	1895.77
20	2531.53
21	51.7784
21	63.5645
22	1895.1
22	2531.26
23	143.46
23	184.884
24	1888.02
24	2521.6
25	44.6028
25	62.6323
26	1870.12
26	2424.79
27	63.4475
27	77.8304

28	1894.6
28	2406.19
29	40.9344
29	45.2039
30	1797.78
30	2398.62
31	82.9786
31	100.793
32	1785.54
32	2382.81
33	27.9433
33	30.3076

CONDICION DE CARGA No 1

MIEMBRO FUERZA AXIAL MOMENTO

1	-2635.63	487052	440317
2	-2140.25	76005.2	-218530
3	-6616.09	205591	24970.5
4	-183.483	230782	117519
5	-2719.98	-235829	-376643
6	-5956.4	769439	697769
7	-1871.33	366980	265146
8	-4698.74	241532	306692
9	6024.74	-112134	-70052.3
10	16159.7	651063	505695
11	30949.1	-1.1117E6	-732373
12	-15028.8	-131365	-116323
13	4164.06	516390	450904
14	20958.4	-1.19482E6	-911318
15	7203.61	-471656	-598470
16	23225	66905.9	-12581.4
17	42485	-1.37932E6	-1.28591E6
18	6397.27	55245.7	-232216
19	14307	-1.28242E6	-1.10213E6
20	4286.94	40671.6	32578
21	-2995.06	25848.3	30179.1
22	-7281.36	17101.3	13367.9
23	381.636	2547.21	11188.3
24	3318.95	-3041.98	-16140.9

CONDICION DE CARGA No 2

MIEMBRO FUERZA AXIAL MOMENTO

1	-3593.15	696167	640812
2	-3024.96	84302.8	-347741
3	-8905.31	280945	33388.1
4	-73.7652	312541	160334
5	-3709.47	-320991	-518494
6	-7910.23	932010	841649
7	-2074.36	470311	372247
8	-6072.36	409992	503821
9	10174	-132257	-71166.9
10	23345	807891	451969
11	39849.2	-1.52472E6	-1.06143E6
12	-18444.1	-156982	-127115
13	7050.44	636347	578371
14	23144.4	-1.62833E6	-1.28551E6
15	10902.1	-655220	-857259
16	32294.7	144125	10418.6
17	51600.8	-1.80519E6	-1.64543E6
18	8342.27	130570	-294538
19	15517.5	-1.64713E6	-1.38226E6
20	5790.6	50528.5	41787.9
21	-3523.95	33243.2	37206.4

20  
13

7600.67  
392.007

24201.6  
5459.32

60440  
18870.8

PROBLEMA No. 2

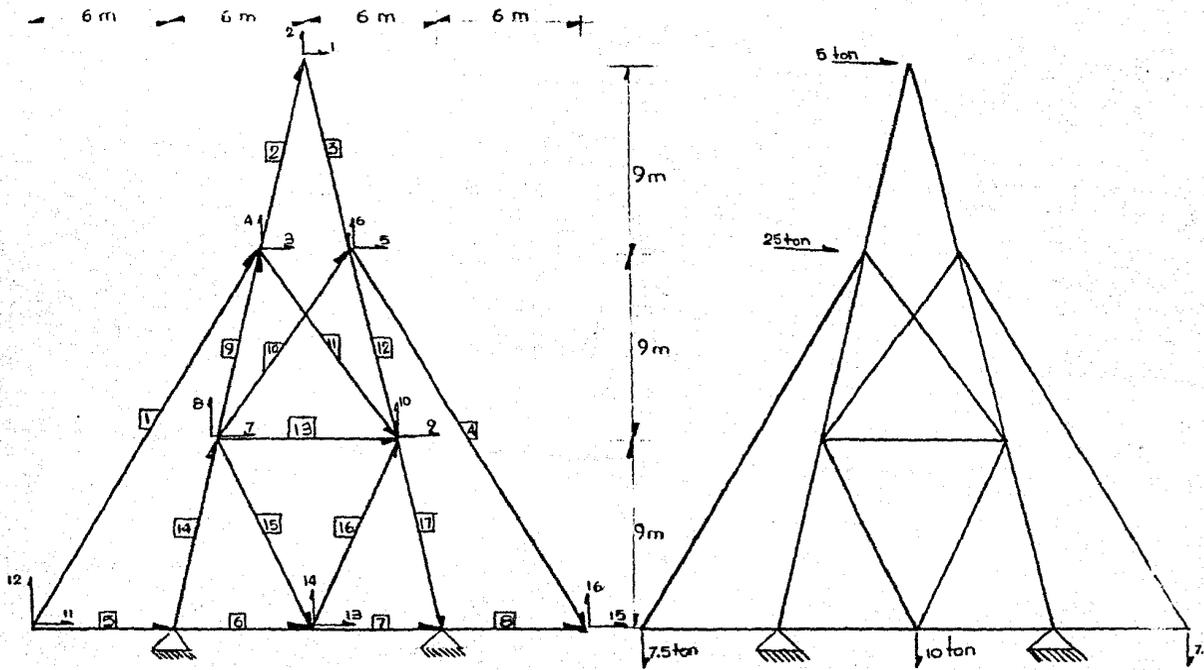
DATOS GENERALES:

NP = 16 GRADOS

NM = 17 MIEMBROS

NLC = 4 CONDICIONES DE CARGA

E = 20.39 E6 TON/M<sup>2</sup>



CONFIGURACION DE LA ESTRUCTURA

M	NP1	NP2	NP3	NP4	H (m)	V (m)	A (m <sup>2</sup> )
1	11	12	3	4	10	18	73.8E-4
2	3	4	1	2	2	9	73.8E-4
3	1	2	5	6	2	-9	73.8E-4
4	5	6	15	16	10	-18	73.8E-4
5	11	12	17	17	6	0	73.8E-4
6	17	17	13	14	6	0	73.8E-4
7	13	14	17	17	6	0	73.8E-4
8	17	17	15	16	6	0	73.8E-4
9	7	8	3	4	2	9	73.8E-4
10	7	8	5	6	6	9	73.8E-4
11	3	4	9	10	6	-9	73.8E-4
12	5	6	9	10	2	-9	73.8E-4
13	7	8	9	10	8	0	73.8E-4
14	17	17	7	8	2	9	73.8E-4
15	7	8	13	14	4	-9	73.8E-4
16	13	14	9	10	4	9	73.8E-4
17	9	10	17	17	2	-9	73.8E-4

CONDICIONES DE CARGA

G	1	CONDIC. No. 1	2	CONDIC. No. 2	3	CONDIC. No. 3	4	CONDIC. No. 4
1	1	5	2	10	3	15	4	4
2	1	0	2	0	3	0	4	5
3	1	25	2	30	3	35	4	10
4	1	0	2	0	3	0	4	0
5	1	0	2	0	3	0	4	0
6	1	0	2	0	3	0	4	0
7	1	0	2	0	3	0	4	0
8	1	0	2	0	3	0	4	0
9	1	0	2	0	3	0	4	0
10	1	0	2	0	3	0	4	0
11	1	0	2	0	3	0	4	0
12	1	-7.5	2	-15	3	-20	4	-8
13	1	0	2	0	3	0	4	0
14	1	-10	2	-20	3	-25	4	-20
15	1	0	2	0	3	0	4	0
16	1	-7.5	2	-15	3	-20	4	-8



RENGLON 7	0
RENGLON 7	0
RENGLON 8	0
RENGLON 8	0
RENGLON 8	0
RENGLON 9	0
RENGLON 9	0
RENGLON 9	0
RENGLON 10	0
RENGLON 11	0
RENGLON 12	-7.5
RENGLON 12	-15
RENGLON 12	-20
RENGLON 12	-8
RENGLON 13	0
RENGLON 14	-10
RENGLON 14	-20
RENGLON 14	-25
RENGLON 14	-20
RENGLON 15	0
RENGLON 16	-7.5
RENGLON 16	-15
RENGLON 16	-20
RENGLON 16	-8

LA MATRIZ DE DESPLAZAMIENTOS

1	2.43249E-2
1	3.68884E-2
1	4.94518E-2
1	1.35722E-2
2	-5.54414E-4
2	-1.82165E-3
2	-2.55427E-3
2	-1.00587E-3
3	1.48716E-2
3	1.93031E-2
3	2.41149E-2
3	6.51633E-3
4	8.33504E-4
4	6.60544E-4
4	9.377E-4
4	-1.65E-4
5	1.17033E-2
5	1.72913E-2
5	2.24922E-2
5	6.46593E-3
6	-2.44641E-3
6	-4.7509E-3
6	-4.40528E-3
6	-2.17474E-3
7	5.78503E-3
7	7.89348E-3

7	2.19108E-3
7	2.20301E-3
8	1.0113E-3
8	9.39765E-4
8	1.12512E-3
8	-1.06593E-4
9	5.82734E-3
9	2.80615E-3
9	9.79453E-3
9	2.61509E-3
10	-2.57593E-3
10	-4.12688E-3
10	-5.34705E-3
10	-1.92165E-3
11	1.63728E-4
11	3.27456E-4
11	4.36608E-4
11	1.74643E-4
12	7.68090E-3
12	8.55544E-3
12	1.05628E-2
12	1.94635E-3
13	1.63728E-4
13	1.96474E-4
13	2.29219E-4
13	6.54912E-5
14	-1.14913E-3
14	-2.38557E-3
14	-3.07572E-3
14	-1.85058E-3
15	-1.63728E-4
15	-3.27456E-4
15	-4.36608E-4
15	-1.74643E-4
16	-1.05628E-2
16	-1.71863E-2
16	-2.26769E-2
16	-7.27526E-3

FUERZAS EN LOS MIEMBROS

1	8.57969
1	17.1594
1	22.8792
1	9.15167
2	11.5244
2	23.0489
2	34.5733
2	11.7805
3	-11.5244
3	-23.0489
3	-34.5733
3	-4.65856
4	8.57969
4	17.1594
4	22.8792
4	9.15167
5	-4.4444
5	-8.3333
5	-11.1111
5	-4.4444

6	5.83333
6	1.66667
7	-4.16667
7	-5.83333
7	-1.66667
8	-4.16667
8	-8.33333
8	-11.11111
8	-4.44444
9	29.7714
9	36.494
9	46.738
9	12.0366
10	3.3802
10	6.76041
10	9.01389
10	3.60555
11	-30.4218
11	-33.802
11	-38.309
11	-9.91527
12	-22.0885
12	-44.177
12	-62.7441
12	-17.9269
13	1.66667
13	-1.66667
13	-2.91667
13	-5.5
14	37.1343
14	43.5367
14	55.0612
14	8.70735
15	-4.78764
15	-1.3679
15	-6.83948
15	6.83948
16	15.7308
16	23.2542
16	28.0419
16	15.0465
17	-62.7441
17	-94.7564
17	-121.647
17	-40.4634

PROBLEMA No. 3

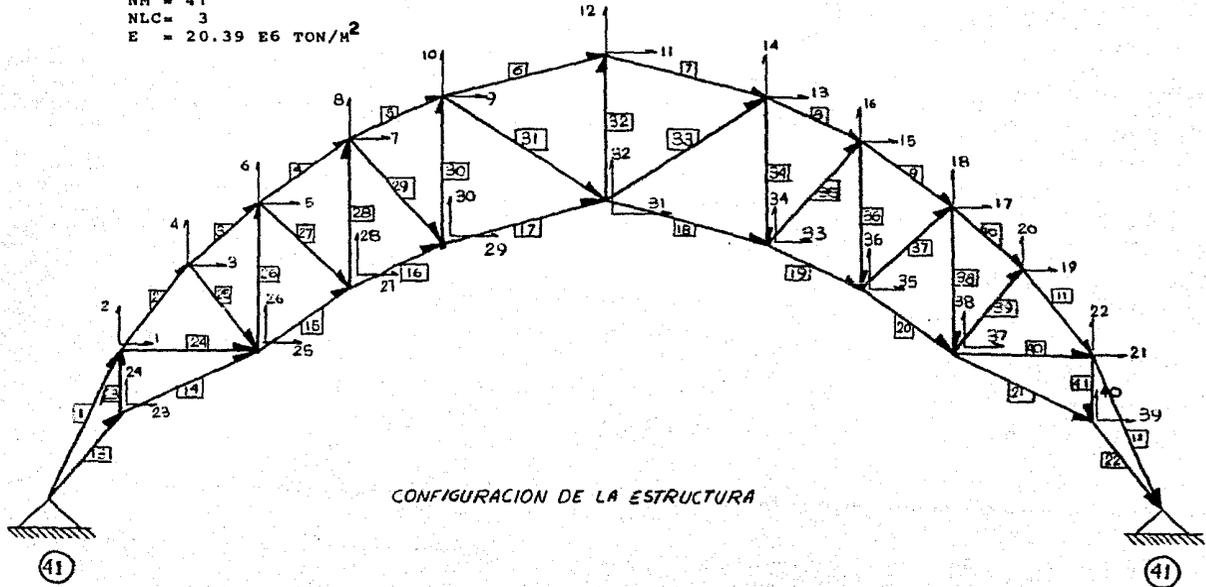
DATOS GENERALES:

NP = 40

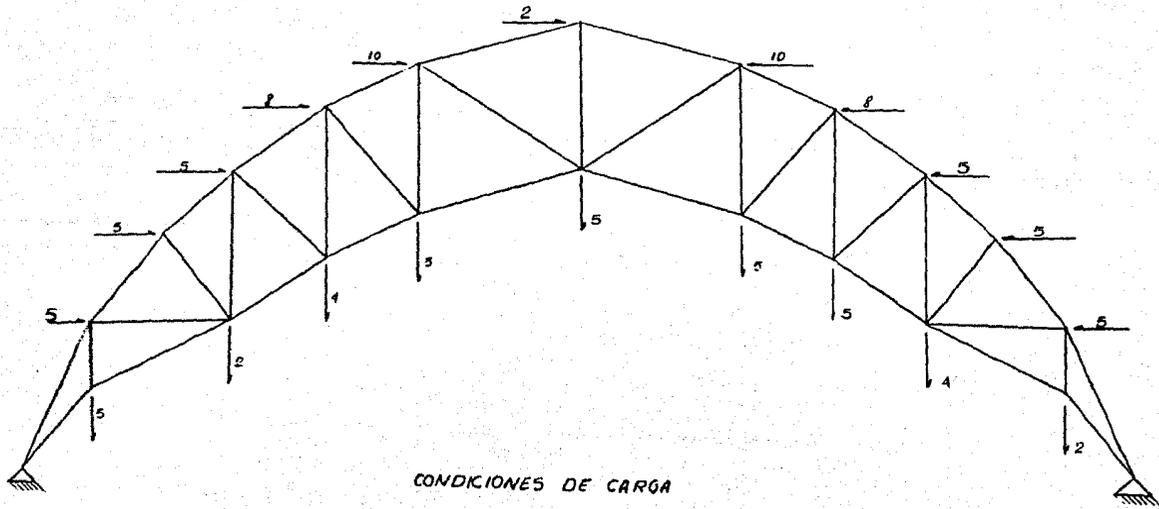
NM = 41

NLC = 3

E = 20.39 E6 TON/H<sup>2</sup>



CONFIGURACION DE LA ESTRUCTURA



CONFIGURACION DE LA ESTRUCTURA

M1 #	NP1	NP2	NP3	NP4	H (m)	V (m)	A (m <sup>2</sup> )
1	41	41	1	2	3	7	36E-4
2	1	2	3	4	3	4	36E-4
3	3	4	5	6	3	3	36E-4
4	5	6	7	8	4	3	36E-4
5	7	8	9	10	4	2	36E-4
6	9	10	11	12	7	2	36E-4
7	11	12	13	14	7	-2	36E-4
8	13	14	15	16	4	-2	36E-4
9	15	16	17	18	4	-3	36E-4
10	17	18	19	20	3	-3	36E-4
11	19	20	21	22	3	-4	36E-4
12	21	22	41	41	3	-7	36E-4
13	41	41	23	24	3	4	36E-4
14	23	24	25	26	6	3	36E-4
15	25	26	27	28	4	3	36E-4
16	27	28	29	30	4	2	36E-4
17	29	30	31	32	7	2	36E-4
18	31	32	33	34	7	-2	36E-4
19	33	34	35	36	4	-2	36E-4
20	35	36	37	38	4	-3	36E-4
21	37	38	39	40	6	-3	36E-4
22	39	40	41	41	3	-4	36E-4
23	23	24	1	2	0	3	36E-4
24	1	2	25	26	6	0	36E-4
25	3	4	25	26	3	-4	36E-4
26	5	6	25	26	0	7	36E-4
27	5	6	27	28	4	-4	36E-4
28	27	28	7	8	0	7	36E-4
29	7	8	29	30	4	-5	36E-4
30	29	30	9	10	0	7	36E-4
31	9	10	31	32	7	-5	36E-4
32	31	32	11	12	0	7	36E-4
33	31	32	13	14	7	5	36E-4
34	13	14	33	34	0	7	36E-4
35	33	34	15	16	4	5	36E-4
36	15	16	35	36	0	-7	36E-4
37	35	36	17	18	4	4	36E-4
38	17	18	37	38	0	-7	36E-4
39	37	38	19	20	3	4	36E-4
40	37	38	21	22	6	0	36E-4
41	21	22	39	40	0	-3	36E-4

CONDICIONES DE CARGA

G	1	P1	2	P2	3	P3	4	P4
1	1	+5	2	0	3	5	4	2
2	1	0	2	-5	3	-5	4	-1
3	1	5	2	0	3	5	4	2
4	1	0	2	-5	3	-5	4	-1
5	1	5	2	0	3	5	4	2
6	1	0	2	-5	3	-5	4	-1
7	1	8	2	0	3	8	4	2
8	1	0	2	-5	3	-5	4	-1
9	1	10	2	0	3	10	4	2
10	1	0	2	-5	3	-5	4	-1
11	1	2	2	0	3	2	4	2
12	1	0	2	-5	3	-5	4	-5
13	1	-10	2	0	3	-10	4	2
14	1	0	2	-5	3	-5	4	-1
15	1	-8	2	0	3	-8	4	2
16	1	0	2	-5	3	-5	4	-1
17	1	-5	2	0	3	-5	4	2
18	1	0	2	-5	3	-5	4	-1
19	1	-5	2	0	3	-5	4	2
20	1	0	2	-5	3	-5	4	-1
21	1	-5	2	0	3	-5	4	2
22	1	0	2	-5	3	-5	4	-1
23	1	0	2	0	3	0	4	0
24	1	-5	2	0	3	-5	4	-1
25	1	0	2	0	3	0	4	0
26	1	-2	2	0	3	-2	4	-1
27	1	0	2	0	3	0	4	0
28	1	-4	2	0	3	-4	4	-1
29	1	0	2	0	3	0	4	0
30	1	-5	2	0	3	-5	4	-1
31	1	0	2	0	3	0	4	0
32	1	-5	2	0	3	-5	4	-5
33	1	0	2	0	3	0	4	0
34	1	-5	2	0	3	-5	4	-1
35	1	0	2	0	3	0	4	0
36	1	-5	2	0	3	-5	4	-1
37	1	0	2	0	3	0	4	0
38	1	-4	2	0	3	-4	4	0
39	1	0	2	0	3	0	4	0
40	1	-2	2	0	3	-2	4	0

ANALISIS DE ARMATURAS

MEMBRO	NP1	NP2	NP3	NP4	U	V	A	L	CS	SN
1		41		41					1	2
3		7		7.61577					393919	.919145
2		1		2					3	4
3		4		5					.6	.8
3		3		4					5	6
3		3		4.24264					707107	707107
4		5		6					7	8
4		3		5					.8	.6
5		7		8					9	10
4		2		4.47214					.894427	.447214
6		9		10					11	12
7		2		7.28011					.961524	.274721
7		11		12					13	14
7		-2		7.28011					.961524	-.274721
8		13		14					15	16
4		-2		4.47214					.894427	-.447214
9		15		16					17	18
4		-3		5					.8	-.6
10		17		18					19	20
3		-3		4.24264					707107	-.707107
11		19		20					21	22
3		-4		5					.6	-.8
12		21		22					41	41
3		-7		7.61577					393919	-.919145
13		41		41					23	24
3		4		5					.6	.8
14		23		24					25	26
6		3		6.7082					.894427	.447214
15		25		26					27	28
4		3		5					.8	.6
16		27		28					29	30
4		2		4.47214					.894427	.447214
17		29		30					31	32
7		2		7.28011					.961524	.274721
18		31		32					33	34
7		-2		7.28011					.961524	-.274721
19		33		34					35	36
4		-2		4.47214					.894427	-.447214
20		35		36					37	38
4		-3		5					.8	-.6
21		37		38					39	40
6		-3		6.7082					.894427	-.447214
22		39		40					41	41
3		-4		5					.6	-.8
23		23		24					1	2
0		3		3					0	1
24		1		2					25	26
6		0		6					1	0
25		3		4					25	26
3		-4		5					.6	-.8
26		5		6					25	25
0		7		7					0	-1
27		5		6					27	28
4		-4		5.65685					707107	-.707107
28		27		28					7	8
0		7		7					0	1
29		7		8					29	30
40		-5		40.3113					.992278	-.124035
30		29		30					9	10
0		7		7					0	1
31		9		10					31	32

32	31	8.60234	813733	581238
0	7	7	0	3
33	31	32	13	14
7	5	8.60233	813733	581238
34	13	14	33	34
0	7	7	0	3
35	33	34	13	14
4	5	6.40312	624695	780869
36	15	14	35	36
0	-7	7	0	-1
37	35	36	17	18
4	4	5.65685	707107	707107
38	17	18	37	38
0	-7	7	0	-1
39	37	38	17	20
3	4	5	6	8
40	37	38	21	22
6	0	6	1	0
41	21	22	39	40
0	-3	3	0	-1

TEL VECTOR DE ACCIONES EXTERNAS

REGLON 1	5
REGLON 1	0
REGLON 1	5
REGLON 1	2
REGLON 2	0
REGLON 2	-5
REGLON 2	-5
REGLON 2	-1
REGLON 3	5
REGLON 3	0
REGLON 3	5
REGLON 3	2
REGLON 4	0
REGLON 4	-5
REGLON 4	-5
REGLON 4	-1
REGLON 5	5
REGLON 5	0
REGLON 5	5
REGLON 5	2
REGLON 6	0
REGLON 6	-5
REGLON 6	-5
REGLON 6	-1
REGLON 7	8
REGLON 7	0
REGLON 7	8
REGLON 7	2
REGLON 8	0
REGLON 8	-5
REGLON 8	-5
REGLON 8	-1
REGLON 9	10
REGLON 9	0
REGLON 9	2
REGLON 9	10
REGLON 10	0
REGLON 10	-5
REGLON 10	-5
REGLON 10	-1
REGLON 11	2
REGLON 11	0
REGLON 11	2
REGLON 11	2

RENGLO 11	0
RENGLO 12	-5
RENGLO 12	-5
RENGLO 12	-5
RENGLO 13	-10
RENGLO 13	0
RENGLO 13	-10
RENGLO 13	2
RENGLO 14	0
RENGLO 14	-5
RENGLO 14	-5
RENGLO 14	-1
RENGLO 15	-8
RENGLO 15	0
RENGLO 15	-8
RENGLO 15	2
RENGLO 16	0
RENGLO 16	-5
RENGLO 16	-5
RENGLO 16	-1
RENGLO 17	-5
RENGLO 17	0
RENGLO 17	-5
RENGLO 17	2
RENGLO 18	0
RENGLO 18	-5
RENGLO 18	-5
RENGLO 18	-1
RENGLO 19	-5
RENGLO 19	0
RENGLO 19	-5
RENGLO 19	2
RENGLO 20	0
RENGLO 20	-5
RENGLO 20	-5
RENGLO 20	-1
RENGLO 21	-5
RENGLO 21	0
RENGLO 21	-5
RENGLO 21	2
RENGLO 22	0
RENGLO 22	-5
RENGLO 22	-5
RENGLO 22	-1
RENGLO 23	0
RENGLO 24	0
RENGLO 24	-5
RENGLO 24	0
RENGLO 24	-5
RENGLO 24	-1
RENGLO 25	0
RENGLO 26	-2
RENGLO 26	0
RENGLO 26	-2
RENGLO 26	-2
RENGLO 27	-1
RENGLO 27	0
RENGLO 28	-4
RENGLO 28	0

RENGLON 28	-4
RENGLON 28	-1
RENGLON 29	0
RENGLON 30	-5
RENGLON 30	0
RENGLON 30	-5
RENGLON 30	-1
RENGLON 31	0
RENGLON 32	-5
RENGLON 32	0
RENGLON 32	-5
RENGLON 32	-5
RENGLON 33	0
RENGLON 33	0
RENGLON 33	0
RENGLON 34	-5
RENGLON 34	0
RENGLON 34	-5
RENGLON 34	-1
RENGLON 35	0
RENGLON 36	-5
RENGLON 36	0
RENGLON 36	-5
RENGLON 36	-1
RENGLON 37	0
RENGLON 38	-4
RENGLON 38	0
RENGLON 38	-4
RENGLON 38	-1
RENGLON 39	0
RENGLON 40	-2
RENGLON 40	0
RENGLON 40	-2
RENGLON 40	-1

LA MATRIZ DE DESPLAZAMIENTOS

1	147145
1	-5.99276E-2
1	8.72179E-2
1	5.42926E-3
2	-6.63668E-2
2	2.58814E-2
2	-4.04854E-2
2	-2.13383E-3
3	.218464
3	-8.34424E-2
3	.135022
3	9.5863E-3
4	-.121227
4	4.22758E-2

4	-7.8751E-4
4	-5.05053E-3
5	-5.01863E-2
5	1.71143E-2
5	-3.3072E-2
5	2.82493E-4
6	1.45817
6	-5.21892E-2
6	8.66275E-2
6	4.35788E-3
7	-3.41012E-2
7	1.1181E-2
7	-2.29208E-2
7	2.26546E-3
8	1.21059
8	-5.21756E-2
8	6.88833E-2
8	1.32593E-3
9	-4.64913E-3
9	-7.628E-5
9	-4.72541E-3
9	5.80888E-3
10	5.69692E-2
10	-3.00242E-2
10	2.69455E-2
10	-7.8439E-3
11	-7.77172E-5
11	-2.84673E-3
11	-2.22445E-3
11	4.67597E-3
12	2.5495E-2
12	-2.01024E-2
12	5.39238E-3
12	-8.89095E-3
13	-1.2575E-2
13	-1.27448E-4
13	-1.27024E-2
13	3.8909E-3
14	-2.01976E-3
14	-1.08101E-2
14	-1.28298E-2
14	-5.87552E-3
15	-2.15871E-2
15	1.25018E-3
15	-1.98369E-2
15	4.56058E-3
16	-1.38554E-2
16	-6.54352E-3
16	-2.03991E-2
16	-3.0692E-3
17	-3.09874E-2
17	4.15943E-3
17	-2.68279E-2
17	5.94254E-3
18	-2.14879E-2
18	-2.52639E-3
18	-2.40643E-2
18	-2.06677E-4
19	-3.69578E-2
19	6.03103E-3
19	-3.02268E-2
19	7.33878E-3
20	-2.42582E-2
20	1.51631E-4
20	-2.41066E-2
20	1.0127E-3

21	-4.14057E-2
21	1.04456E-2
21	-3.07407E-2
21	9.94147E-3
22	-2.45113E-2
22	4.01313E-3
22	-1.96932E-2
22	4.42219E-3
23	9.13025E-2
23	-3.96554E-2
23	5.16471E-2
23	2.42594E-3
24	-6.694E-2
24	2.66283E-2
24	-4.03115E-2
24	-2.10594E-3
25	144584
25	-5.91558E-2
25	8.74281E-2
25	3.20502E-3
26	-175029
26	6.06174E-2
26	-114411
26	-8.12533E-3
27	-7.42743E-2
27	2.39828E-2
27	-5.02915E-2
27	-1.86204E-3
28	121044
28	-5.20842E-2
28	6.89602E-2
28	1.42102E-3
29	-4.06967E-2
29	1.17713E-2
29	-2.89254E-2
29	3.38756E-3
30	5.42779E-2
30	-2.98806E-2
30	2.63973E-2
30	-7.89121E-3
31	-2.9273E-2
31	6.84633E-3
31	-2.24267E-2
31	4.89615E-3
32	2.31946E-2
32	-1.95931E-2
32	3.60141E-3
32	-9.19609E-3
33	-3.43741E-2
33	7.48323E-3
33	-2.68909E-2
33	6.35037E-3
34	-3.2846E-3
34	-1.07791E-2
34	-1.40637E-2
34	-5.29504E-3
35	-3.81449E-2
35	8.42609E-3
35	-2.97189E-2
35	7.65077E-3
36	-1.46161E-2
36	-6.52024E-3
36	-2.11371E-2
36	-2.50059E-3
37	-4.08427E-2
37	9.91271E-3
37	-2.8575E-3

37	-1.07072
37	9.17492E-3
38	-2.14809E-2
38	-2.62497E-3
38	-2.41059E-2
38	2.51204E-4
39	-3.95842E-2
39	1.15184E-2
39	-2.80457E-2
39	9.81263E-3
40	-2.55722E-2
40	5.55359E-3
40	-2.00254E-2
40	5.12467E-3

FUERZAS EN LOS MIEMBROS

1	-29.2745
1	1.75552
1	-27.512
1	1.70976
2	-16.1031
2	-14.584
2	-30.6871
2	2.36147
3	-19.6566
3	-11.1123
3	-30.7688
3	1.27987
4	-29.1739
4	-7.90396
4	-37.0729
4	-5.76665
5	-38.0505
5	-2.66631
5	-40.7168
5	-12.3536
6	-42.8645
6	6.23126
6	-42.2414
6	-13.8838
7	-44.9445
7	6.23126
7	-44.3214
7	-15.9638
8	-45.4252
8	-3.75308
8	-49.1783
8	-10.7644
9	-43.1733
9	-6.64858
9	-49.8218
9	-8.98622
10	-39.1516
10	-10.4725
10	-42.6221
10	-7.62345

11	-36.2047
11	-13.9294
11	-50.1357
11	-10.1529
12	-59.9406
12	2.1476
12	-57.793
12	3.26511
13	18.05
13	-36.5415
13	-18.5115
13	-3.36468
14	12.1083
14	-24.5262
14	-12.4179
14	-2.2571
15	14.053
15	-16.2967
15	-2.24376
15	3.29127
16	17.5333
16	-16.2918
16	1.24149
16	6.87741
17	19.1119
17	19.2508
17	-1.138991
17	11.0111
18	23.8919
18	-18.2399
18	5.65204
18	3.29269
19	27.8186
19	-17.4146
19	10.404
19	-1.42147
20	28.7843
20	-16.8578
20	11.9265
20	-6.33923
21	32.3725
21	-24.3071
21	8.06542
21	-17.607
22	48.2581
22	-34.2349
22	12.0232
22	-26.2469
23	14.025
23	-18.2808
23	-4.25574
23	-682342

24	0.86722
24	2.44191
24	2.572
24	-2.74337
25	-1.27098
25	-1.49801
25	-2.75892
25	-2.48021
26	0.04489
26	350397
26	0.39528
26	0.80333
27	6.27807
27	-2.16998
27	4.10889
27	4.97567
28	.15085
28	-1.957741
28	-80689
28	-3.61924
29	2.71525
29	-3.969
29	-1.25374
29	4.47063
30	7.2539
30	-1.50499
30	5.7489
30	.496171
31	-3.46326
31	-3.66702
31	-7.13927
31	.368838
32	24.123
32	-5.34237
32	18.7806
32	3.12975
33	-9.11151
33	-4.86156
33	-13.9731
33	9.48909
34	-13.2635
34	324662
34	-12.9389
34	6.08703
35	-3.05597
35	-3.14074
35	-6.19669
35	7.10331
36	7.97547
36	-23478
36	7.73869
36	-5.96781
37	

37	-2.7081
37	5.37198
37	5.37198
38	-7.38237E-2
38	509427
38	435553
38	-4.80231
39	1.60091
39	-1.58152
39	1.93883E-2
39	2.16471
40	-6.88797
40	9.20361
40	2.31564
40	9.37796
41	26.1291
41	-18.1175
41	8.01161
41	-12.1235

## COMENTARIOS

El presente trabajo, como se dijo anteriormente, es una introducción de las computadoras al análisis estructural, no por esto dejan de ser útiles los programas que se presentaron en el capítulo 4; los cuales se ejemplificaron en el capítulo 5; naturalmente podemos optimizarlos, una forma es haciendo una subrutina del método sismo estático para calcular las fuerzas cortantes de entrepiso de cada marco, y se llamen cuando se requiera.

Las estructuras están escritas en lenguaje Basic que es el más comercial en las minicomputadoras.

Si bien los métodos aquí desarrollados presentan algunas limitaciones, el propósito ha sido introducir el análisis estructural a las computadoras, y a la vez aprovechar los recursos y las facilidades que nos proporcionan las computadoras, las cuales se están extendiendo cada vez más en nuestro desarrollo.

## BIBLIOGRAFIA

1. Analisis Estructural.  
Luthe, Rodolfo. Representaciones.
2. Teoria de las Estructuras.  
Timoshenko y Young . Mc Graw-Hill.
3. Nueva Teoria de las estructuras.  
Castillo H. Representaciones.
4. Analisis de Estructuras Reticulares.  
James, Gere y Weaver, W. C.E.C.S.A.
5. Analisis Estructural Avanzado.  
Tuma y Munshi. Mc Graw-Hill.
6. Analisis de Estructuras Indeterminadas.  
Sterling Kinney, J. C.E.C.S.A.
7. Ingenieria Estructural. Estructuras estaticamente indeterminadas.  
White y Sexsmith. Wiley.
8. Matrix Structural Analysis.  
Vanderbilt, M. Daniel.
9. Analisis de Estructuras .  
Olvera Lopez, A. C.E.C.S.A.
10. Introducci3n al Analisis Estructural por Metodos Matriciales.  
Wang, Chu-Kia. Prentice-Hall.