



13

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

"LA FUNCION KERNEL EN LOS METODOS DE CORRIENTE CONTINUA"

T E S I S

Que para obtener el Título de:

INGENIERO GEOFISICO

P r e s e n t a :

Roberto Antonio Ortega Guerrero

México, D. F.

1983.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

FACULTAD DE INGENIERIA
Dirección
60-I-124



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA

Señor ORTEGA GUERRERO ROBERTO ANTONIO.
P r e s e n t e .

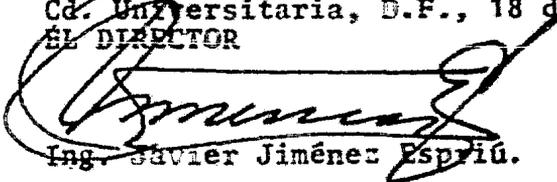
En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección, propuso el Prof. Ing. - Roboam León Sánchez, para que lo desarrolle como tesis para su - Examen Profesional de la carrera de INGENIERO GEOFISICO.

"LA FUNCION KERNEL EN LOS METODOS DE CORRIENTE CONTINUA"

- PROLOGO.
I INTRODUCCION.
II INTEGRAL DE STEFANESCO.
III FUNCION KERNEL.
IV LA FUNCION DE RESISTIVIDADES APARENTES Y SU RELACION CON LA FUNCION KERNEL.
APENDICES.
BIBLIOGRAFIA.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar -- Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como -- requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así -- como de la disposición de la Coordinación de la Administración -- Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los -- ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente.
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, D.F., 18 de octubre de 1982.
EL DIRECTOR


Ing. Javier Jiménez Espriú.

JJE'MRV'stg

A MIS PADRES Y A MIS HERMANOS

AL SUFO

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento, a todas las personas que participaron en forma directa o indirecta en la preparación de la presente Tesis y en forma especial al Ing. Roberto León Sánchez, por sus consejos y por la ayuda prestada como Director de Tesis.

También agradezco a la Sra. Josefina Vallejo O. y a la Srta. Lourdes Ortega G., por su colaboración en el mecanografiado de los borradores.

I N D I C E

CAPITULO	PAGINA
PROLOGO	i
1. INTRODUCCION.	1.1
1.1 Antecedentes.	1.1
1.2 Objetivos.	1.3
1.3 Consideraciones teóricas.	1.4
RESUMEN Y CONCLUSIONES.	1.6
2. INTEGRAL DE STEFANESCO.	2.1
2.1 Introducción.	2.1
2.2 Ecuación de Poisson.	2.1
2.3 Condiciones de frontera.	2.6
2.4 Solución a la ecuación de Poisson.	2.6
2.4.1 Introducción de las condiciones de frontera.	2.10
3. FUNCION KERNEL.	3.1
3.1 Introducción.	3.1
3.2 Tipos de función kernel.	3.2
3.3 Fórmulas recursivas para pasar del corte a la función kernel.	3.3
3.3.1 Fórmula recursiva de Flathe.	3.3
3.3.2 Fórmula recursiva de Pekeris.	3.9
3.4 Propiedades de la función kernel.	3.12
3.5 Procedimientos para obtener el corte geo- eléctrico a partir de la función kernel.	3.16
3.5.1 Proceso de reducción.	3.16
3.5.2 Proceso de comparación.	3.20

CAPITULO	PAGINA
4. LA FUNCION DE RESISTIVIDAD APARENTE Y SU RELACION CON LA FUNCION KERNEL.	4.1
4.1 Introducci3n.	4.1
4.2 Relaci3n entre la funci3n caracterfstica y la curva de resistividad aparente.	4.1
4.3 Procedimientos para pasar de la curva de resistividad aparente a la funci3n kernel.	4.7
4.3.1 M3todo de filtrado lineal.	4.8
4.3.2 M3todo de descomposici3n en funciones.	4.16
4.3.3 M3todo de integraci3n aproximada.	4.25
4.4 Procedimientos para pasar de la funci3n kernel a la curva de resistividad aparente.	4.27
4.4.1 M3todo de descomposici3n en fracciones parciales.	4.27
4.4.2 M3todo de im3genes.	4.28
4.4.3 M3todo de filtrado lineal.	4.30
APENDICE I. Soluci3n a la ecuaci3n de Bessel de orden cero.	A.1
APENDICE II. Formas de calcular los filtros.	A.6
BIBLIOGRAFIA.	B.1

P R O L O G O

Dentro del actual panorama que vive la economía mundial, a los países en vías de desarrollo como México, les es necesario contar con una infraestructura social, política y económica sólida. Dentro de la rama económica, es de fundamental importancia que se cuente con una industria que sea autosuficiente en el abastecimiento de materia prima, además de tener un sistema agrícola-ganadero productivo y actualizado que satisfaga las necesidades alimentarias del país.

La Exploración Geofísica, en las últimas décadas ha tenido un desarrollo extraordinario, pues juega un papel importante en la localización y cuantificación de los recursos naturales, en apoyo a estudios geotécnicos y como parte de estudios geohidrológicos, en beneficio de la agricultura, de la ganadería, de la industria y de los asentamientos humanos.

Los métodos de exploración geofísica se dividen en dos grupos, denominados mayores y menores. Dentro de los métodos clasificados como mayores se tienen los siguientes:

- Método gravimétrico.
- Método magnético.
- Método sísmico.
- Método eléctrico.

Dentro de los métodos menores se tienen:

- Método radiométrico.
- Método termométrico.

De los métodos anteriores, el método eléctrico o geoelectrónico es el de interés para los fines de esta tesis. Este método tiene sus principales aplicaciones en las siguientes áreas:

- En la búsqueda y cuantificación de energéticos, como carbón, minerales radiactivos e hidrocarburos.
- En la localización y cuantificación de yacimientos minerales.
- Como apoyo a las investigaciones geotécnicas, enfocadas a la construcción de presas, carreteras, túneles, complejos industriales, oleoductos, gasoductos, etc.
- Como parte de estudios geohidrológicos, para definir las características y la geometría de las zonas acuíferas.

1. INTRODUCCION

A continuación se presenta una clasificación de los diferentes métodos geoelectricos, así mismo se definen los objetivos de la presente tesis y se hacen algunas consideraciones teóricas que servirán en los desarrollos posteriores.

1.1 ANTECEDENTES

Los métodos eléctricos de exploración, estudian a través de medidas realizadas en la superficie del terreno, la distribución a profundidad de alguna propiedad electromagnética de las rocas. Dentro de las propiedades electromagnéticas disponibles a emplearse para este fin, están:

- La conductividad eléctrica (σ).
- La resistividad (ρ).
- La permitividad o constante dieléctrica (ϵ).
- La permeabilidad magnética (μ).

Entre las anteriores, la de empleo más generalizado en trabajos de campo es la resistividad (ρ).

Con la geofísica eléctrica es posible medir campos -- electromagnéticos y corrientes, que ocurren en forma natural o -- que son producidas artificialmente. Acorde a esto, se puede clasificar a los métodos eléctricos como:

- De campo natural
- De campo artificial

Dentro de los métodos de campo natural se tienen:

- Potencial natural
- Corrientes telúricas

- Magneto - telúrico
- Magnético de audio - frecuencia (AFMAG)

Los métodos de campo artificial, se pueden dividir en aquellos que utilizan un campo constante en el tiempo y aquellos que emplean un campo que varía con el tiempo. Dentro de los métodos de campo constante tenemos:

- Líneas equipotenciales
- Cuerpo cargado
- Sondeos eléctricos verticales (SEV)
- Perfiles eléctricos

Entre los métodos que emplean un campo variable se encuentran:

- Sondeos de frecuencias
- Sondeos eléctricos verticales
- Sondeos por establecimiento de campo
- Perfiles electromagnéticos (Inclinación de campo, Turam, Slingram)
- Polarización inducida.

En la presente tesis se tratará únicamente los sondeos eléctricos en corriente continua.

En la geofísica eléctrica es fundamental, el conocimiento de la solución, tanto del problema directo como del problema inverso (Interpretación). La solución al problema inverso en los sondeos eléctricos verticales en corriente continua, consiste en conocer la distribución de la resistividad con respecto a la profundidad, partiendo de la curva de resistividad aparente, la cual se forma con los datos que se obtienen en el trabajo de campo. En el problema directo, por el contrario, lo que se busca es obtener los efectos que produce en la superficie del terreno, una distribución de materiales en el subsuelo.

La solución, del problema directo y del problema inverso, generalmente se llevan a cabo en dos etapas.

Para el problema directo, estas dos etapas son:

- Obtener la función Kernel a partir de los espesores - y resistividades de un modelo.
- Obtener la curva de resistividad aparente partiendo - de la función kernel.

Para el problema inverso, se tienen las dos etapas siguientes:

- Conocer la función kernel partiendo de la curva de re sistividad aparente.
- Conocer los espesores y resistividades a partir de - la función kernel.

Tomando como base lo anterior, se ve que la función kernel se emplea como un paso intermedio en la solución del problema directo y del problema inverso, de aquí el interés por conocer - sus características.

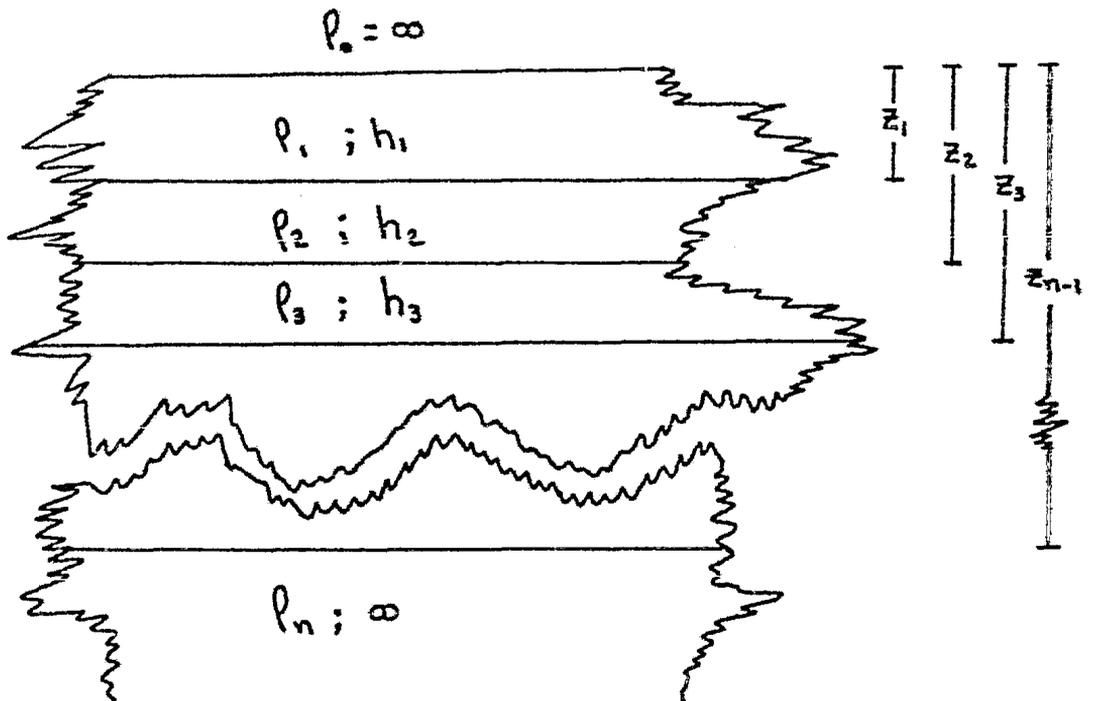
1.2. OBJETIVOS.

Los objetivos que se plantean para esta tesis son tres y se listan a continuación:

- Conocer la función kernel a través de sus propiedades.
- Encontrar la relación que existe entre la función ker nel y el corte geoelectrico.
- Encontrar la relación existente entre la curva de re sistividad aparente y la función kernel.

1.3 CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Para facilitar el desarrollo de los modelos teóricos, - se considera que el terreno está conjuntado por dos semiespacios: Uno compuesto por la atmósfera, a la cual se le da una resistividad infinita. El otro, formado por una secuencia de capas distintas, parcialmente homogéneas e isotrópicas, con espesor finito y extensión lateral indefinida, las cuales están separadas por superficies planas horizontales. A cada uno de estos estratos se les denomina capa geoelectrica y queda especificada, cuando se da su espesor (h_i) y su resistividad (ρ_i). Al conjunto de espesores y resistividades de un medio estratificado, se le conoce como corte geoelectrico. Para un medio de n capas se requiere que existan n resistividades y $n-1$ espesores, ya que la última capa o sustrato se considera con un espesor infinito.



Corte Geoelectrico

Figura 1.1

Existe una clasificación de los cortes geoelectricos generalizada por los soviéticos, la cual está en función del número de capas que contenga y de la relación que exista entre las resistividades de capas sucesivas.

Para cortes de dos capas, solo existen dos tipos de relación entre las resistividades

$$\rho_1 > \rho_2$$
$$\rho_1 < \rho_2$$

Los cortes de tres capas forman cuatro grupos

$$H: \rho_1 > \rho_2 < \rho_3$$
$$K: \rho_1 < \rho_2 > \rho_3$$
$$A: \rho_1 < \rho_2 < \rho_3$$
$$Q: \rho_1 > \rho_2 > \rho_3$$

Los cortes de cuatro capas forman ocho grupos

$$HK: \rho_1 > \rho_2 < \rho_3 > \rho_4$$
$$HA: \rho_1 > \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$$
$$KH: \rho_1 < \rho_2 > \rho_3 < \rho_4$$
$$KQ: \rho_1 < \rho_2 > \rho_3 > \rho_4$$
$$AK: \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 > \rho_4$$
$$AA: \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$$
$$QH: \rho_1 > \rho_2 > \rho_3 < \rho_4$$
$$QQ: \rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \rho_4$$

Cuando se tienen cortes de cinco capas o más, se forman grupos con la combinación de H, K, A y Q, de tal forma que solo son posibles 2^{n-1} tipos de relaciones entre resistividades (donde n es el número de capas).

RESUMEN Y CONCLUSIONES.

Como se planteó en la sección 1.1, la función kernel se emplea como un paso intermedio en el proceso de solución del problema directo y del problema inverso, por lo que resulta importante conocer dicha función.

La función kernel o función característica, surge en la solución de la ecuación de Poisson para un medio estratificado -- parcialmente homogéneo e isótropo, a la que se le da el nombre de Integral de Stefanescu (sección 2.4). Esta función depende en -- forma exclusiva de los espesores y resistividades de un corte geoelectrónico dado.

Una vez que se identifica la función característica, se estudian sus propiedades (sección 3.4), además se definen las fórmulas y procesos que la relacionan con los parámetros de un corte geoelectrónico (secciones 3.3 y 3.5). Más tarde se trata, la relación que existe entre la curva de resistividad aparente para distintos arreglos electródicos y la función característica (sección 4.2); también se dan los procesos que determinan tal relación -- (secciones 4.3 y 4.4).

Para obtener la distribución de la resistividad con respecto a la profundidad, partiendo de la curva de resistividad aparente (problema inverso), se pueden emplear los siguientes procesos:

- Proceso Directo.

- 1.- Se calcula la función kernel que corresponde a la curva de resistividad aparente de campo (por cualquier método descrito en la sección 4.3).
- 2.- Se calculan los espesores y resistividades del corte geoelectrónico, partiendo de la función kernel

(por cualquier procedimiento de los descritos en la sección 3.5)

- Proceso iterativo de comparación, verificando en el dominio de la función kernel.

1.- Se calcula la función kernel a partir de la curva de resistividad aparente de campo (por cualquier método descrito en la sección 4.3).

2.- Se obtiene la función kernel partiendo de los espesores y resistividades de un modelo inicial de interpretación (por alguna de las relaciones de recurrencia dadas en la sección 3.3).

3.- Se comparan las dos funciones kernel.

4.- En el caso de que exista una discrepancia entre las dos funciones, que esté fuera de una tolerancia previamente establecida, se hacen cambios en los parámetros del modelo inicial de interpretación y se repiten los pasos 2 y 3.

- Proceso iterativo de comparación, verificando en el dominio de la función de resistividad aparente.

1.- Se obtiene la función característica partiendo de los espesores y resistividades de un modelo inicial de interpretación (por cualquier fórmula recursiva dada en la sección 3.3).

2.- Se calcula la curva de resistividad aparente, correspondiente a la función característica del modelo inicial de interpretación (por cualquier método des

crito en la sección 4.4).

- 3.- Se compara la curva de resistividad aparente obtenida para el modelo, con la curva de resistividad aparente de campo.
- 4.- En el caso en que exista una diferencia entre las dos curvas, que esté fuera de una tolerancia previamente establecida, se hacen cambios en los parámetros del modelo inicial de interpretación y se repiten los pasos 1, 2 y 3.

Para obtener la curva de resistividad aparente, que produce una distribución de capas en el subsuelo, se siguen los siguientes pasos:

- 1.- Se calcula la función kernel correspondiente a los espesores y resistividades de las capas del modelo (se emplea cualquiera de las fórmulas de recurrencia dadas en la sección 3.3).
- 2.- Se obtiene la curva de resistividad aparente partiendo de la función kernel (empleando cualquier método descrito en la sección 4.4).

El método que resulta más adecuado para obtener la función kernel a partir de la curva de resistividad aparente ó de forma inversa, para obtener la curva de resistividad aparente correspondiente a una función kernel, es el de filtrado lineal.

2. INTEGRAL DE STEFANESCO.

En el presente capítulo se desarrollará una solución a la ecuación de Poisson (Integral de Stefanesco), para un medio - estratificado parcialmente homogéneo e isótropo.

2.1 INTRODUCCION.

El comportamiento de los fenómenos electromagnéticos - en el subsuelo es muy complejo, lo que ha ocasionado el desarrollo de modelos relativamente sencillos, como son los medios es-- tratificados parcialmente homogéneos e isótropos.

A pesar de las consideraciones teóricas bajo las cuales se desarrollan los modelos, éstos se aplican en la práctica con muy buenos resultados.

La distribución del potencial en un medio estratificado considerando que la fuente que lo produce se encuentra dentro del medio, está representada por la Ecuación de Poisson. Una solución de esta ecuación para medios parcialmente homogéneos e -- isótropos, es la denominada Integral de Stefanesco; en la cual - se encuentra la función kernel, a la que se le dedicará atención especial en los próximos capítulos.

2.2 ECUACION DE POISSON.

Para obtener el comportamiento del fenómeno electromagnético en el subsuelo, es necesario conocer los vectores E, B, H y D, los cuales definen un campo electromagnético. Estos vectores están relacionados con las fuentes que los producen, por medio de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times E = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.2.1)$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J \quad (2.2.2)$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \cdot D = R$$

- E - Intensidad del campo eléctrico
- B - Inducción magnética
- H - Intensidad del campo magnético
- D - Desplazamiento
- J - Densidad de corriente eléctrica
- R - Densidad de carga eléctrica

Cuando se presenta un problema en el que intervienen - campos electromagnéticos, es costumbre expresar su solución en - términos de una función potencial. Siguiendo lo anterior, para - obtener el modelo matemático del comportamiento del fenómeno electromagnético dentro de la prospección geoeléctrica en corriente - continua expresado en términos de un potencial, se partirá de las ecuaciones de Maxwell ya mencionadas y de la ecuación de continuidad dada por

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \quad (2.2.3)$$

Como se tratará únicamente con un campo estacionario, - las derivadas temporales se anulan, quedando

$$\nabla \times E = 0 \quad (2.2.4)$$

$$\nabla \times H = J \quad (2.2.5)$$

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (2.2.6)$$

A continuación solo se hace uso de las ecuaciones 2.2.4 , 2.2.6. La primera nos indica que el campo eléctrico es conservativo e irrotacional, por lo que proviene de un campo potencial escalar U , es decir

$$E = -\nabla U \quad (2.2.7)$$

La segunda ecuación indica que, en el medio conductor no puede existir aparición ni desaparición de cargas, salvo en el electrodo fuente.

Se sabe que la ley de Ohm, en forma diferencial para medios isótropos está expresada por

$$J = \nabla E = E/\rho \quad (2.2.8)$$

∇ - Conductividad
 ρ - Resistividad

La combinación de las ecuaciones 2.2.8 y 2.2.6 produce

$$\nabla \cdot (E/\rho) = 0 ,$$

desarrollando

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot E + E \cdot \nabla \frac{1}{\rho} = 0 ,$$

pero tomando en cuenta que en cada zona de resistividad constante $\nabla \cdot 1/\rho = 0$, y sustituyendo la ecuación 2.2.7 en la anterior se tiene

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (-\nabla U) = 0$$

$$\nabla^2 U = 0 \quad (2.2.9)$$

Esta expresión representa la distribución del campo po-

tencial, en un semiespacio conductor en el que no existan fuentes de energía y no es válida en las superficies de discontinuidad entre capas.

Cuando se considera una fuente puntual dentro del medio, el Laplaciano del potencial es igual a la corriente total que va de la fuente al medio, ésto es

$$\nabla^2 U = I \delta(r) \quad (2.2.10)$$

donde $\delta(r)$ es la Delta de Dirac y su valor es

$$\delta(r) = \begin{cases} r=0 & : 1 \\ r \neq 0 & : 0 \end{cases}$$

La expresión anterior se conoce como Ecuación de Poisson y representa la distribución del potencial en un medio conductor, considerando una fuente puntual. Al igual que la Ecuación de Laplace, no es válida en las superficies de discontinuidad entre capas.

La expresión 2.2.10 es una ecuación diferencial parcial no homogénea, cuya solución general es una combinación lineal de la solución complementaria (solución a la ecuación de Laplace) - con una solución particular (Boyce 1977, pag. 122).

Se considera la solución particular, igual a la solución más sencilla de la ecuación de Laplace, la cual resulta de considerar un semiespacio homogéneo e isótropo.

Suponiendo el electrodo puntual de corriente A, y dentro del semiespacio una superficie semiesférica como se ilustra - en la figura 2.1.

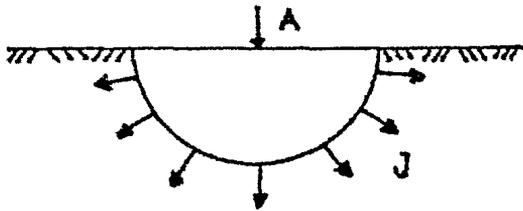


Figura 2.1

Por la simetría esférica que se observa en la figura, - la densidad de corriente tendrá una dirección radial y será igual en cada uno de los puntos sobre la semiesfera. Por lo tanto la - corriente I será la integral de J sobre la superficie, lo que pro - duce

$$I = \int_A J dA = 2\pi r^2 J$$

de la ecuación 2.2.8 y de la anterior se llega a

$$E = \frac{I \rho}{2\pi r^2} ,$$

ahora bien, integrando esta ecuación sobre dos puntos cualquiera M y N se obtendrá, la diferencia de potencial entre esos dos pun - tos.

$$\begin{aligned} \Delta U = U_{MN} &= - \int_N^M E \cdot dl = \frac{I \rho}{2\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{1}{r^2} dl \\ &= \frac{I \rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Si se quiere conocer el potencial absoluto, se tendrá que uno de los puntos en consideración es el infinito, por lo - que

$$U = \frac{I \rho}{2\pi} \frac{1}{r} . \quad (2.2.12)$$

2.3 CONDICIONES DE FRONTERA.

Para resolver la ecuación de Poisson para un medio estratificado, es necesario contar con algunas restricciones que se deben cumplir en las superficies de discontinuidad entre capas. - Estas condiciones se denominan de frontera, (Mining Geophysics - 1977, pag. 24) y se listan a continuación:

- 1) En cada una de las superficies de separación entre capas, el potencial eléctrico debe ser continuo.
- 2) La componente vertical de la densidad de corriente debe ser continua, al pasar de una capa a otra.
- 3) Por ser la densidad de corriente del aire igual a cero, la componente vertical de corriente en la superficie aire-tierra, será cero excepto en una vecindad infinitesimal de la fuente de corriente.
- 4) El potencial tiende a cero, cuando la profundidad -- tiende a infinito.

2.4 SOLUCION A LA ECUACION DE POISSON PARA UN SUBSUELO ESTRATIFICADO.

Una integral que satisface la ecuación de Poisson considerando las especificaciones dadas en el capítulo 1, fue obtenida por primera vez por S. Stefanescu y colaboradores en 1930. Para llegar a esa solución es necesario resolver la ecuación de Laplace.

Para la siguiente deducción se considera un campo potencial producido por una fuente puntual de corriente, colocada en la superficie de un terreno estratificado. Como se mencionó en la

sección 1.3, las capas que componen el subsuelo tienen una extensión lateral indefinida y como en cada una de ellas la resistividad es constante, la distribución del potencial presenta simetría con respecto al eje vertical que pasa por la fuente. Para aprovechar esta simetría cilíndrica, se pone la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.4.1)$$

- Z - Representa el eje vertical (se considera positivo hacia abajo).
- r - Distancia de algún punto P al eje vertical.
- θ - Angulo formado entre la línea que une al punto P y una línea horizontal fija.

Esto se ilustra en la figura 2.2.

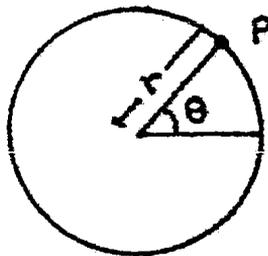


Figura 2.2.

Debido a la simetría existente, el campo potencial es independiente de θ , por lo que la ecuación 2.4.1 se reduce a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4.2)$$

Esta es una ecuación diferencial parcial y se resuelve siguiendo el camino de separación de variables. Suponiendo una solución de la forma

$$U(r, z) = Z(z) R(r) \quad (2.4.3)$$

y si se sustituye en la ecuación 2.4.2, produce

$$\begin{aligned} \xi(z) R''(\tau) + \frac{1}{\tau} \xi(z) R'(\tau) + \xi''(z) R(\tau) &= 0 \\ \frac{R''(\tau)}{R(\tau)} + \frac{1}{\tau} \frac{R'(\tau)}{R(\tau)} &= - \frac{\xi''(z)}{\xi(z)} \end{aligned}$$

igualando los dos miembros a una constante λ^2 se tiene

$$\xi''(z) - \xi(z) \lambda^2 = 0 \quad (2.4.4)$$

$$R''(\tau) + \frac{1}{\tau} R'(\tau) + \lambda^2 R(\tau) = 0 \quad (2.4.5)$$

Las ecuaciones 2.4.4 y 2.4.5 son ecuaciones diferenciales ordinarias. La primer ecuación tiene una solución de la forma

$$\xi(z) = C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z} \quad (2.4.6)$$

La segunda ecuación, es una ecuación diferencial de Bessel de primera clase y de orden cero, cuya solución se da en el apéndice I y es de la forma siguiente

$$R(\tau) = C_3 J_0(\lambda \tau) + C_4 Y_0(\lambda \tau) \quad (2.4.7)$$

donde $J_0(\lambda \tau)$ es la función de Bessel de primera clase y orden cero, $Y_0(\lambda \tau)$ es la función de Bessel de segunda clase y orden cero. Hay que hacer notar que $Y_0(\lambda \tau)$ tiene una singularidad en $\tau = 0$, y como se quiere una solución finita en el origen, se descarta dicha función quedando

$$R(\tau) = C_3 J_0(\lambda \tau) \quad (2.4.8)$$

De la ecuación 2.4.3 se ve, que una combinación lineal de las ecuaciones 2.4.6 y 2.4.8 nos dan la solución

$$U(r, z) = [A e^{\lambda z} + B e^{-\lambda z}] J_0(\lambda r) \quad (2.4.9)$$

Una combinación más general, se obtiene haciendo que los coeficientes A y B sean función del parámetro λ y como la lambda será relacionada con parámetros físicos, se hace variar de cero a infinito

$$U(r, z) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) e^{\lambda z} + B(\lambda) e^{-\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2.4.10)$$

Esta expresión es la solución general a la ecuación de Laplace (solución complementaria). Para encontrar la solución general a la ecuación de Poisson, se introduce una solución particular (semiespacio homogéneo e isótropo con una resistividad ρ_1) dada por la ecuación 2.2.12, la cual poniendo en coordenadas cilíndricas queda como

$$U(r, z) = \frac{I \rho_1}{2\pi} \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \quad (2.4.11)$$

Para poder integrar esta ecuación a la 2.4.10 se emplea la integral de Lipschitz de la teoría de las funciones de Bessel (Watson 1966 pag. 384), esta integral es

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \quad (2.4.12)$$

después de aplicar la identidad, la ecuación 2.4.11 queda como

$$U(r, z) = \frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2.4.13)$$

combinando esta ecuación con la 2.4.10 se obtiene

$$U(r, z) = \frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} [A(\lambda) e^{\lambda z} + B(\lambda) e^{-\lambda z} + e^{-\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2.4.14)$$

Esta expresión es la solución general a la ecuación de Poisson.

2.4.1 INTRODUCCION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA.

Para encontrar el valor que toman las funciones $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$, es necesario introducir las condiciones de frontera dadas en la sección 2.3, a la ecuación 2.4.14. Para esto se calcula el potencial para las capas i e $i + 1$

$$\bar{U}_i = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} [A_i(\lambda)e^{\lambda z} + B_i(\lambda)e^{-\lambda z} + e^{-\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2.4.15)$$

$$\bar{U}_{i+1} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} [A_{i+1}(\lambda)e^{\lambda z} + B_{i+1}(\lambda)e^{-\lambda z} + e^{-\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2.4.16)$$

Al aplicar la primera condición de frontera que dice, - que el potencial al pasar de la capa i a la capa $i + 1$, debe ser el mismo para $z = z_i$

$$\bar{U}_i|_{z=z_i} = \bar{U}_{i+1}|_{z=z_i}$$

$$\frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} [A_i(\lambda)e^{\lambda z_i} + B_i(\lambda)e^{-\lambda z_i} + e^{-\lambda z_i}] J_0(\lambda r) d\lambda =$$

$$\frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} [A_{i+1}(\lambda)e^{\lambda z_i} + B_{i+1}(\lambda)e^{-\lambda z_i} + e^{-\lambda z_i}] J_0(\lambda r) d\lambda$$

la ecuación anterior se cumple, solo si los integrandos son iguales, por lo que resulta

$$[A_i(\lambda) e^{\lambda z_i} + B_i(\lambda) e^{-\lambda z_i} + e^{-\lambda z_i}] = [A_{i+1}(\lambda) e^{\lambda z_i} + B_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda z_i} + e^{-\lambda z_i}]$$

$$A_i(\lambda) e^{\lambda z_i} + B_i(\lambda) e^{-\lambda z_i} - A_{i+1}(\lambda) e^{\lambda z_i} - B_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda z_i} = 0$$

(2.4.17)

La segunda condición indica, que la componente normal de la densidad de corriente es continua al pasar de un medio a otro. Recordando las ecuaciones 2.2.7 y 2.2.8, se observa que esta componente se obtiene al derivar el potencial respecto a z y dividiéndolo por la resistividad correspondiente, ésto es

$$\frac{1}{\rho_i} \left. \frac{\partial U_i}{\partial z} \right|_{z=z_i} = \frac{1}{\rho_{i+1}} \left. \frac{\partial U_{i+1}}{\partial z} \right|_{z=z_i}$$

$$\frac{I \rho_i}{2\pi \rho_i} \int_0^\infty [\lambda A_i(\lambda) e^{\lambda z_i} - \lambda B_i(\lambda) e^{-\lambda z_i} - \lambda e^{-\lambda z_i}] J_0(\lambda r) d\lambda =$$

$$\frac{I \rho_i}{2\pi \rho_{i+1}} \int_0^\infty [\lambda A_{i+1}(\lambda) e^{\lambda z_i} - \lambda B_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda z_i} - \lambda e^{-\lambda z_i}] J_0(\lambda r) d\lambda$$

la cual queda satisfecha si los integrandos son iguales

$$\frac{1}{\rho_i} [\lambda A_i(\lambda) e^{\lambda z_i} - \lambda B_i(\lambda) e^{-\lambda z_i} - \lambda e^{-\lambda z_i}] = \frac{1}{\rho_{i+1}} [\lambda A_{i+1}(\lambda) e^{\lambda z_i} - \lambda B_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda z_i} - \lambda e^{-\lambda z_i}]$$

$$A_i(\lambda) e^{\lambda z_i} - B_i(\lambda) e^{-\lambda z_i} - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} A_{i+1}(\lambda) e^{\lambda z_i} + \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} B_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda z_i} = \left(1 - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}}\right) e^{-\lambda z_i}$$

(2.4.18)

La tercera condición establece que la componente vertical de la intensidad de corriente en la frontera aire-tierra es cero

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

$$\frac{I \rho_1}{2\pi \rho_1} \int_0^{\infty} [\lambda A_1(\lambda) - \lambda B_1(\lambda) - \lambda] J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (2.4.19)$$

como la solución particular insertada cumple esta condición, no tiene componente normal de densidad de corriente, por lo que la contribución de esta a la integral es cero y como para

$$J_0(\lambda r) \Big|_{z=0} \neq 0$$

la integral 2.4.19 se cumple solo si

$$A_1(\lambda) = B_1(\lambda) \quad (2.4.20)$$

De aquí se puede ver que el potencial que se obtiene en la superficie del terreno, tiene la forma siguiente

$$U = \frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} [1 + 2B_1(\lambda)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2.4.21)$$

Esta expresión se le conoce como Integral de Stefanescu.

La cuarta condición propone que cuando la profundidad tiende al infinito, el potencial tiende a cero. Se ve que cuando z tiende a infinito los exponentiales tienden a cero, excepto -- que (λz) es $e^{-\lambda z}$ por lo que, para que el potencial sea cero se debe cumplir que

$$A_n(\lambda) = 0 \quad (2.4.22)$$

izquierdo del sistema; cambiando los coeficientes de la función que se desea obtener, por los coeficientes del miembro derecho -- del sistema. El denominador D, es el determinante de la matriz -- que se forma con los coeficientes de la parte izquierda del sistema.

Para encontrar la función S (λ), que aparece en la integral de Stefanescu se tiene que:

El determinante del numerador es

$$\bar{N}_1 = \begin{vmatrix} 0 & -U_1 & -u_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ (1-P_1)u_1 - P_1U_1 & P_1u_1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & u_2 & -U_2 & -u_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ (1-P_2)u_2 & U_2 & -u_2 & -P_2U_2 & P_2u_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & U_{n-1} & u_{n-1} & -u_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & U_{n-1} & -u_{n-1} & P_{n-1}u_{n-1} \end{vmatrix} \quad (2.4.25)$$

el cual puede ser simplificado si se suman todas las columnas -- impares (a partir de la tercera) a la primera, operación que no -- cambia el valor del determinante.

$$\bar{N}_1 = \begin{vmatrix} -u_1 & -U_1 & -u_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ u_1 - P_1U_1 & P_1u_1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & u_2 & -U_2 & -u_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & -u_2 & -P_2U_2 & P_2u_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & U_{n-1} & u_{n-1} & -u_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & U_{n-1} & -u_{n-1} & P_{n-1}u_{n-1} \end{vmatrix} \quad (2.4.26)$$

El denominador se expresa como

$$\bar{D}_1 = \begin{vmatrix} (u_1+V_1) & -V_1 & -u_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ (V_1-u_1) & -P_1V_1 & P_1u_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & u_2 & -V_2 & -u_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & -u_2 & -P_2V_2 & P_2u_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & V_{n-1} & u_{n-1} & -u_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & V_{n-1} & -u_{n-1} & P_{n-1}u_{n-1} \\ & & & & & \vdots & & & \end{vmatrix} \quad (2.4.27)$$

Donde se tiene que

$$B_1(\lambda) = \frac{N_1}{D_1} \quad (2.4.28)$$

A partir del sistema de ecuaciones dado por la expresión 2.4.24, se puede notar que las funciones A (λ) y B (λ) dependen exclusivamente de los parámetros del corte geoelectrico.

FUNCIÓN KERNEL.

En este capítulo se mencionarán las propiedades y los tipos de función kernel. Además se tratarán algunas fórmulas recursivas para obtener esta función a partir del corte geoelectrico y se darán algunos procesos para obtener el corte geoelectrico partiendo de la función kernel.

3.1 INTRODUCCION.

Como se observó en el capítulo anterior, la expresión 2.4.21 representa el campo potencial obtenido en la superficie del terreno, a la cual se le conoce como Integral de Stefanescu. Si se hace en dicha ecuación

$$K(\lambda) = 1 + 2 B_1(\lambda) \quad (3.1.1)$$

se obtendrá

$$U = \frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} K(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.1.2)$$

Esta expresión representa una transformada integral, en cuyo caso la función $K(\lambda)$ se considera como kernel o nucleo. Algunos autores encargados del tema, también denominan a la $K(\lambda)$ como función característica.

En el capítulo anterior se definió que los determinantes que se emplean para calcular $B_1(\lambda)$, dependen en forma exclusiva de los espesores y resistividades del terreno. Si consideramos la ecuación 3.1.1 veremos que la función $K(\lambda)$ contiene también esta característica. Sabiendo que existe una relación entre la $K(\lambda)$ y los parámetros de un corte, se deben tratar ahora los procesos que determinan tal relación.

3.2 TIPOS DE FUNCION KERNEL

La función $B_1(\lambda)$, que en adelante se llamará simplemente $B(\lambda)$, fué utilizada por Stefanescu y solo incluye la solución al problema homogéneo. Esta función se conoce como función Característica de Stefanescu. A la $K(\lambda)$, se le conoce como función Característica de King-Slichter, por ser estos los primeros autores en abordarla. La función $K(\lambda)$, sí abarca la solución general para el problema no homogéneo.

Aunque la diferencia entre estas dos funciones aparenta ser insignificante, Orellana (1965) demuestra que la función característica de King-Slichter tiene propiedades interesantes que se asemejan a las propiedades de la curva de resistividad aparente y que $B(\lambda)$ no posee.

Existen dos variantes de la función característica, la función kernel modificada $G(\lambda)$ introducida por Pekeris (1940) y la función kernel aumentada $H(\lambda)$ definida por Koefoed (1968). Estas funciones se definen como:

$$G(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{B(\lambda)+1} = \frac{K(\lambda)-1}{K(\lambda)+1} \quad (3.2.1)$$

$$H(\lambda) = B(\lambda) + \frac{1}{2} = \frac{K(\lambda)}{2} \quad (3.2.2)$$

Ya en su artículo Orellana (1965), menciona la ventaja de considerar dentro de la integral de la ecuación 3.1.2 a para poderla asociar con la $K(\lambda)$, pero es Koefoed (1970) quien define a

$$T(\lambda) = \rho_1 K(\lambda) \quad (3.2.3)$$

como la función de transformación de resistividades. En la actua-

lidad se ha generalizado el empleo de la $T(\lambda)$.

En adelante, al mencionar la función kernel se hará referencia a la $K(\lambda)$.

3.3 FORMULAS RECURSIVAS PARA PASAR DEL CORTE GEOELECTRICO A LA FUNCION KERNEL.

Como se mencionó al principio de este capítulo, la función característica depende solo de los parámetros del corte geoelectrico; por lo que $K(\lambda)$ se puede calcular a partir de ellos - para un corte cualquiera, por medio de fórmulas recurrentes.

Entre los autores que se han encargado de este problema se encuentran: Stefanescu (1930), Slichter (1933), Pekeris (1940), Sunde (1940), Flathe (1955), Baranov y Tassencourt (1950), Onodera (1960), Vanian (1962) y Lima (1979). Aquí solo se desarrollarán las fórmulas recursivas de Flathe (1955) y la de Pekeris --- (1940).

3.3.1 FORMULA RECURSIVA DE FLATHE.

La relación de recurrencia de Flathe, consiste en añadir una capa en el fondo de la secuencia de estratos original. Si se recuerda la fórmula 2.4.28 de la sección 2.4, en la que $B(\lambda)$ se obtiene como el cociente de dos determinantes y considerando - la ecuación 3.1.1 se obtiene la siguiente expresión

$$K(\lambda) = 1 + \frac{2\bar{N}}{\bar{D}} = \frac{\bar{D} + 2\bar{N}}{\bar{D}}$$

haciendo

$$\bar{M} = \bar{D} + 2\bar{N} \quad (3.3.1)$$

quedará

$$K(\lambda) = \frac{\bar{M}}{\bar{D}} \quad (3.3.2)$$

Para continuar el desarrollo, deben recordarse dos propiedades de los determinantes. La primera, nos dice que un determinante puede ser multiplicado por una constante, si se multiplica una columna o un renglón por esa constante. La segunda expone, que la suma de dos determinantes que tienen como única diferencia una columna o un renglón, es otro determinante cuya columna o renglón en consideración, es la suma de las columnas o renglones diferentes. Se toman estas dos propiedades para formar el nuevo numerador \bar{M} , el cual será igual al determinante \bar{M} dado por la expresión 2.4.26 excepto en los dos primeros coeficientes de la columna uno.

$$\bar{M}_1 = \begin{vmatrix} (V_1 - u_1) & -V_1 & -u_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ (u_1 + V_1) & -P_1 V_1 & P_1 u_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & u_2 & -V_2 & -u_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & -u_2 & -P_2 V_2 + P_2 u_2 & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & V_{n-1} & u_{n-1} & -u_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & V_{n-1} & -u_{n-1} & P_{n-1} u_{n-1} \end{vmatrix} \quad (3.3.3)$$

Si se considera \bar{M}_n y \bar{D}_n , como numerador y denominador respectivamente de la función kernel de Slichter para un caso de n capas, al sumar una nueva capa en el fondo se tendrá \bar{M}_{n+1} y \bar{D}_{n+1} .

La forma de crear \bar{M}_{n+1} y \bar{D}_{n+1} es agregar en el fondo de las respectivas matrices dos nuevos renglones, dos nuevas columnas y considerar los términos que faltan, tomando en cuenta la ecuación 2.4.22 para cuando el potencial es cero. Haciendo tal cambio queda que

$$\bar{M}_{n+1} = \begin{vmatrix} & & & -U_{n-1} & 0 \\ & \bar{M}_n & & & \\ \dots & \dots & & -P_{n-1}U_{n-1} & 0 \\ 0 & U_n & & U_n & -U_n \\ 0 & -U_n & & U_n & P_n U_n \end{vmatrix} \quad (3.3.4a)$$

$$\bar{D}_{n+1} = \begin{vmatrix} & & & -U_{n-1} & 0 \\ & \bar{D}_n & & & \\ \dots & \dots & & -P_{n-1}U_{n-1} & 0 \\ 0 & U_n & & U_n & -U_n \\ 0 & -U_n & & U_n & P_n U_n \end{vmatrix} \quad (3.3.4b)$$

Para simplificar la expresión anterior se efectúan operaciones elementales, las cuales no afectan el valor de los determinantes. Primero se suma la cuarta columna a la segunda columna, en seguida se multiplica la cuarta columna por U_n^2 ; por último se multiplica el tercer renglón por p_n y se le suma al cuarto renglón, por lo que queda

$$\bar{M}_{n+1} = \begin{vmatrix} & & & -U_{n-1} & 0 \\ & \bar{M}_n & & & \\ \dots & \dots & & -P_{n-1}U_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & -U_n \\ 0 & -(1-P_n)U_n & & (1+P_n)U_n & 0 \end{vmatrix} \quad (3.3.5a)$$

De forma similar se realiza para \bar{D}_{n+1}

$$\bar{D}_{n+1} = \begin{vmatrix} & & & -U_{n-1} & 0 \\ & \bar{D}_n & & & \\ \dots & \dots & & -P_{n-1}U_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & -U_n \\ 0 & -(1+P_n)U_n & & (1-P_n)U_n & 0 \end{vmatrix} \quad (3.3.5b)$$

Recordando que un determinante puede ser desarrollado en función de subdeterminantes, donde éstos son determinantes de grado dos y aplicándolo a las ecuaciones anteriores, se tiene

$$\bar{M}_{n+1} = \bar{M}_n \begin{vmatrix} 0 & u_n \\ -(1-P_n)U_n & 0 \end{vmatrix} + \bar{M}_n^* \begin{vmatrix} 0 & u_n \\ -(1-P_n)U_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_{n+1} = (1+P_n) \bar{M}_n + (1-P_n)U_n^2 \bar{M}_n^* \quad (3.3.6a)$$

$$\bar{D}_{n+1} = \bar{D}_n \begin{vmatrix} 0 & u_n \\ -(1+P_n)U_n & 0 \end{vmatrix} + \bar{D}_n^* \begin{vmatrix} 0 & u_n \\ -(1-P_n)U_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{D}_{n+1} = (1+P_n) \bar{D}_n + (1-P_n)U_n^2 \bar{D}_n^* \quad (3.3.6b)$$

Donde \bar{M}_n^* y \bar{D}_n^* , son los determinantes \bar{M}_n y \bar{D}_n respectivamente; cambiando su última columna por los dos primeros coeficientes de la tercera columna de los determinantes dados en la ecuación 3.3.5 a y b

$$\bar{M}_n^* = \begin{vmatrix} (U_1 - u_1) & -U_1 & -u_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ (U_1 + u_1) & -P_1 U_1 & P_1 u_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & u_2 & -U_2 & -u_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & -u_2 & -P_2 U_2 & P_2 u_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & U_{n-1} & u_{n-1} & -U_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & U_{n-1} & -u_{n-1} & -P_{n-1} U_{n-1} \end{vmatrix} \quad (3.3.7a)$$

$$\bar{D}_n^* = \begin{vmatrix} (U_1 + u_1) & -U_1 & -u_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ (U_1 - u_1) & -P_1 U_1 & P_1 u_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & u_2 & -U_2 & -u_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & -u_2 & -P_2 U_2 & P_2 u_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & U_{n-1} & u_{n-1} & -U_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & U_{n-1} & -u_{n-1} & -P_{n-1} U_{n-1} \end{vmatrix} \quad (3.3.7b)$$

Con objeto de poner \bar{m}_n^* y \bar{D}_n^* en función de \bar{m}_n y \bar{D}_n se hacen las siguientes operaciones. Comenzando con la ecuación --- 3.3.7 a, primero se cambian todas las columnas pares por las no- nes inmediatas a la derecha, con excepción de la última. A conti- nuación se multiplican todos los renglones pares por (-1). Por úl- timo se cambia el signo a la primera columna.

En la segunda operación antes realizada, el cambio de - signo se realiza un número impar de veces, quedando el determinan- te en este paso con signo negativo. En la tercera operación se -- vuelve a cambiar el signo, por lo que nos queda positivo.

$$\bar{D}_n^* = \begin{vmatrix} (u_1 - v_1) & -u_1 & -v_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ (u_1 + v_1) & -p_1 u_1 & p_1 v_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & -u_2 & -v_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & -v_2 & -p_2 u_2 & p_2 v_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & u_{n-1} & v_{n-1} & -v_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & u_{n-1} & -v_{n-1} & p_{n-1} u_{n-1} \end{vmatrix} \quad (3.3.8a)$$

Para el caso de \bar{D}_n^* , se efectúan las dos primeras opera- ciones que se aplicaron a la ecuación 3.3.7a, el signo que resul- ta es negativo.

$$\bar{D}_n^* = \begin{vmatrix} (v_1 + u_1) & -u_1 & -v_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ (-v_1 + u_1) & -p_1 u_1 & p_1 v_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & -u_2 & -v_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & -v_2 & -p_2 u_2 & p_2 v_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & u_{n-1} & v_{n-1} & -v_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & u_{n-1} & -v_{n-1} & -p_{n-1} u_{n-1} \end{vmatrix} \quad (3.3.8b)$$

Recordando que $u = \frac{1}{v}$ y comparando las ecuaciones anterio- res con las ecuaciones 3.3.3 y 2.4.27, veremos que tienen cambia- dos sus coeficientes, por lo que se pueden relacionar de la si---

iguiente forma

$$\bar{M}_n^*(u, v) = \bar{M}_n(1/u, 1/v) \quad (3.3.9a)$$

$$\bar{D}_n^*(u, v) = -\bar{D}_n(1/u, 1/v) \quad (3.3.9b)$$

Por lo que las relaciones 3.3.6 a y b quedan

$$\bar{M}_{n+1} = (1+P_n) \bar{M}_n(u, v) + (1-P_n) u_n^2 \bar{M}_n(1/u, 1/v) \quad (3.3.10a)$$

$$\bar{D}_{n+1} = (1+P_n) \bar{D}_n(u, v) - (1-P_n) u_n^2 \bar{D}_n(1/u, 1/v) \quad (3.3.10b)$$

Si se definen las funciones

$$\bar{D}_n(u, v) = D_n(u, v) \prod_{i=1}^{n-1} (1+P_i)$$

$$\bar{M}_n(u, v) = M_n(u, v) \prod_{i=1}^{n-1} (1+P_i)$$

Luego se sustituyen en las ecuaciones 3.3.10 además se introduce el coeficiente

$$k_n = \frac{1-P_n}{1+P_n} \quad (3.3.11)$$

queda que

$$M_{n+1}(u, v) = \bar{M}_n(u, v) + k_n u_n^2 \bar{M}_n(1/u, 1/v) \quad (3.3.12a)$$

$$\bar{D}_{n+1}(u, v) = D_n(u, v) - k_n u_n^2 D_n(1/u, 1/v) \quad (3.3.12b)$$

Desarrollando estas ecuaciones para el caso de dos capas, se llega a que

$$M_1 = D_1 = 1 \quad (3.3.12c)$$

Si siguiendo la notación inicial de Flathe, se denominan

$$P(u) = [M(u, v) - D(u, v)] / 2$$

$$Q(u) = [M(u, v) + D(u, v)] / 2$$

por lo que la expresión 3.3.12 queda como

$$P_{n+1}(u) = P_n(u) + R_n u_n^2 Q_n(1/u) \quad (3.3.13a)$$

$$Q_{n+1}(u) = Q_n(u) - R_n u_n^2 P_n(1/u) \quad (3.3.13b)$$

donde

$$P_1(u) = 0 : Q_1(u) = 1 \quad (3.3.13c)$$

y

$$K(\lambda) = [Q(u) + P(u)] / [Q(u) - P(u)]$$

Las ecuaciones 3.3.12 a, b, c y las ecuaciones 3.3.13 a, b, c son conocidas como relación de recurrencia de Flathe.

3.3.2 FORMULA RECURSIVA DE PEKERIS.

La fórmula de recurrencia de Pekeris, se forma al añadir una nueva capa en la parte superior de la secuencia original de estratos y a la vez mover la configuración electródica, a la parte superior de la capa agregada.

Para obtener esta fórmula se parte de la ecuación --- 2.4.17, que resulta de considerar el potencial continuo al pasar de una capa a otra, si se añade $\exp(-\lambda z_i)$ en ambos miembros y dividiéndola entre la ecuación 2.4.18, resultante de tomar como continua la componente vertical de la densidad de corriente al pasar entre dos capas. Con lo anterior se tiene

$$\frac{A_i(\lambda) e^{\lambda z_i} + B_i(\lambda) e^{-\lambda z_i} + e^{-\lambda z_i}}{\frac{1}{\rho_i} [A_i(\lambda) e^{\lambda z_i} - B_i(\lambda) e^{-\lambda z_i} - e^{-\lambda z_i}]} = \frac{A_{i+1}(\lambda) e^{\lambda z_i} + B_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda z_i} + e^{-\lambda z_i}}{\frac{1}{\rho_{i+1}} [A_{i+1}(\lambda) e^{\lambda z_i} - B_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda z_i} - e^{-\lambda z_i}]}$$

factorizando

$$\rho_i \frac{A_i(\lambda) e^{2\lambda z_i} + B_i(\lambda) + 1}{-A_i(\lambda) e^{2\lambda z_i} + B_i(\lambda) + 1} = \rho_{i+1} \frac{A_{i+1}(\lambda) e^{2\lambda z_i} + B_{i+1}(\lambda) + 1}{-A_{i+1}(\lambda) e^{2\lambda z_i} + B_{i+1}(\lambda) + 1}$$

(3.3.14)

Introduciendo una función $K(\lambda)$ dada como

$$K(\lambda) = \frac{1 + B_i(\lambda) + A_i(\lambda) e^{2\lambda z_{i-1}}}{1 + B_i(\lambda) - A_i(\lambda) e^{2\lambda z_{i-1}}} \quad (3.3.15)$$

cuando $i=1$, se tiene que $\exp(2\lambda z_{i-1}) = 1$, tomando en cuenta la ecuación 2.4.20 del capítulo anterior, queda

$$K_1(\lambda) = 1 + 2B_1(\lambda)$$

que es la función característica de Slichter.

Metiendo la ecuación 3.3.15 en el miembro derecho de - la expresión 3.3.14, produce

$$\rho_i \frac{A_i(\lambda) e^{2\lambda z_i} + B_i(\lambda) + 1}{-A_i(\lambda) e^{2\lambda z_i} + B_i(\lambda) + 1} = \rho_{i+1} K_{i+1}(\lambda) \quad (3.3.16)$$

Si se divide el numerador y denominador de la ecuación 3.3.16, entre $A_i(\lambda)$ queda

$$K_i(\lambda) = \frac{\frac{1 + B_i(\lambda)}{A_i(\lambda)} + e^{2\lambda z_{i-1}}}{\frac{1 + B_i(\lambda)}{A_i(\lambda)} - e^{2\lambda z_{i-1}}}$$

despejando

$$\frac{1 + B_i(\lambda)}{A_i(\lambda)}$$

se obtiene

$$\frac{1 + B_i(\lambda)}{A_i(\lambda)} = e^{2\lambda z_{i-1}} \frac{K_i(\lambda) + 1}{K_i(\lambda) - 1} \quad (3.3.17)$$

Dividiendo el numerador y denominador del miembro izquierdo de la ecuación 3.3.16 entre $A_i(\lambda)$ y sustituyendo la expresión 3.3.17, queda que

$$P_i \frac{[K_i(\lambda)+1] e^{2\lambda z_{i-1}} + [K_i(\lambda)-1] e^{2\lambda z_i}}{[K_i(\lambda)+1] e^{2\lambda z_{i-1}} - [K_i(\lambda)-1] e^{2\lambda z_i}} = P_{i+1} K_{i+1}(\lambda)$$

Dividiendo nuevamente el numerador y denominador del miembro izquierdo entre $\exp(2\lambda z_{i-1})$ y además haciendo $h_i = z_i - z_{i-1}$, queda

$$K_{i+1}(\lambda) = P_i \frac{K_i(\lambda) [e^{2\lambda h_i} + 1] - [e^{2\lambda h_i} - 1]}{[e^{2\lambda h_i} + 1] - K_i(\lambda) [e^{2\lambda h_i} - 1]}$$

introduciendo la tangente hiperbólica dada por

$$\text{Tan h}(\lambda h_i) = \frac{e^{2\lambda h_i} - 1}{e^{2\lambda h_i} + 1}$$

obtenemos

$$K_{i+1}(\lambda) = P_i \frac{K_i(\lambda) - \text{Tan h}(\lambda h_i)}{1 - K_i(\lambda) \text{Tan h}(\lambda h_i)} \quad (3.3.18)$$

despejando $K_i(\lambda)$

$$K_i(\lambda) = \frac{K_{i+1}(\lambda) + P_i \text{Tan h}(\lambda h_i)}{P_i + K_{i+1}(\lambda) \text{Tan h}(\lambda h_i)} \quad (3.3.19)$$

de la condición de frontera, que establece que $A_n(\lambda)$ en la última capa es cero y sustituyéndola en la ecuación 3.3.15 produce

$$K_n = 1$$

La ecuación 3.3.19 es la relación de recurrencia de Pekeris, algunos autores la refieren también como algoritmo de Sunde.

La transformada de resistividades dada por la ecuación 3.2.3 puede obtenerse a partir de la relación dada anteriormente quedando

$$T_i(\lambda) = \frac{T_{i+1}(\lambda) + \rho_i \operatorname{Tan} h(\lambda h_i)}{1 + T_{i+1}(\lambda) \operatorname{Tan} h(\lambda h_i)} \quad (3.3.20)$$

$$T_{i+1}(\lambda) = \frac{T_i(\lambda) - \rho_i \operatorname{Tan} h(\lambda h_i)}{1 - T_i(\lambda) \operatorname{Tan} h(\lambda h_i) / \rho_i} \quad (3.3.21)$$

Las dos fórmulas de recurrencia desarrolladas anteriormente tienen sus aplicaciones, pero se utiliza más la relación de Pekeris por su estructura más simple.

3.4 PROPIEDADES DE LA FUNCION KERNEL

La función característica es adimensional, no así la transformada de resistividades que posee dimensiones de resistividad. En cuanto a la variable λ tiene dimensiones de longitud a la menos uno $[L^{-1}]$.

Si consideramos la $K(\lambda)$ en función de $1/\lambda$, podremos apreciar las propiedades de esta función y observar la semejanza que existe con la curva de resistividad aparente, en función de s (CRA).

Antes de mencionar las propiedades de la función se introducen dos conceptos. La resistencia transversal unitaria y la conductancia longitudinal unitaria, denominados parámetros de OazZarrouk.

La resistencia transversal unitaria esta definida por

$$T_i = h_i \rho_i ,$$

para n capas la resistencia total (T) es la suma de todas las T_i .

La conductancia longitudinal unitaria queda dada por

$$S_i = \frac{h_i}{\rho_i}$$

la conductancia longitudinal total (s) para n capas es la suma de las S_i .

Las propiedades de la función kernel son las siguientes:

- Relación numerador, denominador
- Asíntotas.
- Principio de equivalencia y supresión
- Ley de simetría de cortes recíprocos
- Continuidad

a continuación se describen cada una de ellas.

a) Los términos del numerador son los mismos del denominador, pero con signo contrario.

b) Asíntotas

Se observa en la relación de recurrencia de Pekeris dada por la expresión 3.3.19 que cuando $1/\lambda$ tiende a 0, la $\tanh(\lambda h_i)$ tiende a 1 por lo que la función característica $k(\lambda)$ tiende a 1 y la transformada de resistividades $T(\lambda)$ tiende a ρ_1 .

Cuando

$$\begin{aligned} 1/\lambda &\rightarrow \infty ; \tanh(\lambda h_i) \rightarrow 0 \\ k(\lambda) &\rightarrow \rho_n/\rho_1 ; T(\lambda) \rightarrow \rho_n \end{aligned}$$

Ahora se considera el caso en que la resistividad de la

Última capa tienda a cero o a infinito. Para analizar estos casos es necesario normalizar el corte respecto a ρ_1 .

Cuando ρ_n tiende a infinito, para valores grandes de $1/\lambda$;

$$\begin{aligned} \text{Tan h } (\lambda h_z) &\rightarrow \lambda h_z \\ \lim_{1/\lambda \rightarrow \infty} k(\lambda) &= \frac{1}{\lambda S} = \frac{\lambda^{-1}}{S} \end{aligned}$$

en coordenadas logarítmicas, representa una recta con pendiente uno positiva y que corta al eje de las abscisas en el punto $\lambda^{-1} = S$

Cuando ρ_n tiende a cero, para valores grandes de $1/\lambda$

$$\begin{aligned} \text{Tan h } (\lambda h_z) &\rightarrow \lambda h_z \\ \lim_{1/\lambda \rightarrow \infty} k(\lambda) &= \frac{T}{\lambda^{-1}} \end{aligned}$$

en coordenadas logarítmicas, representa la ecuación de una recta con pendiente uno negativa y que corta al eje de las abscisas en el punto $\lambda^{-1} = T$.

Como se normalizó el corte con respecto a ρ_1 , el comportamiento de la transformada de resistividades en estos casos es igual a la función característica.

c) Principio de equivalencia y supresión.

Diferentes distribuciones de capas pueden producir funciones características o transformadas de resistividad estrictamente diferentes, pero con una disparidad ligera, la cual no se observa en una gráfica y no puede ser separada con la exactitud de las mediciones.

Lo anterior ocurre cuando una capa tiene una conductancia longitudinal unitaria o una resistencia transversal unitaria pequeña, y puede modificarse su espesor y resistividad (manteniendo un parámetro de Dar Zarrowk constante) sin que experimente un cambio apreciable en la función característica o en la transformada de resistividades.

Se habla de equivalencia en los cortes K ($\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$) y H ($\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$) y de supresión en los cortes A ($\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$) y Q ($\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$). La equivalencia y supresión no pueden presentarse en la primera o en la última capa, ya que estas dan las asíntotas a la función $K(\lambda)$ y $T(\lambda)$ como vimos anteriormente.

d) Ley de simetría de cortes recíprocos.

De la relación de recurrencia de Flathe, se puede observar que la función característica de Slichter para un corte de n capas puede expresarse como

$$K(\lambda) = \frac{H+P}{H-P}$$

donde H y P representan sumas de términos de la forma $k_i k_j \dots \exp(-2\lambda h)$ y se obtienen a partir de las ecuaciones 3.3.13.

El número de coeficientes k de P es impar, mientras para H el número es par. Ahora bien, al sustituir cada resistividad por su inversa, cada coeficiente k cambia de signo y las exponenciales se mantienen iguales. Como H tiene un número par de k su signo no se altera, pero P por tener un número impar de k cambia su signo.

Si llamamos $K'(\lambda)$ al recíproco de $K(\lambda)$ tendremos

$$K'(\lambda) = \frac{H-P}{H+P}$$

representando $K(\lambda^{-1})$ y $K'(\lambda^{-1})$ en coordenadas logarítmicas, ambas funciones serán simétricas respecto al eje de abscisas $y=1$.

Esta propiedad es válida también para $T(\lambda)$.

e) Continuidad.

Cuando ρ_{λ} tiende a infinito, la función característica crece indefinidamente cuando $1/\lambda$ tiende a infinito, fuera de este caso esta función es continua y acotada, pues el denominador no puede anularse nunca y tanto numerador como denominador permanecen acotados, manteniendo siempre la función finita. De forma análoga se demuestra la continuidad para la primera derivada de $K(\lambda)$.

La gráfica de $K(\lambda^{-1})$ en coordenadas logarítmicas representa una curva suave, que depende en diferentes grados de todas y cada una de las capas del corte.

Como se mencionó al principio de este capítulo, la función característica solo depende de las resistividades y espesores del terreno, siendo independiente del tipo de arreglo eléctrico utilizado.

3.5 PROCEDIMIENTOS PARA OBTENER EL CORTE GEOELECTRICO A PARTIR DE LA FUNCION KERNEL.

Los procesos para obtener el corte geoelectrico partiendo de la función kernel o de alguna de sus variantes, se pueden clasificar en:

- Método de reducción
- Método de comparación

3.5.1 PROCESO DE REDUCCION

El primer camino para obtener el corte a partir de la

función kernel fue dado por Pekeris (1940), quien emplea la función kernel modificada $G(\lambda)$, que para valores pequeños de $1/\lambda$ se aproxima de forma asintótica a la función

$$G = k_i e^{-2\lambda h_i} \quad (3.5.1)$$

la cual es la misma función $G(\lambda)$ para el caso de dos capas, en donde k_i es el coeficiente de reflexión y h_i es el espesor de la capa i .

El método consiste en aproximar la primera parte de la función kernel modificada de n capas, por la función $G k \exp \dots (-2\lambda h_1)$ para obtener los valores de k_1 y h_1 . Se considera que la resistividad de la primera capa se conoce, por lo que a partir de k_1 se puede obtener la resistividad de la segunda capa. Una vez que se cuenta con los valores de k_1 y h_1 , la función kernel modificada de n capas se reduce al caso de $n-1$ capas, para lo cual se elimina el estrato superior y se pasa la configuración electródica a la superficie de la siguiente capa. A continuación se vuelve a efectuar la aproximación de la primera parte de la función kernel modificada para $n-1$ capas, por la función dada en la ecuación 3.5.1 con $i=2$ con el objeto de obtener los valores de k_2 y h_2 . Para cuando se llevan i reducciones conocemos k_i , h_i , ρ_{i+1} y la función kernel modificada para la transformación esta dada por

$$G_{i+1}(\lambda) = \frac{T_{i+1}(\lambda) - \rho_{i+1}}{T_{i+1}(\lambda) + \rho_{i+1}} \quad (3.5.2)$$

donde $T_{i+1}(\lambda)$ se obtiene de la ecuación 3.3.21

El proceso anterior se repite hasta obtener n resistividades y $n-1$ espesores.

Más tarde Koefoed (1968) hace la observación de que un cambio de cierta magnitud en la curva de resistividad aparente, -

produce un cambio de menor magnitud en la función kernel aumentada sobre todo para resistividades mucho más grandes o mucho más pequeñas que la de la primera capa, lo que produce que se puedan enmascarar dichos cambios perdiéndose detalle, por lo que resulta que en algunos casos no es conveniente obtener el corte empleando esta función. Para superar lo anterior podemos tomar la función kernel aumentada $H(\lambda)$, en la cual se producen cambios del mismo orden de magnitud que en la curva de resistividad aparente.

Para valores grandes de λ la función kernel aumentada tiende a la misma función $H(\lambda)$ para el caso de dos capas. Siguiendo el camino de Pekeris ajustamos la primera parte de la función kernel aumentada para n capas, por la función $H(\lambda)$ para el caso de dos capas de donde obtendremos k_1 y h_1 . A continuación reducimos la función $H(\lambda)$ de n capas al caso de $n-1$ capas, suprimiendo el estrato superior y poniendo el arreglo de electrodos en la superficie de la siguiente capa. Después de haber efectuado i transformaciones, la función $H(\lambda)$ para la reducción $i+1$ esta dada por

$$H_{i+1} = \frac{T_{i+1}(\lambda)}{2\rho_{i+1}} \quad (3.5.3)$$

donde $T_{i+1}(\lambda)$ se da en la ecuación 3.3.21

Kosfoed (1970) sigue los pasos anteriores, pero ahora enoles la transformada de resistividades. El ajuste de la primera parte de la $T(\lambda)$ reducida i veces, se efectúa por una función $T(\lambda)$ para el caso de dos capas. La transformación $i+1$ de la $T(\lambda)$ está dada por la ecuación 3.3.21.

Los métodos dados anteriormente se realizan de forma gráfica, el proceso de ajuste de la primera parte de la función kernel empleada, se efectúa mediante curvas preexistentes para casos de dos capas, los cuales tienen como abscisa $1/\lambda h$ y como ordenada $G(\lambda)$, $H(\lambda)$, $T(\lambda)$ según el caso. Las curvas se grafican para varios valores del coeficiente de reflexión.

Con el desarrollo de los procesadores electrónicos, - los métodos gráficos de reducción se han tratado de sustituir - por métodos numéricos. Así Koefoed (1976) emplea el camino dado por Pekeris, el cual realiza de forma numérica poniendo atención especial en el error que se genera y en su posible amplificación.

Sacando logaritmo natural a la ecuación 3.5.1 quedará como

$$\text{Ln } G = \text{Ln } k_i - 2h_i \lambda \quad (3.5.4)$$

la anterior es la ecuación de una línea recta, con pendiente $-2h_i$ y con ordenada al origen de $\text{Ln } k_i$. Como se vió para valores pequeños de $1/\lambda$, la función $G(\lambda)$ de n capas tiende asintóticamente a la función $G(\lambda)$ para el caso de dos capas, donde $-h_i$ y k_i son iguales en las dos funciones.

Si se grafican los valores del logaritmo natural de la función kernel modificada de n capas, para valores pequeños de $1/\lambda$ se conoce k_1 y h_1 . Al reducir $G(\lambda)$ para $n-1$ capas y volviendo a graficar su logaritmo para valores pequeños de $1/\lambda$, se obtendrá k_2 y h_2 ; Se puede continuar la reducción hasta obtener k_n . El problema que se presenta para efectuar los cálculos, es el de determinar cuales puntos se emplean y cuales no para definir los parámetros k_i y h_i .

Con el objeto de tener un control sobre el error que se produce y de su amplificación, así como para poder determinar los puntos que se emplean en los cálculos, se introducen dos límites de confianza uno superior y otro inferior. Estos se forman sumando y restando respectivamente, el 2% del valor de $T(\lambda)$ sin reducir, a la $T(\lambda)$. El proceso de reducción se lleva a cabo tanto para $T(\lambda)$ como para sus límites de confianza, en las reducciones y para valores pequeños de las abscisas los límites de confianza pueden resultar negativos.

La reducción se lleva a cabo, a partir de la última -

muestra que se tenga y se realizara de derecha a izquierda, la última abscisa para la cual ambos valores de los límites de confianza resulten positivos, será la primera que se empleará en el cálculo de los parámetros de la siguiente capa.

Para generalizar el proceso de ajuste, se considera que después de varias transformaciones nos encontramos en la reducción i , y que se comienza en el primer punto en el cual los límites de confianza son positivos. Primero se comprueba, si el valor de ρ_i encontrado en el ajuste anterior, corresponde con el valor obtenido para el mismo parámetro con los límites de confianza, el primer punto que no cumple lo anterior y los siguientes, se emplean para calcular el logaritmo natural de la función kernel modificada, junto con estos cálculos se checa si los valores del $\ln G(\lambda)$ coinciden (considerando la amplitud del error admitido) con una recta de coordenadas $\lambda, \ln T(\lambda)$. El penúltimo punto que cumple el chequeo anterior, es el último que se emplea para el cálculo de k_i y h_i , los cuales se obtienen al hacer pasar una recta ajustada por mínimos cuadrados por los puntos determinados anteriormente.

3.5.2 PROCESO DE COMPARACION.

Otra forma para determinar los espesores y resistividades de un corte geoelectrico, consiste en comparar la función kernel para un subsuelo estratificado de n capas, con una función kernel de i capas donde las primeras $i-1$ capas pertenecen a la estratificación original y a la capa i con resistividad ρ_i se le considera con espesor infinito. La comparación se basa, en que la función kernel para n capas coincide en un intervalo con la función kernel para las primeras i capas. En el caso de aumentar un nuevo estrato en el fondo de la secuencia de i capas, suponiendo su espesor infinito y dando a la capa i un espesor h_i , el intervalo de coincidencia entre las funciones sera mayor.

Para encontrar una forma explicita que de los parámetros—

tros h_i y k_i , se toman las expresiones 3.3.2 y 3.3.12, las que producen que

$$K_{i+1}(\lambda) = \frac{M_{i+1}(u, \sigma) - M_i(u, \sigma) + k_i u_i^2 M_i(1/u, 1/\sigma)}{D_{i+1}(u, \sigma) - D_i(u, \sigma) - k_i u_i^2 D_i(1/u, 1/\sigma)}$$

al despejar $k_i u_i^2$ se tiene

$$k_i u_i^2 = \frac{K_{i+1}(\lambda) D_i(u, \sigma) - M_i(u, \sigma)}{K_{i+1}(\lambda) D_i(1/u, 1/\sigma) + M_i(1/u, 1/\sigma)}$$

en el miembro derecho de esta ecuación al que se le denominara $s(\lambda)$, el único parámetro que no se conoce es $K_{i+1}(\lambda)$, pero se supondrá que toma el valor de la función kernel para n capas, en el intervalo que se considera. La ecuación anterior puede expresarse como

$$k_i u_i^2 = k_i e^{-2\lambda z_i} = s(\lambda)$$

sacando el logaritmo natural a la ecuación anterior

$$\ln k_i - 2\lambda z_i = \ln s(\lambda) \quad (3.5.5)$$

De igual forma que la expresión 3.5.4, esta ecuación representa una línea recta con pendiente $-2z_i$ y con ordenada al origen de $\ln k_i$.

Si se consideran dos valores sucesivos λ_j , λ_{j+1} y se sustituyen en la ecuación 3.5.5 se obtiene

$$\ln k_i - 2\lambda_j z_i = \ln s(\lambda_j) \quad (3.5.6a)$$

$$\ln k_i - 2\lambda_{j+1} z_i = \ln s(\lambda_{j+1}) \quad (3.5.6b)$$

restando las dos ecuaciones anteriores y despejando z_i

$$z_i = \ln \left[\frac{s(\lambda_j)}{s(\lambda_{j+1})} \right] / 2(\lambda_{j+1} - \lambda_j)$$

el valor de k_i se obtiene al sustituir Z en cualquiera de las expresiones 3.5.6.

El proceso anterior se continúa con pares de valores de lambda para $j+1$ y $j+2$, $j+2$ y $j+3$,... lo que producirá nuevos valores de z_j y k_j . El cálculo se suspende, cuando los nuevos valores de z_j y k_j son muy distintos de los anteriores, esos nuevos valores se descartan y su abscisa se emplea como primer punto para el cálculo de z_{i+1} y k_{i+1} . Esta forma fue descrita por Szaraniec (1979).

4. LA FUNCION DE RESISTIVIDAD APARENTE Y SU RELACION CON LA FUNCION KERNEL.

En el presente capítulo se trata la relación que existe entre la curva de resistividad aparente y la función Kernel, y la relación de la función kernel con la curva de resistividad aparente.

4.1 INTRODUCCION

Para poder entender la importancia de la función característica dentro de la interpretación de los sondeos eléctricos verticales, se deduce la relación que existe entre la curva de resistividad aparente y la función característica. Se describen también algunas de las formas que se han desarrollado para cuando es conocida una de las funciones encontrar la segunda.

4.2 RELACION ENTRE LA FUNCION CARACTERISTICA Y LA CURVA DE RESISTIVIDAD APARENTE.

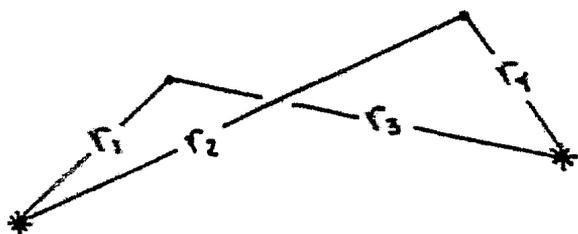
Para encontrar la relación que existe entre las dos funciones, se parte de la solución a la ecuación de Laplace para un semimedio isótropo y homogéneo dada por la ecuación 2.2.11, de la cual se obtiene que la resistividad esta expresada como

$$\rho = 2\pi \frac{\Delta U}{I} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1}$$

Suponiendo un dispositivo de cuatro electrodos, de los cuales dos son destinados a crear el campo potencial, y los otros dos sirven para que entre ellos se efectúe la medida de una diferencia en el campo producido, se tiene

$$\rho = \pi \frac{\Delta U}{I} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right)^{-1}$$

el dispositivo se muestra en la figura 4.1.



- * electrodos de corriente
- electrodos de potencial

DISPOSITIVO TETRAELECTRODICO
FIGURA 4.1

Tratándose de un dispositivo lineal

$$\rho = \pi \frac{\Delta U}{I} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} - \frac{1}{BM} \right)^{-1}$$

si se considera que

$$c = \pi \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} - \frac{1}{BM} \right)^{-1} \quad (4.2.1)$$

se tendrá

$$\rho = c \frac{\Delta U}{I}$$

Esta ecuación, da la resistividad para un terreno homogéneo e isótropo. Si sustituimos los valores de las diferencias de campo potencial y de corriente, obtenidos en un terreno heterogéneo y anisótropo en la ecuación antes citada, resultará una resistividad ficticia definida como resistividad aparente - (ρ_a).

$$\rho_a = c \frac{\Delta U}{I} \quad (4.2.2)$$

Considerando que el arreglo sea simétrico y lineal figura 4.2.2, haciendo $AB/2 = s$, $MN/2 = b$, la expresión 4.2.1 quedará

$$C = \pi \frac{s^2 - b^2}{2b} \quad (4.2.3)$$

Sustituyendo en la fórmula de resistividad aparente, - la expresión que nos da el potencial para un terreno estratificado medido en la superficie dado por la ecuación 3.12, y teniendo en cuenta que

$$\Delta U = 2 [U(s-b) - U(s+b)]$$

se obtiene

$$\rho_a = \frac{s^2 - b^2}{2b} \rho_1 \int_0^{\infty} k(\lambda) [J_0(\lambda s - \lambda b) - J_0(\lambda s + \lambda b)] d\lambda \quad (4.2.4)$$

Expresión representativa de la resistividad aparente - para un dispositivo simétrico, lineal y tetraelectrónico. Ahora bien, en la práctica hay dos arreglos de este tipo, que son:

- La configuración Wenner
- La configuración Schlumberger.

En el arreglo Wenner se consideran las distancias de - separación entre electrodos iguales entre sí e igual a un valor a , lo que hace que $s = 3/2 a$ y $b = a/2$ sustituyendo en la ecuación 4.2.4 queda

$$\rho_{aw} = 2a \rho_1 \int_0^{\infty} k(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda, \quad (4.2.5)$$

Para el caso de que solo se utilice un electrodo para suministrar corriente eléctrica al terreno, la expresión anterior solo se multiplicara por dos.

El dispositivo Schlumberger considera que la distancia de separación entre los electrodos, donde se observa la medida -

del campo potencial es infinitesimal, por lo que tomando el límite cuando b tiende a cero

$$\lim_{b \rightarrow 0} \rho_a = \lim_{b \rightarrow 0} \pi \frac{s^2 - b^2}{2b} \frac{\Delta U}{I}$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} \rho_a = \pi \frac{s^2}{I} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{2b}$$

donde $\lim_{b \rightarrow 0} \Delta U/2b$ es el doble de la intensidad del campo eléctrico E . Por lo que queda.

$$\rho_{as} = 2\pi s^2 \frac{E}{I}$$

El desarrollo teórico establece, que lo que se mide con el dispositivo Schlumberger, es la intensidad del campo eléctrico, la cual en la práctica se toma igual a $\Delta U/2b$. Derivando la expresión 3.1.2 obtendremos la intensidad E . Al efectuar esta diferenciación bajo el signo de integración, observaremos que solo se afecta el término $J_0(\lambda r)$ y sabiendo que

$$\frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} = -\lambda J_1(\lambda r)$$

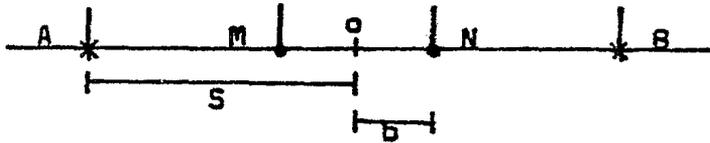
se tendrá

$$E = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} = \frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^\infty k(\lambda) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda$$

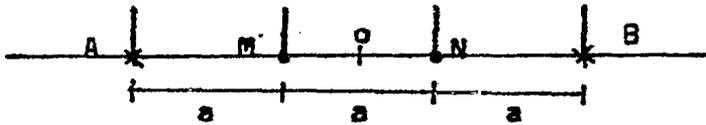
quedando que

$$\rho_{as} = s^2 \rho_1 \int_0^\infty k(\lambda) J_1(\lambda s) \lambda d\lambda \quad (4.2.6)$$

Cuando solo se emplea un electrodo para suministrar corriente eléctrica al terreno, la expresión anterior solo se multiplica por dos, al igual que en el arreglo Wenner. También en la práctica se utilizan los dispositivos denominados dipolares. Las medidas que se hacen en este tipo de arreglos, son efectua-

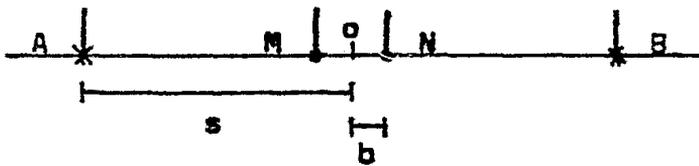


DISPOSITIVO SIMETRICO Y LINEAL



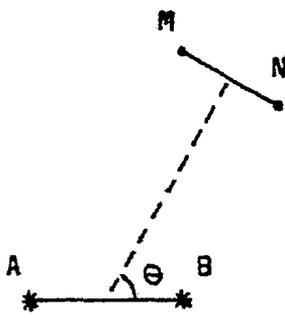
DISPOSITIVO WENNER

$$s \gg \gg b$$

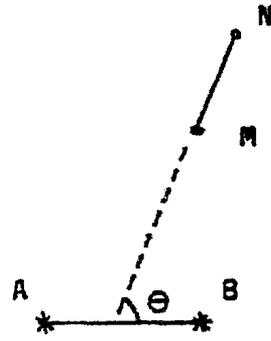


-DISPOSITIVO SCHLUMBERGER

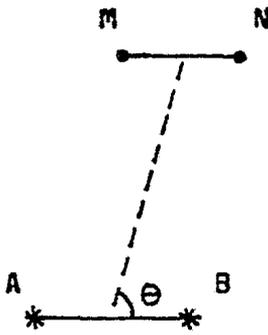
FIGURA 4.2



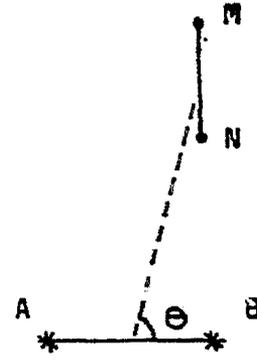
AZIMUTAL



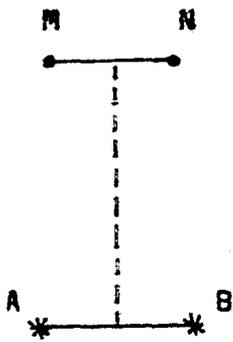
RADIAL



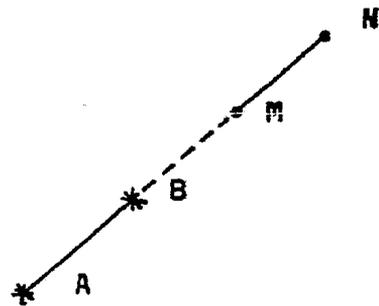
PARALELO



PERPENDICULAR



ECUATORIAL



DIPOLO DIPOLO

FIGURA 4.3

das considerando que la distancia de separación entre los electrodos de corriente y entre los electrodos de potencial, es despreciable en comparación con la distancia que separa el dipolo de corriente y el dipolo de potencial.

Dentro de estos dispositivos se encuentran:

- azimutal
- radial
- paralelo
- perpendicular
- ecuatorial (combinación del paralelo y - azimutal, con $\theta=90^\circ$)
- axial o dipolo dipolo (combinación del radial y paralelo, con $\theta=0^\circ$) (Figura 2.3).

Hay expresiones que ponen estas configuraciones en función de la resistividad aparente para un arreglo Schlumberger; - las expresiones se muestran a continuación;

$$\rho_{ad} = \rho_{as} - \rho_s \frac{\partial \rho_{as}}{\partial s} \quad (4.2.7)$$

donde es un factor que depende de la configuración y puede tener los siguientes valores:

- Dispositivo azimutal, $p=0$
- Dispositivo radial, $p=1/2$
- Dispositivo paralelo, $p=\cos^2\theta (3\cos^2\theta -1)$
- Dispositivo perpendicular, $p=1/3$

4.3 PROCEDIMIENTOS PARA PASAR DE LA CURVA DE RESISTIVIDAD APARENTE A LA FUNCION KERNEL.

Para obtener la función Kernel a partir de la curva de resistividad aparente, se han desarrollado varios procedimientos,

entre los que se encuentran:

- Método de filtrado lineal
- Método de descomposición en funciones.
- Método de integración aproximada.

A continuación se describe cada uno de ellos.

4.3.1 METODO DE FILTRADO LINEAL

La aplicación de los filtros digitales lineales dentro de los métodos geoelectricos, fué sugerido por Kunetz (1966) y - posteriormente trabajada por Ghosh (1970).

Este método de filtrado, consiste en obtener muestras de valores de una función, como una combinación lineal de valores muestreados de otras funciones. A los filtros que se utilizan para pasar de la curva de resistividad aparente a la función Kernel, se les denominan filtros directos.

Empleando la ecuación 4.2.6 que nos da la resistividad aparente para un arreglo Schlumberger, se tiene

$$\rho_{as} = s^2 \int_0^{\infty} \rho_1 K(\lambda) J_1(\lambda s) \lambda d\lambda \quad (4.2.6)$$

si se cambia de miembro a s^2 y se introduce la transformada de resistividades, quedará

$$\rho_{as} / s^2 = \int_0^{\infty} T(\lambda) J_1(\lambda s) \lambda d\lambda$$

aplicando la Transformada de Hankel que nos dice que:

$$F(s) = \int_0^{\infty} K(\lambda) J_n(\lambda s) \lambda d\lambda$$
$$K(\lambda) = \int_0^{\infty} F(s) J_n(\lambda s) s ds \quad (4.3.1)$$

se tiene

$$\tau(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\rho_{as}}{s} J_1(\lambda s) ds \quad (4.3.2)$$

Ahora bien, la teoría de filtros digitales lineales se cumple de forma satisfactoria, si las funciones que intervienen en los cálculos son razonablemente regulares. Cuando las curvas de resistividad aparente y la transformada de resistividades, -- se emplean en escalas lineales, no son muy regulares. Esto implica que el intervalo de muestreo para las funciones, tendría que ser muy pequeño para obtener buenos resultados. Pero si se considera la curva de resistividad aparente y la transformada de resistividades en coordenadas logarítmicas, se observará que su comportamiento es de forma más regular. Lo que nos permite ampliar el intervalo de muestreo de las funciones.

Introduciendo variables logarítmicas, definidas como:

$$\begin{aligned} x = \ln s & ; s = e^x & ; ds = e^x dx \\ y = \ln(1/\lambda) & ; \lambda = e^{-y} & ; d\lambda = -e^{-y} dy \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

y sustituyendo en la ecuación 4.3.1 quedará

$$\tau(y) = \int_0^{\infty} \rho_{as}(x) J_1(e^{x-y}) dx \quad (4.3.4)$$

La expresión anterior es una integral de convolución, que relaciona linealmente la transformada de resistividades con la curva de resistividad aparente, obtenida con un arreglo --- Schlumberger.

Para el caso Wenner, de la ecuación 4.2.5 se tiene

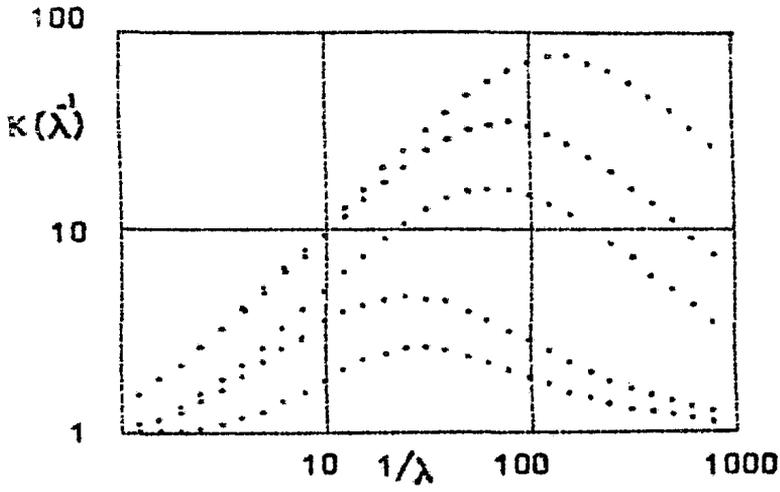
$$\rho_{aw} = 2a \int_0^{\infty} \rho_{ik}(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda$$

haciendo

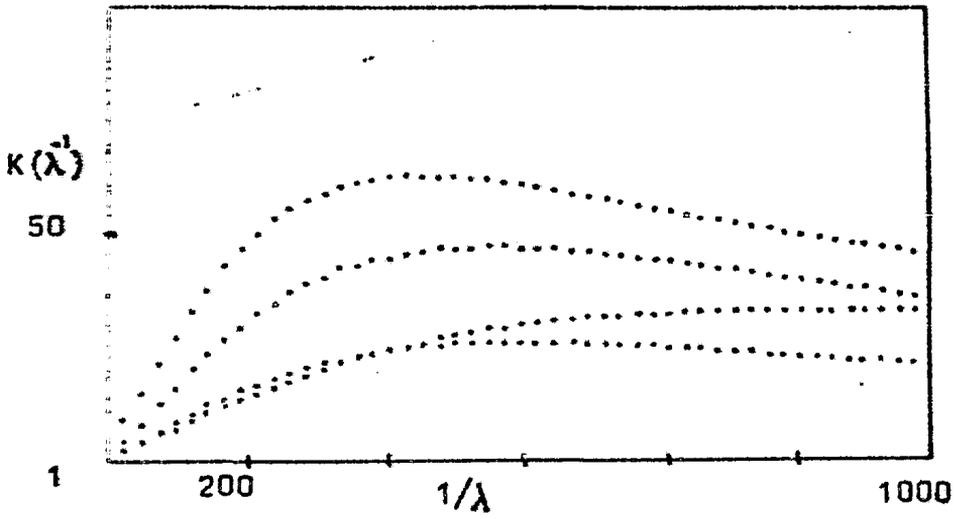
$$\Delta J_0(\lambda a) = J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)$$

y definiendo

$$\begin{aligned} x = \ln a & ; a = e^x & ; da = e^x dx \\ y = \ln(1/\lambda) & ; \lambda = e^{-y} & ; d\lambda = -e^{-y} dy \end{aligned}$$



GRAFICA DE LA FUNCION KERNEL EN COORDENADAS LOGARITMICAS.



GRAFICA DE LA FUNCION KERNEL EN ESCALA LINEAL.

FIGURA 4.4

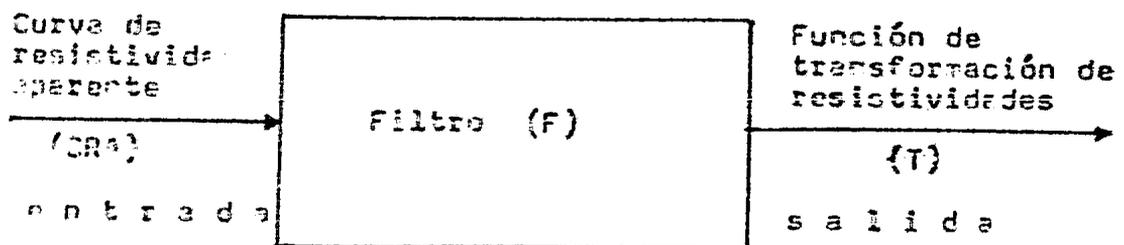
se tendrá que la expresión 4.2.5, se convertirá en

$$\rho_{aw}(x) = -2 \int_0^{\infty} T(y) \Delta J_0(e^{x-y}) e^{x-y} dy$$

la cual, es una integral de convolución, que relaciona linealmente la transformada de resistividades con la curva de resistividad aparente.

Los arreglos dipolares cumplen también la relación de linealidad, si se considera la ecuación 4.2.7 que da la resistividad aparente en un dispositivo dipolar, como una combinación lineal de la resistividad aparente para una configuración Schlumberger.

Una vez que sabemos la existencia de linealidad entre la transformada de resistividades y la curva de resistividad aparente, debemos encontrar la función que da la relación lineal.



Como la función de entrada y la función de salida se dan por valores muestreados, el filtro tendrá que ser definido también por muestras de valores. La relación que existe entre la convolución continua y la convolución discreta es dada por los principales teoremas sobre muestreo, que dicen:

- a) Una función queda definida completamente por sus mues--

tras tomadas a intervalos constantes Δx , cuando su espectro de amplitud de la Transformada de Fourier es cero para valores mayores que la frecuencia de Nyquist ($1/2\Delta x$).

b) Una función puede ser reconstruida a partir de sus valores muestreados, si cada muestra se sustituye por el producto del valor de la muestra con una función del tipo $\sin x/x$ con periodo $2\Delta x$.

Los espectros de amplitud de la curva de resistividad aparente y la función de transformación de resistividades, no son nulos para frecuencias mayores a una frecuencia de corte, pero si tienden asintóticamente a cero.

Ghosh (1970), basado en sus trabajos, menciona que solo la curva de resistividad aparente y la transformada de resistividades, determinan el intervalo de muestreo que se debe elegir.

Se han desarrollado distintas formas para poder obtener los filtros directos, éstas son:

- Transformada de Fourier
- Mínimos cuadrados
- Transformada Z
- Integración aproximada

Estos procedimientos se describen en el apendice II.

Se cuenta con el desarrollo de los siguientes operadores de filtrado:

- De nueve y doce puntos para la configuración Schlumberger y de nueve puntos para la configuración Wenner, todos para un intervalo de tres valores por ciclo logarítmico -- (Ghosh 1971 a).

	SCHLUMBERGER	WENNER
0.0060	-0.723	0.0212
0.0783	0.3999	-0.1199
0.3999	0.3492	0.4226
0.3492	0.1675	0.3553
0.1675	0.0858	0.1654
0.0858	0.0358	0.0873
0.0358	0.0198	0.0345
0.0198	0.0067	0.0208
0.0067	0.0076	0.0118
0.0051		
0.0007		
0.0018		

Para un intervalo de muestreo de tres valores por ciclo logarítmico Ghosh (1971a).

SCHLUMBERGER		SCHLUMBERGER		
0.0119	0.0073	-0.0002766	0.09804	0.002134
-0.1099	0.0044	0.001418	0.06802	0.001483
0.2589	0.0022	-0.008794	0.04677	0.001022
0.3224	0.0032	0.04501	0.03198	0.0006846
0.2152		-0.1235	0.02184	0.001481
0.1309		0.03287	0.01488	
0.0735		0.1961	0.01015	
0.0425		0.2206	0.006907	
0.0233		0.1853	0.004718	
0.0136		0.1379	0.003203	

Para un intervalo de muestreo de cuatro valores por ciclo logarítmico Koefoed (1973).

Para un intervalo de muestreo de seis valores por ciclo logarítmico O'Neill (1975).

RADIAL	PARALELO (30°)	PERPENDICULAR
0.0093	0.0083	-0.0058
0.0418	0.0142	0.3738
0.3575	0.0744	0.3255
0.3050	0.3537	0.1584
0.1488	0.2836	0.0803
0.0752	0.1384	0.0341
0.0321	0.0691	0.0183
0.0171	0.0301	0.0066
0.0062	0.0151	0.0089
0.0070	0.0068	
	0.0063	

Para un intervalo de muestreo de tres valores por ciclo logarítmico Das (1974).

RADIAL		PARALELO (30°)		PERPENDICULAR	
0.0146	0.0051	0.0091	0.0164	0.0051	0.0118
0.0031	0.0069	0.0125	0.0044	-0.0352	0.0001
0.1001	-0.0001	0.0239	0.0068	0.1322	0.0069
0.3061	-0.0034	0.1626	-0.0001	0.3322	
0.2067		0.2976	0.0032	0.2217	
0.1407		0.1933		0.1542	
0.0713		0.1358		0.0786	
0.0477		0.0656		0.0503	
0.0213		0.0466		0.0264	
-0.0166		0.0191		0.0135	

Para un intervalo de muestreo de cuatro valores por ciclo logarítmico Koefced (1979).

- De catorce coeficientes para el dispositivo Schlumberger, para una distancia de muestreo de cuatro valores por década logarítmica (Koefoed 1979).
- De veinticinco puntos para el arreglo Schlumberger y para un intervalo de muestreo de seis valores por ciclo logarítmico (O'Neill 1975).
- Para dispositivos dipolares; De diez puntos (radial), de doce puntos (paralelo 30°) y de nueve puntos (perpendicular). Todos para un intervalo de tres muestras por ciclo logarítmico (Das 1974).
- Para dispositivos dipolares; De catorce coeficientes (radial), de quince coeficientes (paralelo 30°) y de trece puntos (perpendicular). Todos para un intervalo de muestreo de seis valores por década logarítmica (Koefoed 1979).

Como se trabaja con muestras de valores, para obtener la transformada de resistividades a partir de la curva de resistividad aparente por medio de filtros, es necesario aplicar una convolución discreta entre las muestras de la curva de resistividad aparente y el filtro asignado, para obtener la transformada de resistividades muestreada de igual forma que el filtro y la curva de resistividad aparente.

$$T_m = \sum_{j=1}^n f_j R_{m-j} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3.5)$$

n - número de puntos del filtro.

f_j - coeficientes del filtro.

R - valores muestreados de la curva de resistividad aparente.

T_m - valores de la transformada de resistividades.

4.3.2 METODO DE DESCOMPOSICION EN FUNCIONES.

Este método consiste en aproximar la información de campo de la resistividad aparente utilizando una combinación de funciones simples, para poder llegar a la transformada de resistividades o a la función kernel.

El método consiste en dos pasos:

- En el primero, se ajusta la curva de resistividad aparente por una combinación de funciones.
- En el segundo, se obtiene la función kernel por un camino analítico.

Existen dos caminos para llevar a cabo este método.

- Proceso Gráfico.
- Proceso Analítico.

a) Proceso Gráfico.

Fué propuesto por Koefoed (1968) y se basa en que la curva de resistividad aparente se puede descomponer en una suma de funciones parciales, de la forma

$$\rho_{as} = \sum_{i=1}^n \Delta_i \rho_{as} \quad (4.3.6)$$

donde $\Delta_i \rho_{as}$ se denomina función parcial de resistividad aparente (FPRA).

De la ecuación 4.2.6 se tiene que

$$\rho_{as} = s^2 \rho_1 \int_0^{\infty} k(\lambda) J_1(\lambda s) \lambda d\lambda \quad (4.2.6)$$

considerando la función kernel de Stefanescu, la ecuación anterior quedará

$$\rho_{as} = \rho_1 \left[1 + 2s^2 \int_0^\infty B(\lambda) J_1(\lambda s) \lambda d\lambda \right] \quad (4.3.7)$$

$$\frac{\rho_{as} - \rho_1}{2\rho_1} = s^2 \int_0^\infty B(\lambda) J_1(\lambda s) \lambda d\lambda$$

ahora aplicando la transformada de Hankel dada por la ecuación - 4.3.1 se obtiene

$$B(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\rho_{as} - \rho_1}{2\rho_1 s} J_1(\lambda s) ds \quad (4.3.8)$$

recordando de la teoría de las funciones de Bessel (Watson 1966 pag. 386) que

$$\int_0^\infty \frac{1}{s} J_1(\lambda s) ds = 1$$

se tiene que

$$B(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\rho_{as}}{2\rho_1 s} J_1(\lambda s) ds - \frac{1}{2}$$

sustituyendo la ecuación 4.3.6 en la expresión anterior

$$B(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1}{2\rho_1 s} \sum_{i=1}^n \Delta_i \rho_{as} J_1(\lambda s) ds - \frac{1}{2}$$

como la integración es una operación lineal tenemos

$$B(\lambda) = \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \frac{1}{2\rho_1 s} \Delta_i \rho_{as} J_1(\lambda s) ds - \frac{1}{2}$$

Definiendo $\Delta B(\lambda)$ como la función Kernel parcial de Stefanescu (FKPS) se tiene que

$$\Delta_i B(\lambda) = \Delta_i H(\lambda) - \frac{1}{2}$$

$$\Delta_i H(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1}{2\rho_1 s} \Delta_i \rho_{as} J_1(\lambda s) ds \quad (4.3.9)$$

$$B(\lambda) = \sum_{i=1}^n \Delta_i B(\lambda)$$

Esta variante, consiste en efectuar una aproximación - de la primera parte de la curva de resistividad aparente de campo, por una función parcial de resistividad aparente adecuada, a continuación se resta la FPRA a la CRA. Con la curva obtenida en el proceso anterior, se vuelve a aproximar la primera parte - por otra función parcial y así sucesivamente. La forma de llevar a cabo este proceso, es gráfica.

Las FPRA deben cumplir varias condiciones; deben hacer que la integral de la ecuación 4.3.9 pueda efectuarse por un camino analítico y además deben dar una aproximación adecuada de - la curva de resistividad aparente. Koefoed (1962) da ejemplos - de cuatro tipos de funciones parciales que cumplen los requisitos anteriores y deduce sus funciones kernel parciales de Stefanescu correspondientes. Estas funciones parciales de resistividad aparente son:

- 1.- Funciones exponenciales que se aproximan a cero, cuando la abscisa se aproxima a cero o infinito.

$$\Delta \rho_{as} = c \rho_i \frac{(s/N)^j}{j!} e^{-s/N}$$

- 2.- Funciones exponenciales que se acercan a un valor finito cuando la abscisa es cero.

$$\Delta \rho_{as} = c \rho_i \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(s/N)^j}{j!} e^{-s/N}$$

- 3.- Funciones algebraicas, que se aproximan a cero cuando la abscisa se aproxima a cero o infinito.

$$\Delta \rho_{as} = c \rho_i \frac{(s/N)^n}{[1 + (s/N)^2]^{(n+m)/2}}$$

4.- Funciones algebraicas, que se aproximan a un valor finito para abscisas que tienden a infinito.

$$\Delta P_{as} = c P_1 \frac{(s/N)^n}{[1 + (s/N)^2]^{n/2}}$$

En las cuatro expresiones anteriores

C - Constante que sirve de factor de escala.

N - Constante con dimensiones de longitud.

n,m - Números enteros positivos.

A partir de la expresión 4.2.7 se pueden obtener las FPRA para los dispositivos dipolares.

b) Proceso Analítico.

El segundo camino, fue propuesto por Sentini y Zambra-no (1981) para el arreglo Schlumberger. Se parte de la ecuación 4.3.8 y se hace

$$y(s) = \frac{P_{as} - P_1}{2 P_1}$$

$$B(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{y(s)}{s} J_0(\lambda s) ds \quad (4.3.10)$$

La función $y(s)$, se aproxima por una combinación de funciones que dan una buena aproximación y son integrables analíticamente. Suponiendo que la función $y(s)$ aproximada, es $y'(s)$ y esté dada por la función

$$y'(s) = \sum_{i=1}^m a_i f(s; d)$$

sustituyéndola en la ecuación 4.3.10 se obtiene

$$B'(\lambda) = \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{\infty} f(s; d_i) \frac{J_1(\lambda s)}{s} ds$$

haciendo

$$g(s; d_i) = \int_0^{\infty} f(s; d_i) \frac{J_1(\lambda s)}{s} ds$$

y como $f(s; d_i)$ es una función integrable analíticamente, se tiene que

$$B'(\lambda) = \sum_{i=1}^m a_i g(s; d_i)$$

Una ecuación que cumple eficientemente los requisitos es

$$f(s; d_i) = \frac{s^3}{(d_i^2 + s^2)^{3/2}}$$

recordando la integral de Lipchitz generalizada por Hankel (Watson 1966, pag. 386) dada por la ecuación

$$\int_0^{\infty} e^{-a\lambda} J_1(\lambda s) \lambda d\lambda = \frac{s}{(a^2 + s^2)^{3/2}} \quad (4.3.11)$$

y aplicando la transformada de Hankel dada por la ecuación 4.3.1 se tiene

$$e^{-a\lambda} = \int_0^{\infty} \frac{s}{(a^2 + s^2)^{3/2}} J_1(\lambda s) s ds$$

por lo que

$$g(s; d_i) = \int_0^{\infty} \frac{s}{(d_i^2 + s^2)^{3/2}} J_1(\lambda s) ds = e^{-d_i \lambda}$$

y

$$B(\lambda) = \sum_{i=1}^m a_i e^{-d_i \lambda}$$

La serie converge lentamente, pero si se escoge de forma apropiada los coeficientes (d_i), hay posibilidad de que se utilicen pocos términos en el ajuste, para conseguir alta preci-

recomienda una extrapolación de la CRA a la izquierda y a la derecha, hasta alcanzar los valores asintóticos de ρ_1 y ρ_R . Se considera que $d_1 = S_1$, $d_m = 0.55 S_k$ donde S_1 y S_k son el primer y último valor de la abscisa de la CRA. k es el número de puntos de la CRA y $m < k + 1$.

El método permite introducir pesos (P_j) para cada valor de la curva de resistividad aparente, ya que en ocasiones pueden estar fuera de la forma regular de la curva. Dichos pesos se introducen en las dos últimas ecuaciones.

$$Y_{q,r} = \sum_{i=1}^{k+1} P_i f(s_i; d_q) f(s_i; d_r)$$

$$Y_q = \sum_{j=1}^{k+1} P_j f(s_j; d_q) y(s_j)$$

Para el caso del dispositivo Wenner, se partirá de la ecuación 4.2.5

$$\rho_{aw} = 2a \rho_1 \int_0^{\infty} K(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda, \quad (4.2.5)$$

en donde si se considera la función Kernel de Stefanescu, quedará

$$\rho_{aw} = \rho_1 [1 + 4a \int_0^{\infty} B(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda]. \quad (4.3.13)$$

Haciendo

$$y(a) = \frac{\rho_{aw} - \rho_1}{2\rho_1}$$

multiplicando la ecuación 4.3.13 por $J_0(ax)$ e integrando se obtiene

$$\int_0^{\infty} y(a) J_0(ax) da = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} a B(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] J_0(ax) da dx \quad (4.3.14)$$

donde x es un número real, con dimensiones de longitud a la menos uno (L^{-1}).

Aplicando la integral de Fourier-Bessel (Watson 1966, pag. 153)

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} r \lambda F(\lambda) J_0(\lambda r) J_0(rx) dr d\lambda = F(x)$$

al miembro derecho de la ecuación 4.3.14 se tendrá que

$$\int_0^{\infty} y(a) J_0(\lambda x) dx = \frac{2B(x)}{x} - \frac{B(x/2)}{x} \quad (4.3.15)$$

donde, $y(a)$ se ajusta por una combinación de funciones $f(a; d_i)$, las cuales deben cumplir las mismas condiciones de las funciones empleadas en el caso Schlumberger.

$$y'(a) = \sum_{i=1}^m b_i f(a; d_i) \quad (4.3.16)$$

Rekesh y Ramanain (1982) probaron varias funciones de ajuste y resultó que la función más eficiente es

$$f(a; d_i) = \frac{a}{(a^2 + d_i^2)^{1/2}} - \frac{a}{(9a^2 + d_i^2)^{1/2}} \quad (4.3.17)$$

Sustituyendo la expresión 4.3.16 en la 4.3.15 y ésta a su vez en la 4.3.14 se tiene

$$\sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} b_i \left[\frac{a}{(a^2 + d_i^2)^{1/2}} - \frac{a}{(4a^2 + d_i^2)^{1/2}} \right] J_0(\lambda x) d\lambda =$$

$$\frac{2B'(x)}{x} - \frac{B'(x/2)}{x}, \quad (4.3.18)$$

donde B' es una aproximación de B . Recordando la integral de Lipchitz, dada en la ecuación 2.4.12 y aplicando la transformada de Hankel dada por la expresión 4.3.1 se tiene

$$\int_0^{\infty} \frac{a}{(a^2 + d_i^2)^{1/2}} J_0(ax) da = \frac{e^{-xd_i}}{x},$$

con ayuda de la expresión anterior la expresión 4.3.18 queda

$$\sum_{i=1}^m b_i \left[e^{-xd_i} - \frac{e^{-d_i x/2}}{2} \right] = 2B'(x) - B'(x/2)$$

Sustituyendo λ por x en la ecuación anterior se observa la forma de $B'(\lambda)$.

$$B'(\lambda) = \sum_{i=1}^m b_i \frac{e^{-\lambda d_i}}{2}$$

haciendo

$$g(a; d_i) = \frac{e^{-\lambda d_i}}{2}$$

$$B'(\lambda) = \sum_{i=1}^m b_i g(a; d_i)$$

La función $f(a; d_i)$ para el caso Wenner tiene un comportamiento muy similar a la función $f(s; d_i)$ para el caso Schlumberger. Para el ajuste de $y(a)$ se emplea el criterio del error cuadrático medio minimizado. El error cuadrático medio está dado -

$$\frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \left[\sum_{i=1}^m b_i f(a_j; d_i) - y(a_j) \right]^2 = ECM$$

derivando parcialmente con respecto a b_i , igualando a cero y desarrollando la ecuación obtenida, se llega a un sistema de ecuaciones similar al dado por la expresión 4.3.12, donde las a_i se reemplazan por las b_i y

$$X_{q,r} = \sum_{j=1}^{k+1} f(a_j; d_q) f(a_j; d_r) \quad (4.3.19)$$

$$Y_q = \sum_{j=1}^{k+1} f(a_j; d_q) y(a_j) \quad (4.3.20)$$

Lo mismo que para el caso Schlumberger, se sugiere utilizar cuatro funciones de ajuste por ciclo logarítmico. Además $m < k+1$; $d_1 = a_1$ y $d_m = 0.5a_m$ donde a_1 y a_m son los valores de la primera y última abscisa de la CRA. También existe la posibilidad de introducir pesos en las ecuaciones 4.3.19 y 4.3.20.

En el método en cuestión, se puede introducir algún error cuando la CRA se ajusta por medio de funciones, pero este error no se amplifica al obtener la función kernel.

Las funciones de ajuste que se dan tanto para el caso Wenner como para el Schlumberger, no incluyen los casos extremos en que se tenga un sustrato totalmente aislante o totalmente conductor. Para los dispositivos dipolares, no se cuenta con un desarrollo por este método, para obtener la función kernel a partir de la curva de resistividad aparente.

4.3.3 METODO DE INTEGRACION APROXIMADA.

Otra alternativa para determinar la función kernel o - la transformada de resistividades a partir de la curva de resisti- vidad aparente para un dispositivo Schlumberger, es propuesta, - por Patella (1975). Este método se basa en la evaluación aproxi- mada de una integral.

De la ecuación 4.3.2 tenemos

$$T(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\rho_a s}{s} J_1(\lambda s) ds \quad (4.3.2)$$

Si se reemplaza la CRA por una función constante en un intervalo de dos muestras sucesivas, usando para ésto la media - aritmética entre los dos puntos extremos del intervalo. Se consi- dera que el primero y el último valor de la CRA son asintóticos a la resistividad de la primera y última capa respectivamente..

Con lo anterior se tiene que

$$T(\lambda) = \rho_1 \int_0^{r_1} \frac{J_1(\lambda s)}{s} ds + \sum_{j=1}^{k-1} \left[\frac{1}{2} \rho_a(r_j) + \rho_a(r_{j+1}) \right] \\ \times \int_{r_j}^{r_{j+1}} \left(\frac{1}{s} \right) J_1(\lambda s) ds + \rho_n \int_{r_k}^{\infty} \frac{1}{s} J_1(\lambda s) ds$$

donde r_j es la abscisa de la muestra. Siguiendo la notación de Patella tenemos

$$\int_{r_j}^{\infty} \frac{1}{s} J_1(\lambda s) ds = J_{i_1}(\lambda r_j)$$

donde $J_{i_1}(\lambda r_j)$ son funciones estudiadas de la teoría de Bessel y publicadas en las tablas de Chistova (1959).

Sabiendo que la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{s} J_1(\lambda s) ds = 1$$

se tiene

$$T(\lambda) = \rho_1 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{2} [\rho_a(\tau_{j+1}) - \rho_a(\tau_j)] J_{2,1}(\tau_j)$$

Este método tiene la ventaja de que no requiere muestras equiespaciadas y sólo necesita una extrapolación de la CRA para ambos lados. La desventaja que tiene es la de ocupar diferentes coeficientes para cada valor de la transformada lo cual incluye un mayor número de operaciones y tiempo de cálculo.

4.4 PROCEDIMIENTO PARA PASAR DE LA FUNCION KERNEL A LA CURVA DE RESISTIVIDAD APARENTE.

Para obtener la curva de resistividad aparente a partir de la función característica, se han desarrollado varios procedimientos. Koefoed (1979) los clasifica como:

- Método de descomposición en fracciones parciales.
- Método de imágenes.
- Método de filtrado lineal.

4.4.1 METODO DE DESCOMPOSICION EN FRACCIONES PARCIALES.

Por este camino se utiliza la función kernel de Stefanescu, aprovechando que se puede descomponer como un cociente de dos polinomios (ecuación 2.4.28) y dicho cociente se puede descomponer como una suma de fracciones parciales.

$$B(\lambda) = \frac{N}{D} = \sum_{k=1}^m C_k \frac{W}{W_k} \quad (4.4.1)$$

- donde
- $W = \exp(-2\lambda h_0)$
 - $W_k =$ Son las raíces del polinomio $D(u) = 0$
 - $C_k =$ Coeficientes constantes.

Las raíces pueden resultar reales o complejas, en el caso que las raíces sean reales, la función kernel de Stefanescu si puede descomponerse en fracciones parciales. Si por el contrario las raíces son complejas, no existe forma de representar la función kernel por medio de fracciones parciales.

Flathe (1955), encontró que cuando se considera un sustrato conductor, el denominador de la ecuación 4.4.1 se reduce y queda

$$B(\lambda) = \sum_{k=1}^m C_k \frac{k_j \omega - \omega^2}{1 - 2k_j \omega + \omega^2}$$

comparando esta ecuación, con la función $B(\lambda)$ para un corte de tres capas, se encuentra que cada fracción parcial corresponde a un modelo de tres capas, en el cual $R_2 = -1$, a cada una de las fracciones parciales se le denomina elemento primo. En su artículo da un método práctico para obtener los coeficientes C_k y las raíces ω_k .

Una solución aproximada para la CRA se puede obtener como una combinación lineal de elementos primos. En este procedimiento se toma un espesor h_0 como base y los demás espesores deben ser múltiplos enteros de esa base. Las desventajas que presenta el método, es que no es fácil determinar el grado de exactitud obtenido y requiere del cálculo de raíces de polinomios de alto grado. Este camino fue empleado por la Compañía General de Geofísica (1955) y por Flathe (1955).

4.4.2 MÉTODO DE IMÁGENES.

De igual forma que en el procedimiento anterior se toma un espesor h_0 como base y los demás espesores se toman como múltiplos enteros de esa base. Por este método se expande la función

kernel de Stefanescu, efectuando el cociente de los polinomios N y D

$$B(\lambda) = \frac{N}{D} = \sum_{n=1}^{\infty} O(n) e^{-2\lambda n h_0} \quad (4.4.2)$$

Sustituyendo la ecuación anterior, en la expresión 4.3.7, tenemos que para el caso Schlumberger

$$\rho_{as} = \rho_i \left[1 + 2s^2 \sum_{n=1}^{\infty} O(n) \int_0^{\infty} e^{-2\lambda n h_0} J_1(\lambda s) d\lambda \right]$$

aplicando la ecuación de Lipchitz, dada en la expresión 4.3.11 a la anterior se tiene

$$\rho_{as} = \rho_i \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} O(n) s^3 [s^2 + (2nh_0)^2]^{-3/2} \right] \quad (4.4.3)$$

Para el caso Wenner se emplea la ecuación 4.4.13, sustituyendo en ella la ecuación 4.4.2 se obtiene

$$\rho_{aw} = \rho_i \left[1 + 4a \sum_{n=1}^{\infty} O(n) \int_0^{\infty} e^{-2\lambda n h_0} [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda \right]$$

recordando la ecuación 2.4.12 y empleándola en la expresión anterior queda

$$\rho_{aw} = \rho_i \left[1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} O(n) a [(a^2 + (2nh_0)^2)^{-1/2} - (4a^2 + (2nh_0)^2)^{-1/2}] \right] \quad (4.4.4)$$

obteniendo que

$$Z(\lambda) = 1 + 2B(\lambda) \quad ; \quad K(\lambda) = \frac{Q(\omega) + P(\omega)}{Q(\omega) - P(\omega)}$$

llegamos a que

$$B(\lambda) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega) - P(\omega)}$$

tomando en cuenta la ecuación 4.4.2 y la ecuación anterior, se ve que $g(\eta)$ se puede obtener como una función de $q(u)$ y $p(u)$.

Para el caso de los arreglos dipolares se puede encontrar un desarrollo similar al de las dos configuraciones anteriores si se aplica la ecuación 4.2.7, que relaciona los dispositivos dipolares con el dispositivo Schlumberger.

En las ecuaciones 4.4.3 y 4.4.4, los términos que se expanden pueden considerarse como contribuciones causadas por puntos ficticios verticales, por debajo de los electrodos de corriente a profundidades, que son múltiplos enteros de h_0 . De aquí el nombre de método de imágenes dado por Koefoed (1979). Las series de las ecuaciones mencionadas anteriormente, son de convergencia lenta, por lo que cuando la separación de los electrodos de corriente es grande, origina que se haga necesario el cálculo de miles de términos, aumentando con ello al tiempo de cálculo.

Orellana y Mooney (1966), Van Dam (1965), Rijks Waterstaats (1969) emplearon este método, difiriendo solo en el procedimiento para determinar el grado de exactitud para las funciones obtenidas.

4.4.3 METODO DE FILTRADO LINEAL.

En la sección 4.3.1, tratamos los filtros digitales lineales para obtener la función kernel a partir de la curva de resistividad aparente (filtros directos), en la presente sección se tratan los filtros para pasar de la función Kernel a la curva de resistividad aparente. A este tipo de filtros se les denominan filtros inversos.

En la ecuación 4.2.6, se introduce la transformada de resistividades teniendo

$$\rho_{as} = s^2 \int_0^{\infty} T(\lambda) J_1(\lambda s) \lambda d\lambda \quad (4.4.5)$$

sustituyendo las variables logarítmicas definidas en la expresión 4.3.3 se obtiene

$$\rho_{as}(x) = - \int_0^{\infty} T(y) J_1(e^{x-y}) e^{2(x-y)} dy \quad (4.4.6)$$

La expresión anterior es una integral de convolución - similar a la ecuación 4.3.4, la cual relaciona en forma lineal - la curva de resistividad aparente con la transformada de resisti- vidades. El dispositivo Wenner y los dispositivos dipolares tam- bién cumplen con la relación de linealidad, como se vió en la - sección 4.3.1.

De la ecuación 4.3.5, que nos da la convolución discre- ta entre la curva de resistividad aparente y un filtro, para ob- tener la transformada de resistividades; y recordando de la teo- ría de Fourier que una operación de convolución en el dominio del tiempo o del espacio, es una simple multiplicación en el dominio de las frecuencias

$$T_m = \sum_{j=1}^m f_{1j} R_{m-j} \quad (4.3.5)$$

Sacando la transformada de Fourier a cada término de - la ecuación anterior queda

$$T(f) = FD(f) R(f) \quad (4.4.7)$$

donde

- T (f) - Transformada de Fourier de la función de trans- formada de resistividades T (λ).
- FD(f) - Transformada de Fouzier del filtro directo -- f_{1j}.
- R (f) - Transformada de Fourier de la curva de resisti- vidad aparente.

Si en la ecuación 4.4.7 ponemos a $R(f)$ en función de $T(f)$

$$R(f) = T(f) / FD(f)$$

haciendo

$$FI(f) = 1 / FD(f)$$

$$R(f) = FI(f) T(f) \quad (4.4.8)$$

Como se mencionó anteriormente, una multiplicación en el dominio de las frecuencias equivale a una convolución en el dominio del espacio, por lo que se tiene

$$R_m = \sum_{j=1}^n f_{2j} T_{m-j} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4.9)$$

donde

- n - número de coeficientes del filtro.
- f_{2j} - coeficientes del filtro inverso.
- R - valores de la curva de resistividad aparente.
- T - valores de la transformada de resistividades.

La ecuación de convolución discreta dada en la ecuación anterior, nos da la curva de resistividad aparente como una combinación lineal de los coeficientes del filtro inverso y los valores de la transformada de resistividades.

Entre los operadores de filtrado inverso que se han publicado se tienen:

- Para un intervalo de tres muestras por ciclo logarítmico, con nueve coeficientes para el arreglo Schlumberger y diez coeficientes para el arreglo Wenner (Ghosh 1971 b).
- Para un intervalo de cuatro muestras por ciclo logarítmico, con quince puntos para el caso Schlumberger y catorce para el caso Wenner (Koefoed y Dirks 1979).

-Para un intervalo de muestreo de seis valores por década logarítmica, con veinte puntos (D'Neill 1975) y catorce puntos (Das 1982). Ambos para el arreglo Schlumberger. - Para arreglos dipolares, se tiene con veintiun puntos - (perpendicular) y veintitrés puntos (radial) (Das y Ghosh 1974).

-Para una distancia de muestreo de diez valores por década logarítmica y con ciento cuarenta y un coeficientes - (Johansen 1975, Seara 1979).

SCHLUMBERGER	WENNER
0.0225	0.0284
-0.0499	0.4582
0.1064	1.5662
0.1854	-1.3341
1.9720	0.3473
-1.5716	-0.0935
0.4018	0.0416
-0.0814	-0.0253
0.0148	0.0179
	-0.0067

Para un intervalo de muestreo de tres valores por ciclo logarítmico Ghosh (1971b).

SCHLUMBERGER		WENNER	
0.0098	0.0387	0.0008	-0.1029
0.0168	-0.0225	-0.0034	0.0193
0.1686	0.0136	0.0091	-0.0042
0.6448	-0.0086	-0.0086	0.0006
1.8371	0.0055	0.0589	
-2.4820		0.1380	
1.0570		0.8415	
-0.3470		1.2348	
0.1402		-1.7514	
-0.0700		0.5670	

Para un intervalo de muestreo de cuatro valores por ciclo logarítmico Koefoed y Dirks (1979).

SCHLUMBERGER		SCHLUMBERGER	
0.003042	2.7044	0.0140	0.4595
-0.001198	-1.1324	0.0282	-0.1975
0.01284	0.3930	0.0838	0.1042
0.02350	-0.1436	0.2427	-0.0359
0.08688	0.05812	0.6217	
0.2374	-0.02521	1.1877	
0.6194	0.01125	0.3354	
1.1817	-0.004978	-3.4531	
0.4248	0.002072	2.7568	
-3.4507	-0.000318	-1.2075	

Para un intervalo de muestreo de seis valores por ciclo logarítmico O'Neill (1975) y Das (1982).

PERPENDICULAR		RADIAL	
-0.0039	-0.2924	-0.0670	-0.3551
0.0225	0.2127	0.0376	0.2512
0.0258	-0.1646	-0.2274	-0.1896
0.3955	0.1329	0.2887	0.1499
1.3439	-0.1106	1.3257	-0.1221
3.1104	0.0942	5.3842	0.1020
-7.9613	-0.0816	-11.3323	-0.0871
6.1843	0.0718	8.4438	0.0757
-3.0641	-0.0325	-4.1097	-0.0666
1.4121		1.8615	0.0594
-0.7324		-0.9429	-0.0270
0.4373		0.5471	

Para un intervalo de seis muestras por ciclo logarítmico Das y Ghosh (1974).

SCHLUMBERGER

6174.	14930.	18577.	23779.	31496.	43666.
-12484.	-15244.	-19815.	-24416.	-32467.	-45259.
12726.	15567.	19469.	25079.	33484.	46940.
-12975.	-15901.	-19941.	-25768.	-34549.	-48717.
13231.	16246.	20429.	26487.	35666.	50596.
-13494.	-16602.	-20936.	-27235.	-36838.	-52587.
13765.	16971.	21463.	28016.	38069.	54697.
-14043.	-17352.	-22009.	-28830.	-39363.	-56936.
14330.	17746.	22577.	29680.	40724.	59314.
-14625.	-18154.	-23166.	-30568.	-42156.	-61845.
64540.	104775.	199955.	2442523.	-242172543.	6226174.
-67414.	-110741.	-209469.	3250077.	20052460.	-4353505.
70484.	117248.	239052.	7926675.	444506381.	3198475.
-73767.	-124303.	-234543.	13023345.	-489348908.	-2441493.
77284.	132085.	304916.	25610307.	294899398.	1920840.
-81057.	-140461.	-234124.	41150741.	-137791072.	-1548505.
85111.	149959.	453990.	64231809.	61285163.	1273595.
-89475.	-159826.	-106745.	72803988.	-29362551.	-1065148.
94183.	171917.	899282.	36118538.	15817356.	903512.
-99267.	-182946.	550573.	-100406442.	-9504597.	-775750.
673079.	-372478.	235594.	-162176.	60905.	
-589375.	336951.	-217394.	151657.		
529264.	-306251.	201216.	-142126.		
-462558.	279543.	-186773.	133453.		
413991.	-256168.	173826.	-125568.		

Para un intervalo de muestreo de diez valores por ciclo logaritmico Johansen (1975), los coeficientes estan multiplicados $\times 10^{-8}$.

APENDICE I

SOLUCION A LA ECUACION DE BESSEL DE ORDEN CERO.

En algunos tipos de problemas físicos; en los que existe simetría cilíndrica, surge la ecuación de Bessel dada por

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (I)$$

ν - constante.

esta expresión es una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden, cuyos coeficientes son polinomios. La solución de este tipo de ecuación es por medio de series (Boyce 1977, pag. 152).

La ecuación de Bessel, presenta una singularidad regular en el punto $x=0$; por lo que una solución es de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) x^{r+n} \quad (II)$$

cuando $\nu = 0$, se tiene la ecuación de Bessel de orden cero la cual se resuelve a continuación

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0 \quad (III)$$

Sacando la primera y segunda derivada con respecto a x , en la ecuación II

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1} ; y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n-1)(r+n) a_n x^{r+n-2}$$

sustituyéndolas en la ecuación III produce

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n-1)(r+n) a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} = 0$$

Haciendo un cambio en el índice mudo n del tercer término y simplificando se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(\tau+n-1)(\tau+n) + (\tau+n)] a_n x^{\tau+n} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{\tau+n} = 0$$

desarrollando el primer término para $n=0, n=1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{ [(\tau+n-1)(\tau+n) + (\tau+n)] a_n + a_{n-2} \} x^{\tau+n} + [\tau(\tau+1) + (\tau+1)] a_1 x^{\tau+1} + [(\tau-1)\tau + \tau] a_0 x^{\tau} = 0 \quad (IV)$$

Del tercer término se obtiene la ecuación indicial, -- cuyas raíces son

$$(\tau-1)\tau + \tau = 0 \quad : \quad \tau_1 = \tau_2 = 0$$

Como las raíces de la ecuación indicial son iguales, -- las dos soluciones linealmente independientes $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ tienen la siguiente forma (Boyce 1977, pag. 191).

$$Y_1(x) = |x|^{\tau_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\tau_1) x^n \right] \quad (V)$$

$$Y_2(x) = Y_1(x) \ln|x| + |x|^{\tau_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\tau_1) x^n \quad (VI)$$

Para encontrar la primera solución se hará lo siguiente: Primero se sustituye $\tau_1 = 0$ en el segundo término de la -- expresión IV y se iguala a cero, para que esto se cumpla $a_1^{(0)} = 0$

$$[\tau(\tau+1) + (\tau+1)] a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 ;$$

la relación de recurrencia para obtener los coeficientes $a_n^{(\tau)}$ se forma del primer término de la ecuación IV

$$a_n(\tau) [(\tau+n-1)(\tau+n) + (\tau+n)] + a_{n-2}(\tau) = 0$$

por lo que

$$a_n(\tau) = - \frac{a_{n-2}(\tau)}{(\tau+n)^2} ; n \geq 2 \quad (VII)$$

sustituyendo en esta expresión $r_1 = 0$, y sabiendo que $a_1(0) = 0$, todos los valores de a para n impares serán cero también. Para valores pares de $n \geq 2$, se tiene

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{2^2}$$

$$a_4(0) = -\frac{a_2(0)}{4^2} = \frac{a_0(0)}{2^2(2^4)}$$

$$a_6(0) = -\frac{a_4(0)}{6^2} = -\frac{a_0(0)}{2^6(2 \times 3)^2}$$

$$\vdots$$

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m}{2^{2m} (m!)^2} a_0(0)$$

de aquí que

$$y_1(x) = a_0 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \right] ; x > 0$$

a la función encerrada en el paréntesis rectangular se le conoce como función de Bessel de primera clase y de orden cero, se denota como $J_0(x)$. Así se tiene que la primera solución es

$$y_1(x) = a_0 J_0(x)$$

Ahora se encontrará la segunda solución. Anteriormente se vió que las $a_n(0)$ para valores impares de n , son cero, lo mismo ocurre para $a_n'(0)$ cuando n es impar. De la expresión VII se tiene que

$$a'_{2m}(r) = -\frac{a_{2m-2}(r)}{(2m+r)^2} = \frac{a_{2m-4}(r)}{(2m-4+r)^2(2m+r)^2}$$

$$= -\frac{a_{2m-6}(r)}{(2m-4+r)^2(2m-2+r)^2(2m+r)^2}$$

$$\vdots$$

$$a'_{2m}(r) = \frac{a_{2m-2m}(r)}{(2m+r)^2(2m-2+r)^2 \dots (2+r)^2} ; m=1,2,3,\dots$$

(VIII)

el cálculo de $a_{2m}^1(r)$ se lleva a cabo más fácilmente si se nota que

$$f(x) = (x-d_1)^{f_1} (x-d_2)^{f_2} \dots (x-d_n)^{f_n}$$

$$f'(x) = f_1 (x-d_1)^{f_1-1} [(x-d_2)^{f_2} (x-d_3)^{f_3} \dots (x-d_n)^{f_n}] +$$

$$+ f_2 (x-d_2)^{f_2-1} [(x-d_1)^{f_1} (x-d_3)^{f_3} \dots (x-d_n)^{f_n}] + \dots$$

para valores de x distintos a d_1, d_2, \dots, d_n

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f_1}{x-d_1} + \frac{f_2}{x-d_2} + \dots + \frac{f_n}{x-d_n}$$

por lo que la ecuación VIII se puede expresar como

$$\frac{a_{2m}^1(r)}{a_{2m}(r)} = -2 \left(\frac{1}{2m+r} + \frac{1}{2m-2+r} + \dots + \frac{1}{2+r} \right)$$

haciendo $r = 0$

$$a_{2m}^1(0) = -2 \left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m-2} + \dots + \frac{1}{2} \right) a_{2m}(0)$$

definiendo

$$H_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1$$

se obtiene

$$a_{2m}^1(0) = -H_m \frac{(-1)^m}{2^{2m} (m!)^2} a_0 \quad ; \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

la solución $Y_2(x)$ se obtiene poniendo en la expresión VI, la solución $Y_1(x)$ con $a_0 = 1$ y sustituyendo $a_{2m}^1(0)$ por $b_{2m}(0)$

$$Y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m} (m!)^2} H_m x^{2m}; x > 0$$

En lugar de la segunda solución, se acostumbra a tomar una combinación lineal de $J_0(x)$ con $Y_2(x)$. Esta combinación es

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} [Y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)]$$

siendo

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n - \ln n \cong 0.5772$$

donde $Y_0(x)$ se conoce como función de Bessel de segunda clase y de orden cero.

La solución general a la ecuación de Bessel de orden - cero es

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$$

APENDICE II

FORMAS DE CALCULAR LOS FILTROS.

En resistividad, los procesos que se han desarrollado para obtener los filtros son:

- Transformada de Fourier.
- Mínimos cuadrados.
- Transformada Z,
- Integración numérica.

A continuación se describen cada uno de ellos.

a) CALCULO DE LOS FILTROS POR MEDIO DE TRANSFORMADA DE FOURIER.

La teoría de los filtros lineales se basa en la integral de convolución y en la transformada de Fourier, por lo que resulta conveniente calcular los coeficientes de los filtros por este camino.

Partiendo de las ecuaciones 4.3.5 y 4.4.9

$$T_m = \sum_{j=1}^m f_{1j} R_{m-j} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$R_m = \sum_{j=1}^m f_{2j} T_{m-j}$$

donde en la primera expresión, se considera a R (curva de resistividad aparente) como la función de entrada y a T (transformada de resistividades) como la función de salida, y de forma contraria para la segunda ecuación. Recordando también el teorema de la teoría de Fourier que nos dice, que si una función $g(x)$ es el producto de la convolución de una función $h(x)$ con una función $k(x)$, el espectro de frecuencias de $g(x)$, será el producto de los

espectros de frecuencias de $h(x)$ y $k(x)$.

Aplicando a las ecuaciones anteriores la transformada de Fourier dada por (Bracewell 1965, pag. 7)

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi f x i} dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{2\pi f x i} df$$

se obtiene que

$$T(f) = FD(f) R(f)$$

$$R(f) = FI(f) T(f)$$

donde

$T(f)$ - es la transformada de Fourier de la función de transformación de resistividades.

$R(f)$ - transformada de Fourier de la CRA.

$FD(f)$ y $FI(f)$ - transformada de Fourier del filtro directo e inverso respectivamente.

Despejando en las ecuaciones 2 y 3 a $FD(f)$ y $FI(f)$ -- queda

$$FD(f) = R(f) / T(f)$$

$$FI(f) = T(f) / R(f)$$

Con lo anterior se ve que si conocemos las funciones de entrada y de salida se puede obtener la función de transferencia o espectro de frecuencias del filtro y aplicando la transformada inversa de Fourier (dada en la ecuación 1b) se obtiene el filtro. Pero recordando de la sección 4.3.1, donde se vió que tanto para la curva de resistividad aparente como para la transformada de resistividades el espectro de amplitud no es cero para frecuencias mayores a una frecuencia de corte, pero si tienden a cero. Por lo que resulta necesario eliminar las frecuencias mayores a la frecuencia crítica del filtro, obtenido con esas funciones. El procedimiento a seguir es aplicar un filtro

pasa bajas, lo cual en el dominio de las frecuencias equivale a multiplicar el espectro de amplitud del filtro por una función - rectángulo con una amplitud igual al intervalo de muestreo y una longitud igual a dos veces la frecuencia crítica. En el dominio del espacio equivale a efectuar una convolución entre el filtro y una función de la forma $\text{sen } x/x$, con un período de dos veces - el intervalo de muestreo de filtro. Al resultado de esta operación se le denomina respuesta del filtro a la función $\text{sen } x/x$ y las muestras de este resultado forman los coeficientes del fil--tro, el cual tiene un contenido de frecuencias menor a la fre---cuencia de Nyquist.

El filtro que se obtuvo en el proceso anterior, está - formado por la sobreposición de dos funciones: Una función suavizada con una amplitud que tiende a cero para ambos lados del eje de las abscisas; y una función oscilante producto del corte de - frecuencias efectuado, que tiene un período de dos veces el in--tervalo de muestreo y presenta sus ceros sucesivos a una distan--cia igual al intervalo de muestreo. La amplitud de la función - oscilante tiende más lentamente a cero hacia ambos lados del eje de abscisas, que la función suavizada.

Lo anterior sugiere escoger los coeficientes del fil--tro de tal forma que las muestras pasen por los valores cero de la función oscilante, lo que ocasiona que la longitud del filtro se reduzca y sea controlada únicamente por el decaimiento de la función suavizada.

Koefoed (1972), da un procedimiento para calcular el - movimiento que hay que efectuar entre la función de salida y la función de entrada para la obtención de los filtros.

La transformada numérica de Fourier puede efectuarse - por medio del algoritmo normal o por el algoritmo de transforma--da rápida de Fourier, el primero fue usado por Ghosh (1971) y el segundo por Sears (1979).

La ventaja de este método es que se puede aplicar en la obtención de filtros de resistividad para el caso en que la función de salida, no se pueda obtener de una forma explícita. La desventaja que tiene, es el gran espacio de memoria que requiere para almacenar las funciones que entran en los cálculos y además necesita un gran tiempo de procesado.

b) CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE LOS FILTROS POR EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS.

Por este método se obtiene un filtro $(f_j, j 0, 1, 2, \dots, n+1)$, el cual transforma una función de entrada $(b_i, i 0, 1, 2, \dots, m+1)$ en una función de salida $(c_i, i 0, 1, 2, \dots, m+n+1)$, la cual es la más parecida a una función deseada $(d_i, i 0, 1, 2, \dots, m+n+1)$, es decir que el error cuadrático medio entre la función de salida obtenida y la función deseada es mínimo.

La función de salida, está dada por la convolución del filtro (f_j) con la función de entrada (b_i)

$$c_i = \sum_{j=0}^n f_j b_{i-j} .$$

El error cuadrático medio entre la salida obtenida y la salida deseada se denomina como

$$I = \left[\sum_{i=0}^{n+m} (c_i - d_i)^2 \right] \frac{1}{m+n+1}$$

para obtener el valor mínimo se deriva parcialmente con respecto a cada coeficiente f_j y se iguala a cero

$$\sum_{i=0}^{n+m} \frac{2}{m+n+1} \left[\sum_{j=0}^n (f_j b_{i-j}) - d_i \right] b_{i-k} = 0$$

$$\sum_{j=0}^n f_j \sum_{i=0}^{n+m} b_{i-j} b_{i-k} = \sum_{i=0}^{n+m} b_{i-k} d_i$$

haciendo

$$\sum_{i=0}^{n+m} b_{i-j} b_{i-k} = a_{j-k}$$
$$\sum_{i=0}^{n+m} b_{i-k} d_i = g_k$$

donde a_{j-k} es la función de autocorrelación de la entrada y g_k es la función de croscorrelación entre la entrada y la salida deseada. La función de autocorrelación es una función par, por lo que $a_{j-k} = a_{k-j}$.

Poniendo las ecuaciones 7 y 8 en la 6 se obtiene un sistema de n ecuaciones con n incógnitas f_j .

$$\sum_{j=0}^n f_j a_{j-k} = g_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

desarrollando

$$\begin{aligned} a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n &= g_0 \\ a_1 f_0 + a_0 f_1 + a_1 f_2 + \dots + a_{n-1} f_n &= g_1 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_n f_0 + a_{n-1} f_1 + a_{n-2} f_2 + \dots + a_0 f_n &= g_n \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones presenta simetría con respecto a la diagonal principal, aprovechando esta propiedad, el sistema se puede resolver empleando el algoritmo dado por Levinson.

Los coeficientes f_j del filtro, que se obtienen por una ejecución del algoritmo de Levinson puede contener errores producidos por el redondeo de cifras, pero si se aplica un proceso iterativo de refinamiento (Murakami y Uchida 1982) la exactitud de los coeficientes se puede incrementar.

El método tiene la ventaja de que ocupa una menor cantidad de espacio de memoria y un menor tiempo de cálculo, que el

método de transformada de Fourier. Además proporciona mayor exactitud en los coeficientes de los filtros y puede aplicarse en la obtención de cualquier tipo de filtro de resistividad.

c) CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE LOS FILTROS POR MEDIO DE TRANSFORMADA Z.

El muestreo equidistante en una función se puede representar por medio de la transformada Z, dada por

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \quad (3)$$

donde a_n representa las muestras. Una forma de interpretar la transformada Z, es considerando que los exponentes de Z indican la posición de los puntos muestreados.

Otra forma de interpretar la transformada Z, es haciendo que $Z = \exp(-2\pi i f \Delta y)$, en donde f es la frecuencia y Δy el intervalo de muestreo. Con la consideración anterior la expresión (3) es igual al espectro de frecuencias de la función de la cual se obtuvieron las muestras, por lo que de forma similar al método de transformada de Fourier, podemos obtener la transformada Z del filtro haciendo el cociente de la transformada Z de la función de salida entre la transformada Z de la función de entrada.

Existe una dificultad para aplicar este método y consiste en encontrar una forma de efectuar la división, en la cual el residuo tienda a converger a un valor que se considere despreciable. Koefoed (1979) da una forma de efectuar dicha división, pero no es aplicable para la obtención de todos los filtros. Solo se emplea para conseguir filtros directos y filtros para pasar de la curva de resistividad aparente Wenner a la Schlumberger.

El procedimiento es el siguiente: en el primer paso se encuentra el término del numerador que tenga el mayor valor absoluto y se divide entre el término del denominador de mayor valor, el cociente entre ese par de valores se considera como un término de la división entre los dos polinomios y se almacena aditivamente en un lugar apropiado del arreglo; A continuación ese cociente se multiplica por cada uno de los términos del denominador y se resta a su término correspondiente en el numerador, con lo anterior el valor más grande del numerador se reduce a cero; El residuo de la división se sustituye en el numerador por el anterior y se repite la operación hasta que el valor del residuo sea menor a un error previamente establecido.

Cuando se aplica un movimiento adecuado entre la función de entrada y la función de salida, los coeficientes del filtro resultan ligeramente diferentes a los que se obtienen con transformada de Fourier, en el caso de no hacer el movimiento adecuado entre la función de entrada y salida, los coeficientes del filtro obtenidos por los dos métodos resultan diferentes, esto es debido a que la transformada Z suprime las oscilaciones de la función $\sin x/x$.

La ventaja que tiene este procedimiento, es que ocupa menor espacio de memoria y menor tiempo de cálculo que el método de mínimos cuadrados. La gran desventaja que posee, es que solo se aplica en la obtención de los filtros directos y de los filtros para pasar de una configuración Wiener a una Schlumberger.

d) CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE FILTROS POR INTEGRACION NUMERICA.

Otro camino para obtener los filtros digitales lineales, es efectuar una integración numérica.

De la ecuación 4.3.4 se tiene

$$T(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{as}(x) J_1(e^{x-y}) dx$$

definiendo $\bar{J}_1(u) = J_1(\exp u)$ y recordando el teorema b) sobre restitución dado en la sección 4.3.1 que dice que una función se puede construir a partir de sus muestras, si cada muestra se sustituye por el producto de su valor con una función $\text{sens } x/\Delta x$ (sens x) con período de $2\Delta x$.

$$P_{as}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_a(m\Delta x) \text{sens} \left[\frac{\pi(x-m\Delta x)}{\Delta x} \right]$$

y si se hace $\omega = x - m\Delta x$, $y_0 = m_0 \Delta x$ se tendrá

$$T(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{as}(m\Delta x) \int_{-\infty}^{\infty} \text{sens} \left(\frac{\pi\omega}{\Delta x} \right) \bar{J}[(m_0 - m)\Delta x - \omega] d\omega$$

si se llama $h[(m_0 - m)\Delta x]$ a la integral anterior se tendrá

$$T(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{as}(m\Delta x) h[(m_0 - m)\Delta x]$$

donde

$h[(m_0 - m)\Delta x]$ es el filtro.

Richard y Lakshmanan (1976) muestran que $\text{sens}(\pi\omega/\Delta x)$ converge para valores de menos infinito y de más infinito, lo mismo que $\bar{J}_1[(m_0 - m)\Delta x]$.

Para un intervalo de tres muestras por ciclo logarítmico y para una precisión de 3.3×10^{-4} los límites de integración para encontrar los coeficientes son $-10 \pm k\Delta x$ para el inferior y de $35 \pm k\Delta x$ para el superior.

Sernabini y Cardarelli (1976) también emplean este método, y en la ecuación 4.3.2 en lugar de sustituir variables con logaritmos naturales, los emplean con logaritmos decimales.

$$s = 10^z \quad ; \quad ds = 10^z \ln 10 \, dz$$

$$\lambda = 10^{-y}$$

empleando la ecuación 10, con otro argumento y haciendo $y=n\Delta x$ se tendrá

$$T(n\Delta x) = \ln 10 \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{as}(m\Delta x) \int_{-\infty}^{\infty} \text{sens}(x-m\Delta x) J_1(1/10^{(n-m)\Delta x}) dx$$

Definiendo como función de Bessel filtrada a

$$J_{1f} = 2.3026 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sens}(t) J_1(1/10^{(n-m)\Delta x}) dx$$

la cual prácticamente se obtiene como

$$J_{1f}(n\Delta a) = 2.3026 \Delta a \sum_{k=1}^m J_1(10^{-k\Delta a}) \frac{\text{sen} [2\pi f_c (n-k)\Delta a]}{\pi (n-k)\Delta a}$$

donde Δa es el intervalo de muestreo de las dos funciones y $\lambda, m, \Delta a, f_c, n$, se obtienen mediante pruebas.

La ventaja de este método es que requiere poco espacio de memoria, pero posee la desventaja de que requiere la existencia de funciones explícitas para el cálculo de los coeficientes de los filtros y además necesita que la integración numérica -- tenga convergencia.

Los filtros que se obtienen por cualquiera de los métodos anteriores, deben de transformar una función de entrada -- en una función de salida y también deben transformar una constante en la misma constante, para ésto la suma de los coeficientes debe de ser la unidad.

Para aprovechar toda la potencialidad del filtrado lineal se deben elegir filtros que tengan una longitud relativamente pequeña, pero que proporcionen gran exactitud. El intervalo

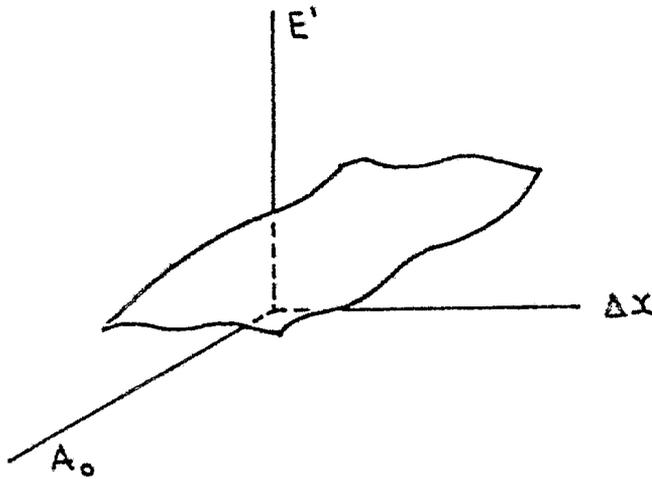
de muestreo y el desplazamiento que hay que efectuar entre la función de entrada y la función de salida, son dos parámetros que influyen en la exactitud de los coeficientes de los filtros. Como se vió en las secciones 4.3.1 y 4.4.3, los coeficientes de los filtros que se obtienen empleando el dominio de las frecuencias, son el resultado de muestrear con un intervalo de $1/2$ fc. la función que resulta de aplicar un filtro pasa-bajas, al filtro obtenido mediante la transformada inversa de Fourier del cociente de los espectros de frecuencias de las funciones de salida y entrada, Ghosh (1971) menciona que si se efectúa un movimiento apropiado en el muestreo, los coeficientes del filtro decaen de forma más rápida en ambas direcciones del eje de las abscisas, ocasionando que el número de coeficientes se reduzca. Koefoed (1972), estudia la función filtro y da una expresión para calcular el movimiento que se debe de realizar entre la función de entrada y la de salida, para reducir las oscilaciones del filtro; más tarde Nyman y Landisman (1977), estudian los efectos del movimiento que se realiza y de la importancia de escoger un intervalo de muestreo óptimo. La desventaja de los procesos que se realizan en el dominio de las frecuencias, es la de no considerar al inicio de los cálculos un número finito de puntos para el filtro, lo que ocasiona que se pueda aumentar o disminuir el número de coeficientes sin que ocurra un cambio significativo en la exactitud del filtro.

Un camino mediante el cual podemos tener un número determinado de puntos para los filtros al inicio de su cálculo, nos los da el método de mínimos cuadrados.

Guptasarma (1982), da un método numérico que utiliza el criterio del mínimo error relativo, para encontrar el valor óptimo del intervalo de muestreo y del movimiento que debe aplicarse entre la entrada y la salida, para un filtro dado con un número finito de puntos. El método consiste en formar una superficie con variables ΔX , A_0 y E' , donde ΔX es el intervalo de muestreo, A_0 es el movimiento a realizar entre entrada y salida

y E' es la magnitud del máximo error relativo producido por un filtro calculado por mínimos cuadrados.

$$E = \frac{(\text{Valor teórico} - \text{Valor calculado})}{\text{Valor teórico}}$$



SUPERFICIE DE ERROR
FIGURA II-1

La superficie que resulta es muy compleja y el punto que contiene el menor E' en la superficie, será la solución para encontrar los valores de Δx y A_0 . En su trabajo Guptasarma da ejemplos de operadores de filtrado calculados con un movimiento y un intervalo de muestreo óptimos, los cuales dan mejores resultados que los operadores obtenidos en el dominio de las frecuencias.

B I B L I O G R A F I A

- BERNADINI, M. and CARDARELLI, E., 1978. The use of filtered Bessel function in direct interpretation of geoelectrical soundings. *Geophysical Prospecting*, 25:841-852.
- BICHAR, N. and LAKSMANAN, J., 1976. Fast automatic processing of resistivity soundings. *Geophysical Prospecting*, 24:354-370.
- BOYCE, W.E. y DIPRIMA, R.C., 1977. Introducción a las ecuaciones diferenciales. Limusa, México.
- BRACEWELL, R., 1965. The Fourier transform and its applications. - McGraw Hill, New York.
- CHRISTOVA, E.A., 1959. Table of the Bessel function of the true argument and of integrals derived from them. Pergamon Press, - London.
- COMPANIE GENERALE DE GEOPHYSIQUE, 1955. Abaques de sondage électrique. *Geophysical Prospecting*, 3:Suppl. 3.
- DAS, U.C. and GHOSH, D.P., 1974. The determination of filter coefficients for the computation of standard curves for dipole-resistivity sounding over layered earth by linear filtering. *Geophysical Prospecting*, 22:765-780.
- DAS, U.C., 1982. Designing digital linear filters for computing resistivity and electromagnetic sounding curves. *Geophysics*, - 42:1456-1459.
- FLATHE, H., 1955. A practical method of calculating geoelectrical-model graphs for horizontally stratified media. *Geophysical Prospecting*, 3:268-294.
- GHOSH, D.P., 1971a. The application of linear filter theory of direct interpretation of geoelectrical resistivity sounding -- measurement. *Geophysical Prospecting*, 19:192-217.
- GHOSH, D.P., 1971b. Inverse filter coefficients for the computation of apparent resistivity standard curves for a horizontally stratified earth. *Geophysical Prospecting*, 19:768-775.

- GUPTASARMA, D., 1982. Optimization of short digital linear filters for increased accuracy. *Geophysical Prospecting*, 30:501-514.
- JOHANSEN, H.K., 1975. An interactive computer/graphic-display-terminal system for interpretation of resistivity soundings. -- *Geophysical Prospecting*, 23:449-458.
- KOEFCEC, O., 1968. The application of the kernel function in interpretation geoelectrical resistivity measurements. Borntraeger, Berlin.
- KOEFOD, O., 1970. A fast method for determining the layer distribution from the raised kernel function in geoelectrical sounding. *Geophysical Prospecting*, 18:564-570.
- KOEFOD, O., 1972. A note on the linear filter method of interpreting resistivity sounding data. *Geophysical Prospecting*, - 20:403-405.
- KOEFOD, O., 1976a. Error propagation and uncertainty in the interpretation of resistivity sounding data. *Geophysical Prospecting*, 24:31-45.
- KOEFCEC, O., 1976b. Progress in the direct interpretation of resistivity sounding: an algorithm. *Geophysical Prospecting*, 24: 233-240.
- KOEFCEC, O., 1976c. An approximation method of resistivity sounding interpretation. *Geophysical Prospecting*, 24:617-632.
- KOEFOD, O. and DIRKS, F.J.H., 1979. Determination of resistivity sounding filters by the Wiener Hopf least square method. *Geophysical Prospecting*, 27:245-250.
- KOEFCEC, O., 1979. Geosounding principles 1. Resistivity sounding - measurements, vol. 14A in methods in geochemistry and geophysics. Elsevier, Amsterdam.
- KUNETZ, G., 1986. Principles of direct current resistivity prospecting. Borntraeger, Berlin.
- LIMA, E., 1979. Deriving recurrence formulas for the eigenfunctions of each layer of horizontally multilayered earth models. Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu University, 39:- 183-192.

- MURAKAMI, Y. and UCHIDA, T., 1982. Accuracy of the linear filter - coefficients determined by the iteration of the least-square method. *Geophysics*, 47:244-256.
- MYMAN, D.C. and LANDISMAN, M., 1977. VES dipole-dipole filter coefficients. *Geophysics*, 42:1037-1044.
- O'NEILL, D.J., 1975. Improved linear filter coefficients for application in apparent resistivity computation. *Bull. Aust. Soc. Explor. Geophys.*, 6:104-109.
- ONDERA, S., 1960. The kernel function in the multiple-layer resistivity problem. *J. Geophys. Res.*, 65:3787-3794.
- ORELLANA, E., 1965. Propiedades de medios estratificados aplicadas a la prospección geoelectrica. *Revista de Geofísica*, 24: - - 189-263.
- ORELLANA, E. y MOONEY, H.M., 1966. Tablas y curvas para sondeos eléctricos verticales. Interciencia, Madrid.
- ORELLANA, E., 1982. Prospección geoelectrica en corriente continua. Paraninfo, Madrid.
- PATELLA, D., 1975. A numerical computation procedure for the direct interpretation of geoelectrical soundings. *Geophysical Prospecting*, 23:335-362.
- PEKERIS, C.L., 1940. Direct method of interpretation in resistivity prospecting. *Geophysics*, 5:31-46.
- RAJESH, K. and RAMANAIAH, C., 1982. A numerical method to compute the resistivity transform from Wenner sounding data. *Geophysical Prospecting*, 30:898-909.
- RICKSWATERSTANT, 1963. Standard graphs for resistivity prospecting. European Association of Exploration Geophysics, The Hague.
- SANTINI, R. and ZAMBRANO, R., 1981. A numerical method of calculating the kernel function from Schlumberger apparent resistivity data. *Geophysical Prospecting*, 28:196-197.
- SEARA, J.L., 1978. Doctoral thesis. University of Western Ontario, London.
- SLICHTER, L.B., 1933. The interpretation of resistivity prospecting method for horizontal structures. *Physics*, 4:307-322.

- STEFANESCO, S.S. and SCHLUMBERGER, C. and M., 1930. Sur la distribution électrique potentielle autour d'une prise de terre - ponctuelle dans un terrain a couche horizontales, homogenes et isotropes. J. Physics Radium, 7:132-141.
- BZARAMIEC, E., 1979. Direct interpretation by accumulations of layers. Geophysical Prospecting, 27:
- JAN DAM, T.C., 1965. A simple method for the calculation of standard-graphs to be used in geoelectrical prospecting. Geophysical Prospecting, 13:37-65.
- WATSON, K., 1966. A treatise on the theory of Bessel functions. University Press, Cambridge.
- MINING GEOPHYSICS, 1977. The Society of Exploration Geophysics. Tulsa, Oklahoma.