



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

Señor ALVARADO OMAÑA MIGUEL ANGEL.

P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección, propuso el Prof. Ing. - F. Alejandro Arroyo Carrasco, para que lo desarrolle como tesis para su Examen Profesional de la carrera de INGENIERO GEOFISICO.

"DESARROLLO DEL ANALISIS DE FOURIER EN SEÑALES CONTINUAS"

PROLOGO.

- I APROXIMACION DE FUNCIONES.
- II INTRODUCCION AL ANALISIS DE FRECUENCIAS.
- III ESPECTROS DISCRETOS DE FRECUENCIA.
- IV ESPECTROS CONTINUOS: LA INTEGRAL DE FOURIER
- V RESPUESTA DE SISTEMAS LINEALES-FILTROS IDEALES.
- VI INTRODUCCION A LA DETECCION DE SEÑALES EN PRESENCIA DE RUIDO.

RESUMEN.

APENDICE

- a) FORMAS DE LA SERIE DE FOURIER.
 - b) RESUMEN DE LAS CONDICIONES DE SIMETRIA.
 - c) PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.
- BIBLIOGRAFIA.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar -- Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como -- requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así -- como de la disposición de la Coordinación de la Administración -- Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los -- ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente.

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cd. Universitaria, D.F., 10 de febrero de 1983.

EL DIRECTOR

Dr. Octavio A. Rascón Chávez

Int-
OARC'MRV'gtg



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICO ESTE TESIS

- A MIS PADRES:

ELISS SUVARADO RAMIREZ
YOLANDA OMAÑA BOAÑOS
POR SU AMOR, EJEMPLO, APOYO Y COMPRESIÓN.

- A MIS HERMANOS:

HÉCTOR ELISS Y EUNA YOLANDA.

- A MIS FAMILIARES Y AMIGOS.

- A MIS PROFESORES.

- A MIS COMPAÑEROS.

- A ZORAYA:

SON INQUIETA Y CARINOSA.

- A TI.

MIRUEL SUZGE, SUVARADO OMAÑA

AGRADECIMIENTOS.

QUISIERA EXPRESAR MI AGRADECIMIENTO A/ ING. FRANCISCO ALEJANDRO ARROYO CARRASCO QUIEN GENTILMENTE ACEPTÓ ASESORAR Y REVISAR EL TRABAJO REALIZADO, ASÍ COMO TAMBIÉN ACEPTÓ VARIAS SUGERENCIAS PARA LA OPTIMIZACIÓN DEL MISMO.

DESEO TAMBIÉN AGRADECER A/ ING. ROBOAM LEÓN SÁNCHEZ, DE QUIEN SIEMPRE HE RECIBIDO UN GRAN ESTÍMULO, ADEMÁS DE VARIAS APORTACIONES Y SUGERENCIAS, COLABORANDO ASÍ EN LA REALIZACIÓN DE ESTA TESIS.

ASÍ MISMO, QUIERO MOSTRAR MI GRATITUD A/ ING. OCTAVIO - LÓPEZ MONCILLA y A/ ING. OSVALDO SÁNCHEZ ZAMORA POR LAS FACILIDADES QUE ME PROPORCIONARON.

IGUALMENTE AGRADEZCO A/ PROFESORADO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA POR SUS VARIAS ENSEÑANZAS; y FINALMENTE A MIS COMPAÑEROS y AMIGOS POR SU APOYO.

A TODOS ELLOS POR SU INCONDICIONAL AMISTAD.

MIGUEL ANGE A/VARADO OMAÑA.

SÉ EQUILIBRADO, SERENO Y CONFIAO.

TÚ PUEDES HACER lo que es justo que PARA TI HAGAS,
PUEDES TENER lo que es justo que TENGAS y PUEDES
SER lo que es justo que SEAS. Y ESO ES POSIBLE
PARA TI REALIZARLO.

SABIENDO QUE TIENES INTELIGENCIA PUEDES DECIR:
"YO QUIERO, ¡YO SOY!, POR ÉSTA RAZÓN ¡YO PUEDO!,
Y POR LO MISMO, ¡YO QUIERO!"

SIEMPRE QUE AFRONTES UN PROBLEMA RECUERDA
ÉSTOS TRES PASOS: ¡YO SOY, YO PUEDO, YO QUIERO!
DE MODO QUE, CUANDO ANALICES UN PROBLEMA, MIRA/LO
POR ENCIMA, A/REDEDOR Y POR E/ MEDIO, Y CUANDO LO
HAGAS ASÍ, DESCUBRIRÁS QUE NO ES UN PROBLEMA, SINO
UNA OPORTUNIDAD DE DEMOSTRAR QUE ERES, QUE PUEDES,
QUE QUIERES.

MIRA/LO COMO UN RETO, COMO UN ESTÍMULO, Y ENTONCES
RECORRE A TU INGENIO PARA TRATARLO.

Miguel Angel.

PRÓLOGO.

LA TÉCNICA DEL ANÁLISIS DE FOURIER ES SUMAMENTE PODEROSA Y SEÑALA UN NOTABLE AVANCE EN EL DESARROLLO DE LA FÍSICA MATEMÁTICA.

INTRODUCIDA EN 1807 POR JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER EN SU "THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR", EN BUSCA DE MÉTODOS SENCILLOS PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS DE VALOR EN LA FRONTERA QUE SE PRESENTAN EN EL TRATAMIENTO ANALÍTICO DE LA CONDUCCIÓN DEL CALOR, ÉSTA TEORÍA SE HA EXTENDIDO A MUCHAS OTRAS APLICACIONES FÍSICAS DIFERENTES A ESA RAMA.

DE ÉSTA MANERA, EL ANÁLISIS DE FOURIER SE HA CONVERTIDO EN UN INSTRUMENTO INDISPENSABLE EN EL TRATAMIENTO DE CASI TODA CUESTIÓN DE FÍSICA MODERNA, TEORÍA DE COMUNICACIONES, SISTEMAS LINEALES Y EN ESPECIAL DE LA GEOFÍSICA.

EL OBJETIVO DE ÉSTA TESIS, ES DESARROLLAR FORMALMENTE EL ANÁLISIS DE FOURIER ESTABLECIENDO CONCEPTOS, DEFINICIONES Y TEOREMAS FUNDAMENTALES IMPORTANTES, DADA SU UTILIDAD EN EL TRATAMIENTO DE SEÑALES DE TIPO GEOFÍSICO.

EN EL PRIMER CAPÍTULO SE DEMUESTRA CÓMO UNA FUNCIÓN PERIÓDICA "ARBITRARIA" PUEDE ESCRIBIRSE COMO UNA SUMA INFINITA DE FUNCIONES SENUSOIDALES, EN EL SEGUNDO Y TERCERO SE INTRODUCEN LOS CONCEPTOS DE ANÁLISIS FRECUENCIAL Y LOS ESPECTROS DE FRECUENCIA; A CONTINUACIÓN SE INCLUYE UN CAPÍTULO RELACIONADO CON LA INTEGRAL Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER, Y LUEGO OTRO SOBRE LAS RESPUESTAS DE LOS SISTEMAS LINEALES. FINALMENTE SE INCLUYE UN CAPÍTULO COMO UNA INTRODUCCIÓN A LA DETECCIÓN DE SEÑALES EN PRESENCIA DE RUIDO.

EL CONOCIMIENTO DEL CÁLCULO ELEMENTAL Y AVANZADO ES INDISPENSABLE PARA COMPRENDER EL ANÁLISIS DE FOURIER DESARROLLADO A LO LARGO DE ÉSTOS CAPÍTULOS.

QUEDA A CRITERIO DEL LECTOR LA APLICACIÓN DE ÉSTE ANÁLISIS EN PROBLEMAS GEOFÍSICOS ESPECÍFICOS YA SEAN SISMOLÓGICOS, GRAVIMÉTRICOS O DE CUALQUIER OTRO TIPO; ASI COMO SU HABILIDAD Y PERSPICACIA NECESARIAS EN LA UTILIZACIÓN PRÁCTICA DE ÉSTE PODEROSO MATEMÁTICO:

EL ANÁLISIS DE FOURIER.

MIGUEL ANGE AVARADO OMAÑA.

CONTENIDO.

PRÓLOGO. iv

CAPÍTULO I	APROXIMACIÓN DE FUNCIONES	1
1.1	APROXIMACIÓN POR SERIES DE TAYLOR	1
1.2	APROXIMACIÓN POLINOMIAL	2
1.3	ERRORES	5
1.4	APROXIMACIÓN USANDO FUNCIONES ORTOGONALES	10
1.5	POLINOMIOS DE LEGENDRE	14
1.6	EVALUACIÓN DEL ERRORE CUADRÁTICO MEDIO	16
1.7	APROXIMACIÓN CON SERIES FINITAS DE FOURIER.	20
CAPÍTULO II	INTRODUCCIÓN A ANÁLISIS DE FRECUENCIAS	25
2.1	SERIES DE FOURIER DE FUNCIONES PERIÓDICAS	25
	TEOREMA DE LA SERIE DE FOURIER	27
2.2	EVALUACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER	28
2.3	DIFERENTES FORMAS DE LA SERIE DE FOURIER Y SUS COEFICIENTES	30
2.4	CAMBIO DE INTERVALO	32
2.5	SUPERPOSICIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER	38
2.6	DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO	41
	TEOREMA DEL DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO.	43
2.7	PROPIEDADES DE SIMETRÍA DE CIERTAS FORMAS DE ONDA	44
	PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN PAR	44
	PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN IMPAR	46
	EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN ARBITRARIA EN TÉRMINOS DE SUS COMPONENTES PAR E IMPAR	47
	INTERACCIÓN DE FUNCIONES PARES E IMPARES	47
	SIMETRÍA DE MEDIA ONDA	50
	SIMETRÍA DE CUARTO DE ONDA	50
2.8	COEFICIENTES DE FOURIER DE FORMAS DE ONDA SIMÉTRICAS EJEMPLIFICANDO EL USO DE LAS PROPIEDADES DE SIMETRÍA	52
2.9	DIFERENCIACIÓN E INTERACCIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN (FUNCIÓN IMPULSO)	57
2.10	CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER POR MEDIO DE LA DERIVADA TREN DE IMPULSOS	60
2.11	SERIES DE FOURIER DE LAS DERIVADAS DE FUNCIONES DISCONTINUAS USO DE LOS IMPULSOS PARA EL CÁLCULO DE SERIES DE FOURIER DE ALGUNAS FORMAS DE ONDA	63
		64
		68
CAPÍTULO III	ESPECTROS DISCRETOS DE FRECUENCIA	70
3.1	ESPECTROS DE AMPLITUD Y FASE	70
	DESCRIPCIÓN DE UNA FORMA DE ONDA	72
	ESPECTROS DE FRECUENCIA 'COMPLEJOS'	72
3.2	LA FUNCIÓN SAMPLING (FUNCIÓN MUESTREO)	73
	SISTEMAS LINEALES	75
	FUNCIONES DEL SISTEMA	76
3.3	RELACION ENTRE LOS ESPECTROS DE LA FUENTE Y LOS DE LA RESPUESTA	77
3.4	TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN	78

3.5	FILTROS IDEALES	80
3.6	CONTENIDO DE POTENCIA DE UNA FORMA DE ONDA PERIÓDICA CÁLCULO DE POTENCIA EN RÉGIMEN PERMANENTE	82 84
3.7	CONTENIDO DE ENERGÍA Y POTENCIA EN UN RANGO DE FRECUENCIAS	86
3.8	TEOREMA DE MUESTREO. SEÑALES DE BANDA LIMITADA MUESTREO UNIFORME	88 89
3.9	ESPECTRO DE POTENCIA	89
CAPÍTULO IV ESPECTROS CONTINUOS: LA INTEGRAL DE FOURIER		91
4.1	ESPECTRO DE UNA SEÑAL PERIÓDICA CUANDO ϵ PERIÓDO CEECE	91
4.2	LA INTEGRAL DE FOURIER INTERPRETACION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER	93 98
4.3	DOS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER TRANSFORMADA DE FOURIER DE DERIVADAS DE MAYOR ORDEN	100 102
4.4	RELACION ENTRE LA TRANSF. DE FOURIER DE LA FUENTE Y LA SALIDA	102
4.5	EL PULSO RECTANGULAR Y SU TRANSFORMADA DE FOURIER	103
4.6	EL IMPULSO UNITARIO Y SU TRANSFORMADA DE FOURIER	105
4.7	TRANSFORMADA DE FOURIER DE CONSTANTES	108
4.8	EL ESPECTRO DE ESCALÓN UNITARIO	109
4.9	DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO Y LA FRECUENCIA DE LA TRANSF. DEF.	111
4.10	CAMBIO DE ESCALA EN EL TIEMPO, COMPRESIÓN EN LA FRECUENCIA.	114
4.11	TRANSFORMADA DE FOURIER Y SERIES DE FOURIER	115
4.12	DESIGUALDAD DE SCHWARTZ	116
CAPÍTULO V RESPUESTA DE SISTEMAS LINEALES - FILTROS IDEALES		118
5.1	CONVOLUCIÓN	118
5.2	EL TEOREMA DE PARSEVAL Y LA CONVOLUCIÓN	122
5.3	CONVOLUCION EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA	123
5.4	RESPUESTA DE SISTEMAS LINEALES	124
5.5	TRANSMISION SIN DISTORSIÓN	125
5.6	FILTROS IDEALES	127
5.7	RESPUESTA DE UN FILTRO IDEAL AL IMPULSO UNITARIO	128
5.8	CONCLUSIONES DE LA RESPUESTA A $\delta(t)$	130
5.9	RESPUESTA DE OTROS FILTROS IDEALES RELACIONADA CON UN FILTRO PASA-BAJA	131
5.10	RESPUESTA DE LOS SISTEMAS AL ESCALÓN UNITARIO	133
CAPÍTULO VI INTRODUCCIÓN A LA Detección DE SEÑALES EN PRESENCIA - DE RUIDO		135
6.1	MUESTREO DE SEÑALES EN EL TIEMPO	135
6.2	RECONSTRUCCIÓN DE LA SEÑAL A PARTIR DE LAS MUESTRAS UNIFORMES	139
6.3	TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER	139
6.4	TRANSFORMADA INVERSA DISCRETA DE FOURIER	141
6.5	PROCESAMIENTO DE SEÑALES DE TIEMPO LIMITADO	144
6.6	FORMAS DE ONDA NO COHERENTES PROPIEDAD DE SUPERPOSICION DE SEÑALES NO COHERENTES	144 146
6.7	FUNCIONES DE CORRELACIÓN FUNCION DE AUTO-CORRELACION	147 149
6.8	CONVOLUCION Y CORRELACION	
APÉNDICE A	FORMAS DE LA SERIE DE FOURIER	152
APÉNDICE B	RESUMEN DE LAS CONDICIONES DE SIMETRÍA	153
APÉNDICE C	PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER	155

CAPÍTULO I.

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES.

ALGUNAS SEÑALES QUE TIENEN DIFERENTE FORMA DE ONDA (VARIACIONES EN EL TIEMPO) NORMALMENTE TIENEN CIERTAS CARACTERÍSTICAS COMUNES QUE SON LAS LLAMADAS "COMPONENTES DE FRECUENCIA"; AUNQUE ES NECESARIO ACARAR QUE EN GENERAL LA FORMA DE ONDA NO ES CONOCIDA.

PARA EL CASO EN QUE LA FORMA DE ONDA ES CONOCIDA RESULTA QUE SU EXPRESIÓN ANALÍTICA NO LO ES, O BIEN, ES MUY COMPLICADA PARA SU ANÁLISIS. ES POR ESO QUE ENTONCES SE ACOSTUMBRA APROXIMARLA MEDIANTE EL USO DE FUNCIONES YA CONOCIDAS QUE SON MAS FÁCILES DE ANALIZAR.

EN ESTE PRIMER CAPÍTULO SE TRATARÁ LA APROXIMACIÓN DE FUNCIONES. POSTERIORMENTE SE RESTRINGIRÁ A SEÑALES O FUNCIONES PERIÓDICAS PARA LAS CUALES SE DESARROLLARÁ UN MÉTODO QUE LLEVARÁ AL "ANÁLISIS DE FRECUENCIA" DE LAS SEÑALES.

CABE ACARAR QUE EN LOS DESARROLLOS MATEMÁTICOS SE HARÁ REFERENCIA PRINCIPALMENTE A FUNCIONES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

ES IMPORTANTE TENER EN CUENTA QUE EN GENERAL ESTA TEORÍA SE PUEDE APLICAR A FUNCIONES DE CUALQUIER VARIABLE REAL.

1.1 APROXIMACIÓN POR SERIES DE TAYLOR:

UNA FUNCIÓN MONO-VALUADA QUE ES CONTINUA Y ADEMÁS TIENE DERIVADAS CONTINUAS, PUEDE ESCRIBIRSE DE LA SIGUIENTE FORMA: (POR TAYLOR)

$$f(t) = f(t_0) + \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0} (t-t_0) + \left. \frac{d^2f}{dt^2} \right|_{t=t_0} \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + \left. \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}} \right|_{t=t_0} \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(t) \quad (1.1)$$

ASUMIENDO QUE EL RESIDUO $R_n(t)$ TIENDE A CERO CUANDO $[n]$ TIENDE A INFINITO

$[R_n(t) \rightarrow 0 ; n \rightarrow \infty]$ ES QUERER DECIR QUE SE PUEDE ESCRIBIR UNA FUNCIÓN EN TÉRMINOS DE SU VALOR EN UN INSTANTE PARTICULAR Y DE LOS VALORES DE SUS DERIVADAS EN ESE INSTANTE PARTICULAR.

LA EXPANSIÓN DE UNA SEÑAL POR SERIES DE TAYLOR PUEDE RELACIONARSE AL ANÁLISIS DEL SISTEMA MEDIANTE EL TEOREMA DE FUENTES RELACIONADAS EN EL CUAL SE ESTABLECE QUE:

- SI SE CONOCE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA A UNA SEÑAL DE ENTRADA QUE ES UNA CONSTANTE, LA RESPUESTA A CUALQUIER FUNCIÓN $[f(t)]$ PUEDE OBTENERSE POR INTEGRACIÓN REPETITIVA.

Por lo tanto, es posible aproximar la respuesta de un sistema hallando la respuesta del sistema a una función escalón, a la parábola, etc.; de modo que la expresión (1.1) puede ser aproximada por:

$$f_a(t) = f(t_0) + \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0} (t-t_0) + \left. \frac{d^2f}{dt^2} \right|_{t=t_0} \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + \left. \frac{d^{n-2}f}{dt^{n-2}} \right|_{t=t_0} \frac{(t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \left. \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}} \right|_{t=t_0} \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \dots \dots \dots (1.2)$$

Por otro lado tenemos que, para analizar la utilidad de la función aproximante $[f_a(t)]$ es necesario estudiar el error, el cual se definirá como:

$$e(t) = [f(t) - f_a(t)] \dots \dots \dots (1.3)$$

que en el caso de la serie de Taylor (ver expresión 1.1) estará dado por:

$$R_n(t) = [f(t) - f_a(t)] \dots \dots \dots (1.4)$$

se puede demostrar que:

$$R_n(t) = \left. \frac{d^n f}{dt^n} \right|_{t=t_1} \frac{(t-t_0)^n}{n!}; \quad \forall t_1 \in (t_0, t) \dots \dots \dots (1.5)$$

donde t_1 depende de t y t_0 .

A partir de la expresión anterior, para un n fijo, el error aumenta cuando la diferencia $(t-t_0)$ se incrementa. Por lo tanto, se puede deducir que la aproximación polinomial de Taylor es útil sólo en la vecindad de $[t_0]$, o bien, para intervalos donde $f(t)$ varía lentamente de manera que sus derivadas son pequeñas.

1.2 APROXIMACIÓN POLINOMIAL.-

El polinomio de Taylor es una aproximación de la forma:

$$f(t) \approx f_a(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2 \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + a_{n-1} \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \dots \dots \dots (1.6)$$

de la expresión (1.2) se puede ver que los coeficientes, a_j , son determinados a través de las derivadas de $f(t)$ en el instante $[t_0]$; es decir

$$a_j = \left. \frac{d^j f}{dt^j} \right|_{t=t_0}$$

EXISTE OTRA FORMA DE DETERMINAR LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO QUE SERA LA APROXIMACION DE LA FUNCION.

EJEMPLO: SEA LA FUNCION (FIGURA [1])

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \text{ --- --- --- --- --- (1.7)}$$

LA CUAL SE APROXIMARA EN EL INTERVALO $t \in [-1, 1]$ POR EL POLINOMIO

$$f_2(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2; \quad \forall t \in [-1, 1] \text{ --- --- --- --- --- (1.8)}$$

EL PROBLEMA CONSISTE EN DETERMINAR LAS CONSTANTES a_0, a_1 Y a_2 DE MANERA QUE $f_2(t)$ SEA UNA "BUENA APROXIMACION".

UN CRITERIO PARA QUE ESA APROXIMACION SEA BUENA, CONSISTE EN IMPONER LA SIGUIENTE CONDICION: QUE $f(t)$ Y $f_2(t)$ TENGAN UN NUMERO FINITO DE PUNTOS EN COMUN.

SI SE DESEA n DE ESOS PUNTOS EN COMUN, LA APROXIMACION DEBERA SER DE ORDEN $(n-1)$; ES DECIR, EL GRADO DEL POLINOMIO APROXIMANTE SERA DE $(n-1)$.

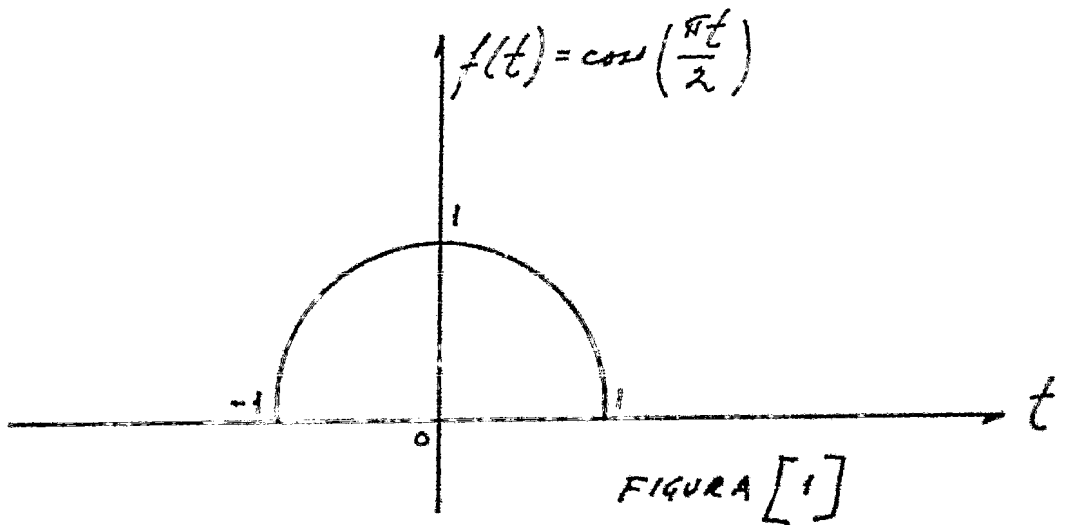
EN LA ECUACION (1.8) EL GRADO DEL POLINOMIO CORRESPONDIENTE A LA FUNCION APROXIMANTE ES DE $(n-1) = 2$, POR LO QUE ES PRECISO QUE SEAN ESPECIFICADOS TRES PUNTOS EN COMUN, ES DECIR, $n = 3$.

TOMESE ARBITRARIAMENTE LAS CONDICIONES:

$$f_2(t) = f(t) \text{ EN } t = -1, 0, 1 \text{ --- --- --- --- --- (1.9)}$$

ENTONCES

$$\left. \begin{aligned} f_2(-1) = f(-1) &= \cos\left.\frac{\pi t}{2}\right|_{t=-1} = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \text{CERO} = a_0 - a_1 + a_2 \\ f_2(0) = f(0) &= \cos\left.\frac{\pi t}{2}\right|_{t=0} = \cos(0) = \text{UNO} = a_0 \\ f_2(1) = f(1) &= \cos\left.\frac{\pi t}{2}\right|_{t=1} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{CERO} = a_0 + a_1 + a_2 \end{aligned} \right\} (1.10)$$



RESOLVIENDO EL SISTEMA (1.10):

$$\begin{aligned} [a_0=1] \quad a_1 &= a_0 + a_2 \\ -a_1 &= a_0 + a_2 \\ \hline 0 &= 2a_0 + 2a_2 \Rightarrow a_2 = -a_0 = -1 \end{aligned}$$

$$[a_2=-1] \quad a_1 = 1 - 1 = \text{CERO}$$

[$a_1=0$] luego, por las condiciones propuestas en (1.9)

$$f_a(t) = [1 - t^2] \text{ --- --- --- --- --- (1.11)}$$

PARA ANALIZAR LA CALIDAD DE LA APROXIMACION, SE HARÁ USO DE LA EXPRESION (1.3) EN DONDE SE DEFINIÓ EL ERROR $\epsilon(t)$ COMO LA DIFERENCIA ENTRE $f(t)$ Y $f_a(t)$ ES DECIR,

$$\epsilon(t) = [f(t) - f_a(t)]$$

DE MODO QUE PARA EL EJEMPLO QUE SE ESTÁ DESARROLLANDO

$$\epsilon(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - (1 - t^2) \text{ --- --- --- --- --- (1.12)}$$

A CONTINUACION SE GRAFICA EL ERROR:

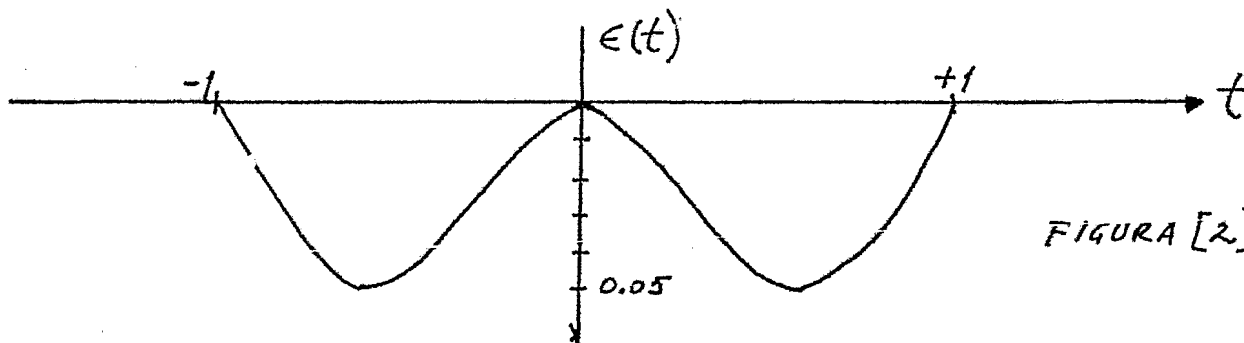


FIGURA [2].

EJERCICIO 1.- CALCULAR $f_a(t)$ PARA $t = -1/2, 0, 1/2$ USANDO $f(t) = \cos(\frac{\pi t}{2})$

SOLUCION: $f_a(t) = f(t) \quad t = -1/2, 0, 1/2$

$$f_a(-1/2) = f(1/2) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0.707107 = a_0 - a_1\left(\frac{1}{2}\right) + a_2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$f_a(0) = f(0) = \cos(0) = \text{UNO} = a_0$$

$$f_a(1/2) = f(1/2) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.707107 = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4}$$

luego, RESOLVIENDO EL SISTEMA

$$[a_0=1] \quad \frac{a_1}{2} = a_0 + \frac{a_2}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$-\frac{a_1}{2} = a_0 + \frac{a_2}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{CERO} = 2a_0 + \frac{a_2}{2} - \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a_2}{2} = \sqrt{2} - 2a_0 = \sqrt{2} - 2$$

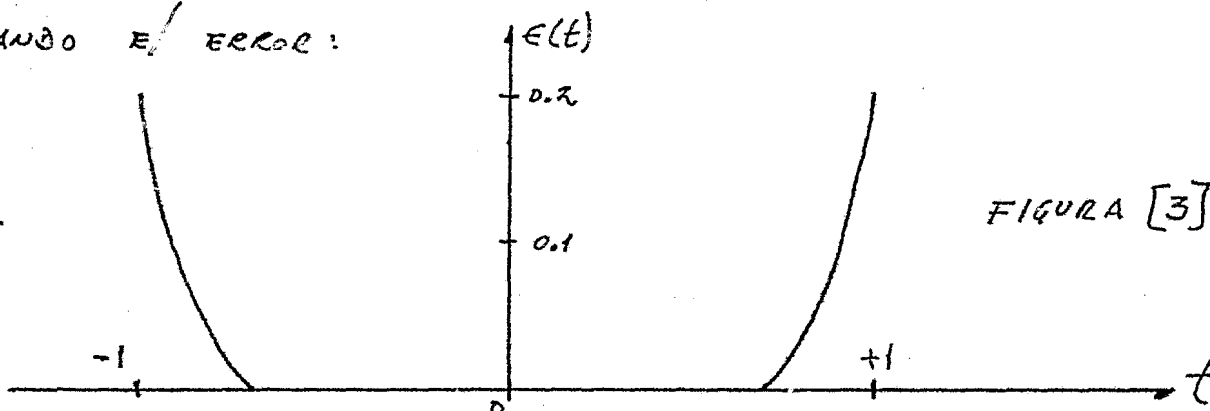
$$[a_2 = 2\sqrt{2} - 4] \quad \frac{a_1}{2} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \text{CERO}$$

$$[a_1 = \text{CERO}] \quad \text{ASÍ QUE } f_2(t) = [1 + (2\sqrt{2} - 4)t^2]$$

EL ERROR SERÁ:

$$E(t) = f(t) - f_2(t) = \cos \frac{\pi t}{2} - [1 + (2\sqrt{2} - 4)t^2]$$

GRAFICANDO EL ERROR:



SÓLO SI SE ESTÁ INTERESADO EN TRES PUNTOS, EL MÉTODO DESCRITO PUEDE SER ADECUADO. SIN EMBARGO, MUCHAS VECES SE DESEA QUE LA APROXIMACIÓN SEA BUENA EN TODO EL INTERVALO.

EN ESTE ÚLTIMO CASO, NO HAY DETERMINADOS PUNTOS DE COINCIDENCIA Y SERÁ NECESARIO OTROS CRITERIOS PARA JUZGAR LA CALIDAD DE LA APROXIMACIÓN.

1.3 ERRORES.-

COMO SE DIJO ANTERIORMENTE, CUANDO UNA FUNCIÓN $f(t)$ ES APROXIMADA POR $f_2(t)$, LA DIFERENCIA $[f(t) - f_2(t)]$ ES CONOCIDA COMO EL ERROR $E(t)$, O SEA:

$$E(t) = f(t) - f_2(t) \quad \text{--- (1.3)}$$

UN CRITERIO QUE PODRÁ SER UTILIZADO PARA JUZGAR LA CALIDAD DE LA APROXIMACIÓN PODRÁ SER EL "ERROR PROMEDIO" EN EL INTERVALO CONSIDERADO.

EN PARTICULAR SE PUEDE HALLAR EL ERROR PROMEDIO CONOCIDO COMO $[E_0]$ ASÍ:

$$E_0 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt \quad \text{--- (1.13)}$$

DONDE EL INTERVALO VA DE t_1 A t_2 .

SUSTITUYENDO (1.3) EN (1.13), EL ERROR PROMEDIO SERÁ:

$$E_0 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - f_2(t)] dt; \text{ E INTEGRANDO POR PARTES}$$

$$E_0 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt - \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) dt \quad \text{--- (1.14A)}$$

$$E_0 = \left[f(t)_{\text{PROMEDIO}} - f_a(t)_{\text{PROMEDIO}} \right] \dots \dots \dots (1.14 B)$$

LA POBRE UTILIDAD DE ESTE CRITERIO ES EVIDENTE, ES DECIR, EN TANTO EL PROMEDIO DE LA FUNCION $f(t)$ SEA IGUAL AL PROMEDIO DE LA FUNCION APROXIMANTE $f_a(t)$, EL ERROR PROMEDIO $[E_0]$ SERA CERO.

PUESTO QUE EN EL PROCESO DE PROMEDIAR, ERRORES POSITIVOS CANCELAN ERRORES NEGATIVOS, EN GENERAL, EL ERROR PROMEDIO NO ES UN BUEN CRITERIO PARA JUZGAR LA APROXIMACION.

UN METODO PARA ELIMINAR EL QUE SE CANCELAN ERRORES POSITIVOS Y NEGATIVOS, ES USAR COMO CRITERIO NO AL ERROR PROMEDIO $[E_0]$ SINO EL "ERROR CUADRATICO MEDIO" DEFINIDO COMO:

$$E^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [e(t)]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - f_a(t)]^2 dt \dots \dots \dots (1.15)$$

EL ERROR CUADRATICO MEDIO $[E^2]$, O BIEN [ECM] ES POSIBLE USARLO NO SOLO COMO CRITERIO PARA JUZGAR LA CALIDAD DE LA APROXIMACION CUANDO ESTA YA HA SIDO CALCULADA; SINO COMO UNA FUNCION QUE PUEDE SER USADA PARA DEDUCIR UNA APROXIMACION DE LA FORMA DESEADA.

VOLVIENDO AL EJEMPLO QUE SE HA VENIDO SIGUIENDO DESDE LA EXPRESION (1.7) DONDE LA FUNCION HA SIDO APROXIMADA POR LA FUNCION APROXIMANTE DADA POR LA EXPRESION (1.8)

$$f_a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 ; \forall t \in [-1, 1]$$

LA FORMULA GENERADA PARA EL ERROR EN ESTE CASO ES, BASANDONOS EN LA EXPRESION (1.3)

$$e(t) = [f(t) - (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)] ; \forall t \in [-1, 1] \dots \dots \dots (1.16)$$

MIENTRAS QUE EL [ECM] ESTARA DADO POR:

$$E^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f(t)]^2 dt - \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) f(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)^2 dt \dots \dots \dots (1.17)$$

AHORA, LA PREGUNTA QUE SE LE ES: DESPUES DE DECIDIR USAR CERO, PRIMERA Y SEGUNDA POTENCIAS EN EL POLINOMIO, ¿CÓMO SE ESCOGERAN a_0 , a_1 y a_2 DE MANERA QUE EL [ECM] SEA MINIMO?

LA RESPUESTA ES: IMPONER LAS CONDICIONES SIGUIENTES

$$\frac{\partial E^2}{\partial (a_k)} = \text{CERO} ; \quad \frac{\partial^2 [E^2]}{\partial (a_k)^2} > \text{CERO} ; \quad \forall k=0,1,2 \quad \text{--- (1.18)}$$

RESOLVIENDO PUES PARA LA ECUACION (1.17) SE OBSERVA QUE LA PRIMERA INTEGRAL ES INDEPENDIENTE DE LAS a 's ; ESTO ES

$$\frac{\partial}{\partial (a_k)} \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f(t)]^2 dt \right] = \text{CERO} \Rightarrow \frac{\partial [f(t)]^2}{\partial (a_k)} = 0$$

DESARROLLANDO LA SEGUNDA INTEGRAL DE (1.17) QUEDA:

$$\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) f(t) dt = a_0 \int_{-1}^1 f(t) dt + a_1 \int_{-1}^1 t f(t) dt + a_2 \int_{-1}^1 t^2 f(t) dt ; \text{ DE TAL}$$

MANERA QUE AL IMPONER LA PRIMERA CONDICION DE LA EXPRESION (1.18) QUEDA:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial [E^2]}{\partial (a_0)} &= - \int_{-1}^1 f(t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial (a_0)} \left[\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)^2 dt \right] \\ \frac{\partial [E^2]}{\partial (a_1)} &= - \int_{-1}^1 t f(t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial (a_1)} \left[\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)^2 dt \right] \\ \frac{\partial [E^2]}{\partial (a_2)} &= - \int_{-1}^1 t^2 f(t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial (a_2)} \left[\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)^2 dt \right] \end{aligned} \right\} \text{--- (1.19)}$$

INTERCAMBIANDO EL ORDEN DE INTEGRACION Y DIFERENCIACION EN EL ÚLTIMO TERMINO DE LA EXPRESION (1.19)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (a_0)} \left[\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)^2 dt \right] &= 2 \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) dt = 4 a_0 + \frac{4}{3} a_2 \\ \frac{\partial}{\partial (a_1)} \left[\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)^2 dt \right] &= 2 \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) t dt = \frac{4}{3} a_1 \\ \frac{\partial}{\partial (a_2)} \left[\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)^2 dt \right] &= 2 \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) t^2 dt = \frac{4}{3} a_0 + \frac{4}{5} a_2 \end{aligned} \right\} \text{--- (1.20)}$$

SUSTITUYENDO (1.20) EN (1.19) E IGUALANDO A CERO QUEDA:

$$\left. \begin{aligned} 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 &= \int_{-1}^1 f(t) dt \\ \frac{2}{3}a_1 &= \int_{-1}^1 t f(t) dt \\ \frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{5}a_2 &= \int_{-1}^1 t^2 f(t) dt \end{aligned} \right\} \text{----- (1.21)}$$

LAS SEGUNDAS DERIVADAS SON:

$$\frac{\partial^2 [E^2]}{\partial (a_0)^2} = 2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 [E^2]}{\partial (a_1)^2} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 [E^2]}{\partial (a_2)^2} = \frac{2}{5} \quad \text{TODAS POSITIVAS.}$$

Por lo tanto, la solución de las ecuaciones simultáneas expresadas en (1.21) da los valores de a_0 , a_1 y a_2 para la aproximación de $f(t)$ de la forma $f_a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ con el "MINIMO ERROR CUADRÁTICO MEDIO" [MECM] en $t \in [-1, 1]$.

EJERCICIO 2.- PARA EL EJEMPLO DE LA EXPRESION (1.7) EN QUE $f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ y utilizando los siguientes resultados

$$\int_{-1}^1 t^n \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt = \begin{cases} \frac{4}{\pi} & \forall n=0 \\ \text{CERO} & \forall n=1 \\ \frac{4}{\pi^3} (\pi^2 - 8) & \forall n=2 \end{cases}$$

obtener los valores a_0 , a_1 y a_2 para la aproximación de $f(t)$ con el [MECM].

SOLUCION: EL SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS EXPRESADAS POR (1.21) QUEDA:

$$2a_0 + \frac{2}{3}a_2 = \frac{4}{\pi}$$

$$\frac{2}{3}a_1 = \text{CERO}$$

$$\frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{5}a_2 = \left(\frac{4}{\pi^3}\right)(\pi^2 - 8) \quad , \quad \text{Y RESOLVIENDO}$$

$$[a_1 = \text{CERO}]$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{5}a_2 &= \frac{4}{\pi^3}(\pi^2 - 8) \\ \frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{9}a_2 &= \frac{4}{3\pi} \end{aligned} \right\} \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9} \right) a_2 = 4 \left[\frac{1}{\pi^3}(\pi^2 - 8) - \frac{1}{3\pi} \right]$$

$$\frac{8}{45} a_2 = 4 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{8}{\sqrt{x^3}} \right) - \frac{1}{3\sqrt{x}} \right] = \frac{4}{\sqrt{x}} \left[1 - \frac{8}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{3} \right] = \frac{4}{\sqrt{x}} \left[\frac{2}{3} - \frac{8}{\sqrt{x^2}} \right]$$

$$a_2 = \frac{45(4)}{8\sqrt{x}} \left[\frac{2}{3} - \frac{8}{\sqrt{x^2}} \right] = \frac{45}{2\sqrt{x}} \left[\frac{2}{3} - \frac{8}{\sqrt{x^2}} \right] = \left[\frac{90}{6\sqrt{x}} - \frac{180}{\sqrt{x^3}} \right]$$

FINALMENTE
$$a_2 = \left[\frac{15}{\sqrt{x^3}} (\sqrt{x^2} - 12) \right]$$

$$a_0 = \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3} a_2 \right) \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3} a_2 = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{x^3}} (\sqrt{x^2} - 12) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{60}{\sqrt{x^3}}$$

$$a_0 = \frac{3}{\sqrt{x^3}} (20 - \sqrt{x^2}) \quad a_0 = \left[\frac{3}{\sqrt{x^3}} (20 - \sqrt{x^2}) \right]$$

ASÍ QUE LA FUNCION APROXIMANTE SERA

$$f_2(t) = \left[\frac{3}{\sqrt{x^3}} (20 - \sqrt{x^2}) + \frac{15}{\sqrt{x^3}} (\sqrt{x^2} - 12) t^2 \right]$$

CON ESTE PROCEDIMIENTO SE IMPUSIERON LAS CONDICIONES DE APROXIMAR CON TRES TERMINOS $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

DESPUES DE QUE LOS COEFICIENTES HAN SIDO DETERMINADOS, EL VALOR DE - "ERROR CUADRÁTICO MEDIO" [ECM] COMPARADO CON EL "MINIMO ERROR CUADRÁTICO MEDIO" [MECM] DE $f(t)$; O [E] COMPARADO CON EL "ERROR CUADRÁTICO MEDIO" DE $f(t)$; DA UN CRITERIO NUMÉRICO CAPAZ DE JUZGAR LA CALIDAD DE LA APROXIMACION.

EN EL EJEMPLO 2, EL "VALOR MEDIO CUADRÁTICO" [E] DE $f(t)$ ES $E = \frac{1}{2}$ Y EL [ECM] = 0.017 DE MANERA QUE SI

$$E = 100\% \quad \text{ENTONCES} \quad \frac{1}{2} : 100\% :: 0.017 : X, \quad \text{DE DONDE}$$

$$X = \left[\frac{0.017 \times 100}{0.5} \right] = 3.4\%$$

ENTONCES, EL [ECM] SOBRE EL INTERVALO ES DE 3.4% DEL VALOR DE [E] DONDE [E] ES EL "VALOR MEDIO CUADRÁTICO".

CABE HACER LA ACACACION DE QUE SOLO SE ESTUDIO EL [ECM] O PROMEDIO Y NO SE HACE INTENTO ALGUNO DE QUE COINCIDAN CIERTOS PUNTOS O PENDIENTES, ETC.

MEJORAMIENTO DE LA APROXIMACIÓN.-

SUPÓNGASE QUE AL CALCULAR EL [ECM] CON LA APROXIMACIÓN HECHA, RESULTA SER MUY GRANDE. SI SE DESEA CONSERVAR LA FORMA POLINOMIAL, LO QUE SE HACE ES AUMENTAR TÉRMINOS EN EL POLINOMIO. POR EJEMPLO:

$$\text{SEA } f_a(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4$$

EXAMINANDO EL PROCEDIMIENTO ANTERIOR SE NOTA QUE LOS COEFICIENTES SE OBTIENEN RESOLVIENDO UN SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS DE MANERA QUE SI SE DESEA MEJORAR LA APROXIMACIÓN AUMENTANDO LOS TÉRMINOS $[b_3 t^3 + b_4 t^4]$ A LA PRIMERA APROXIMACIÓN $[a_0 + a_1 t + a_2 t^2]$, NO ES POSIBLE DEBIDO A QUE HABRÁ QUE RESOLVER UN NUEVO SISTEMA DE ECUACIONES PARA OBTENER LAS b_i YA QUE $a_0 \neq b_0$, $a_1 \neq b_1$ Y $a_2 \neq b_2$ EN ESTE CASO.

A CONTINUACIÓN SE PRESENTA UN MÉTODO EN EL QUE LOS COEFICIENTES SON DETERMINADOS INDEPENDIENTEMENTE UNO DE OTRO SIN LA NECESIDAD DE RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS.

1.4 APROXIMACIÓN USANDO FUNCIONES ORTOGONALES.-

VÉASE EL SIGUIENTE PROBLEMA: LA FUNCIÓN $f(t)$ VA A SER APROXIMADA EN EL INTERVALO $t \in [t_1, t_2]$ EN EL QUE $t_2 = [t_1 + T]$, DONDE, POR CONSECUENCIA $t \in [t_1, t_1 + T]$.

USANDO LA SERIE FINITA

$$f_a(t) = [A_0 g_0(t) + A_1 g_1(t) + A_2 g_2(t) + \dots + A_n g_n(t)] \quad (1.22)$$

DONDE $[g_k(t)]$ ES EL k -ÉSIMO MIEMBRO DE UNA CLASE DE FUNCIONES.

LOS COEFICIENTES $[A_k]$ SERÁN ESCOGIDOS POR EL "MINIMO ERROR CUADRÁTICO MEDIO" [MECM].

LAS ECUACIONES PARA LAS A_i TENDRÁN QUE SER INDEPENDIENTES. PENSANDO UN POCO EN EL PROBLEMA AQUI PLANTEADO, SE VE QUE LAS FUNCIONES $[g_k(t)]$ TENDRÁN CIERTAS RESTRICCIONES.

COMPARANDO LA EXPRESIÓN (1.22) CON LA (1.9) SE NOTARÁ QUE $[g_k(t) = t^k]$. LOS COEFICIENTES A_i SON LAS SOLUCIONES DE UN SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS, Y POR LO TANTO, INDEPENDIENTES.

PARA ESTUDIAR EL PROBLEMA PLANTEADO, SE GENERALIZARÁ EL PROCEDIMIENTO USANDO EL EJEMPLO DE LA SECCIÓN 1.3, A PARTIR DE LA EXPRESIÓN PARA EL [ECM] EN EL INTERVALO $t \in [t_1, t_2]$.

AHORA BIEN:

$$E^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - f_a(t)]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt \right] \text{----- (1.23)}$$

EN DONDE A LA PRIMERA INTEGRAL

$\left[\int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt \right]$ SE LE CONOCE COMO "CONTENIDO CUADRÁTICO DE $f(t)$ " EN EL INTERVALO $t \in [t_1, t_2]$.

ES IMPORTANTE HACER NOTAR QUE TAMBIEN SE LE CONOCE COMO "CONTENIDO DE POTENCIA DE $f(t)$ " $\forall t \in [t_1, t_2]$ ----- (1.23A)

Y A LA TERCERA INTEGRAL

$\left[\int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt \right]$ COMO EL "CONTENIDO CUADRÁTICO DE $f_a(t)$ " PARA $t \in [t_1, t_2]$.

PARA MINIMIZAR EL $[E^2] = [ECM]$, HAY QUE REFERIRSE A LAS A_k 'S COMO LA VARIABLE INDEPENDIENTE, Y APLICANDO LAS CONDICIONES DE LA EXPRESIÓN (1.18) EN QUE $\left[\frac{\partial [E^2]}{\partial (A_k)} = \text{CERO} \right]$ SE PROCEDERÁ A RESOLVER.

PUES BIEN, AL RESOLVER LA ECUACION (1.23) SE OBSERVA QUE LA PRIMERA INTEGRAL (EL CONTENIDO CUADRÁTICO DE $f(t)$) ES INDEPENDIENTE DE LAS A_k 'S, POR LO TANTO

$$\frac{\partial [E^2]}{\partial (A_k)} = \frac{\partial}{\partial A_k} \left[\frac{-2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt \right] \text{----- (1.24)}$$

SUSTITUYENDO (1.22) EN LA PRIMERA INTEGRAL DE (1.24) SE TIENE

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt = A_0 \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_0(t) dt + A_1 \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_1(t) dt + \dots + A_n \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_n(t) dt \text{----- (1.24A)}$$

Y DE ESTA FORMA

$$\frac{\partial}{\partial A_k} \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt = \left[\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_k(t) dt \right] \text{----- (1.25)}$$

SUSTITUYENDO (1.22) EN LA SEGUNDA INTEGRAL DE (1.24) E INTERCAMBIANDO EL ORDEN DE INTEGRACION Y DIFERENCIACION

$$\frac{\partial}{\partial A_j} \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=0}^n A_k g_k(t) \right)^2 dt \right] = 2 \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=0}^n A_k g_k(t) \right) g_j(t) dt ; j = 0, 1, 2, \dots, n$$

O SEA

$$\frac{\partial}{\partial A_k} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [A_0 g_0(t) + A_1 g_1(t) + A_2 g_2(t) + \dots + A_k g_k(t) + \dots + A_n g_n(t)]^2 dt \right\} =$$

$$= 2 \int_{t_1}^{t_2} [A_0 g_0(t) + A_1 g_1(t) + A_2 g_2(t) + \dots + A_k g_k(t) + \dots + A_n g_n(t)] g_k(t) dt \quad \dots \quad (1.26)$$

USANDO LAS ECUACIONES (1.25) y (1.26) EN (1.24) E IGUALANDO $\left[\frac{\partial E^2}{\partial A_k} = \text{CERO} \right]$ SE TIENEN LAS (n+1) ECUACIONES SIMULTANEAS CORRESPONDIENTES DADO QUE $k=0, 1, \dots, n$.

ASI PUES, LA EXPRESION (1.24) SE REPRESENTA COMO:

$$\frac{\partial E^2}{\partial A_k} = \frac{-2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_k(t) dt + \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [A_0 g_0(t) + \dots + A_k g_k(t) + \dots + A_n g_n(t)] g_k(t) dt = \text{CERO}$$

POR OTRA PARTE SE TIENE QUE AL ESTAR IGUALADA A CERO, LA PRIMERA PARTE SE IGUALARA A:

$$\frac{-2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_k(t) dt = \frac{-2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [A_0 g_0(t) + \dots + A_k g_k(t) + \dots + A_n g_n(t)] g_k(t) dt$$

DE DONDE SE DEDUCE QUE

$$A_0 \int_{t_1}^{t_2} g_0(t) g_k(t) dt + \dots + A_k \int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2 dt + \dots + A_n \int_{t_1}^{t_2} g_n(t) g_k(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_k(t) dt \quad \dots \quad (1.27)$$

LA SOLUCION DE LAS (n+1) ECUACIONES SIMULTANEAS REPRESENTADAS POR LA EXPRESION (1.27) RESULTA DE LOS (n+1) VALORES $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ PARA LOS CUALES LA ECUACION (1.22) APROXIMA A LA FUNCION $f(t)$ CON EL [MECM]

ASI PUES, SI SE REPRESENTA EL CONTENIDO CUADRATICO $[g_k(t)] \forall t \in [t_1, t_2]$

$$\text{POR} \quad \int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2 dt = [G_{kk}] \quad \dots \quad (1.28)$$

E IMPONIENDO LAS CONDICIONES SIGUIENTES

$$\int_{t_1}^{t_2} g_0(t) g_k(t) dt = \text{CERO} \quad ; \quad k \neq 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_1(t) g_k(t) dt = \text{CERO} \quad ; \quad k \neq 1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_2(t) g_k(t) dt = \text{CERO} \quad ; \quad k \neq 2$$

$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$
y asi sucesivamente

$$\int_{t_1}^{t_2} g_j(t) g_k(t) dt = \text{CERO} \quad , \quad k \neq j \quad ; \quad \text{ES DECIR}$$

$$[G_{kj}] = \int_{t_1}^{t_2} g_k(t) g_j(t) dt = [G_{kj} \delta_{kj}] \quad (1.29)$$

QUE ES LA "CONDICION DE ORTOGONALIDAD", EN DONDE $[\delta_{kj}]$ ES LA LLAMADA "DELTA DE KRONECKER" CUYAS PROPIEDADES SON:

$$\delta_{kj} = \begin{cases} \text{CERO} & ; k \neq j \\ \text{UNO} & ; k = j \end{cases} \quad (1.30)$$

ENTONCES, LAS ECUACIONES REPRESENTADAS POR (1.27) YA NO SERAN SIMULTANEAS, SINO QUE

$$A_k \int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_k(t) dt$$

DE TAL FORMA QUE USANDO LA DEFINICION DE $[G_{kk}]$ DE LA EXPRESION (1.28), CADA A_k ES DETERMINADA INDEPENDIENTEMENTE POR LA ECUACION:

$$A_k = \left[\frac{1}{G_{kk}} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_k(t) dt \right] \quad (1.31)$$

AHORA BIEN, CUANDO UN CONJUNTO DE FUNCIONES TALES COMO $g_0(t), g_1(t), \dots, g_n(t)$ TIENEN LA PROPIEDAD DEFINIDA EN LA ECUACION (1.29) SE DICE QUE SON ORTOGONALES UNA CON RESPECTO A CADA UNA DE LAS DEMAS EN EL INTERVALO $t \in [t_1, t_2]$.

SI $g_0(t) + g_1(t) + g_2(t) + \dots + g_n(t)$ SON ORTOGONALES EN EL INTERVALO $t \in [t_1, t_2]$, ENTONCES LA FUNCION $f(t)$ PUEDE SER APROXIMADA POR $f_0(t)$ EN ESE INTERVALO CON EL [MECM] DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$f_0(t) = [A_0 g_0(t) + A_1 g_1(t) + A_2 g_2(t) + \dots + A_n g_n(t)]$$

TAL COMO EN LA EXPRESION (1.22) DONDE

$$A_0 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_0(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} [g_0(t)]^2 dt}$$

$$A_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_1(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} [g_1(t)]^2 dt}$$

$$A_2 = \left[\frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} [g_2(t)]^2 dt} \right]$$

⋮
y así sucesivamente

$$A_k = \left[\frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_k(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2 dt} \right] \text{----- (1.32)}$$

QUE COMO PUEDE VERSE, DE ACUERDO A (1.28), ENTONCES (1.32) ES IGUAL A (1.31).

ES IMPORTANTE AÑADIR QUE LAS FUNCIONES SENUSOIDALES FORMAN UN CONJUNTO ORTOGONAL, DADO QUE CUMPLEN CON LA CONDICIÓN DE ORTOGONALIDAD ESTABLECIDA EN LA EXPRESIÓN (1.29)

UNO DE LOS OBJETIVOS DE ESTA DISCUSIÓN ES INTRODUCIR LA APROXIMACIÓN USANDO FUNCIONES SENUSOIDALES; SIN EMBARGO SE CONTINUARÁ CON ESTO UTILIZANDO LA FORMA POLINOMIAL CON FUNCIONES QUE FORMAN UN CONJUNTO ORTOGONAL.

1.5 POLINOMIOS DE LEGENDRE.-

SI LA FUNCIÓN $f(t)$ VA A SER APROXIMADA POR UN POLINOMIO y TIENE LA FORMA COMO EN LA EXPRESIÓN (1.22)

$$f_2(t) = [A_0 g_0(t) + A_1 g_1(t) + \text{-----} + A_n g_n(t)]$$

ENTONCES ES NECESARIO QUE CADA UNA DE LAS FUNCIONES $g_0(t), g_1(t), g_2(t), g_3(t) \dots g_n(t)$ SEA UN POLINOMIO.

AHORA, SI SE IMPONEN LAS CONDICIONES:

- 1) $g_n(t)$ ES UN POLINOMIO DE n -ÉSIMO GRADO, ENTONCES

$$g_0(t) = a_{00}$$

$$g_1(t) = a_{01} + a_{11}t$$

$$g_2(t) = a_{02} + a_{12}t + a_{22}t^2$$

⋮
⋮
⋮
⋮
⋮
y así sucesivamente

$$g_n(t) = a_{0n} + a_{1n}t + a_{2n}t^2 + a_{3n}t^3 + \dots + a_{nn}t^n$$

2) LAS FUNCIONES $g_k(t)$ FORMAN UN CONJUNTO ORTOGONAL EN EL INTERVALO $t \in [t_1, t_2]$ DONDE LA APROXIMACIÓN TENDRÁ EL [MECM].

LOS POLINOMIOS QUE SATISFACEN LAS CONDICIONES 1) Y 2) ANTERIORES, EN EL INTERVALO $t \in [-1, 1]$ SON LOS LLAMADOS POLINOMIOS DE LEGENDRE.

SE ESTABLECE SIN PROBAR QUE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE LEGENDRE $\left[(1-t^2) \frac{d^2}{dt^2} P_n(t) - 2t \frac{d}{dt} P_n(t) + n(n+1) P_n(t) = \text{CERO} \right]$ SON POLINOMIOS DE LA FORMA:

$$\left. \begin{aligned} P_0(t) &= 1 \\ P_1(t) &= t \\ P_2(t) &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \\ P_3(t) &= \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \\ P_4(t) &= \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8} \end{aligned} \right\} \text{--- --- --- --- (1.33)}$$

LOS CUALES SON CONOCIDOS COMO POLINOMIOS DE LEGENDRE, DONDE EL n -ÉSIMO MIEMBRO ESTÁ DADO POR LA FÓRMULA DE RODRIGUEZ:

$$P_n(t) = \left[\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n \right] \text{--- --- --- --- (1.34)}$$

TALES POLINOMIOS FORMAN UN CONJUNTO ORTOGONAL EN EL INTERVALO $t \in [-1, 1]$, ES DECIR:

$$\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \left[\frac{2}{2n+1} \delta_{mn} = \begin{cases} \text{CERO} & ; m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & ; m = n \end{cases} \right] \text{--- --- --- (1.35)}$$

EJEMPLO 3.- APROXIMAR LA FUNCION $f(t) = \cos \frac{\pi t}{2}$ EN EL INTERVALO $t \in [-1, 1]$ POR LA SUMA DE TRES POLINOMIOS DE LEGENDRE.

SOLUCIÓN: $f_2(t) = A_0 P_0(t) + A_1 P_1(t) + A_2 P_2(t)$

$$f_2(t) = A_0 + A_1 t + A_2 \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right)$$

USANDO LAS ECUACIONES (1.32) Y (1.35) SE TIENE:

$$A_k = \frac{\int_{-1}^1 f(t) P_k(t) dt}{\int_{-1}^1 [P_k(t)]^2 dt} = \left[\frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_k(t) dt \right]$$

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt ; \quad A_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 t f(t) dt$$

$$A_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) f(t) dt ; \quad \text{RESOLVIENDO LAS INTEGRALES}$$

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos \frac{\pi t}{2} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{\pi} ;$$

$$A_1 = \text{CERO} ; \quad A_2 = \frac{10}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right) \text{ y FINALMENTE, DESPUÉS DE AGRUPAR TÉRMINOS:}$$

$$f_a(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right) \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) \text{ y DESARROLLÁNDOLO SE}$$

$$\text{LLEGO A } f_a(t) = \left[\frac{3}{\pi^3} (20 - \pi^2) + \frac{15}{\pi^3} (\pi^2 - 12) t^2 \right] \text{ --- (1.36)}$$

LA CUAL ES LA MISMA SOLUCIÓN QUE EN EL CASO ANTERIOR CUANDO NO SE USARON FUNCIONES ORTOGONALES (VER RESULTADO DE EJERCICIO 2); SIN EMBARGO AHORA SE TIENE LA OPCIÓN DE MEJORAR LA APROXIMACIÓN AUMENTANDO EL NÚMERO DE COEFICIENTES Y CALCULÁNDOLOS.

1.6 EVALUACIÓN DE ERROR CUADRÁTICO MEDIO $[E^2]$ -

LA EVALUACIÓN DE [ECM] ES PARTICULARMENTE SENCILLA CUANDO APROXIMACIÓN SE USAN FUNCIONES ORTOGONALES.

$$\text{PARA } f(t) \approx f_a(t) = [A_0 g_0(t) + A_1 g_1(t) + \dots + A_n g_n(t)] ; \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

EL [ECM] = E^2 ES MÍNIMO CUANDO, RECORDANDO LA EXPRESIÓN (1.32)

$$A_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_k(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2 dt}$$

PREVIENDO QUE SEGUN LA EXPRESIÓN (1.29)

$$\int_{t_1}^{t_2} g_k(t) g_j(t) dt = [G_{kj} \delta_{kj}]$$

LA CUAL CORRESPONDE A LA CONDICION DE ORTOGONALIDAD.

AHORA BIEN, SI LAS $g_k(t)$ 'S FORMAN UN CONJUNTO ORTONORMAL, TENDREMOS

$$A_k = \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_k(t) dt \quad \text{--- (1.37)}$$

QUE COMPARÁNDOLO CON LA EXPRESIÓN (1.31) SE OBSERVA QUE (1.37) ES IGUAL A (1.31) SI Y SÓLO SI:

$$\left[\frac{1}{G_{kk}} \right] = 1 \quad \text{--- (1.38)}$$

CONDICION DE ORTONORMALIDAD.

PUESTO QUE E / $[ECM]$ ó E^2 SE DEFINE SEGÚN LA EXPRESION (1.23) COMO:

$$E^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt \right] \quad \text{--- (1.39)}$$

Y SEGÚN LA EXPRESION (1.23A) LA PRIMERA INTEGRAL ES EL CONTENIDO CUADRÁTICO DE $f(t)$; EL CONTENIDO DE POTENCIA DE $f(t)$ ó EL VALOR CUADRÁTICO MEDIO DE $f(t)$ REPRESENTADO POR:

$$F^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt \quad \text{--- (1.40)}$$

LA SEGUNDA INTEGRAL DE LA EXPRESION (1.39) SERÁ IGUAL A LA EXPRESION (1.24A)

O SEA:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt = A_0 \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_0(t) dt + A_1 \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_1(t) dt + \dots + A_n \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_n(t) dt \quad \text{--- (1.41)}$$

POR OTRO LADO, SI SE HACE

$$G_k^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} G_{kk} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2 dt \quad \text{--- (1.42)}$$

SE TENDRÁ QUE DE (1.39)

$$\frac{-2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt = \frac{-2}{t_2 - t_1} \left[A_0 \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_0(t) dt + A_1 \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_1(t) dt + \dots + A_n \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_n(t) dt \right] \quad \text{--- (1.43)}$$

DESPEJANDO DE (1.32)

$$A_k \int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_k(t) dt \quad \text{--- (1.43A)}$$

por lo que

$$[A_k]^2 \int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2 dt = A_k \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_k(t) dt \quad \text{--- (1.43B)}$$

y utilizando la expresion (1.42)

$$\left[\frac{-2 [A_k]^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2 dt = -2 [A_k]^2 G_k^2 = \frac{-2 A_k}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_k(t) dt \right] \quad \text{--- (1.44)}$$

donde $[G_k^2]$ es el valor cuadrático medio de $[g_k(t)]$ y $t \in [t_1, t_2]$

Finalmente se tenderá que (1.43) será:

$$\frac{-2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt = \left[-2 A_0^2 G_0^2 - 2 A_1^2 G_1^2 - 2 A_2^2 G_2^2 - \dots - 2 A_n^2 G_n^2 \right] \quad \text{--- (1.45)}$$

Juego, la tercera integral de (1.39) será, usando la condición de ortogonalidad (1.29):

$$\int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} A_0^2 [g_0(t)]^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} A_1^2 [g_1(t)]^2 dt + \dots + \int_{t_1}^{t_2} A_n^2 [g_n(t)]^2 dt \quad \text{--- (1.46)}$$

por lo que

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} A_0^2 [g_0(t)]^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} A_1^2 [g_1(t)]^2 dt + \dots + \int_{t_1}^{t_2} A_n^2 [g_n(t)]^2 dt \right] \quad \text{--- (1.47)}$$

y haciendo lo mismo que en (1.43A) y (1.43B) además de ocupar (1.42):

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt = \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{k=0}^n [A_k]^2 \int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2 dt \right] = \sum_{k=0}^n [A_k]^2 G_k^2 \quad \text{--- (1.48)}$$

es decir, expandiendo

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt = \left[A_0^2 G_0^2 + A_1^2 G_1^2 + A_2^2 G_2^2 + A_3^2 G_3^2 + \dots + A_n^2 G_n^2 \right] \quad \text{--- (1.49)}$$

de manera que el $E^2 = \text{ECM}$ será según (1.39):

$$E^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt - \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt$$

conforme a las expresiones (1.40), (1.45) y (1.49) será:

$$E^2 = F^2 - \left[A_0^2 G_0^2 + A_1^2 G_1^2 + A_2^2 G_2^2 + \dots + A_n^2 G_n^2 \right] \quad \text{--- (1.50)}$$

Donde $[E^2]$ puede ser calculado directamente de los coeficientes A_k 's y de los factores de normalización $[G_k^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} G_{kk}]$ asociados con el conjunto ortogonal $[g_k(t)]$.

Si de la expresión (1.39) y con base a (1.45) y (1.49) se hace

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \left[-2 \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_0(t) + \int_{t_1}^{t_2} [f_0(t)]^2 dt \right] = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_0(t)]^2 dt = [-F_0] \quad (1.51)$$

se tiene finalmente según las expresiones (1.40) y (1.51) en (1.39) que

$$E^2 = [ECM] = [F^2 - F_0^2]$$

que textualmente indica:

"El error cuadrático medio es la diferencia entre el valor cuadrático medio de la función y el de su aproximada, la cual es expandida en términos de funciones ortogonales".

Ejemplo 4.- Calcular el $[ECM] = E^2$ en el ejemplo 3 si la ecuación (1.36) es usada para aproximar $f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \quad t \in [-1, 1]$.

Solución: El valor cuadrático medio de $f(t)$ es, según (1.40)

$$F^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt = \left[\frac{1}{2}\right]$$

yá que $A_0 = \frac{2}{\pi}$; $A_1 = 0$ y $A_2 = \frac{10}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)$ y de la ecuación (1.35) se tiene que según (1.42)

$$G_k^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [g_k(t)]^2 dt = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{2k+1} \right] = \left[\frac{1}{2k+1} \right]$$

y continuando

$$E^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{4}{\pi^2} 2 + \frac{100}{\pi^2} \left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)^2 \frac{2}{5} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{24}{\pi^6} \left[(\pi^2 - 10)^2 + 20 \right] = 0.005$$

$$\text{Finalmente } E^2 = [0.005].$$

1.7 APROXIMACION CON SERIES FINITAS DE FOURIER.-

SE HA ESTADO ESTUDIANDO LA APROXIMACION DE FUNCIONES USANDO POLINOMIOS. A MENUDO ES CONVENIENTE EXPRESAR (FUNCIONES) SEÑALES POR MEDIO DE SUPERPOSICION DE FUNCIONES SENOSIDALES.

EN EL INTERVALO DE $t \in [t_1, t_1 + T]$, LAS FUNCIONES $\left[\text{sen} \frac{2\pi k t}{T} \right]$ SON ORTOGONALES PARA VALORES ENTEROS DE $[k]$, PUESTO QUE

$$\int_{t_1}^{t_1 + T} \text{sen} \left(\frac{2\pi k t}{T} \right) \text{sen} \left(\frac{2\pi m t}{T} \right) dt = \begin{cases} \text{CERO} ; m \neq k \\ \frac{T}{2} ; m = k \neq 0. \end{cases}$$

ESTO IMPLICA QUE SI SE APROXIMA UNA FUNCION COMO LA SERIE $\sum_{k=1}^N B_k \text{sen} \left(\frac{2\pi k t}{T} \right)$ ESTA APROXIMACION TIENE LA PROPIEDAD DE [MECM] Y LOS COEFICIENTES $[B_k]$ PUEDEN SER DETERMINADOS INDEPENDIENTEMENTE UNO DEL OTRO.

SIN EMBARGO, SE OBSERVA QUE NO TODAS LAS FUNCIONES PUEDEN SER EXPRESADAS COMO UNA SUMA DE TERMINOS SENOS; POR EJEMPLO, LAS FUNCIONES "PARES" NO PUEDEN SER REPRESENTADAS COMO UNA SUMA DE FUNCIONES "IMPARES" TALES COMO $\text{sen} \left(\frac{2\pi k t}{T} \right)$.

EN ESTE SENTIDO, LOS MIEMBROS DE UN CONJUNTO DE FUNCIONES $\text{sen} \left(\frac{2\pi k t}{T} \right)$ QUE SON ORTOGONALES EN EL INTERVALO $t \in [t_1, t_1 + T]$ PARA CUALQUIER t_1 , NO SON "COMPLETOS".

UN CONJUNTO ORTOGONAL $[g_k(t)]$ SE DICE QUE ES "COMPLETO" O CERRADO EN UN INTERVALO $t \in [t_1, t_2]$ SI NO EXISTE UNA FUNCION $f(t)$ FUERA DE LOS MIEMBROS DE $g_k(t)$ TAL QUE

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_k(t) dt = \text{CERO}$$

PUESTO QUE

$$\int_{-T/2}^{T/2} \text{cos} \left(\frac{2\pi m t}{T} \right) \text{sen} \left(\frac{2\pi k t}{T} \right) dt = \text{CERO} ;$$

EL CONJUNTO $\text{sen} \left(\frac{2\pi k t}{T} \right)$ NO ES UN CONJUNTO COMPLETO.

SIN PROBAR, SE ESTABLECE QUE EN UN INTERVALO $t \in [t_1, t_1 + T]$ DONDE t ES TOMADA GENERALMENTE COMO $\left(-\frac{T}{2}\right)$ O CERO, LAS FUNCIONES $\text{sen} \left(\frac{2\pi k t}{T} \right)$ Y $\text{cos} \left(\frac{2\pi k t}{T} \right)$ FORMAN UN CONJUNTO ORTOGONAL COMPLETO.

ES MÁS, CUALQUIER FUNCION CON "VALOR CUADRÁTICO MEDIO FINITO" (COMO EL EXPRESADO EN (1.40)) PUEDE SER EXPRESADA POR LA SERIE:

$$f_a(t) = C_0 + \sum_{k=1}^N \left[A_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \right] \dots (1.47)$$

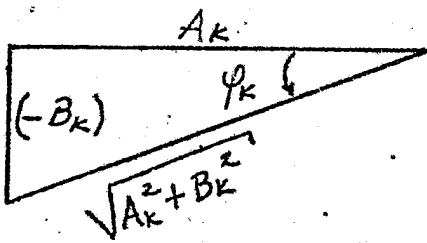
O USANDO LA IDENTIDAD

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(x + \tan^{-1} \frac{-B}{A}\right) \dots (1.47A)$$

SE PUEDE EXPRESAR LA ECUACION (1.47) EN LA FORMA:

$$f_a(t) = \sum_{k=0}^N \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \left[\cos \varphi_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) - \sin \varphi_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \right] \dots (1.48)$$

DADO QUE, CON REFERENCIA A LA SIGUIENTE FIGURA SE TIENE QUE



SI $\cos \varphi_k = \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}$ ENTONCES

FIGURA [4].

$$\left[\begin{aligned} A_k &= \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \cos \varphi_k \\ -B_k &= \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \sin \varphi_k \end{aligned} \right]; \text{ DE LA MISMA FORMA} \dots (1.49)$$

SUSTITUYENDO (1.49) EN (1.47) SE TIENE.

$$f_a(t) = \sum_{k=0}^N \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \left[\cos \varphi_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) - \sin \varphi_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \right] \dots (1.50)$$

AHORA, USANDO LAS SIGUIENTES PROPIEDADES TRIGONOMETRICAS

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \left[\cos(A-B) + \cos(A+B) \right] \dots (1.51)$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} \left[\cos(A-B) - \cos(A+B) \right] \dots (1.52)$$

PARA EL CASO DONDE $A = \varphi_k$; $B = \left(\frac{2\pi k t}{T}\right)$

RESTANDO (1.52) A (1.51) QUEDA

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = \left[\frac{\cancel{\cos(A-B)}}{2} + \frac{\cos(A+B)}{2} \right] - \left[\frac{\cancel{\cos(A-B)}}{2} - \frac{\cos(A+B)}{2} \right]$$

FINALMENTE

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos(A+B) \dots (1.52A)$$

luego entonces

$$\cos \varphi_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) - \sin \varphi_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) = \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right) \quad (1.53)$$

sustituyendo (1.53) en (1.50) quedará:

$$f_0(t) = \sum_{k=0}^N \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right) \quad (1.54)$$

o de otro modo

$$f_0(t) = \sum_{k=0}^N C_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right) \quad (1.54A)$$

de donde se ve que $C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$; $\forall k = 1, 2, 3, \dots, N$ (1.55)

del mismo modo, si se compara (1.54) con (1.47A) se observa que

$$\varphi_k = \tan^{-1}\left(\frac{-B_k}{A_k}\right) \quad (1.56)$$

Ahora bien, recordando que las funciones seno y coseno se pueden manejar convenientemente en forma exponencial:

$$e^{ix} = (\cos x + i \sin x) \quad (1.57)$$

es una función compleja de variable real $[x]$.

Definiendo las funciones complejas ortogonales:

un conjunto de funciones complejas $[g_k(t)]$ es ortogonal en el intervalo $t \in [t_1, t_2]$ si:

$$\int_{t_1}^{t_2} g_n(t) g_m^*(t) dt = \delta_{nm} \quad (1.58)$$

donde el asterisco (*) denota el conjugado.

Nota: recordando que si $[z = x + iy]$; entonces su conjugado es

$$[z^* = x - iy] \text{ de tal forma que } [z + z^*] = 2x \Rightarrow \text{2 veces la parte real.}$$

Obsérvese que con la definición (1.58), el conjunto de funciones

$\left[\frac{1}{\sqrt{T}} e^{i \frac{2\pi k t}{T}}\right]$ es ortogonal en cualquier intervalo (T) puesto que

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} e^{i \frac{2\pi k t}{T}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{T}} e^{-i \frac{2\pi k t}{T}}\right) dt = \delta_{kk} \quad (1.59)$$

RECORDAR TAMBIEN QUE $\int_{KR} = \begin{cases} \text{CERO} & ; K \neq R \\ \text{UNO} & ; K = R \end{cases}$

ESTO ES, SI $[K=R]$ ENTONCES

$$\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} e^{\frac{i2\pi k t}{T}} e^{-\frac{i2\pi r t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} dt = \frac{1}{T} [t_1+T - t_1] = \text{UNO.}$$

CUANDO UNA FUNCION REAL VA A SER EXPRESADA COMO UNA SUMA DE FUNCIONES COMPLEJAS, LAS FUNCIONES COMPLEJAS DEBEN APARECER EN PARES CONJUGADOS, P

EJEMPLO: $\left[\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) \right]$

DE AQUI, EN GENERAL, UNA APROXIMACION POR UNA SUMA DE FUNCIONES COMPLEJAS TIENE LA FORMA:

$$f(t) \approx f_0(t) = D_0 + D_1 g_1(t) + [D_1 g_1(t)]^* + D_2 g_2(t) + [D_2 g_2(t)]^* + \dots$$

$$= D_0 + \sum_{k=1}^N [D_k g_k(t) + [D_k g_k(t)]^*] \quad \text{--- (1.60)}$$

$$= D_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^N [D_k g_k(t)] \quad \text{--- (1.61)}$$

PERO SI $[g_k(t) = e^{\frac{i2\pi k t}{T}}]$ Y RECORDANDO LA EXPRESION (1.29) PARA REALES,

TAMBIEN SE TENDRA PARA COMPLEJOS, TAL COMO LA EXPRESION (1.58)

$$\int_{t_1}^{t_2} g_k(t) g_j^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{i2\pi k t}{T}} e^{-\frac{i2\pi j t}{T}} dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{i2\pi (k-j)t}{T}} dt = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1$$

Y POR UN PROCEDIMIENTO IGUAL, AL USADO PARA FUNCIONES REALES EN LA SECCION 1.4, SE PUEDE DEMOSTRAR QUE EL CRITERIO DEL [MECM] SE SATISFACE SI, ANALOGAMENTE A LA EXPRESION (1.32) SE TIENE

$$D_k = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) [g_k(t)]^* dt}{\int_{t_1}^{t_1+T} g_k(t) [g_k(t)]^* dt} \quad \text{--- (1.62)}$$

SE OBSERVA ADEMÁS QUE CUANDO

$$g_k(t) = e^{\frac{i2\pi k t}{T}} ; \text{ ENTONCES } [g_k(t)]^* = e^{-\frac{i2\pi k t}{T}} \quad \text{--- (1.63)}$$

y que $\int_{t_1}^{t_1+T} e^{i \frac{2\pi kt}{T}} e^{-i \frac{2\pi kt}{T}} dt = T$ ----- (1.64)

DE MANERA QUE, SUSTITUYENDO LAS ECUACIONES (1.64) y (1.63) EN (1.62)

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-i \frac{2\pi kt}{T}} dt$$
 ----- (1.65)

AHORA, USANDO LAS FUNCIONES EXPONENCIALES EN LA SERIE (1.60) y (1.61)

$$f_a(t) = D_0 + \sum_{k=1}^N \left[D_k e^{i \frac{2\pi kt}{T}} + [D_k e^{i \frac{2\pi kt}{T}}]^* \right] =$$

$$f_a(t) = D_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^N \left[D_k e^{i \frac{2\pi kt}{T}} \right]$$
 ----- (1.66)

DE MANERA QUE SI DEFINIMOS

$$2 D_k = C_k e^{i \varphi_k}$$
 ----- (1.67)

UN NUMERO COMPLEJO CUALQUIERA

$$2 \operatorname{Re} \left[D_k e^{i \frac{2\pi kt}{T}} \right] = C_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} + \varphi_k \right)$$

DADO QUE, DE (1.67)

$$D_k = \frac{1}{2} \left[C_k (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k) \right]$$

$$2 \operatorname{Re} \left[D_k e^{i \frac{2\pi kt}{T}} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} C_k (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k) \left(\cos \frac{2\pi kt}{T} + i \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \right] =$$

$$= C_k \left(\cos \varphi_k \cos \frac{2\pi kt}{T} - \sin \varphi_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right)$$

y USANDO LAS PROPIEDADES TRIGONOMETRICAS (1.51) y (1.52) SE TIENE

$$2 \operatorname{Re} \left[D_k e^{i \frac{2\pi kt}{T}} \right] = C_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} + \varphi_k \right)$$
 ----- (1.68)

CAPITULO II

INTRODUCCION A ANALISIS DE FRECUENCIAS.

EN EL CAPITULO ANTERIOR SE DEMOSTRO QUE EN UN INTERVALO DADO $t \in [t_1, t_2]$, O BIEN, $t \in [t_1, t_1 + T]$ SE PUEDE APROXIMAR UNA FUNCION $f(t)$ CON UNA SERIE FINITA DE FOURIER DE LA FORMA:

$$f_0(t) = \sum_{-N}^N D_k e^{\frac{i2\pi k t}{T}} = C_0 + \sum_{k=1}^N C_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right) \quad (2.1)$$

CON EL MINIMO ERROR CUADRATICO MEDIO DADO POR:

$$[MECM] = E^2 = F^2 - F_0^2 = F^2 - \sum_{-N}^N D_k^2 \quad (2.2)$$

SI EN EL INTERVALO $[T]$ EL VALOR CUADRATICO MEDIO $[F^2]$ DE $f(t)$ ES FINITO, ENTONCES CUANDO EL NUMERO DE TERMINOS EN LA SERIE DE FOURIER DE LA EXPRESION (2.1) AUMENTA, EL $[ECM = E^2]$ DISMINUYE.

EN TAL CASO, LA SUMA INFINITA REFERIDA COMO LA SERIE DE FOURIER, YA NO ES UNA APROXIMACION Y CONVERGE A $f(t)$ $\forall t \in [t_1, t_1 + T]$ EN LOS QUE $f(t)$ ES CONTINUA.

MAS ADELANTE SE DISCUTE LA "REPRESENTACION" DE FORMAS DE ONDA PERIODICAS POR MEDIO DE LA SERIE DE FOURIER.

ESTE ESTUDIO INTRODUCE LA IDEA DE ANALISIS DE FRECUENCIAS, EL CUAL, EN LOS CAPITULOS SUBSECUENTES SE EXTIENDE PARA APLICARLO A FORMAS DE ONDA NO PERIODICAS.

2.1 SERIES DE FOURIER DE FUNCIONES PERIODICAS.

UNA FUNCION PERIODICA DE LA VARIABLE $[t]$, $f(t)$, ES UNA FUNCION QUE SATISFACE LA CONDICION:

$$f(t) = f(t + T) \quad (2.3)$$

DONDE $[T]$ ES UNA CONSTANTE. EL VALOR MAS PEQUEÑO DE T QUE SATISFACE LA CONDICION (2.3) SE CONOCE COMO EL PERIODO DE $f(t)$.

LA SERIE DE FOURIER

$$\sum_{-N}^N D_k e^{\frac{i2\pi k t}{T}} = C_0 + \sum_{k=1}^N C_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right), \quad \text{ES UNA}$$

FUNCION PERIODICA PARA TODO $[t]$, PUESTO QUE

$$\sum_{-N}^N D_k e^{i \frac{2\pi k}{T} (t+T)} = \sum_{-N}^N D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} e^{i 2\pi k} = \sum_{-N}^N D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}}$$

YA QUE

$$e^{i 2\pi k} = \cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k) \text{ EN DONDE}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\pi k &= \text{UNO} & \forall k = 1, 2, \dots \\ \sin 2\pi k &= \text{CERO} & \forall k = 1, 2, \dots \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{INCLUYENDO} \\ \text{EL CERO} \end{array} \right\}$$

$$\text{ASI QUE } \left[e^{i 2\pi k} \right] = \text{UNO} \text{ --- (2.4)}$$

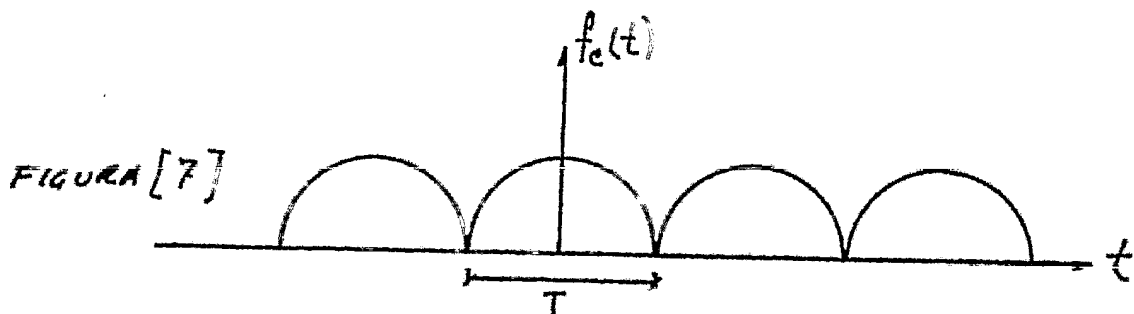
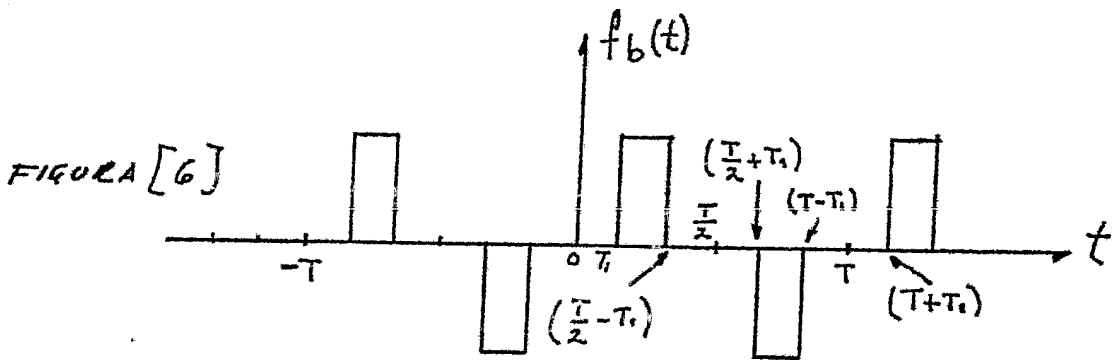
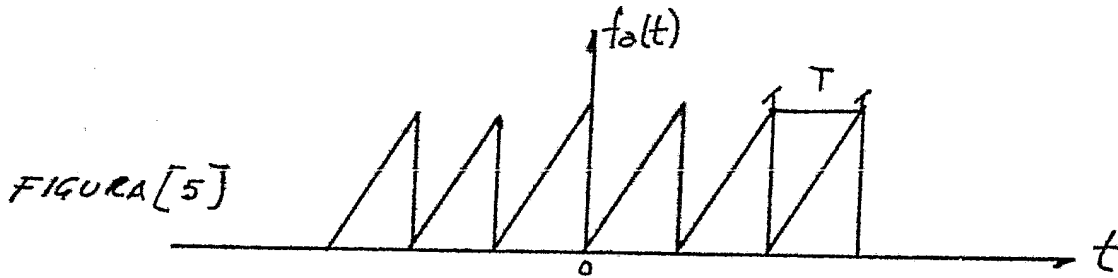
POR CONSIGUIENTE, SI $f(t)$ ES PERIÓDICA CON PERIODO T Y ES APROXIMADA POR:

$$f_a(t) = \sum_{-N}^N D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \text{ TA/ COMO LA EXPRESIÓN (2.1).}$$

ENTONCES ÉSTA APROXIMACIÓN YA NO SE RESTRINQUE AL INTERVALO $t \in [t_1, t_1+T]$; SINO QUE ES VÁLIDA PARA TODOS LOS VALORES DE t .

ÉSTO SE VE A PARTIR DE EL HECHO DE QUE AMBAS $f(t)$ Y $f_a(t)$ SE REPITEN A INTERVALOS DE $[T]$.

COMO EJEMPLOS DE FUNCIONES PERIÓDICAS, O SEA, DE $f(t) = f(t+nT)$ DONDE $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ SE TIENE



CUANDO UNA FUNCION PERIÓDICA ES EXPRESADA EN TÉRMINOS DE UNA SERIE INFINITA DE FOURIER REAL

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right), \text{ HAY UNA RELACION ESPECIAL}$$

ENTRE LAS FRECUENCIAS DE LOS TÉRMINOS SENUSOIDALES:

TODAS LAS FRECUENCIAS SON MÚLTIPLOS ENTEROS DE LA FRECUENCIA $\left[\frac{1}{T}\right]$. UNA SUMA DE FUNCIONES SENUSOIDALES EN LA QUE ESTA RELACION ENTRE FRECUENCIAS SE MANTIENE, ES REFERIDA COMO UNA SERIE DE ARMÓNICAS. LA FRECUENCIA COMÚN CUYOS MÚLTIPLOS ENTEROS SON LAS FRECUENCIAS DE LOS TÉRMINOS COMPONENTES ES CONOCIDA COMO LA FRECUENCIA FUNDAMENTAL. (TODAS LAS DEMÁS SON LLAMADAS ARMÓNICAS; LA K-ÉSIMA ARMÓNICA ES EL TÉRMINO CON FRECUENCIA $\left[\frac{k}{T}\right]$).

TEOREMA DE LA SERIE DE FOURIER:

LA DISCUSIÓN ANTERIOR PUEDE SER FORMALIZADA EN UN TEOREMA CONOCIDO COMO EL TEOREMA DE LA SERIE DE FOURIER.

PUESTO QUE NO SE PRETENDE PRESENTAR LA TEORÍA DE FOURIER EN SU FORMA MAS RIGUROSA, ADELANTE HABRÁ ASEVERACIONES SIN PROBAR, O SIN LA ADECUADA DEMOSTRACIÓN.

USANDO LA FORMA EXPONENCIAL, EL TEOREMA DE FOURIER SE PUEDE ESTABLECER EN DOS PARTES, ASÍ:

PRIMERA PARTE - CUALQUIER FUNCION PERIÓDICA $f(t)$ CON PERIODO $[T]$ QUE SEA INTEGRABLE EN CUALQUIER INTERVALO, PUEDE SER REPRESENTADA POR LA SERIE

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \quad \text{--- (2.5)}$$

DONDE

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \quad \text{--- (2.6)}$$

SEGUNDA PARTE - SI ADEMÁS DE $f(t)$, $[f(t)]^2$ TAMBIÉN ES INTEGRABLE,

LA SERIE (2.5) CONVERGE AL VALOR $f(t)$ EN CUALQUIER PUNTO DONDE $f(t)$ ES CONTINUA.

SI EN $t = t_1$, LA FUNCION PERIÓDICA $f(t)$ NO ES CONTINUA, DE MANERA QUE $f(t_1^+) \neq f(t_1^-)$, ENTONCES EN ESE PUNTO, LA SERIE CONVERGE

Al valor promedio aritmético: $\frac{1}{2} [f(t_1^+) + f(t_1^-)]$.

UN EJEMPLO DE UNA FUNCIÓN QUE NO ES INTEGRABLE SOBRE UN PERÍODO ES LA FUNCIÓN $f(t) = \tan t$, DE PERÍODO $[\pi]$.

UNA FUNCIÓN QUE ES INTEGRABLE, PERO QUE SU POTENCIA DOS NO LO ES, ES EL TREN PERIÓDICO DE IMPULSOS: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$.

OBSÉRVESE QUE LA CONTINUIDAD DE $f(t)$ O DE SUS DERIVADAS NO ES UN REQUERIMIENTO INDISPENSABLE PARA LA EXISTENCIA DE SU SERIE DE FOURIER. PARA VISUALIZAR LAS CONDICIONES DADAS ANTERIORMENTE, SE OBSERVA QUE LA CONDICIÓN DE INTEGRABILIDAD PUEDE SER ENTENDIDA CON UNA INTEGRACIÓN GRÁFICA: SE REQUIERE QUE EL ÁREA BAJO $f(t)$ EN UN PERÍODO (O FRACCIÓN DE UN PERÍODO) SEA FINITA.

EN FORMA SIMILAR, LA CONDICIÓN DE QUE $[f(t)]^2$ SEA INTEGRABLE PUEDE SER ESTABLECIDA EN FORMA DIFERENTE.

SI $f(t)$ REPRESENTA UN VOLTAJE O UNA FUNCIÓN CORRIENTE, LA INTEGRAL DE $[f(t)]^2 dt$ EN UN PERÍODO, REPRESENTA LA ENERGÍA QUE $f(t)$ LIBERA A UN OHM DE RESISTENCIA EN UN PERÍODO; Y LA CONDICIÓN DOS REQUIERE QUE ÉSTA ENERGÍA SEA FINITA.

EL VALOR CUADRÁTICO MEDIO (RECORDAR LA EXPRESIÓN (1.40)) DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA, ESTÁ DADO, A PARTIR DE:

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt} \quad (2.7)$$

DE AQUÍ QUE

$$F_{\text{rms}}^2 \equiv F^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt \quad (2.8)$$

LA DISCUSIÓN ANTERIOR INDICA QUE UNA SERIE DE FOURIER CONVERGENTE EXISTE PARA TODAS LAS FUNCIONES PERIÓDICAS CUYO VALOR CUADRÁTICO MEDIO $[F^2]$ SEA FINITO Y, POR CONSIGUIENTE, PARA TODOS LOS VOLTAJES Y CORRIENTES PERIÓDICAS FÍSICAMENTE POSIBLES.

2.2 EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER.-

EN EL CAPÍTULO I, SECCIÓN 1.7 SE MOSTRÓ QUE EN LA SERIE

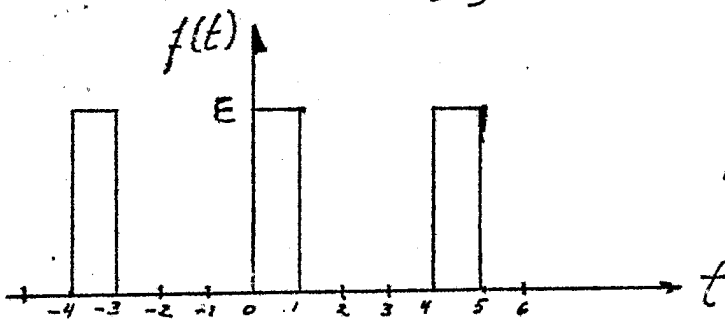
$$f(t) = f(t+T) = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \right] \text{--- (2.9)}$$

LOS VALORES DE LOS COEFICIENTES $[D_k]$ SE OBTIENEN CON LA EXPRESION (1.65):

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \text{--- (2.10)}$$

EL SIGUIENTE EJEMPLO ILUSTR A EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER D_k 'S.

EJEMPLO 5.- HALLAR LA SERIE DE FOURIER PARA LA FUNCION MOSTRADA EN LA FIGURA [8] Y DEFINIDA POR LAS ECUACIONES:



$$f(t) = \begin{cases} \text{CERO} & ; t \in [-2, 0] \\ E & ; t \in [0, 1] \\ \text{CERO} & ; t \in [1, 2] \end{cases} \text{--- (2.11)}$$

SIENDO $T=4$

$$f(t) = f(t+T) = f(t+4).$$

SOLUCION: SUSTITUYENDO (2.11) EN (2.10) SE TIENE

$$D_k = \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^0 \text{CERO} e^{-i \frac{2\pi k t}{4}} dt + \int_0^1 E e^{-i \frac{2\pi k t}{4}} dt + \int_1^2 \text{CERO} e^{-i \frac{2\pi k t}{4}} dt \right] =$$

$$D_k = \frac{E}{4} \int_0^1 e^{-i \frac{2\pi k t}{4}} dt \text{--- (2.12)}$$

$$D_k = \frac{E}{4} \left[\frac{-4}{i 2\pi k} \right] e^{-i \frac{2\pi k t}{4}} \Big|_0^1 = E \left[\frac{e^{-i \frac{2\pi k}{4}} - 1}{-i 2\pi k} \right] = \frac{E}{\pi k} e^{-i \frac{\pi k}{4}} \left[\frac{e^{-i \frac{\pi k}{4}} - e^{\frac{\pi k}{4}}}{-2i} \right] \text{--- (2.13)}$$

Y RECORDANDO DE FUNCIONES COMPLEJAS QUE

$$\left. \begin{aligned} \cos x &= \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right] \\ \sin x &= \left[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right] \end{aligned} \right\} \text{--- (2.14)}$$

ENTONCES DE LA FUNCION SENO DE (2.14) EN (2.13) QUEDA:

$$D_k = \left[\frac{E}{4} \frac{\sin \frac{\pi k}{4}}{\frac{\pi k}{4}} e^{-i \frac{\pi k}{4}} \right]; \forall k \neq 0 \quad (2.15)$$

y PARA $[k=0]$, O SEA

$$D_0 = \frac{1}{4} \int_0^T E dt = \frac{E}{4}$$

RECORDANDO DE LA EXPRESION (1.67) QUE $[2D_k = C_k e^{i\varphi_k}]$, ENTONCES

$$C_k e^{i\varphi_k} = \left[\frac{E}{2} \frac{\sin(\pi k/4)}{\pi k/4} e^{-i \frac{\pi k}{4}} \right]; \quad C_0 = D_0 = \frac{E}{4}$$

DONDE C_k SON LAS AMPLITUDES DE LA k -ÉSIMA ARMÓNICA Y φ_k ES EL ÁNGULO DE FASE DE LA k -ÉSIMA ARMÓNICA.

ENTONCES, FINALMENTE, APLICANDO D_k EN (2.9) Y OPERANDO

$$f(t) = \frac{E}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E}{2} \frac{\sin(\pi k/4)}{\pi k/4} \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} - \frac{\pi k}{4}\right) \quad (2.15A)$$

2.3 DIFERENTES FORMAS DE LA SERIE DE FOURIER Y SUS COEFICIENTES.

LA FORMA EXPONENCIAL DE LA SERIE DE FOURIER ES MÁS ÚTIL PARA EL DESARROLLO GENERAL DEL TEMA DE ESTA TESIS.

PARA OTROS PROPOSITOS, LAS FORMAS TRIGONÓMICAS SON MÁS CONVENIENTES. AHORA, SE REVISARÁN LAS DIFERENTES FORMAS DE LA SERIE DE FOURIER Y LA RELACION ENTRE ELLAS.

COMENZANDO CON LA FORMA EXPONENCIAL, DE ACUERDO A (2.9) Y (2.10)

$$f(t) = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{\frac{i2\pi k t}{T}} \right]; \quad D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-\frac{i2\pi k t}{T}} dt$$

RECORDANDO DEL CAPÍTULO I, SE TIENE QUE D_k Y $[D_k]^*$ SON COMPLEJOS CONJUGADOS, ES DECIR, EN FORMA POLAR:

$$D_k = D_k e^{i\varphi_k} = D_k \angle \varphi_k; \quad D_k^* = D_k e^{-i\varphi_k} = D_k \angle -\varphi_k$$

UNA FORMA DE LA SERIE DE FOURIER REAL, ES COMO (1.54A), ESTO ES:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right) \quad (2.16)$$

DONDE

$$C_0 = D_0 \quad \text{y} \quad C_k e^{i\varphi_k} = C_k \angle \varphi_k = [2D_k] \quad (2.17)$$

OTRA FORMA DE DEDUCIRLO ES USANDO LA IDENTIDAD:

$$\cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \varphi_k\right) = \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \cos \varphi_k - \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \sin \varphi_k$$

INTRODUCIENDO ÉSTA IDENTIDAD EN LA ECUACION (2.16) SE TIENE:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k \cos \varphi_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + (-C_k \sin \varphi_k) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] \quad (2.18)$$

O BIEN, DEFINIENDO:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= C_0 \\ A_k &= C_k \cos \varphi_k \\ B_k &= -C_k \sin \varphi_k \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

SE LLEGA A OBTENER (2.18) COMO:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] \quad (2.20)$$

LA ECUACION (2.20) ES UNA FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LA SERIE DE FOURIER.

LA RELACION ENTRE LOS COEFICIENTES COMPLEJOS D_k Y LOS COEFICIENTES REALES A_k Y B_k , SE DEDUCE COMBINANDO LAS ECUACIONES (2.17) Y (2.19); ASÍ QUE

$$\left[C_k e^{i\varphi_k} = C_k \cos \varphi_k + i C_k \sin \varphi_k \right] = 2D_k = C_k \cos \varphi_k + i C_k \sin \varphi_k ; \text{ DE AQUI}$$

$$\left. \begin{aligned} A_k &= 2 \operatorname{Re}[D_k] ; \forall k=1,2,3,\dots \\ B_k &= -2 \operatorname{Im}[D_k] ; \forall k=1,2,3,\dots \end{aligned} \right\} \quad (2.20a)$$

$$A_0 = D_0$$

POR OTRO LADO, SE TIENE QUE A_k Y B_k PUEDEN SER EXPRESADAS COMO INTEGRALES, PUESTO QUE, A PARTIR DE LA EXPRESIÓN (1.65)

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) - i f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] dt \quad (2.21)$$

y así

$$A_0 = D_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \text{VALOR PROMEDIO DE } f(t) ; [k=0] \quad (2.22)$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[f(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} \right] dt = \text{DOS VECES } \varepsilon / \text{PROMEDIO DE } \left[f(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} \right] \quad (2.23)$$

$\forall k=1,2,3,\dots$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[f(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} \right] dt = \text{DOS VECES } \varepsilon / \text{PROMEDIO DE } \left[f(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} \right] \quad (2.24)$$

$\forall k=1,2,3,\dots$

EJEMPLO 6.- OBTENER LOS COEFICIENTES A_k y B_k PARA LA FUNCIÓN PERIÓDICA $f(t)$ DESCRITA EN EL EJEMPLO 5, EN QUE SE HALLA QUE SEGÚN LA EXPRESIÓN (2.15) Y SUS SUBSECUENTES

$$D_k = \frac{E}{4} \frac{\sin \frac{\pi k}{4}}{\frac{\pi k}{4}} e^{-i \frac{\pi k}{4}}; \quad C_k = \frac{E}{2} \frac{\sin \frac{\pi k}{4}}{\frac{\pi k}{4}}; \quad \varphi_k = \left[\frac{-\pi k}{4} \right]$$

SOLUCIÓN: DE (2.20A)

$$A_k = C_k \cos \varphi_k = 2 \operatorname{Re} D_k = \frac{E}{2} \frac{\sin \frac{\pi k}{4}}{\frac{\pi k}{4}} \cos \left(\frac{-\pi k}{4} \right) \quad (2.25)$$

Y A PARTIR DE LA IDENTIDAD TRIGONOMETRICA:

$$\left[\sin 2A = 2 \sin A \cos A \right]$$

SI PARA ESTE CASO SE DESARROLLA (2.25) DE ACUERDO CON ESTA IDENTIDAD, SE TENDRÁ QUE:

$$A_k = \left[\frac{E}{2} \frac{\sin \frac{\pi k}{2}}{\frac{\pi k}{2}} \right]; \quad \text{DE DONDE SE TIENE QUE PARA}$$

$$[k \text{ PAR}] \Rightarrow A_k = \text{CERO}; \quad \text{Y PARA } [k \text{ IMPAR}] \Rightarrow A_k = \left[\pm \frac{E}{\pi k} \right] \text{ POR LO QUE}$$

(2.25) SE PUEDE EXPRESAR COMO:

$$A_{(2n+1)} = \frac{E(-1)^n}{\pi(2n+1)}; \quad \forall n=0, 1, 2, 3, \dots$$

EN FORMA SIMILAR, DE (2.20A)

$$B_k = -C_k \sin \varphi_k = -2 \operatorname{Im} [D_k] = \frac{-E}{2} \frac{\sin \frac{\pi k}{4}}{\frac{\pi k}{4}} \sin \left(\frac{-\pi k}{4} \right) =$$

$$= \frac{E}{2} \frac{(1 - \cos \frac{\pi k}{2})}{\frac{\pi k}{2}} \quad \text{ENTONCES } B_{(2n+1)} = \left[\frac{E(-1)^n}{\pi(2n+1)} \right]; \quad \forall n=0, 1, 2, 3, \dots$$

2.4 CAMBIO DE INTERVALO.-

PARA HALLAR LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN DADA, ES NECESARIO ESPECIFICAR $f(t)$ YA SEA POR FÓRMULAS O EN FORMA GRÁFICA EN UN INTERVALO CORRESPONDIENTE AL PERIODO T .

SIN EMBARGO, NO ES NECESARIO USAR EL INTERVALO $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$; UN INTERVALO CORRESPONDIENTE A CUALQUIER OTRO PERIODO PUEDE SER USADO.

PARA PROBAR ESTO, CONSIDERESE LA EXPRESIÓN PARA D_k :

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt$$

SI SE OBSERVA, EL INTEGRANDO $[f(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}]$ ES PERIÓDICO CON PERIÓDO $[T]$, POR CONSIGUIENTE, EL INTEGRANDO EN UN INTERVALO $t \in [-\frac{T}{2}, -\frac{T}{2} + t_1]$ ES IDENTICO AL DEL INTERVALO $t \in [\frac{T}{2}, \frac{T}{2} + t_1]$.

SI SE USA LA NOTACION $[f(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} = \phi(t)]$, SE PUEDE ESCRIBIR:

$$D_k = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \phi(t) dt - \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}+t_1} \phi(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+t_1} \phi(t) dt = \right.$$

$$D_k = \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+t_1}^{\frac{T}{2}+t_1} \phi(t) dt \right] \text{ --- --- --- --- --- (2.26)}$$

• BIEN, ESCOGIENDO

$$-\frac{T}{2} + t_1 = t_0 \Rightarrow t_1 = t_0 + \frac{T}{2}, \text{ LUEGO}$$

$$\frac{T}{2} + t_1 = \frac{T}{2} + t_0 + \frac{T}{2} = t_0 + T \text{ SE TENDRÁ QUE}$$

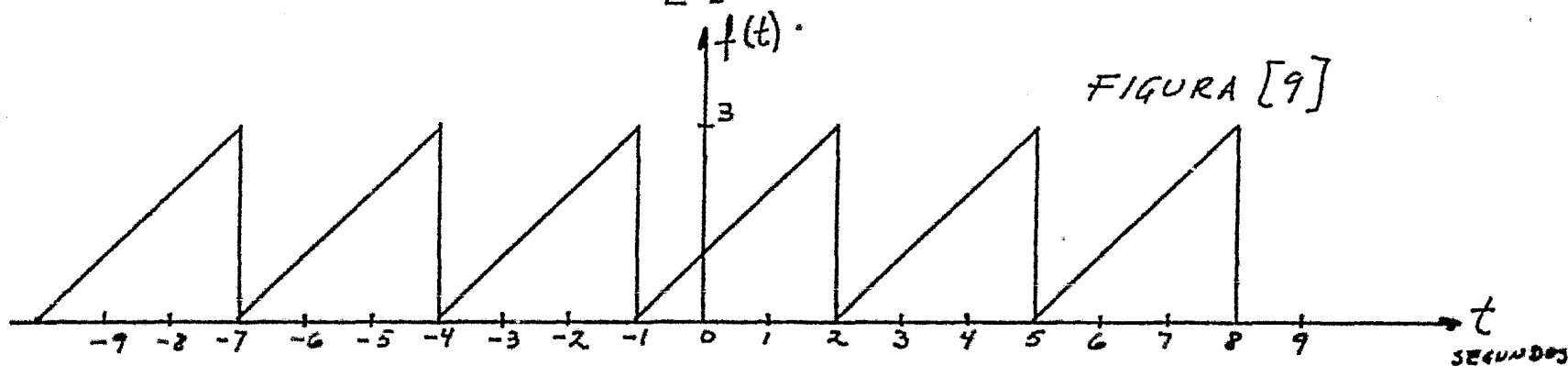
$$D_k = \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \right] \text{ --- --- --- --- --- (2.27)}$$

DONDE SE VE QUE (2.27) ES ANÁLOGA A (2.26)

COMO LA ELECCION DE $[t_0]$ PUEDE SER ARBITRARIA, SE CONVIERTE EN MATERIA DE CONVENIENCIA.

A CONTINUACION SE PRESENTA UN EJEMPLO:

EJEMPLO 7.- CONSIDERE LA FORMULACION DE D_k POR LA FORMA DE ONDA PERIÓDICA DE LA FIGURA [9]



LA FUNCION $f(t)$ TIENE UN PERIODO $[T=3]$ Y SE DESCRIBE POR LA FÓRMULA:

$$f(t) \begin{cases} t+4 & ; t \in (-4, -1) \\ t+1 & ; t \in (-1, 2) \\ t-2 & ; t \in (2, 5) \end{cases}$$

HAY QUE OBSERVAR QUE CADA UNA DE ÉSTAS FÓRMULAS ES APLICABLE SÓLO EN EL INTERVALO ESTABLECIDO; UNA EXPRESIÓN ANALÍTICA DIFERENTE, SE REQUERIRÁ PARA ESPECIFICAR LA FUNCIÓN DE CADA INTERVALO DE 3 SEGUNDOS.

COMO RESULTADO, SI SE UTILIZA LA FORMA D_k CON LÍMITE $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ SE NECESITA EVALUAR DOS INTEGRALES; ASI PUES, DE ACUERDO A (2.27) SE PROCEDERÁ A SOLUCIONAR EL PROBLEMA:

$$D_k = \frac{1}{3} \left[\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} (t+4) e^{-\frac{i2\pi kt}{3}} dt + \int_{-1}^{\frac{3}{2}} (t+1) e^{-\frac{i2\pi kt}{3}} dt \right] \text{----- (2.28)}$$

SIMULTÁNEAMENTE SI SE ESCOGE EL INTERVALO $t \in [0, 3]$ SE TENDRÁ

$$D_k = \frac{1}{3} \left[\int_0^2 (t+1) e^{-\frac{i2\pi kt}{3}} dt + \int_2^3 (t-2) e^{-\frac{i2\pi kt}{3}} dt \right] \text{----- (2.29)}$$

PERO ESCOGIENDO EL INTERVALO $t \in [-1, 2]$ SE TENDRÁ

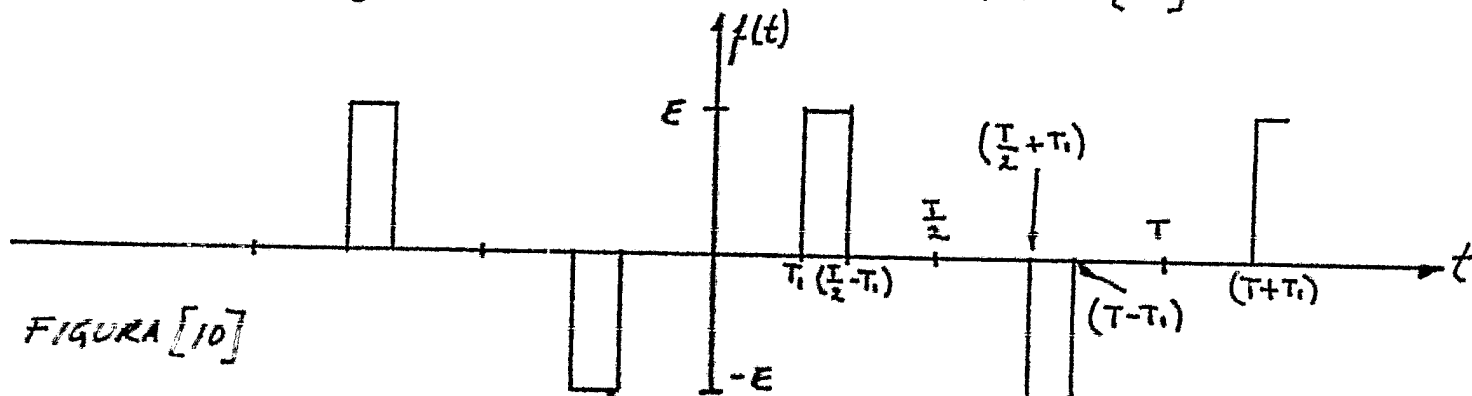
$$D_k = \frac{1}{3} \left[\int_{-1}^2 (t+1) e^{-\frac{i2\pi kt}{3}} dt \right] \text{----- (2.30)}$$

Y ASI SE PODRÍA SEGUIR ESCOGIENDO EL INTERVALO QUE SE DESEARA.

LAS FORMAS (2.28), (2.29) Y (2.30) TODAS DAN EL MISMO RESULTADO; EN ESTE EJEMPLO LA (2.30) RESULTA OBVIAMENTE LA MENOS LABORIOSA Y POR CONSIGUIENTE LA MÁS CONVENIENTE.

COMO UN EJERCICIO PARA EVALUAR LAS ECUACIONES REQUERIDAS PARA $f(t)$, A CONTINUACION SE ANEXAN LOS SIGUIENTES EJEMPLOS:

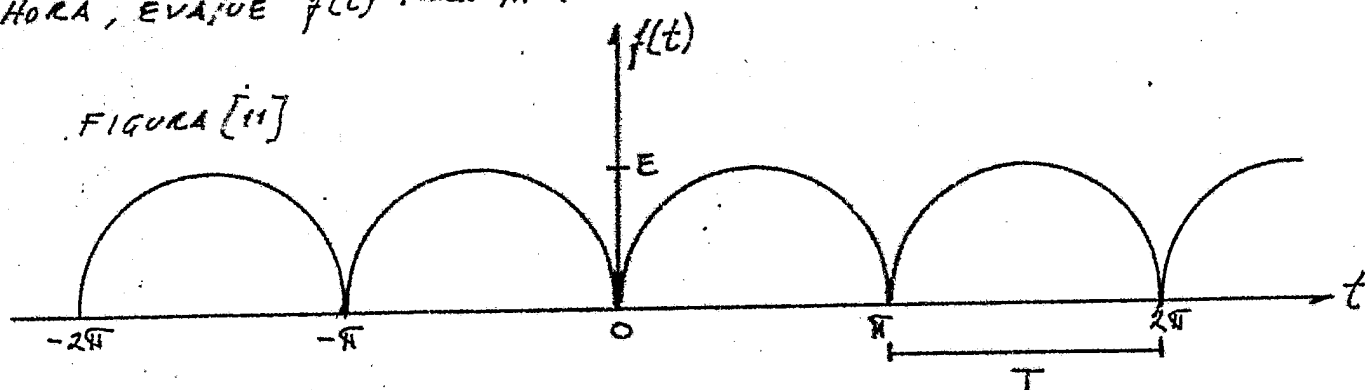
EJEMPLO B.- FORMULE LAS ECUACIONES PARA LAS CUÁLES $f(t)$ SE CUMPLE EN EL INTERVALO $t \in [0, T]$ DE LA FUNCIÓN MOSTRADA EN LA FIGURA [10]



SOLUCIÓN: EVALUANDO LO QUE SE PIDE

$$f(t) = \begin{cases} \text{CERO} & t \in (0, T_1) \\ E & t \in (T_1, T_1 + T_2) \\ \text{CERO} & t \in (T_1 + T_2, T_1 + T_2 + T_3) \\ -E & t \in (T_1 + T_2 + T_3, T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \\ \text{CERO} & t \in (T_1 + T_2 + T_3 + T_4, T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5) \end{cases}$$

AHORA, EVALÚE $f(t)$ PARA LA FUNCIÓN QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA [11]

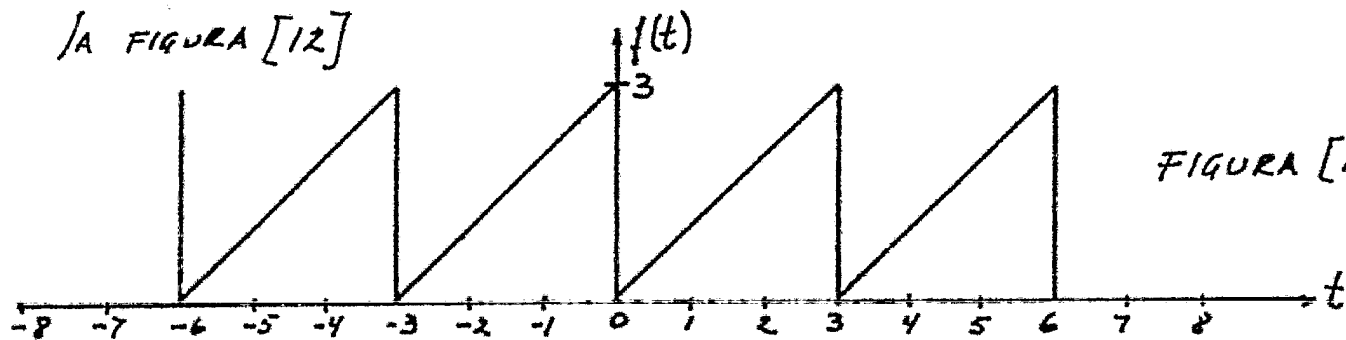


SOLUCIÓN:

$$f(t) = \begin{cases} E \sin t & t \in (0, \pi) \\ E \sin(t - \pi) & t \in (\pi, 2\pi) \\ E \sin(t - 2\pi) & t \in (2\pi, 3\pi) \\ E \sin(t - n\pi) & t \in (n\pi, (n+1)\pi) \end{cases}$$

EN ESTE EJEMPLO, CUALQUIER ECUACION PUEDE SER USADA; SE PUEDE OBSERVAR QUE LA FUNCIÓN $f(t) = E \sin t$ SOLO ES VÁLIDA $\forall t \in (0, \pi)$, YA QUE CUANDO $t \in (\pi, 2\pi)$ LA FUNCIÓN SENO TOMA VALORES NEGATIVOS. LO QUE SE HIZO PARA SALVAR A LA FUNCIÓN, ES RETRASARLA DURANTE $[T]$. ESTE EJEMPLO MUESTRA PERFECTAMENTE EL RETRASO DE $f(t)$.

EJEMPLO 9.- HALLA LA SERIE DE FOURIER PARA EL DIENTE DE SIERRA DE LA FIGURA [12]



SOLUCIÓN: LA FORMA DE ONDA TIENE PERIODO $[T=3]$; USANDO $[t_0=0]$ EN EL INTERVALO $t \in [0, 3]$; $f(t)$ ES EXPRESADA COMO:

$$[f(t) = t]$$

USANDO LA FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER Y DE (2.27)

$$D_k = \frac{1}{3} \int_0^3 t e^{-i \frac{2\pi k t}{3}}$$

E INTEGRANDO POR PARTES:

$$u = t ; \quad du = dt$$

$$v = \left[\frac{-3}{i2\pi k} e^{-i \frac{2\pi k t}{3}} \right] ; \quad dv = \left[e^{-i \frac{2\pi k t}{3}} dt \right] \quad \text{DE MODO QUE}$$

$$D_k = \frac{1}{3} \left[uv - \int v du \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{-3t}{i2\pi k} e^{-i \frac{2\pi k t}{3}} \Big|_0^3 - \left(\frac{-3}{i2\pi k} \right) \int_0^3 e^{-i \frac{2\pi k t}{3}} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{-3t}{i2\pi k} e^{-i \frac{2\pi k t}{3}} \Big|_0^3 - \left(\frac{-3}{i2\pi k} \right) \left(\frac{-3}{i2\pi k} \right) e^{-i \frac{2\pi k t}{3}} \Big|_0^3 \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{-9}{i2\pi k} e^{-i2\pi k} - \left(\frac{9}{(i2\pi k)^2} e^{-i2\pi k} + \frac{9}{(i2\pi k)^2} \right) \right] =$$

$$= \left[\frac{-3}{i2\pi k} e^{-i2\pi k} - \frac{3}{(i2\pi k)^2} e^{-i2\pi k} + \frac{3}{(i2\pi k)^2} \right] =$$

$$D_k = \left[\frac{-3 e^{-i2\pi k}}{i2\pi k} - \frac{3 e^{-i2\pi k}}{2\pi k} \left(\frac{-1}{i} \right) \right] \dots \dots \dots (2.31)$$

AHORA, RECORDANDO LA EXPRESIÓN (2.4) Y DE LA MISMA MANERA,

$$\left[e^{i2\pi k} = e^{-i2\pi k} = \text{UNO} \right] \quad \text{Y EN (2.31)}$$

$$D_k = \left[\frac{-3}{i2\pi k} \right] \quad \text{Y MULTIPLICANDO Y DIVIDIENDO POR } [i]$$

$$D_k = \frac{-3i}{i^2(2\pi k)} = \frac{-3i}{-2\pi k} = \left[\frac{3}{2\pi k} i \right] = \left[\frac{0.4774648 i}{k} \right]$$

$$D_k \approx \left[\frac{0.478 i}{k} \right]$$

EVALUANDO D_0 :

$$D_0 = \frac{1}{3} \int_0^3 t dt = \frac{1}{3} \frac{t^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{9}{2} \right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

ASÍ QUE

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{3i}{2\pi k} \right] e^{i \frac{2\pi k t}{3}} \quad \text{tal y como en la expresión (2.9),}$$

O BIEN

$$\begin{aligned} f(t) &= D_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{3}} = \\ &= 1.5 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{3i}{2\pi k} \right] e^{i \frac{2\pi k t}{3}} \quad \text{--- (2.32)} \end{aligned}$$

O QUIZÁ

$$f(t) = 1.5 + 0.478 \times 2i \left(e^{i \frac{2\pi t}{3}} + \frac{1}{2} e^{i \frac{4\pi t}{3}} + \frac{1}{3} e^{i \frac{6\pi t}{3}} + \dots - e^{-i \frac{2\pi t}{3}} - \frac{1}{2} e^{-i \frac{4\pi t}{3}} - \dots \right)$$

$$f(t) = 1.5 + 0.478 \times 2 \left[\frac{e^{i \frac{2\pi t}{3}} - e^{-i \frac{2\pi t}{3}}}{-i} + \frac{e^{i \frac{4\pi t}{3}} - e^{-i \frac{4\pi t}{3}}}{-2i} + \dots \right]$$

O EN FORMA REAL SABIENDO QUE

$$f(t) = D_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{3}} =$$

$$f(t) = 1.5 - 0.956 \left(\sin \frac{2\pi t}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi t}{3} + \dots + \frac{4}{4k} \sin \frac{2\pi k t}{3} + \dots \right) \quad \text{--- (2.33)}$$

ÉSTE RESULTADO MUESTRA QUE, POR ESTA FUNCIÓN, LOS COEFICIENTES REALES SON, SEGÚN (2.20a):

$$A_0 = 1.5; \quad A_k = \text{CERO } \forall k=1, 2, 3, \dots; \quad B_k = \left[\frac{-0.956}{k} \right].$$

CON REFERENCIA A ESTE EJEMPLO SE SUGIEREN LAS SIGUIENTES OBSERVACIONES:

* UNA FORMA DE ONDA PERIÓDICA HA SIDO ESCRITA COMO UNA SUMA DE UN VALOR CONSTANTE Y UN NÚMERO INFINITO DE FUNCIONES SENUSOIDALES. EL VALOR CONSTANTE ES EL VALOR PROMEDIO DE LA FUNCIÓN (tal como se define en (2.22) /a A_0) y es REFERIDO COMO LA COMPONENTE DIRECTA DE LA FUNCIÓN.

* EN LA FORMA REAL TRIGONOMÉTRICA, SÓLO HAY TÉRMINOS SENO, LOS TÉRMINOS COSENO SON CEROS (EXCEPTO PARA A_0). ÉSTE NO ES UN RESULTADO GENERAL Y ES APLICABLE SOLO A CIERTOS TIPOS DE FUNCIONES, QUE SERÁN ESTUDIADAS ADELANTE.

* LA AMPLITUD DE LAS ARMONICAS MAYORES B_k DISMINUYE A MEDIDA QUE Y AUMENTA, QUE ES EL ORDEN DE LA ARMÓNICA.

Ésto no es siempre así. Por ejemplo, es posible que para una función periódica dada, la amplitud de la quinta armónica sea mayor que la amplitud de la cuarta armónica. Sin embargo, siempre es verdad que la amplitud de la n -ésima armónica se aproxima a cero cuando n se aproxima al infinito.

En otras palabras, aunque la amplitud de armónicas sucesivas puede ir "subiendo y bajando", a medida que n aumenta, la amplitud siempre tenderá a cero cuando n aumenta.

Esta propiedad de los coeficientes de Fourier (amplitudes de las armónicas) puede ser probada usando las condiciones establecidas en el teorema de la serie de Fourier.

* Puesto que en este ejemplo la amplitud de la k -ésima armónica decrece con $\left[\frac{1}{k}\right]$, para propósitos más prácticos será suficiente representar tal función como la suma de un número finito de términos de la serie de Fourier.

En la siguiente figura [13], se muestra la suma del valor promedio, la fundamental y las tres primeras armónicas de la serie (2.33), de donde se observa que la aproximación es bastante buena.

A medida que se aumentan armónicas con su amplitud propia, la forma de onda se aproximará más y más a la original $f(t)$.

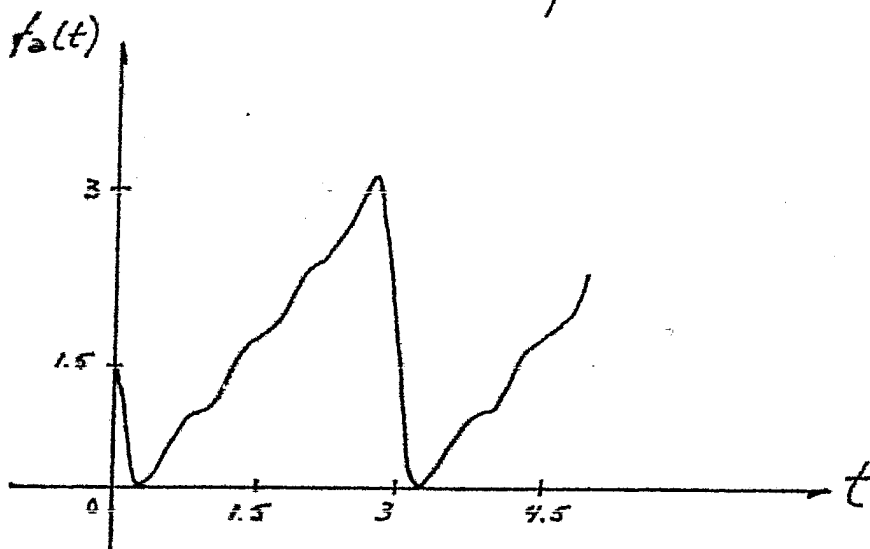


FIGURA [13].

2.5 SUPERPOSICION DE LAS SERIES DE FOURIER.-

ALGUNAS FUNCIONES PERIÓDICAS PUEDEN SER EXPRESADAS COMO LA SUMA DE VARIAS FUNCIONES PERIÓDICAS MÁS SIMPLES.

ES POSIBLE ENTONCES HALLAR LA SERIE DE FOURIER PARA LA SUMA, POR ADICION DE LAS SERIES DE FOURIER DE ESAS VARIAS FUNCIONES.

EJEMPLO 10.- HALLAR LA SERIE DE FOURIER PARA EL PULSO RECTANGULAR DE LA FIGURA [14] $f_0(t)$ Y USAR EL RESULTADO PARA DEDUCIR LA SERIE DE LA

FUNCIÓN DE LA FIGURA [15] $f_b(t)$.

FIGURA [14]

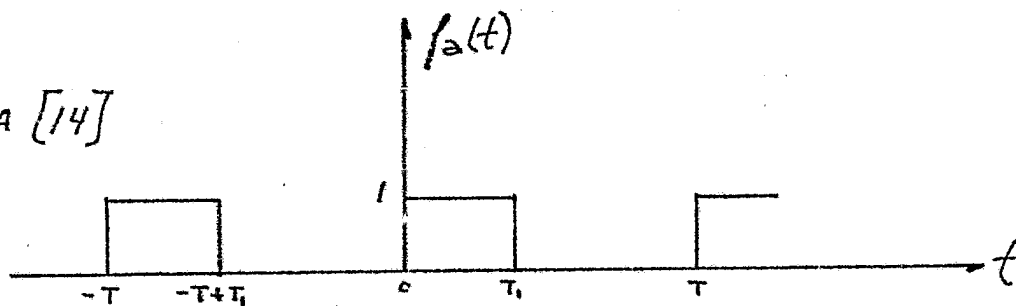
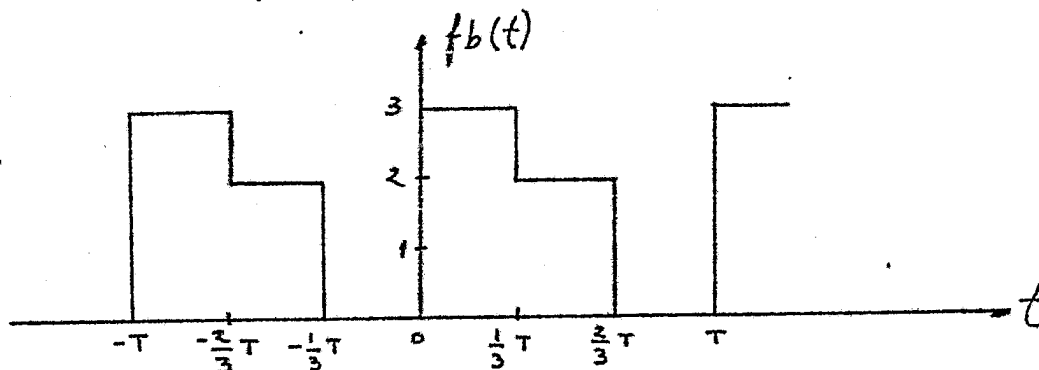


FIGURA [15]



solución:

$$a) f_a(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} ; D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_a(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt$$

$$f_a(t) = \begin{cases} \text{UNO} & t \in (0, T) \\ \text{CERO} & t \in (T, T) \end{cases}$$

$$D_k = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T_1} 1 e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt + \int_{T_1}^T 0 e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \right] =$$

$$D_k = \frac{1}{T} \int_0^{T_1} e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt = \frac{1}{T} \left[\frac{T e^{-i \frac{2\pi k t}{T}}}{-i 2\pi k} \right]_0^{T_1} \quad (2.34)$$

$$D_k = \frac{1}{T} \left[\frac{T e^{-i \frac{2\pi k T_1}{T}}}{-i 2\pi k} + \frac{T}{i 2\pi k} \right] = \left(\frac{1}{i 2\pi k} \right) \left[1 - e^{-i \frac{2\pi k T_1}{T}} \right]$$

$$D_k = \frac{1}{i 2\pi k} \left[1 - e^{-i \frac{2\pi k T_1}{T}} \right] \quad (2.35)$$

b) VIENDO LA FIGURA [15] y COMPARÁNDOLA CON LA FIGURA [14], SE PUEDE DETERMINAR QUE:

$$f_b(t) = f_a(t) \Big|_{T_1 = \frac{1}{3}T} + 2f_a(t) \Big|_{T_2 = \frac{2}{3}T} ; \text{ y sustituyendo en (2.34)}$$

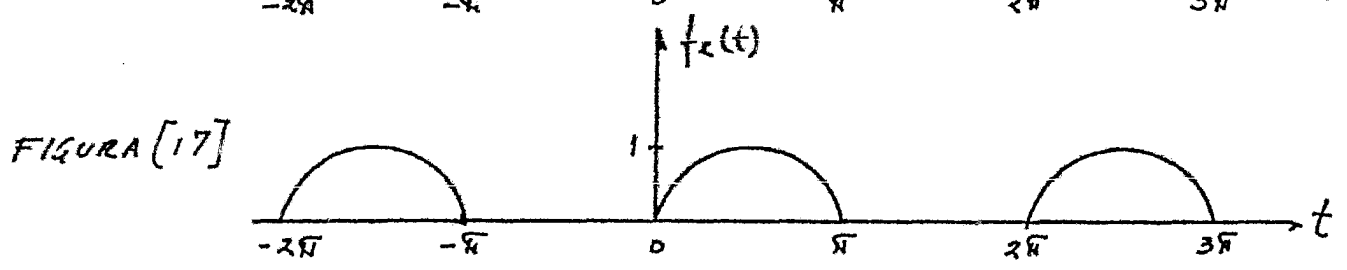
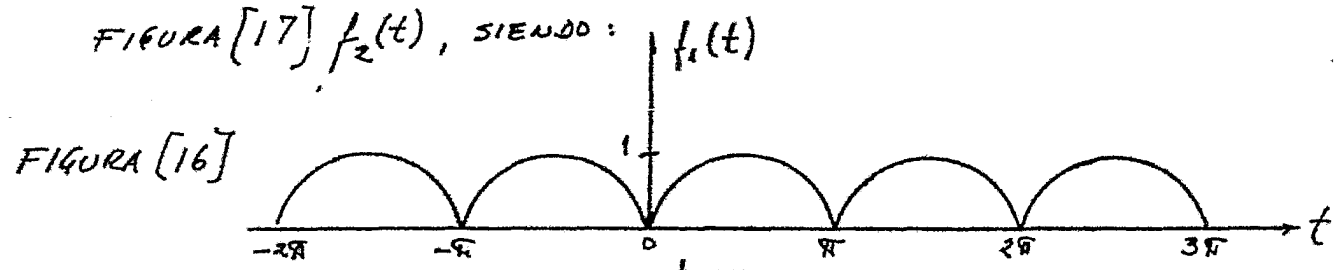
$$D_b^k = \frac{1}{T} \left[\frac{T e^{-i2\pi k t}}{-i2\pi k} \right]_0^{\frac{1}{3}T} + \frac{2}{T} \left[\frac{T e^{-i2\pi k t}}{-i2\pi k} \right]_0^{\frac{2}{3}T}$$

$$D_b^k = \left[\frac{-1}{i2\pi k} \left(e^{-i\pi k \frac{2}{3}} - 1 \right) + \frac{(2)}{-i2\pi k} \left(e^{-i\pi k \frac{4}{3}} - 1 \right) \right] =$$

$$D_b^k = \frac{-1}{i2\pi k} \left[e^{-i\pi k \frac{2}{3}} - 3 + 2 e^{-i\pi k \frac{4}{3}} \right] \text{ ASÍ QUE FINALMENTE}$$

$$f_b(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{i2\pi k} \left[e^{-i\pi k \frac{2}{3}} + 2 e^{-i\pi k \frac{4}{3}} - 3 \right] e^{i \frac{2\pi k t}{T}}$$

EJEMPLO 11.- HALLER LA SERIE DE FOURIER PARA LA FIGURA [16] $f_1(t)$ y USE EL RESULTADO PARA DEDUCIR LA SERIE DE FOURIER DE LA FIGURA [17] $f_2(t)$, SIENDO:



solución:

siendo $f_1(t) = \begin{cases} \sin t & t \in (0, \pi) \\ \sin(t - \pi) & t \in (\pi, 2\pi) \\ \sin(t - 2\pi) & t \in (2\pi, 3\pi) \end{cases} \Rightarrow [T = \pi]$

$$D_{1,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin t] e^{-i2\pi k t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-i2\pi k t} \sin t dt$$

y resolviendo

$$D_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{-izkt} (-izk \operatorname{sen} t - \operatorname{cos} t)}{(-izk)^2 + 1} \right]_0^{\pi}$$

$$D_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{-izkt} (-izk \operatorname{sen} t - \operatorname{cos} t)}{1 - 4k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{-i2\pi k} + 1}{1 - 4k^2} \right]$$

$$f_1(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-i2\pi k} + 1}{\pi - 4\pi k^2} \right] e^{izkt} \quad \text{PERO } \left[e^{-i2\pi k} = \text{UNO} \right]$$

ENTONCES $f_1(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi - 4\pi k^2} \right] e^{izkt}$; O BIEN

$$f_1(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - 4k^2} \right] e^{izkt} ; \text{ y EN FORMA REAL}$$

SI $A_k = 2 \operatorname{Re} D_k$ y $B_k = -2 \operatorname{Im} D_k = \text{CERO}$

$$f_1(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - 4k^2} \right] \operatorname{cos} 2kt$$

2) VIENDO LA FIGURA [17] y COMPARÁNDOLA CON LA FIGURA [16] SE DETERMINA QUE

$$f_2(t) = \left[\frac{1}{2} f_1(t) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \right] \text{ y FINALMENTE}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - 4k^2} \right] \operatorname{cos} 2kt.$$

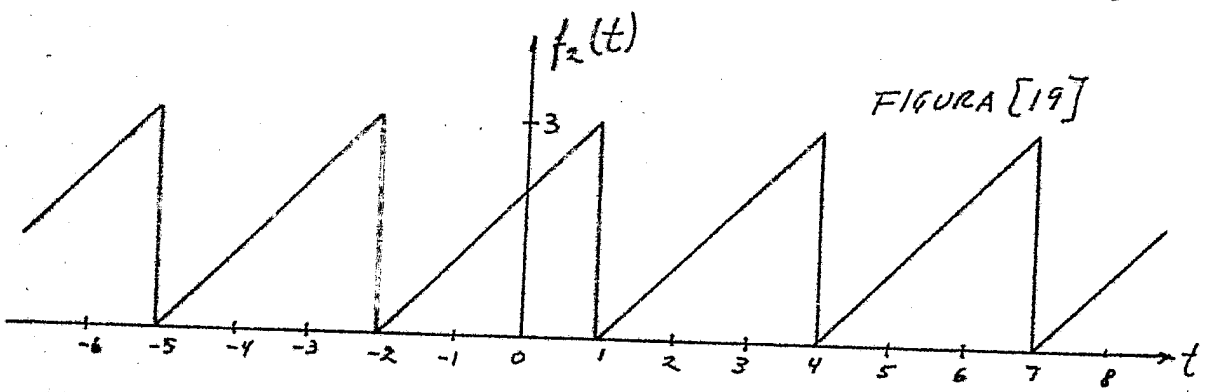
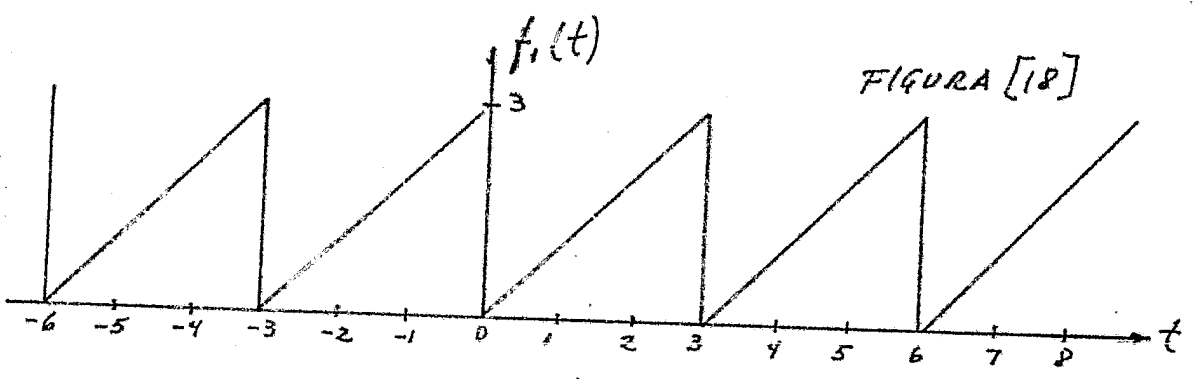
2.6 DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO.-

SE HA VISTO QUE LA SERIE DE FOURIER PARA EL DIENTE DE SIERRA DEL EJEMPLO 9 ES, SEGÚN LA EXPRESIÓN (2.32)

$$f_1(t) = \frac{3}{2} + \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi k t}{3} \right) ; \text{ O BIEN}$$

$$f_1(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{cos} \left(\frac{2\pi k t}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \text{ --- (2.38)}$$

PUES BIEN, VEANSE LAS FIGURAS [18] y [19]:



LA FUNCION $f_2(t)$ TIENE LA MISMA FORMA DE ONDA QUE $f_1(t)$; TAL Y COMO PUEDE APRECIARSE EN LA FIGURA [19] CON RESPECTO A LA FIG. [18]; PERO SE ENCUENTRA RETRASADA EN EL TIEMPO CON RESPECTO A $f_1(t)$ EN UNA UNIDAD, DE MANERA QUE

$$f_2(t) = f_1(t-1) \text{ --- (2.39)}$$

ENTONCES, LA RETRASADA $f_2(t)$ PODRÁ OBTENER SU SERIE DE FOURIER A PARTIR DE $f_1(t)$ REEMPLAZANDO $[t]$ POR $[t-1]$; ASÍ:

$$f_2(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left[\frac{2\pi k (t-1)}{3}\right] \text{ --- (2.40)}$$

$$f_2(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos\left[\frac{2\pi k (t-1)}{3} - \frac{\pi}{2}\right] \text{ --- (2.41)}$$

$$f_2(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos\left[\frac{2\pi k t}{3} + \left(\frac{-2\pi k}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right] \text{ --- (2.42)}$$

LA ECUACION (2.42) ES LA SERIE DE FOURIER PARA LA FUNCION $f_2(t)$ DE LA FORMA: (RECORDANDO LA EXPRESION (1.68))

$$f_2(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \psi_k\right) \text{ --- (2.43)}$$

MIENTRAS QUE LA ECUACION (2.38) ES LA FORMA TRIGONOMETRICA DE $f_1(t)$. COMPARANDO LAS ECUACIONES (2.38) Y (2.42) SE OBSERVA QUE LOS COEFICIENTES $[C_k]$ EN AMBOS PERMANECEN IGUAL, Y LO QUE CAMBIA ES EL ÁNGULO ψ_k DE CADA ARMONICA

ESTE RESULTADO SE PUEDE GENERALIZAR CON EL SIGUIENTE TEOREMA:

TEOREMA DEL DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO.

SI UNA FUNCION $f_a(t)$ TIENE LA SERIE DE FOURIER

$$f_a(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{\frac{j2\pi kt}{T}} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \psi_k\right) \quad (2.44)$$

ENTONCES, LA FUNCION RETRASADA EN EL TIEMPO PARA $[t_1]$ TIENE LA SERIE DE FOURIER:

$$\begin{aligned} f_a(t-t_1) &= \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{\frac{j2\pi k}{T}(t-t_1)} = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left[D_k e^{\frac{-j2\pi kt_1}{T}} \right] e^{\frac{j2\pi kt}{T}} \quad (2.45) \end{aligned}$$

O BIEN, LA FORMA REAL

$$f_a(t-t_1) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \psi_k - \frac{2\pi kt_1}{T}\right) \quad (2.46)$$

OBSÉRVESE QUE EL EFECTO DE UN TIEMPO DE RETRASO $[t_1]$ EN LOS COEFICIENTES COMPLEJOS ORIGINALES D_k , ES UN CAMBIO EN EL ÁNGULO DE FASE POR LA CANTIDAD $\left[\frac{2\pi kt_1}{T}\right]$; ÉSTO ES

$$\left[D_k \right]_{\text{FUNCION RETRASADA}} = \left[D_k \right]_{\text{FUNCION ORIGINAL}} \times e^{\frac{-j2\pi kt_1}{T}} \quad (2.47)$$

EN DONDE SE VE QUE (2.47) ES ANALÓGA A (2.45).

SE PUEDE RESUMIR LA DISCUSIÓN COMO SIGUE: SI LA FUNCION $f_b(t)$ TIENE LA MISMA FORMA DE ONDA QUE $f_a(t)$ PERO ESTÁ RETRASADA EN EL TIEMPO EN $[t_1]$, LAS AMPLITUDES DE LAS ARMÓNICAS DE LAS FUNCIONES SON IDÉNTICAS, O SEA, LAS $[C_k]$ SON IGUALES; MIENTRAS QUE EL ÁNGULO DE FASE DE LA k -ÉSIMA ARMÓNICA DE $f_b(t)$ ES $\left[\frac{2\pi kt_1}{T}\right]$ RADIANTES MENOR QUE EL ÁNGULO DE FASE DE LA ARMÓNICA CORRESPONDIENTE DE $f_a(t)$; O SEA,

$$\psi_k = \left[\psi_k - \frac{2\pi kt_1}{T} \right] \quad \text{COMPÁRESE (2.44) CON (2.45)}$$

EN ELECTRÓNICA, LA APLICACIÓN MÁS IMPORTANTE DE ESTE TEOREMA ES INVERSA: SI DOS FUNCIONES TIENEN LAS MISMAS AMPLITUDES ARMÓNICAS, Y EL ÁNGULO DE FASE DIFIERE DE MANERA QUE EL DEFASAMIENTO ENTRE ARMÓNICAS CORRESPONDIENTES ES PROPORCIONAL A LA FRECUENCIA DE LA ARMÓNICA, SE CONCLUYE QUE LAS DOS FUNCIONES TIENEN LA MISMA FORMA DE ONDA.

2.7. PROPIEDADES DE SIMETRÍA DE CIERTAS FORMAS DE ONDA.

PARA LA FORMA DE ONDA DADA EN EL EJEMPLO 9, LA SERIE DE FOURIER TIENE UNA CONSTANTE Y TÉRMINOS SEÑO SOLAMENTE - VER EXPRESION (2.32) Y (2.33) -, MIENTRAS QUE PARA LA MISMA FUNCIÓN RETRASADA EN UNA UNIDAD, COMO SE DEMOSTRÓ EN LA SECCIÓN 2.6, RESULTÓ SER, SEGÚN LA EXPRESION (2.42):

$$f_2(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos \left[\frac{2\pi k t}{3} - \left(\frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \right]; \text{ O BIEN,}$$

CON BASE A (1.52A)

$$f_2(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} \cos \left(\frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{2\pi k t}{3} \right) + \frac{1}{k} \sin \left(\frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{2\pi k t}{3} \right) \right];$$

ÉSTO ES, PARA $f_2(t)$

$$A_0 = \frac{3}{2}; \quad A_k = \frac{-3}{\pi k} \cos \left(\frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{2} \right); \quad \forall k \geq 1$$

$$B_k = \frac{-3}{\pi k} \sin \left(\frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{2} \right); \quad \forall k \geq 1,$$

MIENTRAS QUE PARA $f_1(t)$

$$A_0 = \frac{3}{2}; \quad A_k = \text{CERO}; \quad B_k = \frac{-3}{\pi k} \quad \forall k \geq 1$$

EL HECHO DE QUE $f_1(t)$ TENGA UNA FORMA MÁS SIMPLE ES EL RESULTADO DE CIERTAS PROPIEDADES DE SIMETRÍA DE $f_1(t)$.

TALES PROPIEDADES SERÁN AHORA CONSIDERADAS EN FORMA GENERAL.

PROPIEDADES DE SIMETRÍA -

FUNCIÓN PAR. - SE DICE QUE UNA FUNCIÓN $f(t)$ ES "PAR" CON RESPECTO AL EJE ($t=a$) SI

$$f(a+t) = f(a-t) \quad \text{--- --- --- --- ---} \quad (2.48)$$

EN PARTICULAR, SI EL EJE DE SIMETRÍA ES $t=0$, DE MANERA QUE

$$f(t) = f(-t), \text{ SE DICE QUE LA FUNCIÓN ES UNA FUNCIÓN PAR.}$$

EL TÉRMINO "FUNCIÓN PAR" ES USADO PORQUE LA SERIE DE F.C. ALGUNAS VECES PARA TALES FUNCIONES CONTIENE SOLAMENTE POTENCIAS PARES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

COMO UN EJEMPLO DE UNA FUNCION PAR, PODEMOS CITAR $[f(t) = a \cdot t^2]$, ó $[f(t) = A \cos \omega t]$; PUEDE QUE $[t^2 = t^2]$ Y $[\cos t = \cos(-t)]$ POR LO QUE ESTAS FUNCIONES SON PARES.

EN LA FIGURA [20] SE MUESTRA UNA FUNCION PAR $f_1(t)$

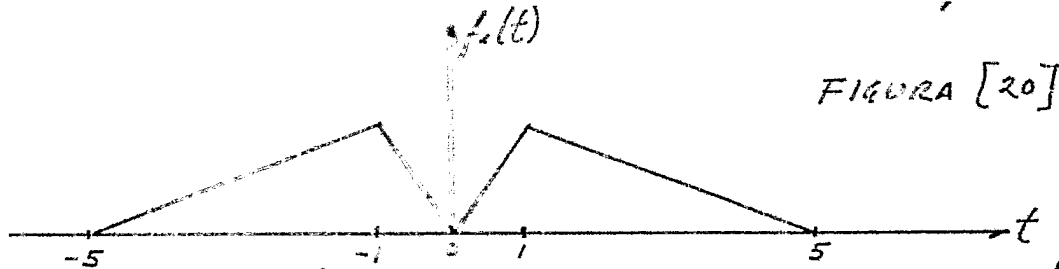


FIGURA [20]

EN LA FIGURA [21] SE MUESTRA LA MISMA FUNCION PAR PERO RETRASADA DE TAL MANERA QUE ES SIMETRICA CON RESPECTO A $[t=2]$

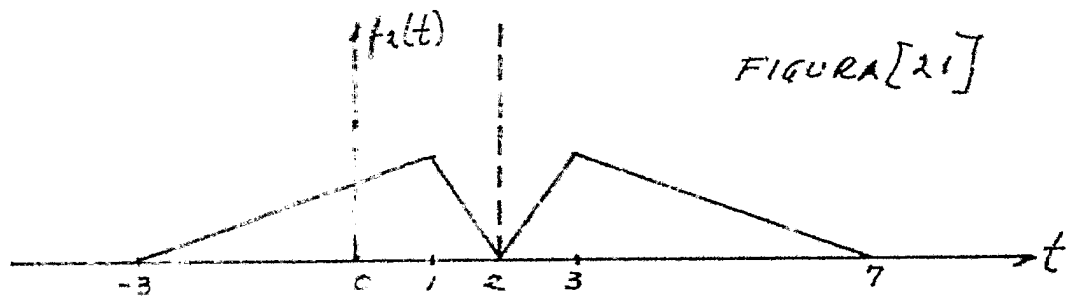


FIGURA [21]

EN GENERAL, SI $f(t)$ ES UNA FUNCION PAR, $f(t-a)$ ES PAR CON RESPECTO AL RETRASO $[t=a]$

* SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA SUMA Y EL PRODUCTO DE FUNCIONES PARES DAN FUNCIONES PARES; ESTO ES MUY FACIL DE RECORDAR ADOPTANDO PARA ELLO LA REGLA DE LOS SIGNOS CUANDO CONSIDERAMOS A UNA FUNCION PAR COMO [+]; DE TAL FORMA QUE:

$$[+] \text{ MAS } [+] = [+]$$

$$[+] \text{ POR } [+] = [+]$$

UNA FUNCION PAR SE PUEDE IDENTIFICAR OBSERVANDO QUE LA GRAFICA DE LA FUNCION PARA VALORES POSITIVOS DE $[t]$ ES LA IMAGEN (COMO SI SOBRE EL EJE DE SIMETRIA SE COLOCARA UN ESPEJO) DE LA GRAFICA PARA VALORES NEGATIVOS DE $[t]$; ESTO ES SI EL ESPEJO ES COLOCADO EN $t=0$ — COMO EN LA FIGURA [20] — PERPENDICULAR AL EJE t ; LA FORMA DE ONDA DE $f(t)$ PARA VALORES NEGATIVOS DE $[t]$ SERA LA IMAGEN DE SU FORMA DE ONDA PARA VALORES POSITIVOS DE $[t]$.

POR ESTA RAZON A UNA FUNCION PAR SE LE DICE QUE TIENE SIMETRIA DE EJE.

A CONTINUACION SE ESCRIBEN LAS CARACTERISTICAS DE LA FUNCION IMPAR.

FUNCIÓN IMPAR.- SE DICE QUE UNA FUNCIÓN ES IMPAR CON RESPECTO A UN EJE $[t=b]$ SI:

$$f(b+t) = [-f(b-t)] \quad \text{--- -- -- -- --} \quad (2.49)$$

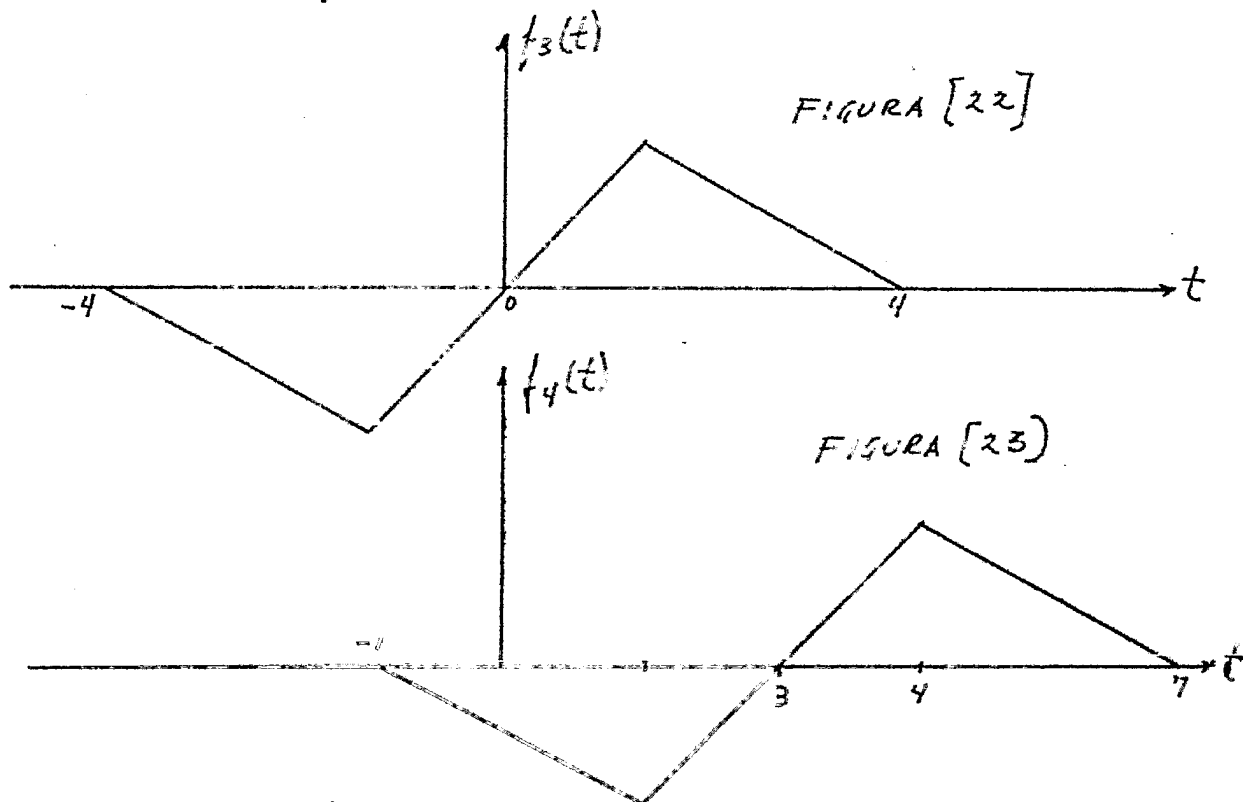
EN PARTICULAR, SI $[b=0]$, DE MODO QUE $[f(t) = -f(-t)]$, ENTONCES SE DICE QUE LA FUNCIÓN ES IMPAR.

LAS FUNCIONES $[f(t) = t^3]$ Y $f(t) = \text{sen } t$ SON EJEMPLOS DE FUNCIONES IMPARES. $[\text{sen } t = -\text{sen}(-t)]$.

LA FUNCIÓN $f_4(t)$ ES IMPAR CON RESPECTO A $[t=3]$ PORQUE

$$f_4(t+3) = -f_4(-t+3) = -f_4(3-t)$$

VEANSE LAS FIGURAS [22] Y [23] PARA CONFIRMARLO



DE IGUAL FORMA QUE SE ADOPTÓ LA REGLA DE LOS SIGNOS PARA FUNCIONES PARES, AHORA SE APLICARÁ A LAS FUNCIONES IMPARES, CONSIDERANDO UNA FUNCIÓN IMPAR COMO $[-]$, DE LA MANERA QUE

$$\begin{aligned} [-] + [-] &= [-] \\ [-] \cdot [-] &= [+] \end{aligned}$$

ESTO QUIERE DECIR, LA SUMA DE DOS FUNCIONES IMPARES DA UNA FUNCIÓN IMPAR, PERO EL PRODUCTO DE DOS FUNCIONES IMPARES DA UNA FUNCIÓN PAR.

PARA PROBAR ESTO ÚLTIMO, SEAN $f_5(t)$ y $f_6(t)$ DOS FUNCIONES IMPARES:

SEA $f(t) = [f_5(t) \times f_6(t)]$; ENTONCES

$f(-t) = [f_5(-t) \times f_6(-t)]$ y PUESTO QUE $f_5(t)$ y $f_6(t)$ SON IMPARES

$$[f_5(-t) \times f_6(-t)] = [-f_5(t)] [-f_6(t)] \quad \text{VÉASE (2.49).}$$

$\therefore f(-t) = [f_5(t) \times f_6(t)]$; o SEA, $f(t) = f(-t)$ ES FUNCION PAR.

EXPRESION DE UNA FUNCION ARBITRARIA EN TÉRMINOS DE SUS COMPONENTES PAR E IMPAR.-

SEA $f(t)$ UNA FUNCION ARBITRARIA, SE PUEDE ESCRIBIR

$$2f(t) = f(t) - f(-t) + f(t) + f(-t) ; \text{ o BIEN}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)] = \phi_1(t) + \phi_2(t) ;$$

EN ESTA ÚLTIMA EXPRESIÓN,

$\phi_1(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]$ ES UNA FUNCION PAR, PUESTO QUE

$$\phi_1(-t) = \frac{1}{2} [f(-t) + f(t)] ; \text{ ES DECIR}$$

$$\phi_1(t) = \phi_1(-t) \quad \text{TAÍ y COMO EN (2.48)}$$

EN FORMA SIMILAR

$\phi_2(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$ ES UNA FUNCION IMPAR, DADO QUE

$$\phi_2(-t) = \frac{1}{2} [f(-t) - f(t)] = -\frac{1}{2} [f(t) - f(-t)] \quad \text{ASI QUE}$$

$$\phi_2(-t) = -\phi_2(t) \quad \text{TAÍ y COMO EN (2.49) ;}$$

ESTO QUIERE DECIR QUE UNA FUNCION ARBITRARIA PUEDE SER EXPRESADA COMO LA SUMA DE UNA FUNCION PAR Y UNA FUNCION IMPAR.

INTEGRACION DE FUNCIONES PARES E IMPARES.- A) EVALUAR LOS COEFICIENTES DE FOURIER SE PRESENTAN INTEGRALAS DE LA FORMA:

$$\int_{-a}^a f(x) \cos x \, dx = \int_{-a}^a F(x) \, dx$$

AHORA SE DEMOSTRARA QUE SI EL INTEGRANDO $[F(x) = f(x) \text{ sen } x]$ ES UNA FUNCIÓN IMPAR, ENTÓNCES

$$\left[\int_{-a}^a F(x) dx \equiv \text{CERO} \right]; \forall a \quad \text{--- (2.50)}$$

DEMOSTRACION:

$$\int_{-a}^a F(x) dx = \int_{-a}^0 F(x) dx + \int_0^a F(x) dx \quad \text{--- (2.51)}$$

AHORA, EN LA INTEGRAL: $\int_{-a}^0 F(x) dx$; SEA $[y = -x]$; ENTÓNCES

$$\int_{-a}^0 F(x) dx = - \int_{-a}^0 F(-y) dy = \int_0^a F(-y) dy \quad \text{--- (2.52)}$$

SUSTITUYENDO (2.52) EN (2.51)

$$\int_{-a}^a F(x) dx = \int_0^a F(-y) dy + \int_0^a F(x) dx \quad \text{--- (2.53)}$$

PUESTO QUE x e y SON VARIABLES COMÓDINES, SE PUEDE HACER

$$\int_0^a F(-y) dy = \int_0^a F(-x) dx \quad \text{--- (2.54)}$$

y sustituyendo (2.54) EN (2.53):

$$\int_{-a}^a F(x) dx = \int_0^a [F(x) + F(-x)] dx \quad \text{--- (2.55)}$$

SI $F(x)$ ES UNA FUNCIÓN IMPAR: $[F(x) + F(-x) = \text{CERO}]$ (VEASE (2.49))

y POR LO TANTO LA INTEGRAL (2.55) SE HACE CERO, ÉSTO ES:

SI $F(x)$ ES IMPAR, ENTÓNCES $F(x) = [-F(-x)]$ SEGÚN (2.49) y

SOMANDO $F(x) + F(-x) = F(-x) - F(-x) = \text{CERO}$.

POR OTRO LADO, SI $F(x)$ ES UNA FUNCIÓN PAR EN LA QUE SEGÚN (2.48)

$[F(x) = F(-x)]$; ENTÓNCES EN (2.55): $[F(x) + F(-x) = 2F(x)]$. DE AQUÍ

SE PUEDE ESTABLECER QUE:

$$\int_{-a}^a F(x) dx = \begin{cases} \text{CERO} & ; \forall F(x) = f(x) \text{ sen } x \Rightarrow \text{IMPAR} \\ 2 \int_0^a F(x) dx & ; \forall F(x) = f(x) \text{ cos } x \Rightarrow \text{PAR} \end{cases} \quad \text{--- (2.56)}$$

EJEMPLO 12: HALLAR LA SERIE DE FOURIER DE LA FORMA DE ONDA MOSTRADA EN LA FIGURA [24]

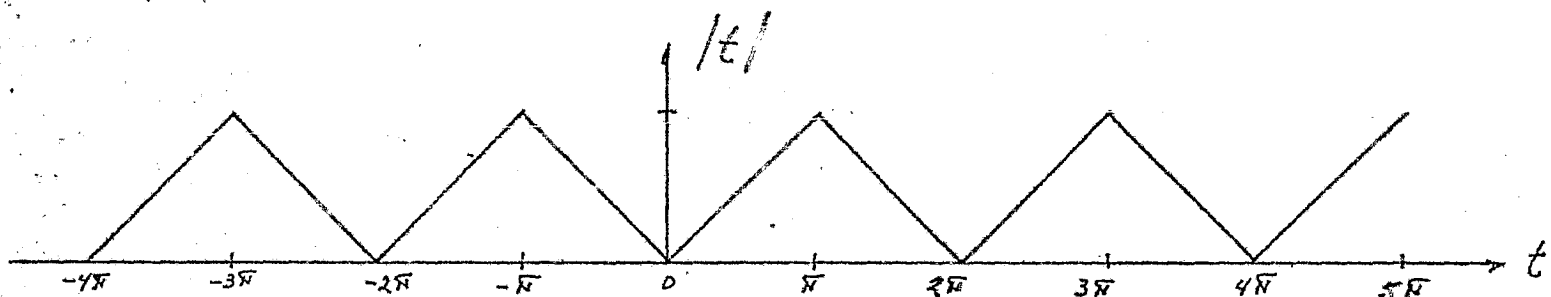


FIGURA [24]

SEA $f(t) = |t| \forall t \in [-\pi, \pi]$; EL PERIODO DE LA FUNCION ES $[T = 2\pi]$. COMO PUEDE OBSERVARSE EN LA FIGURA [24], LA FUNCION ES PAR; POR LO QUE CON BASE A (2.56)

$$\int_{-a}^a F(x) dx = 2 \int_0^a F(x) dx \quad \forall F(x) \text{ PAR}; \text{ PARA EL CASO}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = 2 \int_0^{\pi} F(x) dx; \text{ PERO SE SABE QUE}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad \text{EN DONDE} \quad D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-\frac{i2\pi kt}{T}}$$

Y SABIENDO QUE LA FUNCION ES PAR, ENTONCES

$$D_k = 2 \left[\frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} \right] = 2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t e^{-ikt} dt \right];$$

E INTEGRANDO POR PARTES:

$$u = t; \quad du = dt$$

$$v = \frac{1}{-ik} e^{-ikt}; \quad dv = e^{-ikt} \Rightarrow uv - \int v du$$

$$D_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-t}{ik} e^{-ikt} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{(-1)}{ik} e^{-ikt} dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{-ik} e^{-ik\pi} - \frac{e^{-ik\pi}}{(ik)^2} + \frac{1}{(ik)^2} \right]$$

$$D_k = \frac{e^{-ik\pi}}{\pi} \left[\frac{\pi}{-ik} - \frac{1}{(ik)^2} \right] - \frac{1}{\pi k^2} = \frac{(-1)^k}{\pi} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{\pi}{ik} \right] - \frac{1}{\pi k^2} =$$

$$D_k = (-1)^k \left[\frac{(-1)}{ik} + \frac{1}{\pi k^2} \right] - \frac{1}{\pi k^2} = (-1)^k \left[\frac{i}{k} + \frac{1}{\pi k^2} \right] - \frac{1}{\pi k^2}$$

FINA/MEN.E

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[(-1)^k \left(\frac{c}{k} + \frac{1}{\pi k^2} \right) - \frac{1}{\pi k^2} \right] e^{ickt} \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{\frac{c 2\pi k t}{T}}$$

SIMETRÍA DE MEDIA ONDA.

SI $f(t)$ ES PERIÓDICA CON PERÍODO $[T]$, $f(t)$ COMO SE ESTABLECE EN (2.3) DE MANERA QUE

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= f(t+T) \\ \text{y SI ADEMÁS } f(t) &= -f\left(t + \frac{T}{2}\right) \end{aligned} \right\} \text{--- -- -- -- -- (2.56A)}$$

ENTONCES SE DICE QUE $f(t)$ FUNCION PERIÓDICA TIENE SIMETRÍA DE MEDIA ONDA.

AHORA BIEN, SI $f(t)$ TIENE SIMETRÍA DE MEDIA ONDA, DE ACUERDO CON (2.56A) SE TIENE QUE

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

PUESTO QUE $f(t)$ ES PERIÓDICA CON PERÍODO $[T]$,

$$f\left(t - \frac{T}{2}\right) = f\left(t + T - \frac{T}{2}\right) = f\left(t + \frac{T}{2}\right); \text{ POR CONSIGUIENTE}$$

$$\left[f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] \text{--- -- -- -- -- (2.56B)}$$

y $f(t)$ FUNCION TIENE SIMETRÍA DE MEDIA ONDA.

COMO EJEMPLO SE TIENE LA FORMA DE ONDA DE LA FIGURA [25].

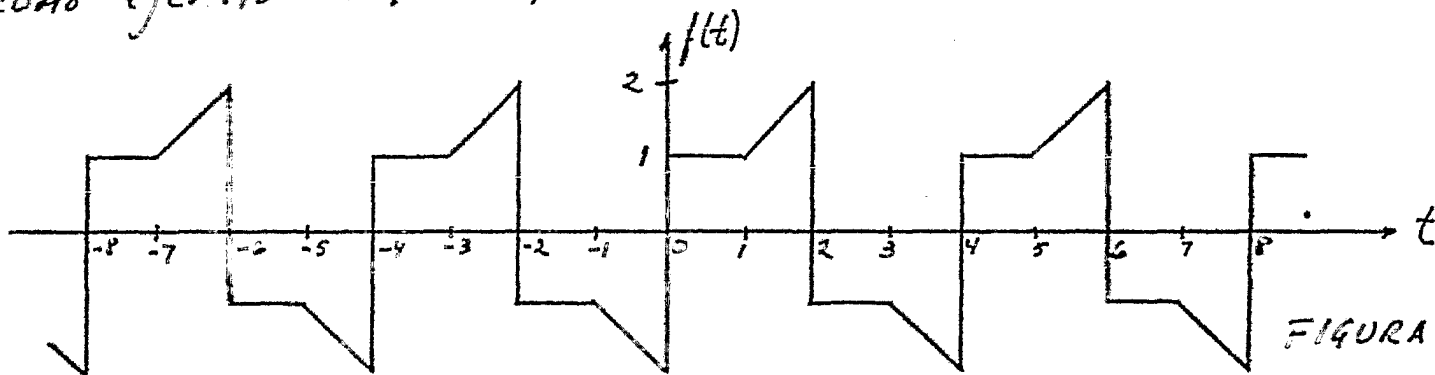
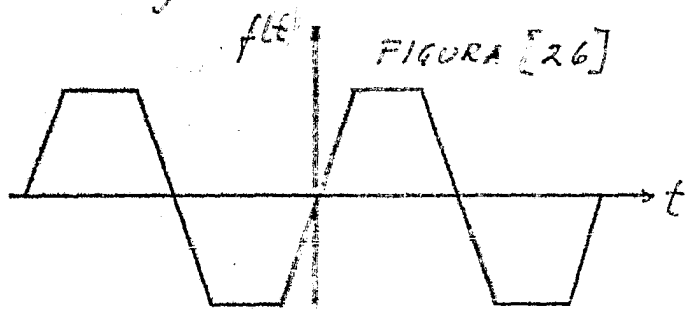


FIGURA [25].

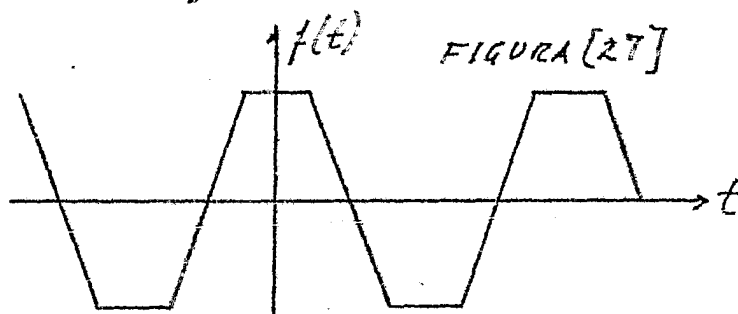
SE DEBE NOTAR QUE LA PORCIÓN NEGATIVA DE LA ONDA ES EL REFLEJO DE LA PORCIÓN POSITIVA DESPLAZADA MEDIO PERÍODO $\left[\frac{T}{2}\right]$.

SIMETRÍA DE CUARTO DE ONDA. SI UNA FUNCION PERIÓDICA TIENE SIMETRÍA DE MEDIA ONDA y ADEMÁS ES UNA FUNCION PAR O IMPAR, SE DICE QUE TIENE SIMETRÍA DE CUARTO DE ONDA PAR O IMPAR

COMO EJEMPLO SE TIENEN LAS FIGURAS [26] y [27]



SIMETRÍA DE CUARTO DE ONDA IMPAR



SIMETRÍA DE CUARTO DE ONDA PAR

CONSIDERESE AHORA LA FUNCIÓN PERIÓDICA $f(t)$ CON SIMETRÍA DE CUARTO DE ONDA.

SEA $\left[F(t) = f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right]$, O BIEN, $\left[F(t) = f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right]$ Y OBSERVE

QUE $\left[F(t) = F\left(t + \frac{T}{2}\right) \right]$ Y QUE ES PAR O IMPAR _____ (2.57)

DE LA ECUACIÓN (2.56), SI $F(t)$ ES IMPAR ENTONCES

$$\int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt = \text{CERO}; \quad \text{Y SI}$$

$$F(t) \text{ ES PAR: } \int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt = 2 \int_0^{T/2} F(t) dt \quad \text{_____ (2.57A)}$$

SI $F(t)$ ES PAR Y TAMBIÉN TIENE LA PROPIEDAD (2.57) DE QUE

$F(t) = F\left(t + \frac{T}{2}\right)$; EN ESTE CASO

$$2 \int_0^{T/2} F(t) dt = 2 \int_0^{T/4} F(t) dt + 2 \int_{T/4}^{T/2} F(t) dt \quad \text{_____ (2.58)}$$

AHORA, EN LA SEGUNDA INTEGRAL DEL LADO DERECHO DE (2.58),

SEA $t = \left[x + \frac{T}{2} \right]$; ENTONCES

$$2 \int_{T/4}^{T/2} F(t) dt = 2 \int_{x=T/4}^0 F\left(x + \frac{T}{2}\right) dx; \quad \text{PERO PUESTO QUE}$$

$F\left(x + \frac{T}{2}\right) = F(x)$, ENTONCES

$$2 \int_{T/4}^{T/2} F(t) dt = 2 \int_{-T/4}^0 F(x) dx = 2 \int_0^{T/4} F(x) dx = 2 \int_0^{T/4} F(t) dt \quad \text{_____ (2.59)}$$

DE LA ECUACIÓN (2.56) SE CONCLUYE QUE $[A_k = \text{CERO}]$. DE LA MISMA FORMA, PUESTO QUE EL PRODUCTO DE FUNCIONES IMPARES ES UNA FUNCIÓN PAR, SE CONCLUYE DE LA ECUACIÓN (2.56) QUE LA ECUACIÓN (2.62) ES UNA FÓRMULA SIMPLIFICADA PARA B_k SI $f(t)$ ES IMPAR.

FUNCIONES PARES.- SI $f(t)$ ES UNA FUNCIÓN PERIÓDICA PAR CON PERIODO $[T]$ TAL QUE $f(t) = f(t+T)$, SU SERIE DE FOURIER CONTIENE SOLOAMENTE TÉRMINOS COSENO; ÉSTO ES;

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right); \quad \forall f(t) = f(-t) \quad (2.65)$$

DONDE $[B_k = 0]$ y $A_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi k t}{T} dt$; $\forall k > 0$ (2.66)

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \quad (2.67)$$

LA DEMOSTRACION DE ESTAS AFIRMACIONES ES SEMEJANTE A LA ANTERIOR.

SIMETRÍA DE MEDIA ONDA.- SI UNA FUNCIÓN TIENE SIMETRÍA DE MEDIA ONDA TAL QUE CUMPLE CON LAS CONDICIONES ESTABLECIDAS EN (2.56A) y (2.56B) ENTONCES SUS COEFICIENTES DE FOURIER NO INCLUIRÁN ARMÓNICAS PARES Y:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{2k-1} \cos\left[(2k-1) \frac{2\pi t}{T}\right] + B_{2k-1} \sin\left[(2k-1) \frac{2\pi t}{T}\right] \right] \quad (2.68)$$

DONDE $A_{2k-1} = \left[\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos\left[(2k-1) \frac{2\pi t}{T}\right] dt \right]$ (2.69)

$$B_{2k-1} = \left[\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin\left[(2k-1) \frac{2\pi t}{T}\right] dt \right] \quad (2.70)$$

DEMOSTRACION:

$$\left[\frac{1}{2} A_k - i \frac{1}{2} B_k \right] = D_k = \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \quad (2.71)$$

$$o \quad D_k = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^T f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \quad (2.72)$$

SEA $x = \left(t - \frac{T}{2}\right)$ EN LA INTEGRAL $\int_{-T/2}^T f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}}$; ENTONCES

$$\int_{T/2}^T f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt = \int_0^{T/2} f(x + \frac{T}{2}) e^{-i \frac{2\pi k}{T} (x + \frac{T}{2})} dx$$

SI LA FUNCION $f(t)$ TIENE SIMETRÍA DE MEDIA ONDA, ENTONCES

$$\left[f(x + \frac{T}{2}) = -f(x) \right]; \text{ DE AQUÍ QUE}$$

$$\int_0^{T/2} f(x + \frac{T}{2}) e^{-i \frac{2\pi k}{T} (x + \frac{T}{2})} dx = - \int_0^{T/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi k}{T} (x + \frac{T}{2})} dx =$$

$$= - \int_0^{T/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T} (t + \frac{T}{2})} dt \quad \text{--- (2.73)}$$

y sustituyendo (2.73) en (2.72):

$$D_k = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} (1 - e^{-i\pi k}) dt; \text{ y como } [e^{-i\pi k} = (-1)^k]$$

ENTONCES $D_k = \text{CERO}$ $\forall k \rightarrow \text{PAR}$ y FINALMENTE

$$D_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt; \forall k \rightarrow \text{IMPAR}$$

MAYORES SIMPLIFICACIONES DE LAS FORMULAS INTEGRALES PARA LOS COEFICIENTES DE FOURIER, RESULTAN SI LA FUNCION TIENE SIMETRÍA DE UN CUARTO DE ONDA.

A CONTINUACION SE ESTABLECE, UNA TABLA PARA DETERMINAR LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE LAS DIFERENTES FORMAS DE ONDA DE FUNCIONES PERIÓDICAS SIMÉTRICAS:

FUNCION IMPAR {

CONDICIONES: $f(t) = -f(-t)$

SERIE DE FOURIER: $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)$

COEFICIENTES:

$[A_k = 0]; B_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) dt$

FUNCION PAR {

CONDICIONES: $f(t) = f(-t)$

SERIE DE FOURIER: $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)$

COEFICIENTES:

$[B_k = 0]; A_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) 2 \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) dt$

$A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt$

FUNCIÓN CON SIMETRÍA DE MEDIA ONDA

CONDICIONES: $f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$

SERIE DE FOURIER:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{2k-1} \cos\left[(2k-1) \frac{2\pi t}{T}\right] + B_{2k-1} \sin\left[(2k-1) \frac{2\pi t}{T}\right] \right]$$

COEFICIENTES:

$$\left. \begin{array}{l} A_{2k-1} \\ B_{2k-1} \end{array} \right\} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \left[(2k-1) \frac{2\pi t}{T} \right] dt$$

FUNCIÓN IMPAR CON SIMETRÍA DE $\frac{1}{4}$ DE ONDA

CONDICIONES: $\left\{ \begin{array}{l} f(t) = -f(-t) \text{ y} \\ f(t) = -f(t + \frac{T}{2}) \end{array} \right.$

SERIE DE FOURIER: $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k-1} \sin\left[(2k-1) \frac{2\pi t}{T}\right]$

COEFICIENTES:

$$[A_k = 0]; B_{2k-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin\left[(2k-1) \frac{2\pi t}{T}\right] dt$$

FUNCIÓN PAR CON SIMETRÍA DE $\frac{1}{4}$ DE ONDA

CONDICIONES: $\left\{ \begin{array}{l} f(t) = f(-t) \\ f(t) = -f(t + \frac{T}{2}) \end{array} \right.$

SERIE DE FOURIER: $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} \cos\left[(2k-1) \frac{2\pi t}{T}\right]$

COEFICIENTES:

$$[B_k = 0]; A_{2k-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos\left[(2k-1) \frac{2\pi t}{T}\right] dt$$

EN EL CASO DE FUNCIONES SIMÉTRICAS PARES E IMPARES, ASÍ COMO CON SIMETRÍA DE CUARTO DE ONDA, LAS FÓRMULAS DE LA TABLA ANTERIOR SE APLICAN A LA FORMA REAL DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER.

LA FORMA COMPLEJA ENVUEVE EL INTEGRANDO:

$$f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} = f(t) \left[\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \right]; \text{ EL CUAL NO ES NI}$$

PAR NI IMPAR.

FÓRMULAS SIMPLIFICADAS PARA LOS COEFICIENTES COMPLEJOS SE PUEDEN DEDUCIR SI SE RECONOCE QUE $[A_k]$ Y $[B_k]$ ESTÁN RELACIONADOS CON LA PARTE REAL E IMAGINARIA DE D_k , COMO PUEDE OBSERVARSE EN LA EXPRESIÓN (2.20A). SE PROPONE COMO EJERCICIO DEMOSTRAR QUE D_k ES REAL CUANDO $f(t)$ ES PAR; Y QUE D_k ES IMAGINARIA PARA CUANDO $f(t)$ ES FUNCIÓN IMPAR. SE RECOMIENDA UTILIZAR LAS EXPRESIONES DE LA (2.16) A LA (2.24).

EJEMPLIFICANDO EL USO DE LAS PROPIEDADES DE SIMETRÍA:

EJEMPLO 13.- ENCONTRAR LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE LA FORMA DE ONDA MOSTRADA EN LA FIGURA [25] (IMPAR CON SIMETRÍA DE MEDIA ONDA) Y ESTABLECER SU SERIE DE FOURIER.

SOLUCIÓN: COMO PUEDE OBSERVARSE, EL PERÍODO DE LA FUNCIÓN ES $T=4$; ES IMPAR Y CON SIMETRÍA DE MEDIA ONDA.

LA FUNCIÓN QUEDA DEFINIDA POR:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0,1) \\ t & t \in (1,2) \\ t+4 & t \in (2,3) \\ -1 & t \in (3,4) \end{cases}$$

AL SER IMPAR Y CON BASE EN (2.62), SE SABE INMEDIATAMENTE QUE $[A_k=0]$ Y QUE $B_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt$; $\forall k > 0$; LUEGO ENTONCES,

DESARROLLANDO:

$$B_k = \frac{4}{4} \underbrace{\int_0^1 \sin\left(\frac{2\pi kt}{4}\right) dt}_{I_1} + \frac{4}{4} \underbrace{\int_1^2 t \sin\left(\frac{2\pi kt}{4}\right) dt}_{I_2}$$

RESOLVIENDO LA INTEGRAL I_1 :

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{2\pi kt}{4}\right) dt = \left[\frac{-2}{k\pi} \cos\left(\frac{\pi kt}{2}\right) \right]_0^1$$

RESOLVIENDO LA INTEGRAL I_2 , Y SABIENDO QUE LA SOLUCIÓN DE

$$\int_{t_0}^{t_1} t \sin at dt = \left[\frac{\sin at}{a^2} - \frac{t \cos at}{a} \right]_{t_0}^{t_1}; \text{ Y PARA ESTE CASO}$$

$\left[a = \frac{\pi k}{2} \right]$; ENTONCES

$$\int_1^2 t \sin\left(\frac{\pi k}{2} t\right) dt = \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2} t\right)}{\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2} - \frac{t \cos\left(\frac{\pi k}{2} t\right)}{\left(\frac{\pi k}{2}\right)} \right]_1^2 \text{ POR LO QUE}$$

$$B_k = \left[\frac{-2}{\pi k} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) \right]_0^1 + \left(\frac{-2}{\pi k} \right) \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2} t\right)}{\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2} - \frac{t \cos\left(\frac{\pi k}{2} t\right)}{\left(\frac{\pi k}{2}\right)} \right]_1^2 + \frac{4}{(\pi k)^2} \left[\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \right]_1^2$$

FINALMENTE $B_k = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - 2(-1)^k}{k} - \frac{2}{\pi k^2} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \right]$; Y USANDO

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \left(3 - \frac{2}{\pi} \right); \quad B_2 = \left(-\frac{1}{\pi} \right); \quad \dots$$

Por lo que

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \quad \text{según la expresión (2.61) será}$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1 - 2(-1)^k}{k} - \frac{2}{\pi k^2} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi k t}{2}\right)$$

2.9 DIFERENCIACION E INTEGRACION DE LAS SERIES DE FOURIER:

El teorema de la serie de Fourier establece que para cualquier valor de la variable independiente $[t]$, la serie de Fourier converge al valor de su correspondiente función periódica $f(t)$, excepto en los puntos de discontinuidad de $f(t)$, donde la serie converge a $\frac{1}{2} [f(t^-) + f(t^+)]$ que corresponde al valor promedio aritmético.

Cuando la función periódica no tiene discontinuidades y es diferenciable, la serie converge en todas partes al valor de la función periódica, y la derivada de esta función será igual a la suma de las derivadas de sus componentes armónicas correspondientes.

Si se establece que la serie de Fourier real está dada por:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(\omega k t + \varphi_k); \quad \text{donde } \left[\omega = \frac{2\pi}{T} \right]; \quad \text{entonces}$$

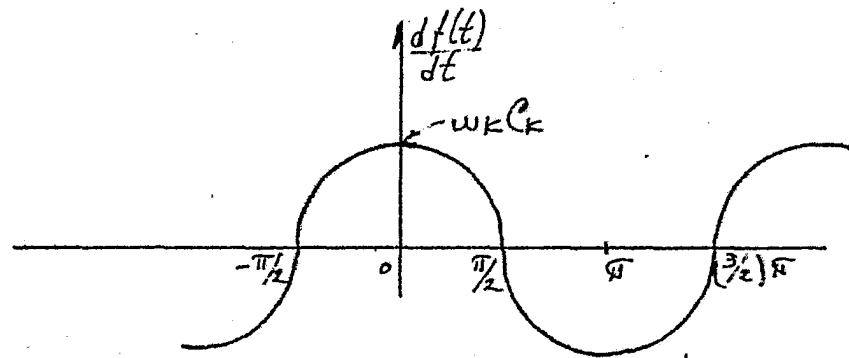
$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[-k\omega C_k \sin(\omega k t + \varphi_k) \right]; \quad \text{o bien,}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[k\omega C_k \cos\left(\omega k t + \varphi_k + \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad \text{----- (2.74)}$$

— nota: si $f(t)$ tiene discontinuidades; en un punto de discontinuidad, la derivada puede ser tratada como una función impulso cuyo peso es igual al valor del salto de la función en el punto de discontinuidad. Esto es muy importante recordarlo —.

Pues bien, de la discusión anterior se observa que si las C_k 's, o sea, los coeficientes de Fourier de funciones periódicas continuas son conocidos, los coeficientes de la derivada de esa forma de onda son conocidos también, e iguales a $[k\omega C_k]$, así pues,

LOS COEFICIENTES DE LA SERIE DIFERENCIADA SON LOS COEFICIENTES DE LA SERIE ORIGINAL MULTIPLICADOS POR EL FACTOR $[w_k]$; $w = \frac{2\pi}{T}$.
 COMO RESULTADO, SE CONCLUYE QUE LA DIFERENCIACION DE UNA FORMA DE ONDA; DA COMO RESULTADO AMPLITUDES RELATIVAMENTE MÁS GRANDES PARA LAS ARMÓNICAS ALTAS; EN RESUMEN, LA DERIVADA DE UNA SERIE DE FOURIER ENFATIZA ALTAS FRECUENCIAS.



POR EJEMPLO: SEA $f(t) = \cos t + 0.1 \cos 3t$

$$\frac{df(t)}{dt} = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + 0.3 \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) = [-\sin t - 0.3 \sin 3t]$$

DE AQUÍ, LA AMPLITUD DE LA TERCERA ARMÓNICA, LA CUAL ES 10% DE LA FUNDAMENTAL EN $f(t)$, ES 30% DE LA FUNDAMENTAL EN $\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$.

INTEGRACIÓN. - LA INTEGRAL DE UNA FORMA DE ONDA PERIÓDICA CUYO VALOR PROMEDIO NO ES CERO, NO ES UNA FUNCION PERIÓDICA. ÉSO SE VE A PARTIR DE QUE:

$$\int f(t) dt = \int \left[A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(w_k t + \varphi_k) \right] dt =$$

$$= A_0 t + \int \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(w_k t + \varphi_k) \right] dt + K; \quad K = \text{CONSTANTE.}$$

EL TÉRMINO $[A_0 t]$ NO ES PERIÓDICO, Y, POR CONSIGUIENTE, LA INTEGRAL NO ES PERIÓDICA. SIN EMBARGO, SI EL VALOR PROMEDIO DE $f(t)$ ES CERO, LA INTEGRAL $\int f(t) dt$ ES PERIÓDICA, Y SUS COEFICIENTES DE FOURIER ESTÁN RELACIONADOS CON LA $[f(t)]$ POR:

$$\int f(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int C_k \cos(w_k t + \varphi_k) dt =$$

$$= \left[K + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{w_k} \cos\left(w_k t + \varphi_k - \frac{\pi}{2}\right) \right]; \quad K = \text{CONSTANTE};$$

• DE OTRA MANERA:

$$\int f(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right) dt = K + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\omega k} \sin\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right)$$

CONCLUYENDO:

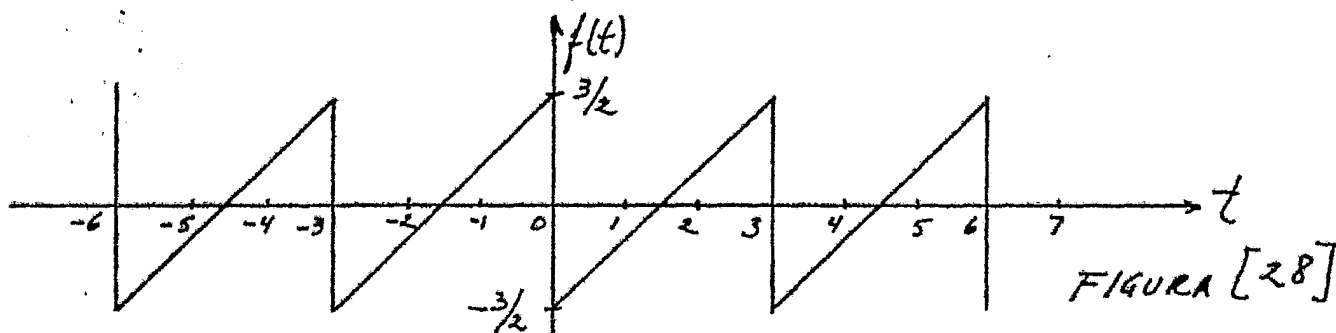
SI $(A_0 t) \neq \text{CERO}$, ENTONCES $f(t)$ NO ES UNA FUNCION PERIÓDICA.

EJEMPLO: A PARTIR DEL EJEMPLO 9, FIGURA [12], SE TIENE QUE REPRESENTA LA FUNCION DIENTE DE SIERRA CUYA SERIE DE FOURIER SEGUN LA EXPRESION (2.32) o (2.38) ES:

$$f(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{2\pi k t}{3}\right);$$

BASADOS EN ESTO, LA SERIE DE LA FIGURA [28] ES:

$$f(t) = -\frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{2\pi k t}{3}\right) \text{ --- (2.76)}$$



DONDE SE VE QUE $[C_k = \frac{-3}{\pi k}]$; Y SEGUN (2.75) LA INTEGRAL DE (2.76) ES:

$$f_1(t) = \int f(\tau) d\tau = \left[K - \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{1}{k} \sin\left(\frac{2\pi k t}{3}\right) dt \right] =$$

$$= K + \frac{9}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{2\pi k t}{3}\right) \right]; \quad K = \text{CONSTANTE.}$$

EL VALOR DE LA CONSTANTE K PARA ESTA FUNCION EN PARTICULAR, SE OBTIENE OBSERVANDO QUE

$$f_1(0) = \text{CERO} = K + \frac{9}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{2\pi k (0)}{3}\right) \right]$$

$$\text{DE DONDE } K = \left[\frac{-9}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right];$$

OTRA FORMA DE EVALUAR LA CONSTANTE ES OBTENIENDO LA A PARTIR DE $f(t)$, $\forall t \in [0, 3]$: $f(t) = \left(t - \frac{3}{2}\right)$; INTEGRANDO

$$f_1(t) = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{3t}{2} \right] = \int f(t) dt ; \forall t \in [0, 3]$$

el cual chequea en $t=0$; esto es; $f_1(t) = 0 \forall t=0$, por consiguiente K es el valor promedio de $f_1(t)$, o sea,

$$K = \frac{1}{3} \int_0^3 f_1(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^3 (0.5t^2 - 1.5t) dt =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{t^3}{6} - \frac{3t^2}{4} \right]_0^3 = \left[\frac{9}{6} - \frac{9}{4} \right] = \left[-\frac{3}{4} \right]$$

DE LA DISCUSION ANTERIOR, SE TIENE QUE EL EFECTO DE INTEGRACION DE UNA FORMA DE ONDA, ES REDUCIR LA MAGNITUD RELATIVA DE LAS ARMÓNICAS ALTAS.

AL INTEGRAR UNA SERIE DE FOURIER AUMENTA LA CONVERGENCIA; MIENTRAS QUE AL DERIVAR DISMINUYE LA CONVERGENCIA DE LA SERIE.

FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN [DELTA DE DIRAC O FUNCIÓN IMPULSO].

A FIN DE SIMPLIFICAR EL ANÁLISIS DE PROBLEMAS PRÁCTICOS, EL INGENIERO HA USADO EL CONCEPTO DE IMPULSO PARA CONCENTRAR UNA MASA[⊕] QUE EN REALIDAD ESTÁ DISTRIBUIDA YA SEA EN EL ESPACIO O TIEMPO (O EN AMBOS). UN EJEMPLO COMÚN ES EL USO DEL PUNTO DE MASA (MASA PUNTA) PARA ANALIZAR LA CONDUCTA DE UNA MASA DISTRIBUIDA SOBRE UNA REGIÓN O VOLUMEN DE ESPACIO.

LA DENSIDAD $[p]$ y LA CANTIDAD $[M]$ DE LA MASA DISTRIBUIDA SON (ASI SE ASUME) FINITAS; MIENTRAS QUE EL PUNTO MASA TIENE LA MISMA CANTIDAD DE MASA $[M]$ PERO LA DENSIDAD p "INFINITA", PUESTO QUE EL VOLUMEN ES CERO.

PARA LA MASA DISTRIBUIDA DE DENSIDAD $[p]$, ESCRIBIMOS:

$$M = \int_{V_0} p dv$$

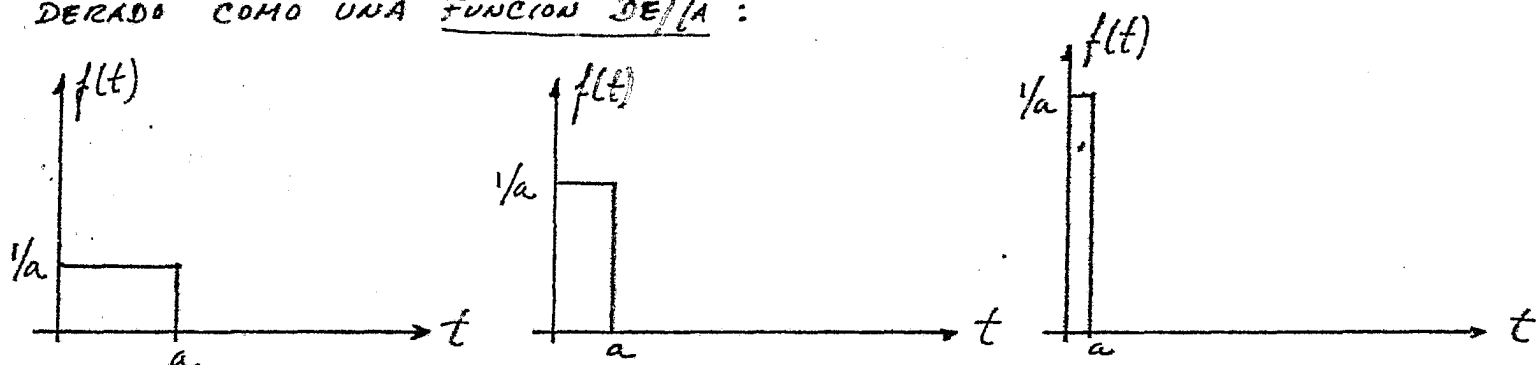
DONDE $[V]$ ES EL VOLUMEN DE LA MASA. PARA EL PUNTO MASA LOCALIZADO EN $[X=X_0]$, LA DENSIDAD ES CERO EN TODOS LOS PUNTOS EXCEPTO EN $[X=X_0]$, DONDE LA DENSIDAD ES INFINITA Y PUEDE SER DESIGNADA POR

$[M \delta(x-x_0)]$, DE MODO QUE:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} M \delta(x-x_0) dx$$

LOS IMPULSOS EN EL TIEMPO SIMULAN CAUSAS QUE TIENEN "COMPARATIVAMENTE" PEQUEÑA DURACION, PERO QUE SON LO SUFICIENTEMENTE FUERTES PARA INICIAR EFECTOS OBSERVABLES.

POE EJEMPLO, UN PULSO RECTANGULAR DE BASE $[t=a]$ y ALTURA $[\frac{1}{a}]$ TIENE UN AREA UNITARIA, y EL LIMITE CUANDO $(a \rightarrow 0)$ PUEDE SER CONSIDERADO COMO UNA FUNCION DE δ :



LOS MATEMÁTICOS ENCUENTRAN ÉSTA APROXIMACION INGENIERIL CON POCO FUNDAMENTO; y EL MATEMÁTICO FRANCÉS LAURENT SCHWARTZ HA INTRODUCIDO UNA APROXIMACION RIGUROSA AL PROBLEMA DE UNA CLASE DE FUNCIONES; A LA CUAL SE REFIERE COMO "DISTRIBUCION".

EL IMPULSO $[\delta(t)]$ RESULTA ENTONCES SER UN CASO ESPECIAL DE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION.

PARA ÉSTE PROPOSITO ES SUFICIENTE USAR LA DEFINICION DE

$$[\delta(t) = \text{CERO}; \forall t \neq \text{CERO}] \quad \text{---} \quad (2.77)$$

CON EL REQUERIMIENTO ADICIONAL DE QUE SI $f(t)$ ES CONTINUA EN $[t=t_0]$, ENTONCES

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \right] \quad \forall f(t) \text{ CONTINUA EN } t=t_0 \quad \text{---} \quad (2.78)$$

[VER SIGUIENTE PAGINA]

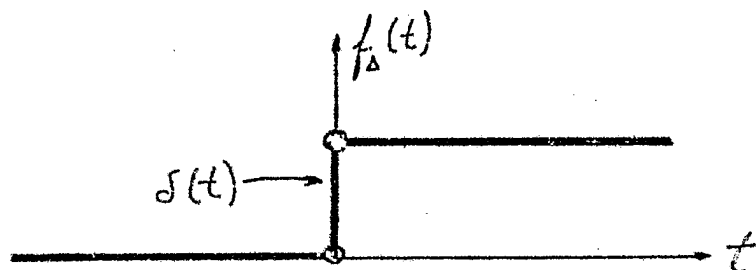
EL CUAL COINCIDE CON LAS DEFINICIONES BÁSICAS DE HIGHILL (*)

(*) M. HIGHILL, "FOURIER ANALYSIS AND GENERALIZED FUNCTIONS"; CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, NEW YORK, 1958.

ADEMÁS, SE USA UNA INTERPRETACION ALTERNATIVA DE "EL PULSO UNITARIO", QUE ES LA "DERIVADA DE ESCALON UNITARIO" $[\mu(t)]$:

$$\left[\delta(t) = \frac{d\mu(t)}{dt} \right] \quad \text{---} \quad (2.79)$$

GRÁFICAMENTE:



ESTA INTERPRETACION PUEDE JUSTIFICARSE MEDIANTE EL TRATAMIENTO MAS RIGUROSO.
 OTRA FORMA DE REPRESENTAR LA DELTA DE DIRAC ES:

$$\delta(t) = \begin{cases} \text{CERO} & ; \forall t \neq 0 \\ \infty & ; \forall t = 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

LUEGO ENTONCES

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = \text{UNO} \right] ; \forall \epsilon > 0 \quad (2.81)$$

DADO QUE EL AREA SE CONSERVA UNITARIA. AHORA, A PARTIR DE LA EXPRESION (2.78) SE TENDRA QUE:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \right] \text{ DADO QUE } (t_0 = 0) \quad (2.82)$$

NOTA IMPORTANTE: PARA TENER UNA EXPRESION MAS GENERAL DE LA EXPRESION (2.78), SE TENDRA QUE:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t + t_0) dt \right] \quad (2.78)$$

2.10 CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER POR MEDIO DE LA DERIVADA:

SI UNA FUNCION TIENE UN SALTO (DISCONTINUIDAD) EN $[t = t_1]$, LA DERIVADA DE LA FUNCION EN $[t = t_1]$ SE DEFINE COMO UN IMPULSO; EL PESO DE ESTE IMPULSO ES IGUAL AL VALOR DEL SALTO DE LA FUNCION ORIGINAL.

AUNQUE HE DEFINIDO EL PESO DE UN IMPULSO, EL VALOR DE UN IMPULSO NO ESTÁ DEFINIDO (YA QUE INFINITO NO ESTÁ DEFINIDO).

POR CONSIGUIENTE, LA DIFERENCIACION TENDRÁ QUE SER POR TÉRMINOS DE UNA SERIE DE FOURIER QUE REPRESENTA UNA FUNCION CON SALTOS, LO LLEVA A UNA SERIE CONVERGENTE COMO YA SE MENCIONÓ ANTES.

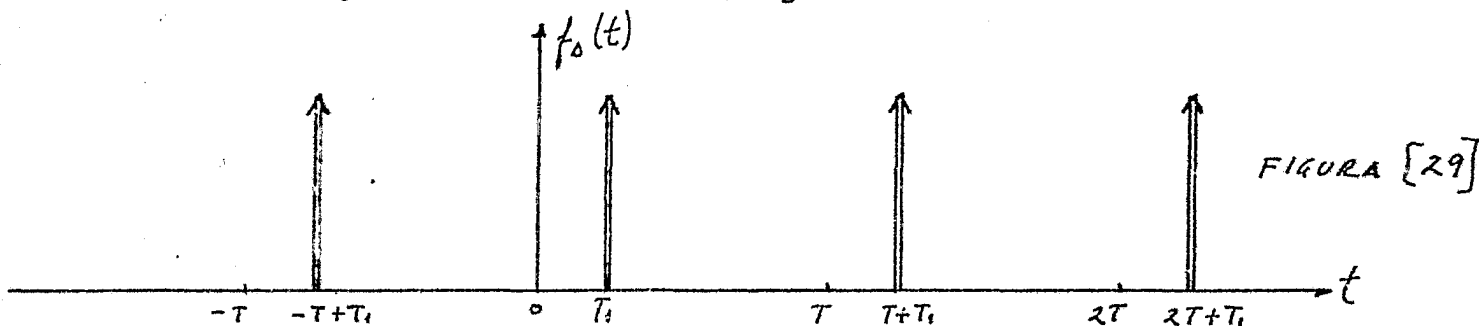
SE VERA, SIN EMBARGO, QUE UNA REPRESENTACION POR FOURIER DE LAES DERIVADAS SI ES POSIBLE Y NOS LLEVA A LA EXPRESION MATEMATICA DE UN

TREN DE IMPULSOS.

SE VERÁ EL PROBLEMA CONSIDERANDO UN TREN DE IMPULSOS UNITARIOS DEFINIDO POR LA ECUACIÓN:

$$f_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - T_1 - kT) \quad (2.83)$$

Y QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA [29]:



APLICANDO LA FÓRMULA PARA LOS COEFICIENTES DE FOURIER $[D_k]$ EN EL INTERVALO $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ Y SIENDO $f_{\Delta}(t) = \delta(t - T_1)$, SE TENDRÁ SEGÚN LA EXPRESIÓN (1.65) QUE:

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t - T_1) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \quad (2.84)$$

Y RECORDANDO LA EXPRESIÓN (2.78) NOS QUEDARÁ QUE:

$$D_k = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t - T_1) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} \right]; \text{ EN ESTE CASO}$$

$$f_{\Delta}(t) = e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} \text{ MIENTRAS QUE } t_0 = T_1; \text{ POR LO TANTO}$$

$$D_k = \frac{1}{T} \left[e^{-i \frac{2\pi k T_1}{T}} \right] \quad (2.85)$$

AHORA BIEN, CALCULANDO LA SERIE DE FOURIER DEL TREN DE IMPULSOS,

$$f_{\Delta}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} e^{-i \frac{2\pi k T_1}{T}} \right] e^{i \frac{2\pi k t}{T}} =$$

$$\left[f_{\Delta}(t) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{2\pi k}{T} (t - T_1)} \right] \quad (2.86)$$

Y EN FORMA REAL

$$f_{\Delta}(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left[\frac{2\pi k}{T} (t - T_1) \right]$$

NÓTESE QUE LA EXPRESIÓN (2.86) ES IGUAL A LA EXPRESIÓN (2.83);

$$\text{O SEA } f_{\Delta}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T_1 - kT) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{i \frac{2\pi k}{T} (t - T_1)}$$

AHORAS, POR CERO ADO, SE DEMOSTRará LA EXPRESIÓN (2.78), LA CUÁL FUE UTILIZADA EN LA SOLUCIÓN DE ESTE ÚLTIMO EJERCICIO:

$$\text{DEMOSTRACION: SI } \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad \forall f(t) \text{ CONTINUA EN } t = t_0,$$

PARA DEMOSTRAR ESTE RESULTADO; RECORDANDO CON BASE A (2.80)

$$\delta(t - t_0) = \text{CERO}; \quad \forall t \neq t_0$$

DE AQUÍ, EL INTEGRANDO DE (2.78) ES CERO, EXCEPTO EN $[t = t_0]$,

POR CONSIGUIENTE:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = \int_{t=t_0^-}^{t=t_0^+} f(t) \delta(t - t_0) dt;$$

PUES, QUE ASUMIENDO QUE $f(t)$ ES CONTINUA $\forall t = t_0$, TIENE EL VALOR DE $[f(t_0)]$ EN EL INTERVALO $[t = t_0^-]$ A $[t = t_0^+]$.

$$\text{CONSECUENTEMENTE } \int_{t=t_0^-}^{t=t_0^+} f(t) \delta(t - t_0) dt = \int_{t=t_0^-}^{t=t_0^+} f(t_0) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt = f(t_0).$$

2.11 SERIES DE FOURIER DE LAS DERIVADAS DE FUNCIONES DISCONTINUAS.-

EN LA SECCIÓN 2.9 VIMOS QUE SI $f_p(t)$ ES PERIÓDICA Y CONTINUA, Y DADA POR

$$f_p(t) = f_p(t + T) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t}, \quad \text{ENTONCES}$$

$\left[\frac{df_p(t)}{dt} \right]$ ES TAMBIÉN PERIÓDICA CON COEFICIENTES DE FOURIER DE LA FORMA:

$$D'_k = \left[i \frac{2\pi k}{T} D_k \right] \quad \text{--- (2.37)}$$

DE MODO QUE, CON BASE A LA EXPRESIÓN ANTERIOR,

$$\frac{df_p(t)}{dt} = \sum_{-\infty}^{\infty} D'_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(i \frac{2\pi k}{T} D_k \right) e^{i \frac{2\pi k}{T} t} \quad \text{--- (2.38)}$$

COMO EJEMPLO DE LO ANTERIOR, SE INVESTIGARA LA SERIE DE FOURIER DE LAS DERIVADAS DE FORMA DE ONDA CON UN NÚMERO FINITO DE DISCONTINUIDADES EN UN PERIODO.

LA FORMA DE ONDA DE LA FIGURA [30] ES UN EJEMPLO:

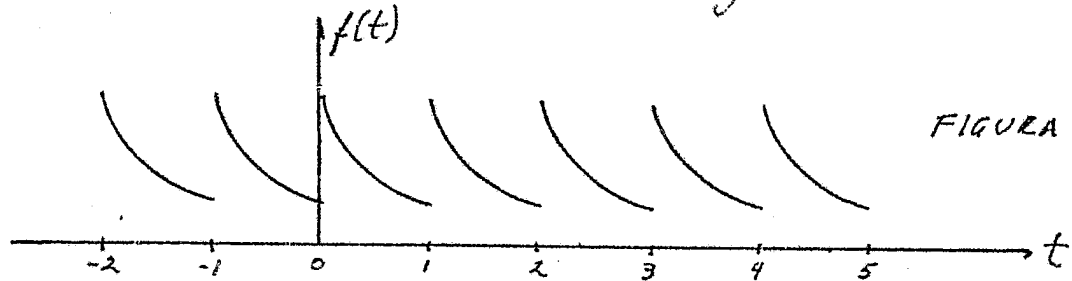


FIGURA [30].

EN ESTA FORMA DE ONDA HAY UNA DISCONTINUIDAD POR PERIODO, DONDE $[T=1]$, SIENDO EL PUNTO DE DISCONTINUIDAD EN $t=0, 1, 2, 3, \dots, n$.

EN CÁLCULO AVANZADO SE DEMUESTRA QUE SI $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{\frac{i2\pi k t}{T}}$ ES UNIFORMEMENTE CONVERGENTE, EL ORDEN DE LA SUMATORIA Y LA DIFERENCIACION PUEDE SER INTERCAMBIADO, ÉSTO ES:

$$\frac{d}{dt} \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{\frac{i2\pi k t}{T}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} D_k e^{\frac{i2\pi k t}{T}}$$

EN EL CASO DE FORMAS DE ONDA DISCONTINUAS, ESTAS CONDICIONES NO SE SATISFACEN, Y POR CONSIGUIENTE, EL PROBLEMA DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE FORMAS DE ONDA DISCONTINUAS, DEBE SER TRATADO EN FORMA ESPECIAL.

ADELANTE SE MUESTRA QUE CUANDO DEFINIMOS QUE LA DERIVADA DE UNA FORMA DE ONDA DISCONTINUA ES UN PULSO EN LOS PUNTOS DE DISCONTINUIDAD, AUNQUE LA SUMA NO ES UNIFORMEMENTE CONVERGENTE, PODEMOS SIN EMBARGO, INTERCAMBIAR EL ORDEN DE LA SUMATORIA Y LA DIFERENCIACION.

PARA ILUSTRAR ÉSTE PUNTO, CONSIDERESE LA FORMA DE ONDA PERIÓDICA DISCONTINUA QUE SE MUESTRA A CONTINUACION EN LA FIGURA [31]

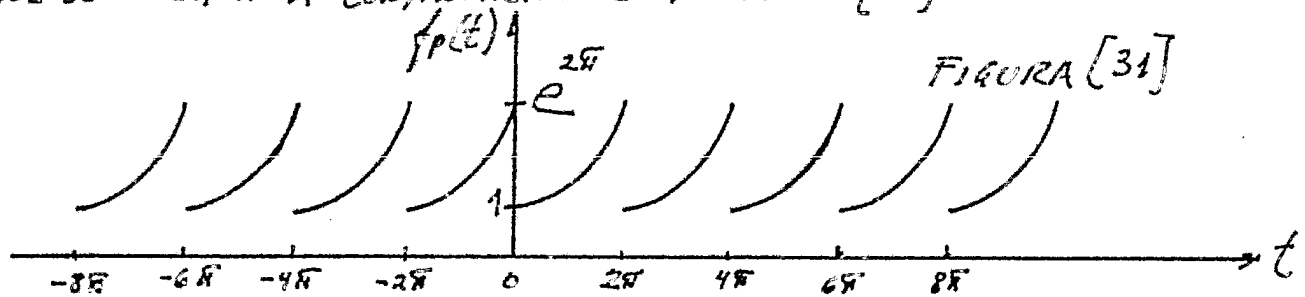


FIGURA [31]

EN DONDE $\{f(t) = e^t\}$ Y $t \in (0, 2\pi)$; CON SALTO EN $t = \pi$; DONDE

PARA FACIL MANIPULACION, EL PERIODO TOMADO ES $[T=2\pi]$

EN EL INTERVALO $t \in (0, 2\pi)$, LA FORMA DE ONDA SE EXPRESA COMO:

$$f(t) = e^t \quad \forall t \in (0, 2\pi)$$

$$f(t) = f(t \pm 2\pi) \quad \forall \text{ RESTOS DE } t$$

LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE ESTA FORMA DE ONDA SERÁN:

$$D_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^t e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{t(1-ik)} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-ik)} \left[e^{t(1-ik)} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi(1-ik)} \left[e^{2\pi(1-ik)} - 1 \right] = \frac{1}{2\pi(1-ik)} \left[e^{2\pi} e^{-2i\pi k} - 1 \right]$$

PERO DADO QUE $\left[e^{-2i\pi k} = 1 \right]$ ENTONCES

$$D_k = \frac{1}{2\pi(1-ik)} \left[e^{2\pi} - 1 \right], \text{ y la SERIE DE FOURIER SERÁ:}$$

$$f_p(t) = \frac{(e^{2\pi} - 1)}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(1-ik)} e^{ikt} \right] \text{ --- (2.89)}$$

CONSIDÉRESE AHORA LA DERIVADA DE $f_p(t)$. PUESTO QUE $f_p(t)$ ES PERIÓDICA y, EN EL INTERVALO $t \in (0, 2\pi)$, $\left[f_p(t) = e^t \right]$; ENTONCES PARA TODO t , EXCEPTO EN $\left[t = 2n\pi \right]$ DONDE $n=0, 1, 2, 3, \dots$, LA DERIVADA DE $f_p(t)$ TIENE LA MISMA FORMA QUE $f_p(t)$. PUESTO QUE $\left[\frac{df_p(t)}{dt} \right]$ TIENE LA MISMA FORMA

DE ONDA, SE PUEDE ESPERAR QUE SI

$$f_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{ikt}; \text{ ENTONCES LA } \left[\frac{df_p(t)}{dt} \right] \text{ SE}$$

EXPRESARÁ COMO:

$$\left[\frac{df_p(t)}{dt} = \sum_{-\infty}^{\infty} D'_k e^{ikt} \right]$$

SIN EMBARGO, SI SE USAN LAS

RELACIONES ENTRE LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE UNA FORMA DE ONDA PERIÓDICA y SU DERIVADA, DE LA ECUACIÓN (2.89) y (2.87) TENEMOS:

$$f'_p(t) = \frac{df_p(t)}{dt} = \sum_{-\infty}^{\infty} D'_k e^{ikt} = \sum_{-\infty}^{\infty} [ik D_k] e^{ikt} =$$

$$\frac{df_p(t)}{dt} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{ik}{(1-ik)} e^{ikt} \neq f_p(t) \text{ --- (2.90)}$$

HACIENDO LA DIFERENCIA ENTRE (2.89) y (2.90)

$$f_p(t) - \frac{df_p(t)}{dt} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(1-ik)} - \frac{ik}{(1-ik)} \right] e^{ikt} = \left[\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} \right]$$

ASÍ QUE

$$f_p(t) - \frac{df_p(t)}{dt} = \left[\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi k t} \right] \quad (2.91)$$

LA EXPRESION (2.91) DEBE REPRESENTAR LA DIFERENCIA ENTRE LA FORMA DE ONDA DE $f_p(t)$ Y SU DERIVADA.

DE LA FIGURA [31] SE VE QUE ESTA DIFERENCIA ES UNA FUNCION TREN PERIÓDICO DE IMPULSOS, TA QUE:

$$f_p(t) - \frac{df_p(t)}{dt} = (e^{2\pi} - 1) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi k) \quad (2.92)$$

EN LA ECUACION (2.86) VIMOS QUE ESTE TREN DE IMPULSOS PUEDE SER EXPRESADO COMO:

$$f_A(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} e^{i \frac{2\pi k}{T} (t - T_1)} \right] \quad y$$

COMPARANDO (2.91) CON (2.86) SE VE QUE EN (2.83)

$$f_p(t) - \frac{df_p(t)}{dt} = (e^{2\pi} - 1) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi k) \Leftrightarrow \begin{cases} T = 2\pi \\ T_1 = \text{CERO} \end{cases} \quad (2.93)$$

CON LO QUE (2.93) ES IGUAL A (2.92)

SE PUEDE CONCLUIR QUE LA SERIE DE FOURIER DE LA FUNCION ORIGINAL MENOS LA SERIE DE FOURIER DE SU DERIVADA, RESULTA SER UN TREN PERIÓDICO DE IMPULSOS.

TAMBIÉN PUEDE AFIRMARSE QUE LA MULTIPLICACION DE $[D_k]$ POR $\left[\frac{i2\pi k}{T} \right]$; TA Y COMO EN (2.87), RESULTA EN LOS COEFICIENTES DE FOURIER PARA LA DERIVADA DE LA FUNCION PERIÓDICA, AÚN CUANDO:

$$\left[f_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \right] \quad \underline{\text{NO ES PERIÓDICA.}}$$

EN ALGUNOS PROBLEMAS, UNA SECCION DE UNA FORMA DE ONDA QUE NO ES PERIÓDICA, ES EXPANDIDA COMO UNA SERIE DE FOURIER.

ESTA SERIE CONVERGE A LA FORMA DE ONDA, SÓLO EN EL INTERVALO ESCOGIDO Y SE REPITE FUERA DE INTERVALO. EN TALES PROBLEMAS, ES IMPORTANTE RECORDAR QUE LA DERIVADA DE LA SERIE DE FOURIER CONTIENE FUNCIONES IMPULSO SI EL VALOR DE LA FORMA DE ONDA AL PRINCIPIO DE INTERVALO ES DIFERENTE DE UN VALOR AL FIN DE INTERVALO.

EL USO DE LOS IMPULSOS PARA EL CÁLCULO DE SERIES DE FOURIER DE ALGUNAS FORMAS DE ONDA, SE ILUSTRARÁ CON EL SIGUIENTE EJEMPLO:

USO DE LOS IMPULSOS PARA EL CÁLCULO DE SERIES DE FOURIER DE ALGUNAS FORMAS DE ONDA.

EJEMPLO 19.- HALLAR LOS COEFICIENTES COMPLEJOS DE FOURIER DE LA FIGURA [32] POR DIFERENCIACIÓN:

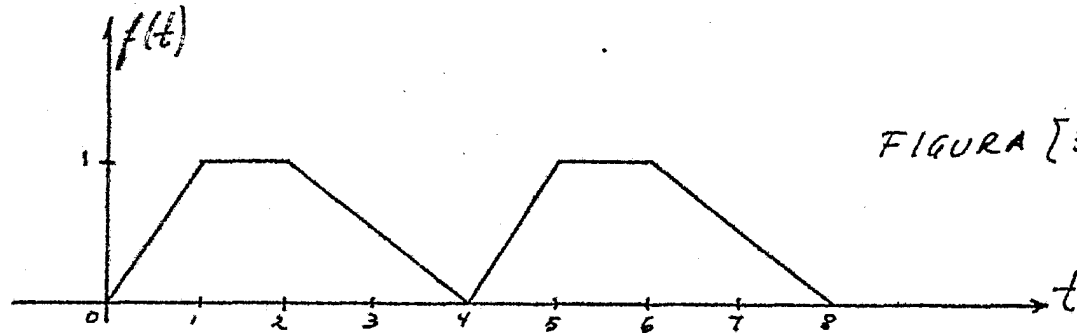


FIGURA [32]

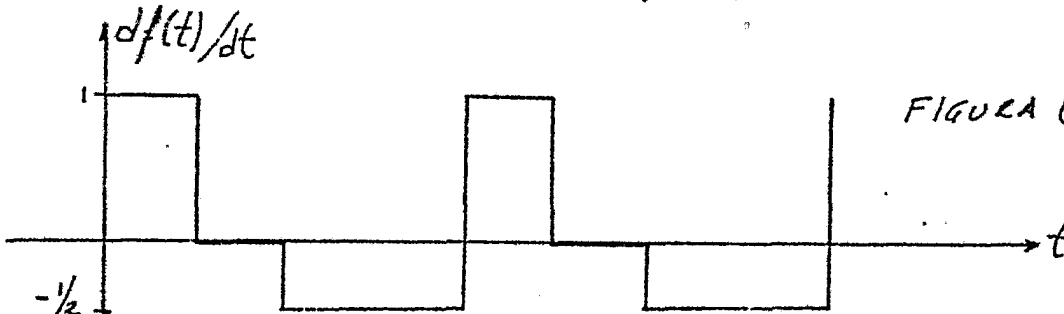


FIGURA [33]

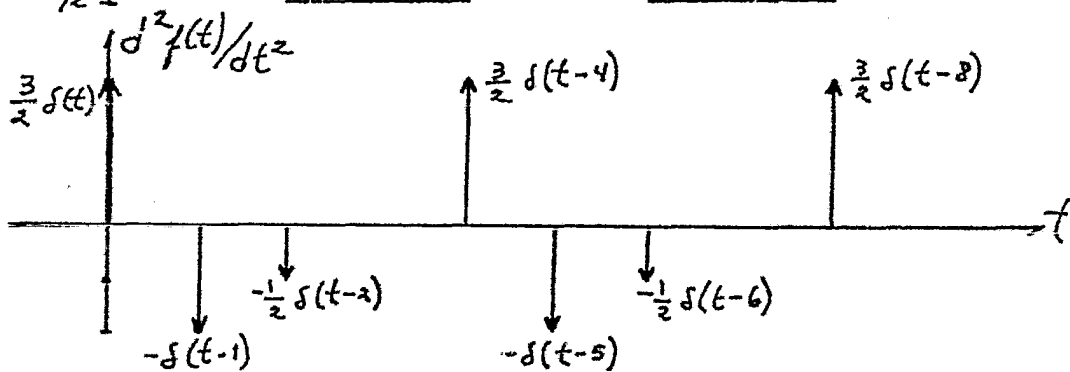


FIGURA [34].

SOLUCIÓN: SI $f(t)$ SE EXPANDE EN SERIES DE FOURIER, EL RESULTADO ES:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i\frac{\pi kt}{2}}; \text{ DADO QUE } T=4.$$

DE AQUI, CON BASE A (2.87) Y (2.88):

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{i\pi k}{2} D_k e^{i\frac{\pi kt}{2}} \right]; \text{ Y NUEVAMENTE} \quad (2.94)$$

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\pi k}{2} \right)^2 D_k e^{i\frac{\pi kt}{2}} \right] = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} D_k'' e^{i\frac{\pi kt}{2}} \right] \quad (2.95)$$

LAS FIGURAS [33] Y [34] MUESTRAN (2.94) Y (2.95) RESPECTIVAMENTE.

EXPANDIENDO (2.95) EN SERIES DE FOURIER:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k'' e^{i \frac{\pi k t}{2}} \Rightarrow D_k'' = \left[\left(\frac{i \pi k}{2} \right)^2 D_k \right]$$

LOS COEFICIENTES $[D_k'']$ SON CALCULADOS FÁCILMENTE DE LA ECUACION (2.85) SI SE VE QUE EN EL INTERVALO DE $t \in (0, 4)$:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{3}{2} \delta(t) - \delta(t-1) - \frac{1}{2} \delta(t-2); \text{ DE AQUI QUE}$$

UTILIZANDO LA EXPRESION (2.85) Y (2.84)

$$D_k'' = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} - e^{-i \frac{\pi k}{2} (1)} - \frac{1}{2} e^{-i \frac{\pi k}{2} (2)} \right];$$

PERO POR OTRA PARTE SE TIENE QUE

$$e^{-i \frac{\pi k}{2}} = \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = (-i)^k$$

DE MODO QUE SI

$$k=0 \Rightarrow 1-0 = (-i)^0$$

$$k=1 \Rightarrow 0-i = (-i)^1$$

$$k=2 \Rightarrow -1-0 = (-i)^2$$

$$k=3 \Rightarrow 0+i = (-i)^3$$

$$k=n \Rightarrow (-i)^n; \text{ ENTONCES}$$

$$D_k'' = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} - (-i)^k - \frac{1}{2} (-1)^k \right]; \text{ LUEGO, EN BASE A QUE}$$

$$D_k = \left[\frac{D_k''}{\left(\frac{i \pi k}{2} \right)^2} \right] \text{ SE TENDRÁ FINALMENTE QUE}$$

$$D_k = \frac{1}{4} \left(\frac{i \pi k}{2} \right)^{-2} \left[\frac{3}{2} - (-i)^k - \frac{1}{2} (-1)^k \right] =$$

$$D_k = \left[\frac{\left(\frac{3}{2} - (-i)^k - \frac{1}{2} (-1)^k \right)}{-\pi^2 k^2} \right].$$

CAPITULO III.

ESPECTROS DISCRETOS DE FRECUENCIA.

LA REPRESENTACION DE UNA FUNCION PERIODICA COMO UNA SERIE DE FOURIER, IMPLICA, EN LA ESPECIFICACION DE SUS COEFICIENTES DE FOURIER, LA DETERMINACION UNICA DE LA FUNCION; ES DECIR, EN FORMA UNIVOCAL, CON UNICIDAD.

EN ESTE CAPITULO SE PRONE EXPLORAR OTROS USOS DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER, PARA EL ESTUDIO DE SEÑALES PERIODICAS.

3.1 ESPECTROS DE AMPLITUD Y FASE.-

CUANDO UNA FUNCION PERIODICA DE PERIODO CONOCIDO, ES REPRESENTADA COMO LA SUMA DE TERMINOS DE LA FORMA:

$$f(t) = \sum_{\text{CERO}}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right) ; \text{ O BIEN}$$

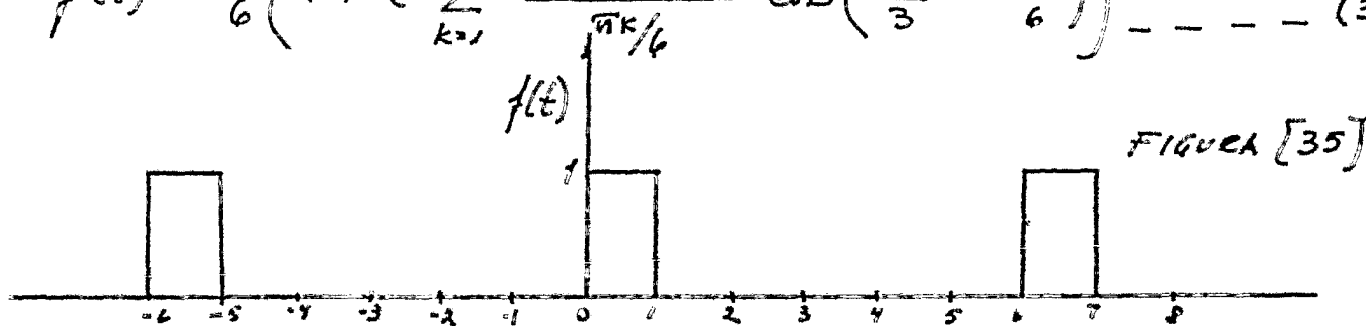
$$f(t) = \sum_{\text{CERO}}^{\infty} C_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) \quad \text{DONDE } \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \text{FRECUENCIA ANGULAR};$$

ESTO ES, COMO LA SUMA DE SUS ARMONICAS, LA ESPECIFICACION DE LAS AMPLITUDES $[C_k]$ Y DE LOS ANGULOS DE FASE $[\varphi_k]$ DE ESTAS ARMONICAS, DETERMINA UNIVOCAMENTE LA FUNCION PERIODICA.

ESTAS ESPECIFICACIONES PUEDEN SER REPRESENTADAS EN FORMA GRAFICA POR UNA GRAFICA DE LOS VALORES $[C_k]$ CONTRA LOS VALORES (DISCRETOS) DE $[k]$; JUNTO CON UNA GRAFICA SIMILAR CORRESPONDIENTE A LOS ANGULOS DE FASE $[\varphi_k]$.

LA SERIE DE FOURIER PARA LA FUNCION PERIODICA QUE SE MUESTRA A CONTINUACION EN LA FIGURA [35] ES, DE ACUERDO A UN DESARROLLO SIMILAR AL DEL EJEMPLO 5 DEL CAPITULO II Y ANALOGA AL RESULTADO (2.15A):

$$f(t) = \frac{1}{6} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k / 6}{\pi k / 6} \cos\left(\frac{\pi k t}{3} - \frac{\pi k}{6}\right) \right] \text{ --- (3.1)}$$



DE LA EXPRESION (3.1) SE TIENE QUE:

$$C_0 = \frac{1}{6} ; \quad C_1 = \frac{1}{3} \frac{\sin \pi / 6}{\pi / 6} \quad \text{y} \quad \varphi_1 = \left(-\frac{\pi}{6} \right)$$

$$C_2 = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{2\pi}{6}}{\frac{2\pi}{6}} ; \quad \varphi_2 = -\frac{2\pi}{6}$$

$$C_3 = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{3\pi}{6}}{\frac{3\pi}{6}} ; \quad \varphi_3 = -\frac{3\pi}{6}$$

$$C_k = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{k\pi}{6}}{\frac{k\pi}{6}} ; \quad \varphi_k = -\frac{k\pi}{6}$$

... y así sucesivamente

Las gráficas de los valores $[C_k]$ y $[\varphi_k]$ correspondientes a la función periódica $\{f(t) = f(t+T)\}$ graficándose contra el valor $[k]$ (o bien, la frecuencia correspondiente), son llamadas respectivamente "espectro de amplitud" y "espectro de fase" de la función periódica.

A continuación, en las figuras [36] y [37] se muestran los valores de $[C_k]$ y $[\varphi_k]$ como función de $[k]$; es decir, los espectros de amplitud y fase respectivamente.

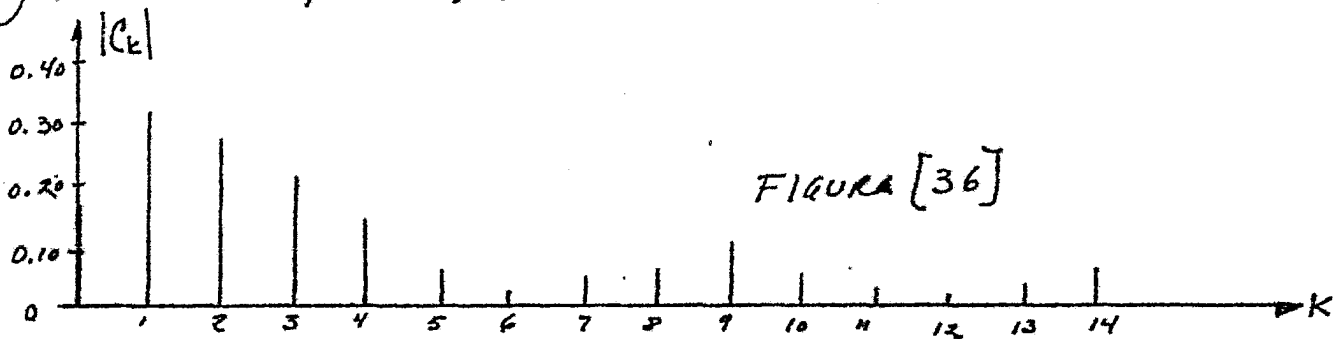


FIGURA [36]

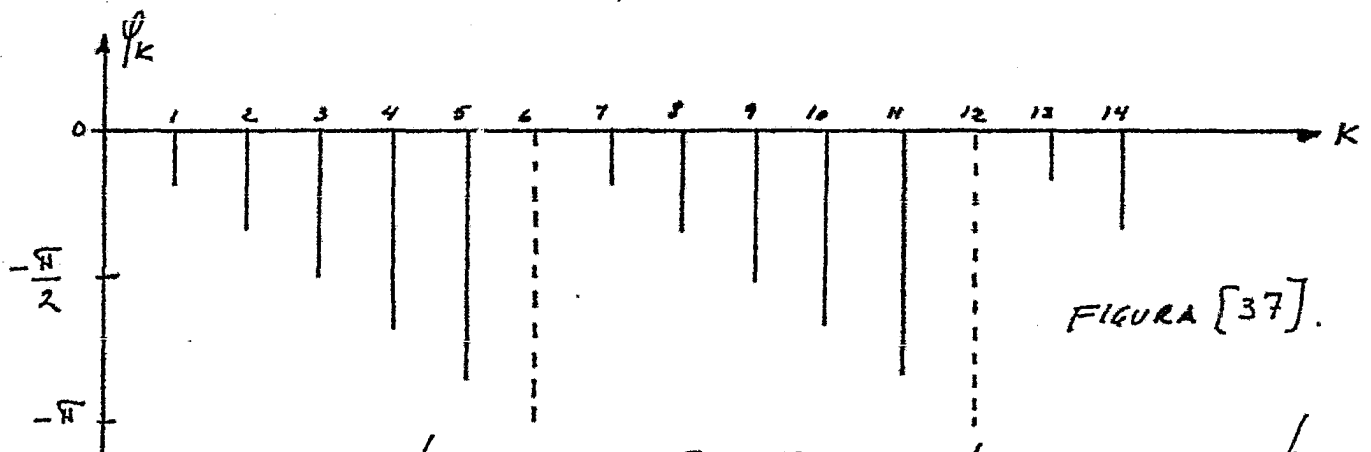


FIGURA [37].

OBSÉRVESE QUE $[C_k]$ ES NEGATIVO PARA $k \in [6, 12]$; POR LO QUE ES COSTUMBRE GRAFICAR LOS VALORES ABSOLUTOS DE $|C_k|$, QUE POR SUPUESTO SON POSITIVOS.

PUESTO QUE $[-\cos x] = [\cos(x \pm \pi)]$; SE LE SUMA O RESTA UN ÁNGULO DE FASE $[\varphi_k = \pi]$, PARA CUANDO C_k ES NEGATIVO.

OBSÉRVESE TAMBIÉN QUE $[C_k]$ Y $[\varphi_k]$ TIENEN VALORES ENTEROS DE $[k]$; ÉSTE ES, PARA AQUELLAS FRECUENCIAS QUE SON MÚLTIPLOS ENTEROS DE LA FRECUENCIA FUNDAMENTAL. DE AQUÍ, LOS ESPECTROS SON REFERIDOS COMO:

"ESPECTROS DISCRETOS DE FRECUENCIA".

DESCRIPCION DE UNA FORMA DE ONDA.-

UNA FORMA DE ONDA PUEDE SER UNIVOCAMENTE DESCRITA EN CUALQUIERA DE LAS TRES FORMAS SIGUIENTES:

PRIMERA - UNA EXPRESION ANALITICA - POR EJEMPLO, $f(t)$ EN LA FIGURA [35] PUEDE SER EXPRESADA COMO:

$$f(t) = \frac{1}{6} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k / 6}{\pi k / 6} \cos \left(\frac{\pi k t}{3} - \frac{\pi k}{6} \right) \right]; \text{ o BIEN,}$$

$$f(t) = [u(t) - u(t-1)]; \forall t \in (0, 6); \text{ y } [f(t) = f(t+6)].$$

SEGUNDA - UNA REPRESENTACION GRAFICA COMO LA FIGURA [35].

TERCERA - POR MEDIO DE SU ESPECTRO, COMO POR EJEMPLO LA FIGURA [36], O LA FIGURA [37]; O AMBAS.

CADA UNA DE ESTAS TRES DESCRIPCIONES, ESPECIFICA UNIVOCAMENTE LA FORMA DE ONDA.

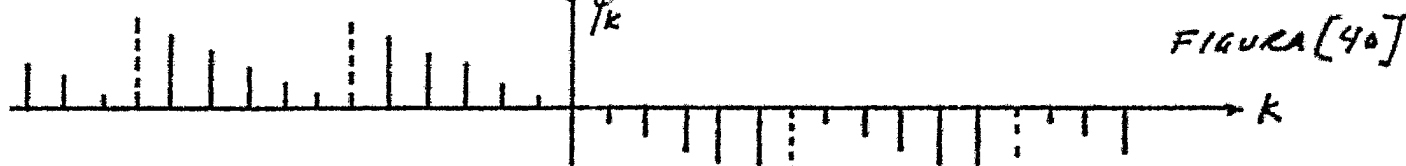
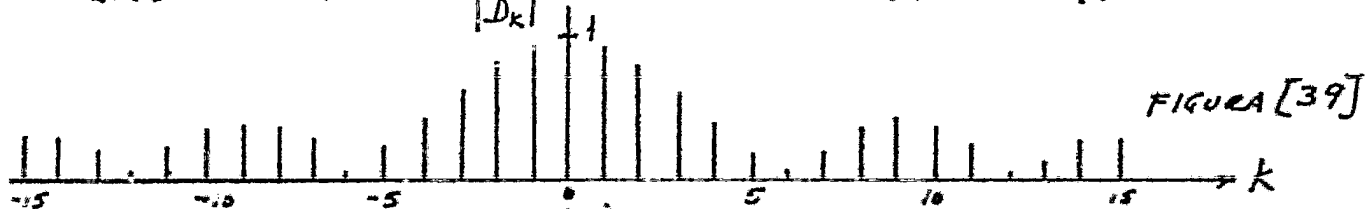
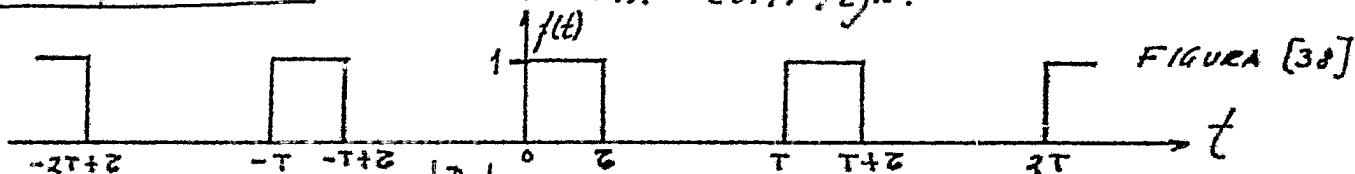
ESPECTROS DE FRECUENCIA 'COMPLEJOS'. - A MENUDO ES MAS CONVENIENTE USAR LA FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER PARA OBTENER EL ESPECTRO DE FRECUENCIA.

PUESTO QUE $[C_0 = D_0]$ y $[C_k = 2D_k = \frac{2D_k}{e^{i\pi k}}]$ (VER EXPRESIONES (1.54A), (1.66) y (1.67));

SE PUEDE GRAFIAR $[D_k]$ COMO FUNCION DE $[k]$ Y LLEVAR LA MISMA INFORMACION COMO CUANDO SEA UNA $[C_k]$.

ADENAS, PUESTO QUE $[D_k = D_{-k}]$, EL ESPECTRO DE AMPLITUD OBTENIDO DE ESTA MANERA, SIEMPRE TENDRA SIMETRIA PAR EN LA FORMA COMPLEJA.

EN FORMA SEMEJANTE, PUESTO QUE $[\phi_k = -\phi_{-k}]$; EL ESPECTRO DE FASE TIENE SIMETRIA IMPAR EN LA FORMA COMPLEJA.



PARA LA FIGURA [38]

$$D_k = \frac{z}{T} \frac{\sin(\frac{z\pi k}{T})}{\frac{z\pi k}{T}} e^{-i(\frac{z\pi k}{T})}; \text{ DE DONDE EN LAS}$$

FIGURAS [39] y [40] SE VEN LOS ESPECTROS PARA EL CASO EN QUE $\left[\frac{z}{T} = \frac{1}{6}\right]$.

AHORA, EL LECTOR DEBE RECONOCER QUE CADA UNA DE LAS LINEAS DEL ESPECTRO DE LA FIGURA [36] CORRESPONDE A LA AMPLITUD DE UNA ARMÓNICA.

POR EJEMPLO, EN LA FIGURA [36] LA LINEA QUE CORRESPONDE A $[k=2]$ ES $[C_2 = 0.287]$ Y ES LA AMPLITUD DE LA SEGUNDA ARMÓNICA EN LA SERIE DE FOURIER DE LA FORMA DE ONDA DE LA FIGURA [35].

EN LA FIGURA [39] SE TIENEN AMPLITUDES QUE CORRESPONDEN A VALORES DE $[k]$ O $\left[\frac{k}{T}\right]$ POSITIVOS Y NEGATIVOS. POR EJEMPLO, $[D_2 = D_{-2} = 0.143]$. ÉSTO ES, CUANDO EN EL HECHO DE QUE RELACIONANDO LA SERIE DE FOURIER COMPLEJA Y LA REAL, TENEMOS LA IDENTIDAD:

$$C_k \cos\left(\frac{z\pi k t}{T} + \varphi_k\right) = \left[D_k e^{i\frac{z\pi k t}{T}} + D_k^* e^{-i\frac{z\pi k t}{T}} \right]; \text{ Y}$$

AMBAS $[D_k]$ Y $[D_k^* = D_{-k}]$ SE REFIEREN A LA MISMA ARMÓNICA, O SEA, A

TERMINO $C_k \left(\cos \frac{z\pi k t}{T} + \varphi_k\right)$ CON AMPLITUD $[C_k = 2D_k]$

EN OTRAS PALABRAS, SI SE GRAFICAN LAS $[C_k]$ Y LUEGO LAS $[D_k]$; ÉSTOS ÚLTIMAS SE GRAFICARÁN A LA MITAD DE LA AMPLITUD DE LAS $[C_k]$.

3.2

LA FUNCION SAMPLING. [FUNCION MUESTREO].-

PARA LA FORMA DE ONDA DE LA FIGURA [38], $[C_0 = \frac{z}{T}]$ Y

$$C_k = \left[2 \frac{z}{T} \frac{\sin(\frac{z\pi k}{T})}{\frac{z\pi k}{T}} \right]; \varphi_k = \left[\frac{-z\pi k}{T} \right] \text{ --- (3.2)}$$

HACIENDO $\left[\frac{z\pi k}{T} = X_k \right]$ ENTONCES

$$C_k = \left[2 \frac{z}{T} \frac{\sin X_k}{X_k} \right]; \varphi_k = [-X_k] \text{ --- (3.3)}$$

DE MANERA QUE LA VARIABLE DISCRETA $[k]$ ES CAMBIADA POR LA VARIABLE DISCRETA $[X_k]$.

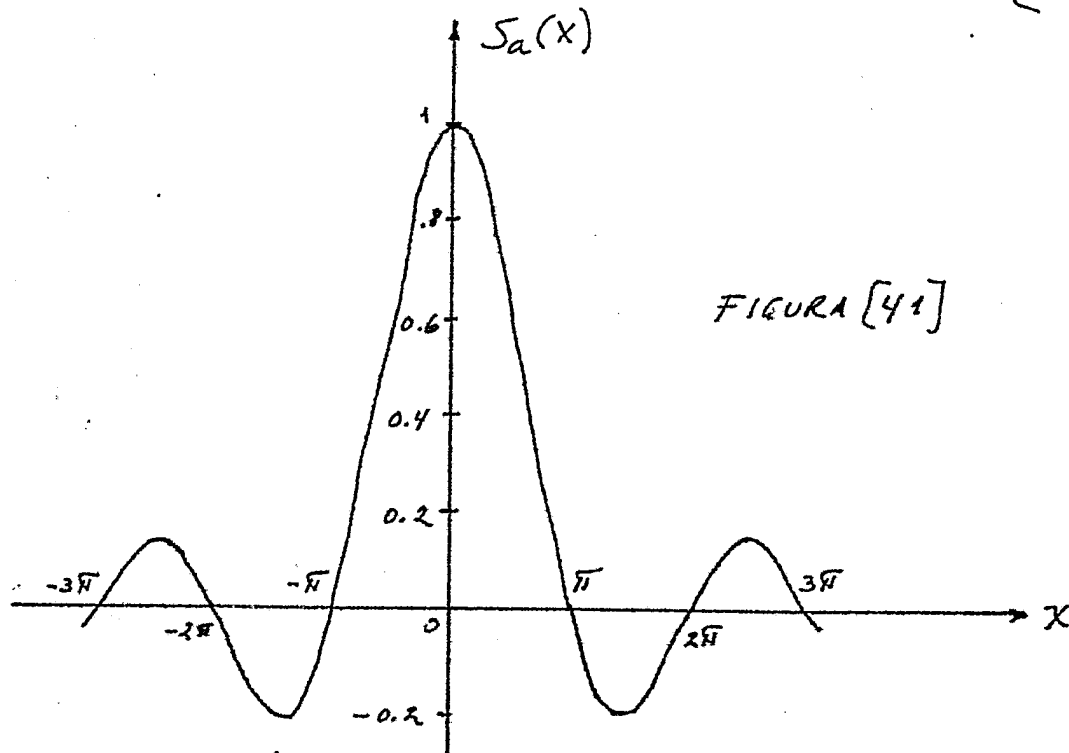
EN ANÁLISIS DE FRECUENCIAS, LOS TÉRMINOS DE LA FORMA $\left[\frac{\sin X}{X} \right]$ APARECEN

TAN FRECUENTEMENTE, QUE RESULTA MUY ÚTIL FAMILIARIZARSE CON ÉSTA FUNCIÓN.

DEBIDO AL USO DE ÉSTA FUNCIÓN EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN MUESTREO, ÉSTA FUNCIÓN ES CONOCIDA COMO "FUNCIÓN MUESTREO", Y SE LE ASIGNA EL SÍMBOLO $S_a(x)$; ÉSTO ES:

$$S_a(x) = \left[\frac{\sin x}{x} \right] \text{----- (3.4)}$$

EN LA FIGURA [41] SE MUESTRA LA FUNCIÓN MUESTREO [$S_a(x)$]:



OBSÉRVESE QUE $[x]$ NO TIENE DIMENSIONES (RADIANES), QUE $[S_a(0) = 1]$ Y QUE $[S_a(x) = S_a(-x)]$. LA GRÁFICA CRUZA EL EJE CERO EN $[x = \pm n\pi]$; $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ PUESTO QUE $[\sin x = \text{CERO}]$ PARA ÉSTOS VALORES.

SE OBSERVA, SIN EMBARGO, QUE EL MÁXIMO Y EL MÍNIMO NO OCURREN EN $[\sin x = \pm 1]$ PORQUE LA FUNCIÓN $[\frac{\sin x}{x}]$ NO ES UN MÁXIMO O MÍNIMO CUANDO EL NUMERADOR SÓLO ES UN EXTREMO.

PUESTO QUE $[\sin x] \in [-1, 1]$, SE VE QUE $S_a(x)$ TIENDE A CERO CUANDO $[x]$ TIENDE A INFINITO. SIN EMBARGO, A MEDIDA QUE $[x]$ AUMENTA, $[\sin x]$ OSCILA ENTRE LOS EXTREMOS POSITIVOS Y NEGATIVOS; Y SE REFLEJA EN LA VARIACIÓN DE $S_a(x)$.

LA GRÁFICA DE LA FIGURA [41] ES HECHA PARA LA VARIABLE CONTINUA $[x]$; PARA APLICARLA A LA ECUACION (3.3) SE USAN SOLAMENTE LOS VALORES DISCRETOS $[x_k = \frac{2\pi k}{T}]$.

PARA LA ECUACION (3.3), $S_a(x_k) = \left[C_k \left(\frac{T}{\lambda G} \right) \right]$; y ESTOS VALORES PUEDEN SER ENCONTRADOS EN LA FIGURA (41) COMO LINEAS VERTICALES ENTRE EL EJE λ Y LA GRÁFICA $S_a(\lambda)$ EN LOS VALORES $\{x_k\}$.
EL VALOR $\{C_0\}$ DE ESTE EJEMPLO, ESTÁ EXCLUIDO DE ESTA REGLA.

SISTEMAS LINEALES.-

SI UN SISTEMA LINEAL CONTIENE UNA SÓLA FUENTE (QUE EN GENERAL ES FUNCIÓN DEL TIEMPO) DENOTADA POR $\phi(t)$, ENTONCES CUALQUIER RESPUESTA $\psi(t)$ SE RELACIONA CON LA FUENTE POR MEDIO DE UNA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA:

$$a_m \frac{d^m \psi}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} \psi}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{d\psi}{dt} + a_0 \psi =$$

$$= b_n \frac{d^n \phi}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} \phi}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{d\phi}{dt} + b_0 \phi =$$

$$\left[\sum_{m=0}^m a_m \frac{d^m \psi}{dt^m} = \sum_{n=0}^n b_n \frac{d^n \phi}{dt^n} \right] \text{----- (3.5)}$$

USANDO EL OPERADOR $\left[P = \frac{d}{dt} \right]$, SE TIENE QUE

$$P f(t) = \left[\frac{df(t)}{dt} \right]; \quad P^n f(t) = \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right]; \quad \text{y la}$$

ECUACION (3.5) QUEDA:

$$\left[\sum_{m=0}^m a_m P^m \psi(t) = \sum_{n=0}^n b_n P^n \phi(t) \right] \text{----- (3.6)}$$

EN UN CIRCUITO LINEAL DE SÓLO ELEMENTOS PASIVOS R's, L's, C's; LA RESPUESTA $\{V_{AB}\}$ Y LA FUENTE $\{i(t)\}$ ESTÁN RELACIONADAS POR:

$$A(P) \{V_{AB}\} = B(P) \{i(t)\} \text{----- (3.7)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{DONDE} \\ A(P) &= \left[\sum_{m=0}^m a_m P^m \right] = a_m P^m + a_{m-1} P^{m-1} + \dots + a_1 P + a_0 \\ B(P) &= \left[\sum_{n=0}^n b_n P^n \right] = b_n P^n + b_{n-1} P^{n-1} + \dots + b_1 P + b_0 \end{aligned} \right\} \text{----- (3.8)}$$

DE MANERA QUE $A(P)$ Y $B(P)$ QUE SON OPERADORES LINEALES TIENEN LA FORMA DE "POLINOMIOS EN P". SE PUEDE DEMOSTRAR QUE TALES POLINOMIOS PUEDEN SER TRATADOS EN FORMA ALGEBRAICA, Y POR LO TANTO, SE PUEDE VER QUE LA RESPUESTA O SALIDA ES:

$$\left[V_{AB}(t) \right] = \frac{B(P)}{A(P)} \left[i(t) \right] \text{ --- --- --- (3.9)}$$

HASTA ESTE MOMENTO SE DEBE ENTENDER QUE (3.9) NÓ ES LA SOLUCION DE V_{AB} EN TÉRMINOS DE $i(t)$, SINO SOLOAMENTE ES UNA FORMA SIMBÓLICA DE EXPRESAR (3.8)

EL COCIENTE: $Z_{AB}(P) = \left[\frac{B(P)}{A(P)} \right] \text{ --- --- --- (3.10)}$ SE DEFINE COMO LA

"IMPEDANCIA OPERACIONAL", MIENTRAS QUE

$$Y_{AB}(P) = \left[\frac{A(P)}{B(P)} \right] \text{ SE DEFINE COMO "ADMITANCIA OPERACIONAL".}$$

FUNCIONES DEL SISTEMA. - LA ECUACION GENERAL QUE RELACIONA UNA RESPUESTA $\psi(t)$ CON UNA FUENTE $\phi(t)$ ES:

$$\left[A(P) \psi(t) = B(P) \phi(t) \right], \text{ EQUIVALENTE A (3.7); Y}$$

SE ESCRIBE SIMBÓLICAMENTE EN LA FORMA

$$\left[\psi(t) = \frac{B(P)}{A(P)} \phi(t) = H(P) \phi(t) \right], \text{ EQUIVALENTE A (3.9);}$$

DONDE $\left[H(P) = \frac{B(P)}{A(P)} \right], \text{ EQUIVALENTE A (3.10); ESTO ES}$

$$\psi(t) = H(P) \phi(t) = \left[\frac{B(P)}{A(P)} \right] \phi(t) \text{ --- --- --- (3.11)}$$

SE ENTIENDE QUE LA ECUACION (3.11) ES UNA FORMA SIMBÓLICA DE LA ECUACION (3.6). EL OPERADOR QUE "OPERA" EN LA FUNCION FUENTE, PARA PRODUCIR UNA RESPUESTA ESCOGIDA SE DENOMINA "FUNCION DEL CIRCUITO OPERACIONAL".

CUANDO UN SISTEMA LINEAL EN CONSIDERACION NO ES COMPLETAMENTE O PRECISAMENTE ELÉCTRICO, ENTONCES:

$H(P) \Rightarrow$ ES FUNCION DEL SISTEMA.

3.3 RELACION ENTRE LOS ESPECTROS DE LA FUENTE Y LOS ESPECTROS DE LA RESPUESTA:

CUANDO UNA FUENTE $[V_1(t)]$ ES EXPRESADA COMO LA SERIE DE FOURIER:

$$[V_1(t)] = D_0 + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \right], \text{ SE VISUALIZA A ESTO}$$

FUENTE COMO UNA SUMA DE PEQUEÑAS FUENTES, GENERANDO TODAS Y CADA UNA DE ELAS UNA COMPONENTE ARMÓNICA.

LA COMPONENTE DE LA RESPUESTA DEBIDA A LA FUENTE (RESPUESTA AL ESTADO-ESTACIONARIO) PUEDE, POR CONSIGUIENTE, HALLARSE POR SUPERPOSICIÓN.

SI UNA RESPUESTA $[V_2(t)]$ DE UN CIRCUITO PASIVO LINEAL ESTÁ RELACIONADO CON LA FUENTE $[V_1(t)]$ POR MEDIO DE LA "FUNCIÓN CIRCUITO OPERACIONAL" $[H(p)]$ DE MODO QUE:

$$V_2(t) = [H(p) V_1(t)] \text{ EN TÉRMINOS DE SISTEMAS LINEALES,}$$

ENTONCES EL FASOR RESPUESTA $[V_2]$ QUE REPRESENTA LA RESPUESTA SENUSOIDAL, ESTÁ RELACIONÁNDOSE CON EL FASOR FUENTE $[V_1]$ POR:

$$[V_2] = H(i\omega) [V_1] \text{ EN REPRESENTACIÓN FASOR} \quad (3.12)$$

DONDE $[\omega]$ ES LA FRECUENCIA EN RADIANES DE LA FUENTE SENUSOIDAL. DE AQUI, SI LA FUNCIÓN DE CIRCUITO NO TIENE UN POLO EN NINGUNA DE LAS FRECUENCIAS ARMÓNICAS DE LA FUENTE, LA RESPUESTA ESTADO-ESTACIONARIO $[V_2(t)]$ A LA FUENTE $[V_1(t)]$, ESTARÁ REPRESENTADA POR LA SERIE DE FOURIER:

$$V_2(t) = H(0) D_0 + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} H\left(\frac{i 2\pi k}{T}\right) \underset{\text{fuente}}{D_k} e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \right] \quad (3.13)$$

ANEXO IMPORTANTE: REPRESENTACION FASOR. - EN ANÁLISIS DE ESTADO-ESTACIONARIO SENUSOIDAL, SE ACOSUMBRA USAR LA REPRESENTACION FASOR. ESTO ES:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \beta) = \operatorname{Re} [V_m e^{i\omega t}] \quad (3.14)$$

O SEA, QUE $[V_m = V_m e^{i\beta}] \quad (3.15)$

ESTO CANTIDAD COMPLEJA ES LO QUE SE CONOCE COMO "AMPLITUD FASOR"; INCLUYENDO LA FASE $[\beta]$.

SE OBSERVA QUE LA SERIE ARMÓNICA PARA LA RESPUESTA TIENE COEFICIENTES QUE SON OBTENIDOS POR MULTIPLICACION DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE LA FUENTE POR LA FUNCIÓN COMPLEJA DE CIRCUITO EVALUADA EN LA FRECUENCIA ARMÓNICA.

esto es; si

$$V_2(t) = (D_Y)_0 + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (D_Y)_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \right] \quad (3.16)$$

los COEFICIENTES DE LA RESPUESTA $(D_Y)_k$ ESTARÁN DADOS POR

$$(D_{\text{respuesta}})_k = \left[H \left(i \frac{2\pi k}{T} \right) \right] \times (D_{\text{fuente}})_k \quad (3.17)$$

ESTA ÚLTIMA ECUACIÓN DA LA RESPUESTA ESPECTRAL RELACIONADA CON EL ESPECTRO DE LA FUENTE; ES LA RELACION DESEADA ENTRE EL ESPECTRO DE LA RESPUESTA Y EL ESPECTRO DE LA FUENTE.

LA ECUACION (3.17) ES PARTE ESENCIAL DE LA ECUACION (3.13), ES DECIR,

$$\text{SI } V_2(t) = H(0) D_0 + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(H \left(i \frac{2\pi k}{T} \right) D_k \right) e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \right]; \text{ SUSTITUYENDO (3.17)}$$

$$V_2(t) = H(0) D_0 + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \underset{\text{respuesta}}{D_k} e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \right]$$

AL TÉRMINO $\left[H \left(i \frac{2\pi k}{T} \right) \right]$ DE LA ECUACION (3.17) SE LE CONOCE COMO

"FUNCION DE TRANSFERENCIA EN EL DOMINIO FRECUENCIA"; Y ES LA REPRESENTANTE, POR ASI DECIRLO, DEL SISTEMA.

ACLARACION IMPORTANTE: ES IMPORTANTE CONSIDERAR QUE LAS FASES DE LA RESPUESTA SON LA SUMA DE LAS FASES DE LA FUENTE MÁS LAS FASES DEL SISTEMA; O SEA:

$$\Theta_{\text{RESPUESTA}} = \left[\Theta_H + \Theta_{\text{FUENTE}} \right] \quad (3.17A)$$

3.4 TRANSMISION SIN DISTORSION -

SI LA RELACION ENTRE LA FUNCION FUENTE $[V_1(t)]$ Y LA FUNCION RESPUESTA $V_2(t)$ ES DE LA FORMA:

$$V_2(t) = [K_0] V_1(t - T_0) \quad (3.18)$$

ENTONCES EL CIRCUITO TRANSMITE LA SEÑAL DE ENTRADA SIN DISTORSION.

EN LA EXPRESION (3.18) SE VE QUE LA FORMA DE ONDA DE LA RESPUESTA ES RETRASADA EN EL TIEMPO POR $[T_0]$ CON RESPECTO A LA ENTRADA; Y QUE LA MAGNITUD DE LA SALIDA ES $[K_0]$ VECES LA MAGNITUD DE LA FASE CORRESPONDIENTE DE LA ENTRADA.

el número $[h_0]$ es conocido como la "GANANCIA" del circuito; si $[h_0 < 1]$ se dice que el circuito o sistema "ATENÚA".

si $[V_1(t)]$ es una señal periódica cuya frecuencia fundamental en radianes es $[\omega_0]$, y si el espectro está dado por $[D_k = \frac{1}{2} C_k e^{i\phi_k}]$, entonces de la definición de transmisión sin distorsión se tiene que:

$$V_2(t) = [h_0] V_1(t - T_0) = [h_0] \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k}{T} (t - T_0)} = [h_0] \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} e^{-i \frac{2\pi k T_0}{T}} \quad (3.19)$$

O BIEN, SI SE SABE QUE $[\omega_0] = \frac{2\pi}{T}$ ENTONCES

$$V_2(t) = \left[h_0 \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i\omega_0 k t} e^{-i\omega_0 k T_0} \right] \quad (3.20)$$

y la amplitud de los coeficientes de la respuesta $[V_2(t)]$ debe ser $[h_0 D_k]$; y los ángulos de fase de la respuesta deben ser $[\phi_k - k\omega_0 T_0]$;

esto último con base a (3.17a)

se concluye que para transmisión sin distorsión, la "función de transferencia compleja" del circuito o sistema, debe tener la forma:

$$H(i\omega) = \left[\frac{V_2}{V_1} \right] = \left[h(\omega) e^{i\theta(\omega)} \right] = \left[h_0 e^{-i\omega_0 k T_0} \right] \quad (3.21)$$

esto es, la amplitud de la función de transferencia (la cual en general varía con la frecuencia) debe ser la constante $[h_0]$; y la fase de la función de transferencia debe ser proporcional a la frecuencia.

si esta condición se satisface, los coeficientes de Fourier complejos de la respuesta deben ser iguales a los coeficientes de Fourier complejos de entrada por una función de transferencia.

Así, regresando a (3.17) se ve que esto se cumple. La gráfica de la respuesta en frecuencia de un circuito para transmisión sin distorsión, se muestra en la figura [42]:

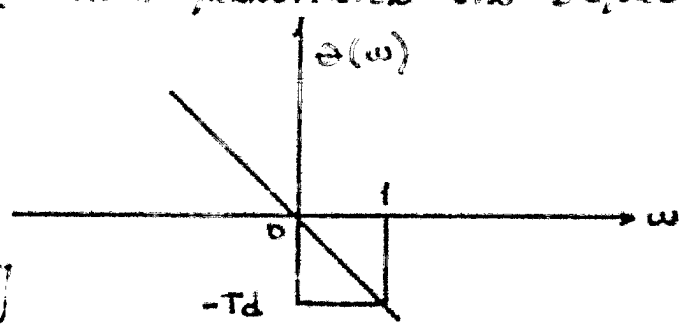
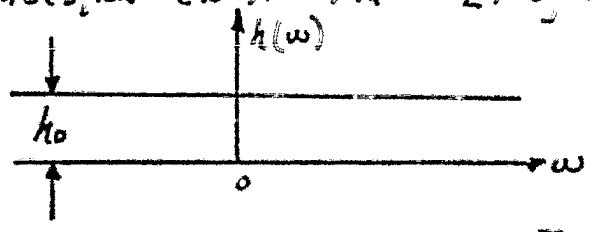
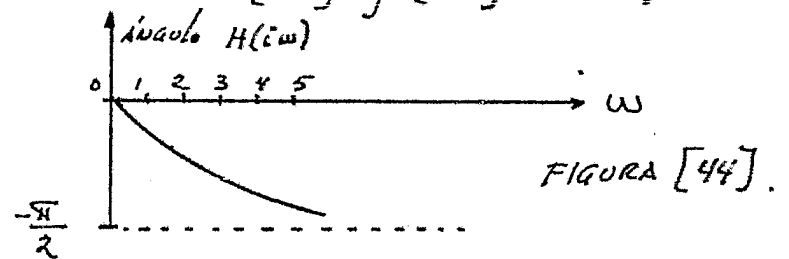
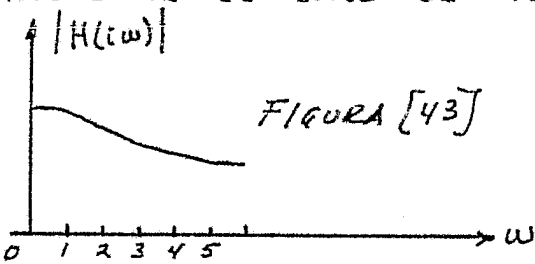


FIGURA [42]

3.5 FILTROS IDEALES

SUPONGASE QUE SE TIENE UN CIRCUITO R-C CUYA CURVA DE RESPUESTA EN FRECUENCIA ES COMO SE MUESTRA EN LAS FIGURAS [43] y [44] A CONTINUACIÓN:



COMO YA SE VIÓ, LAS AMPLITUDES DEL ESPECTRO DE LA RESPUESTA ESTÁN DADAS POR EL PRODUCTO DE LAS AMPLITUDES DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL CIRCUITO O SISTEMA, CON LAS AMPLITUDES DEL ESPECTRO DE ENTRADA. SE OBSERVA QUE LAS BAJAS FRECUENCIAS SUFREN MUY POCO CAMBIO EN AMPLITUD Y CON FASE CASI LINEAL, MIENTRAS QUE LAS ALTAS FRECUENCIAS SON ATENUADAS CON MAYOR GRADO.

ÉSTA ACCIÓN ES CONOCIDA COMO "FILTRADO" y EN ÉSTE SENTIDO EL CIRCUITO ES LLAMADO UN "FILTRO PASA-BAJAS".

EN FORMA SIMILAR, PODEMOS PENSAR EN "FILTROS PASA-BANDA" y "FILTROS PASA-ALTA".

EN LA PRÁCTICA, NINGÚN CIRCUITO PUEDE SATISFACER LOS REQUERIMIENTOS DE TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN PARA TODAS LAS FRECUENCIAS.

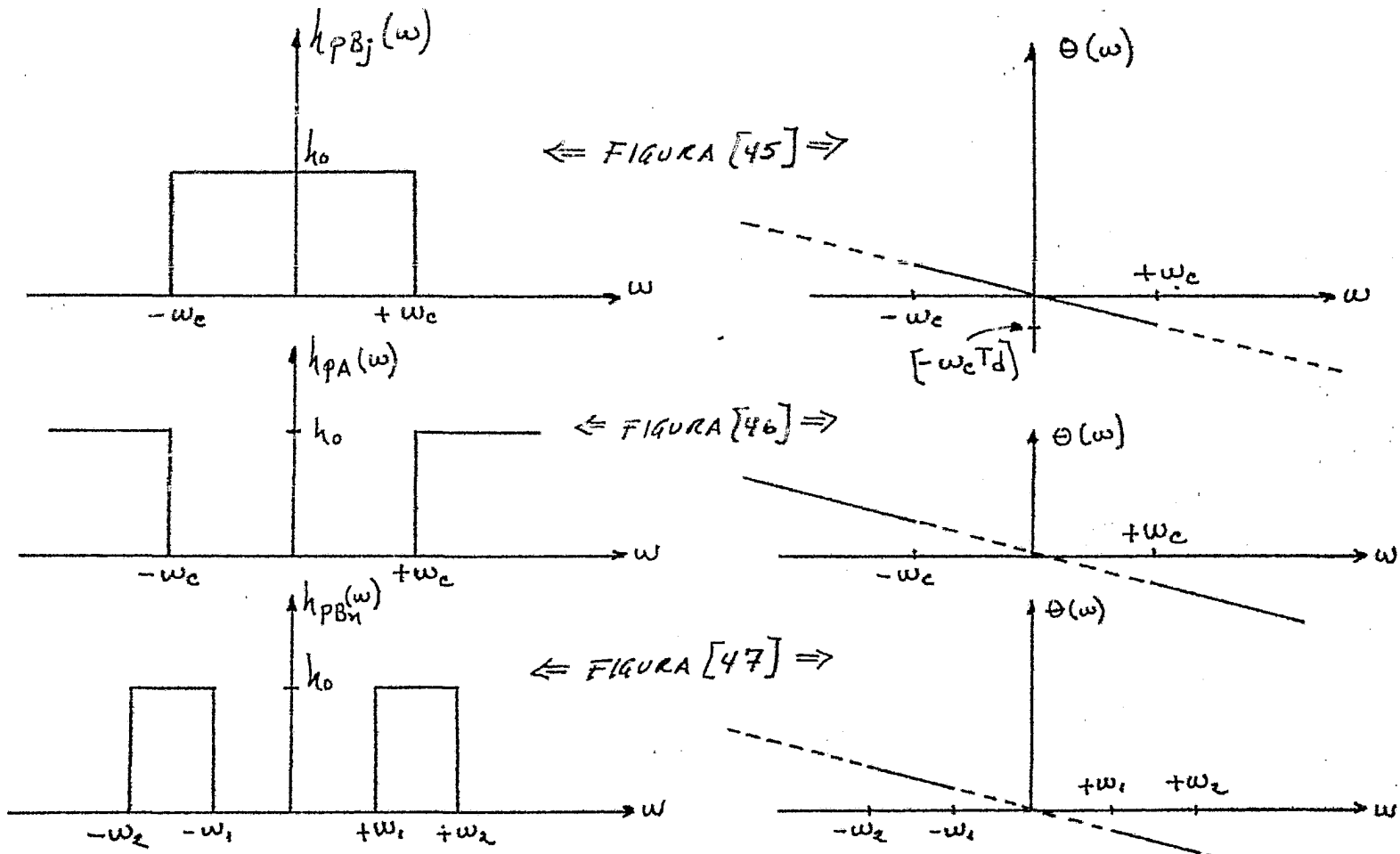
DEBIDO A PROBLEMAS DE CAPACITANCIA ENTRE LAS TERMINALES DE ENTRADA Y EN LAS DE SALIDA Y A HABER PROBLEMAS DE INDUCTANCIA, EN UN CIRCUITO LAS ALTAS FRECUENCIAS SERÁN ATENUADAS EVENTUALMENTE.

POR CONSIGUIENTE, PARA LA DISCUSIÓN DE TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN, SE RESTRINGIÓ A BANDAS DE FRECUENCIAS; y EN ESTE CASO, ES ÚTIL DEFINIR UN "FILTRO IDEAL" COMO UN FILTRO QUE DEJA PASAR UNA BANDA DE FRECUENCIAS CON ATENUACIÓN UNIFORME y CON CARACTERÍSTICAS DE FASE LINEAL EN ÉSTA BANDA. AÚN MÁS, UN "FILTRO IDEAL" DEBE PROPORCIONAR ATENUACIÓN INFINITA FUERA DE LA BANDA DE PASO.

EN LAS SIGUIENTES FIGURAS [45], [46] y [47], SE MUESTRAN LAS CARACTERÍSTICAS DE FRECUENCIA DE ALGUNOS FILTROS IDEALES. (OBSÉRVESE QUE SE MUESTRAN FRECUENCIAS POSITIVAS y NEGATIVAS; ÉSTO SE HACE COMO UNA CONVENIENCIA CUANDO SE USAN COEFICIENTES COMPLEJOS DE FOURIER).

EXAMINANDO LAS CARACTERÍSTICAS DE TRANSFERENCIA DE LOS FILTROS IDEALES, SE OBSERVA QUE EL CORTE TIENE PENDIENTE INFINITA, DE MANERA QUE POR EJEMPLO, EN EL CASO DEL FILTRO PASA-BAJAS MOSTRADO EN LA FIGURA [45],

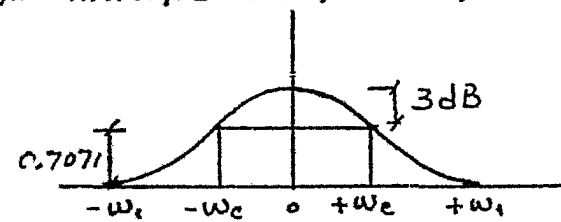
$$\begin{cases} |H(\omega)| = H_0 & \text{EN } (\omega = \omega_c^-) \text{ y} \\ |H(\omega)| = \text{CERO} & \text{EN } (\omega = \omega_c^+) \end{cases}$$



ES DE SUMA IMPORTANCIA Aclarar que DADO lo IMPOSIBLE DE PODER HACER UN FILTRO IDEAL; EN FILTROS REALES LA FRECUENCIA DE CORTE (ω_c) ES LA CORRESPONDIENTE EN LA QUE LA AMPLITUD MÁXIMA DEL FILTRO ES AÚN MENOR EN 3 DECIBELER A LA MÁXIMA AMPLITUD DE LA SEÑAL QUE PASA A TRAVÉS DE ÉL; O BIEN, ES EQUIVALENTE A LA CORRESPONDIENTE A UN 70.71% DE LA AMPLITUD DE LA SEÑAL QUE PASA.

ASÍ PUES:

$$1\text{dB} = 20 \log_{10} \left[\frac{A_m}{A_0} \right]$$



SE PUEDE DEMOSTRAR QUE EN CUALQUIER CIRCUITO, LA CURVA DE RESPUESTA EN FRECUENCIA DEBE SER UNA FUNCION CONTINUA DE (ω) CON DERIVADAS CONTINUAS Y QUE LA PENDIENTE INFINITA MOSTRADA NO ES POSIBLE OBTENERLA CON UN NÚMERO FINITO DE ELEMENTOS R-L-C.

AUNQUE LOS FILTROS IDEALES NO SON FISICAMENTE REALIZABLES, FRECUENTEMENTE ES POSIBLE OBTENER SUS RESULTADOS POR APROXIMACION DE UNA CURVA DE RESPUESTA EN FRECUENCIA CON CORTES ABRUPTOS, CON CARACTERÍSTICAS DE FILTROS IDEALES COMO LOS MOSTRADOS. SE RECONOCE QUE LOS FILTROS IDEALES TRANSMITIRIAN SIN DISTORSIÓN CUALQUIER SEÑAL CUYO ESPECTRO DE FRECUENCIA QUEDA COMPRENDIDO COMPLETAMENTE DENTRO DE LA BANDA DEL FILTRO.

AHORA SE FORMULA LA SIGUIENTE PREGUNTA: SUPONGASE QUE UN CIRCUITO CARACTERÍSTICO ES APROXIMADO POR UN FILTRO IDEAL Y EL ESPECTRO DE LA ENTRADA ES TAL QUE LAS ARMÓNICAS DENTRO DE LA BANDA DEL FILTRO SON RELATIVAMENTE MAYORES QUE AQUELLAS FUERA DE LA BANDA. ¿COMO INFLUYE EN LA FORMA DE ONDA LA ELIMINACIÓN DE LAS ARMÓNICAS QUE QUEDAN FUERA DE LA BANDA DEL FILTRO?

PARA CONTESTAR ÉSTA PREGUNTA SE NECESITA CONSIDERAR EL PROBLEMA MÁS GENERAL: ¿CUÁL ES LA "CONTRIBUCIÓN" DE CADA ARMÓNICA PARTICULAR EN LA FORMA DE ONDA?

EN ESTE MOMENTO, LA PREGUNTA ES UN POCO VAGA YA QUE EL TÉRMINO "CONTRIBUCIÓN" NO HA SIDO BIEN DEFINIDO TODAVÍA.

EN LA SIGUIENTE SECCIÓN SE DISCUTIRÁ LA PREGUNTA CON MAYOR PRECISIÓN. PERO ANTES ES NECESARIO COMENTAR QUE, AUNQUE LOS FILTROS IDEALES NO SON FÍSICAMENTE REALIZABLES, PODEMOS PENSAR EN ELLOS COMO SE ESTABLECIÓ ANTES, ES DECIR, COMO SIMPLIFICACIONES DE APROXIMACIONES A CIRCUITOS FÍSICOS. AUN MÁS, PODEMOS USAR LOS FILTROS IDEALES COMO UNA HERRAMIENTA ANALÍTICA; ÉSTO ES, CUANDO "PASAMOS" UNA SEÑAL A TRAVÉS DEL FILTRO (EN FORMA ANALÍTICA) Y EXAMINAMOS LA RESPUESTA, ESTUDIAMOS LA ARMÓNICA O ARMÓNICAS DE LA SEÑAL DENTRO DE LA BANDA DEL FILTRO. ASÍ, EL CONCEPTO DE FILTRO IDEAL, PROPONE UN MÉTODO PARA VISUALIZAR CÓMO UNA ARMÓNICA O GRUPO DE ARMÓNICAS ES SELECCIONADO DE LA SEÑAL PARA ESTUDIAR SU "CONTRIBUCIÓN" A LA SEÑAL COMPLETA.

3.6 CONTENIDO DE POTENCIA DE UNA FORMA DE ONDA PERIÓDICA:

EN ESTA SECCIÓN SE DISCUTE LA RELACION ENTRE EL CONTENIDO DE POTENCIA Y LA REPRESENTACION POR SERIES DE FOURIER DE FORMAS DE ONDA PERIÓDICAS. RECUÉRDENSE QUE EL CONTENIDO DE POTENCIA DE UNA FORMA DE ONDA PERIÓDICA $[f(t)]$ EN EL PERIODO $[T]$ SE DEFINE COMO EL VALOR CUADRÁTICO MEDIO;

$$\text{y DE (1.40): } F^2 = \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt \right] \text{ --- (3.22)}$$

DONDE F ES EL VALOR [RMS] DE $f(t)$ SEGÚN LA EXPRESION (2.7) ÉSTO ES, SI $f(t)$ ES EL VOLTAJE O LA CORRIENTE A TRAVÉS DE UNA RESISTENCIA DE UN OHM $[1\Omega]$, ENTONCES $[F^2]$ REPRESENTA LA POTENCIA PROMEDIO LIBERADA A LA RESISTENCIA.

AHORA SE DISCUTIRÁ UNA EXPRESION PARA EL VALOR CUADRÁTICO MEDIO $[F^2]$ EN TÉRMINOS DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER $[D_k]$ DE LA SERIE $f(t)$.

RESPECTO A ÉSTO, SE SEÑALA QUE $[F^2]$ PUEDE SER CALCULADA MÁS CONVENIENTEMENTE A PARTIR DE (3.22) SIN EXPRESAR $[f(t)]$ COMO UNA SERIE DE FOURIER.

EN ESTE MOMENTO, SE ESTÁ INTERESADO EN LA EVALUACION DE $[F^2]$ CUANDO SÓLO LA REPRESENTACION EN SERIES DE FOURIER DE $f(t)$ ES CONOCIDA.

EN ESTE CASO SE TIENE:

$$f(t) = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \right] \text{ --- (3.23)}$$

EN EL CAPÍTULO I SE DEMOSTRÓ QUE, COMO CONSECUENCIA DE LA ORTOGONALIDAD DE LOS TÉRMINOS EN LA SERIE DE FOURIER, EL VALOR CUADRÁTICO MEDIO DE

$$f_0(t) = \left[\sum_{-N}^N D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \right] \dots \dots \dots (3.24)$$

ESTÁ DADO POR:

$$F_0^2 = \left[\sum_{-N}^N D_k D_k^* \right] = \left[D_0^2 + 2 \sum_{k=1}^N D_k^2 \right] \dots \dots \dots (3.25)$$

NÓTENSE QUE $[D_k^* = D_{-k}]$.

CUANDO $f(t)$ TIENE CONTENIDO CUADRÁTICO FINITO, EL VALOR CUADRÁTICO MEDIO $[F^2]$ DE LA SERIE DE FOURIER, SE OBTIENE HACIENDO QUE $[N]$ TIENDA A INFINITO COMO EN LA ECUACION (3.25); ÉSTO ES, SI

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} ; \text{ ENTONCES}$$

$$F^2 = \left[\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt \right] = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k D_k^* = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} D_k D_{-k} \right] \dots \dots \dots (3.26)$$

LA FORMA TRIGONOMETRICA SERÁ:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \phi_k\right) ; C_0 = D_0 ; C_k = 2D_k ; \text{ DE AQUI'}$$

$$D_k^2 = \left[\frac{1}{4} C_k^2 \right] \text{ Y SUSTITUYENDO EN (3.25) SE TIENE}$$

$$F^2 = \left[C_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} C_k^2 \right] = \left[C_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{C_k}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (3.27)$$

PARA LA FUNCION $f_k(t) = C_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \phi_k\right)$; EL VALOR [YMS] ES $\left[\frac{C_k}{\sqrt{2}} \right]$;

DE AQUI, EL VALOR CUADRÁTICO MEDIO $F^2 = \left[\frac{C_k}{\sqrt{2}} \right]^2$

RECUÉRDENSE QUE $F = [YMS]$; $F^2 = \text{VALOR CUADRÁTICO MEDIO}$.

LA EXPRESION PARA EL VALOR CUADRÁTICO MEDIO $[F^2]$ DE UNA FUNCION PERIÓDICA EN TÉRMINOS DE SUS COEFICIENTES DE FOURIER, EXPRESADO POR LAS ECUACIONES (3.26) ó (3.27), PUEDE REESCRIBIRSE COMO:

"EL VALOR CUADRÁTICO MEDIO $[F^2]$ DE UNA FUNCION PERIÓDICA ES LA SUMA DE LOS VALORES CUADRÁTICOS MEDIOS DE SUS ARMÓNICAS"

SE OBSERVA ADEMÁS, QUE $[F^2]$ ES INDEPENDIENTE DE LA FASE DE LAS ARMÓNICAS Y DEPENDE SOLAMENTE DE SUS AMPLITUDES.

CÁLCULO DE POTENCIA EN RÉGIMEN PERMANENTE (ESTADO ESTACIONARIO):

SI EN LAS TERMINALES a-b DE UN CIRCUITO, EL VOLTAJE $[V_{ab}]$ SE DEFINE POR LA SERIE DE FOURIER:

$$[V_{ab}] = \left[\sum_{k=0}^{\infty} V_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \psi_k\right) \right] = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} (D_v)_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \right] \quad (3.28)$$

DONDE, MEDIANTE LA ANÁLISIS CON

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \psi_k\right);$$

$$D_0 = C_0; \quad [C_k = 2D_k], \quad D_k = \frac{1}{2} C_k e^{i\psi_k};$$

SE TIENE QUE

$$[(D_v)_0 = V_0] \quad \text{y} \quad [(D_v)_k = \frac{1}{2} V_{k_{\max}} e^{i\psi_k}] \quad \forall k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (3.29)$$

POR OTRO LADO, LA CORRIENTE $[i(t)]$ DE RÉGIMEN PERMANENTE ENTRANDO POR LA TERMINAL [a] ES:

$$[i(t)] = \left[\sum_{k=0}^{\infty} I_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \psi_k\right) \right] = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} (D_i)_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \right] \quad (3.30)$$

DONDE

$$[(D_i)_0 = I_0] \quad \text{y} \quad [(D_i)_k = \frac{1}{2} I_{k_{\max}} e^{i\psi_k}] \quad (3.31)$$

ENTONCES, LA POTENCIA DE ENTRADA COMO FUNCIÓN DEL TIEMPO ESTÁ DADA POR:

$$\begin{aligned} [P_{ab}(t)] &= \left[\sum_{-\infty}^{\infty} (D_v)_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \right] \left[\sum_{-\infty}^{\infty} (D_i)_m e^{i\frac{2\pi mt}{T}} \right] = \\ &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (D_v)_k (D_i)_m e^{i\frac{2\pi t}{T}(k+m)} \right] \quad (3.32) \end{aligned}$$

LA POTENCIA PROMEDIO DE ENTRADA ES:

$$P_{ab} = \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [P_{ab}(t)] dt \right] \quad (3.33)$$

PARA EXPRESAR LA POTENCIA PROMEDIO EN TÉRMINOS DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE LA SERIE PARA $[V(t)]$ E $[i(t)]$, LA ECUACION (3.32) ES SUSTITUIDA COMO EL INTEGRANDO DE LA ECUACION (3.33). EXACTAMENTE QUE COMO LA OBTENCIÓN DE LA ECUACION (3.26), LAS ÚNICAS CONTRIBUCIONES QUE NO SON CERO OCURREN CUANDO $[k = -m]$; DE AQUI:

$$P_{ab} = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} (D_v)_k (D_i^*)_k \right] = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} (D_v)_k (D_i)_{-k} \right] \quad (3.34)$$

INTRODUCIENDO (3.29) y (3.31) EN (3.33) SE PUEDE DEMOSTRAR QUE

$$P_{ab} = \left[V_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[V_{k_{max}} I_{k_{max}} \right] \cos(\psi_k - \phi_k) \right] \quad (3.35)$$

HACIENDO $[\psi_k - \phi_k] = [\theta_k]$; y COMO (3.36)

$$\left[\frac{I_{k_{max}} V_{k_{max}}}{2} \right] = \left[\frac{V_{k_{max}}}{\sqrt{2}} \frac{I_{k_{max}}}{\sqrt{2}} \right] = [V_k I_k] \quad (3.37)$$

DONDE $[V_k]$, $[I_k]$ SON LOS VALORES [RMS] DE LA K-ÉSIMA ARMÓNICA DE VOLTAJE Y CORRIENTE RESPECTIVAMENTE.

INTRODUCIENDO (3.36) y (3.37) EN (3.35), LA POTENCIA PROMEDIO ES:

$$P_{ab} = \left[V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k I_k \cos(\theta_k) \right] \quad (3.38)$$

y DENOTANDO

$$[P_0 = V_0 I_0] ; [P_k = V_k I_k \cos(\theta_k)] \quad (3.38_A)$$

DE MANERA QUE EN (3.38)

$$P_{ab} = [P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_k] = \left[\sum_{k=0}^{\infty} P_k \right] \quad (3.39)$$

ÉSTA EXPRESIÓN INDICA QUE LA POTENCIA PROMEDIO LIBERADA POR UNA FUENTE PERIÓDICA EN UN CIRCUITO, ES LA SUMA DE LAS POTENCIAS PROMEDIO LIBERADA POR ARMÓNICAS INDIVIDUALES.

ÉSTA NOTABLE PROPIEDAD DE SUPERPOSICIÓN DE POTENCIA PROMEDIO, ES UNA CARACTERÍSTICA EXTREMADAMENTE ATRACTIVA DEL ANÁLISIS DE FOURIER APLICADO A PROBLEMAS DE CIRCUITOS.

SE OBSERVA QUE EN GENERAL, LA POTENCIA NO ES UNA FUNCIÓN LINEAL DE VOLTAJE O CORRIENTE Y POR LO TANTO NO PUEDE SER SUPERPUESTA; PERO LA PROPIEDAD DE ORTOGONALIDAD DE LAS ONDAS SENUSOIDALES, LAS CUALES ESTÁN ARMÓNICAMENTE RELACIONADAS, PERMITE LA SUPERPOSICIÓN DE LA POTENCIA "PROMEDIO" LIBERADA POR LAS ARMÓNICAS PARA DAR LA POTENCIA PROMEDIO TOTAL.

EJEMPLO 15.- EL VOLTAJE EN LAS TERMINALES a-b DE UN PAR TERMINAL ^{QUE} NO ES LINEAL ESTÁ DADO POR: $[V_{ab}] = [100 + 100 \cos t + 50 \cos 2t + 30 \cos 3t]$; y LA CORRIENTE ENTRANDO A LA TERMINAL [a] ES:

$$[i(t)] = \left[10 \cos \left(t - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \cos \left(3t - \frac{3\pi}{4} \right) \right].$$

CALCÚLESE LA POTENCIA PROMEDIO LIBERADA POR EL PAR TERMINAL a-b.

SOLUCIÓN: DE LA EXPRESION (3.38A) $P_0 = I_0 V_0 = 0(100) = \text{CERO}$ ENTONCES

$$\left. \begin{array}{l} (P_0 = \text{CERO}) \\ V_1 = 100(0.7071) \\ I_1 = 10(0.7071) \end{array} \right\} V_1 I_1 = 500 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} P_1 = \frac{500}{2} = 250 \text{ watts.}$$

$$\theta_1 = [\varphi_1 - \psi_1] = \left[0 - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \right] = \left[\frac{\pi}{3} \right] \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_2 = 50 \\ I_2 = \text{CERO} \end{array} \right\} V_2 I_2 = \text{CERO} \Rightarrow [P_2 = \text{CERO}]$$

$$\left. \begin{array}{l} V_3 = \frac{30}{\sqrt{2}} \\ I_3 = \frac{2}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} V_3 I_3 = 30 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} P_3 = -30(0.7071) = -21.21 \text{ watts}$$

$$\theta_3 = [\varphi_3 - \psi_3] = \left[\frac{3\pi}{4} \right] \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -0.7071$$

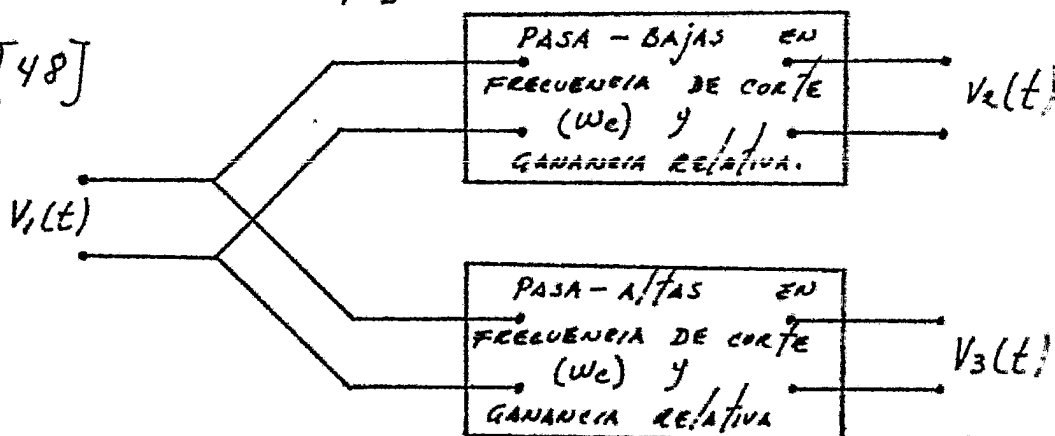
FINALMENTE $P = P_1 + P_3 = [250 - 21.21] = 228.8 \text{ watts.}$

3.7 CONTENIDO DE ENERGÍA Y POTENCIA EN UN RANGO DE FRECUENCIAS DADO.-

CUANDO UNA FUENTE PERIÓDICA SE APLICA A UN FILTRO IDEAL CON GANANCIA UNITARIA [$K_0 = 1$], LA RESPUESTA DE ESTADO-ESTACIONARIO DEL FILTRO SE COMPONE SOLAMENTE DE AQUELLAS ARMÓNICAS QUE PASEN POR EL FILTRO. CONSECUENTEMENTE, EL CONTENIDO DE ENERGÍA DE LA RESPUESTA ES MÁS PEQUEÑO QUE EL DE LA FUENTE.

EN LA FIGURA [48] A CONTINUACION, SE APLICA UNA FUENTE A LA COMBINACION EN PARALELO DE FILTROS IDEALES PASA-BAJAS Y PASA-ALTAS, LOS CUALES TIENEN LA MISMA FRECUENCIA DE CORTE [f_c].

FIGURA [48]



SEA LA GANANCIA RELATIVA = UNO; ES DECIR, GANANCIA UNITARIA.

PUESTO QUE CADA FILTRO IDEAL PARA AQUELLAS ARMÓNICAS QUE EL CERO NO DEJA PASAR, EL CONTENIDO DE ENERGÍA DE $[V_1(t)]$ ES LA SUMA DE LAS ENERGIAS DE $V_2(t)$ y $V_3(t)$; O SEA:

$$\int_0^T [V_1(t)]^2 dt = \left[\int_0^T [V_2(t)]^2 dt + \int_0^T [V_3(t)]^2 dt \right] \text{ --- (3.40)}$$

CON ÉSTA IDEA EN MENTE, ES POSIBLE DEFINIR EL TÉRMINO "CONTENIDO DE ENERGÍA" EN UNA BANDA DE FRECUENCIAS COMO SIGUE:

"EN LA BANDA DE FRECUENCIAS DE $[f_1]$ a $[f_2]$, EL CONTENIDO DE ENERGÍA DE UNA FORMA DE ONDA PERIÓDICA CUYA FRECUENCIA FUNDAMENTAL ES $[f_0]$ QUEDA DEFINIDO COMO:

$$\left[\frac{T}{2} \sum_{k=m}^n C_k^2 \right] = \left[\frac{1}{2f_0} \sum_{k=m}^n C_k^2 \right] \text{ --- (3.41)}$$

DONDE $\left[m = \frac{f_1}{f_0} \right]$; O EL NÚMERO MAYOR Y MÁS PRÓXIMO A $\left[\frac{f_1}{f_0} \right]$,

$\left[n = \frac{f_2}{f_0} \right]$; O EL NÚMERO MENOR Y MÁS PRÓXIMO A $\left[\frac{f_2}{f_0} \right]$.

ESTOS NÚMEROS, MAYOR O MENOR, DEBEN SER ENTEROS, DADO QUE ÉSTAS ÚLTIMAS RELACIONES SE DAN PARA EL CASO EN QUE $[m]$ Y $[n]$ NO SEAN ENTEROS.

"EL CONTENIDO DE POTENCIA" QUEDÓ DEFINIDO EN LAS EXPRESIONES (3.22) Y (3.26), ADEMÁS DE LA (3.27).

COMO UN EJEMPLO DE CONTENIDO DE ENERGÍA: SI UNA FORMA DE ONDA PERIÓDICA TIENE UNA FRECUENCIA FUNDAMENTAL $[f_0 = 5]$, ENTÓNCESES EL CONTENIDO DE ENERGÍA EN LA BANDA $[f_1 = 7]$ a $[f_2 = 21]$ ES:

$$\left. \begin{aligned} m = \frac{f_1}{f_0} = \frac{7}{5} \Rightarrow m = 2 \\ n = \left[\frac{f_2}{f_0} \right] = \left[\frac{21}{5} \right] \Rightarrow n = 4 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{APLICANDO LA} \\ \text{EXPRESIÓN} \\ \text{(3.41)} \end{array} \left. \frac{1}{10} \sum_{k=2}^4 C_k^2 = \left[\frac{C_2^2 + C_3^2 + C_4^2}{10} \right] \right\}$$

ÉSTA DEFINICIÓN ES FUNDAMENTAL EN CLASIFICACIÓN DE SEÑALES EN INGENIERÍA ELÉCTRICA; ÉSTO ES, CUANDO SE DICE "SEÑAL DE AUDIO-FRECUENCIA" SIGNIFICA UNA SEÑAL QUE TIENE TODA O LA FRACCIÓN MAYOR DE SU ENERGÍA EN EL RANGO DE LA FRECUENCIA AUDIBLE: $[20, 20000 \text{ Hz}]$.

PUESTO QUE LA POTENCIA PROMEDIO LIBERADA A LA RESISTENCIA ES LA ENERGÍA POR PERIODO DIVIDIDA POR EL PERIODO, SE PUEDE REFERIR TAMBIÉN EL "CONTENIDO DE POTENCIA" EN UNA BANDA DE POTENCIA DADA.

CON ESTE TÉRMINO SE QUIERE DECIR: "LA SUMA DE LOS VALORES CUADRÁTICOS MEDIOS $[F^2]$ DE LAS ARMÓNICAS EN LA BANDA DE FRECUENCIA EN CUESTIÓN.

A CONTINUACIÓN SE ESTABLECERÁ, EL TEOREMA DE MUESTREO.

3.8 TEOREMA DEL MUESTREO.-

SEÑALES DE BANDA LIMITADA.- UNA FUNCIÓN PERIÓDICA ES UNA FUNCIÓN DE BANDA LIMITADA SI EN SU ESPECTRO (DISCRETO), LOS VALORES $[D_k]$ SON CERO PARA $|n| > N$, DONDE $[N]$ ES UN ENTERO FINITO.

POR EJEMPLO, LA FUNCIÓN

$$V_i(t) = 100 (\cos t + \cos 3t + \cos 5t) \dots \dots \dots (3.42)$$

ES DE BANDA LIMITADA PORQUE LAS ARMÓNICAS PARA $|n| > 5$ SON CERO, ES DECIR, HASTA $[k=5]$ EXISTEN LAS $[D_k]$, Y EL RESTO SON CERO.

A PARTIR DE LA DEFINICIÓN ANTERIOR SE TIENE QUE UN FILTRO IDEAL DE PASA-BAJA Ó DE PASA-BANDA, CUYA ENTRADA ES UNA FUNCIÓN PERIÓDICA ARBITRARIA TIENE UNA SALIDA QUE ES UNA FUNCIÓN PERIÓDICA DE BANDA LIMITADA. PARA MUCHOS PROPÓSITOS PRÁCTICOS, LA SALIDA DE FILTROS NO IDEALES PUEDE SER CONSIDERADA DE BANDA LIMITADA.

DE ACUERDO CON ESTA ÚLTIMA DEFINICIÓN, UNA FUNCIÓN PERIÓDICA DE BANDA LIMITADA TIENE LA FORMA:

$$f(t) = \sum_{k=-N}^N D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} = \left[C_0 + \sum_{k=1}^N C_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right) \right] \dots \dots \dots (3.43)$$

SE OBSERVA DE LA ECUACIÓN (3.43) QUE SI $[T]$ ES CONOCIDO, SÓLO SE NECESITAN LOS $[2N+1]$ NÚMEROS $[C_0, C_1, C_2 \dots C_N; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_N]$ PARA ESPECIFICAR LA FUNCIÓN $f(t)$.

TEOREMA DEL MUESTREO.-

"UNA FUNCIÓN PERIÓDICA DE BANDA LIMITADA QUE NO CONTIENE ARMÓNICAS DE ORDEN MAYOR QUE $[N]$ ES ESPECIFICADA UNIVOCAMENTE POR SUS VALORES A $[2N+1]$ INSTANTES EN UN PERIODO"

LA DEMOSTRACIÓN DE ESTE TEOREMA SE OBTIENE A PARTIR DE LA ECUACIÓN (3.43). SI SE SUSTITUYEN LOS $[2N+1]$ VALORES $[f(t_1), f(t_2), \dots f(t_N)]$ (REFERIDOS COMO LAS MUESTRAS DE $f(t)$ EN LA ECUACIÓN (3.43), SE OBTIENEN $[2N+1]$ ECUACIONES SIMULTÁNEAS PARA LAS INCÓGNITAS:

$$[C_0, C_1, C_2, \dots C_N; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_N] \text{ O BIEN}$$

$$D_0, [Re D_1, Re D_2, \dots Re D_N; Im D_1, Im D_2, \dots Im D_N].$$

LA SOLUCIÓN DE ESTAS ECUACIONES ESPECIFICA UNIVOCAMENTE LA SERIE DE FOURIER, Y POR CONSIGUIENTE A $f(t)$.

MUESTREO UNIFORME.-

SE OBSERVA QUE EN UN PRINCIPIO, LOS INSTANTES $[t_1, t_2, t_3, \dots, t_{2N+1}]$ PUEDEN SER ESCOGIDOS ARBITRARIAMENTE.

A MENUDO UNO ESCOGE ÉSTOS INSTANTES A INTERVALOS IGUALES $\left[\frac{T}{2N+1}\right]$. ÉSTE TIPO DE MUESTREO SE LLAMA "MUESTREO UNIFORME".

ESTE TEOREMA PUEDE SER USADO PARA EVALUAR LOS COEFICIENTES DE FOURIER, DE UNA FUNCIÓN DE BANDA LIMITADA POR MUESTREO.

SIN EMBARGO, EL PROCEDIMIENTO DE MUESTREO NO SE USA SÓLO PARA LA EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER, SINO QUE TIENE MUCHAS APLICACIONES PRÁCTICAS.

3.9 ESPECTRO DE POTENCIA.-

PUESTO QUE PARA UNA FUNCIÓN PERIÓDICA REPRESENTADA POR UNA SERIE DE

FOURIER: $f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} F_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \phi_k\right)$; EN DONDE

$$[F_0 = C_0] \quad \text{y} \quad [\sqrt{2} F_k = C_k]$$

EL VALOR CUADRÁTICO MEDIO ES:

$$F^2 = F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 + \dots$$

LA IDEA DE CONTENIDO DE ENERGÍA EN UN RANGO DE FRECUENCIA DADO, NOS LLEVA A ASOCIAR CON CADA ARMÓNICA $[k]$, LA FUNCIÓN $\left[\frac{F_k^2}{F^2}\right]$ DE LA POTENCIA TOTAL.

ÉSTA ASOCIACIÓN DE POTENCIA CON ARMÓNICAS SE REPRESENTA GRÁFICAMENTE COMO EL "ESPECTRO DE POTENCIA" DONDE PARA CADA FRECUENCIA ARMÓNICA, SE TIENE UNA LÍNEA CUYA LONGITUD REPRESENTA $[F_k^2]$, SIMILAR AL ESPECTRO DE AMPLITUDES.

OBSÉRVESE QUE $[F_k^2]$ REPRESENTA LA POTENCIA PROMEDIO LIBERADA A $[1 \Omega]$ DE RESISTENCIA POR LA k -ÉSIMA ARMÓNICA.

POR EJEMPLO, LA FORMA DE ONDA DADA POR LA FIGURA [49] A CONTINUACION, TIENE LA SERIE DE FOURIER SEMEJANTE A LA EXPRESADA EN (3.1) Y EN LA FIGURA [35]:

$$v(t) = \left[\frac{V_0}{T} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k \tau}{T}}{\frac{\pi k \tau}{T}} \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \right) \right]$$

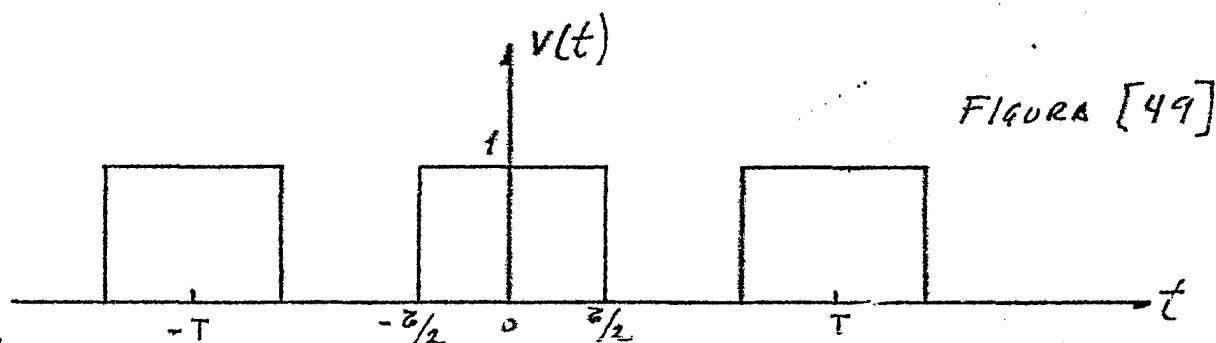


FIGURA [49]

el ESPECTRO DE AMPLITUDES PARA EL CASO EN QUE $\left[\frac{\tau}{T} = \frac{1}{3}\right]$ ES EXÁCTAMENTE IGUAL AL MOSTRADO EN LA FIGURA [36].

y el correspondiente ESPECTRO DE POTENCIAS ES:

$$F_0^2 = \left(\frac{\tau}{T}\right)^2; \quad F_k^2 = F_0^2 \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sin \pi k \tau / T}{\pi k \tau / T} \right]^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

y SE MUESTRA EN LA FIGURA [50] A CONTINUACIÓN:

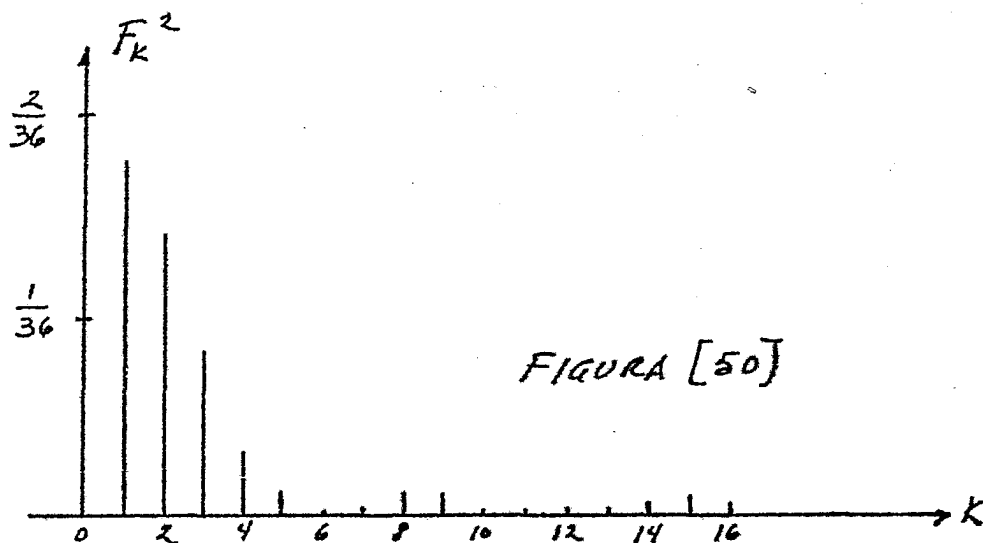


FIGURA [50]

el ESPECTRO DE POTENCIA PUEDE SER REPRESENTATIVO EN TÉRMINOS DE LOS COEFICIENTES COMPLEJOS AL IGUAL QUE EL ESPECTRO DE AMPLITUDES.

EN ESTE CASO, CADA ARMÓNICA SE REPRESENTA POR DOS LÍNEAS, UNA EN $[+k]$ y otra en $[-k]$; CADA LÍNEA CON LONGITUD

$$\left[\frac{F_k^2}{2} = D_k^2 \right].$$

CAPITULO IV

ESPECTROS CONTINUOS: LA INTEGRAL DE FOURIER.

EN EL ESTUDIO DE LAS SERIES DE FOURIER, SE HA VISTO QUE LA RESPUESTA DE CIRCUITOS O SISTEMAS A FUNCIONES PERIÓDICAS SE PUEDE OBTENER COMO LA SUPERPOSICION DE LAS RESPUESTAS PRODUCIDAS POR LAS ARMÓNICAS INDIVIDUALES.

AÚN MÁS, SE ESTABLECE UNA RELACION DE ENERGIA ENTRE LA REPRESENTACION EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE FUNCIONES PERIÓDICAS Y SUS COEFICIENTES DE FOURIER.

COMO RESULTADO, SE PUEDE ANALIZAR LA CONTRIBUCION DE LAS ARMÓNICAS EN UNA BANDA DE FRECUENCIA DADA, CON EL CONTENIDO CUADRÁTICO DE LA SEÑAL.

EN ESTE CAPITULO SE ESTUDIA LA REPRESENTACION EN FRECUENCIA DE FUNCIONES NO PERIÓDICAS (QUE REUNEN CIERTAS CONDICIONES) POR MEDIO DE UNA INTEGRAL QUE ESTA INTIMAMENTE RELACIONADA CON LA REPRESENTACION POR SERIES DE FOURIER.

4.1 ESPECTRO DE UNA FUNCION PERIÓDICA CUANDO EL PERIODO CRECE.-

CUANDO EL ESPECTRO DISCRETO DE UNA FUNCION PERIÓDICA CON PERIODO [T] ES GRAFICADO COMO FUNCION DE LA FRECUENCIA [f], LA DISTANCIA ENTRE LAS ARMÓNICAS VECINAS ES LA FRECUENCIA FUNDAMENTAL [1/T]

ESTO ES, A MEDIDA QUE EL PERIODO AUMENTA, LA FRECUENCIA FUNDAMENTAL DISMINUYE, y LAS LINEAS EN EL ESPECTRO SE ACERCAN UNA A LA OTRA.

CONSIDÉRESE POR EJEMPLO UNA FORMA DE ONDA CON PERIODO $[T = \frac{1}{10} \text{ seg}]$, DE MANERA QUE LA FRECUENCIA FUNDAMENTAL ES $[f = 10 \frac{\text{CICLOS}}{\text{seg}}]$

UNA BANDA DE FRECUENCIAS QUE SE EXTIENDE DE CERO A 51 CPS INCLUIRÁ LA COMPONENTE DIRECTA Y LAS PRIMERAS 5 ARMÓNICAS, ES DECIR, SEIS LINEAS ESPECTRALES EQUIDISTANTES.

SI AHORA SE AUMENTA EL PERIODO A $[T = \frac{2}{10} \text{ seg}] \Rightarrow [f = 5 \frac{\text{CICLOS}}{\text{seg}}]$, SIN CAMBIAR LA FORMA DE ONDA, ENTONCES LA MISMA BANDA DE CERO A 51 CPS, INCLUIRÁ LA COMPONENTE DIRECTA Y LAS PRIMERAS 10 ARMÓNICAS, ES DECIR, 11 LINEAS EQUIDISTANTES.

ES C/DO QUE UNA BANDA DE FRECUENCIAS DE [F] CICLOS, INCLUIRÁ MÁS Y MÁS ARMÓNICAS A MEDIDA QUE EL PERIODO [T] AUMENTA.

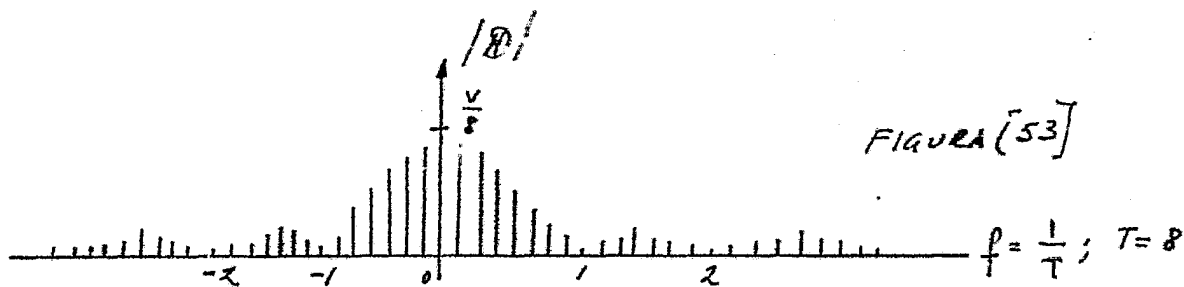
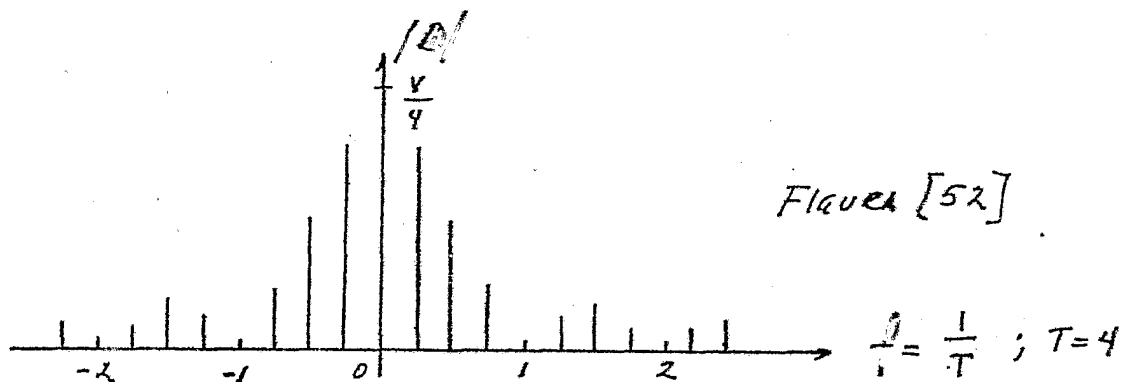
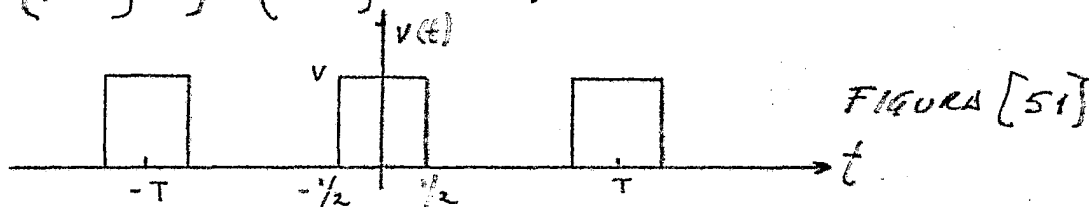
CONSIDÉRESE AHORA LA SECUENCIA INFINITA DE PULSOS RECTANGULARES DE 1 SEGUNDO DE DURACION CON PERIODO [T] MOSTRADO A CONTINUACION EN LA

FIGURA [51].

EL ESPECTRO COMPLEJO DE ESTA FUNCION PERIODICA ES:

$$D_k = \left[\frac{V}{T} \frac{\text{sen } \frac{\pi k}{T}}{\frac{\pi k}{T}} \right]$$

Y QUE COMO SE ILUSTRA TAMBIEN EN LAS FIGURAS [52] Y [53] PARA LOS CASOS EN QUE $[T=4]$ Y $[T=8]$ RESPECTIVAMENTE:



SE OBSERVA UNA VEZ MÁS QUE A MEDIDA QUE EL PERIODO AUMENTA, EL NÚMERO DE ARMÓNICAS EN LA BANDA DE FRECUENCIAS DADA, TAMBIÉN AUMENTA. UNA SEGUNDA OBSERVACIÓN AL RESPECTO A LAS FIGURAS ANTERIORES, ES QUE CUANDO EL PERIODO AUMENTA LAS AMPLITUDES DE TODAS LAS ARMÓNICAS DISMINUYEN. ÉSTA DISMINUCIÓN EN AMPLITUDES ES GENERAL Y SE PUEDE VER A PARTIR DEL FACTOR $\left[\frac{1}{T}\right]$ QUE MULTIPLICA EN LA FÓRMULA PARA LOS COEFICIENTES DE FOURIER:

$$D_k = \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \right] ; \text{ CUANDO SE ASUME}$$

QUE EL LÍMITE DE $\left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \right]$ PERMANECE FINITO CUANDO $[T]$

SE APROXIMA A INFINITO.

A MEDIDA QUE EL PERIODO, $[T]$ AUMENTA, LA DURACION DE CADA PULSO RECTANGULAR PERMANECE CONSTANTE (1 seg. POR EJEMPLO) DE MANERA QUE EN EL

límite cuando $[T]$ se aproxima a infinito, se tiene un sólo pulso, es decir, una forma de onda que es exactamente ceceo excepto dentro de un intervalo de tiempo finito.

se concluye que para un pulso (que no se repite), las armónicas están infinitamente cerca y de amplitud infinitesimal.

en el límite, la sumatoria de las armónicas con amplitud infinitesimal es una integral. como se muestra adelante, esta clase de razonamiento nos lleva a una útil representación integral de ciertas funciones no periódicas.

4.2 la integral de Fourier.

por el momento se considerarán formas de onda que no son necesariamente pulsos, pero que son no periódicas, y tienen contenido cuadrático finito, o sea,

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt \Rightarrow \text{finito} \right] \text{-----} (4.1)$$

y considérese además la forma de onda $[f(t)]$ como el límite de una forma de onda periódica cuyo período $[T]$ se ha aproximado a infinito. se empieza asumiendo que $f(t)$ es aún periódica con período $[T]$,

entonces:

$$f(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \right] \text{-----} (4.2)$$

donde

$$D_k = \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \right] \text{-----} (4.3)$$

la frecuencia fundamental de la forma de onda es $\left[\frac{1}{T} = f \right]$; se observa que este número es también el espaciamiento entre armónicas continuas en el espectro.

denotando ahora:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{T} \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = k \frac{2\pi}{T} = k [\omega] ; \text{entonces}$$

$$f(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{i(k\omega)t} \right] \text{-----} (4.4)$$

$$D_k = \left[\Delta f \int_{-1/2\Delta f}^{1/2\Delta f} f(t) e^{-i(k\omega)t} dt \right] \text{-----} (4.5)$$

CUANDO $[\Delta f \rightarrow 0]$, ENTONCES $[D_k \rightarrow 0]$, PERO LA RELACION $\left[\frac{D_k}{\Delta f}\right]$ PUEDE PERMANECER FINITA.

ESTA RELACION PERMANECERA DE HECHO FINITA SI LA INTEGRAL DEFINIDA

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(k\Delta\omega)t} dt \Rightarrow \text{FINITA} \right] \text{----- (4.6)}$$

SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA CONDICION (4.1) ES SUFICIENTE PARA APLICAR (4.6). EN LA ECUACION (4.3), $[D_k]$ REPRESENTA LA AMPLITUD COMPLEJA DE LA K-ÉSIMA ARMÓNICA. SE SABE QUE A MEDIDA QUE $[\Delta f]$ SE HACE MAS PEQUEÑA, LAS ARMÓNICAS EN UNA BANDA DE FRECUENCIA DADA SE APIÑAN, DE MANERA QUE EVENTUALMENTE EL ESPACIAMIENTO ENTRE ELAS SE HACE INFINITESIMAL (CERO). EN LA REPRESENTACION POR SERIES DE FOURIER, $[\omega]$ ES LA FRECUENCIA EN RADIANES DE LA K-ÉSIMA ARMÓNICA, Y LA FRECUENCIA FUNDAMENTAL EN RADIANES ES

$$\left[\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \right]; \text{ POR LO QUE } \omega = [k\Delta\omega] = [k\omega_0] \text{----- (4.6A)}$$

LA AMPLITUD DE ESTA ARMÓNICA ES D_k .

CUANDO $[\omega_0 = \Delta\omega]$ SE APROXIMA A CERO, $[k]$ SE DEBE APROXIMAR A INFINITO PARA QUE EL PRODUCTO $[k\Delta\omega]$ PERMANEZCA IGUAL A VALOR FINITO (ω) ; YA QUE $[\omega = k\Delta\omega]$.

EN EL LIMITE, EN LUGAR DE TENER ARMÓNICAS DISCRETAS CORRESPONDIENTES AL PARAMETRO $[k]$, TODOS LOS VALORES DE $[\omega]$ SON PERMITIDOS, Y EL PARAMETRO DISCRETO $[k]$ ES REEMPLAZADO POR LA VARIABLE CONTINUA $[\omega = k\Delta\omega = k\omega_0]$. ESTO ES, EN LUGAR DE TENER $[D_k]$ SE TENDRA $[D(\omega)]$ Y:

$$\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{D_\omega}{\Delta f} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] \text{----- (4.7)}$$

AHORA, EL LIMITE

$$\left[\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{D_\omega}{\Delta f} \right] \text{ SE DENOTA POR } [F(i\omega)]; \text{ O SEA:}$$

$$F(i\omega) = \left[\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{D_\omega}{\Delta f} \right] \text{----- (4.8)}$$

A ESTA ÚLTIMA EXPRESION, SE LE CONOCE COMO "TRANSFORMADA COMPLEJA DE FOURIER DE $f(t)$ "; O SEA,

$$F(i\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] \text{----- (4.9)}$$

AHORA SE VERÁ QUÉ PASA CON LA SUMATORIA (4.2) EN EL LÍMITE:

$$\text{REEMPLAZANDO } [D_k] \text{ POR } [F(i\omega)\Delta f] = \left[F(i\omega) \frac{\Delta\omega}{2\pi} \right] \text{ --- (4.9a)}$$

EN LA ECUACION (4.4) SE TENDRÁ:

$$f(t) = \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i(k\Delta\omega)t} \Delta\omega \right] \text{ --- (4.10)}$$

EN EL LÍMITE CUANDO $[\Delta f \rightarrow 0]$, LA ECUACION (4.10) SE CONVIERTE EN LA INTEGRAL:

$$f(t) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \text{ --- (4.11)}$$

LAS ECUACIONES (4.10) Y (4.11) SON LA REPRESENTACION DE FOURIER DE FUNCIONES NO PERIÓDICAS.

SE SEÑALA QUE LA ECUACION (4.11) REPRESENTA LA "SUPERPOSICION DE ARMÓNICAS ANÁLOGAS A (4.2) PARA EL CASO DE FUNCIONES PERIÓDICAS, MIENTRAS QUE (4.9) REPRESENTA EL "ANÁLISIS" EN ARMÓNICAS ANÁLOGO A (4.3) EN EL CASO PERIÓDICO.

LA FUNCION $F(i\omega)$ DE LA EXPRESION (4.9) ES CONOCIDA COMO LA "TRANSFORMADA DE FOURIER COMPLEJA DE $f(t)$ "; Y LA OPERACION "INTEGRAL" A MENUDO SE SIMBOaliza POR $[\mathcal{F}]$; O SEA:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] = [F(i\omega)] \text{ --- (4.12)}$$

DE MANERA QUE LA OPERACION \mathcal{F} SIGNIFICA: "MULTIPLIQUE POR $e^{-i\omega t}$ E INTEGRE DE $[-\infty$ A $+\infty$]". EN FORMA SIMILAR, SE TIENE QUE $[\mathcal{F}^{-1}]$ ES EL SÍMBOLO USADO PARA DENOTAR LA OPERACION DE "OBTENER $f(t)$ CUANDO SE DA $F(i\omega)$ y:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(i\omega)] = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \text{ --- (4.13)}$$

LA OPERACION DENOTADA EN (4.13) ES CONOCIDA COMO "TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER", MIENTRAS QUE (4.12) SIGNIFICA "TRANSFORMADA DIRECTA DE FOURIER".

SE OBSERVA NUEVAMENTE QUE LA OPERACION

$$\left[F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{ES ANALOGA A } D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \right] \text{----- (4.12A)}$$

y QUE

$$\left[f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{ES ANALOGA A } f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \right] \text{----- (4.13A)}$$

A PESAR DE ESTA ANALOGIA, ES NECESARIO SEÑALAR QUE EXISTEN DIFERENCIAS ESENCIALES ENTRE LA SERIE DE FOURIER (PARA SEÑALES PERIÓDICAS) Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER (PARA SEÑALES NO PERIÓDICAS).

EN PARTICULAR SE OBSERVA QUE LAS UNIDADES DE $F(i\omega)$ SON LAS UNIDADES DE $[D_k]$ MULTIPLICADAS POR UNIDADES DE TIEMPO $[\frac{1}{\Delta f}]$; ESTO ES, SI $f(t)$ Y D_k ESTÁN EN [VOLTS], ENTONCES $F(i\omega)$ ESTARÁ DADA EN $[\frac{\text{VOLT} \cdot \text{SEG}}{\text{RADIAN}}]$. POR ESTO RAZÓN, LA FUNCIÓN $F(i\omega)$ NO SE DESCRIBE COMO UNA "AMPLITUD ARMÓNICA", SINO COMO UNA "DENSIDAD ARMÓNICA" O "FUNCIÓN DENSIDAD DE AMPLITUD", COMO SE DISCUTE EN LA SIGUIENTE SECCIÓN.

* OBSERVACION IMPORTANTE. - EN LA DISCUSION FORMULADA EN ESTA SECCIÓN, SE DEFINIÓ SEGÚN (4.8) A $F(i\omega)$ COMO

$$F(i\omega) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \left[\frac{D\omega}{\Delta f} \right]; \text{ PERO TAMBIEN SE PUEDE}$$

DEFINIR COMO:

$$F(i\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left[\frac{D\omega}{\Delta\omega} \right] \text{----- (4.14)}$$

A PARTIR DE ESTA DEFINICIÓN:

$$F(i\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] \text{----- (4.15)}$$

ENTONCES, EL FACTOR $[\frac{1}{2\pi}]$ NO APARECE EN LA EXPRESION PARA $f(t)$ COMO EN (4.13), SINO QUE QUEDA

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(i\omega)\} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \text{----- (4.16)}$$

EN ALGUNOS CASOS TAMBIEN SE ACOSTUMBRA OBTENER AMBAS TRANSFORMADAS COMO:

$$F(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] \quad (4.17)$$

$$y \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(i\omega)] = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \quad (4.18)$$

AHORA BIEN, LA FUNCION $F(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ES EN GENERAL, COMPLEJA, Y SE TIENE QUE

$$F(i\omega) = R(i\omega) + iX(i\omega) = |F(i\omega)| e^{i\phi(\omega)} \quad (4.19)$$

DONDE $|F(i\omega)|$ ES EL "ESPECTRO DE MAGNITUD" DE $f(t)$; Y

$\phi(\omega)$ ES EL "ESPECTRO DE FASE" DE $f(t)$.

$R(i\omega)$ CORRESPONDE A LA PARTE REAL DE $F(i\omega)$ Y $X(i\omega)$ A LA PARTE IMAGINARIA DE $F(i\omega)$.

DE MODO QUE SI $f(t)$ ES REAL, ENTONCES MEDIANTE LA IDENTIDAD

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t); \text{ ES POSIBLE}$$

EXPRESAR (4.17) ASI:

$$F(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \right] \quad (4.20)$$

O SEA;

$$F(i\omega) = R(i\omega) + iX(i\omega) \quad \text{DE MANERA QUE}$$

$$R(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (4.20A)$$

$$X(i\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (4.20B)$$

PUES, QUE $f(t)$ ES REAL, SE TIENE QUE

$$\left[R(-i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = R(i\omega) \right] \quad (4.21)$$

$$\text{ASI QUE } R(i\omega) = R(-i\omega) \quad (4.21A)$$

DONDE SE VE QUE LA PARTE REAL DE $F(i\omega)$ ES UNA FUNCION PAR DE ω .

ADemás

$$\left[X(-i\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(-\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t dt = -X(i\omega) \right] \text{----- (4.22)}$$

por lo tanto

$$\left[X(-i\omega) = -X(i\omega) \right] \text{----- (4.22A)}$$

Donde se ve que la parte imaginaria de $F(i\omega)$ es una función impar de $[\omega]$.

de las expresiones (4.21A) y (4.22A) se tendrá

$$F(-i\omega) = [R(-i\omega) + iX(-i\omega)] = [R(i\omega) - iX(i\omega)] = F^*(i\omega) \text{----- (4.23)}$$

$$\text{Así que } [F(-i\omega) = F^*(i\omega)] \text{----- (4.23A)}$$

Ahora, de (4.19) se tiene que

$$F(i\omega) = |F(i\omega)| e^{i\phi(\omega)}, \text{ entonces}$$

$$F^*(i\omega) = |F(i\omega)| e^{-i\phi(\omega)} \text{----- (4.24)}$$

$$F(-i\omega) = |F(-i\omega)| e^{i\phi(-\omega)} \text{----- (4.24A)}$$

Por consiguiente, aplicando (4.23A):

$$|F(-i\omega)| e^{i\phi(-\omega)} = |F(i\omega)| e^{-i\phi(\omega)} \text{----- (4.25)}$$

$$\text{y por tanto } |F(-i\omega)| = |F(i\omega)| \text{----- (4.26)}$$

$$\phi(-\omega) = -\phi(\omega) \text{----- (4.27)}$$

lo cual implica que si $f(t)$ es real, su "espectro de magnitud $F(i\omega)$ " es una función par de $[\omega]$, y que su "espectro de fase $\phi(\omega)$ " es una función impar de $[\omega]$.

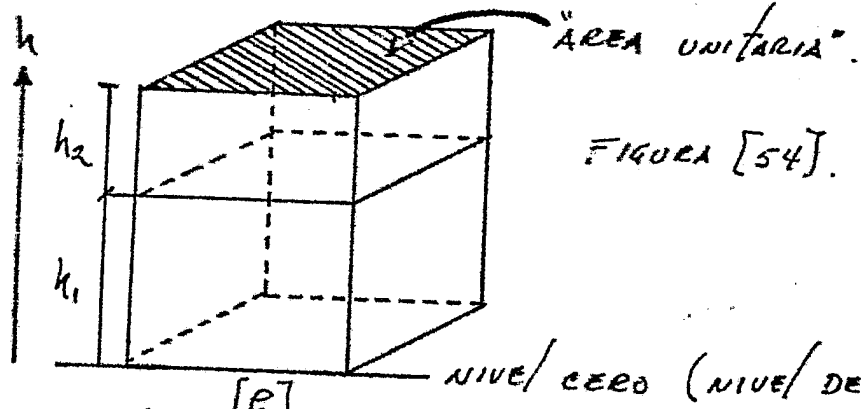
Interpretación de la Transformada de Fourier, $[F(i\omega)]$:

HAY DOS RAZONES IMPORTANTES DE POR QUÉ ESTUDIAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER:

PRIMERA: SE PUEDEN ANALIZAR FUNCIONES EN TÉRMINOS DE FUNCIONES SENOSOIDALES.

SEGUNDA: EN SISTEMAS LINEALES LA RELACION ENTRE LAS TRANSFORMADAS DE LA FUENTE Y LA RESPUESTA ES UNA SIMPLE RELACION ALGEBRAICA, MIENTRAS QUE TAL RELACION EN EL DOMINIO DEL TIEMPO ES UNA ECUACION DIFERENCIAL.

- CONSIDÉRESE AHORA UNA COLUMNA DE AIRE "UNITARIA": ES DECIR, DE "ÁREA UNITARIA", COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA [54] A CONTINUACION:



LA COLUMNA SE ELEVA A UNA ALTURA MEDIDA A PARTIR DEL NIVEL DE TIERRA QUE SE DENOMINARÁ $[h]$. AHORA, SE SECCIONARÁ LA ALTURA $[h]$ EN DOS PARTES COMO SE MUESTRA: $[h_1]$ Y $[h_2]$. ES OBVIO QUE TANTO LA COLUMNA A $[h_1]$ COMO A $[h_2]$ CONTIENE UNA CIERTA "MASA" DE AIRE. SI LA DENSIDAD DE AIRE $[p]$ ES UNIFORME SE TENDRÁ QUE PARA $[h_1]$:

$$\text{SI VOLUMEN} = \frac{\text{MASA}}{\text{DENSIDAD}} \quad ; \quad m(h_1) = [p h_1 \cdot 1]$$

SIN EMBARGO, SE SABE QUE EL AIRE SE MUCHO MÁS DENSO AL NIVEL DE TIERRA. SUPÓNGASE QUE LA DENSIDAD ESTE DADA POR:

$$p(h) = \left[\frac{p_0}{1+h^2} \right]$$

DONDE $[p_0]$ ES LA DENSIDAD EN $[h = \text{CERO}]$ O NIVEL DE TIERRA. ENTONCES, LA MASA EN UNA COLUMNA MEDIDA A PARTIR DEL NIVEL DE TIERRA HASTA $[h_1]$ SE DARÁ POR:

$$m(h_1) = \int_0^{h_1} \frac{p_0}{1+h^2} dh.$$

DE AQUI, SE PUEDE VER QUE EXISTE RELATIVAMENTE MÁS MASA EN LOS NIVELES BAJOS QUE EN LOS NIVELES ALTOS DE LA COLUMNA DE AIRE. ASI, LA COLUMNA DE AIRE QUE SE EXTIENDE DE $h=0$ A $h=h_1$ CONTIENE MÁS MASA QUE LA COLUMNA DE AIRE DE LA MISMA LONGITUD QUE VA DE $h=h_1$ A $h=2h_1$.

NÓTESE QUE PARA CUALQUIER SECCION QUE SE TOQUE, YA SEA h_1 O $2h_1$, LA MASA ES CERO, DADO QUE EL VOLUMEN DE UNA SECCION PLANA ES CERO. SIN EMBARGO, SE PUEDE DECIR QUE EN UN VOLUMEN INFINITESIMAL DE SECCION O "ÁREA UNITARIA" CON ALTURA $[h_1]$ Y DE ALTURA DIFERENCIAL $[dh]$, LA MASA ES INFINITESIMAL E IGUAL A:

$$\frac{p_0}{(1+h_1^2)} dh$$

DE MODO QUE SE PODRÁN ASOCIAR "DIFERENTES" MASAS INFINITESIMALES CON UN VOLUMEN INFINITESIMAL A DIFERENTES ALTURAS.

EN OTRAS PALABRAS, SE PUEDE DECIR QUE AUNQUE EN AMBOS PLANOS DE ALTURAS $[h_1]$ y $[h_2]$ LA MASA ES CERO, ESOS "CEROS" SON DIFERENTES PUESTO QUE SUS DENSIDADES $\frac{\rho_0}{(1+h_1^2)}$ y $\frac{\rho_0}{(1+h_2^2)}$ SON DIFERENTES.

ESTA SITUACION CON RESPECTO A LA "DENSIDAD ESPECTRAL" EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER ES ANALOGA.

EN UNA FRECUENCIA PARTICULAR $[f_i]$ (EN UNA ALTURA PARTICULAR), LA AMPLITUD ES CERO (LA MASA ES CERO), PERO LA "DENSIDAD DE AMPLITUD $F(i\omega_i)$ " ES FINITA Y PUEDE VARIAR CON $[\omega_i]$.

ESTA AMPLITUD PUEDE ASOCIARSE SÓLOAMENTE CON UN INTERVALO INFINITESIMAL DE FRECUENCIA, EXACTAMENTE IGUAL COMO SE ASOCIÓ LA MASA $\left[\frac{\rho_0}{1+h_i^2}\right] dh$ CON EL VOLUMEN INFINITESIMAL $[dh \cdot t]$ Y ALTURA $[h_i]$ DEL EJEMPLO ANTERIOR.

POR ESTA RAZÓN, LA TRANSFORMADA DE FOURIER $F(i\omega)$ ES REFERIDA COMO UNA "DENSIDAD DE AMPLITUD" DE $f(t)$ EN LA FRECUENCIA $[\omega]$.

LOS TÉRMINOS "DENSIDAD ESPECTRAL" O "FUNCION DE DISTRIBUCION EN LA FRECUENCIA" SON SINÓNIMOS DE "DENSIDAD DE AMPLITUD" $F(i\omega)$.

4.3 DOS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.-

PARA CIERTAS FUNCIONES NO PERIÓDICAS, SABIENDO DE (4.12) y (4.13), SE VERÁ QUE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA RESPUESTA ES IGUAL A LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUENTE MULTIPLICADA POR LA FUNCION DEL SISTEMA (COMPLEJO).

PARA DEMOSTRAR ESTO SE VERÁN LAS SIGUIENTES PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER:

1.- SUPERPOSICIÓN.- A PARTIR DE LA EXPRESIÓN (4.12) SE TIENE QUE

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt ; \text{ y SE SIGUE QUE LA SUMA}$$

DE LAS TRANSFORMADAS INDIVIDUALES DE DOS FUNCIONES ES IGUAL A LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA SUMA DE DOS FUNCIONES, ESTO ES:

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(i\omega) , \quad \mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(i\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(i\omega) + F_2(i\omega) \quad \text{--- (4.28)}$$

2: DIFERENCIACION EN EL DOMINIO DEL TIEMPO. - AHORA SE VERÁ LA RELACION ENTRE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE $f(t)$ Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE SU DERIVADA $\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$; ESTO ES: DE (4.12)

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(i\omega)$$

SE QUIERE EXPRESAR $\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$ EN TÉRMINOS DE $F(i\omega)$, ENTONCES

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt \quad ; \quad \text{E INTEGRANDO POR PARTES}$$

SEA $u = e^{-i\omega t}$; $du = (-i\omega) e^{-i\omega t} dt$; DE MANERA QUE $u \int v du$
 $dv = \frac{df(t)}{dt} dt$; $v = f(t)$.

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{--- (4.29)}$$

SI SE IDENTIFICA EL SEGUNDO SUMANDO DE (4.29) COMO:

$$i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega [F(i\omega)] \quad \text{--- (4.30)}$$

Y SE RESTRINGE QUE $f(t) \rightarrow 0$ CUANDO $[t = \pm\infty]$ ENTONCES EN (4.29)

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega [F(i\omega)] \quad \text{--- (4.31)}$$

ESTO ES, LA DIFERENCIACION EN EL DOMINIO DEL TIEMPO CORRESPONDE A LA MULTIPLICACION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER POR $[i\omega]$; ASUMIENDO

QUE $\lim f(t) \rightarrow 0$ CUANDO $t \rightarrow \pm\infty$.

CON REFERENCIA A (4.31); SI $f(t)$ TIENE UN NÚMERO FINITO DE DISCONTINUIDADES, ENTONCES SE SABE QUE $\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$ CONTIENE IMPULSOS; Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA DERIVADA CONTIENE EL ESPECTRO DE LOS IMPULSOS. MAS ADELANTE SE DISCUTE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DEL IMPULSO. TAMBIEN SE VERÁ MAS ADELANTE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES TALES COMO $\delta(t)$, $\delta'(t)$, $\delta''(t)$, $\delta'''(t)$, $\delta^{(4)}(t)$ QUE NO SATISFACEN LA CONDICION $f(t) \rightarrow 0$ CUANDO $|t| \rightarrow \infty$.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE DERIVADAS DE MAYOR ORDEN.- A PARTIR DE LA EXPRESION (4.31) SE OBTUVO:

$$F_1 \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = i\omega [F(\omega)] ; \text{ y PUEDE SER GENERALIZADA}$$

PARA DEMOSTRAR QUE CUANDO $f(t)$ y SUS PRIMERAS $(n-1)$ DERIVADAS SE APROXIMAN A CERO EN $|t| \rightarrow \infty$, ENTONCES

$$F_1 \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = (i\omega)^n [F(\omega)] \text{ ----- (4.32)}$$

DE MANERA QUE UNA ECUACION DIFERENCIAL DE LA FORMA

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n}{dt^n} f_2(t) = \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^m}{dt^m} f_1(t),$$

LA PODEMOS TRABAJAR EN OTRA ECUACION ALGEBRAICA COMO:

$$\sum_{n=0}^N a_n (i\omega)^n F_2(\omega) = \sum_{m=0}^M b_m (i\omega)^m F_1(\omega) \text{ ----- (4.33)}$$

DONDE

$$F_2(\omega) = F_1[f_2(t)] \text{ y } F_1(\omega) = F_1[f_1(t)].$$

DE (4.33) SE TIENE QUE:

$$F_2(\omega) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m (i\omega)^m}{\sum_{n=0}^N a_n (i\omega)^n} F_1(\omega)$$

POR LO TANTO, SI $f_1(t)$ SE CONOCE, y CONSECUENTEMENTE $F_1(\omega)$ TAMBIEN SE CONOCE, y $[f_2(t)]$ ES LA INCOGNITA, ESTA ÚLTIMA SE PUEDE OBTENER COMO LA "TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER" DE $F_2(\omega)$; DE MANERA QUE SE PODRÍA QUE RESOLVER UNA ECUACION DIFERENCIAL CON COEFICIENTES CONSTANTES. ASI,

$$f_2(t) = F_1^{-1} [F_2(\omega)] \text{ ----- (4.34)}$$

4.4 RELACION ENTRE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER DE LA FUENTE y LA RESPUESTA, EN UN SISTEMA LINEAL.-

SEA EL OPERADOR $P = \frac{d}{dt}$ DE MANERA QUE

RECORDANDO LAS EXPRESIONES DE LA (3.5) A LA (3.13) Y SABIENDO QUE EN UN SISTEMA LINEAL LA TRANSFORMADA DE LA FUENTE Y LA RESPUESTA ESTÁN REPRESENTADAS POR UNA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL, ENTONCES UNA RESPUESTA $V_2(t)$ ESTÁ RELACIONADA A UNA FUENTE $V_1(t)$ POR LA ECUACION:

$$\begin{aligned} (a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0) V_2(t) = \\ = (b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \dots + b_1 P + b_0) V_1(t) \end{aligned} \quad (4.35)$$

O BIEN

$$A(P) V_2(t) = B(P) V_1(t), \text{ QUE SE PUEDE ESCRIBIR COMO}$$

$$V_2(t) = \frac{B(P)}{A(P)} V_1(t) = H(P) V_1(t) \quad (4.35_A)$$

DONDE $[H(P)]$ ES LA FUNCION OPERACIONAL DEL SISTEMA, LA CUAL RELACIONA LA RESPUESTA $V_2(t)$ CON LA FUENTE $V_1(t)$.

TOMANDO LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE AMBOS LADOS DE (4.35) SE TIENE:

$$F[V_1(t)] = V_1(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$F[V_2(t)] = V_2(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v_2(t) e^{-i\omega t} dt$$

SE OBSERVA QUE [SI $V_1(t)$ Y $V_2(t)$, ASI COMO UN NUMERO SUFICIENTE DE SUS DERIVADAS TIENDE A CERO CUANDO $|t| \rightarrow \infty$], SE TIENE

$$V_2(i\omega) = H(i\omega) V_1(i\omega) \quad (4.36)$$

POR ANALOGIA CON (4.34)

$$V_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) V_1(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.37)$$

4.5 EL PULSO RECTANGULAR Y SU TRANSFORMADA DE FOURIER.-

EL OBJETIVO DE ESTA SECCION ES ILUSTRAR LA TECNICA PARA EVALUAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

ASI PUES, SE ENCONTRARA LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCION $f(t)$ MOSTRADA EN LA FIGURA [55] APLICANDO EL CONCEPTO DE DERIVACION, Y EL DE SUPERPOSICION.

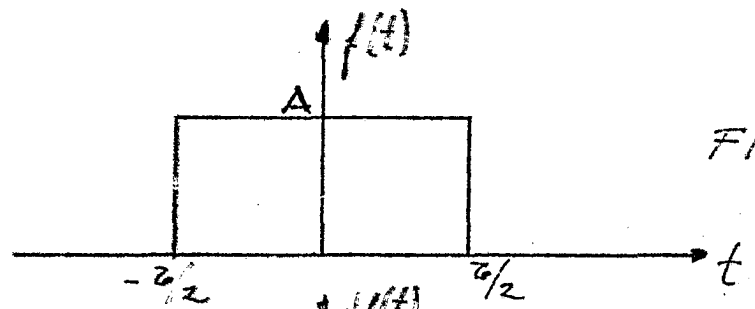


FIGURA [55]

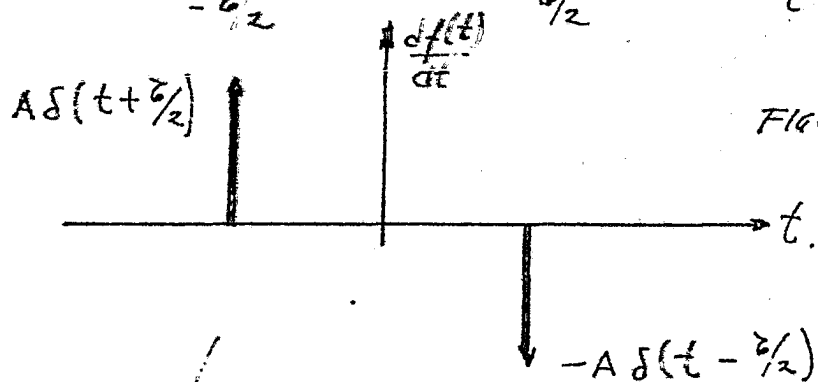


FIGURA [56]

POR DIFERENCIACIÓN, SE TIENE QUE

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = A \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad \text{RECUERDESE LAS EXPRESIONES (2.84) Y (2.85).}$$

APLICANDO LA DEFINICIÓN DE TRANSFORMADA DE FOURIER A LA FIGURA [56]:

$$F'[f'(t)] = A \left[e^{i\omega\tau/2} - e^{-i\omega\tau/2} \right] = A \left[2i \sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) \right]; \text{ PERO}$$

SE SABE QUE

$$F'[f'(t)] = i\omega [F(i\omega)]$$

$$F(i\omega) = \frac{1}{i\omega} F'[f'(t)] = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) =$$

$$= A\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} \quad \text{--- (4.38)}$$

AHORA, POR SUPERPOSICIÓN, $F[f(t)] = F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$;

$$\text{ASÍ } \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{-A}{i\omega} e^{-i\omega t} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} =$$

$$= \frac{-A}{i\omega} \left(e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2} \right) = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) = A\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} \quad \text{--- (4.39)}$$

COMO SE VE, (4.38) ES IGUAL A (4.39).

ES IMPORTANTE SEÑALAR QUE PARA OBTENER LA T. DE F. POR DIFERENCIACIÓN, SE APLICA EL CONCEPTO DE T. DE F. DE UN PULSO, EL CUAL SE VERÁ MÁS ADELANTE. ES POR ESO QUE SE PUEDE CONSULTAR LA SOLUCIÓN DE ESTE PROBLEMA UNA VEZ CONCIBIENDO LA T. DE F. DE UN PULSO

DE (4.38) y (4.39) SE TIENE, RECORDANDO (3.4):

$$F(i\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = A\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (4.40)$$

ASI, LA TRANSFORMADA DE FOURIER DEL PULSO RECTANGULAR ES LA FUNCION SAMPLING.

EL ESTUDIO DEL ESPECTRO DE $f(t)$, O SEA, $F(i\omega)$, SE ESCRIBE EN FORMA POLAR COMO:

$$F(i\omega) = A\tau \left| \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} \right| \angle \theta(\omega) \quad ; \quad \theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}}{\text{Re}}$$

EL ESPECTRO COMPLEJO ESPECIFICA LA SEÑAL COMPLETAMENTE, O SEA, SI:

$$F(i\omega) = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \text{ SE DA COMO CONOCIDO, ENTONCES}$$

$$A \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] = \mathcal{F}^{-1} \left[A\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} e^{i\omega t} d\omega$$

A PARTIR DEL ESPECTRO DE DENSIDAD (GRÁFICA), QUE ES LA FUNCION SAMPLING MOSTRADA EN LA FIGURA [41], VEMOS QUE UNA BANDA DE FRECUENCIA CERCA DE $\omega=0$, CONTRIBUYE MÁS SIGNIFICATIVAMENTE A LA FORMA DE LA SEÑAL, QUE UNA BANDA DE MÁS ALTA FRECUENCIA, SOLAMENTE PORQUE LAS DENSIDADES ESPECTRALES SON MAYORES CERCA DE $[\omega=0]$. LA FIGURA [41] SUFIERE QUE EL "GRUESO" DEL ESPECTRO SE ENCUENTRA ENTRE $[\omega=0]$ Y $[\omega\tau/2 = \pi]$; SIENDO $2\pi f = \omega$; ENTONCES $\left[f = \frac{1}{\tau}\right]$.

SUPONIENDO QUE SE ESTABLECE UN CRITERIO DE TRANSMISION DEL PULSO A TRAVÉS DE UN CIRCUITO LINEAL, ÉSTE ES, USANDO INTUITIVAMENTE LA RELATIVA IMPORTANCIA DE LAS GRANDES AMPLITUDES ESPECTRALES; SE ASUME QUE PARA TRANSMITIR UN PULSO RECTANGULAR CON "FIDELIDAD", ES NECESARIO PASAR LAS FRECUENCIAS CORRESPONDIENTES EN LA BANDA DE $[\omega=0]$ A $[\omega\tau/2 = \pi]$.

EJEMPLO: CUANDO $\tau=1$, LA BANDA $f=0$ A $f=1$ SATISFACE ÉSTE CRITERIO, PERO SI $\tau = \frac{1}{2}$, LA BANDA NECESARIA ES $f=0$ A $f=2$; Y CUANDO $\tau = \frac{1}{3}$, LA BANDA IRÁ DE $f=0$ A $f=3$.

ÉSTO ESTÁ DE ACUERDO CON LA CONCLUSION DE QUE ENTRE MÁS ANGOSTO SEA EL PULSO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO, OCUPARÁ MÁS ESPACIO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

4.6 EL IMPULSO UNITARIO Y SU TRANSFORMADA DE FOURIER.-

SE HAN VISTO FUNCIONES QUE TIENEN CONTENIDO CUADRÁTICO FINITO, LA CUAL ES CONDICION SUFICIENTE PERO NO NECESARIA PARA QUE TENGAN TRANSFORMADA DE FOURIER. AHORA SE DEMUESTRA QUE SI EL VALOR ABSOLUTO

DE LA FUNCIÓN ES INTEGRABLE, ESTO ES, SI

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \text{FINITO} \quad (4.40A)$$

ENTONCES SU TRANSFORMADA DE FOURIER

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] \text{ SERÁ FINITA.} \quad (4.40B)$$

PARA PRABARLO OBSÉRVENSE QUE

$$\begin{aligned} f(t) e^{-i\omega t} &= f(t) \cos \omega t - i f(t) \sin \omega t = \\ &= f(t) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \omega t + i \sin \omega t \right] \end{aligned}$$

REAL:

$$|f(t) e^{-i\omega t}| = \sqrt{[f(t)]^2 [\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t]} = |f(t)|$$

POR LO TANTO, SI

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \text{FINITA}, \text{ ENTONCES} \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \text{ ES FINITA.} \right] \quad (4.41)$$

APLICANDO (4.41) AL IMPULSO UNITARIO $\delta(t)$ Y RECORDANDO QUE DE (2.81)

$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \text{UNO} \right]$, PERO EL CONTENIDO CUADRÁTICO NO ES FINITO; SIN EMBARGO $\delta(t)$ TIENE UNA TRANSFORMADA DE FOURIER FINITA; ASÍ PUES:

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = \text{UNO} \quad (4.42)$$

DE MANERA QUE, LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UN IMPULSO UNITARIO $[\delta(t)]$ CONTIENE TODAS LAS FRECUENCIAS (COMO SE VE EN LA FIGURA [57]), LO CUAL CONCORDA CON EL ANÁLISIS POR DIFERENCIACION DEL PULSO RECTANGULAR DISCUTIDO DOS PÁGINAS ATRÁS, CUANDO LA DURACION T SE REDUCE "GRUESO" $\frac{T}{6}$ DE SU ESPECTRO AUMENTA, E INFINITAMENTE ANGOSTO IMPULSO ENTONCES TIENE UN ANCHO INFINITO EN EL ESPECTRO.

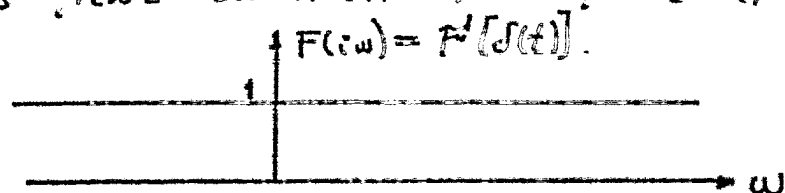


FIGURA [57]

por otro lado, si $\mathcal{F}^{-1}[\delta(t)] = \text{UNO}$, EN OTROS PALABRAS

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[1] \quad \text{--- --- --- --- ---} \quad (4.43)$$

O BIEN:

$$\delta(t) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{i\omega t} d\omega \right] \quad \text{--- --- --- --- ---} \quad (4.44)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos \omega t + i \sin \omega t] d\omega \quad \text{--- --- --- --- ---} \quad (4.45)$$

y HACIENDO $(\omega = -x)$ y CAMBIANDO LÍMITES DE INTEGRACION

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-ixt} (-dx) = \left[\frac{+1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} dx \right] \quad \text{--- --- --- --- ---} \quad (4.46)$$

LA EXPRESIÓN (4.46) ES LA "TRANSFORMADA INVERSA DE LA FUNCIÓN IMPULSO".

USANDO LAS PROPIEDADES DE FUNCIONES PARES E IMPARES, EXPRESADAS EN (2.56), EN LA EXPRESIÓN (4.45) SE TIENE

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos \omega t + i \sin \omega t] d\omega ;$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t d\omega + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t d\omega ; \text{ FINÍMENTE}$$

$$\delta(t) = \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega \right] \quad \text{--- --- --- --- ---} \quad (4.47)$$

LA EXPRESIÓN (4.47) ES LA REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE $\delta(t)$.

LA IMPORTANCIA FUNDAMENTAL DE ESPECTRO DE LA FUNCIÓN IMPULSO, SE VE SI SE CONSIDERA LA RESPUESTA DE UN CIRCUITO A UNA FUENTE IMPULSIVA:

SEA $v(t) = \delta(t)$ LA FUENTE.

LA RESPUESTA $i(t)$ SE RELACIONA CON LA FUENTE MEDIANTE

$$\left(R + pL + \frac{1}{pC} \right) i(t) = v(t) ; \text{ O BIEN, USANDO}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

$$\mathcal{F}\{i(t)\} \mathcal{F}\{v(t)\} = V(i\omega) \quad \text{DONDE}$$

$$\mathcal{F}\{v(t)\} = \left[R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right]$$

PERO SI $v(t) = \delta(t)$; $V(i\omega) = 1$, y

$$I(i\omega) = \frac{1}{Z(i\omega)} = Y(i\omega) ; \text{ ESTO QUIERE DECIR QUE}$$

LA ADMITANCIA COMPLEJA (DE/ DRIVING-POINT) ES LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA RESPUESTA EN CORRIENTE A UNA FUENTE IMPULSIVA EN VOLTAJE.

EN GENERAL, COMO SE VIÓ EN LA SECCION (3.3), EXPRESION (3.12)

$$V_2(i\omega) = H(i\omega) V_1(i\omega)$$

CUANDO $V_1(i\omega) = 1$, ESTO ES, $[v_1(t) = \delta(t)]$

$$V_2(i\omega) = H(i\omega) , \text{ QUE EN PALABRAS NOS DICE:}$$

LA FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL CIRCUITO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA ES LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA RESPUESTA A UN IMPULSO UNITARIO (COMO FUENTE).

LA RESPUESTA DE UN CIRCUITO INICIALMENTE DESENERGIZADO A UNA FUENTE IMPULSIVA ES DESIGNADA POR EL SIMBOLO $[h(t)]$ y SE LE LLAMA FUNCION DE GREEN DEL CIRCUITO.

ESTO ES: $h(t) = \mathcal{F}^{-1} [H(i\omega)]$ QUE ES LA FUNCION DE GREEN (RESPUESTA AL IMPULSO) DE UN CIRCUITO CUYA FUNCION DE TRANSFERENCIA ES $H(i\omega)$.

4.7 TRANSFORMADA DE FOURIER DE CONSTANTES

EN LA SECCION ANTERIOR SE DETERMINÓ QUE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UN IMPULSO $\delta(t)$ ES UNA CONSTANTE PARA TODAS LAS $[\omega]$ ENTRE $(-\infty$ y $+\infty)$

ANTES DE EMPEZAR SE VE QUE $f(t) = \text{CONSTANTE}$ ES SÓLO LA COMPONENTE DIRECTA, O SEA, QUE LA ÚNICA FRECUENCIA ASOCIADA CON ELLA ES LA FRECUENCIA "CERO". SE ESPERA ENTONCES QUE LA TRANSFORMADA DE FOURIER SEA CERO EXCEPTO EN $[\omega = 0]$

SE OBSERVA TAMBIEN QUE LA FUNCION CONSTANTE NO SATISFACE LAS CONDICIONES (4.40A) y (4.40B) DE SER ABSOLUTAMENTE INTEGRABLE.

SEA $f(t) = 1$ LA CONSTANTE ; DE MANERA QUE:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{1\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt ; \text{ O BIEN}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t dt \quad \text{--- (4.48)}$$

HACIENDO USO DE LAS PROPIEDADES DE FUNCIONES PARES E IMPARES EXPRESADAS EN (4.56):

$$F\{1\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t \, dt \quad \text{--- --- --- --- (4.49)}$$

COMO DE (4.47) SE TIENE

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t \, d\omega, \quad \text{EN GENERAL SE PUEDE}$$

ESCRIBIR

$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos xy \, dx;$$

HACIENDO $[x=t]; y=\omega,$

$$\delta(\omega) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t \, dt \right] \quad \text{--- --- --- --- (4.50)}$$

DE AQUI QUE

$$F\{\delta(t)\} = [2\pi \delta(\omega)] \quad \text{--- --- --- --- (4.51)}$$

Y ASÍ, GENERALIZANDO PARA CUALQUIER $f(t) = A$ CONSTANTE, SE TIENE:

$$F\{A\} = F\{f(t)\} = [2\pi A \delta(\omega)] \quad \text{--- --- --- --- (4.52)}$$

O BIEN

$$F\{A\} = 2\pi A \delta(\omega) = 2\pi A \delta(-\omega) \quad \text{--- --- --- --- (4.53)}$$

DADO QUE $\delta(\omega) = \delta(-\omega)$

4.8 EL ESPECTRO DEL ESCALÓN UNITARIO

PARA ESTE CASO, LA TRANSFORMADA DE FOURIER NO SE PUEDE OBTENER DIRECTAMENTE A PARTIR DE LA DEFINICIÓN DE "TRANSFORMADA DE FOURIER", ASÍ COMO, FUE POSIBLE PARA $\delta(t)$.

ESTO SE VE DE:

$$F\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-i\omega t} \, dt = \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_0^{+\infty}$$

FINALMENTE

$$F\{u(t)\} = \left[\frac{1 - e^{-i\omega \infty}}{i\omega} \right]$$

PUES, O QUE $\left[e^{-i\omega\infty} \right]$ NO ESTÁ DEFINIDO, ÉSTE ES UN RESULTADO AMBIGUO, EL CUAL ESTÁ RELACIONADO CON EL HECHO DE QUE $u(t)$ NO TIENDE A CERO CUANDO $t \rightarrow \infty$.

HAY VARIAS TÉCNICAS PARA OBTENER $F^u[u(t)]$ SIN CAER EN LO AMBIGUO, PUES, O QUE DE (2.79) SE SABE QUE

$$f(t) = \frac{du(t)}{dt} ; \text{ ENTONCES APLICANDO (4.32)}$$

$$F^u \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = (i\omega) F(i\omega) ; \text{ SE PUEDE ESPECULAR QUE}$$

$$F^u \left[\frac{d}{dt} u(t) \right] = (i\omega) F^u[u(t)] = F^u[\delta(t)] = 1$$
$$F^u[u(t)] = \left[\frac{1}{i\omega} \right] \text{ --- --- --- --- --- (4.54)}$$

EL CUAL ES EL RESULTADO CORRECTO, PERO QUE PARA $[\omega=0]$ NO ESTÁ DEFINIDO.

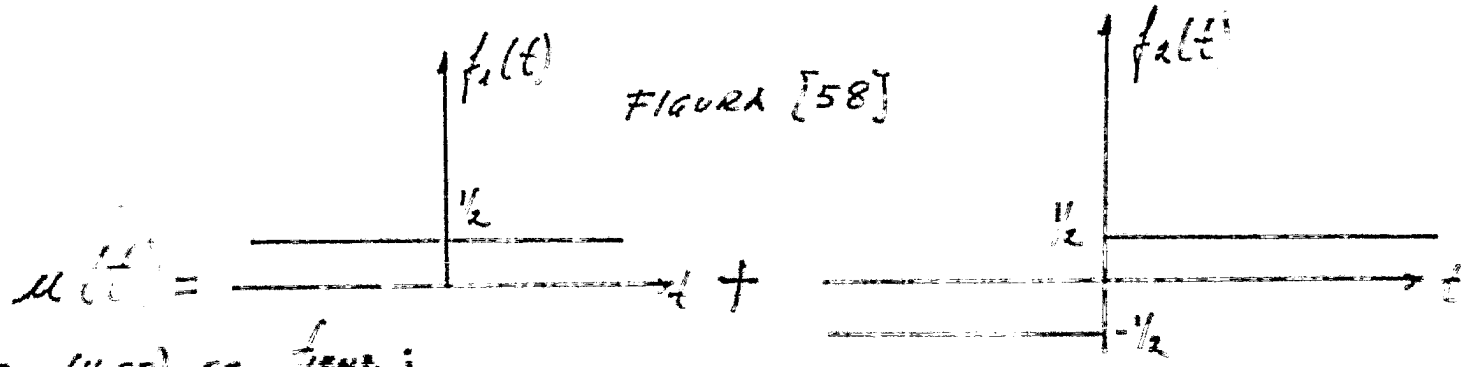
DE LA EXPRESION (4.54) SE VE QUE $F^u[u(t)] \rightarrow \infty$ CUANDO $\omega \rightarrow 0$; Y ÉSTO CORRESPONDE A UN IMPULSO $\delta(\omega)$; PERO LA PREGUNTA QUE SURGE AHORA ES: ¿DE QUÉ MAGNITUD ES EL PESO DE ÉSTE IMPULSO? PARA ÉSTE PROPÓSITO SE EXPRESARÁ $u(t)$ COMO:

$$u(t) = f_1(t) + f_2(t) \text{ --- --- --- --- --- (4.55)}$$

DONDE $f_1(t) = \frac{1}{2}$ Y $f_2(t)$ ES UNA FUNCIÓN IMPAR DE t ; O SEA:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \begin{cases} \frac{1}{2} ; t > 0 \\ -\frac{1}{2} ; t < 0 \end{cases} \text{ --- --- --- --- --- (4.56)}$$

EN LA FIGURA [58] SE REPRESENTA GRÁFICAMENTE $u(t)$:



DE (4.55) SE TIENE:

$$F^u[u(t)] \Big|_{\omega=0} = F^u \left[\frac{1}{2} \right] \Big|_{\omega=0} + F^u[f_2(t)] \Big|_{\omega=0} \text{ --- --- --- --- --- (4.57)}$$

UTILIZANDO LAS EXPRESIONES (4.52) y (4.53) SE TIENE EN (4.54) QUE:

$$\mathcal{F}^M[u(t)] \Big|_{w=0} = \pi \delta(w) + \mathcal{F}^M[f_2(t)] \Big|_{w=0}. \quad (4.58)$$

LUEGO, DE LA DEFINICION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER,

$$\mathcal{F}^M[f_2(t)] \Big|_{w=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-iwt} dt \Big|_{w=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) dt \quad (4.59)$$

COMO $f_2(t)$ ES UNA FUNCION IMPAR DE t , DE (2.56) SE SABE QUE

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) dt = \text{CERO}; \quad \mathcal{F}^M[f_2(t)] \Big|_{w=0} = \text{CERO}$$

DE MODO QUE

$$\mathcal{F}^M[u(t)] \Big|_{w=0} = \mathcal{F}^M\left[\frac{1}{2}\right] \Big|_{w=0} = \left[\pi \delta(w) \right] \quad (4.60)$$

CONCLUYENDO, CON BASE A (4.54) y (4.60) SE TIENE:

$$\mathcal{F}^M[u(t)] = \begin{cases} \frac{1}{iw} & ; w \neq 0 \\ \pi \delta(w) & ; w = 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

4.9 DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO Y LA FRECUENCIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

HEMOS VISTO YA QUE EXISTE UNA RELACION SIMPLE ENTRE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCION Y LA T. DE F. DE SUS DERIVADAS. EN LA SECCION QUE SE PRESENTAN LAS RELACIONES ENTRE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER DE FUNCIONES DEL TIEMPO QUE ESTAN RELACIONADAS UNA CON OTRA POR OPERACIONES COMO DIFERENCIACION.

EL PRIMER PROBLEMA QUE SE PRESENTA ES:

SI $\mathcal{F}^M[f(t)] = F(iw)$; ¿CUAL ES $\mathcal{F}^M[f(t - T)]$ EN FUNCION DE $F(iw)$?

POR EJEMPLO, PARA EL PULSO RECTANGULAR $V_a(t)$ SEMEJANTE AL DE LA FIGURA [55], DESPLAZANDOLO $(\frac{\tau}{2})$ HACIA LA DERECHA, VER FIGURA [59]

$$\mathcal{F}^M[V_a(t)] = V_a(iw) = \sqrt{\tau} \text{Sa}\left(\frac{w\tau}{2}\right)$$

LA PREGUNTA SERIA: SI $\mathcal{F}^M[V_b(t)] = V_a\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ ¿CUAL ES LA T. DE F

$\mathcal{F}^M[V_b(t)]$ y COMO SE RELACIONA CON $V_a(iw)$?

APLICANDO LA DEFINICION DE TRANSFORMADA DE FOURIER:

$$F\{f(t-T_d)\} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-T_d) e^{-i\omega t} dt \right] \text{----- (4.62)}$$

HACIENDO EN (4.62) $[x = t - T_d]$; $t = x + T_d$, $dt = dx$
SE TIENE:

$$F\{f(t-T_d)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} e^{-i\omega T_d} dx =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] e^{-i\omega T_d} \text{----- (4.63)}$$

FINALMENTE

$$F\{f(t-T_d)\} = \left[F(i\omega) e^{-i\omega T_d} \right] \text{----- (4.64)}$$

o DE ORO MODO, SI

$$F(i\omega) = |F(i\omega)| e^{i\theta(\omega)}$$

$$F\{f(t-T_d)\} = |F(i\omega)| e^{i[\theta(\omega) - \omega T_d]} \text{----- (4.65)}$$

LAS EXPRESIONES (4.64) Y (4.65) CORRESPONDEN A / DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER, Y EN PALABRAS:

"EL DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO DE UNA FUNCION NÓ CAMBIA EL ESPECTRO DE AMPLITUD, PERO AGREGA UN TÉRMINO PROPORCIONAL A LA FRECUENCIA EN EL ESPECTRO DE FASE".

EJEMPLO.- EL ESPECTRO DE FOURIER DEL PULSO RECTANGULAR DE LA FIGURA [59] SERÁ:

$$F\{V_0(t)\} = V_0(i\omega) = V_0(i\omega) e^{-i\omega \tau/2} = V_0 \frac{\text{sen } \frac{\omega \tau}{2}}{\omega \tau/2} e^{-i\omega \tau/2} = V_0 \frac{(1 - e^{-i\omega \tau})}{i\omega}$$

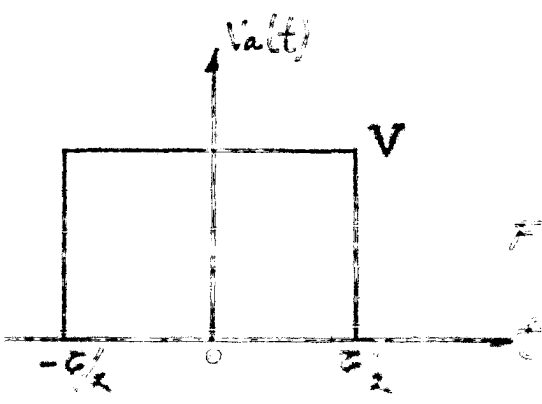
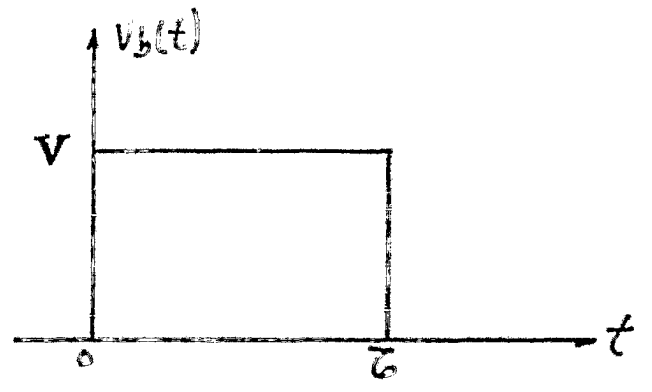


FIGURA [59]



DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

SI $F\{f(t)\} = F(i\omega)$, SE MOSTRARA QUE:

$$F\{f(t) e^{-\alpha t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\alpha + i\omega)t} dt = [F(\alpha + i\omega)] \text{ --- (4.66)}$$

LA ECUACION (4.66) REPRESENTA EL DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

AHORA BIEN; SI DE (4.61):

$$F\{u(t)\} = \frac{1}{i\omega} \quad \forall \omega \neq 0; \text{ ENTONCES}$$

$$F\{e^{-\alpha t} u(t)\} = \left[\frac{1}{\alpha + i\omega} \right] \text{ --- (4.67)}$$

ES DECIR, SE SUSTITUYE POR $[i\omega]$ EL VALOR $[\alpha + i\omega]$; DADO QUE

$$F\{f(t) e^{-\alpha t}\} = F(\alpha + i\omega) \text{ y}$$

$$F\{f(t)\} = F(i\omega).$$

EJEMPLO.- HALLAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE $[f(t) \cos \omega_0 t]$.

CON LA IDENTIDAD: $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}]$ SE TIENE QUE

$$F\{f(t) \cos \omega_0 t\} = F\left\{\frac{1}{2} f(t) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} f(t) e^{-i\omega_0 t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} F\{f(t) e^{i\omega_0 t}\} + \frac{1}{2} F\{f(t) e^{-i\omega_0 t}\} \text{ --- (4.68)}$$

ASEMEJANDO (4.68) CON (4.66) SE TENDRA

$$F\{f(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} F(i\omega - i\omega_0) + \frac{1}{2} F(i\omega + i\omega_0) \text{ --- (4.69)}$$

POR OTRA PARTE, SI $F^{-1}\{F(i\omega)\} = f(t)$, ENTONCES

$$F^{-1}\{F(i\omega - i\omega_0)\} = f(t) e^{i\omega_0 t} \text{ --- (4.70)}$$

DEBE NOTARSE QUE SI $\mathcal{F}^{-1}[F(i\omega)]$ ES UNA FUNCIÓN REAL DE TIEMPO,
ENTONCES LA EXPRESIÓN (4.70) ES UNA FUNCIÓN COMPLEJA DE TIEMPO.

4.10 CAMBIO DE ESCALA EN EL TIEMPO, COMPRESIÓN EN LA FRECUENCIA.-

EN LA DISCUSIÓN DEL ESPECTRO DE PULSO RECTANGULAR, SE HABLO DE QUE ENTRE MÁS ANGOSTO ES EL PULSO EN EL DOMINIO DE TIEMPO, EL ESPECTRO ES MÁS ANCHO EN EL DOMINIO FRECUENCIAL.

ESTA IDEA PUEDE PONERSE EN FORMA CUANTITATIVA, COMO SE VERÁ MÁS ADELANTE. ES MÁS, LA RELACION ENTRE EL ESPECTRO DE FRECUENCIA Y LA ESCALA EN EL TIEMPO ES APLICADA EN PROBLEMAS PRÁCTICOS DE GRABACIÓN Y REPRODUCCIÓN DE UNA SEÑAL.

POR EJEMPLO, UN EVENTO EN QUE HAY MOVIMIENTOS RÁPIDOS SE FILMA EN ALTA VELOCIDAD Y POSTERIORMENTE SE REPRODUCE (PROYECTA) EN CÁMARA LENTA PARA VER DETALLES.

PARA PONER ÉSTAS IDEAS EN FORMA CUANTITATIVA, CONSIDERE LAS DOS FORMAS DE ONDA $[m_1(t)]$ Y $[m_2(t)]$ QUE SE MUESTRAN EN LA FIGURA [60] Y QUE SÓLO DIFIEREN EN LA ESCALA DE TIEMPO, ES DECIR,

$$m_2(t) = m_1(at) \text{ --- --- --- --- --- (4.71)}$$

DONDE a ES UN NUMERO POSITIVO (REAL).

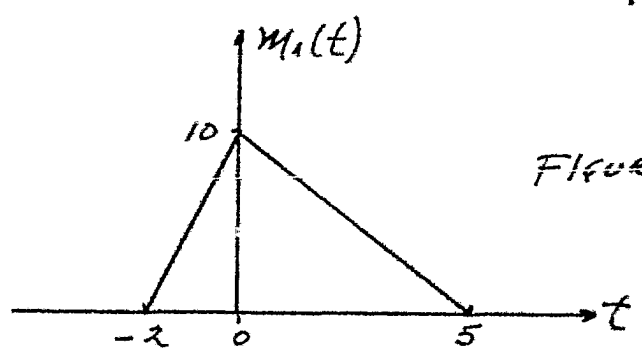
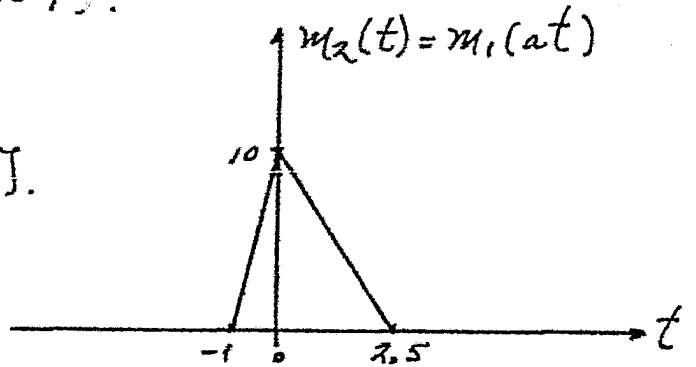


FIGURA [60].



RELACIONANDO EL ESPECTRO DE $m_2(t)$ CON EL ESPECTRO DE $m_1(t)$; SEA:

$$\mathcal{F}[m_1(t)] = M_1(i\omega) ; \text{ O SEA,}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} m_1(t) e^{-i\omega t} dt &= M_1(i\omega) \\ \int_{-\infty}^{\infty} m_2(t) e^{-i\omega t} dt &= M_2(i\omega) \end{aligned} \right\} \text{ DE LA MISMA FORMA --- --- --- --- --- (4.72)}$$

PUESTO QUE $m_2(t) = m_1(at)$, ENTONCES

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_1(at) e^{-i\omega t} dt = M_2(i\omega) \text{ --- --- --- --- --- (4.73)}$$

HACIENDO EN (4.73) $[at = \tau]$ y $dt = \frac{1}{a} d\tau$, ENTONCES

$$M_2(i\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} M_1(\tau) e^{-i\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau} \frac{d\tau}{a} \right] \text{----- (4.74)}$$

$$M_2(i\omega) = \left[\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} M_1(\tau) e^{-i\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau} d\tau \right] \text{----- (4.74A)}$$

Y ASEMEJANDO (4.74A) EN (4.72) SE TIENE FINALMENTE:

$$M_2(i\omega) = \left[\frac{1}{a} M_1\left(i\frac{\omega}{a}\right) \right] \text{----- (4.75)}$$

LA FORMA DEL ESPECTRO DE $M_2(i\omega)$ ES SEMEJANTE A LA DE $M_1(i\omega)$, SÓLO CAMBIA LA ALTURA POR $\left[\frac{1}{a}\right]$ Y LA ESCALA DE FRECUENCIAS. ÉSTO ES, SI $[a > 1]$, LA SEÑAL $[M_2(t)]$ SE COMPRIME EN EL TIEMPO Y SE EXPANDE EN LA ESCALA DE FRECUENCIAS.

4.11 TRANSFORMADA DE FOURIER Y SERIES DE FOURIER:

LA INTRODUCCIÓN DE IMPULSOS EN EL ANÁLISIS ESPECTRAL, AYUDA A CLASIFICAR LAS DIFERENCIAS ENTRE SERIE DE FOURIER Y LA INTEGRAL DE FOURIER.

EN LA SECCIÓN 4.2 SE DIJO QUE UNA CONDICIÓN PARA LA EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE $f(t)$, ES QUE EL CONTENIDO CUADRÁTICO SEA FINITO.

SIN EMBARGO, UNA VEE ACEPTADO QUE

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi \delta(\omega) \text{ COMO EN (4.42); Y QUE}$$

$$\mathcal{F}\{f\} = 2\pi \delta(\omega) \text{ COMO EN (4.52), SE PUEDE QUITAR}$$

ESA RESTRICCIÓN DE CONTENIDO CUADRÁTICO FINITO COMO UNA CONDICIÓN DE LA TRANSFORMABILIDAD DE FOURIER. A PARTIR DEL TEOREMA DE DESPLAZAMIENTOS EN LA FRECUENCIA (4.66) SE SABE QUE SI

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi \delta(\omega), \text{ ENTONCES}$$

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \text{----- (4.76)}$$

$$\text{DE ASÍ} \quad \mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0) \text{----- (4.77)}$$

$$\text{Y} \quad \mathcal{F}\{\sin \omega_0 t\} = -i\pi \delta(\omega - \omega_0) + i\pi \delta(\omega + \omega_0) \text{----- (4.77A)}$$

LAS CUALES SON SEMEJANTES A (4.69)

EN EL CAPÍTULO II SE EXPRESÓ UNA FUNCIÓN PERIÓDICA EN SERIES DE FOURIER. AHORA SE USARÁN FUNCIONES IMPULSO PARA ESCRIBIR LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA.

ESTO SE VE A PARTIR DE QUE:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} ; \text{ ENTÓNCESES}$$

$$F(i\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} D_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad \text{--- (4.78)}$$

ESTO ES, "UNA SERIE DE FOURIER CON AMPLITUDES FINITAS, TIENE UNA DENSIDAD ESPECTRAL QUE CONSISTE EN IMPULSOS, ES DECIR, DENSIDADES ESPECTRALES INFINITAS EN LAS FRECUENCIAS ARMÓNICAS".

EN FORMA SIMILAR, UN TREN PERIÓDICO DE IMPULSOS EN EL DOMINIO TEMPORAL

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \delta(t - nT), \text{ TIENE EL ESPECTRO}$$

$$F(i\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{-in\omega T} \quad \text{--- (4.79)}$$

QUE SE PUEDE VER COMO UNA SERIE DE FOURIER EN EL DOMINIO DE LAS FRECUENCIAS.

4.12 DESIGUALDAD DE SCHWARTZ:-

LA DEMOSTRACION DE MUCHOS TEOREMAS EN EL ANÁLISIS DE FOURIER SE BASA EN LA DESIGUALDAD DE SCHWARTZ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt \right|^2 \quad \text{--- (4.80)}$$

EN PALABRAS LA DESIGUALDAD DE SCHWARTZ ESTABLECE QUE EL PRODUCTO DEL CONTENIDO CUADRÁTICO DE $f(t)$ Y $g(t)$ ES MAYOR O IGUAL QUE EL CUADRADO DE ÁREA SOJO LA CURVA DE $\{f(t)g(t)\}$.

DEMOSTRACION:- SEA x UNA VARIABLE REAL, Y

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) + xg(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt + 2x \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt + x^2 \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt. \quad \text{--- (4.81)}$$

PEND $y(x)$ ES EL INTEGRAL DE UN VALOR CUADRADO, SIEMPRE SERÁ POSITIVA, REAL (O CERO CUANDO $f(t) + xg(t)$ ES CERO PARA TODA t). ASÍ,

SIENDO

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = a \quad ; \quad 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt = b \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = c \quad \dots (4.82)$$

SUSTITUYENDO (4.82) EN (4.81) SE TIENE QUE:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \forall \text{ VALOR REAL DE } x. \quad \dots (4.83)$$

DE LA ECUACION (4.83) SE VE QUE EL DISCRIMINANTE $[b^2 - 4ac]$ NO PODRÁ SER POSITIVO; Y $[b^2 - 4ac \leq 0]$ O $[ac \geq \frac{1}{4} b^2]$.

SUSTITUYENDO PARA a, b Y c , EN LA ECUACION (4.83), LA DESIGUALDAD DE SCHWARTZ QUEDA DEMOSTRADA.

4.13 TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES PERIÓDICAS.-

EN ESTA SECCION SE DEMOSTRará LA EXPRESION (4.78); ESTO ES:

$$F(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} D_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T}).$$

DEMOSTRACION:

$$\text{SI } f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{ik\omega_0 t} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k \mathcal{F}[e^{ik\omega_0 t}]$$

$$F(i\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} D_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_k - \omega_0 k)t} dt \quad \dots \dots \dots (4.84)$$

Y APLICANDO (4.46) SE TENDRá FINALMENTE QUE

$$F(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k 2\pi \delta(\omega_k - k\omega_0) \quad \dots \dots \dots (4.85)$$

DE DONDE (4.85) ES IGUAL A (4.78).

CAPÍTULO V.

RESPUESTA DE SISTEMAS LINEALES - FILTROS IDEALES.

EN EL CAPÍTULO IV SE DEMOSTRÓ QUE CUANDO UNA FUENTE $V_1(t)$ SE APLICA A UN SISTEMA LINEAL, EL ESPECTRO DE LA RESPUESTA $V_2(i\omega)$ SE RELACIONA CON EL ESPECTRO DE LA FUENTE $V_1(i\omega)$ A TRAVÉS DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA $H(i\omega)$ COMO EN LA EXPRESIÓN (4.36), ÉSTO ES:

$$V_2(i\omega) = H(i\omega) V_1(i\omega)$$

LA RELACIÓN ENTRE LOS ESPECTROS DE LA SALIDA Y LA ENTRADA ES UNA RELACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA. LA RELACIÓN CORRESPONDIENTE EN EL DOMINIO DEL TIEMPO, O SEA, LA RELACIÓN ENTRE $V_2(t)$ Y $V_1(t)$ SE OBTIENE A PARTIR DE LA INTEGRAL QUE EXPRESA LA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER COMO EN (4.37), ÉSTO ES:

$$V_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) V_1(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{--- (5.1)}$$

EN ESTE CAPÍTULO, SE ESTUDIAN ALGUNAS RELACIONES GENERALES ENTRE LAS FUNCIONES DE ENTRADA Y DE SALIDA, ASÍ COMO LAS RESPUESTAS DE ALGUNOS SISTEMAS IDEALIZADOS, REFERIDOS COMO "FILTROS IDEALES", A FUENTES ELEMENTALES TALES COMO LA FUNCIÓN IMPULSO Y LA FUNCIÓN ESCALÓN.

5.1 CONVOLUCIÓN -

COMO SE MENCIONÓ ANTES, CUANDO UNA FUENTE $V_1(t)$ SE APLICA A UN SISTEMA LINEAL $H(i\omega)$, LA RESPUESTA ES:

$$V_2(t) = \mathcal{F}^{-1}[V_2(i\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[H(i\omega)V_1(i\omega)] \quad \text{--- (5.2)}$$

LA ECUACIÓN (5.2) PUEDE ESCRIBIRSE EN LA FORMA INTEGRAL DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER DADA EN LA ECUACIÓN (5.1). AUNQUE, EN CUALQUIER TIEMPO EN PARTICULAR, ES POSIBLE EVALUAR LA INTEGRAL (5.1) DIRECTAMENTE, EN ESTA SECCIÓN SE ESTUDIA LA MISMA RECONOCIENDO LA FORMA ESPECIAL DENTRO DE UN PARÁMETRO CONJUNTO, EL PRODUCTO $H(i\omega)V_1(i\omega)$.

RECORDAR QUE COMO CADA UNO DE LOS FACTORES DE ESTE PRODUCTO SIGNIFICA EL ESPECTRO DE UNA FUNCIÓN DE TIEMPO, ESPECIFICAMENTE $V_1(i\omega)$ ES EL ESPECTRO DE LA FUENTE Y COMO SE DISCUTIÓ EN LA SECCIÓN 4.6, SE OBTUVO

QUE $H(i\omega)$ ES EL ESPECTRO DE LA RESPUESTA CUANDO LA FUENTE HA SIDO EL IMPULSO UNITARIO. EN OTRAS PALABRAS, LA "TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER DE $H(i\omega)$ ES LA FUNCION DE GREEN $h(t)$ DEL SISTEMA O LA RESPUESTA A IMPULSO UNITARIO.

CONSIDERESE EL SIGUIENTE PROBLEMA:

$$\text{SI } \mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(i\omega) \quad ; \quad \text{Y } \mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(i\omega)$$

¿CÓMO ES LA T.I.F. DEL PRODUCTO $F_1(i\omega) F_2(i\omega)$ RELACIONADA CON $f_1(t)$ Y $f_2(t)$?

$$\text{O SEA, ¿CÓMO ES } f(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[F_1(i\omega) F_2(i\omega)] \quad \text{--- (5.3)}$$

RELACIONADA CON $f_1(t)$ Y $f_2(t)$?

SE PUEDE RECONOCER QUE EN EL PROBLEMA GENERAL DE RESPUESTA DE SISTEMA, YA SEA $F_1(i\omega)$ O $F_2(i\omega)$ PUEDE SER IDENTIFICADA COMO $H(i\omega)$, Y EL OTRO FACTOR [$F_1(i\omega)$ O $F_2(i\omega)$] PUEDE IDENTIFICARSE COMO $W_1(i\omega)$.

SE DEMOSTRARA ADELANTE QUE SI

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(i\omega)] = f_1(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F_2(i\omega)] = f_2(t)$$

$$\text{Y } \mathcal{F}^{-1}[F_1(i\omega) F_2(i\omega)] \equiv f(t)$$

ENTONCES

$$f(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

O

$$f(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$$

LA INTEGRAL DEL LADO DERECHO DE LA ECUACION (5.3B) SE CONOCE COMO LA "INTEGRAL DE CONVOLUCION"

OBSERVE QUE LAS DOS FORMAS APARENTEMENTE DIFERENTES DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCION DADAS EN LAS EXPRESIONES (5.3B) SON EQUIVALENTES PUES QUE -- PODEMOS "MUDAR" $F_1(i\omega)$ A CUALQUIERA DE LAS DOS FUNCIONES EN EL LADO IZQUIERDO DE (5.3A)

PARA PRUBAR LA INTEGRAL DE CONVOLUCION (5.3B), SE EMPLEARA CON LA EXPRESION DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} [F_1(i\omega) F_2(i\omega)] = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} F_1(i\omega) F_2(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \text{--- (5.4)}$$

REEMPLAZANDO EN (5.4) A $F_1(i\omega)$ POR LA INTEGRAL

$$F_1(i\omega) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \text{ QUE SUSTITUYENDO EN (5.4) NOS}$$

QUEDA:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \left[\int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] F_2(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \text{--- (5.5)}$$

INTERCAMBIANDO EL ORDEN DE INTEGRACIÓN

$$f(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} f_1(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} F_2(i\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau \text{--- (5.6)}$$

IDENTIFICANDO LA CANTIDAD DENTRO DEL PARENTESIS RECTANGULAR DE (5.6) SE TIENE:

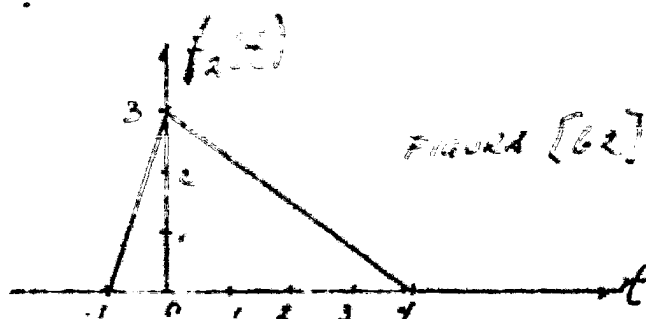
$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} F_2(i\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega = f_2(t-\tau) \text{--- (5.6a)}$$

DE MANERA QUE

$$f(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \text{--- (5.7)}$$

¿CÓMO ES EL RESULTADO DESDEADO. LA IMPORTANCIA DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN RADICA EN QUE SE TIENE EN FORMA EXPLÍCITA LA RELACION ENTRE $f(t)$, $f_1(t)$ Y $f_2(t)$. PERO PARA ENTENDER MEJOR ESTA RELACION MATEMATICA, SEVERA A CONTINUACION SU INTERPRETACION GRAFICA.

SEAN $f_1(t)$ Y $f_2(t)$ LAS FUNCIONES QUE SE MUESTRAN EN LAS GRAFICAS O FIGURAS [61] Y [62] RESPECTIVAMENTE:



la convolucion de $f_1(t)$ con $f_2(t)$ SIMBOLIZADA POR $[*]$ ES:

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] \text{----- (5.8)}$$

lo cual significa que para un valor numerico particular de $[t]$ se haga la graficas del producto $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$ EN EL EJE τ y se evalúe el area bajo la grafica.

Ahora, viendo las graficas en el eje τ ; sabiendo que $f_2(t-\tau)$ quiere decir: "voltee la funcion $f_2(t)$ a/REDEDOR DE CUALQUIER EJE t ", se tendrá:

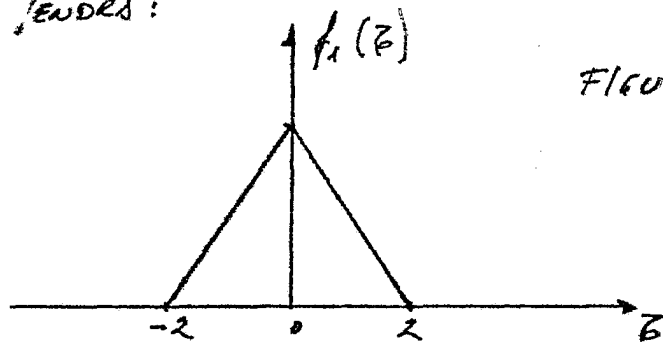


FIGURA [63]

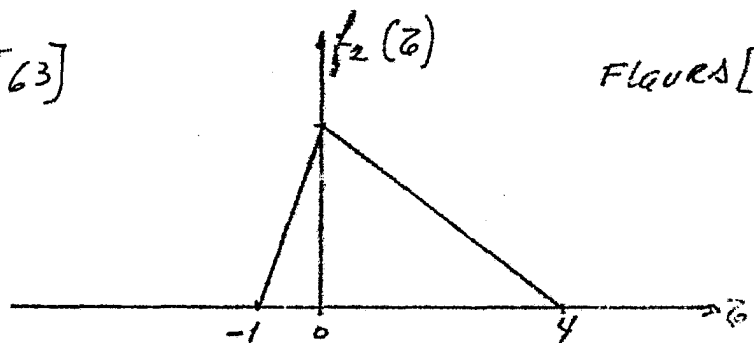


FIGURA [64]

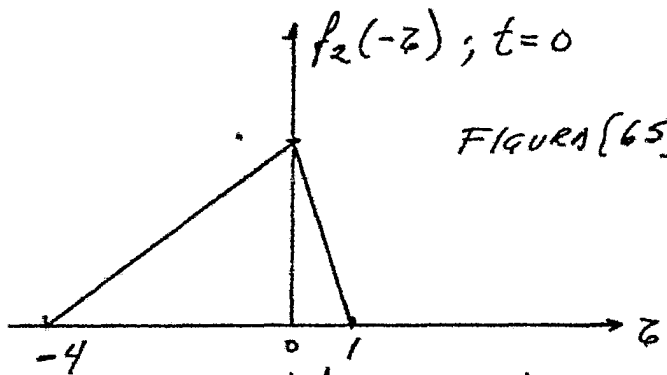


FIGURA [65]

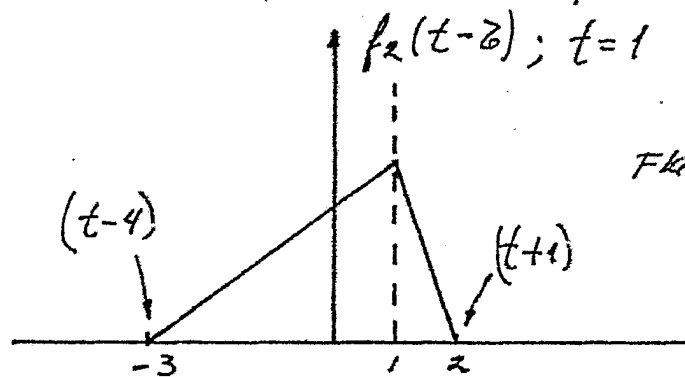


FIGURA [66]

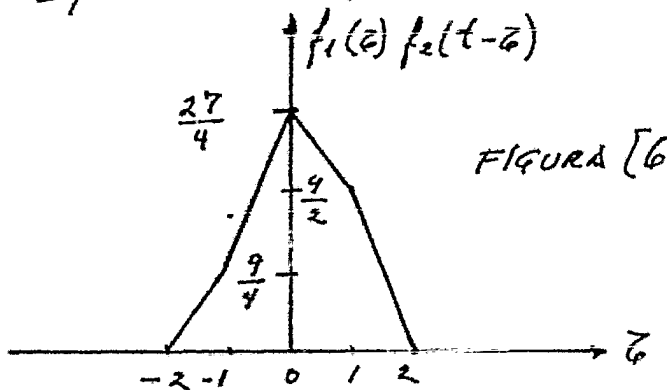


FIGURA [67]

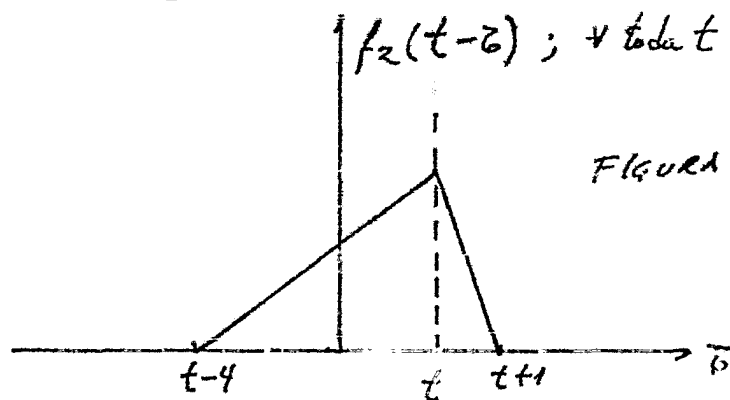


FIGURA [68]

SEA $f_1(\tau) = \begin{cases} \frac{3}{2}\tau + 3 & ; \tau \in (-2, 0) \\ -\frac{3}{2}\tau + 3 & ; \tau \in (0, 2) \end{cases}$ VER FIGURA [63]

Y $f_2(t-\tau) = \begin{cases} \frac{3}{4}\tau + \frac{1}{4} & ; \tau \in (-3, 1) \\ -3\tau + 6 & ; \tau \in (1, 2) \end{cases}$ VER FIGURA [66]

Ahora, ejecutando la convolucion para $(t=1)$ y tabulando:

τ	$f_1(\tau)$	$f_2(1-\tau)$	$f_1(\tau) \times f_2(1-\tau)$	
-3	0	0	0	
-2	0	3/4	0	y SUMANDO
-1	6/4	6/4	9/4	
0	3	9/4	27/4	+ ↓
+1	6/4	3	9/2	
+2	0	0	0	<hr/>
+3	0	0	0	
				13.5

LA SUMA [13.5] ES LA CONVOLUCION PARA LAS FUNCIONES $f_1(t)$ y $f_2(t)$ PARA UN SOLO VALOR DADO DE $[t=1]$

POR OTRA PARTE, VÉASE LA FIGURA [67] QUE MUESTRA LA GRÁFICA DEL PRODUCTO $f_1(\tau) \times f_2(t-\tau)$; $[t=1]$.

COMO PUEDE VERSE, ES UN TRIANGULO (APROXIMADAMENTE), CUYA AREA

BAJO LA CURVA SERA: $\frac{bh}{2} = \frac{4 \left(\frac{27}{4}\right)}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$, lo cual

DEMUESTRA LA PRECISION DE LA CONVOLUCION.

5.2 EL TEOREMA DE PARSEVAL COMO UN CASO ESPECIAL DE LA CONVOLUCION.

SABIENDO QUE
$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) F^*(i\omega) d\omega \quad \text{--- (5.9)}$$

NOS DETERMINA LA RELACION ENTRE EL CONTENIDO CUADRÁTICO Y LA DENSIDAD ESPECTRAL, PUEDE NOTARSE QUE SI

$F^*[f(t)] = F(i\omega)$; ENTONCES $F^*[f(-t)] = F(-i\omega)$ --- (5.10)

PARA DEMOSTRARLO, A PARTIR DE LA DEFINICION DE LA INTEGRAL DE FOURIER:

$$F^*[f(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-i\omega t} dt$$

Y HACIENDO $[-t = x]$ SE TENDRA:

$$F^*[f(-t)] = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x) e^{i\omega x} d(-x) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x) e^{-(-i\omega)x} dx = F(-i\omega) \quad \text{--- (5.11)}$$

CONSIDERANDO AHORA LA INTEGRAL DE CONVOLUCION EXPRESADA EN LA ECUACION (5.7)

$$F^*[F_1(i\omega) F_2(i\omega)] = \left[\int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] \quad \text{--- (5.12)}$$

y utilizando la expresión (5.10)

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(i\omega)F_2(-i\omega)] = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} f_1(\tau) f_2(\tau-t) d\tau \quad \text{--- (5.13)}$$

ESCRIBIENDO el lado izquierdo de (5.13) como:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} F_1(i\omega)F_2(-i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \left[\int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} f_1(\tau) f_2(\tau-t) d\tau \right] \quad \text{--- (5.14)}$$

y HACIENDO $F_1 = F_2$ EN (5.14); ENTONCES

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} F_2(i\omega)F_2(-i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \left[\int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} f_1(\tau) f_2(\tau-t) d\tau \right] \quad \text{--- (5.15)}$$

y HACIENDO $[t=0]$ EN (5.15) SE TIENE

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(\tau)]^2 d\tau = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(i\omega)|^2 d\omega \right] \quad \text{--- (5.16)}$$

DE DONDE (5.16) ES IDÉNTICA A (5.9).

5.3 CONVOLUCION EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

EN LA SECCION ANTERIOR SE INVESTIGO LA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER DE PRODUCTO $F_1(i\omega) \times F_2(i\omega)$. EN ESTA SECCION SE CONSIDERA EL PROBLEMA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES EN EL TIEMPO; ESTO ES, SE DEMOSTRARA QUE SI:

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(i\omega) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(i\omega)$$

y SI $f(t) = f_1(t) \times f_2(t)$, ENTONCES

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(i\omega) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(i\omega) F_2(i\omega - i\omega') d\omega' \right] \quad \text{--- (5.17)}$$

LA CUAL SE CONOCE COMO LA "CONVOLUCION EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA".

DEMOSTRACION: POR DEFINICION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER,

$$\mathcal{F}[f_1(t) \times f_2(t)] = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-i\omega t} dt \right] \quad \text{--- (5.18)}$$

PERO SI $f_1(t) = \mathcal{F}^{-1} [F_1(i\omega)]$, ENTONCES

$$f_1(t) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \quad \therefore$$

$$f_1(t) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(ix) e^{ixt} dx \right] \text{-----} \quad (5.19)$$

SUSTITUYENDO (5.19) EN (5.18):

$$\mathcal{F}^{-1} [f_1(t) \times f_2(t)] = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} F_1(ix) e^{ixt} dx \right] f_2(t) e^{-i\omega t} dt \text{-----} \quad (5.19A)$$

INTERCAMBIANDO EL ORDEN DE INTEGRACION

$$\mathcal{F}^{-1} [f_1(t) \times f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} F_1(ix) \left[\int_{t=-\infty}^{t=\infty} f_2(t) e^{-i(\omega-x)t} dt \right] dx \text{-----} \quad (5.19B)$$

PERO RECORDANDO QUE DEL DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA EXPRESADO EN (5.60):

$$\int_{t=-\infty}^{t=\infty} f_2(t) e^{-i(\omega-x)t} dt = [F_2(i\omega - ix)] \text{-----} \quad (5.19C)$$

Y DE (5.19C) EN (5.19B) SE CONCLUYE

$$\mathcal{F}^{-1} [f_1(t) \times f_2(t)] = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} F_1(ix) F_2(i\omega - ix) dx \right] \text{-----} \quad (5.20)$$

ASI QUEDA DEMOSTRADA LA CONVOLUCION EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

5.4 RESPUESTA DE SISTEMAS LINEALES:

LA FORMA GENERAL DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCION

$$\mathcal{F}^{-1} [F_1(i\omega) F_2(i\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

ES \therefore PARA DEDUCIR UNA FORMULA QUE RELACIONE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DADO A DIFERENTES FUENTES. COMO SE VIO EN LA SECCION 5.1; EN GENERAL LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA RESPUESTA $V_2(t)$ DE UN SISTEMA $H(i\omega)$ A UNA FUENTE $V_1(t)$ ES:

$$V_2(i\omega) = H(i\omega) V_1(i\omega)$$

ESTO ES, $V_2(i\omega)$ TIENE LA FORMA DE UN PRODUCTO. RECORDANDO QUE DE LA SECCION 4.6 :

$$\mathcal{F}^{-1}[H(i\omega)] = h(t) = \text{RESPUESTA A IMPULSO } \delta(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[V_1(i\omega)] = v_1(t) = \text{CUALQUIER FUNCION FUENTE}$$

DE AQUI, APLICANDO CONVOLUCION, SE PUEDE ESCRIBIR LA RESPUESTA A CUALQUIER FUENTE EN TERMINOS DE LA RESPUESTA A IMPULSO:

$$v_2(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} h(\tau) v_1(t-\tau) d\tau \quad \text{--- (5.21)}$$

O BIEN, IDENTIFICANDO $V_1(i\omega)$ CON $F_2(i\omega)$:

$$v_2(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} v_1(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \text{--- (5.22)}$$

5.5 TRANSMISION SIN DISTORSION.-

ESTA DISCUSION ES UNA GENERALIZACION DE LA TRANSMISION SIN DISTORSION QUE SE ESTUDIO PARA SEÑALES PERIODICAS.

CUANDO UNA SEÑAL $v_1(t)$ CUYA TRANSFORMADA DE FOURIER ES $V_1(i\omega)$ ES LA ENTADA DE UN SISTEMA CUYA FUNCION DE TRANSFERENCIA ES $H(i\omega)$, LA T. DE FOURIER $V_2(i\omega)$ DE LA RESPUESTA $v_2(t)$ ESTA DADA POR:

$$V_2(i\omega) = H(i\omega) V_1(i\omega) \quad \text{--- (5.23)}$$

LA FUNCION DE TRANSFERENCIA EN FORMA EXPONENCIAL SE ESCRIBE COMO:

$$H(i\omega) = h(\omega) e^{i\theta(\omega)} \quad \text{--- (5.23a)}$$

DONDE $h(\omega)$ ES LA AMPLITUD DE LA RESPUESTA Y $\theta(\omega)$ ES LA FASE DE LA RESPUESTA. RECUERDESE QUE EN EL ESTADO ESTACIONARIO SENUSOIDAL, A LA FRECUENCIA ω , $h(\omega)$ TAMBIEN ES LA RELACION DE LAS AMPLITUDES DE LA RESPUESTA Y LA FUENTE. USANDO LA FORMA EXPONENCIAL (5.23a) EN (5.23) SE TIENE:

$$V_2(i\omega) = V_1(i\omega) h(\omega) e^{i\theta(\omega)} \quad \text{--- (5.24)}$$

Y HACIENDO LA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER,

$$V_2(t) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_1(i\omega) h(\omega) e^{i\theta(\omega)} e^{i\omega t} d\omega \right] \text{-----} (5.25)$$

CONSIDÉRESE AHORA EL SIGUIENTE PROBLEMA: ¿CUÁL SON LAS RESTRICCIONES EN $h(\omega)$ Y $\theta(\omega)$ DE MANERA QUE $V_2(t)$ SEA UNA ONDA DE LA MISMA FORMA QUE $V_1(t)$?

ES EVIDENTE QUE PARA $[H(i\omega) = 1]$, LAS DOS FORMAS DE ONDA SON IDENTICAS. SIN EMBARGO, COMO EN EL CASO DE SEÑALES PERIÓDICAS, ÉSTO NO ES UNA CONDICIÓN NECESARIA.

SI PARA UNA ENTRADA $V_1(t)$ LA RESPUESTA TIENE LA FORMA

$$V_2(t) = [k_0 V_1(t - T_d)] \text{-----} (5.26)$$

DONDE $[k_0]$ Y $[T_d]$ SON CONSTANTES, ENTONCES LA FORMA DE ONDA $V_2(t)$ ES LA MISMA QUE $V_1(t)$; EN PARTICULAR $V_2(t)$ ESTÁ RETRASADA EN EL TIEMPO CON RESPECTO A $V_1(t)$ POR EL FACTOR $[T_d]$; Y LA "ESCALA" DE $V_2(t)$ HA SIDO MODIFICADA POR EL FACTOR CONSTANTE $[k_0]$. UN SISTEMA QUE PRODUCE UNA RESPUESTA $[V_2(t) = k_0 V_1(t - T_d)]$ A UNA SEÑAL $V_1(t)$, SE DICE QUE TRANSMITE LA SEÑAL $V_1(t)$ SIN DISTORSIÓN.

LOS PARÁMETROS $[k_0]$ Y $[T_d]$ SON LLAMADOS RESPECTIVAMENTE LA "GANANCIA" Y EL "RETRASO" DE LA TRANSMISIÓN.

SUSTITUYENDO $(t - T_d)$ POR $[t]$ EN LA ECUACIÓN (5.25) SE TIENE:

$$V_2(t - T_d) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_1(i\omega) h(\omega) e^{i\theta(\omega)} e^{i\omega(t - T_d)} d\omega \right] \text{-----} (5.27)$$

A PARTIR DE LA ECUACIÓN (5.27) Y POR EL TEOREMA DEL DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO DISCUTIDO EN LA SECCIÓN 4.9, SE SIGUE QUE LA CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN, ES QUE EL SISTEMA TENGA LAS CARACTERÍSTICAS DE FRECUENCIA

$$H(i\omega) = [k_0 e^{-i\omega T_d}] \text{-----} (5.28)$$

DONDE $[k_0]$ Y $[T_d]$ SON CONSTANTES PARA TODAS LAS FRECUENCIAS.

EN PALABRAS: "PARA TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN DE UNA SEÑAL, EL SISTEMA

DE TRANSMISIÓN DEBE TENER UNA AMPLITUD DE LA RESPUESTA QUE ES INDEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA, Y UNA FASE DE RESPUESTA QUE ES PROPORCIONAL A LA FRECUENCIA, COMO PUEDE VERSE EN LA FIGURA [6.9]

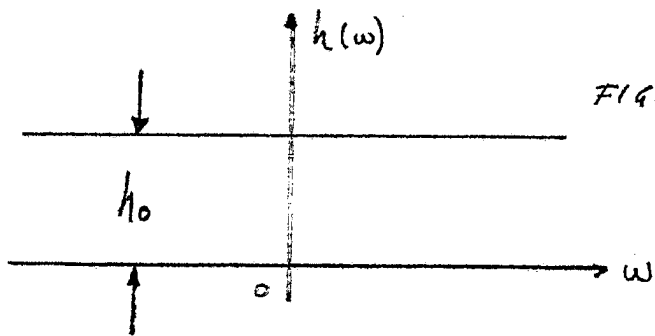
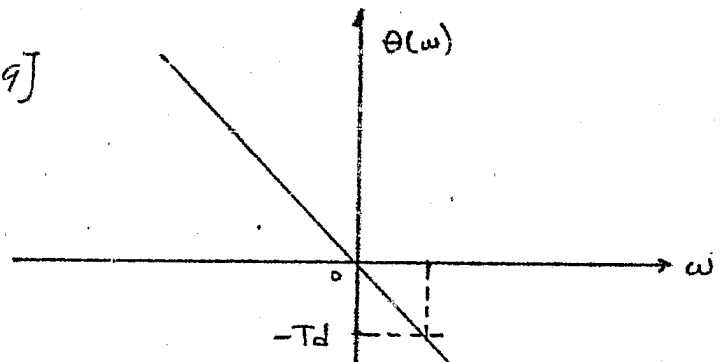


FIGURA [6.9]



COMO ACLARACIÓN SE RECUERDA QUE ES LA MISMA CONCLUSIÓN QUE SE OBTUVO EN EL ESTUDIO DE SERIES DE FOURIER Y LA TRANSMISIÓN DE SEÑALES PERIÓDICAS EN LA SECCIÓN 3.4, FIGURA [42].

5.6 FILTROS IDEALES -

EL PROPÓSITO DE ÉSTA DISCUSIÓN ES SEMEJANTE A LA SECCIÓN 3.5, DONDE SE VIÓ QUE UN FILTRO IDEAL "DEJA PASAR UNA BANDA DE FRECUENCIAS CON ATENUACIÓN UNIFORME Y CON CARACTERÍSTICAS DE FASE LINEAL EN ÉSTA BANDA". UN FILTRO IDEAL "DEBE PROPORCIONAR ATENUACIÓN INFINITA FUERA DE LA BANDA DE PASO".

DE ESTE MODO, Y DE ACUERDO A LO EXPRESADO EN LA SECCIÓN 3.5, PARA UN FILTRO PASA-BAJAS

$$H_{PB}(i\omega) = h_0 e^{-i\omega T_d} \quad ; \quad \omega \in (-\omega_c, \omega_c) \quad \text{--- (5.29)}$$

$$H_{PB}(i\omega) = \text{CERO} \quad ; \quad |\omega| > \omega_c$$

PARA UN FILTRO PASA-ALTA

$$H_{PA}(i\omega) = h_0 e^{-i\omega T_d} \quad ; \quad |\omega| > \omega_c \quad \text{--- (5.30)}$$

$$H_{PA}(i\omega) = \text{CERO} \quad ; \quad \omega \in (-\omega_c, \omega_c)$$

PARA UN FILTRO PASA-BANDAS

$$H_{PBN}(i\omega) = h_0 e^{-i\omega T_d} \quad ; \quad |\omega| \in (\omega_1, \omega_2) \quad \text{--- (5.31)}$$

$$H_{PBN}(i\omega) = \text{CERO} \quad ; \quad |\omega| \in (\omega_2, \omega_1)$$

LAS TRES CORRESPONDIENTES CURVAS DE TRANSMISIÓN SE MUESTRAN EN LAS FIGURAS [45], [46] y [47]; POR LO QUE EN ÉSTA SECCIÓN SE OMITEN.

5.7 RESPUESTA DE UN FILTRO IDEAL A IMPULSO UNITARIO.

SE HA VISTO QUE LA RESPUESTA $V_2(t)$ DE UN SISTEMA A UNA FUENTE $V_1(t)$ ESTÁ DADA POR:

$$V_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) V_1(t-\tau) d\tau; \text{ DONDE } h(t) \text{ ES LA RESPUESTA}$$

DEL SISTEMA A $\delta(t)$ IMPULSO UNITARIO. ÉSTA EXPRESIÓN MUESTRA QUE SI CONOCEMOS LA RESPUESTA DEL SISTEMA A $\delta(t)$, PODEMOS ENCONTRAR SU RESPUESTA A CUALQUIER FUENTE.

DESDE UN PUNTO DE VISTA FÍSICO, SE VE QUE LA CARACTERIZACIÓN DE UN SISTEMA POR SU FUNCIÓN DE GREEN $h(t)$ ES POSIBLE PORQUE $h(t)$ ES LA RESPUESTA "NATURAL" O RESPUESTA "LIBRE DE FUENTE" DEL SISTEMA.

ÉSTO SE PUEDE VER A PARTIR DEL HECHO DE QUE, PUESTO QUE $[\delta(t) = 0] \forall t > 0$, SU EFECTO ES "EXCITAR" INSTANTÁNEAMENTE AL SISTEMA, INTRODUCIENDO ENERGÍA EN "TIEMPO CERO" Y PERMITIÉNDOLE AL SISTEMA RESPONDER EN SU PROPIA FORMA NATURAL.

VEÁSE LA RESPUESTA DE UN FILTRO IDEAL DE PASA-BAJA A IMPULSO UNITARIO.

PUESTO QUE DE (4.42) $\rightarrow \mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, LA RESPUESTA $V_2(t)$ TIENE LA TRANSFOR-

MADA DE FOURIER INVERSA:

$$V_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_2(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

COMO DE (5.29) SE TIENE QUE $[V_2(i\omega) = \text{CERO}] \forall |\omega| > \omega_c$, ENTONCES:

$$V_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} h_0 e^{-i\omega T_d} e^{i\omega t} d\omega = \frac{h_0}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} e^{i(t-T_d)\omega} d\omega$$

$$V_2(t) = \frac{h_0}{2\pi} \left. \frac{e^{i(t-T_d)\omega}}{i(t-T_d)} \right|_{-\omega_c}^{\omega_c} \text{----- (5.32)}$$

o sustituyendo límites

$$V_2(t) = \frac{h_0}{2\pi} \left[\frac{e^{i(t-T_d)\omega_c} - e^{-i(t-T_d)\omega_c}}{i(t-T_d)} \right] = \frac{h_0 \omega_c}{\pi} \frac{\text{sen}(\omega_c(t-T_d))}{\omega_c(t-T_d)}$$

$$= V_2(t) = \frac{h_0}{\pi} \frac{\text{sen}(\omega_c(t-T_d))}{(t-T_d)} \text{----- (5.32a)}$$

SI SE GRÁFICA LA RESPUESTA $V_2(t)$ SOBRE UN EJE $\omega_c(t-T_d)$, Y MARCANDO EL ESPECTRO EN $t=0$, $[\omega_c(t-T_d) = -\omega_c T_d]$ SE VERÁ COMO EN LA FIGURA [70]

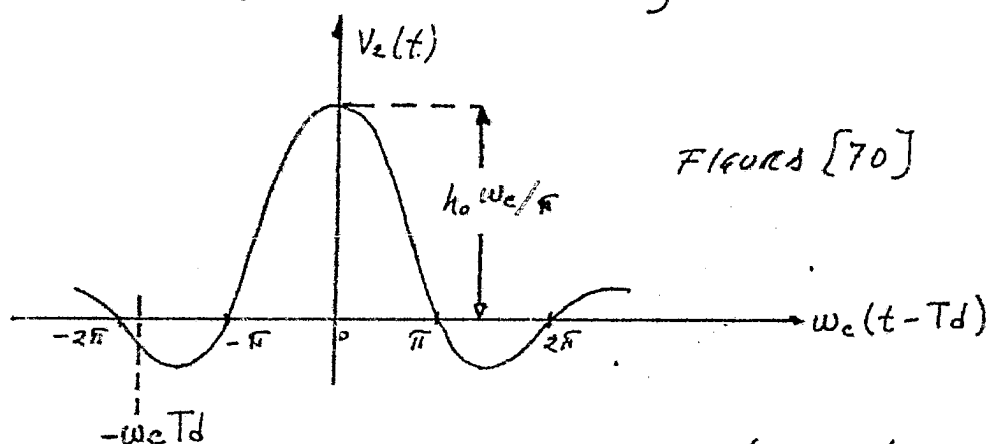


FIGURA [70]

ESTO ES LA RESPUESTA DEL FILTRO IDEAL PASA-BAJAS A IMPULSO UNIFORME $\delta(t)$. SE VE CON PREOCUPACION QUE EL FILTRO DA UNA RESPUESTA PARA TIEMPOS ANTES DE $(t=0)$; ESTO ES, ANTES DE QUE SE APLIQUE LA ENTRADA. ESTO RESPUESTA ANTICIPADA ES CARACTERÍSTICA DE CIERTOS CIRCUITOS NO REALIZABLES. ANALIZANDO UN FILTRO QUE SI ES FÍSICAMENTE REALIZABLE, SE TENDRÁ COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA [71]

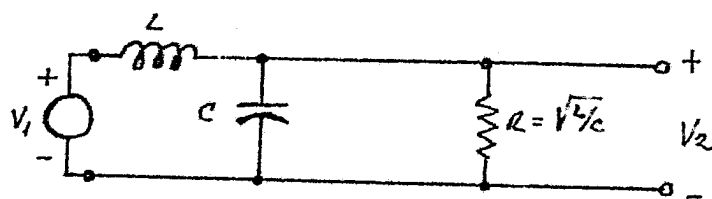


FIGURA [71]

DEL CIRCUITO ANTERIOR:

$$\frac{V_2(i\omega)}{V_1(i\omega)} = H(i\omega) = \frac{1/(1/R + i\omega C)}{1/(1/R + i\omega C) + i\omega L} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + i\omega L/R}$$

POR CONVENIENCIA, EN ESTE FILTRO $R = \sqrt{L/C}$; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ DE MOD. 100

$$\frac{V_2(i\omega)}{V_1(i\omega)} = H(i\omega) = \omega_0^2 \left[\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0} \right]$$

HACIENDO LAS OPERACIONES CONVENIENTES SE OBTIENE

$$V_2(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \omega_0 e^{-\omega_0 t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 t\right) u(t) \quad \text{--- (5.32)}$$

CUYA GRÁFICA SE MUESTRA EN LA FIGURA [72]:

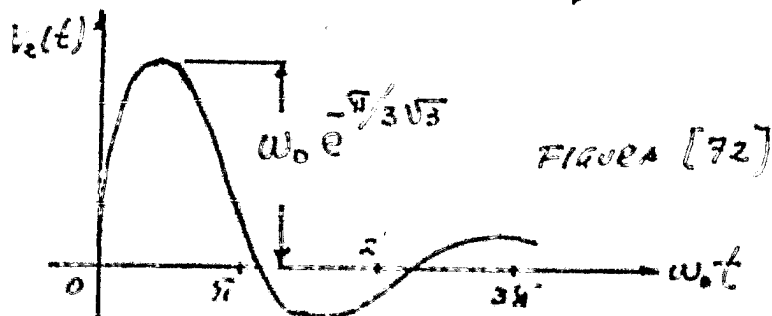


FIGURA [72]

LAS CONCLUSIONES QUE SE PUEDEN OBTENER SON:

- EN AMBOS CASOS LA RESPUESTA ALCANZA UN VALOR MÁXIMO QUE AUMENTA A MEDIDA QUE EL ANCHO DE BANDA AUMENTA.
 - EN AMBOS CASOS LA RESPUESTA ES OSCILATORIA CUANDO AUMENTA LA FRECUENCIA.
- EN ÉSTOS DOS ASPECTOS LAS RESPUESTAS SON SIMILARES, PERO LA DIFERENCIA ESTÁ EN LA EXACTITUD DE LOS VALORES NUMÉRICOS DE LOS PICOS Y LA FRECUENCIA DE LAS OSCILACIONES, Y POR SUPUESTO, EN LA NO FÍSICA REALIZACIÓN DE FILTRO IDEAL.
- ESTA COMPARACION FUE PARA UN FILTRO REAL EN PARTICULAR COMPARADO CON UNO IDEAL, PERO EN GENERAL SE PUEDE DECIR QUE:
- CIERTOS ASPECTOS BÁSICOS DE LA RESPUESTA DE FILTRO IDEAL SON APLICABLES A FILTROS FÍSICAMENTE REALIZABLES.
 - LA COMPLEJIDAD DEL ANÁLISIS DE FILTROS FÍSICAMENTE REALIZABLES CUANDO AUMENTA EL NÚMERO DE COMPONENTES QUE LO FORMAN EN CONTRASTE CON LOS FILTROS IDEALES HA DE TOMARSE EN CUENTA, (LO MISMO PASA CON FILTROS DIGITALES QUE SE USAN EN GEOFÍSICA).
 - AL APLICAR LOS RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE FILTROS IDEALES A FILTROS FÍSICAMENTE REALIZABLES SE DEBEN TOMAR EN CUENTA DOS TIPOS DE DIFERENCIAS:
 - a) LOS DETALLES NUMÉRICOS OBTENIDOS DE FILTROS IDEALES.
 - b) LA DIFERENCIA ESENCIAL ENTRE LOS DOS ASPECTOS DE LAS RESPUESTAS EN FRECUENCIA QUE LLEVA A LA PROPIEDAD DE PREDICCIÓN DE LOS FILTROS IDEALES.

5.8 CONCLUSIONES A PARTIR DE LA RESPUESTA DE UN FILTRO IDEAL A $\delta(t)$.

DOS CONCLUSIONES IMPORTANTES SE PUEDEN OBTENER A PARTIR DE RESULTADO ANTERIOR:

- 1.- CON REFERENCIA A LA FIGURA [70] DE LA RESPUESTA DE FILTRO IDEAL, SE VE QUE EL VALOR PICO ES PROPORCIONAL A LA FRECUENCIA DE CORTE $[f_c]$; CUAL EN TÉRMINOS DE ANÁLISIS ESPECTRAL SE PUEDE EXPLICAR OBSERVANDO QUE EL IMPULSO CONTIENE TODAS LAS FRECUENCIAS CON LA MISMA DENSIDAD ESPECTRAL; DE AQUÍ, ENTRE MÁS GRANDE SEA LA BANDA DE FRECUENCIA, MAYOR SERÁ EL CONTENIDO DE FRECUENCIAS QUE PASEN, HACIENDO PUES, LA SALIDA PROPORCIONAL.
 - 2.- LA ENTRADA TIENE UNA DURACIÓN DE "CERO" TIEMPO, PERO TIENE ESPECTRO UNIFORME (DE $\omega = -\infty$ A $\omega = +\infty$); LA SALIDA TIENE ESPECTRO FINITO (DE $-\omega_c$ A $+\omega_c$) Y TIENE DURACIÓN INFINITA.
- SE OBSERVA QUE EL INTERVALO DE TIEMPO DE $(\omega_c(t - T_d) = -\pi)$ A

$[w_c(t - T_d) = +\pi]$ incluye el cuerpo principal de la respuesta.

SI DEFINIMOS A LA DIFERENCIA EN TIEMPO CORRESPONDIENTE A $[w_c t = 2\pi = w_c T_0]$ COMO LA DURACION EFECTIVA DE LA SALIDA (O SEA, SE IGNORAN LAS OSCILACIONES); CON ESTA DEFINICION LA DURACION DE LA SALIDA ES $[T_0 = \frac{2\pi}{w_c} = \frac{1}{f_c}]$.

OBSERVE TAMBIEN QUE CUANDO $w_c \rightarrow \infty$ TODAS LAS COMPONENTES DE LA ENTRADA PASAN; $T_0 \rightarrow 0$ Y EL PICO DE LA SALIDA SE HACE INFINITO; EN OTROS PALABRAS, LA SALIDA SE CONVIERTE EN UN IMPULSO.

5.9 RESPUESTA DE OTROS FILTROS IDEALES RELACIONADA CON LA RESPUESTA DEL FILTRO PASA-BAJA.

UN FILTRO IDEAL SE DEFINE COMO UN DISPOSITIVO QUE PERMITE LA TRANSMISION DE UNA BANDA DE FRECUENCIAS CON GANANCIA UNIFORME (O ATENUACION) Y TIEMPO DE RETRASO CONSTANTE.

UN SISTEMA DE TRANSMISION IDEAL PUEDE LLAMARSE UN "FILTRO PASA-TODOS", O SEA:

$$H_{PT}(i\omega) = k_0 e^{-i\omega T_d} ; \omega \in (-\infty, \infty) \text{ ----- (5.34)}$$

UN FILTRO IDEAL DE PASA ALTA CON FRECUENCIA DE CORTE w_c , SERA, SEGUN LAS EXPRESIONES (5.30) [Y (5.29)]:

$$H_{PA}(i\omega) = k_0 e^{-i\omega T_d} ; |\omega| > w_c$$
$$H_{PA}(i\omega) = \text{CERO} ; |\omega| < w_c ; \omega \in (-w_c, w_c)$$

POR LO TANTO, DE (5.30) EN (5.34)

$$H_{PT} = H_{PA} + H_{PB}$$
$$H_{PA}(i\omega) = H_{PT}(i\omega) - H_{PB}(i\omega) \text{ ----- (5.35)}$$

SI LA ENTRADA DE UN FILTRO PASA-ALTA TIENE UNA T. DE F. $V_1(i\omega)$, LA RESPUESTA $V_2(t)$ TIENE LA TRANSFORMADA DE FOURIER:

$$V_2(i\omega) = H_{PA}(i\omega) V_1(i\omega) = [H_{PT}(i\omega) - H_{PB}(i\omega)] V_1(i\omega) =$$
$$V_2(i\omega) = \int k_0 e^{-i\omega T_d} V_1(i\omega) - H_{PB}(i\omega) V_1(i\omega) \text{ ----- (5.36)}$$

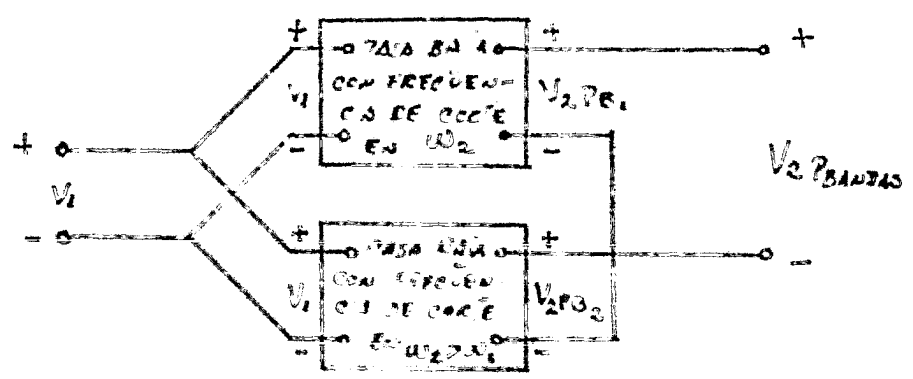
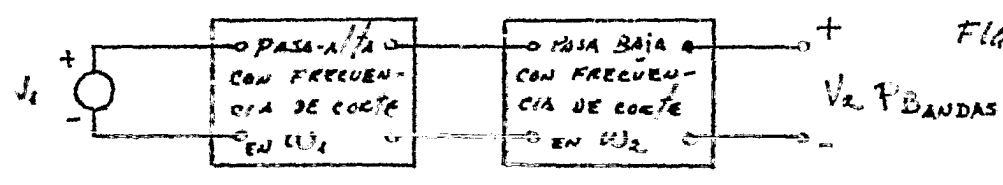
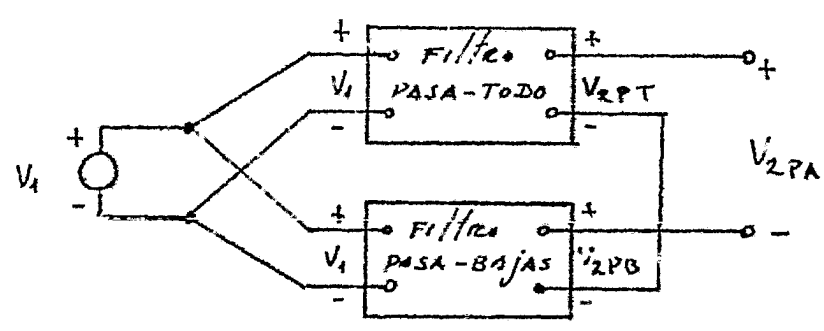
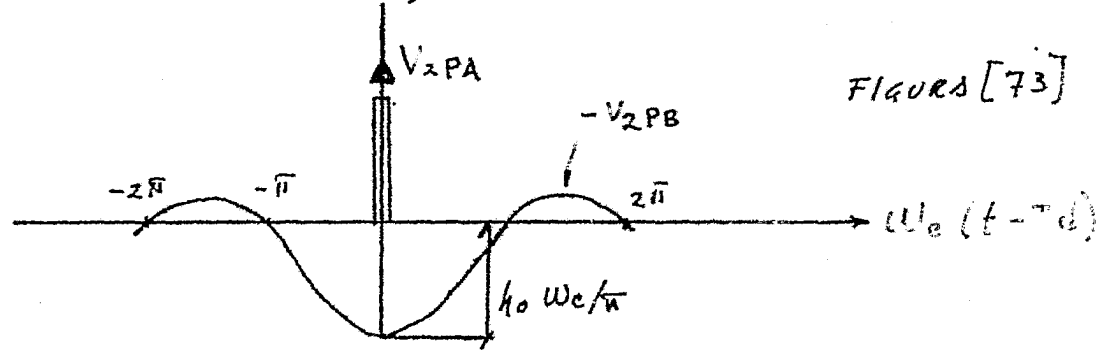
SI LA SALIDA DEL FILTRO PASA-BAJA ES V_{2PB} ; ENTONCES POR INVERSIÓN DE (5.36):

$$V_{2PA} = h_0 V_1(t - T_d) - V_{2PB} \quad (5.36A)$$

Y SI $[V_1(t) = \delta(t)]$; ENTONCES LA SALIDA DEL FILTRO IDEAL DE PASA-ALTA CON FRECUENCIA DE CORTE $[\omega_c]$ SERÁ:

$$V_{2PA}(t) = \left[h_0 \delta(t - T_d) - \frac{h_0 \omega_c}{\pi} \frac{\text{sen}[\omega_c(t - T_d)]}{\omega_c(t - T_d)} \right] \quad (5.37)$$

COMO SE VE EN LA FIGURA [73]; QUE MUESTRA LA RESPUESTA DE UN FILTRO IDEAL PASA-ALTA A IMPULSO $\delta(t)$:



LA RELACION ENTRE LA RESPUESTA DE PASA-TODO, EL PASA-BAJAS Y EL PASA-ALTOS PUEDE VISUALIZARSE EN LA FIGURA [74]

EN FORMA SIMILAR, LA RESPUESTA DE UN FILTRO PASA-BANDAS CON LA MÁS BAJA FRECUENCIA RADIAN DE CORTE $[\omega_1]$ Y LA MÁS ALTA FRECUENCIA RADIAN DE CORTE $[\omega_2]$ PUEDE VERSE EN LA FIGURA [75] Y [76].

5.10 RESPUESTA DE LOS SISTEMAS A ESCALÓN UNITARIO.-

LA RESPUESTA DE LOS SISTEMAS A $u(t)$ PUEDE DEDUCIRSE DEL "TEOREMA DE LAS FUENTES RELACIONADAS" (O CONVOLUCIÓN); O BIEN, USANDO LA REPRESENTACION DE FOURIER PARA $u(t)$ DEDUCIDA EN LA SECCION 4.8, EXPRESIÓN (4.61):

$$F[u(t)] = \begin{cases} \pi \delta(\omega) & ; \omega = 0 \\ \frac{1}{i\omega} & ; \omega \neq 0 \end{cases}$$

USANDO ESTA REPRESENTACION, LA RESPUESTA ESPECTRAL $V_2(i\omega)$ DE UN SISTEMA, CARACTERIZADA POR $H(i\omega)$, SUJETA A UNA ENTRADA "ESCALÓN UNITARIO" ES:

$$V_2(i\omega) = \begin{cases} \pi \delta(\omega) H(i\omega) & ; \omega = 0 \\ \frac{1}{i\omega} H(i\omega) & ; \omega \neq 0 \end{cases} \quad \text{--- (5.38)}$$

Y SU CORRESPONDIENTE FUNCION EN EL DOMINIO DE TIEMPO ES:

$$V_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=0^-}^{\omega=0^+} \pi \delta(\omega) H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=0^-} \frac{H(i\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=0^+}^{\omega=+\infty} \frac{H(i\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega \quad \text{--- (5.39)}$$

EVALUANDO:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=0^-}^{\omega=0^+} \pi \delta(\omega) H(i\omega) e^{i\omega t} = \frac{1}{2} H(0) \quad \text{--- (5.40)}$$

DE (5.40) EN (5.39):

$$V_2(t) = \frac{1}{2} H(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=0^-} \frac{H(i\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=0^+}^{\omega=+\infty} \frac{H(i\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega \quad \text{--- (5.41)}$$

SI PARA CUALQUIER SISTEMA FÍSICO $H(-i\omega) = H^*(i\omega)$; E INTRODUCIENDO UN CAMBIO DE VARIABLE EN LA PRIMERA INTEGRAL DE (5.41) NOS DARÁ:

$$V_2(t) = \frac{1}{2} H(0) + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\omega=0^+}^{\omega=+\infty} \frac{H^*(i\omega)}{-i\omega} e^{-i\omega t} d\omega + \int_{\omega=0^+}^{\omega=+\infty} \frac{H(i\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega \right] \quad (5.42)$$

y entonces

$$V_2(t) = \frac{1}{2} H(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{0^+}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{H(i\omega) e^{i\omega t}}{i\omega} \right] d\omega \quad (5.43)$$

$$\text{o} \quad V_2(t) = \frac{1}{2} H(0) + \frac{1}{\pi} \int_{0^+}^{\infty} |H(i\omega)| \frac{\sin[\omega t + \theta(\omega)]}{\omega} d\omega \quad (5.44)$$

DONDE $\theta(\omega)$ ES EL ÁNGULO DE $H(i\omega)$. LA ECUACION (5.43) O (5.44) DA LA RESPUESTA DE UN SISTEMA ARBITRARIO A ESCALÓN UNITARIO $u(t)$.

AHORAS, PARA UN FILTRO IDEAL PASA-BAJAS, LA FUNCION DE TRANSFERENCIA SEGUN (5.29)

$$H(i\omega) = \begin{cases} \text{CERO} & ; |\omega| > \omega_c \\ h_0 e^{-i\omega T_d} & ; |\omega| < \omega_c \end{cases} \quad (5.45)$$

ENTONCES, LA RESPUESTA DE UN FILTRO PASA BAJAS A ESCALÓN UNITARIO ES:

$$V_{2PB}(t) = \frac{h_0}{2} + \frac{h_0}{\pi} \int_{0^+}^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t-T_d)]}{\omega} d\omega \quad (5.46)$$

SI CAMBIANDO LA VARIABLE $[\omega(t-T_d) = \chi]$ ENTONCES

$$V_{2PB}(t) = \left[\frac{h_0}{2} + \frac{h_0}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-T_d)} \frac{\sin \chi}{\chi} d\chi \right] \quad (5.47)$$

ESTA ES LA RESPUESTA DEL FILTRO A ESCALÓN UNITARIO $u(t)$.

CAPITULO VI.

INTRODUCCION A LA DETECCION DE SEÑALES EN PRESENCIA DE RUIDO.

EN SISMOLOGIA ENTENDEMOS POR "RUIDO" A TODA AQUELLA INFORMACION NÓ DESEADA y "SEÑAL" SERÁ POR TANTO AQUELLA INFORMACION SI DESEADA. EN OTROS PAISAJOS, CUANDO SE RECIBE INFORMACION, NORMALMENTE SE ENCUENTRAN MEZCLADAS LA PARTE DESEADA, CON OTRA PARTE PRODUCIDA POR FUENTES EXTRANAS y DE MUY VARIADAS CARACTERISTICAS, QUE ES LO QUE SE CONSIDERA COMO RUIDO. EN TALES CIRCUNSTANCIAS, ES NECESARIO CREAR UNA HERRAMIENTA QUE NOS PERMITA SEPARAR AMBOS PARTES. SI LO QUE CONSIDERAMOS RUIDO TIENE CARACTERISTICAS DE FRECUENCIA DIFERENTES A LA SEÑAL, BASTARÁ CON UN FILTRO PARA SEPARAR LA SEÑAL Y EL RUIDO; PERO SI ESTO NO ES ASI, ENTONCES SERÁ NECESARIO HACER USO DE OTRO PROCEDIMIENTO PARA LOGRAR TALES FINES. EN ESTE CAPITULO SE ESTUDIA LA MANERA DE LOGRAR DICHA SEPARACION, PERO PARA ESTO SERÁ NECESARIO INTRODUCIR ALGUNOS NUEVOS CONCEPTOS QUE A CONTINUACION SE VERÁN.

6.1 MUESTREO DE SEÑALES EN EL TIEMPO.

LA IDEA DEL MUESTREO ES LA SIGUIENTE: SI SE TOMAN VALORES SUFICIENTEMENTE CERCANOS ENTRE SI, DE UNA FORMA DE ONDA, ENTONCES ESTOS VALORES SE PUEDEN EMPLEAR PARA RECOBRAR CON EXACTITUD TODOS LOS VALORES DE LA FORMA DE ONDA. LA CONDICION PARA QUE ESTO SE CUMPLA ES QUE LA ONDA SEA DE BANDA LIMITADA.

UNA FORMA DE ESTABLECER EL TEOREMA DEL MUESTREO ES LA SIGUIENTE: "UNA SEÑAL DE BANDA LIMITADA QUE NO TENGA COMPONENTES ESPECIALES ARRIBA DE $\left[\frac{\omega_m}{2} \right]_{\text{rad}} / \text{seg}$ SE PUEDE REPRESENTAR EN FORMA UNICA MEDIANTE SUS VALORES MUESTREADOS A INTERVALOS UNIFORMES NO MAYORES QUE

$$\left[\frac{1}{2f_m} \right]; \text{ DONDE } \omega_m = 2\pi f_m \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{2f_m} \quad f_m = \frac{1}{2\Delta t}$$

$\omega_m =$ FRECUENCIA MÁXIMA

$$\Delta t = \frac{1}{2f_m} = \frac{2\pi}{2\omega_m} = \left[\frac{\pi}{\omega_m} \right]$$

EL ENUNCIADO ANTERIOR NO ES EL MÁS GENERAL, YA QUE SE ESTÁ HABLANDO DE MUESTREO UNIFORME.

PARA PROBAR ESTE TEOREMA SE USARÁ EL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN EN LA FRECUENCIA. CONSIDÉRESE EL MUESTREO DE $f(t)$ DESIGNADO $f_s(t)$. LA FUNCIÓN $f(t)$ QUE SE MUESTREA SE PUEDE REPRESENTAR POR LA MULTIPLICACIÓN DE $f(t)$ POR UN TREN DE IMPULSOS UNITARIOS DE PERÍODO $[T]$, IGUAL AL INTERVALO DE MUESTREO $[\Delta t]$, ES DECIR,

$$f_s(t) = \left[f(t) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] \text{----- (6.2)}$$

AHORA SE OBTENDRÁ EL ESPECTRO DE $f_s(t)$.

SE SABE POR EL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN EN LA FRECUENCIA, QUE $F_s(i\omega)$ ES LA CONVOLUCIÓN DE $F(i\omega)$ Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE $\left(\frac{1}{T}\right)$ VECES EL TREN DE IMPULSOS, ES DECIR:

$$F_s(i\omega) = \left[\frac{F(i\omega) * \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)}{2\pi} \right] \text{----- (6.3)}$$

DONDE $\left[\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right]$ Y SUSTITUYÉNDOLO EN (6.3) SE TIENE

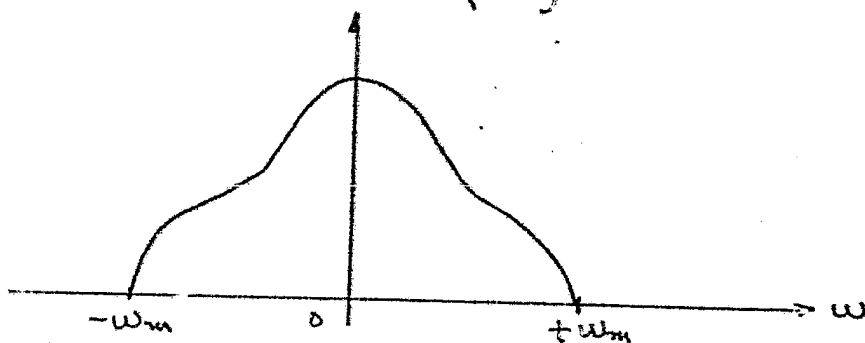
$$F_s(i\omega) = \frac{1}{T} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(i\omega) * \delta(\omega - n\omega_0) \right] = \text{----- (6.3a)}$$

$$= \frac{1}{T} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0) \right] \text{----- (6.4)}$$

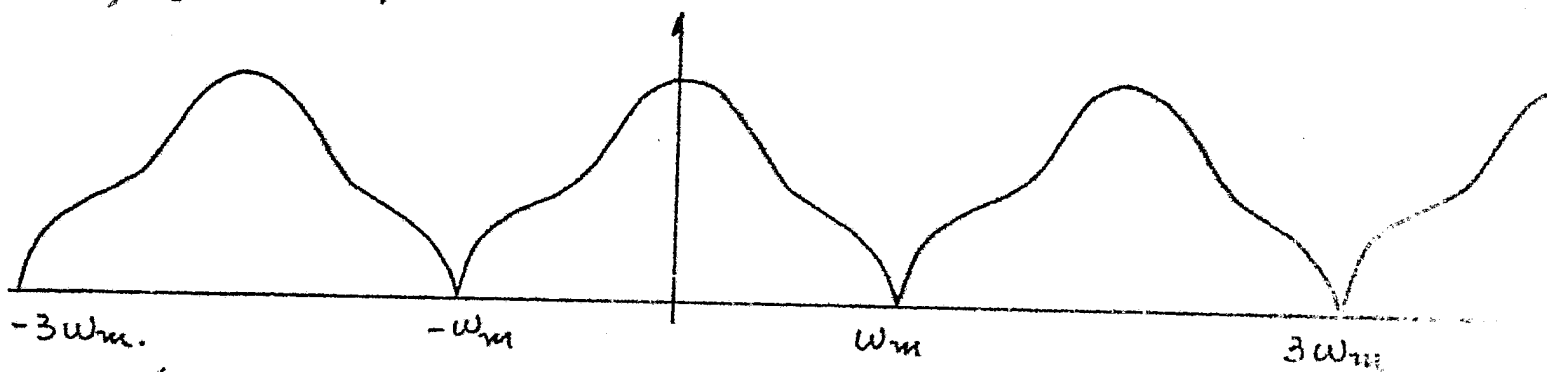
EL MIEMBRO DERECHO DE (6.3a) REPRESENTA LA FUNCIÓN $F(i\omega)$ REPETIDA CADA $[\omega_0] \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$. SI EL ANCHO DE BANDA DE LAS FRECUENCIAS QUE NO SON CERO EN $F(i\omega)$ ES MENOR QUE EL ESPACIAMIENTO ENTRE LAS REPETICIONES DE $F(i\omega)$; ES DECIR, $[2\omega_m \leq \omega_0]$, ENTONCES DICHAS REPETICIONES DE $F(i\omega)$ NO SE TRASAPARAN. O SEA, $F(i\omega)$ SE REPETIRÁ REPETIDAMENTE EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA SIN TRASAPARSE, SUPONIENDO QUE $[\omega_0 \geq 2\omega_m]$, Y ESTO IMPLICA QUE:

$$\frac{2\pi}{T} \geq 2(2\pi f_m) \Rightarrow \frac{1}{T} \geq 2f_m \Rightarrow \left[T = \Delta t = \frac{1}{2f_m} \right] \text{----- (6.5)}$$

el espectro de amplitudes $|F(i\omega)|$ de una forma de onda de banda limitada se muestra en la figura [77]:



Para propósitos de análisis se puede inferir que es una parte de un espectro periódico de $F_p(i\omega)$ que sólo va de $[-\omega_m$ a $+\omega_m]$; o sea, es una parte de:



Puesto que $F_p(i\omega)$ es periódica con período $[T = 2\omega_m]$ se puede escribir en series de Fourier como:

$$F_p(i\omega) = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k \omega}{2\omega_m}} \right] \quad \text{--- (6)}$$

donde

$$D_k = \left[\frac{1}{2\omega_m} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} F_p(i\omega) e^{-i \frac{2\pi k \omega}{2\omega_m}} d\omega \right] \quad \text{--- (7)}$$

y dado que $F(i\omega) = F_p(i\omega)$ para $-\omega_m < \omega < \omega_m$, entonces

$$D_k = \left[\frac{1}{2\omega_m} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} F(i\omega) e^{-i \frac{2\pi k \omega}{2\omega_m}} d\omega \right] \quad \text{--- (8)}$$

pero de la definición de $F(i\omega)$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(i\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{--- (9)}$$

y como $f(t)$ es de banda limitada entonces

$$f(t) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \quad \text{--- (10)}$$

y para un f tipo pasivarse $\left[f = \frac{-\pi k}{\omega_m} \right]$ en (6.8a):

$$f\left(\frac{-\pi k}{\omega_m}\right) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} F(i\omega) e^{i\omega\left(\frac{-\pi k}{\omega_m}\right)} d\omega \right] \text{----- (6.8B)}$$

Multiplicando ambos lados de (6.8B) por $\left[\frac{\pi}{\omega_m} \right]$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\omega_m} f\left(\frac{-\pi k}{\omega_m}\right) &= \left[\frac{\pi}{\omega_m} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} F(i\omega) e^{i\omega\left(\frac{-\pi k}{\omega_m}\right)} d\omega \right] = \\ &= \left[\frac{1}{2\omega_m} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} F(i\omega) e^{-i\frac{\pi k \omega}{\omega_m}} d\omega \right] \text{----- (6.8c)} \end{aligned}$$

DE ESTA MANERA, y comparando (6.8c) con (6.7) SE OBSERVA:

$$\mathbb{D}_{+k} = \left[\frac{1}{2\omega_m} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} F(i\omega) e^{-i\frac{\pi k \omega}{\omega_m}} d\omega \right] \text{----- (6.9)}$$

DE DONDE (6.9) NO ES EL COMPLEJO DE \mathbb{D}_k EXPRESADO EN (6.7)

POR OTRA PARTE, SI $\frac{\pi k}{\omega_m} = \frac{\pi k}{2\pi f_m} = \left[\frac{k}{2f_m} \right]$ y SI $[k=1]$ ENTONCES

$$\left[\frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{2f_m} \right]; \quad \Delta t = \frac{1}{2f_m}; \quad \Delta t = \frac{\pi}{\omega_m}; \quad \text{por lo tanto}$$

EN (6.8c):

$$\frac{\pi}{\omega_m} f(-k \Delta t) = \mathbb{D}_{+k}; \quad \mathbb{D}_{-k} = \left[\frac{\pi}{\omega_m} f(k \Delta t) \right] \text{----- (6.10)}$$

ESTA ECUACION DEMUESTRA EL TEOREMA DE MUESTREO PUES QUE $f(k \Delta t)$ ES LA MUESTRA DE $f(t)$ A TIEMPO $[k \Delta t]$ y DE ESTE MODO, LAS \mathbb{D}_k 'S ESPECIFICAN ÚNICA y COMPLETAMENTE A $F(i\omega)$, TAMBIÉN ESPECIFICAN A $f(t)$.

EL TEOREMA IMPLICA QUE UNA FUNCION DE BANDA LIMITADA PUEDE SER TRANSMITIDA SIN DISTORSION SI SOLAMENTE LAS MUESTRAS UNIFORMES SON TRANSMITIDAS.

A CONTINUACION SE VERA COMO RECONSTRUIR UNA SEÑAL A PARTIR DE LAS MUESTRAS UNIFORMES.

6.2 RECONSTRUCCIÓN DE LA SEÑAL A PARTIR DE LAS MUESTRAS UNIFORMES.-

EN LA BANDA $|w| \leq w_m$, EL ESPECTRO DE $f(t)$ ES IDENTICO A $F_p(iw)$, O

SEA,

$$F_p(iw) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{ik\Delta t w} = \sum_{\infty}^{-\infty} D_{-k} e^{-ik\Delta t w} =$$

$$= \left[\sum_{\infty}^{-\infty} \frac{\pi}{w_m} f(k\Delta t) e^{-ik\Delta t w} \right] \text{----- (6.11)}$$

SUSTITUYENDO (6.11) EN (6.8A) SE TENDRÁ:

$$f(t) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-w_m}^{w_m} \frac{\pi}{w_m} \sum_{\infty}^{-\infty} f(k\Delta t) e^{-ik\Delta t w} e^{iwt} dw \right] \text{----- (6.12)}$$

E INTERCAMBIANDO LA SUMATORIA POR LA INTEGRAL, ENTÓNCEES

$$f(t) = \left[\sum_{\infty}^{-\infty} f(k\Delta t) \int_{-w_m}^{w_m} \frac{e^{i(t-k\Delta t)w}}{2w_m} dw \right] =$$

$$= \sum_{\infty}^{-\infty} f(k\Delta t) \left[\frac{1}{i2w_m(t-k\Delta t)} e^{i(t-k\Delta t)w} \right]_{-w_m}^{w_m} =$$

$$= \sum_{\infty}^{-\infty} f(k\Delta t) \left[\frac{1}{i2w_m} \frac{e^{i(t-k\Delta t)w_m} - e^{-i(t-k\Delta t)w_m}}{t-k\Delta t} \right] =$$

$$= \sum_{\infty}^{-\infty} f(k\Delta t) \frac{\text{sen} \frac{(t-k\Delta t)w_m}{(t-k\Delta t)w_m}}{(t-k\Delta t)w_m} = \sum_{\infty}^{-\infty} f(k\Delta t) \text{Sa} [w_m(t-k\Delta t)]$$

$$f(t) = \sum_{\infty}^{-\infty} f(k\Delta t) \text{Sa} [w_m(t-k\Delta t)] \text{----- (6.13)}$$

6.3 TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER.-

SUPÓNGASE QUE SE APROXIMA LA TRANSFORMADA DE FOURIER CON UNA SUMATORIA, ES DECIR,

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) e^{-i\omega n\Delta t} \Delta t \approx \tilde{F}(i\omega) \quad (6.14)$$

ESTO APROXIMACIÓN EQUIVALE A LA REGLA TRAPEZOIDAL DE SIMPSON.
 POR OTRO LADO, RECUÉRDASE QUE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN DISCRETA TIENE ESPECTRO PERIÓDICO.

SI SE CAS/USA

$$\tilde{F}(i\omega + i \frac{2\pi}{\Delta t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) e^{-i(\omega + \frac{2\pi}{\Delta t})n\Delta t} \Delta t \quad (6.15)$$

Y SEPARANDO

$$\tilde{F}(i\omega + i \frac{2\pi}{\Delta t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) e^{-i\omega n\Delta t} e^{-i \frac{2\pi}{\Delta t} n\Delta t} \Delta t \quad (6.15a)$$

PERO SI EN (6.15a)

$$e^{-i 2\pi n} = \cos 2\pi n - i \sin 2\pi n = 1, \text{ ENTONCES}$$

$$\tilde{F}(i\omega + i \frac{2\pi}{\Delta t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) e^{-i\omega n\Delta t} \Delta t \quad (6.15b)$$

DONDE SE VE QUE $\tilde{F}(i\omega)$ ES PERIÓDICA CON PERIÓDO $[T = \frac{2\pi}{\Delta t}]$; PERO EN GENERAL $F(i\omega)$ NO ES PERIÓDICA.

AHORRA, LA FUNCIÓN MUESTREADA SERÁ:

$$f_s(t) = \left[f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \right] \quad (6.16)$$

EMPLEANDO LA CONVOLUCIÓN EN LA FRECUENCIA

$$F_s(i\omega) = \mathcal{F}\{f_s(t)\} = \frac{\mathcal{F}\{f(t)\} * \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t)\right]}{2\pi} =$$

$$= \frac{F(i\omega) * \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)}{2\pi}; \text{ y como } \omega_0 = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

$$F_s(i\omega) = \left[\frac{F(i\omega) + \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)}{2\pi} \right] = F(i\omega) * \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

Y FINALMENTE:

$$F_s(i\omega) = \left[\frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0) \right] \quad (6.17)$$

OTRA FORMA DE OBTENER LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCION MUESTREADA, EXPRESADA EN (6.16) ES:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f_s(t)\} &= \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) \delta(t-n\Delta t)\right] = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) \mathcal{F}\{\delta(t-n\Delta t)\} = \\
 \mathcal{F}\{f_s(t)\} &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) e^{-i\omega n\Delta t} \right] \text{-----} (6.18)
 \end{aligned}$$

IGUALANDO (6.18) CON (6.17) SE TIENE QUE

$$F_s(i\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) e^{-i\omega n\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0) \text{-----} (6.19)$$

LUEGO, COMPARANDO (6.19) CON (6.15B)

$$\tilde{F}(i\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) e^{-i\omega n\Delta t} \Delta t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0) \text{-----} (6.20) \Leftrightarrow \Delta t = 1$$

CONCLUYENDO: COMO PUEDE VERSE EN (6.20), $\tilde{F}(i\omega) \equiv F_s(i\omega)$ SÓLO, EXCLUSIVAMENTE EN EL CASO DE QUE $\Delta t = 1$ EN LA EXPRESIÓN (6.19) SE APERCIA QUE LA T. DE F. "CONTINUA" $\tilde{F}(i\omega)$ COMPARADA CON LA DISCRETA (6.20) $\tilde{F}(i\omega)$ ES $\left[\frac{1}{\Delta t}\right]$ EXCEPTO EN $\Delta t = 1$. POR ESTAS CIRCUNSTANCIAS ES NECESARIO NORMALIZAR NUESTRO MUESTREO CUANDO SE TENGA UN PROBLEMA REAL.

EN LA PRÁCTICA, $f(t)$ ES FINITA, POR LO TANTO

$$\tilde{F}(i\omega) = \left[\sum_{n_1}^{n_2} f(n\Delta t) e^{-i\omega n\Delta t} \Delta t \right] \text{-----} (6.21)$$

6.4 TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER DISCRETA:

SI PARA EL CASO CONTINUO

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(i\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega; \text{ ENTONCES}$$

PARA EL CASO DISCRETO:

$$\tilde{f}(t) = \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(m\Delta\omega) e^{im\Delta\omega t} \Delta\omega \right] \text{-----} (6.22)$$

EN DONDE $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ ES EL PERIODO DE MUESTREO EN $[\omega]$

PROCEDIENDO DE LA MISMA MANERA QUE EN $\tilde{F}(\omega)$, SE ENCUENTRA QUE $\tilde{f}(t)$ ES PERIÓDICA CON PERIODO $\left[T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right]$ Y QUE $\tilde{f}(t)$

EXPRESADA POR (6.22) ES SEMEJANTE A $f(t)$; ES DECIR:

$$\tilde{f}(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT) ; \left[T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right] \right] \text{----- (6.23)}$$

SUPÓNGASE AHORA QUE $f(n\Delta t)$ SON "N" MUESTRAS DE UNA FUNCIÓN DEL TIEMPO $f(t)$; DE MODO QUE LA FUNCIÓN DEL TIEMPO MUESTREADA SERÁ:

$$f_s(t) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} f(t) \delta(t - n\Delta t) \right] \text{----- (6.24)}$$

Y EL ESPECTRO:

$$F_s(i\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) e^{-i\omega n\Delta t} = \tilde{F}(i\omega) \text{----- (6.25)}$$

SI AHORA SE MUESTREA $F_s(i\omega)$ N VECES, SE OBTIENE LA EXPRESIÓN PARA $F_s(m\Delta\omega)$:

$$F_s(m\Delta\omega) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) e^{-im\Delta\omega n\Delta t} ; m=0, 1, 2, \dots, N-1 \right] \text{----- (6.26)}$$

ESTA EXPRESIÓN ES LA LLAMADA "TRANSFORMADA DISCRETA-DISCRETA DE FOURIER". DE ESTA MANERA, DADA UNA SECUENCIA DE MUESTRAS $f(n\Delta t)$, SE OBTIENE EL ESPECTRO MUESTREADO DE ESTAS MUESTRAS $F_s(m\Delta\omega)$ EN LA FORMA DADA POR (6.26).

EL INTERVALO DE MUESTREO EN FRECUENCIA SE ELIGE DE ACUERDO CON:

$$\Delta\omega = \left[\frac{2\pi}{N\Delta t} \right] \text{----- (6.27)}$$

LOS VALORES MUESTRA $f(n\Delta t)$ SE PUEDEN OBTENER DEL ESPECTRO MUESTREADO $F_s(m\Delta\omega)$ MULTIPLICANDO (6.26) POR $\left[e^{im\Delta\omega n\Delta t}\right]$ Y SUMANDO SOBRE $[m]$. ASI, LA ECUACION (6.26) SE CONVIERTE EN:

$$\tilde{f}(n\Delta t) = \sum_{m=0}^{N-1} F_s(m\Delta\omega) e^{im\Delta\omega n\Delta t} =$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(l\Delta t) &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) e^{-im\Delta\omega n\Delta t} e^{im\Delta\omega l\Delta t} = \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) e^{i\Delta\omega\Delta t m(l-n)} \right] \text{----- (6.28)} \end{aligned}$$

y si se sabe que

$$\sum_{k=0}^N \alpha^k = \begin{cases} \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha} & ; \alpha \neq 1 \\ N+1 & ; \alpha = 1 \end{cases}$$

entonces

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{i\Delta\omega\Delta t m(l-n)} = \begin{cases} 0 & ; l \neq n \\ N & ; l = n \end{cases} \text{----- (6.29)}$$

El miembro derecho de (6.28) se puede evaluar empleando (6.29). Intercambiando la suma sobre [m] y [n] se tiene que

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\Delta\omega\Delta t m(l-n)} = \sum_{m=0}^{N-1} F_s(m\Delta\omega) e^{im\Delta\omega l\Delta t}$$

El resultado de esta sumatoria es: [N] para $l=n$ y [cero] para otros casos en la sumatoria interna; mientras que en la sumatoria externa solamente es un término distinto de cero; en $l=n$. De esta manera (6.28) se puede escribir como:

$$\sum_{m=0}^{N-1} F_s(m\Delta\omega) e^{im\Delta\omega l\Delta t} = [f(l\Delta t) \cdot N] \text{----- (6.28a)}$$

Así, se tiene el par de fórmulas dadas en (6.26) y (6.28a)

$$F_s(m\Delta\omega) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) e^{-im\Delta\omega n\Delta t} \right] \text{----- (6.30)}$$

$$f(l\Delta t) = \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_s(m\Delta\omega) e^{im\Delta\omega l\Delta t} \right] \text{----- (6.31)}$$

de donde (6.31) es la expresión que representa la "TRANSFORMADA INVERSA DISCRETA DE FOURIER".

6.5 PROCESAMIENTO DE SEÑALES DE TIEMPO LIMITADO.

El procesamiento para la extracción de la señal a partir de la información total involucra operaciones con formas de onda periódicas, es decir, si definimos a la información total $[P(t) = s(t) + n(t)]$, se tiene que $s(t)$ es la "señal" y $n(t)$ es el "ruido".

$P(t)$ tendrá una duración que podemos definir de $[t=t_0]$ a $[t=t_0+T]$, y que para fines prácticos podrá ser $[t_0=0]$ o bien $[t_0=-T/2]$.

6.6 FORMAS DE ONDA NO COHERENTES.

A partir de este momento se considerará que la "señal" y el "ruido" son formas de onda no coherentes de acuerdo con la siguiente definición: Dos formas de onda periódicas $s(t)$ y $n(t)$ con período T , se dice que no son coherentes cuando el producto del promedio (en un período) de $n(t)$ y $s(t-\tau)$ es igual al valor promedio del producto $[n(t)s(t-\tau)]$, para todo τ .

Esto es, $n(t)$ y $s(t)$ son no coherentes, si para todo τ :

$$\frac{1}{T} \int_0^T n(t) dt \times \frac{1}{T} \int_0^T s(t-\tau) dt = \left[\frac{1}{T} \int_0^T n(t) \cdot s(t-\tau) dt \right] \text{----- (6.32)}$$

A causa de la periodicidad asumida para $n(t)$ y $s(t)$, es evidente que si la ecuación (6.32) es válida para $\tau \in [0, T)$, es válida para todos los valores de τ .

Considérese el siguiente ejemplo: sea $[v(t)]$ un voltaje, y $[i(t)]$ una corriente en las terminales de un circuito lineal. Obsérvese que $[v(t)]$ y $[i(t)]$ son periódicas con período T , entonces $[v(t) \times i(t)]$ representa la potencia de entrada $[p(t)]$ como una función de tiempo, y que

$$\frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt = \text{potencia de entrada promedio}$$

si $v(t)$ e $i(t)$ son periódicas, se pueden expandir en series de Fourier:

$$v(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} V_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \alpha_k\right) \quad ; \quad y$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \beta_n\right)$$

por lo tanto, recordando del capítulo II:

$$\frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k I_k \cos(\alpha_k - \beta_k);$$

EN FORMA SIMILAR

$$i(t-\tau) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} - \frac{2\pi n \tau}{T} + \beta_n\right)$$

$$y \quad \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t-\tau) dt = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k I_k \cos\left(\alpha_k - \beta_k + \frac{2\pi k \tau}{T}\right)$$

PUESTO QUE LOS VALORES PROMEDIO DE $v(t)$ E $i(t)$ SON $[V_0]$ E $[I_0]$ RESPECTIVAMENTE, SE OBSERVA QUE DE ACUERDO CON (6.32) $v(t)$ E $i(t)$ SON NO COHERENTES, SI PARA TODO τ :

$$V_0 I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t-\tau) dt;$$

lo cual requiere que:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} V_k I_k \cos\left(\alpha_k - \beta_k + \frac{2\pi k \tau}{T}\right) \equiv \text{CERO} \right] \text{ PARA TODO } \tau \quad (6.33)$$

LA CONDICIÓN (6.33) PUEDE SATISFACERSE SI PARA CUALQUIER k , V_k ó I_k ó AMBOS ES CERO; O SI LOS COSENO DE LA ECUACIÓN (6.33) TIENEN VALORES POSITIVOS Y NEGATIVOS DE LA MAGNITUD QUE LA SUMA ES SIEMPRE CERO.

EN EL ESTUDIO DE POTENCIA DE ENTRADA PROMEDIO SE TRABAJA CON EL CASO PARTICULAR DE NO COHERENCIA EN QUE $[\tau = 0]$, DE MANERA QUE LA POTENCIA DE ENTRADA ES IGUAL AL VALOR PROMEDIO $[V_0 I_0]$ CUANDO TODAS LAS COMPONENTES SENOSIDALES DE VOLTAJE ESTÉN EN CUADRATURA CON LA CORRIENTE DE CORRIENTE $[\alpha_k - \beta_k = \pm \frac{\pi}{2}]$.

PARA INCOHERENCIA EN GENERAL, SE REQUIERE QUE A PESAR DE CUALQUIER RETRASO $[\tau]$ INTRODUCIDO POR $[v]$ ó $[i]$, EL VALOR PROMEDIO $[v(t) i(t-\tau)]$ SEA SIEMPRE $[V_0 I_0]$.

TANTO EN SISTEMAS DE COMUNICACIÓN COMO EN SISMOLOGÍA, ES CONVENIENTE ASUMIR QUE $s(t)$ Y $x(t)$ TENGAN VALOR PROMEDIO CERO.

(EN LA PRÁCTICA SE DEBE HACER CIERTO PROCESAMIENTO PARA LOGRAR LA FIN. EL PROCESAMIENTO NO SE INCLUYE EN ESTA DISCUSIÓN).

O SEA, QUE $s(t)$ Y $x(t)$ SON NO COHERENTES SI:

$$\frac{1}{T} \int_0^T s(t) x(t-\tau) dt \equiv 0; \quad \forall \tau$$

LA NATURALEZA DE RUIDO $x(t)$ ES TA QUE A PESAR DE DESPLAZAMIENTO τ EN $x(t-\tau)$, LA DISTRIBUCION DE LOS ANGULOS DE FASE $\alpha_k = (\beta_k - \frac{2\pi k \tau}{T})$ SATISFACE EL REQUERIMIENTO:

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k S_k \cos(\alpha_k - \beta_k + \frac{2\pi k \tau}{T}) \equiv 0$$

DONDE $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} N_k \angle \alpha_k \right]$ y $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} S_k \angle \beta_k \right]$ SON LAS AMPLITUDES ARMONICAS COMPLEJAS DE $x(t)$ y $s(t)$ RESPECTIVAMENTE.

EN LA PRÁCTICA, AQUELLOS FENÓMENOS REFERIDOS COMO RUIDO SON (APROXIMADAMENTE) NO COHERENTES CON SEÑALES ÚTILES.

PROPIEDAD DE SUPERPOSICION DE SEÑALES NO COHERENTES.-

AHORA SE DEMUESTRA QUE EL VALOR CUADRÁTICO MEDIO DE LA SUMA DE DOS SEÑALES PERIÓDICAS NO COHERENTES, ES LA SUMA DE LOS RESPECTIVOS VALORES CUADRÁTICOS MEDIOS DE LAS DOS SEÑALES, CUANDO EL VALOR PROMEDIO DE CADA UNA DE LAS SEÑALES ES CERO.

SEAN LAS SEÑALES $V_a(t)$ y $V_b(t)$ CON VALORES CUADRÁTICOS MEDIOS

$$V_a^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [V_a(t)]^2 dt \quad ; \quad V_b^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [V_b(t)]^2 dt$$

PARA LA SUMA $V(t) = V_a(t) + V_b(t)$; EL VALOR CUADRÁTICO MEDIO ES:

$$V^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [V_a(t) + V_b(t)]^2 dt = V_a^2 + \frac{2}{T} \int_0^T V_a(t) V_b(t) dt + V_b^2$$

SI $V_a(t)$ y $V_b(t)$ SON NO COHERENTES Y TIENEN VALOR PROMEDIO CERO,

$$\frac{1}{T} \int_0^T V_a(t) V_b(t-\tau) dt \equiv 0 \quad ;$$

Y HACIENDO $[\tau=0]$:

$$\int_0^T V_a(t) V_b(t) dt = 0$$

$$\therefore V^2 = [V_a^2 + V_b^2]$$

ES DECIR, LA ENERGIA LIBERADA EN UN PERIODO A LA RESISTENCIA POR LA

SUMA DE DOS SEÑALES NO COHERENTES, ES LA SUPERPOSICION DE LAS ENERGIAS LIBERADAS POR CADA SEÑAL INDIVIDUAMENTE.

6.7 FUNCIONES DE CORRELACION.-

EN LA SECCION ANTERIOR SE DEFINIO QUE $f_1(t)$ Y $f_2(t)$ SON NO COHERENTES SI:

$$\int_0^T f_1(t) f_2(t-\tau) dt \equiv 0.$$

CONSIDERENSE AHORA FORMAS DE ONDA LAS CUALES NO SON COHERENTES, Y SE INTRODUCIRA A CONTINUACION UNA FUNCION LA CUAL TRATA DE DETERMINAR CUANTO $f_1(t)$ Y $f_2(t)$ DEPENDE UNA DE LA OTRA.

ESTA FUNCION ES LA DENOMINADA "FUNCION CROSS-CORRELACION".

PARA FUNCIONES PERIODICAS, SE DEFINIRA UNA FUNCION PROMEDIO DE CROSS-CORRELACION COMO SIGUE:

$$\bar{\Psi}_{12}(\tau) = \left[\frac{1}{T} \int_0^T f_1(t) f_2(t-\tau) dt \right] \text{--- --- --- (6.34)}$$

PARA LA GENERALIDAD DE LAS FORMAS DE ONDA, LA FUNCION PROMEDIO DE CROSS-CORRELACION SE DEFINE COMO EL LIMITE:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t-\tau) dt = \bar{\Psi}_{12}(\tau) \text{--- --- --- (6.34A)}$$

LA CUAL, PARA FUNCIONES DEL TIPO DEL PULSO UNITARIO, DEFINE A LA FUNCION CROSS-CORRELACION COMO:

$$\Psi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t-\tau) dt \text{--- --- --- (6.34B)}$$

COMO PARA FORMAS DE ONDA NO COHERENTES, LA INTEGRAL EN LA EXPRESION (6.34), (6.34A) O (6.34B) ES CERO PARA TODA τ , ENTONCES, PARA ESTAS FORMAS DE ONDA LA FUNCION CROSS-CORRELACION ES CERO.

POR ESTA RAZON, EL TERMINO (O EXPRESION): "NO CORRELACIONADO" ES UTILIZADO COMO UN SINONIMO DE "NO COHERENCIA".

SI $\left[\bar{\Psi}_{12}(\tau) \neq 0 ; \forall \tau \right]$ LA FUNCION PROMEDIO DE CROSS-CORRELACION ES CONSIDERADA COMO UNA MEDIDA DE LA CORRELACION O "INTERDEPENDENCIA" ENTRE $f_1(t)$ Y $f_2(t)$. PARA ILUSTRAR ESTO CONSIDERE UNA CORRIENTE $i(t)$ CON COMPONENTES (i_1) Y (i_2) EN UNA RESISTENCIA UNITARIA.

PUESTO QUE

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t),$$

LA ENERGÍA LIBERADA A LA RESISTENCIA EN EL TIEMPO $[T]$ ES:

$$\begin{aligned} \int_0^T [i(t)]^2 dt &= \int_0^T [i_1(t)]^2 dt + \int_0^T [i_2(t)]^2 dt + 2 \int_0^T i_1(t) i_2(t) dt \\ &= \int_0^T [i_1(t)]^2 dt + \int_0^T [i_2(t)]^2 dt + 2T \bar{\varphi}_{12}(0) \end{aligned}$$

SE APRECIA QUE LA ENERGÍA ES AQUELLA QUE LAS CORRIENTES LIBERAN INDEPENDIENTEMENTE MAS EL TÉRMINO $2T \bar{\varphi}_{12}(0)$, DESCRIBIENDO EL EFECTO QUE LAS DOS CORRIENTES PRODUCEN CONJUNTAMENTE.

EL TÉRMINO $[2T \bar{\varphi}_{12}(0)]$ ES DOS VECES EL VALOR DE LA CORRELACIÓN CRUZADA O "CROSS-CORRELACIÓN", ENTRE i_1 E i_2 EN $[\tau=0]$.

PARA ILUSTRAR PORQUÉ EL RETRASO $[\tau]$ ES INTRODUCIDO EN LA DEFINICIÓN DE CROSS-CORRELACIÓN, CONSIDÉRESE PRIMERO EL CASO ESPECIAL EN QUE $f_1(t) = \sin t$ y $f_2(t) = \cos t$.

SABIENDO QUE EL PERÍODO ES 2π , SE OBSERVA QUE:

$$\int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt \equiv 0$$

PERO

$$\begin{aligned} 2\pi \bar{\varphi}_{12}(\tau) &= \int_0^{2\pi} \sin t \cos(t-\tau) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \cos \tau dt + \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sin \tau dt = \\ &= [\text{CERO} + \pi \sin \tau] \end{aligned}$$

DE MODO QUE $\bar{\varphi}_{12}(\tau) = \frac{1}{2} \sin \tau$

INTUITIVAMENTE SE ESPERA UNA FUERTE CORRELACIÓN ENTRE $[\sin t]$ y $[\cos t]$. EN EL EJEMPLO ANTERIOR SE VE COMO EL TIEMPO DE RETARDO $[\tau]$ INTRODUCE UN PARÁMETRO QUE "DESFAZA" $f_2(t)$, DE MANERA QUE COMPARAMOS $f_1(t)$ CON LAS VERSIONES DESFAZADAS DE $f_2(t)$.

COMO SEGUNDO EJEMPLO CONSIDERE $f_1(t)$ y $f_2(t)$ COMO SE MUESTRAN EN LAS FIGURAS [78] y [79] RESPECTIVAMENTE. DE LAS FIGURAS SE VE QUE $f_2(t)$ ES UNA RÉPLICA RAZONABLE DE $f_1(t)$.

SI SE CALCULA EL ERROR $[e(t) = f_1(t) - f_2(t)]$, ÉSTE PUEDE SER CONSIDERABLE.

SIN EMBARGO, SI DESPLAZAMOS f_2 POR $(t = \tau)$ COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA [80], EL ERROR SE REDUCE Y LA CORRELACION ES DETECTADA. ES DECIR, EN

$$\bar{\Psi}_{f_1 f_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t) f_2(t-\tau) dt$$

LA VARIABLE $[\tau]$ PUEDE SER CONSIDERADA COMO EL PARÁMETRO "RASTREADOR", EL CUAL EVENTUALMENTE REVELA EL DESPLAZAMIENTO ÓPTIMO PARA LA MÁXIMA CORRELACION O PARECIDO ENTRE f_1 Y f_2 .

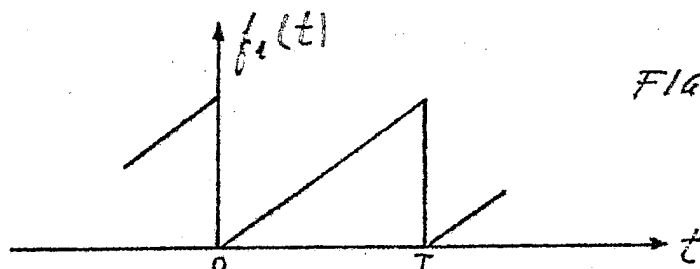


FIGURA [78]

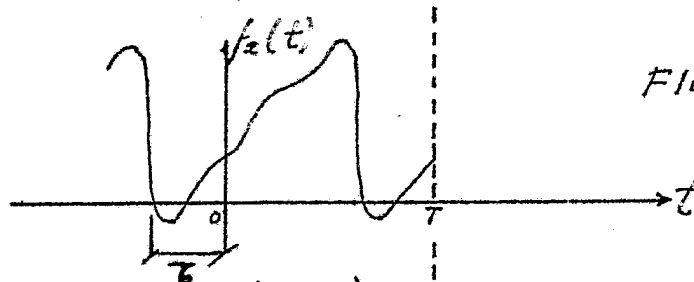


FIGURA [79]

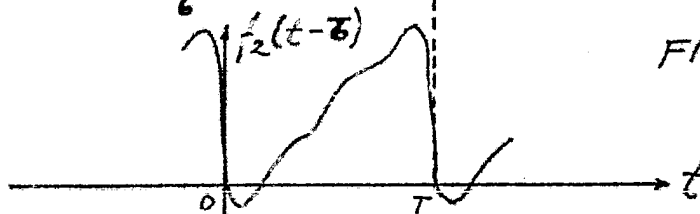


FIGURA [80].

FUNCIÓN DE AUTO-CORRELACION:

SI f_1 Y f_2 SON FUNCIONES IDENTICAS E IGUALES A $f(t)$, LA FUNCION PROMEDIO DE CORRELACION ES:

$$\bar{\Psi}_{f f}(\tau) = \left[\frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t-\tau) dt \right] \text{-----} \quad (6.35)$$

ÉSTA ES LA LLAMADA "FUNCION DE AUTO-CORRELACION PROMEDIO" O "FUNCION PROMEDIO DE AUTO-CORRELACION" DE $f(t)$. O SEA, QUE LA NOTACION $[\bar{\Psi}_{f f}(\tau)]$

ES USADA PARA DENOTAR LA "FUNCION DE CROSS-CORRELACION PROMEDIO" O "FUNCION PROMEDIO DE CROSS-CORRELACION" ENTRE $f(t)$ Y $g(t)$:

$$\bar{\Psi}_{f g}(\tau) = \left[\frac{1}{T} \int_0^T f(t) g(t-\tau) dt \right] \text{-----} \quad (6.36)$$

6.8 CONVOLUCION Y CORRELACION.-

SEGURAMENTE HA NOTADO UNA DUBLICIDAD O SIMILARIDAD ENTRE LA FUNCION DE CORRELACION Y LA INTEGRAL DE CONVOLUCION.

DE LA DEFINICION DE CONVOLUCION, EXPRESADA EN (5.7), Y HACIENDO (t=z) EN ESA ECUACION SE TIENE:

f(z) = integral from -infinity to infinity of f1(t) f2(z-t) dt

EN ESTA DEFINICION, f1 y f2 NO PUEDEN SER LIMITADAS EN EL TIEMPO NI PERIODICAS.

DEFINIENDO AHORA LA FUNCION CONVOLUCION DE f1 y f2, DESIGNADA POR psi12(z) COMO:

psi12(z) = [integral from -infinity to infinity of f1(t) f2(z-t) dt] ----- (6.37)

Y COMPARESE LA FUNCION DE CORRELACION phi12(z); EXPRESADA EN (6.34B):

phi12(z) = [integral from -infinity to infinity of f1(t) f2(t-z) dt] ----- (6.38)

RECORDANDO LAS ECUACIONES (5.12) y (5.13):

F^-1 [F1(iw) F2(-iw)] = integral from -infinity to +infinity of f1(z) f2(z-t) dz = 1/2pi integral from w=-infinity to +infinity [integral from z=-infinity to +infinity of f1(z) f2(z-t) dz] e^iwt dw

INTERCAMBIANDO LAS VARIABLES [t] y [z] QUEDA:

F^-1 [F1(iw) F2(-iw)] = integral from -infinity to +infinity of f1(t) f2(t-z) dt ; O BIEN

F [psi12(z)] = F1(iw) F2(-iw) = integral from -infinity to +infinity of phi12(z) e^-iwb dz

INTERCAMBIANDO [t] y [z] EN LA ECUACION (5.11) SE TIENE

F [psi12(z)] = F1(iw) F2(iw)

LA DISCUSION PRECEDENTE MUESTRA QUE

F [psi12(z)] = F1(iw) F2(-iw) ----- (6.39)

Y DE LA DEFINICION DE phi12(z) SE TIENE:

$$\mathcal{F}\{\psi_{12}(\tau)\} = F_1(i\omega) F_2(i\omega) \text{ --- --- --- --- --- (6.40)}$$

La diferencia entre correlación y convolución se ilustra mejor manejando los conceptos de "autocorrelación" y "autoconvolución", como sigue: de la ecuación (6.39) se tiene que la "transformada de Fourier de la función autocorrelación" es:

$$\mathcal{F}\{\psi_{ff}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{ff} e^{-i\omega\tau} d\tau = F(i\omega) F(-i\omega) = |F(i\omega)|^2$$

EN PALABRAS: "la transformada de Fourier de la función autocorrelación es la función densidad de energía $|F(i\omega)|^2$." entonces, el espectro de amplitud de una función puede encontrarse a partir de la función autocorrelación, y viceversa.

de la ecuación (6.40) se tiene que la "transformada de Fourier de la función autoconvolución" es:

$$\mathcal{F}\{\psi_{ff}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = F(i\omega) F(i\omega) = [F(i\omega)]^2$$

EN PALABRAS: "la transformada de Fourier de la función autoconvolución es el cuadrado de la transformada compleja de Fourier; $[F(i\omega)]^2$ " entonces, el espectro complejo puede definirse a través de la función autoconvolución, y sólo el espectro de amplitud está relacionado a la función autocorrelación.

APÉNDICE A.

FORMAS DE LA SERIE DE FOURIER.

A CONTINUACION SE PRESENTAN LAS TRES FORMAS DE LA SERIE DE FOURIER. DE LAS SECCIONES 1.7 Y 2.3 SE TIENE:

i) FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \quad ; \quad D_k = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt$$

ii) FORMA TRIGONOMETRICA (1) DE LA SERIE DE FOURIER:

$$\begin{aligned} \text{SI } f(t) &= D_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} = \\ &= D_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{+\infty} D_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \quad ; \text{ ENTONCES} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 D_k \cos \left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k \right) \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos \left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k \right) \\ &= F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} F_k \cos \left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k \right) \end{aligned}$$

iii) FORMA TRIGONOMETRICA (2) DE LA SERIE DE FOURIER:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{2\pi k t}{T} + B_k \sin \frac{2\pi k t}{T} \right)$$

ANEXO.- FÓRMULAS DE CONVERSION PARA $k=1, 2, 3, \dots$

$$2D_k = C_k e^{i\varphi_k} = C_k \angle \varphi_k \quad ; \quad 2D_k = 2D_k e^{i\varphi_k} \Rightarrow D_k = D_k e^{i\varphi_k}$$

$$C_k = 2D_k = \frac{2D_k}{e^{i\varphi_k}} \quad ; \quad D_k = \frac{1}{2} A_k - i \frac{1}{2} B_k$$

$$\varphi_k = \text{ángulo } D_k = -\arctan \frac{B_k}{A_k} \quad ; \quad C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad ; \quad F_k = \frac{C_k}{\sqrt{2}}$$

$$A_k = 2 \operatorname{Re} [D_k] = C_k \cos \varphi_k \quad ; \quad B_k = -2 \operatorname{Im} [D_k] = -C_k \sin \varphi_k$$

$$C_0 = D_0 = A_0 = F_0 \quad ; \quad B_0 = 0$$

$$D_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \left(\frac{2\pi k t}{T} \right) dt$$

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \left(\frac{2\pi k t}{T} \right) dt \\ A_0 = D_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \end{aligned}$$

APÉNDICE B.

RESUMEN DE LAS CONDICIONES DE SIMETRÍA.

CON REFERENCIA A LA SECCIÓN 2.8 SE TIENE:

a) FUNCIÓN IMPAR - CONDICIONES: $f(t) = -f(-t)$

SERIE DE FOURIER:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)$$

COEFICIENTES DE FOURIER:

$$[A_k = 0]; \quad B_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) dt.$$

b) FUNCIÓN PAR - CONDICIONES: $f(t) = f(-t)$

SERIE DE FOURIER:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \operatorname{cos}\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)$$

COEFICIENTES DE FOURIER:

$$[B_k = 0]; \quad A_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \operatorname{cos}\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) dt; \quad A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt$$

c) FUNCIÓN CON SIMETRÍA DE MEDIA ONDA -

$$\text{CONDICIONES: } f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

SERIE DE FOURIER:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_{2k-1}}{2k-1} \operatorname{cos}\left((2k-1) \frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{B_{2k-1}}{2k-1} \operatorname{sen}\left((2k-1) \frac{2\pi t}{T}\right) \right]$$

COEFICIENTES DE FOURIER:

$$\left. \begin{array}{l} A_{2k-1} \\ B_{2k-1} \end{array} \right\} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \begin{array}{l} \operatorname{cos} \\ \operatorname{sen} \end{array} \left((2k-1) \frac{2\pi t}{T} \right) dt.$$

d) FUNCIÓN IMPAR CON SIMETRÍA DE CUARTO DE ONDA -

$$\text{CONDICIONES: } f(t) = -f(-t) \text{ y}$$

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

SERIE DE FOURIER:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k-1} \sin(2k-1) \frac{2\pi t}{T}$$

COEFICIENTES DE FOURIER:

$$[A_k=0]; \quad B_{2k-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin(2k-1) \frac{2\pi t}{T} dt$$

e) FUNCION PAR CON SIMETRIA DE CUARTO DE ONDA:

CONDICIONES:

$$f(t) = f(-t) \quad ?$$

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

SERIE DE FOURIER:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} \cos(2k-1) \frac{2\pi t}{T}$$

COEFICIENTES DE FOURIER:

$$[B_k=0]; \quad A_{2k-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos(2k-1) \frac{2\pi t}{T} dt$$

* EN EL CASO DE FUNCIONES SIMÉTRICAS PARES E IMPARES, ASÍ COMO CON SIMETRÍA DE CUARTO DE ONDA, LAS FÓRMULAS SIMPLIFICADAS SE APLICAN A LA FORMA REAL DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER; ES DECIR, EN SU FORMA TRIGONOMÉTRICA.

APÉNDICE C

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

A CONTINUACIÓN SE PRESENTAN LAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER, ES NECESARIO ACLARAR QUE SE HARÁ $F(i\omega) = F(\omega)$ PARA UNA MAYOR SIMPLICIDAD DE LAS EXPRESIONES. RECUÉRDASE QUE A PARTIR DEL CAPÍTULO IV SE HIZO $F(i\omega)$ COMO LA EXPRESIÓN QUE REPRESENTA LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

CONSIDÉRESE QUE LAS FUNCIONES SON PERIÓDICAS CON PERIODO $[T]$; y QUE $[a > 0]$ y $\tan^{-1}[b]$, $[t_0]$ y $[\omega_0]$ SON CONSTANTES REALES, CON $n = 1, 2, 3, \dots$ SABIENDO QUE $[\omega_0 = 2\pi/T]$.

$f(t)$	$F(\omega)$
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$f(-t)$	$F(-\omega)$
$f(t-t_0)$	$F(\omega) e^{-i\omega t_0}$
$f(t) e^{i\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
$f\left(\frac{t}{2}\right) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0)$
$f(t) \sin \omega_0 t$	$\frac{1}{2i} F(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2i} F(\omega + \omega_0)$
$f_e(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]$	$\text{Re} [F(\omega)]$
$f_o(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$	$i \text{Im} [F(\omega)]$
$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$	$F(\omega) = \text{Re} [F(\omega)] + i \text{Im} [F(\omega)]$

$f(t)$	$F(\omega)$
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$f'(t)$	$i\omega F(\omega)$
$f''(t)$	$(i\omega)^n F(\omega)$
$\int_{-\infty}^t f(x) dx$	$\frac{1}{i\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$
$-it f(t)$	$F'(\omega)$
$(-it)^n f(t)$	$F^n(\omega)$
$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx$	$F_1(\omega) F_2(\omega)$
$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega-y) dy$
$e^{-at} u(t)$	$\left[\frac{1}{i\omega + a} \right]$
$e^{-a t }$	$\left[\frac{2a}{a^2 + \omega^2} \right]$
e^{-at^2}	$\left[\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \right]$
$P_a(t) = \begin{cases} 1 & ; t < \frac{a}{2} \\ 0 & ; t > \frac{a}{2} \end{cases}$	$a \frac{\sin\left(\frac{\omega a}{2}\right)}{\left(\frac{\omega a}{2}\right)}$
$\frac{\sin at}{\pi t}$	$P_{2a}(\omega)$
$t e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(i\omega + a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(i\omega + a)^n}$
$e^{-at} \sin bt u(t)$	$\left[\frac{b}{(i\omega + a)^2 + b^2} \right]$

$f(t)$	$F(\omega)$
$e^{-at} \cos bt u(t)$	$\frac{i\omega + a}{(i\omega + a)^2 + b^2}$
$\left[\frac{1}{a^2 + t^2} \right]$	$\left[\frac{\pi}{a} e^{-a/ \omega } \right]$
$\left[\frac{\cos bt}{a^2 + t^2} \right]$	$\frac{\pi}{2a} \left[e^{-a/ \omega-b } + e^{-a/ \omega+b } \right]$
$\frac{\sin bt}{a^2 + b^2}$	$\frac{\pi}{2ai} \left[e^{-a/ \omega-b } - e^{-a/ \omega+b } \right]$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
$\delta'(t)$	$[i\omega]$
$\delta^n(t)$	$(i\omega)^n$
$u(t)$	$\left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \right]$
$u(t-t_0)$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t_0}$
1	$2\pi \delta(\omega)$
t	$2\pi i \delta'(\omega)$
t^n	$2\pi \cdot^n \delta^n(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$-i \pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{\pi}{2i} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$

f(t)

F(w)

cos w_0 t u(t)

$$\frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

t u(t)

$$i\pi \delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

t^{-1}

$$i\pi - 2\pi i u(\omega)$$

t^{-n}

$$\left[\frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} [\pi i - 2\pi i u(\omega)] \right]$$

sgn t

$$\left[\frac{2}{i\omega} \right]$$

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$\omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

OTRAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) g(x) dx$$

RESUMEN.

RESUMIR EL DESARROLLO DEL ANÁLISIS DE FOURIER ES UNA TAREA COMPLICADA DADA SU CONSIDERABLE EXTENSIÓN.

MAS BIEN ME GUSTARÍA RECOMENDAR LA APLICACION DE ESTA TEORÍA AL ANÁLISIS DE SEÑALES GEOFÍSICAS, RELACIONÁNDOLA CON LA CONSTRUCCIÓN, EL ANÁLISIS Y LA INTERPRETACION DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS Y ESTADÍSTICOS RESPECTIVOS.

EXISTEN ECUACIONES MATEMÁTICAS SOBRE MODELOS DE FENÓMENOS GEOFÍSICOS BÁSICOS QUE PERMITEN DARLE APLICACION PRÁCTICA AL ANÁLISIS DE FOURIER Y AL DISEÑO DE FILTROS, TALES COMO REVERBERACIONES, REFLEXIONES MÚLTIPLES, MIGRACION, ETC. ASI PUES, SE RECOMIENDA NUEVAMENTE LA APLICACION DE ESTAS TÉCNICAS DE FOURIER A PROBLEMAS GEOFÍSICOS ESPECÍFICOS.

BIBLIOGRAFIA y REFERENCIAS.

- ANDERSON, T.W., "THE STATISTICAL ANALYSIS OF TIME SERIES", NEW YORK: WILEY, 1971.
- ARFKEN, GEORGE., "MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS", NEW YORK: ACADEMIC PRESS INC., 1970.
- CRAMER, H., "MATHEMATICAL METHODS OF STATISTICS". UPPSALA, SWEDEN: ALMQVIST & WIKSELLS, 1945
- E.T. WHITTAKER y G.N. WATSON, "A COURSE OF MODERN ANALYSIS", 4a. ed., CAMBRIDGE: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1962.
- HAYT, W.H., JR. y J.E. KEMMERLY, "ENGINEERING CIRCUIT ANALYSIS", 2a. ed., NEW YORK: Mc. GRAW HILL BOOK COMPANY, 1971
- HILDEBRAND, F.B., "METHODS OF APPLIED MATHEMATICS", ENGLEWOOD CLIFFS, N.J.: PRENTICE-HALL, 1952
- HSU, P. HWEI, "FOURIER ANALYSIS", NEW YORK: FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO, 1973.
- H.S. JEFFREYS y B.S. JEFFREYS, "METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS", NEW YORK: WILEY, 1970
- DAVID M. y BRENNER E., "ANALYSIS, TRANSMISSION AND FILTERING OF SIGNALS". NEW YORK: Mc. GRAW HILL BOOK CO., 1978
- J. IRVING y N. MULLINEUX, "MATHEMATICS IN PHYSICS AND ENGINEERING", NEW YORK: ACADEMIC PRESS INC., 1959
- P. M. MORSE y H. FESHBACH, "METHODS OF THEORETICAL PHYSICS" (2 Vols.), NEW YORK: Mc. GRAW HILL BOOK COMPANY, 1953
- R. COURANT y D. HILBERT, "METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS, Vol. I. PRIMERA EDICION EN INGLES. NEW YORK: WILEY, 1953.
- "HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS WITH FORMULAS, GRAPHS, AND MATHEMATICAL TABLES". APPLIED MATHEMATICS SERIES, 55 (AMS-55), NATIONAL BUREAU OF STANDARDS, U.S. DEPARTMENT OF COMMERCE, 1954.