# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

"ANALISIS DE FOURIER APLICADO AL CALCULO DE LA CONTINUACION ANALITICA Y SEGUNDA DERIVADA DE LOS CAMPOS GRAVIMETRICO Y MAGNETOMETRICO"

# TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el título de

INGENIERO GEOFISICO

p r e s e n t a n :


JORGE LUIS GUTIERREZ GARCIA

GERARDO RAFAEL CASTREJON VAZQUEZ


México, D. F. 1982

**TESIS CON FALLA DE ORIGEN**

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA

FACULTAD DE INGENIERIA
EXAMENES PROFESIONALES
60-I-25

A los Pasantes señores GUTIERREZ GARCIA JORGE LUIS y
CASTREJON VAZQUEZ GERARDO
P r e s e n t e s .

En atención a su solicitud realtiva, me es grato transcribir a ustedes a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Prof. Ing. Octavio Lázaro Mancilla, para que lo desarrollen como tesis en su Examen Profesional de INGENIERO GEOFISICO.

"ANALISIS DE FOURIER APLICADO AL CALCULO DE LA CONTINUACION ANALITICA Y SEGUNDA DERIVADA DE LOS CAMPOS GRAVIMETRICO Y MAGNETOMETRICO"

Resumen
I. Introducción
II. Métodos convencionales para el cálculo de la continuación analítica y la segunda derivada.
III. Método propuesto. Análisis de Fourier.
IV. Discusión de resultados
V. Conclusiones y recomendaciones
Bibliografía

Ruego a ustedes se sirvan tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberán prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, D.F., a 30 de marzo de 1982
EL DIRECTOR

Ing. Javier Jiménez Espriú

JJE'MRY'mil.

Página.

El objeto del presente trabajo, es el de- obtener expresiones exactas y precisas para calcular la- Continuación Analítica y la Segunda Derivada Vertical de campos anómalos gravimétricos y magnéticos; esto se hace por medio de la expansión en una Serie Doble de Fourier- de la solución de la ecuación diferencial parcial de La- place para campos potenciales.

En este trabajo se presenta el desarrollo matemático de los métodos convencionales de cálculo de - la Continuación Analítica y de la Segunda Derivada; así- como también, los fundamentos teóricos básicos y el desa rrollo matemático del método propuesto.

Se hicieron ejemplos de prueba del método propuesto, en base a estos se encontro: que los resulta- dos obtenidos son excepcionalmente precisos comparados - con los obtenidos por medio de los métodos convenciona-- les.

El método propuesto presenta dos grandes- ventajas sobre los métodos convencionales:

a).- Primera, el ahorro de tiempo de procesamiento- del programa de computación.

b).- Segunda, el método propuesto se puede aplicar- tanto a los campos gravimétricos, como a los - campos magnéticos sin la necesidad de hacer -- cambios en la estructura del programa de compu tación.

# 1. INTRODUCCION.

La búsqueda y obtención de hidrocarburos-así también como la de otros recursos naturales económicamente importantes, ocupa un lugar preponderante en la-economía, no sólo de México, sino de gran parte del mundo. Debido a esto, día con día se están perfeccionando - las técnicas conocidas y desarrollando nuevas técnicas-- para la exploración y explotación de tales recursos natu les.

La prospección gravimétrica y la prospe-- cción magnética, son dos técnicas que se utilizan dentro de la exploración geofísica. La primera, básicamente se-enfoca al estudio de los contrastes de densidad entre -- las rocas del área en estudio; la segunda, tiene sus bases en el estudio de las propiedades magnéticas de las - rocas, tales como: la intensidad total del campo, la suceptibilidad magnética, etc.

La continuación analítica, y la segunda - derivada son operaciones de gran importancia en las pros pecciones antes mencionadas, porque se enfocan a la búsqueda de estructuras geológicas de interés económico.

El operador de continuación analítica, -- calcula valores del campo anómalo a diferentes elevaciones hacia arriba o hacia abajo del plano de observación, con la finalidad de acentuar o reducir los efectos que - causan los cuerpos anómalos.

El operador de Segunda derivada se puede-considerar como un filtro, cuya finalidad es aislar los-efectos anómalos someros del campo en estudio, y delimitar en forma aproximada las fronteras del cuerpo o cuerpos que causan dichos efectos.

Practicamente todos los métodos desarrollados para operadores de continuación analítica y de segunda derivada vertical, están adaptados para manejar los datos (magnéticos o gravimétricos) en forma discreta tomando a estos a espaciamientos regulares dentro de una malla. Se trazan círculos sobre la malla a diferentes radios a partir del origen seleccionado y se obtienen valores promediados de cada uno de los círculos. Finalmente, los valores promediados se multiplican por diferentes juegos de coeficientes (previamente determinados), así es posible encontrar los valores de la continuación analítica y de la segunda derivada vertical.

Peters (1949), adoptó varias técnicas para calcular la continuación analítica y las derivadas verticales, esto lo hizo obteniendo varios juegos de coeficientes para dichos operadores. Más tarde Peters, Henderson y Zietz (1949), obtuvieron un operador de segunda derivada expandiendo el campo dentro de una serie de Fourier-Bessel de orden cero en la vecindad del punto donde la derivada es deseada.

Elkins (1951), desarrolló un método para obtener un operador de segunda derivada a partir de la ecuación:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = - \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right]$$

en donde, gráficamente determinó el valor de:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \text{ , y de } \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \text{ ;}$$

encontrando, posteriormente, un juego de coeficientes numéricos equivalente al método gráfico. Henderson (1960)- obtuvo diferentes juegos de coeficientes para obtener diferentes operadores de continuación analítica y de segunda derivada.

El método que se presenta en este trabajo , está basado en el estudio desarrollado por Bhattacharyya (1965), el cual se fundamenta en el Análisis Bidimensional de Fourier de la ecuación la Lapalce y consiste en: Vestine y Davis (1945), fueron los primeros en -- proponer este método. Más tarde Tsuboi (1959) lo aplicó- a datos reales de gravedad. Danes y Oncley (1962), tomaron un campo teórico y lo expandieron en una serie armónica de dos dimensiones.

La expresión del campo en términos de una Serie Doble de Fourier que se presenta, se aplica al problema de la determinación precisa del campo potencial. Para Magnetometría, es posible calcular el campo potencial para cualquier latitud y cualquier orientación del- vector de magnetización. Para Gravimetría, el cálculo -- del campo potencial sólo toma en cuenta a la componente- vertical del campo gravitacional. En ambos casos, el campo potencial se puede determinar con gran exactitud.

La principal ventaja del método propuesto en este trabajo, es que dicho método puede calcular la - continuación analítica y la segunda derivada para los -- campos gravimétrico y magnético sin tener que modificar- la estructura del mismo. Esto se debe a que el método se basa en la ecuación de Laplace para campos potenciales.

En el capítulo de Conclusiones y Recomendaciones se habla de las ventajas y desventajas del método propuesto. Es importante hacer notar que para calcular la continuación analítica del campo por medio de los métodos convencionales, simplemente se desplazo al cuerpo anómalo a diferentes niveles hacia arriba o hacia abajo de su posición original, obteniendose el efecto anómalo de dicho cuerpo a estos planos; así se pudo comparar estos resultados, con los obtenidos para la continuación analítica por medio del método propuesto. Las figuras 1.1, 1.2, y 1.3 muestran gráficamente este procedimiento.

En el apéndice de este trabajo, se incluyen todos los programas de computación que se utilizaron en este trabajo, los cuales son:

a).- Cálculo de la Anomalía Magnética Total (algoritmo de Plouff).

b).- Cálculo de la Componente Vertical del Campo Gravitacional (algoritmo de Plouff).

c).- Cálculo de la Segunda Derivada Vertical (operador de Henderson-Zietz), para Gravimetría y Magnetometría.

d).- Cálculo de la Continuación Analítica y Segunda Derivada Vertical de campo por la Serie Doble de Fourier (método propuesto), para Gravimetría y Magnetometría.

Anomalía Calculada al plano de referencia.

Métodos Convencionales. Método Propuesto.

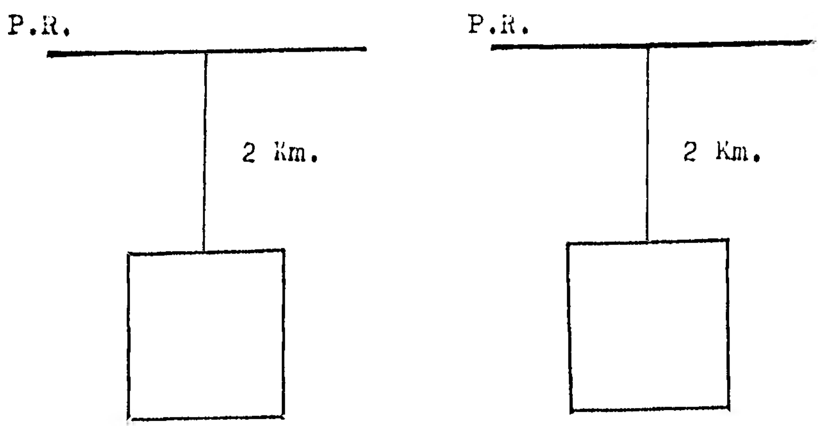



Figura 1.1.

Continuación Analítica calculada a -1 Km. del plano de referencia.

Métodos Convencionales. Método Propuesto.

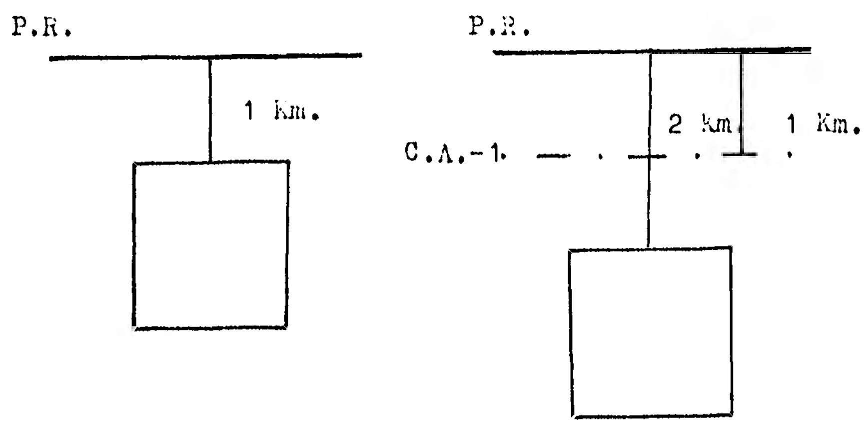



Figura 1,2.

Continuación Analítica calculada a +1 Km. del plano de referencia.

Métodos Convencionales. Método Propuesto.

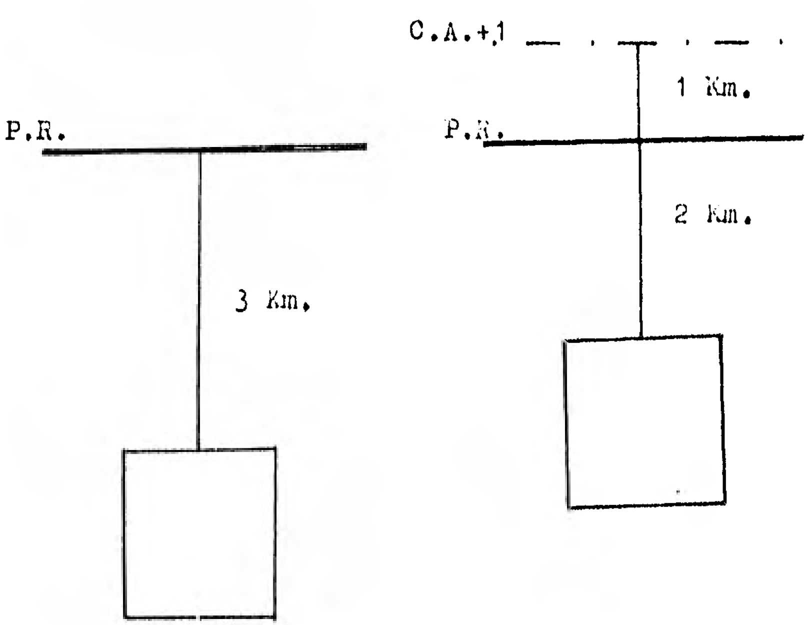



Figura 1.3.

## 11. METODOS CONVENCIONALES PARA EL CALCULO DE LA CONTINUACION ANA LITICA Y LA SEGUNDA DERIVADA.

La información geofísica obtenida en el-campo, debe ser analizada para poder separar informa---ción de interés, del resto de la información. Los métodos de análisis de Continuación Analítica y Segunda Derivada de Campo, son los que nos interesan en la exposición del presente trabajo.

La Continuación Analítica consiste, en -determinar el valor de la anomalía a diferentes eleva--ciones hacia arriba o hacia abajo del plano de referencia, a partir del valor de anomalía obtenido en el plano de referencia (z=0). Para obtener los valores de continuación analítica, se utilizaron los algoritmos obtenidos por Donald Plouff (1976). El algoritmo de Plouff-para Gravimetría esta basado en los estudios hechos por Talwani y Ewing (1960); para Magnetometría, Plouff se -basó en el estudio realizado por Talwani (1965), en este capítulo se presentan ambos desarrollos matemáticos.

El método de Segunda Derivada, tiene como finalidad, la de separar la información somera del -resto de la información de campo. El operador de Segunda Derivada utilizado en este trabajo, fué el obtenido-por Henderson y Zietz (1949), más adelante se expondrá el desarrollo matemático del mismo.

## II.1. CONTINUACION ANALITICA DEL CAMPO.

La Continuación Analítica es el proceso-de determinar a partir de valores medidos en un plano,-el valor del campo potencial a un plano superior o inferior del plano de referencia. A medida que la profundidad entre el plano de calculo y la masa anómala disminu ye, la definición del campo potencial se hace más clara y tiende a delinear mucho mejor a la masa causante del efecto anómalo; este proceso mejora hasta que la distancia entre el plano de cálculo y la masa se hace igual a cero; después de lo cual, el campo calculado por medio de la continuación llega a ser errático.

La Continuación Analítica por medio de los métodos convencionales, se obtuvo como ya se mencionó en el capítulo anterior (ver figuras 1.1, 1.2, 1.3).

### II.1.1. ANOMALIA MAGNETICA TOTAL.

Manik Talwani (1965), propuso un método para obtener la anomalía magnética total que causa un cuerpo de forma irregular de tres dimensiones a un punto exterior P. Donald Plouff (1976), basándose en el método desarrollado por Talwani, obtuvo una expresión en forma directa para el cálculo de la anomalía magnética total. A continuación, se hará en forma breve el desarrollo matemático de Plouff, basado en el método de Manik Talwani.

El método de Talwani, primeramente representa al cuerpo que va a causar la anomalía, en contornos; en seguida, reemplaza a cada contorno por una lámina horizontal poligonal, figura (II.1); sobre cada lámina, realiza una integración analítica doble, la cual se realiza primero, de un lado del polígono al punto P, y después se van calculando todos los lados del polígono al punto P, Este proceso, se efectúa en todas las láminas poligonales en las que se ha divido al cuerpo. Una vez calculada la integración doble (de superficie) para todas las láminas, se realiza una integración numérica-simple que abarca todas las láminas del cuerpo. Donald-Plouff, a partir de la expresión de Talwani para calcurar el efecto de cada lámina o sea, de la expresión que obtuvo por medio de la integración doble, realiza una - integración directa (en lugar de la integración numérica) y obtiene una expresión precisa para calcular la - anomalía magnética total.

Considerando un sistema de coordenadas - cartesianas de mano derecha, figura 11.1; para un ele-- mento de volumen $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$, dentro de un cuerpo Q, el potencial magnético $\Omega$, esta dado por:

$$\Omega = \frac{\mu \cdot R}{R^3} \quad ,$$

donde $\mu$ es el momento magnético del elemento de volu-- men, y R es un vector distancia, figura(11.2).

Si J, es la intensidad de magnetización-del cuerpo, se tiene que:

$$\mu = J \Delta X \Delta Y \Delta Z$$

y si; $J_x$, $J_y$, y $J_z$ son las tres componentes del vector-J, se tiene:

$$\Omega = \frac{J_X X + J_Y Y + J_Z Z}{R^3} \Delta X \Delta Y \Delta Z \qquad (11.1.)$$

entonces, las tres componentes de la intensidad magnética del cuerpo Q están dadas por:

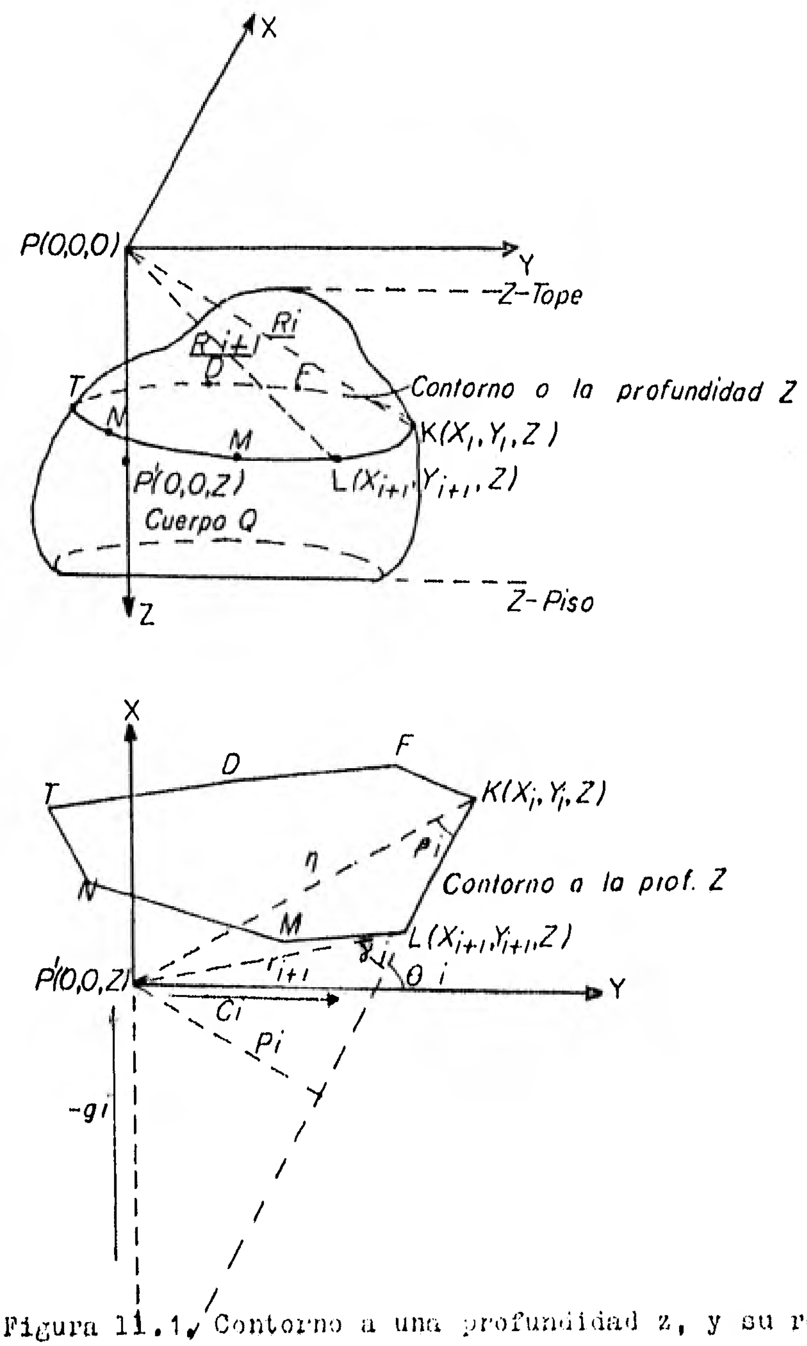



Figura II.1. Contorno a una profundidad z, y su representación por un polígono.

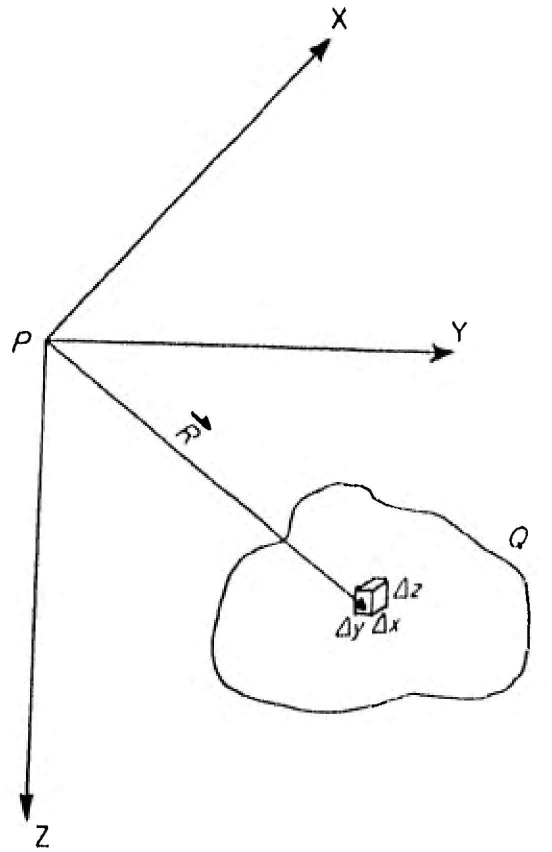



Figura II.2. Elemento de Volumen del cuerpo Q.

$$\Delta X = \iiint -\frac{\partial \Omega}{\partial x}\, dx\, dy\, dz$$

$$\Delta Y = \iiint -\frac{\partial \Omega}{\partial Y}\, dx\, dy\, dz$$

$$\Delta Z = \iiint -\frac{\partial \Omega}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

efectúando la integración triple sobre el volumen Q.

Sustituyendo el valor de $\Omega$ de la ecuación- (11.1.), en las ecuaciones anteriores, y diferenciando -- con respecto a x, y, z respectivamente, se obtiene:

$$\Delta X = J_x V_1 + J_y V_2 + J_z V$$

$$\Delta Y = J_x V + J_y V_4 + J_z V \qquad (11.2.)$$

$$\Delta Z = J_x V_3 + J_y V_5 + J_z V_6$$

en donde:

$$V_1 = \iiint \frac{3x^2 - R^2}{R^5}\, dx\, dy\, dz$$

$$V_2 = \iiint \frac{3xy}{R^5}\, dx\, dy\, dz$$

$$V_3 = \iiint \frac{3xz}{R^5}\, dx\,dy\,dz$$

$$V_4 = \iiint \frac{3y^2 - R^2}{R^5}\, dx\,dy\,dz$$

$$V_5 = \iiint \frac{3yz}{R^5}\, dx\,dy\,dz$$

$$V_6 = \iiint \frac{3z^2 - R^2}{R^5}\, dx\,dy\,dz \qquad (11.3.)$$

Las integrales $V_1$, $V_2$,....., $V_6$ represen-- tan integraciones sobre el volumen Q. Dichas integrales,- por medio del teorema de Green, pueden ser transformadas- a integrales de superficie.

En la figura (11.1), uno de los contornos- ha sido reemplazado por la lámina poligonal KLMNTDFK, to- mando a P como el orígen y el punto donde se desea obte-- ner la anomalía. Si tomamos un punto auxiliar P' situado- en el plano KLMNTDFK a una distancia z, exactamente deba- jo del punto P, este punto auxiliar es importante en el - cálculo de la anomalía.

Si denotamos por $S_1$, $S_2$,....., $S_6$ a la par- te de superficie de las integrales de volumen de las ecua ciones (11.3.), se tiene:

$$S_1 = \iint \frac{3x^2 - R^2}{R^5}\, dx\,dy$$

$$S_2 = \iint \frac{3xy}{R^5}\, dx\, dy$$

$$\vdots$$

$$S_6 = \iint \frac{3z^2 - R^2}{R^5}\, dx\, dy$$

se tienen que resolver estas integrales de superficie,- para la superficie del plano KLMNTDFK. Si se toma al lado KL como el i-ésimo lado del polígono figura (11.1.)- si $\rho_i$ es la distancia perpendicular del punto P' a KL;- $g_i$ es la intercepción de KL con el eje x; $C_i$ es la in-- tercepción con el eje y. Si $\theta_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ son ángulos; y - $r_i$, $r_{i+1}$, $R_i$, $R_{i+1}$ son distancias, ver figura (11.1.);- las integrales de superficie anteriores se pueden resolver, quedando:

$$S_1 = -\sum \frac{\cos^2\theta_i}{z^2+\rho_i^2}\left(\frac{g_i y_{i+1} - z^2\tan\theta_i}{R_{i+1}} - \frac{g_i y_i - z^2\tan\theta_i}{R_i}\right)$$

$$S_2 = \sum \frac{\cos^2\theta_i}{z^2+\rho_i^2}\left(\frac{g_i y_{i+1}\tan\theta_i + y_i^2 + z^2}{R_{i+1}} - \frac{g_i y_i\tan\theta_i + g_i^2 + z^2}{R_i}\right)$$

$$S_3 = -\sum \frac{z\cos^2\theta_i}{z^2+\rho_i^2}\left(\frac{y_{i+1}\sec^2\theta_i + g_i\tan\theta_i}{R_{i+1}} - \frac{y_i\sec^2\theta_i + g_i\tan\theta_i}{R_i}\right)$$

$$S_4 = \sum \frac{\operatorname{sen}^2\theta_i}{z^2+\rho_i^2}\left(\frac{c_i x_{i+1} - z^2\cot\theta_i}{R_{i+1}} - \frac{c_i x_i - z^2\cot\theta_i}{R_i}\right)$$

$$S_5 = \sum \frac{z\operatorname{sen}^2\theta_i}{z^2+\rho_i^2}\left(\frac{x_{i+1}\operatorname{cosec}^2\theta_i + c_i\cot\theta_i}{R_{i+1}} - \frac{x_i\operatorname{cosec}^2\theta_i + c_i\cot\theta_i}{R_i}\right)$$

$$S_6 = -\sum \frac{P_i}{z^2+P_i^2}\left(\frac{r_{i+1}\cos\gamma_i}{R_{i+1}} - \frac{r_i\cos\beta_i}{R_i}\right) \qquad (11.4.)$$

Donald Plouff (1976), partiendo de las ecuaciones anteriores (11.4.), las integró en forma directa; para obtener las expresiones de las integrales de volumen ecuaciones (11.3.). Excluyendo las constantes multiplicativas de las ecuaciones (11.4.), las expresiones para el efecto magnético para láminas poligonales horizontales incluyen términos de tres formas solamente, para ser integrados en la dirección de la profundidad, los cúales son:

$$\frac{dz}{(z^2+p^2)\,R_K} \qquad (11.5a.)$$

$$\frac{z\,dz}{(z^2+p^2)\,R_K} \qquad (11.5b.)$$

$$\frac{z^2\,dz}{(z^2+p^2)\,R_K} \qquad (11.5c.)$$

donde:

$$p^2 = \left[(X_1Y_2 - X_2Y_1)\Big/\sqrt{\Delta X^2+\Delta Y^2}\right]^2 = P_i^2$$

$$R_K = \sqrt{r_K^2 + Z^2}$$

$$r_k = \sqrt{X_k^2 + Y_k^2}$$

Donald Plouff, integró los términos anteriores utilizando las tablas de integración de Pierce - (1929), tomando en cuenta; que el término (11.5a.) se - considera que la hipotenusa $r_k$ del triángulo nunca es - más corta que sus otros lados P o $d_k$. El término (11.5c .) se integra sustituyendo $(z^2 + P^2) - P^2$ por $z^2$; entonces aplicando las integrales de Pierce a los términos - anteriores, se obtiene:

$$\frac{1}{Pd_k} \tan^{-1} \frac{zd_k}{PR_k} \qquad (11.6a.)$$

$$\frac{1}{2d_k} \mathrm{Ln}\left[\frac{R_k - d_k}{R_k + d_k}\right] = -\frac{1}{d_k} \mathrm{Ln}\left[\frac{R_k + d_k}{(p^2 + z^2)^{1/2}}\right] \qquad (11.6b.)$$

$$\mathrm{LN}(z + R_k) - \frac{P}{d_k} \tan^{-1} \frac{zd_k}{PR_k} \qquad (11.6c.)$$

donde:

$$d_k = -r_k C_k$$

$$C_k = \cos \beta_k$$

$$P = \rho_i$$

$$R_k = \sqrt{r_k^2 + z^2}$$

Talwani (1965), resolvio las integrales de superficie ecs. (11.4.) para determinar las integrales de volumen V ecs. (11.3.), usando la aproximación de las láminas $V \simeq S\,\Delta Z$. El valor exacto de dichas integrales es $V = \int S\,dz$. Plouff, obtuvo el valor de la integral anterior, los resultados estan dados por las ecuaciones (11.6a.), (11.6b.), y (11.6c.); por tanto, la solución de las ecuaciones (11.3.) es:

$$V_1 = \sum_{i=1}^{N} (SCF - C^2W)$$

$$V_2 = \sum_{i=1}^{N} (SCW + C^2F)$$

$$V_3 = \sum_{i=1}^{N} CQ$$

$$V_4 = \sum_{i=1}^{N} (SCF + S^2W)$$

$$V_5 = \sum_{i=1}^{N} SQ$$

$$V_6 = \sum_{i=1}^{N} W \qquad (11.7.)$$

donde:

$$F = \ln\left[\frac{R_{22} + Z_2 R_{11} + Z_1}{R_{12} + Z_2 R_{21} + Z_1}\right]$$

$$Q = \ln\left[\frac{R_{22} + d_2 R_{11} + d_1}{R_{12} + d_1 R_{21} + d_2}\right]$$

$$W = \tan^{-1}\frac{z_2 d_2}{PR_{22}} - \tan^{-1}\frac{z_2 d_1}{PR_{12}} - \tan^{-1}\frac{z_1 d_2}{PR_{21}} + \tan^{-1}\frac{z_1 d_1}{PR_{11}}$$

$$S = \Delta X / \Delta S$$

$$C = \Delta Y / \Delta S$$

$$\Delta S = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2} = |d_1 - d_2|$$

Ahora, solo resta evaluar las componen-- tes del vector J: $J_x$, $J_y$, $J_z$. En la figura (11.3) se mu estran los elementos geométricos involucrados en la obtención de $J_x$, $J_y$, y $J_z$. El vector de magnetización total J, hace un ángulo con la horizontal (medido hacia a bajo de la horizontal), y su proyección horizontal hace un ángulo B con el eje x (medido en el sentido de las - manecillas del reloj), de la figura (11.3) se tiene:

$$J_X = J \cos A \cos B$$

$$J_Y = J \cos A \operatorname{sen} B$$

$$J_Z = J \operatorname{sen} A \qquad (11.8.)$$

en donde; si la magnetización es por inducción en el -- campo de la tierra:

$$J = K F$$

donde:

F = a la intensidad total del campo de la tierra

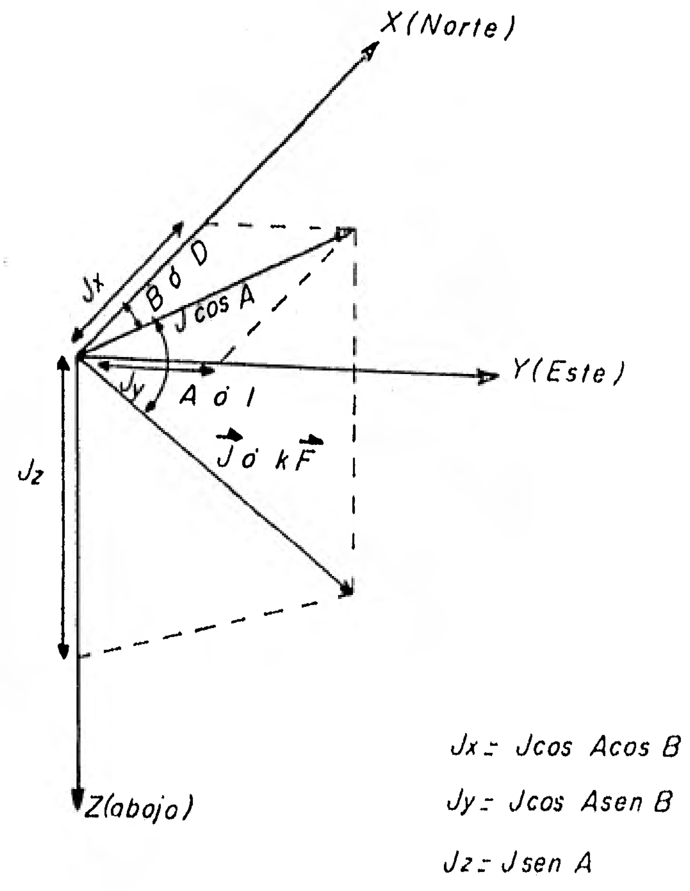



Figura 11.3. Descomposición del vector de magnetización J en sus tres componentes $J_x$, $J_y$, $J_z$.

k = a la susceptibilidad magnética
A = I = a la inclinación magnética del campo
B = D = a la declinación " " "

sustituyendo las ecuaciones (11.8.) en la ecuación (11.2.), se obtienen las tres componentes del vector de anomalía magnética total, quedando:

$$\Delta X = J(V_1 \cos D \cos I + V_2 \operatorname{sen} D \cos I + V_3 \operatorname{sen} I)$$

$$\Delta Y = J(V_2 \cos D \cos I + V_4 \operatorname{sen} D \cos I + V_5 \operatorname{sen} I)$$

$$\Delta Z = J(V_3 \cos D \cos I + V_5 \operatorname{sen} D \cos I + V_6 \operatorname{sen} I)$$

(11.9.)

y, la anomalía magnética total esta dada por:

$$\Delta T = \Delta X + \Delta Y + \Delta Z \qquad (11.10.)$$

sustituyendo las ecuaciones (11.7.) en las ecuaciones (11.9.), y estas a su vez, en la ecuación (11.10.), se obtiene la expresión para el cálculo de la Anomalía Magnética Total causada por un cuerpo irregular de tres dimensiones a un punto exterior P.

### 11.1.2. COMPONENTE VERTICAL DEL CAMPO GRAVITACIONAL.

Talwani y Ewing (1960), propusieron un método de cálculo de la componente vertical del campo gravitacional de un cuerpo irregular en tres dimensiones a un punto exterior P, con la inconveniencia que no obtuvieron una expresión directa. Donald Plouff (1976), basándose en el desarrollo de Talwani y Ewing, obtuvo - una expresión exacta para calcular la componente vertical del campo gravitacional.

El método de Talwani y Ewing consiste en dividir al cuerpo en contornos, cada contorno es entonces reemplazado por una lámina poligonal horizontal de- espesor dz, figura (11.4). Seguidamente, aplicaron una- integración analítica doble (de superficie), del punto- P a cada uno de los lados de la lámina. Así obtuvieron, el efecto gravimétrico de toda la lámina al punto P.

Por último, efectuaron una integración - numérica simple sobre todas las láminas del cuerpo, para obtener la componente vertical. La integración numéca, se puede obtener por diferentes métodos, ejemplo: - La Regla de Simpson, La Fórmula de Cuadratura de Gauss, etc.

Donald Plouff (1976), integrando por partes la expresión obtenida por Talwani y Ewing para calcular el efecto de cada lámina al punto P (la integración doble), obtiene una expresión directa para calcular la componente vertical del campo gravitacional que- es equivalente a la obtenida por Talwani y Ewing (por - medio de la integración numérica).

Talwani y Ewing, seleccionaron un sistema de coordenadas cartesianas de mano izquierda, donde- el eje x es positivo hacia el Este; el eje y es positivo hacia el Norte; el eje z es positivo hacia abajo verticalmente, figura (11.4).

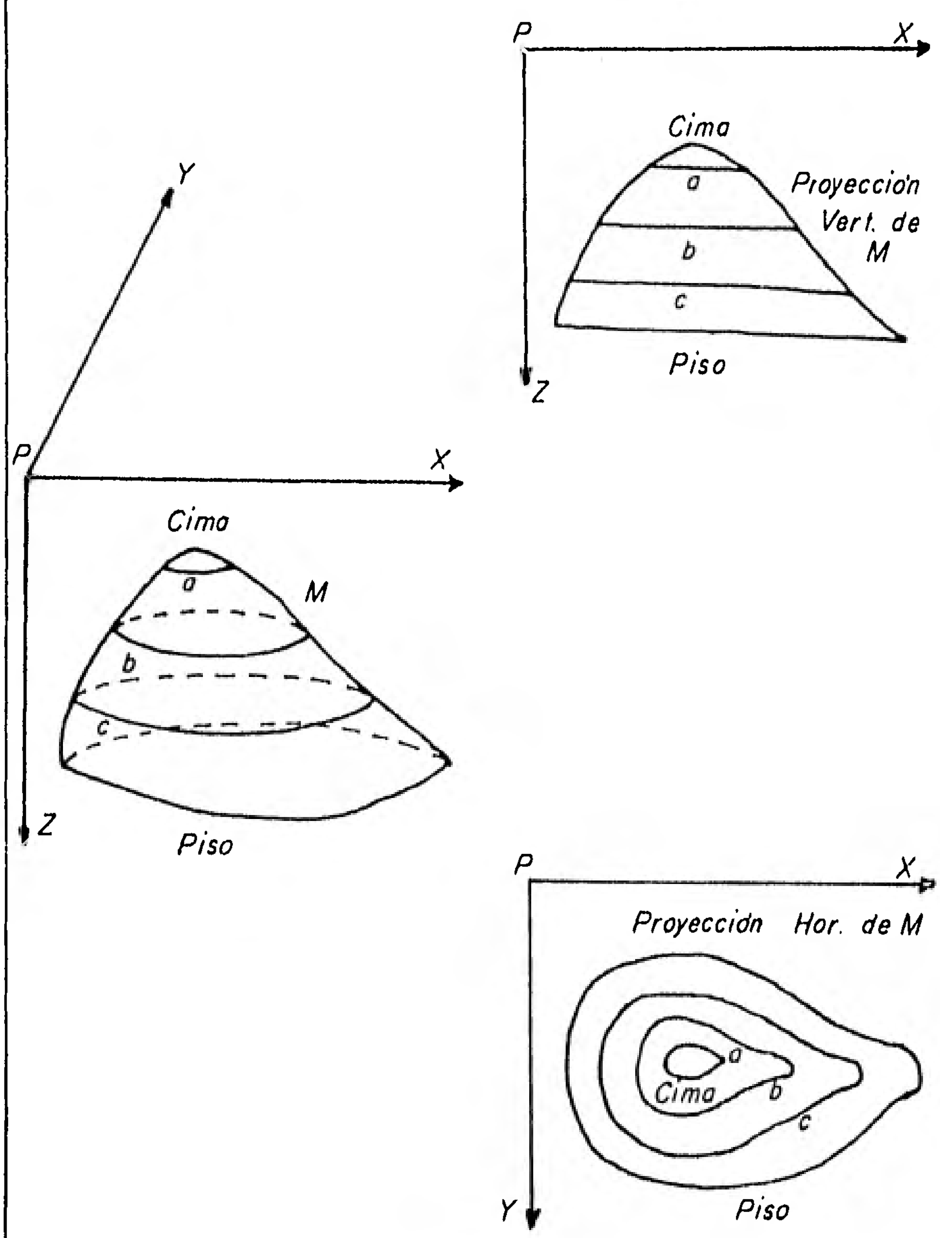



Figura 11.4. Cuerpo de tres dimensiones representado por contornos.

En la figura (II.5), el punto P se considera como el origen del sistema de coordenadas y es el punto en el cual, se desea obtener la componente vertical del campo gravitacional. Reemplazando el contorno ABCDEF..., figura (II.5); por la lámina poligonal ABCDEF ... de espesor infinitesimal dz, y llamando $\Delta g$ a la -- componente vertical, la anomalía gravimétrica de la lámina ABCDEF... al punto P, es:

$$\Delta g = V\,dz \qquad \text{(II.1a.)}$$

donde V es la anomalía causada por la lámina ABCDEF.... por unidad de volumen, y está expresada por una integral de superficie. Reduciendo V, a dos integrales de - línea; ambas a lo largo de la frontera de ABCDEF..., se puede escribir a V, como:

$$V = G\rho\left[\oint d\psi - \oint \frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}}\,d\psi\right] \qquad \text{(II.2a.)}$$

donde

G es la Constante Universal de la Gravitación

$\rho$ es la densidad del volumen de la lámina

z, $\psi$, r son coordenadas cilíndricas de la frontera ABCDEF....

Tomando P', como la proyección del punto P al plano ABCDEF..., figura (II.5), se tiene que; PP'= z, r es el radio vector en el plano ABCDEF..., y $\psi$ es - el ángulo que forma el plano ABCDEF... con el eje x, ($\psi$ es positivo en el sentido de las manecillas del reloj). Resolviendo la ecuación (II.2a.) para el lado BC del polígono; la primera integral de línea da el valor:

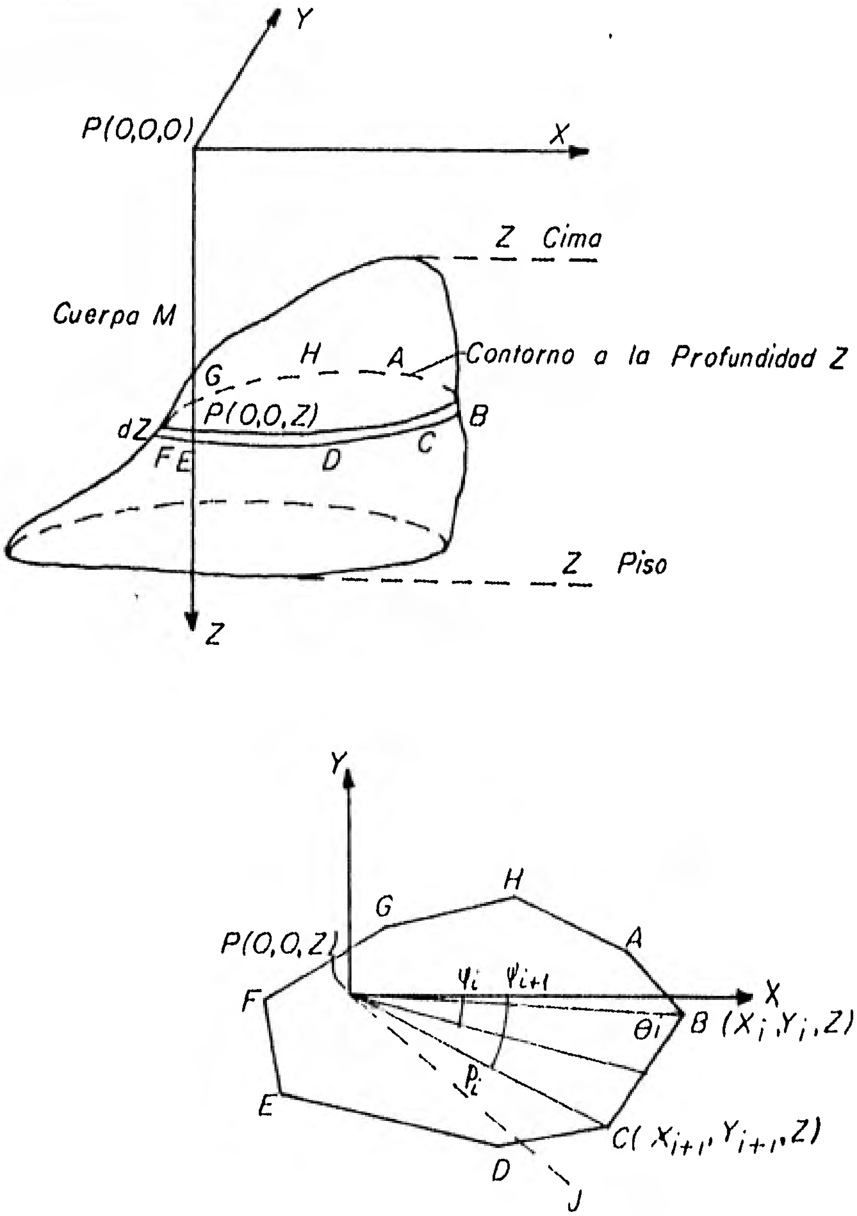



Figura 11.5. Elementos geométricos involucrados en el cálculo de la anomalía gravimetrica causada por un cuerpo de tres dimensiones.

$$\oint d\psi = \psi_{i+1} - \psi_i \qquad (11.3a.)$$

donde

$\psi_{i+1}$, $\psi_i$ son los angulos que forman el eje x con - P'C, P'B respectivamente.

Para resolver la segunda integral, se -- traza P'J perpendicular de P' a BC, y tomando P'J= $\rho_i$ y $\theta_i$, $\phi_i$, son los angulos de $\overline{BP'}$ y $\overline{CP'}$ a $\overline{BC}$ respectiva-- mente (ó $\overline{CB}$ si $\psi_{i+1} < \psi_i$), de la figura (11.5) se obtiene:

$$r = \frac{\rho_i}{\operatorname{sen}\,(\phi_i - \psi_{i+1} + \psi_i)} \qquad (11.4a.)$$

sutituyendo la ecuación (11.4a.) en la ecuación (11.2a. ), y tomando en cuenta que; $\rho_i$, $\phi_i$, y $\psi_{i+1}$ son constantes; siendo $\psi_i$, la única variable, la solución de - la segunda integral para el segmento BC es:

$$\operatorname{arc\,sen} \frac{z \cos \theta_i}{(\rho_i^2 + z^2)^{1/2}} - \operatorname{arc\,sen} \frac{z \cos \phi_i}{(\rho_i^2 + z^2)^{1/2}} \qquad (11.5a.)$$

sustituyendo las ecs. (11.3a.) y (11.5a.) en la ec. (11 .2a.), se obtiene la anomalía gravimétrica V por unidad de volumen de la placa triángular P'BC al punto P, quedando:

$$V_{P'BC} = G\rho \left[ \psi_{i+1} - \psi_i - \operatorname{sen}^{-1} \frac{z \cos \theta_i}{(\rho_i^2 + z^2)^{1/2}} + \operatorname{sen}^{-1} \frac{z \cos \phi_i}{(\rho_i^2 + z^2)^{1/2}} \right] \qquad (11.6a.)$$

Plouff (1976), partiendo de la ec. anterior (11.6a.), obtiene una expresión para la componente vertical. La ec. (11.6a.) incluye términos que se pueden expresar empleando la notación de Plouff, como se muestra en la figura (11.6), como:

$$A + \operatorname{sen}^{-1} \frac{C_K\, Z}{(\rho^2+Z^2)^{1/2}} \qquad (11.7a.)$$

donde

$$A = (\Psi_{i+1} - \Psi_i) = \Delta\Psi$$

$$C_K = \cos\beta_K \quad ; \quad \beta_K = (\theta_i \text{ ó } \phi_i)$$

$$P = \rho_i$$ , y son constantes.

la ec. (11.7a.) se puede expresar en forma equivalente como:

$$A - \tan^{-1} \frac{d_K\, Z}{P\, R_K} \qquad (11.8a.)$$

donde

$$d_K = X_K S + Y_K C = -r_K C_K$$

$$R_K = (r_K^2 + Z^2)^{1/2}$$

$$r_K^2 = X_K^2 + Y_K^2 = d_K^2 + P^2$$

Integrando por partes la ec. (11.8a.), y usando las tablas de integración de Pierce (1929), sustituyendo la variable $q^2$, (que resulta de la integración) por $p^2 + z^2$, se obtiene:

$$A_z - z \tan^{-1} \frac{d_k z}{P R_k} - \ln \left[ \frac{R_k + d_k}{(p^2 + z^2)^{1/2}} \right] \qquad (11.9a.)$$

la ec. (11.9a.), es la expresión que calcula el efecto-gravimétrico causado por cada lado del cuerpo, siendo - esta equivalente a la ec. (11.6a.) de Talwani y Ewing.

Generalizando la ec. (11.9a.) para los n lados del cuerpo, comprendido entre los límites z-tope, y z-base; se llega a:

$$g = G \rho S_m \sum_{i=1}^{N} \Big\{ S_p A \left[ z_2 - z_1 \right] + z_2 \left[ \tan^{-1} \frac{z_2 d_1}{P R_{12}} - \tan^{-1} \frac{z_2 d_2}{P R_{22}} \right] - z_1 \left[ \tan^{-1} \frac{z_1 d_1}{P R_{11}} - \tan^{-1} \frac{z_1 d_2}{P R_{12}} \right] - P \ln \left[ \frac{R_{22} + d_2 \; R_{11} + d_1}{R_{12} + d_1 \; R_{21} + d_2} \right] \Big\} \qquad (11.10a.)$$

donde

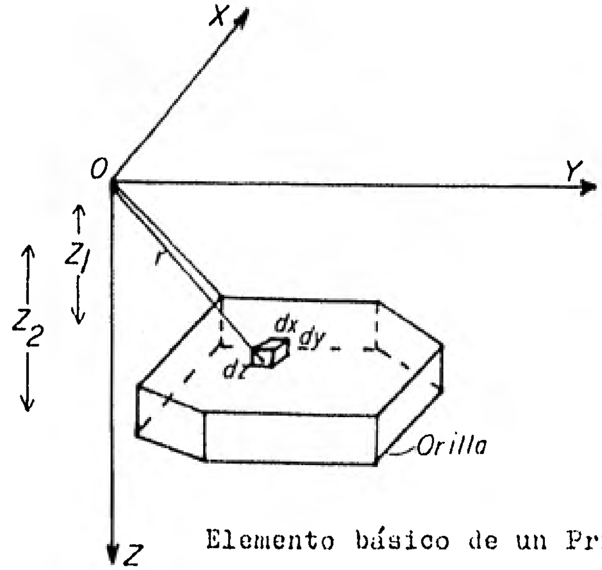
- g es la anomalía que causa el cuerpo en el punto P.
- G es la constante universal de la Gravitación.
- $\rho$ es el contraste de densidad.
- Sm= +1, si el centro de masa del cuerpo esta por - debajo del punto.
- Sm= -1, si el centro de masa del cuerpo esta por - arriba del punto.
- Sp= +1, si P es positivo.
- Sp= -1, si P es negativo.
- $R^2_{kj} = r^2_k + z^2_j$.

El caso especial cuando P=0, determina - que los valores de la gravedad y el volumen sustentado- por el lado correspondiente del cuerpo, vistos desde el punto en el campo son cero.

El valor de A, que es la suma de los ángulos figura (II.6), adquiere los siguientes valores:

A = 2$\pi$ , para los puntos localizados sobre el cuerpo.
A = 0 , " " " " fuera del --- cuerpo.
A = $\pi$ , " " " " sobre un lado cuerpo.
A = al ángulo interior, si el punto se localiza sobre la intersección de dos lados del cuerpo.

La ec. (II.10a.), es la fórmula exacta - obtenida por Donald Plouff para calcular la Componente- Vertical Total del Campo Gravitacional causada por un - cuerpo irregular de tres dimensiones al punto exterior- P.




Elemento básico de un Prisma Poligonal.

Vista en planta de una orilla del Prisma.

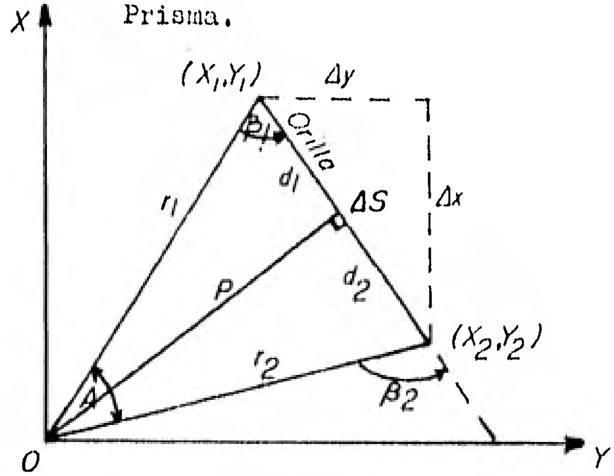



Figura II.6. Elementos geométricos involucrados en el cálculo de las anomalías gravimétrica y magnética causadas por un prisma poligonal.

## 11.2. SEGUNDA DERIVADA DEL CAMPO.

El cálculo de los mapas de segunda derivada de los campos anómalos, es uno de los métodos utilizados en el procesamiento de la información geofísica, con el objeto de resaltar hasta donde sea posible, -- las distintas anomalías del resto de la información. Todos los métodos de segunda derivada están basados en la técnica del punto central y anillos, esto es: seleccionar una malla regular, calcular los valores de la anomalía a cada vértice de la malla por interpolación, a continuación, se trazan una serie de anillos de diferentes radios, a partir del punto donde se desea obtener el valor de la segunda derivada y por último, aplicar el operador seleccionado a la malla.

Todos los operadores de segunda derivada tienen la estructura siguiente:

$$G_z = \left(\frac{c}{s}\right)^2 \left( G_c + w_0 g_0 + w_1 g_1 + \dots\dots + w_n g_n \right)$$

donde

- $G_z$ es el valor de la segunda derivada en el punto central.
- $c$ es una constante para un campo en particular.
- $s$ es el espaciamiento de la malla.
- $G_c$ es el valor de la anomalía en el punto cen--- tral.
- $g_0,\dots,g_n$ son los valores promedio de la anomalía para sus respectivos círculos de radios $r_0,\dots,r_n$.
- $w_0,\dots,w_n$ son los factores de peso, tal que:

$$w_0 + w_1 + \dots\dots + w_n = 0$$

Todos los métodos de segunda derivada, son una aproximación de una representación matemática exacta, la precisión de los resultados estará en función, del intervalo de muestreo de la malla; el número de círculos utilizados y los pesos relativos que son seleccionados empíricamente.

Henderson y Zietz (1949), obtuvieron un operador de segunda derivada, a continuación se hará un desarrollo breve para obtener dicho operador.

Si se considera a $\Delta V$ como la anomalía del campo potencial y que satisface a la ec. de Laplace

$$\nabla^2(\Delta V) = 0 \qquad (11.1b.)$$

la componente de la anomalía de intensidad total $\Delta T$, en la dirección del campo normal de la Tierra (tomada invariante sobre el área) esta dada por:

$$\Delta T = \frac{\partial(\Delta V)}{\partial \bar{t}} \qquad (11.2b.)$$

donde $\bar{t}$, es el vector unitario en la dirección del campo invariante de la Tierra.

La ec. (11.2b.) es válida, cuando $\Delta T \ll t_0$ donde $t_0$ es la magnitud del campo total. Efectuando operaciones en ambos lados de la ec. (11.2b.) con el operador:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad ;$$

se obtiene:

$$\nabla^2(\Delta T) = \frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial z^2} = 0 \quad (11.3b.)$$

La ec. (11.3b.) demuestra que $\Delta T$, también satisface la ec. de Laplace, por tanto, se puede analizar por los métodos de Teoría del Potencial.

La segunda derivada a un punto puede ser calculada, como la suma de una función que satisfaga a la ec. (11.3b.) la cual desaparece cuando z --> $\infty$ y se reduce aproximadamente a los valores de $\Delta T$ en el plano de observación cuando z --> 0.

Seleccionando un sistema de coordenadas cartesianas de mano derecha, cuyo orígen este tomado en el centro de la anomalía figura (11.7); por medio de una expansión en series de Fourier-Bessel, la ec. (11.3b.) queda:

$$\Delta T(z,r,\phi) = \sum_{K=0}^{K} \sum_{n=0}^{N} \left\{ e^{-\mu_k z} \cdot \left[ A_{Kn} \cos n\phi + B_{kn} \operatorname{sen} n\phi \right] J_n(\mu_k r) \right\} \qquad (11.4b.)$$

donde; $x = r \cos \phi$, $y = r \operatorname{sen} \alpha$; K y N son enteros positivos; $A_{kn}$ y $B_{kn}$ son constantes por determinarse; $J(\mu_k r)$ es una función de Bessel de primer orden; y $\mu_k$ son raíces positivas de $J_n(\mu_k a)=0$; donde a es un valor muy grande del radio r, al cual la anomalía $\Delta T$ es cero, o ha sido hecha arbitrariamente así.

Diferenciando la ec. (11.4b.), y haciendo tender z a cero, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} = \sum_{K=0}^{K} \sum_{N=0}^{N} \mu_k^2 \left[ A_{kn} \cos n\phi + B_{kn} \operatorname{sen} n\phi \right] \cdot J_n(\mu_k r) \qquad (11.5b.)$$

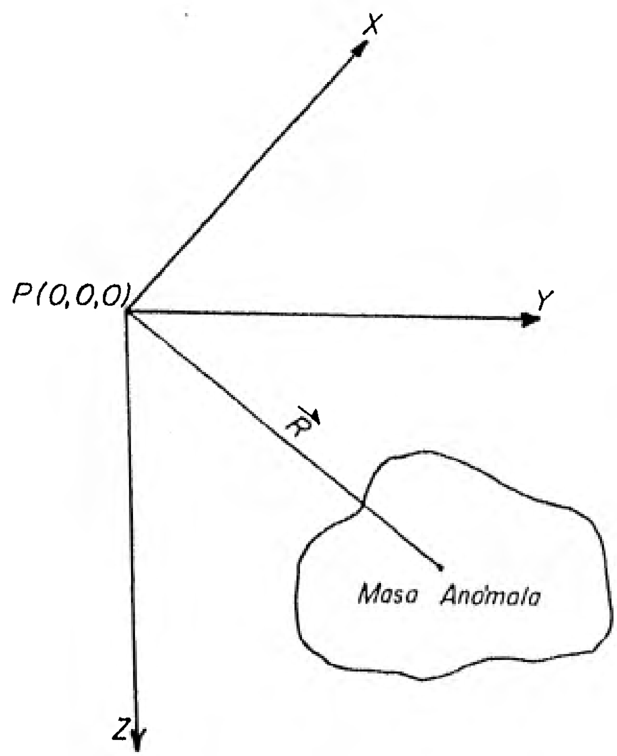



Figura 11.7. Sistema de Coordenadas Cartesianas.

La ec. (11.5b.) es una expresión que puede servir para calcular la segunda derivada, los coeficientes $A_{kn}$ y $B_{kn}$ se pueden obtener de la ec. (11.4b.)- pero su obtención es muy laboriosa. La ec. (11.4b.) se- puede simplificar cuando no esta en función de la variable $\phi$. Para eliminar el efecto de dicha variable en la- ec. (11.4b.), se toman las sigs. consideraciones:

a).- Una malla cuadrada es sobrepuesta al plano de anomalías; el valor de $\Delta T$ es interpolado a - cada vértice de la malla.

b).- Se trazan círculos a diferentes radios del orígen escogido; en el primer círculo de radio unitario, hay cuatro valores: $\Delta T_{11}, \Delta T_{12}, \Delta T_{13}, \Delta T_{14}$; en el segundo círculo de radio $\sqrt{2}$, - los valores son: $\Delta T_{21}, \Delta T_{22}, \Delta T_{23}, \Delta T_{24}$, este arreglo se conoce como el operador de nueve - puntos, figura (11.8).

c).- Se toma el valor promedio de $\Delta T$ en cada círculo, haciendo esto; se elimina el efecto de la variable $\phi$, consecuentemente de esto; solamente las funciones de Bessel de orden cero $J_0(\mu_k r)$, permanecen en la expansión hecha en la ecuación (11.4b.). Se ha considerado que cuatro puntos son suficientes para representar - el valor promedio de $\Delta T$ en cada círculo, hechas las consideraciones anteriores, se puede expresar el valor promedio de cada círculo como:

$$\Delta\bar{T}(r) = \sum_{k=1}^{k} A_k \, J_0(\mu_k r) \qquad (11.6b.)$$

donde $A_{ko} = A_k$, y $\Delta\bar{T}$ representa el valor promedio de $\Delta T$ en el círculo de radio r, entonces la ec. (11.4b.) se -

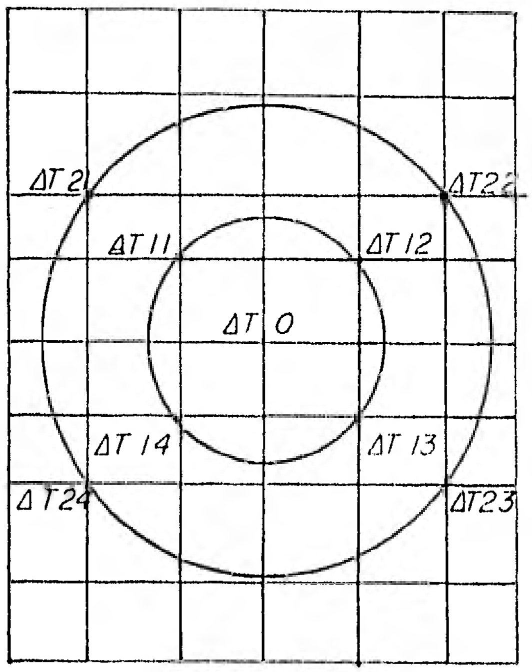



Figura II.8, Operador de Nueve Puntos.

puede escribir, como:

$$\Delta T(z,r)=\sum_{k=1}^{K} A_k e^{-\mu_k z} J_0(\mu_k r) \qquad (11.7b.)$$

donde

$$\Delta T(0,r) \equiv \Delta \bar{T}(r)$$

derivando dos veces la ec. (11.7b.) con respecto a z, - se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2}=\sum_{k=1}^{K} \mu_k A_k J_0(\mu_k 0) = \sum_{k=1}^{K} \mu_k^2 A_k \qquad (11.8b.)$$

la ec. (11.8b.) es una expresión de cálculo de la segun da derivada de $\Delta T$ al origen. En general, se puede des-- plazar al origen hacia el punto donde se desea obtener- la segunda derivada.

Para obtener una expresión más simple, - que la obtenida en la ec. (11.8b.), se efectúa una ex-- pansión de la ec (11.6b.) dentro de una serie de Poten- cias, obteniéndose de dicha expansión:

$$\Delta\bar{T}(r)=\sum_{k=1}^{K} A_k J_0(\mu_k r) = \sum_{k=1}^{K} A_k - \frac{r^2}{4}\sum_{k=1}^{K} A_k \mu_k^2 + \frac{r^4}{64}\sum_{k=1}^{K} A_k \mu_k^4 + \ldots\ldots \qquad (11.9b.)$$

donde $\Delta\bar{T}(r)$ es el valor promedio de la anomalía en el - círculo de radio r, a partir del punto considerado como orígen.

Despreciando los términos de 4° orden en adelante de la ec. (11.9b.), y sustituyendo la ec. (11.

8b.) en la ec. (11.9b.), se tiene:

$$\Delta\bar{T}(r) = \Delta T_0 - \frac{r^2}{4}\ \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} \qquad (11.10b.)$$

La ec. (11.10b.), representa los valores promedio de la anomalía $\Delta T$ a diferentes círculos. Los valores promedio para los círculos a las distancias r, r 2 unidades del origen son:

$$\Delta\bar{T}_1(r) = \Delta T_0 - \frac{(r^2)}{4}\ \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2}$$

y $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (11.11b.)

$$\Delta\bar{T}_2(r\sqrt{2}) = \Delta T_0 - \frac{(r\sqrt{2})^2}{4}\ \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2}$$

estas ecs. implican numerosas soluciones para $\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2}$, porque se involucran dos ecuaciones lineales con una sola incógnita. Multiplicando ambas ecs. (11.11b.) por cuatro, se tiene:

$$4\,\Delta\bar{T}_1(r) = 4\,\Delta T_0 - r^2\,\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2}$$

y $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (11.12b.)

$$4\Delta\bar{T}_2(r\sqrt{2}) = 4\Delta T_0 - 2r^2\,\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2}$$

sumando las ecs. anteriores y despejando $\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2}$, tenemos:

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} = \frac{1}{3r^2}\left[8\Delta T_0 - 4\Delta\bar{T}_1(r) - 4\,\Delta\bar{T}_2(r\sqrt{2})\right] \qquad (11.13.b)$$

donde:

$\Delta T$ es la anomalía de campo del punto donde se va a calcular la segunda derivada,

$\Delta T_1(r)$ es el valor promedio de la anomalía a una -- distancia r del valor $\Delta T_0$.

$\Delta T_2(r\sqrt{2})$ es el valor promedio de la anomalía a una -- distancia $r\sqrt{2}$ del valor $\Delta T_0$.

r es el intervalo de separación de la malla.

La ec. (11.13b.) es el operador que obtuvieron Henderzon y Zietz para calcular la Segunda Derivada por medio del método de los nueve puntos.

## III. METODO PROPUESTO. ANALISIS DE FOURIER.

Como se vio en el capítulo anterior, hay diferentes métodos para el cálculo de la Continuación Analítica y Segunda Derivada de campos potenciales; en este capítulo demostramos que los valores de dichos campos se pueden representar con precisión por la expansión en una Doble Serie de Fourier. Asímismo, se obtendrán expresiones de precisión para el cálculo de la Continuación Analítica y Segunda Derivada por medio de la Doble Serie de Fourier, cuyos resultados pueden ser comparados con los obtenidos por medio de los métodos convencionales.

El método consiste en la expansión armónica bidimensional de Fourier del campo observado en un plano, con la ventaja de que los valores del campo no necesitan estar suavizados o promediados. Una vez que la expansión se ha hecho, la Continuación Analítica y la Segunda Derivada se pueden calcular con facilidad.

En este capítulo, presentamos los fundamentos teóricos del análisis de Fourier que se utilizan en la solución del problema que nos atañe. A continuación, se hace la demostración de que el campo anómalo total puede ser tratado por medio de la ec. de Laplace para campos potenciales. Finalmente, se resuelve esta ecuación y se hace la expansión en una Doble Serie de Fourier, obteniendo las expresiones para la Continuación Analítica y Segunda Derivada.

## III.1. FUNDAMENTOS TEORICOS DEL ANALISIS DE FOURIER.

En muchos problemas de Ingeniería se usan las funciones que involucran valores a la frontera-de aquí que sea lógico, tratar de expander una función $f(x)$, en funciones que involucren términos de cosenos y senos. Tal expansión se conoce como la expansión en series de Fourier de la función $f(x)$.

### 111.1.A. Funciones Periódicas.

Una función periódica se puede definir, como una función para la cual

$$f(t) = f(t + T)$$

para todo valor de t. La constante mínima T que satisface la relación anterior, se llama Período de la función $f(t)$.

### 111.1.B. Condiciones de Dirichlet.

Para representar una función $f(t)$ por medio de una serie de Fourier, se deben de cumplir las condiciones de Dirichlet, bajo las cuales es posible la representación de una función dada $f(t)$ en una serie de Fourier. Las condiciones de Dirichlet son:

a).- La función $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un período.

b).- La función $f(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en un período.

c).- La integral del valor absoluto de $f(t)$ en un período es finita; es decir

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt = \text{finita} < \infty$$

Se dice que una función f(t) es continua por tramos en el intervalo finito $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ si satisface -- las condiciones a) y b).

III.1.C. Serie de Fourier.

Sea la función f(t) periódica, de período T, la cual cumple con las condiciones de Dirichlet;- por lo cual se puede representar por la serie trigonomé trica:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos w_0 t + a_1 \cos 2w_0 t + \ldots\ldots$$
$$\ldots + b_1 \operatorname{sen} w_0 t + b_2 \operatorname{sen} 2w_0 t + \ldots\ldots$$
$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n w_0 t + b_n \operatorname{sen} n w_0 t\right)$$

donde

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

que se conoce como la serie trigonométrica de Fourier,- y sus coeficientes están dados por las sig. fórmulas:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

La representación en series de Fourier - de una función periódica, se hace sumando las componentes senoidales de diferentes frecuencias. La componente senusoidal de frecuencia $w_n = nw_0$ se denomina la enésima armónica de la función periódica, la primera armónica se llama componente fundamental, porque tiene el mismo periódo de la función; y $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ se conoce como la frecuencia angular fundamental.

### lll.1.D. Doble Serie de Fourier.

En muchas ocasiones, es necesario expander una función de dos variables en una serie trigonométrica. Considerando una función f(x,y) de período $2\pi$ a lo largo de los ejes x, y. Tomando el eje y fijo, podemos expander a f(x,y) en una serie ordinaria de Fourier en donde, los coeficientes serán funciones de y, si se expande la función a lo largo de x, la serie de Fourier queda:

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n(y) \cos mx + B_n(y) \operatorname{sen} mx \right] \qquad (1.1.)$$

expandiendo las funciones $A_n(y)$ y $B_n(y)$ en una serie de Fourier, se tiene:

$$A_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn} \cos ny + b_{mn} \operatorname{sen} ny)$$

y $\qquad (1.2.)$

$$B_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_{mn} \cos ny + d_{mn} \operatorname{sen} ny)$$

sustituyendo las ecs. (1.2.) en la ec. (1.1.), se tiene

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \cos mx \operatorname{sen} ny +$$

$$+ c_{mn} \operatorname{sen} mx \cos ny + d_{mn} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny) \qquad (1.3.)$$

para calcular los coeficientes de la ec. (1.3.), se utiliza el procedimiento de integración empleado en la serie de Fourier ordinaria, aplicándolo dos veces.

III.1.E. Funciones Ortogonales.

Un conjunto de funciones $\phi_k(t)$ es ortogonal en el intervalo $a < t < b$, si para dos funciones cualesquiera $\phi_m(t)$ y $\phi_n(t)$ pertenecientes al conjunto $\phi_k(t)$ cumplen:

$$\int_a^b \phi_m(t)\,\phi_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ r_n & \text{para } m = n \end{cases}$$

considerando un conjunto de funciones senoidales; se puede demostrar que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m w_0 t)\,dt = 0 \qquad \text{para } m \neq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m w_0 t)\cos(n w_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ \pi & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(m w_0 t)\,dt = 0 \quad \text{para todo valor de } m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(m w_0 t)\,\operatorname{sen}(n w_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ \pi & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(m w_0 t) \cos(n w_0 t)\, dt = 0 \quad \text{para todo valor de } m \text{ y } n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos o t \ \cos o t\, dt = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos o t \ sen\, o t\, dt = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen\, o t \ sen\, o t\, dt = 0$$

donde $w_0 = \frac{2\pi}{T}$

Las relaciones anteriores muestran como las funciones 1, cos $w_0t$, cos $2w_0t$,... cos $nw_0t$,......, sen $w_0t$, sen $2w_0t$,..., sen $nw_0t$; forman un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $-\pi / t / \pi$.

## 111.2. POTENCIALES GRAVIMETRICO Y MAGNETICO EN FUNCION DE LA EC. DE LAPLACE.

Considerando que M y m son dos punto masa, separados una distancia r. La segunda ley de Newton establece que los dos puntos masa se atraen con una fuerza proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, ver figura 111,1. Siendo la fuerza resultante:

$$F = G\,\frac{m\,M}{r^2}$$


$$r = \left[(x-a)^2 + (-b+y)^2 + (Z-c)^2\right]^{1/2}$$

Figura III.1. Segunda Ley de Newton (fuerza de atracción entre dos masas).

donde G es la Constante de la Gravitación Universal.

Definiendo la función potencial como:

$$\mu = -G \frac{m M}{r} \quad ;$$

la derivada de la función potencial con respecto a r, - es la fuerza F. Ahora, si consideramos un número de puntos cuyas coordenadas $(a_k, b_k, c_k)$, la función del potencial se puede expresar:

$$\mu(x,y,z) = -G \sum_{k=1}^{K} \frac{m M_k}{r_k}$$

generalizando la ec. anterior para una distribución continua de masas dentro de un volumen V, se obtiene:

$$\mu(x,y,z) = -G \iiint_V \frac{m M}{r} \, dV$$

considerando a m como una masa unitaria, el potencial - para el campo gravimétrico queda:

$$\mu(x,y,z) = -G \iiint_V \frac{\rho(a,b,c)}{r} \, dV$$

donde:

$\rho(a,b,c)$ es la función densidad de la distribución de masa,

dv es un elemento de volumen,

G es la constante universal de la gravitación, y

$$r = \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right]^{1/2}$$

El potencial para el campo Magnético es:

$$\mu(x,y,z) = -K \iiint_V \frac{M(a,b,c)}{r}\, dV$$

donde:

K es la susceptibilidad magnética.
M(a,b,c) es el momento magnético del dipolo.

Las ecuaciones de potencial deben satisfacer la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \mu = 0 \quad ;$$

por tanto, se sigue la misma metodología para el potencial gravimétrico y el magnético.

A continuación, se demuestra que el potencial (gravimétrico o magnético), cumple con la ec. de Laplace. Diferenciando el potencial gravimétrico con respecto a x, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} - G\iiint \frac{\rho(a,b,c)}{r}\, dV$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y,z) = G\iiint \frac{\rho(a,b,c)(x-a)}{r^3}\, dV$$

diferenciando la ec. anterior otra vez con respecto a x , se obtiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mu(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} G\iiint \frac{\rho(a,b,c)(x-a)}{r^3}\, dV$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y,z) = G \iiint_V \rho(a,b,c)\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(x-a)^2}{r^5}\right] dV \qquad (2.1.)$$

en forma similar se obtienen $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ :

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} = G \iiint_V \rho(a,b,c)\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(y-b)^2}{r^5}\right] dV \qquad (2.2.)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x,y,z) = G \iiint_V \rho(a,b,c)\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(z-c)^2}{r^5}\right] dV \qquad (2.3.)$$

sumando las ecs. (2.1.), (2.2.), y (2.3.):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = G \iiint_V \rho(a,b,c)\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5}\right] dV$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

se ha demostrado que la ecuación del Campo Potencial satisface la ecuación de Laplace.

Por otra parte, se tiene:

$$\Delta T = -\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t}$$

donde $\Delta T$ es la anomalía del campo total en la dire--- cción del campo normal de la tierra

U es la anomalía del campo potencial, y

t es un vector unitario en la dirección del --

campo total invariante de la Tierra.

Como se vió anteriormente, $\nabla^2 U$ satisface la ecuación de Laplace, por lo cúal podemos establecer:

$$\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial z^2} = 0 \qquad (2.4)$$

por tanto, $\Delta T$ también satisface la ecuación de Laplace , pudiendo tratar la ec. (2.4) por los métodos de la -- Teoría del Potencial.

## 111.3. SOLUCION DE LA ECUACION DE LAPLACE PARA LA ANOMALIA TOTAL.

El problema que ahora nos ocupa, es el - de resolver la ecuación diferencial parcial (2.4.), por el método de separación de variables:

$$\nabla^2 \Delta T = 0 \qquad (3.1.)$$

con las siguientes condiciones a la frontera:

a) $T(x,y,z)=0$ cuando $z \rightarrow \infty$
b) $T(x,y,z)= T(x,y)$ cuando $z=0$
c) $T(x,y,z)=0$

Considerese un sistema de coordenadas cartesianas figura (111,2). Sea:

$$\Delta T(x,y,z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z) \qquad (3.2.)$$

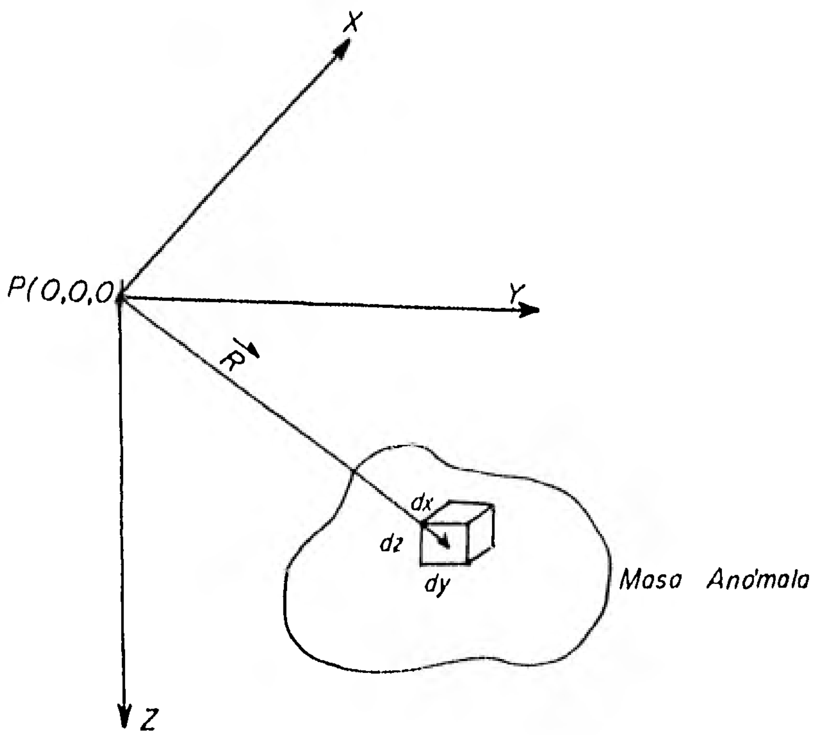



Figura III.2. Sistema de Coordenadas Cartesianas.

la anomalía del campo total.

Derivando parcialmente dos veces la ec.( 3.2.) con respecto a x, y, z respectivamente tenemos:

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} = X''(x)\, Y(y)\, Z(z)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2} = X(x)\, Y''(y)\, Z(z) \qquad (3.3.)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} = X(x)\, Y(y)\, Z''(z)$$

dividiendo cada una de las ecuaciones (3.3.) por la ec. (3.2.), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} \qquad (3.4.)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} = \frac{Z''(z)}{Z(z)}$$

sustituyendo las ecuaciones (3.4.) en la ec, (2.4.), - queda:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0 \qquad (3.5.)$$

despejando el término que involucra a la variable $\frac{X''(x)}{X(x)}$ ; de la ec. (3.5.), tenemos:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\left[\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)}\right] = -a^2 \qquad (3.6.)$$

donde $-a^2$ es la constante de separación. En este caso la separación depende del hecho de que el primer miembro - es independiente de las variables y, z; y el segundo -- miembro es independiente de la variable x.

Procediendo de manera semejante para la- variable y, se obtiene:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -b^2 \qquad (3.7.)$$

sustituyendo las ecs. (3.6.) y (3.7.) en la ec. (3.5.), y despejando el término en función de la variable z, se tiene:

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = a^2 + b^2 \qquad (3.8.)$$

Las ecs, (3.6.), (3.7.), y (3.8.) son e- cuaciones diferenciales lineales ordinarias, que dependen de una sola variable; y se pueden resolver de manera sencilla. Ahora vamos a resolver cada una de ellas, La ecuación (3.6.) se puede expresar:

$$X''(x) + X(x)\, a^2 = 0 \qquad (3.6a.)$$

y su ecuación característica es:

$$m^2 + a^2 = 0$$

donde, las raíces de la ec. anterior son:

$$m_{1x} = \sqrt{a^2 i} = a i$$

$$m_{2x} = -\sqrt{a^2 i} = -a i$$

y la solución de la ecuación (3.6a.) es:

$$X(x) = C_1 \cos ax + C_2 \operatorname{sen} a x \qquad (3.6b.)$$

La ecuación (3,7.) se puede expresar:

$$Y''(y) + Y(y)\, b^2 = 0 \qquad (3.7a.)$$

y su ecuación característica es:

$$m^2 + b^2 = 0$$

donde, las raíces de la ec. anterior son:

$$m_{1y} = \sqrt{b^2 i} = b i$$

$$m_{2y} = -\sqrt{b^2 i} = -b i$$

y la solución de la ecuación (3.7a.) es:

$$Y(y) = C_3 \cos by + C_4 \operatorname{sen} by \qquad (3.7b.)$$

Y la ecuación (3.8.) se puede expresar:

$$Z''(z) - (a^2 + b^2)\, Z(z) = 0 \qquad (3.8a.)$$

y su ecuación característica es:

$$m^2 - (a^2 + b^2) = 0$$

donde, las raíces de la ec. anterior son:

$$m_{1z} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$m_{2z} = -\sqrt{a^2 + b^2}$$

y la solución de la ecuación (3.8a) es:

$$Z(z) = C_5\, e^{(a^2+b^2)^{1/2} z} + C_6\, e^{-(a^2+b^2)^{1/2} z} \qquad (3.8b.)$$

Sustituyendo las ecs. (3.6b.), (3.7b.), y (3.8b.) en la ec. (3.2.), se tiene:

$$\Delta T(x,y,z) = \left( C_5\, e^{(a^2+b^2)^{1/2} z} + C_6\, e^{-(a^2+b^2)^{1/2} z} \right) \cdot$$

$$\cdot \left( C_1 \cos ax + C_2 \operatorname{sen} ax \right) \cdot$$

$$\cdot \left( C_3 \cos by + C_4 \operatorname{sen} by \right) \qquad (3.9.)$$

$$\Delta T(x,y,0) = e^{-(a^2+b^2)^{1/2}0}\left(A\cos ax + B\ \mathrm{sen}\ ax\right)\cdot$$
$$\cdot\left(C\cos by + D\ \mathrm{sen}\ by\right)$$
$$= \left(A\cos ax + B\ \mathrm{sen}\ ax\right)\left(C\cos by + D\ \mathrm{sen}\ by\right)$$

$\therefore\ \Delta T(x,y,z) = \Delta T(x,y)$ cuando $z=0$ l.q.q.d.

c) La tercera condición de frontera $\nabla^2\Delta T=0$, se demostro en la sección anterior.

Entonces la anomalía del campo total $\Delta T$, ecuación (3.2.), tiene la solución final:

$$\Delta T(x,y,z) = e^{-(a^2+b^2)^{1/2}z}\cdot\left(A\cos ax + B\ \mathrm{sen}\ ax\right)\cdot$$
$$\cdot\left(C\cos by + D\ \mathrm{sen}\ by\right) \qquad (3.11.)$$

### III.4. EXPANSION DE LA FUNCION $\Delta T$ EN UNA SERIE DOBLE DE FOURIER.

La ecuación (3.11.) es la suma de funciones senos y cosenos; en base al análisis de la función seno vamos a determinar los valores correspondientes de a y b que aparecen en este ecuación.

Tomando la función seno $w_m x$ figura(III.3), en la dirección del eje x; donde:

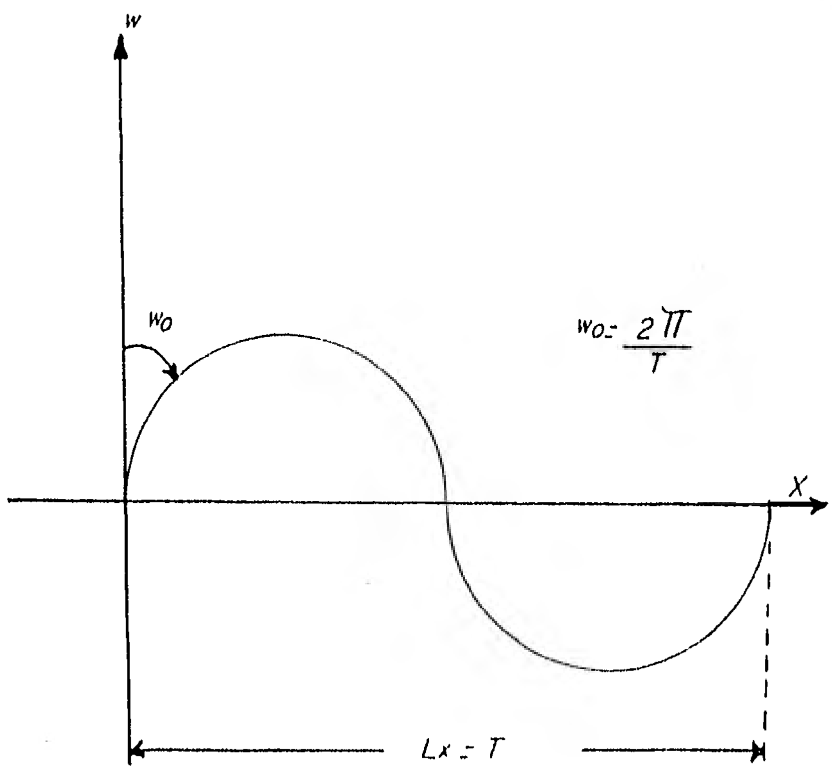



Figura III.3. Representación de la función seno x.

$w_m = mw_0$ , y es la enésima armónica de la función.

$w_0 = \frac{2\pi}{T}$ , y es la frecuencia angular fundamental.

T=Lx , es la longitud de onda fundamental (para nuestro problema); entonces se ve que:

$$w_n = \frac{2\pi m}{Lx}$$

por tanto, se tiene que:

$$w_n = a = \frac{2\pi m}{Lx} \quad ;$$

en forma similar, para la función seno $w_n y$ en la dirección del eje y, se tiene:

$$b = \frac{2\pi n}{Ly}$$

Sustituyendo los valores de a y b, y efectuando una expansión en una serie de Fourier en la ecuación (3.11.), se tiene que:

$$\Delta T(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Big\{ e^{-\left[\left(\frac{2\pi m}{Lx}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{Ly}\right)^2\right]^{1/2} z} \cdot \left[\left(A_m \cos \frac{2\pi m}{Lx} x + B_m \operatorname{sen} \frac{2\pi m}{Lx} x\right)\left(C_n \cos \frac{2\pi n}{Ly} y + D_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{Ly} y\right)\right] \Big\} \quad (4.1.)$$

donde:

Lx, Ly son las longitudes de onda fundamentales en las direcciones x, y respectivamente,

$A_m$, $B_m$, $C_n$, y $D_n$ son los coeficientes de la serie-de Fourier.

Para hacer la expansión de la ec.(3.11.), en una serie doble de Fourier, tenemos que hacer varias-consideraciones:

a).- La anomalía $\Delta T$ será analizada en el plano x-y conteniendo M y N número de valores respectivamente, haciendo z=0.

b).- Los valores del campo total (gravimétricos o -magnéticos) están leídos a lo largo de los e--jes x, y a espaciamientos uniformes de Sx y Sy respectivamente; estos espaciamientos determinan las longitudes mínimas de onda a lo largo-de los dos ejes, y fijan las armónicas más grandes $m_0$ y $n_0$.

c).- Se van a considerar solamente los perfiles Norte-Sur, esto es; la expansión de la función sera hecha a lo largo del eje x, tomando al eje-y fijo. En consecuencia de esto, los coeficientes de la serie serán funciones de la variable y.

hechas estas consideraciones, la ec. (3.11.) queda:

$$\Delta T(x,y) = \left( A \cos \frac{2\pi m}{Lx} x + B \operatorname{sen} \frac{2\pi m}{Lx} x \right) \qquad (4.2.)$$

de aquí en adelante, para facilitar el manejo de la notación en las ecuaciones, se van a sustituir los sig. valores:

$$a = \frac{2\pi m}{Lx} \quad , \quad b = \frac{2\pi n}{Ly}$$

Expandiendo la ecuación (4.2.) en una serie de Fourier a lo largo del eje x, se obtiene:

$$\Delta T(x,y)=\sum_{m=0}^{m_0}\left[A_n(y)\cos ax+B_n(y)\,\mathrm{sen}\,ax\right] \qquad (4.3.)$$

los coeficientes $A_n(y)$ y $B_n(y)$, estan en función de la variable y; suponiendo que estos, pueden ser expandidos nuevamente en una serie de Fourier, se tiene:

$$A_n(y)=\sum_{n=0}^{n_0}\left(A_{mn}\cos by+B_{mn}\,\mathrm{sen}\,by\right)$$
$$(4.4.)$$
$$B_n(y)=\sum_{n=0}^{n_0}\left(C_{mn}\cos by+D_{mn}\,\mathrm{sen}\,by\right)$$

sustituyendo las ecuaciones (4.4.) en la ecuación (4.3.) se obtiene:

$$\Delta T(x,y)=\sum_{m=0}^{m_0}\sum_{n=0}^{n_0}\left[A_{mn}\cos ax\cos by+B_{mn}\cos ax\,\mathrm{sen}\,by+\right.$$
$$\left.C_{mn}\,\mathrm{sen}\,ax\cos by+D_{mn}\,\mathrm{sen}\,ax\,\mathrm{sen}\,by\right] \qquad (4.5.)$$

donde:

$$a=\frac{2\pi m}{Lx} \quad , \; y \qquad b=\frac{2\pi n}{Ly}$$

$A_{mn}$, $B_{mn}$, $C_{mn}$, y $D_{mn}$ son los coeficientes de la expansión de $\Delta T$ en una Serie Doble de Fourier.

La ecuación (4.5.) es la representación de la función $\Delta T$ expandida en una Doble Serie de Fourier, y es equivalente a la ecuación (4.1.) tomando z=0. Ahora, solo falta evaluar los coeficientes de la ecuación (4.5.), esto se hace; aplicando el procedimiento de integración empleado en una serie de Fourier ordinaria, este procedimiento se realiza dos veces.

Para calcular los coeficientes de la ecuación (4.5.), vamos a tomar las siguientes consideraciones:

$$a = \frac{2\pi m}{Lx} \quad , \quad b = \frac{2\pi n}{Ly} \quad ,$$

$$\alpha = \frac{2\pi m}{Lx} \quad , \quad \beta = \frac{2\pi n}{Ly} \quad .$$

Multiplicando la ec. (4.5.) por cos $\alpha$ x,- ($\alpha \neq 0$); e integrando de 0 a Lx con respecto a x, se obtiene:

$$\int_0^{Lx} \Delta T(x,y) \cos \alpha x \, dx = \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{n=0}^{n_0} \int_0^{Lx} \Big( A_{mn} \cos by \cos ax + B_{mn} \operatorname{sen} by \cos ax$$

$$+ C_{mn} \cos by \operatorname{sen} ax + D_{mn} \operatorname{sen} by \operatorname{sen} ax \Big) \cos \alpha x \, dx \cdots \quad \ldots (4.6.)$$

aplicando las condiciones de ortogonalidad a la ec. (4.6.), se tiene:

$$\int_0^{Lx} \Delta T(x,y) \cos \alpha x \, dx = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{\pi}{2} \Big( A_{\alpha n} \cos by + B_{\alpha n} \operatorname{sen} by \Big) \quad (4.6a.)$$

multiplicando la ec. (4.6a.) por cos $\beta$ y, ($\beta \neq 0$); e integrando de 0 a Ly con respecto a y, se tiene:

$$\int_0^{Ly} \int_0^{Lx} \Delta T(x,y) \cos \alpha x \cos \beta y \, dx \, dy = \sum_{n=0}^{n_0} \int_0^{Ly} \frac{\pi}{2} \Big( A_{\alpha n} \cos by +$$

$$B_{\alpha n} \operatorname{sen} by \Big) \cos \beta y \, dy$$

aplicando condiciones de ortogonalidad a la ecuación anterior:

$$A_{\alpha\beta}\frac{\pi^2}{4}=\int_0^{Ly}\int_0^{Lx}\Delta T(x;y)\cos\alpha x\cos\beta y\,dx\,dy$$

cambiando notación; y despejando a $A_{mn}$ se obtiene:

$$A_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{Ly}\int_0^{Lx}\Delta T(x,y)\cos\frac{2\pi m}{Lx}x\cos\frac{2\pi n}{Ly}y\,dx\,dy \quad (4.7.)$$

Multiplicando la ecuación (4.6a.) por sen $\beta y$, ($\beta\neq 0$); e integrando de 0 a Ly con respecto a y, se tiene:

$$\int_0^{Ly}\int_0^{Lx}\Delta T(x,y)\cos\alpha x\,\mathrm{sen}\,\beta y\,dx\,dy=\sum_{n=0}^{n_0}\int_0^{Ly}\frac{\pi}{2}\left(A_{\alpha n}\cos by+B_{\alpha n}\,\mathrm{sen}\,by\right)\mathrm{sen}\,\beta y\,dy$$

y aplicando condiciones de ortogonalidad en la ecuación anterior, se tiene:

$$B_{\alpha\beta}\frac{\pi^2}{4}=\int_0^{Ly}\int_0^{Lx}\Delta T(x,y)\cos\alpha x\,\mathrm{sen}\,\beta y\,dx\,dy$$

cambiando notación; y despejando a $B_{mn}$ se obtiene:

$$B_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{Ly}\int_0^{Lx}\Delta T(x,y)\cos\frac{2\pi m}{Lx}x\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi n}{Ly}y\,dx\,dy \quad (4.8.)$$

Ahora, multiplicando nuevamente la ecuación (4.5.) por sen $\alpha x$, ( $\alpha \neq 0$); e integrando de 0 a Lx con respecto a x, se obtiene:

$$\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\, sen\, \alpha x\, dx = \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{n=0}^{n_0} \int_0^{Lx} ( A_{mn} \cos by \cos ax + B_{mn}\, sen\, by \cos ax + C_{mn}\, sen\, ax \cos by + D_{mn}\, sen\, ax\, sen\, by)\, sen\, \alpha x\, dx$$

....(4.9.)

aplicando condiciones de ortogonalidad en la ec. anterior, se tiene:

$$\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\, sen\, \alpha x\, dx = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{\pi}{2} \left( C_{\alpha n} \cos by + D_{\alpha n}\, sen\, by \right) \quad (4.9a.)$$

multiplicando esta ecuación por cos $\beta y$, ( $\beta \neq 0$); e integrando de 0 a Ly con respecto a y, se tiene:

$$\int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\, sen\, \alpha x \cos \beta y\, dx\, dy = \sum_{n=0}^{n_0} \int_0^{Ly} \frac{\pi}{2} ( C_{\alpha n} \cos by + D_{\alpha n}\, sen\, by) \cos \beta y\, dy$$

aplicando condiciones de ortogonalidad en la ecuación anterior, se tiene:

$$C_{\alpha\beta} \frac{\pi^2}{4} = \int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\, sen\, \alpha x \cos \beta y\, dx\, dy$$

cambiando notación, y despejando a $C_{mn}$ se tiene:

$$C_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\, sen\, \frac{2\pi m}{Lx} x \cos \frac{2\pi n}{Ly} y\, dx\, dy \quad (4.10.)$$

Multiplicando la ecuación (4.9a.) por sen $\beta y$, ($\beta \neq 0$); e integrando de 0 a Ly con respecto a y, se tiene:

$$\int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\ \text{sen}\ \alpha x\ \text{sen}\ \beta y\ dx\,dy = \sum_{n=0}^{n_0} \int_0^{Ly} (C_{an} \cos by + D_{an}\ \text{sen}\ by)\ \text{sen}\ \beta y\ dy$$

aplicando condiciones de ortogonalidad en la ec. anterior , se tiene:

$$D_{\alpha\beta} \frac{\pi^2}{4} = \int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\ \text{sen}\ \alpha x\ \ \text{sen}\ \beta y\ dx\,dy$$

cambiando notación, y despejando a $D_{mn}$ se obtiene:

$$D_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\ \text{sen}\ \frac{2\pi m}{Lx} x\ \ \text{sen}\ \frac{2\pi n}{Ly} y\ dx\,dy \qquad (4.11.)$$

Las ecuaciones (4.7.), (4.8.), (4.10), y-(4.11.), únicamente son válidas para m, n =1,2,3,.... Los coeficientes $A_{on}$, $A_{mo}$, $B_{on}$, $B_{mo}$, $C_{on}$, $C_{mo}$, $D_{on}$, $D_{mo}$, son coeficientes que involucran términos de solamente una variable, por inspección de estos coeficientes se tiene que:

$$D_{mo} = D_{on} = C_{on} = B_{mo} = 0\ ;$$

porque involucran a términos de seno 0. A continuación - se van a obtener los coeficientes restantes.

Multiplicando la ecuación (4.6a.) por cos 0y=1; para m≠0 y n=0, e integrando de 0 a Ly con respecto a y, se obtiene:

$$\int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y) \cos \alpha x \, dx dy = \sum_{n=0}^{n_0} \int_0^{Ly} ( A_{\kappa 0} \cos by + B_{\alpha 0} \operatorname{sen} by ) \cdot \cos 0y \, dx dy$$

aplicando condiciones de ortogonalidad en la ec. anterior, se tiene:

$$A_{\alpha 0} \frac{2\pi^2}{4} = \int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y) \cos \alpha x \, dx dy$$

cambiando notación, y despejando a $A_{mo}$ se obtiene:

$$A_{m0} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y) \cos \frac{2\pi m}{Lx} x \, dx dy \qquad (4.12.)$$

Multiplicando la ec. (4.5.) por cos $\beta y$,( $\beta \neq 0$); e integrando de 0 a Ly con respecto a y, se tiene:

$$\int_0^{Ly} \Delta T(x,y) \cos \beta y \, dy = \sum_{m=0}^{m_0}\sum_{n=0}^{n_0} \int_0^{Ly} ( A_{mn} \cos by \cos ax + B_{mn} \operatorname{sen} by \cos ax + C_{mn} \cos by \operatorname{sen} ax + D_{mn} \operatorname{sen} by \operatorname{sen} ax ) \cos \beta y \, dy$$

aplicando condiciones de ortogonalidad en la ec. anterior, se tiene:

$$\int_0^{Ly} \Delta T(x,y) \cos \beta y \, dy = \sum_{m=0}^{m_0} \frac{\pi}{2} ( A_{mn} \cos ax + C_{mn} \operatorname{sen} ax ) \quad .. \quad ..(4.13.)$$

multiplicando la ec. (4.13.) por cos 0x=1; e integrando de 0 a Lx con respecto de x, se tiene:

$$\int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\cos\beta y\,dy\,dx = \sum_{m=0}^{m_0}\int_0^{Lx}(A_{o\beta}\cos ax + C_{o\beta}\,\mathrm{sen}\,ax)\,dx$$

aplicando condiciones de ortogonalidad en la ecuación an terior, en donde m=0, y n≠0, se tiene:

$$\frac{2\pi^2}{4}A_{o\beta} = \int_0^{Ly}\int_0^{Lx}\Delta T(x,y)\cos\beta y\,dx\,dy$$

cambiando notación, y despejando a $A_{on}$ se obtiene:

$$A_{on} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{Ly}\int_0^{Lx}\Delta T(x,y)\cos\frac{2\pi n}{Ly}y\,dx\,dy \qquad (4.14.)$$

Si en la ecuación (4.5.) se hace m=0; y - si se integra de 0 a Lx con respecto a x, se tiene:

$$\int_0^{Lx}\Delta T(x,y)\,dx = \sum_{m=0}^{m_0}\sum_{n=0}^{n_0}\int_0^{Lx}(A_{on}\cos by + B_{on}\,\mathrm{sen}\,by)\,dx$$

aplicando condiciones de ortogonalidad en la ecuación an terior, se tiene:

$$\int_0^{Lx}\Delta T(x,y)\,dx = \sum_{n_0}^{n_0}\pi\,(A_{on}\cos by + B_{on}\,\mathrm{sen}\,by)$$

haciendo n=0; e integrando de 0 a Ly con respecto a y la ecuación, se tiene:

$$\int_0^{Ly}\int_0^{Lx}\Delta T(x,y)\,dx\,dy = \pi\sum_{n\neq 0}^{n_0}\int_0^{Ly}A_{oo}\,dy$$

y aplicando condiciones de ortogonalidad en la ecuación anterior, se tiene:

$$\pi^2 A_{oo} = \int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\, dx\, dy$$

despejando a $A_{oo}$ de la ec. anterior, se obtiene:

$$A_{oo} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\, dx\, dy \qquad (4.15.)$$

Multiplicando la ec. (4.5.) por seno $\beta y$; e integrando de 0 a Ly con respecto a y, se tiene:

$$\int_0^{Ly} \Delta T(x,y)\, sen\, \beta y\, dy = \sum_{m=o}^{mo}\sum_{n=o}^{no}\int_0^{Ly} \Big(A_{mn} \cos by \cos ax + B_{mn}\, sen\, by$$

$$\cos ax + C_{mn}\, sen\, ax \cos by + D_{mn}\, sen\, ax\, sen\, by\Big)\, sen\, \beta y\, dy$$

aplicando condiciones de ortogonalidad en la ec. anterior, se tiene:

$$\int_0^{Ly} \Delta T(x,y)\, sen\, \beta y\, dy = \sum_{m=o}^{mo} \frac{\pi}{2}\left(B_{mn} \cos ax + D_{mn}\, sen\, ax\right) \qquad (4.16.)$$

haciendo m=0, y multiplicando la ec. (4.16.) por cos Cx= 1; e integrando de 0 a Lx con respecto a x, se tiene:

$$\int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\, sen\, \beta y\, dy\, dx = \sum_{m=o}^{mo} \frac{\pi}{2}\int_0^{Lx} B_{o\alpha}\, dx$$

aplicando condiciones de ortogonalidad en la ec. anterior, se tiene:

$$\frac{2\pi^2}{4} B_{o\alpha} = \int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\ \text{sen}\ \beta y\ dx\,dy$$

cambiando notación, y despejando a $B_{on}$ se obtiene:

$$B_{on} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\ \text{sen}\ \frac{2\pi n}{Ly}\, y\ dx\,dy \qquad (4.17.)$$

Multiplicando la ecuación (4.9a.) por cos Oy=1; e integrando de 0 a Ly con respecto a y, se tiene:

$$\int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\ \text{sen}\ \alpha x\ dx\,dy = \sum_{n=0}^{n_0}\int_0^{Ly} \frac{\pi}{2}\, C_{\alpha o}\ dy$$

aplicando condiciones de ortogonalidad en la ec. anterior, se tiene:

$$C_{\alpha o}\,\frac{2\pi^2}{4} = \int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\ \text{sen}\ \alpha x\ dx\,dy$$

cambiando notación, y despejando a $C_{mo}$ se obtiene:

$$C_{mo} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{Ly}\int_0^{Lx} \Delta T(x,y)\ \text{sen}\frac{2\pi m}{Lx}\, x\ dx\,dy \qquad (4.18.)$$

Se han calculado los coeficientes de la Doble Serie de Fourier de la ecuación (4.5.); ahora, simplemente hay que sustituirlos en dicha ecuación, y se obtiene la expresión para calcular la anomalía total del -

campo al plano de referencia, esto es; cuando z=0. El -- problema de la Continuación Analítica, y Segunda Derivada por medio de la doble serie de Fourier, se trata a -- continuación.

## III.5. CONTINUACION ANALITICA DE CAMPO.

En el inciso anterior se obtuvo una expresión para calcular la anomalía del campo total en el plano de referencia (z=0) por medio de la expansión de una función en una Serie Doble de Fourier, ec. (4.5.); a continuación, se obtendrá una expresión para calcular la -- Continuación Analítica del Campo.

Como se menciono anteriormente, las ecuaciones (4.5.) y (4.1.) son equivalentes. Entonces, para obtener la continuación analítica solo hay que introdu--cir el término que esta en función de la variable z de la ecuación (4.1.) en la ecuación (4.5.), obteniendo así la expresión final para la Continuación Analítica de Campo, la cúal queda:

$$\Delta T(x,y,z) = \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{n=0}^{n_0} \Bigg\{ e^{-\left[\left(\frac{2\pi m}{Lx}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{Ly}\right)^2\right]^{1/2} z} \cdot$$

$$\cdot \Bigg[ \Big( A_{mn} \cos \frac{2\pi m}{Lx} x \cos \frac{2\pi n}{Ly} y + B_{mn} \cos \frac{2\pi m}{Lx} x \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{Ly} y$$

$$+ C_{mn} \operatorname{sen} \frac{2\pi m}{Lx} x \cos \frac{2\pi n}{Ly} y + D_{mn} \operatorname{sen} \frac{2\pi m}{Lx} x \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{Ly} y \Big) \Bigg] \Bigg\} \quad \ldots\ldots(5.1.)$$

donde $A_{mn}$, $B_{mn}$, $C_{mn}$, y $D_{mn}$ son los coeficientes de la Doble Serie de Fourier, y ya se calcularon con anterioridad.

Sustituyendo diferentes valores de la variable z en la ecuación (5.1.), se obtiene la Continuación Analítica hacia arriba o hacia abajo. En Magnetometría, las unidades están dadas en Gammas; y para Gravimetría, las unidades son en Miligales.

## III.6. SEGUNDA DERIVADA DE CAMPO.

La expresión para calcular la Segunda Derivada por medio de la doble serie de Fourier, es sumamente fácil de obtener. Simplemente, se tiene que derivar con respecto a la variable z dos veces la ec. (5.1.). Ahora, se va a derivar la ec. (5.1.) con respecto a z; teniendo en cuenta que para facilitar el manejo de la notación haremos las siguientes consideraciones:

$$C = \left( A_{mn} \cos ax \cos by + B_{mn} \cos ax \operatorname{sen} by + C_{mn} \operatorname{sen} ax \cos by + D_{mn} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} by \right) ;$$

$$a = \frac{2\pi m}{Lx} \quad ; \quad b = \frac{2\pi n}{Ly} \quad .$$

Entonces, la ecuación (5.1.) queda de la siguiente forma:

$$\Delta T(x,y,z) = e^{-(a^2+b^2)^{1/2} z} \, C \qquad (6.1.)$$

derivando la ec. (6.1.) con respecto a z, se obtiene:

$$\frac{\partial \Delta T(x,y,z)}{\partial z} = -(a^2+b^2)^{1/2}\, e^{-(a^2+b^2)^{1/2} z} \cdot C \qquad (6.2.)$$

sustituyendo los valores de a, b, y C en la ec. (6.2.),- se obtiene la expresión para calcular la primera derivada del campo.

Derivando nuevamente la ec. (6.2.) con -- respecto a z, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \Delta T(x,y,z)}{\partial z^2} = (a^2+b^2)\, e^{-(a^2+b^2)^{1/2} z} \cdot C \qquad (6.3.)$$

generalizando la ec. (6.3.) para la enésima derivada del campo se obtiene:

$$\frac{\partial^n \Delta T(x,y,z)}{\partial z^n} = \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{n=0}^{n_0} \left[-(a^2+b^2)^{1/2}\right]^n e^{-(a^2+b^2)^{1/2} z} \cdot C \qquad (6.4.)$$

La ecuación (6.4.) es la expresión para - obtener la enésima derivada del campo, simplemente hay - que sustituir los valores correspondientes de a, b, y C. Por lo general, lo que se desea obtener es la Segunda Derivada del campo en el plano de referencia esto es cuando z=0, para hacer esto; solo se necesita sustituir el - valor de z=0 en la ecuación (6.3.).

Una de las ventajas que representa la ec. (6.3.) sobre los métodos convencionales, es la de que; - se puede calcular la segunda derivada del campo cuando - z=0, así como para diferentes valores de la anomalía con tinuados hacia arriba o hacia abajo. En el siguiente capítulo se explicará con más detalle esto.

# IV. DISCUSION DE RESULTADOS.

Ejemplos de Continuación Analítica, Segunda Derivada, y Anomalía del campo (para Gravimetría y Magnetometría), calculados por el método propuesto, así como también, por los métodos convencionales de cálculo se presentan en este capítulo.

Los resultados se presentan en dos tipos diferentes de gráficas: El primero, es un mapa de curvas isoanómalas en dos dimensiones; el segundo, es la representación del efecto anómalo en tres dimensiones, con un azimut de $-125^{0}$, y un ángulo visual de $45^{0}$ a partir de un plano horizontal.

Para la obtención de los resultados, se utilizó un modelo teórico con las siguientes características:

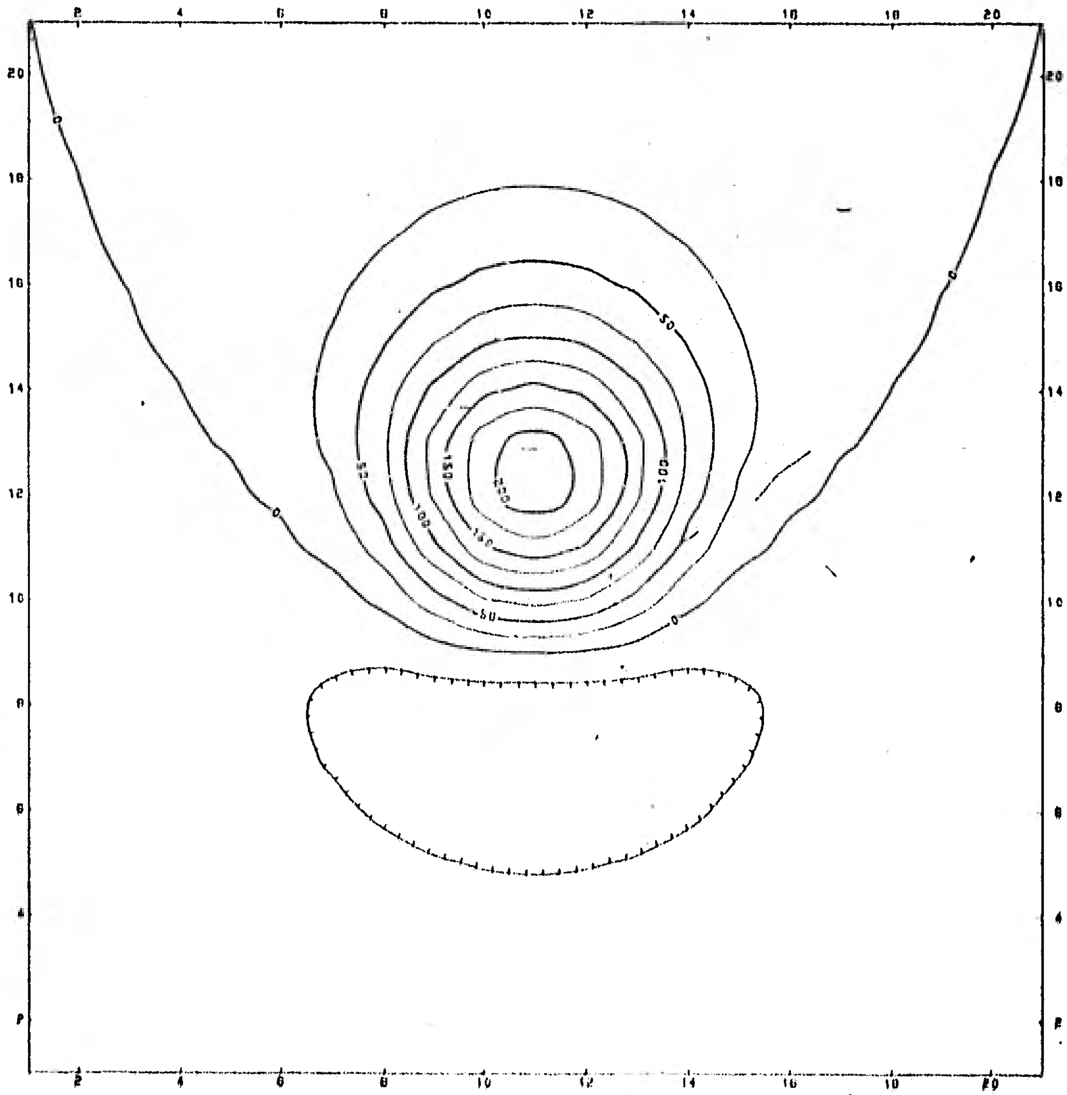
1).- Tipo del cuerpo: Un cubo de 4 Km por lado.
2).- Malla: de 20 Km de longitud en el eje x, y 20 Km en el eje y.
3).- Incremento de Muestreo: 1 Km.
4).- Coordenadas de los vértices del cuerpo: (8,8), (8,12),(12,12),(12,8),(8,8), a partir del punto considerado como orígen.
5).- Profundidad: a) 2 Km del plano de referncia al tope del cuerpo.
   b) 4 Km del plano de referencia a la base del cuerpo.
6).- Datos de Magnetometría:
   a) Intensidad Magnética del campo 52 000 gammas
   b) Declinación " " " $0^{0}$
   c) Inclinación " " " $60^{0}$
   d) Susceptibilidad Magnética -0,003
7).- Datos de Gravimetría:
   a) Contraste de Densidad -0,2

Para poder comparar los resultados obtenidos por el método propuesto, con los obtenidos por los métodos convencionales de cálculo, se hicieron varios ejemplos, mostrandose aquí, los siguientes:

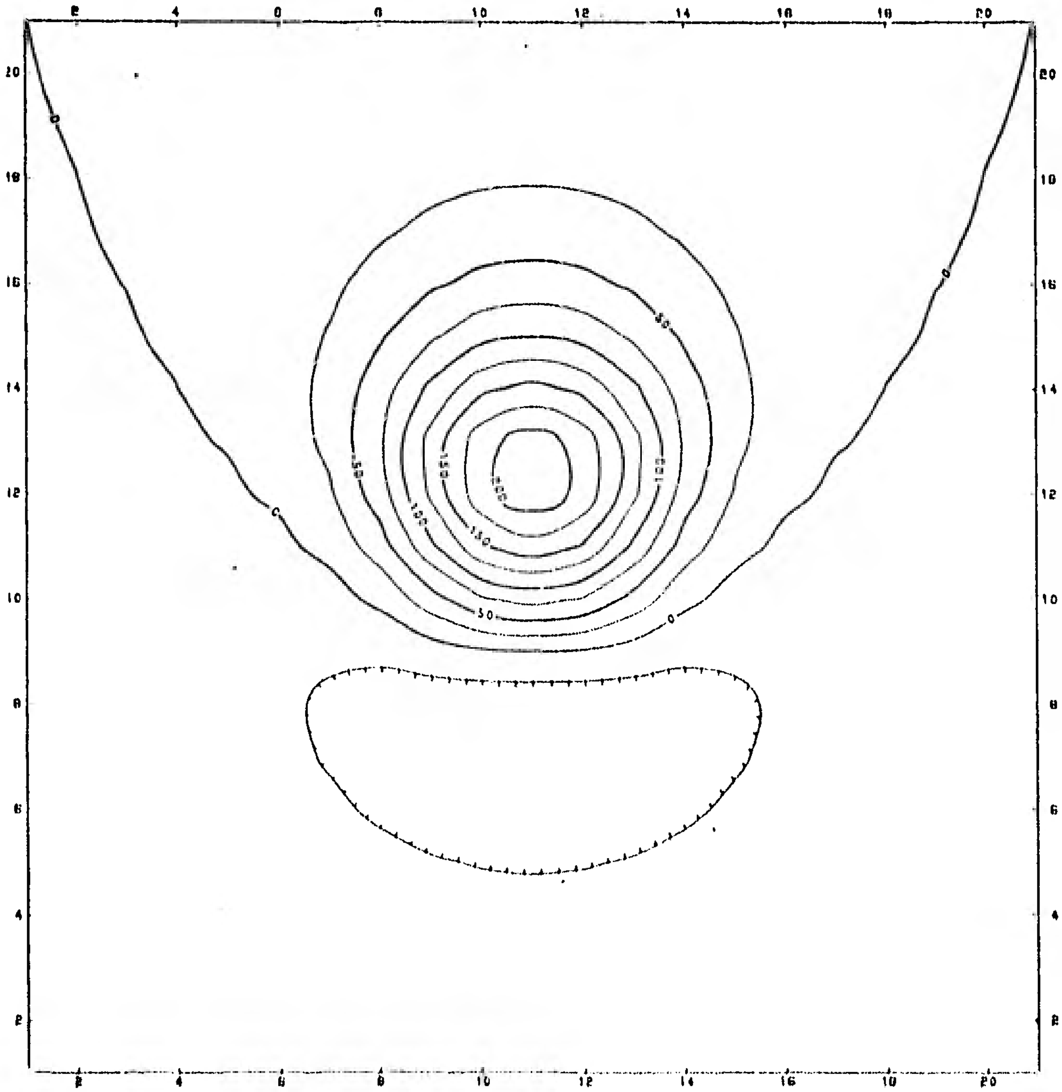
1).- La Anomalía del campo causada por el cuerpo al plano de referencia (cuando z=0).
2).- La Continuación Analítica hacia abajo para z=-1 del plano de referencia.
3).- La Segunda Derivada del campo (cuando z=0).

Analizando los ejemplos antes mencionados se encontro, que el método propuesto es tan efectivo, como lo son los métodos convencionales. El método propuesto presenta grandes ventajas sobre los métodos convencionales, las cuales se mencionan en el siguiente capítulo.

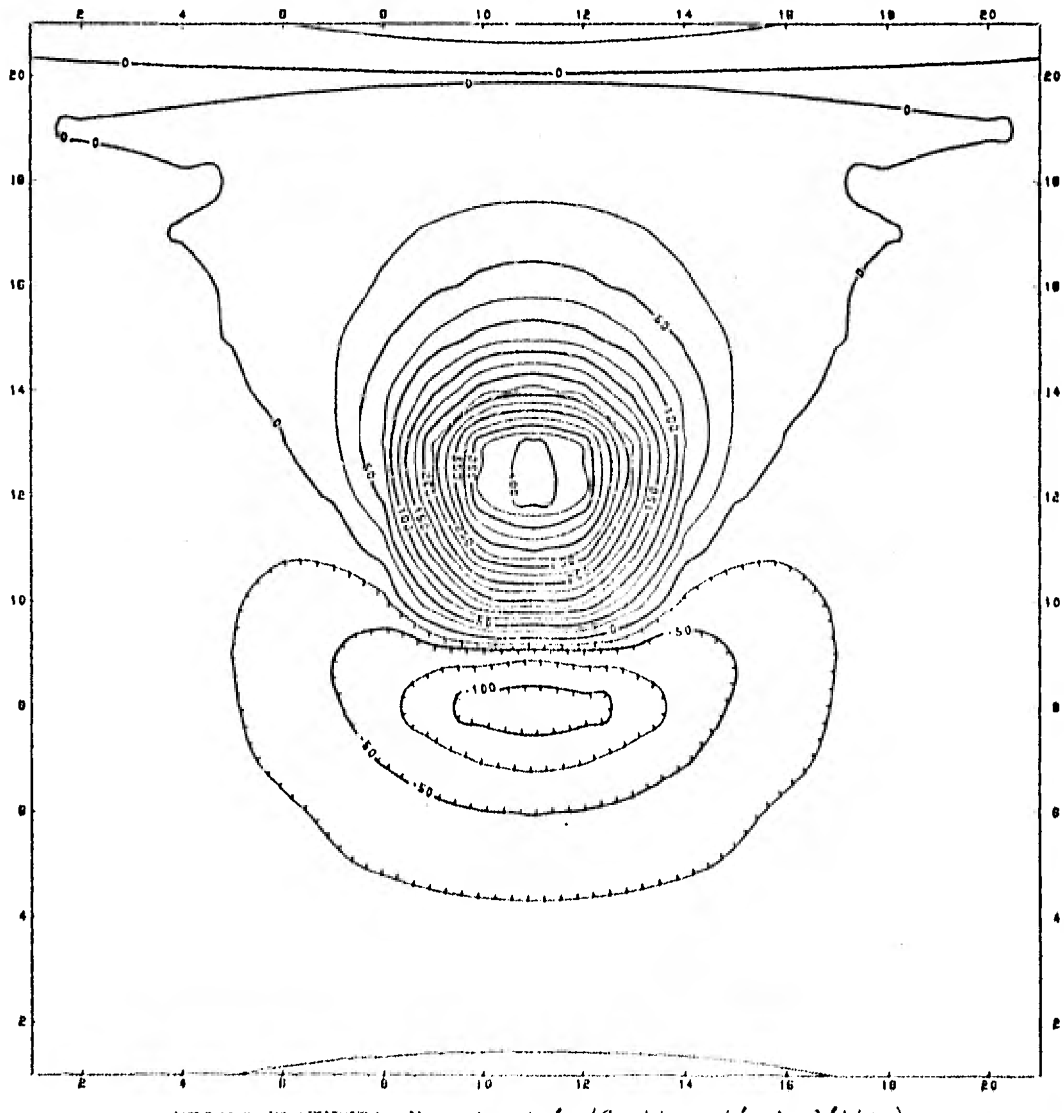
A continuación, se presentan las gráficas para Gravimetría y para Magnetometría de los resultados obtenidos; en el anexo de este trabajo se muestran los programas de computación utilizados (ver Introducción).



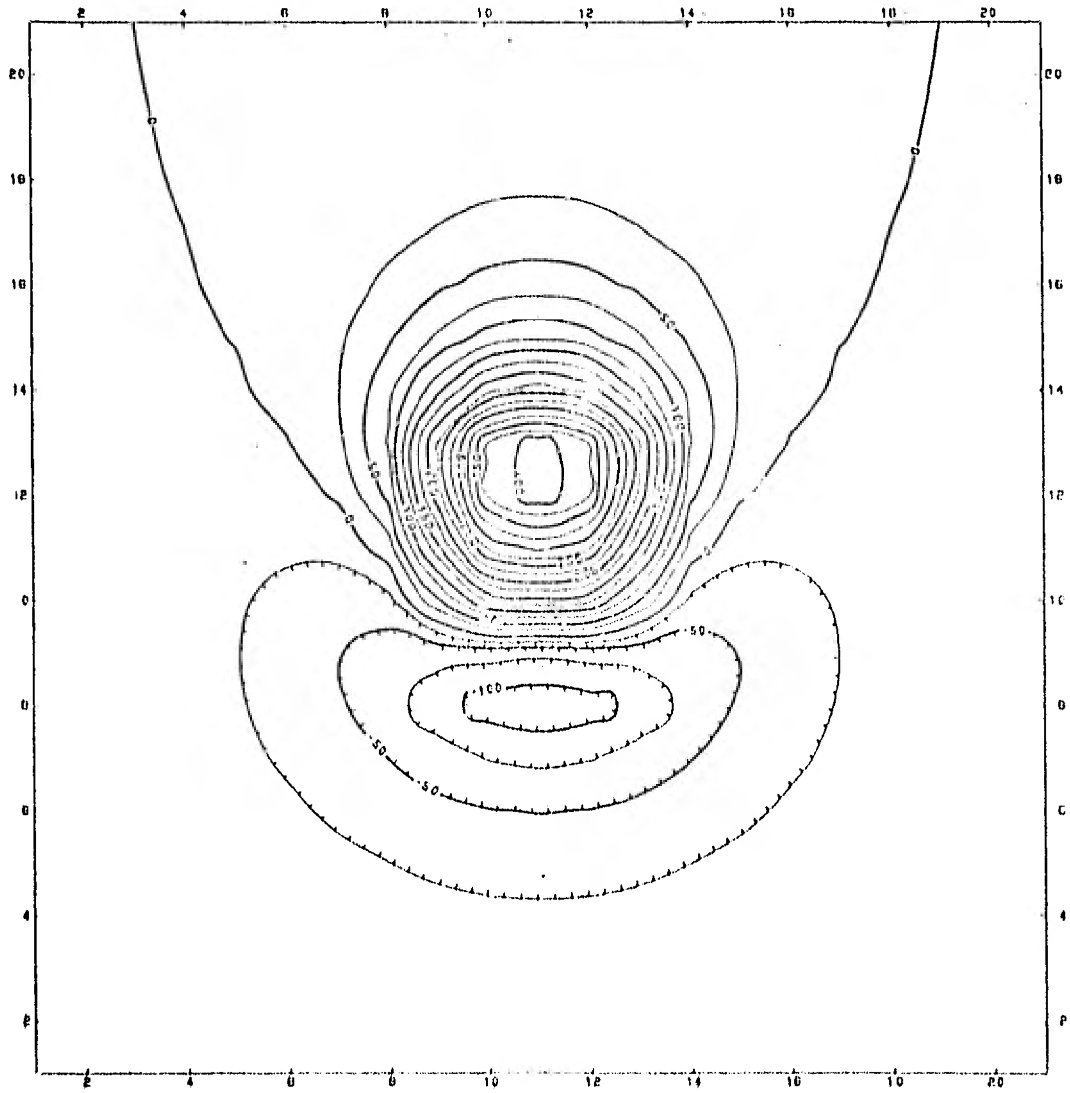
METODO PROPUESTO; Magnetometría (Anomalía del Campo).



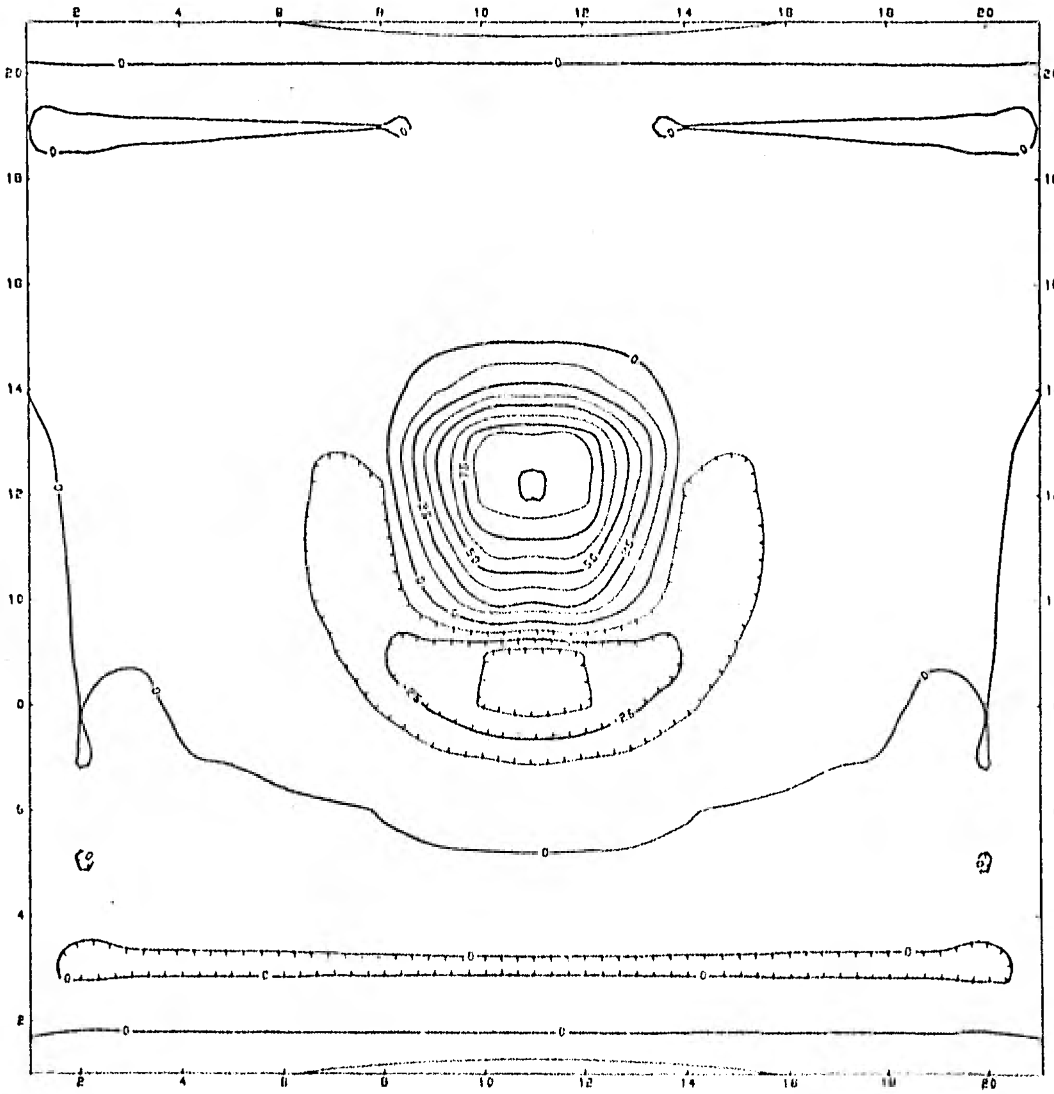

METODOS CONVENCIONALES: Magnetometría (Anomalía del Campo).



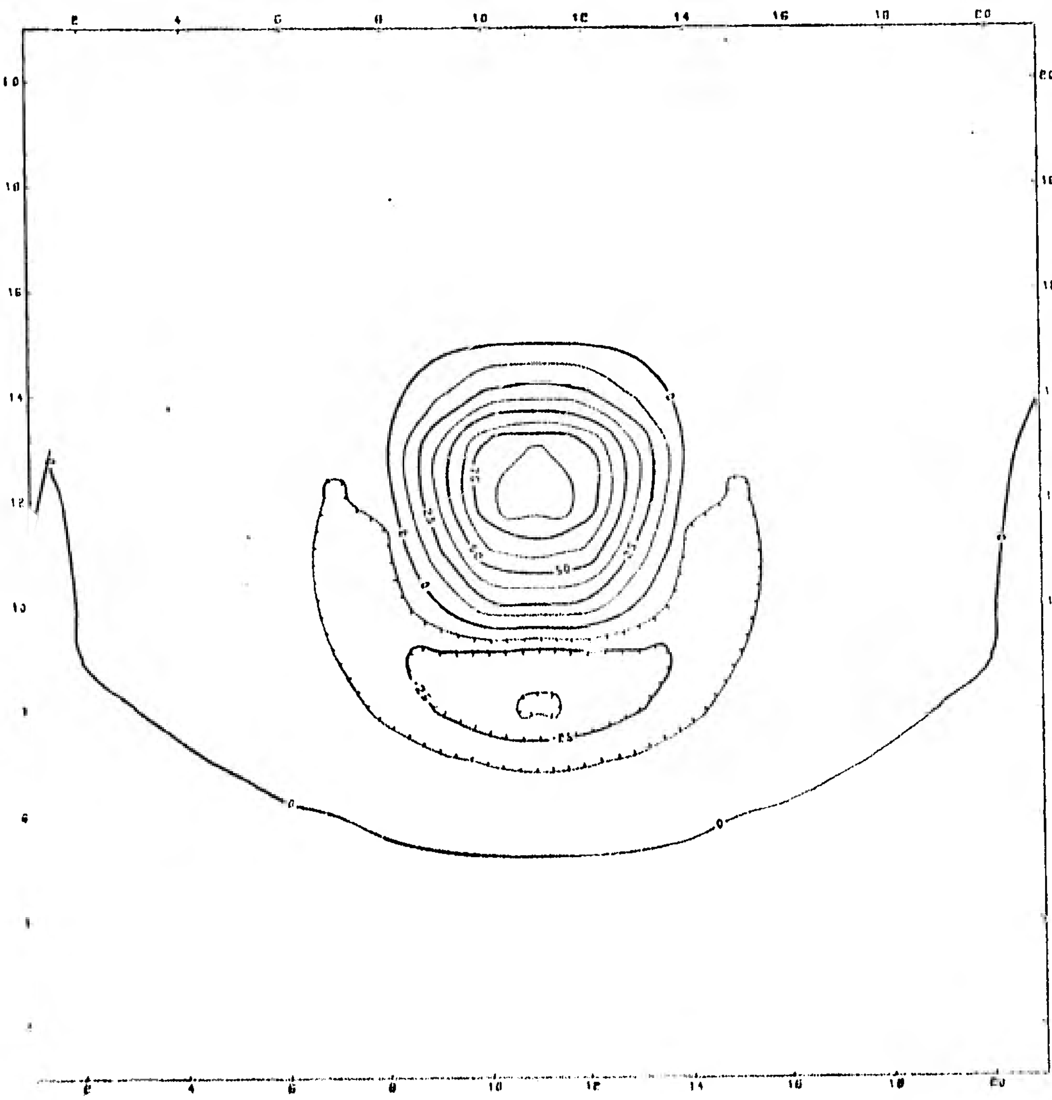
METODO PROPUESTO: Magnetometría (Continuación Analítica).



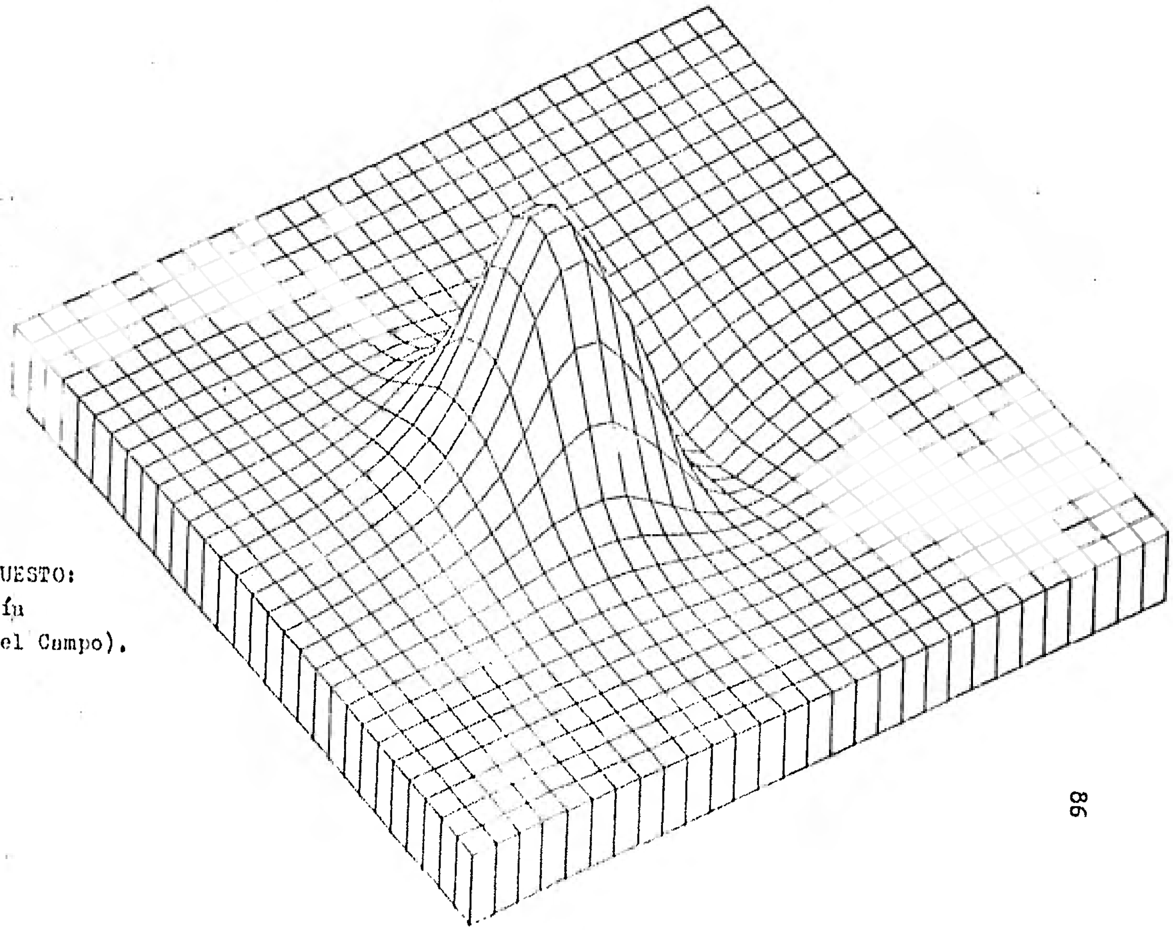

METODOS CONVENCIONALES: Magnetometría (Continuación Analítica),



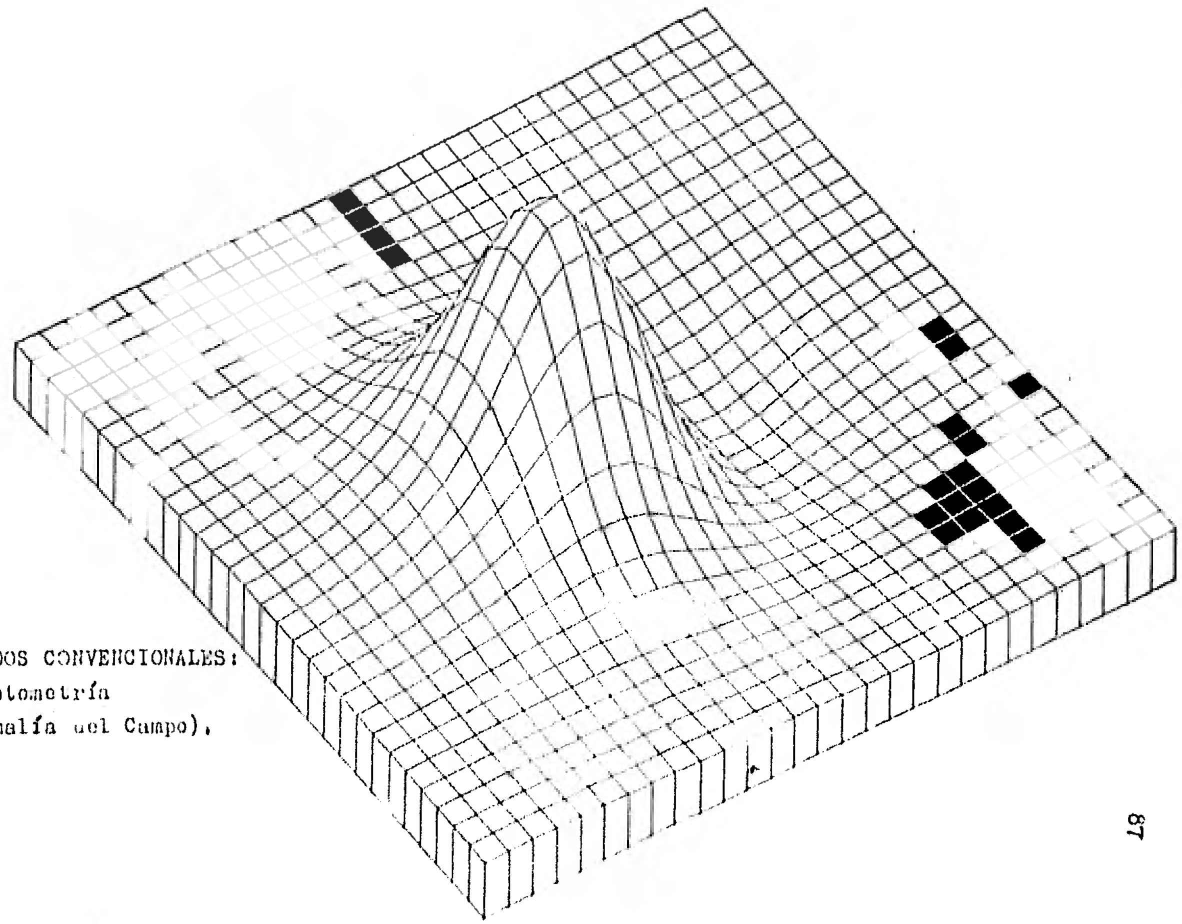
METODO PROPUESTO: Magnetometría (Segunda Derivada).



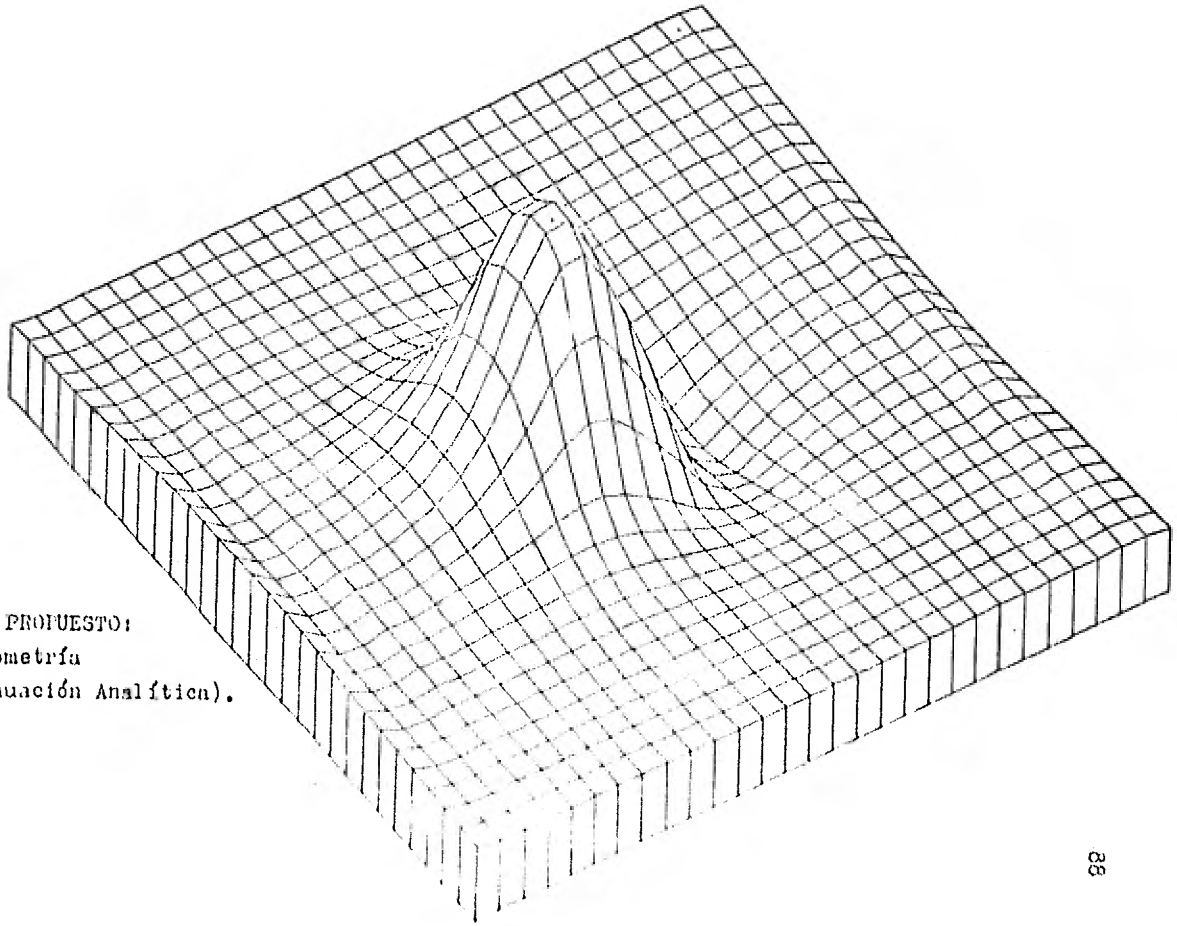
METODOS CONVENCIONALES: Magnetometría (Segunda Derivada).



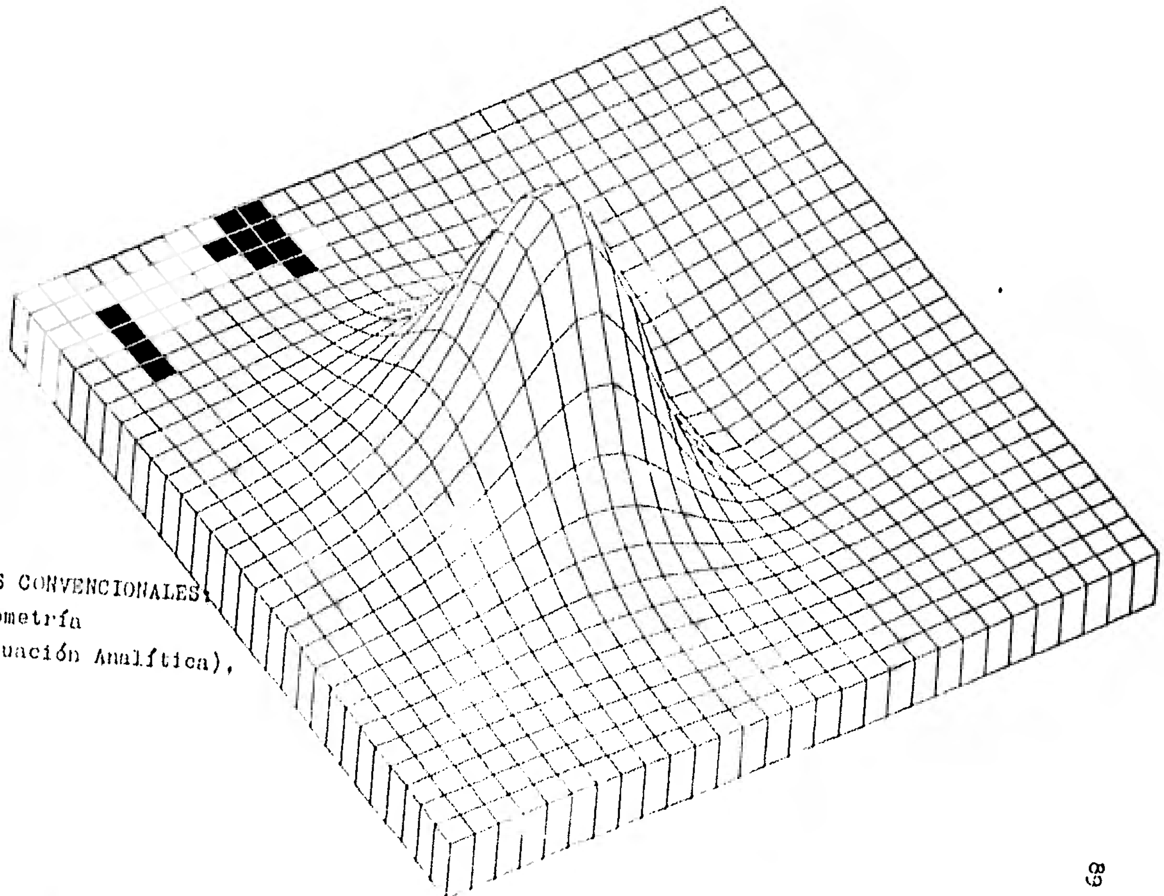
METODO PROPUESTO:
Magnetometría
(Anomalía del Campo).



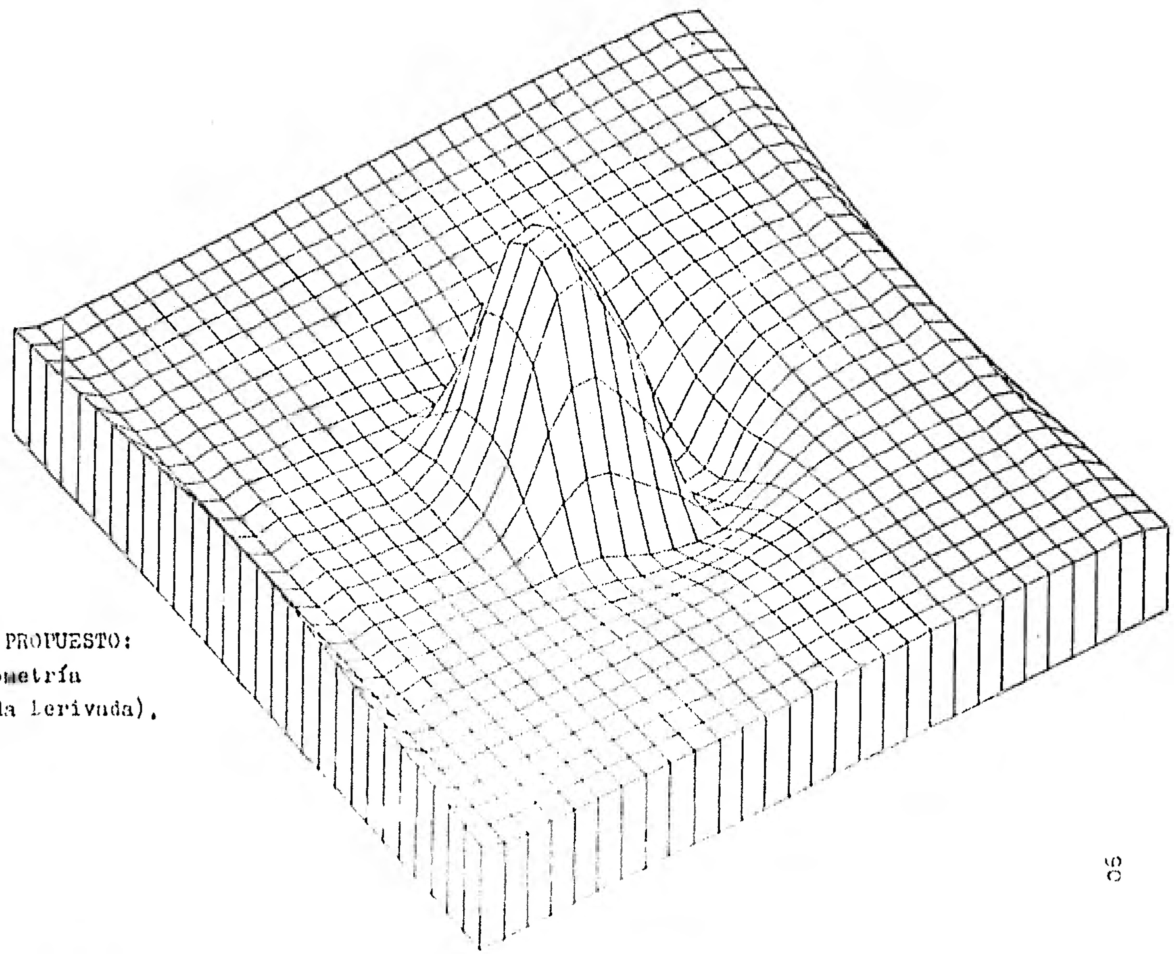
METODOS CONVENCIONALES:
Magnetometría
(Anomalía del Campo).



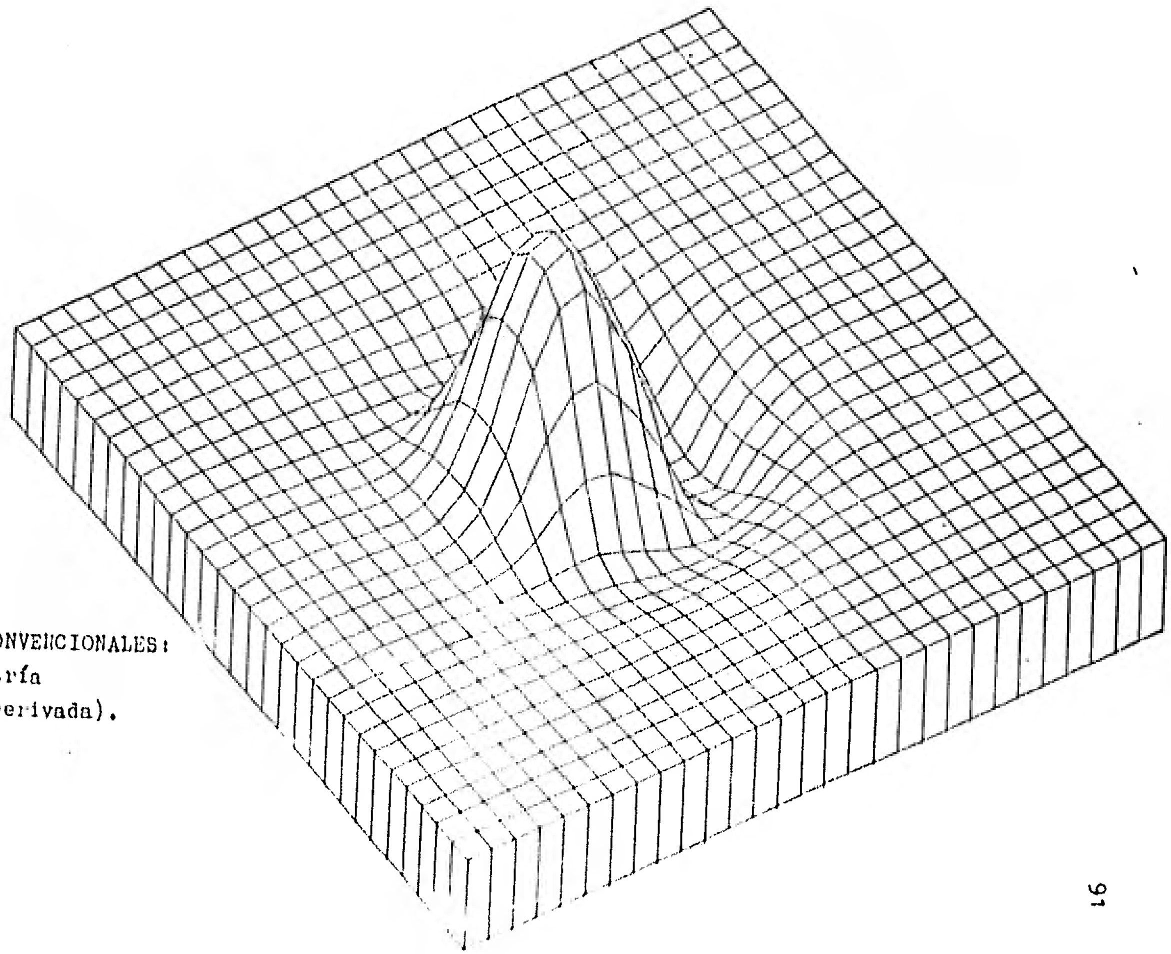
METODO PROPUESTO:
Magnetometría
(Continuación Analítica).



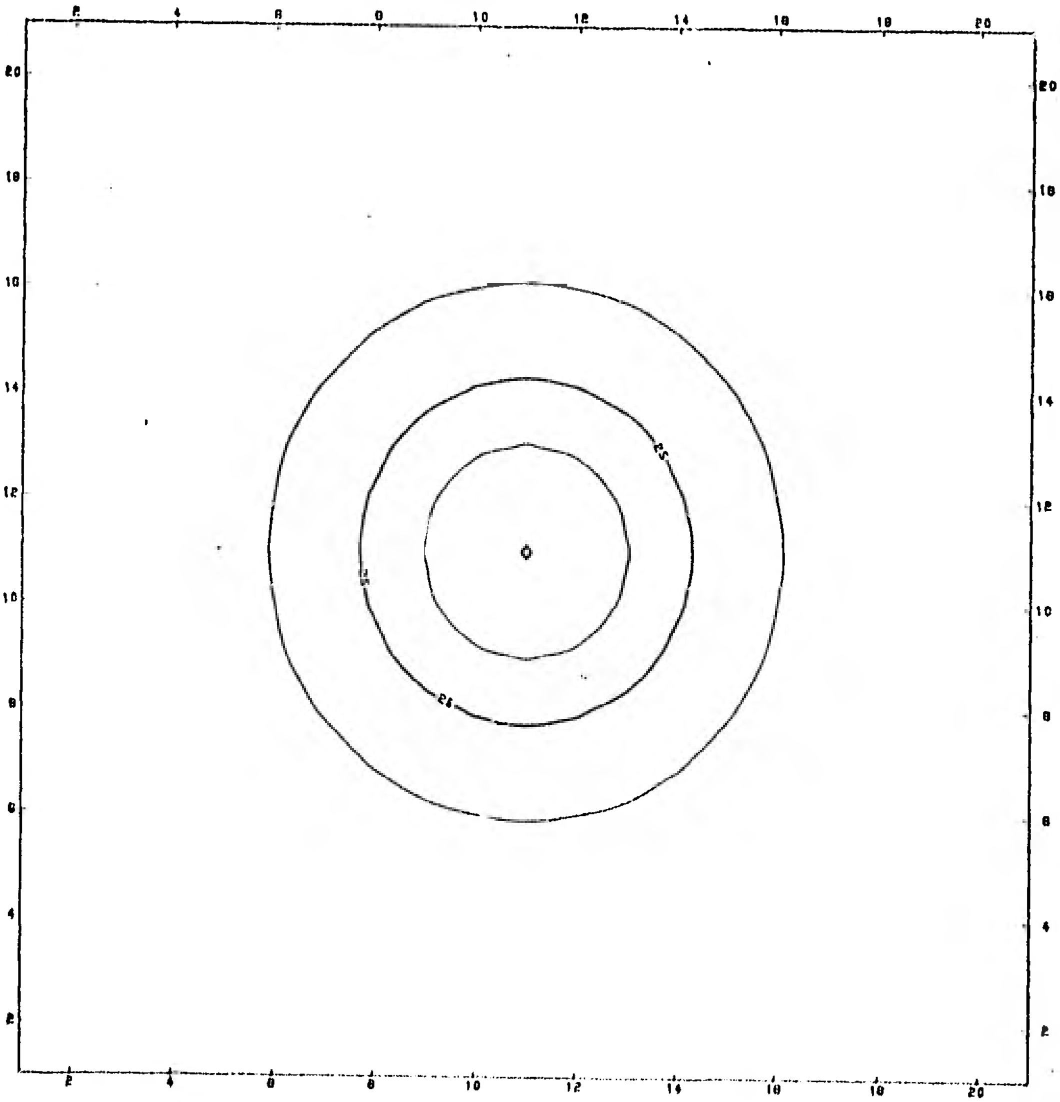
METODOS CONVENCIONALES:
Magnetometría
(Continuación Analítica).



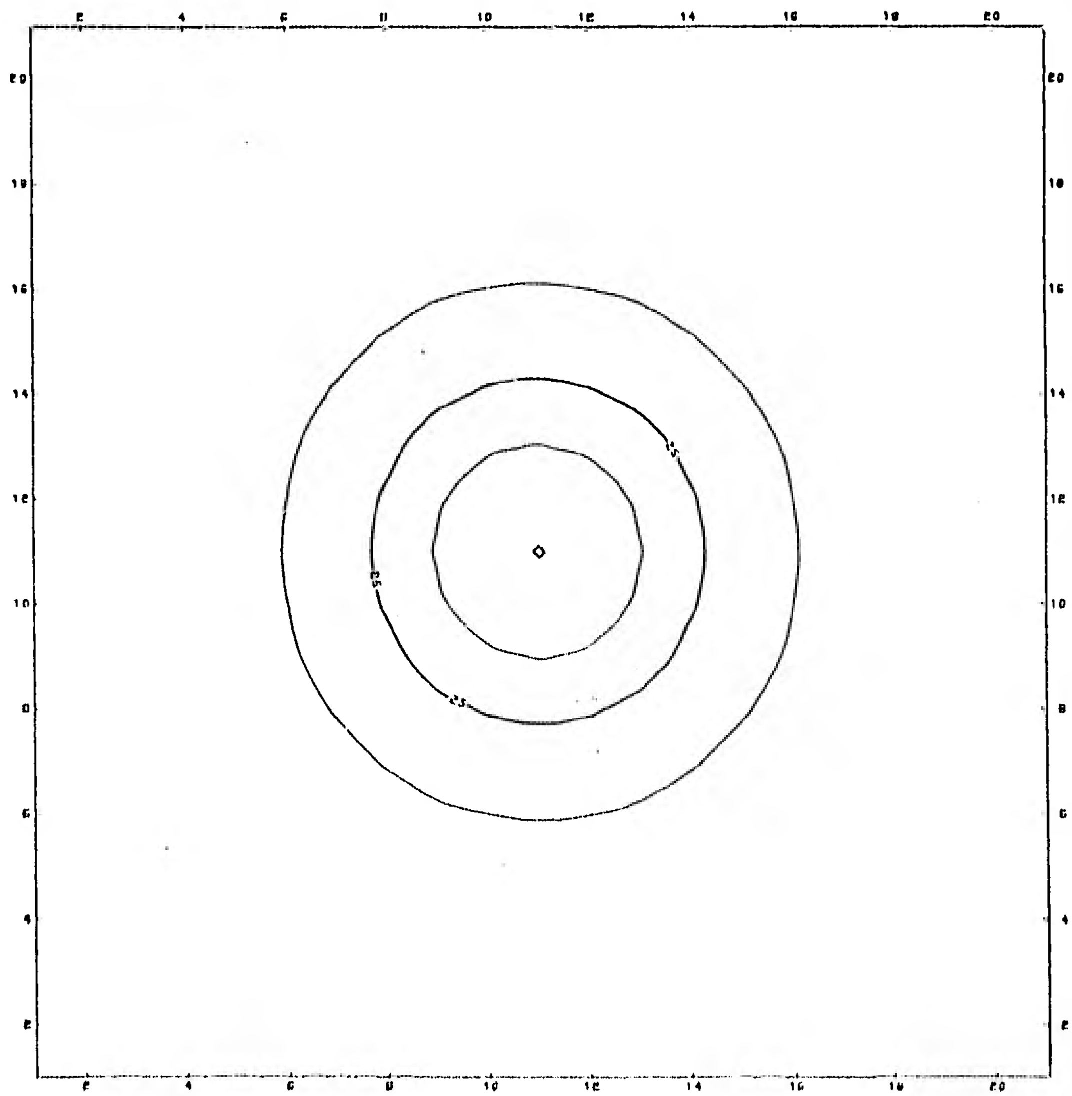
METODO PROPUESTO:
Magnetometría
(Segunda Lerivada).



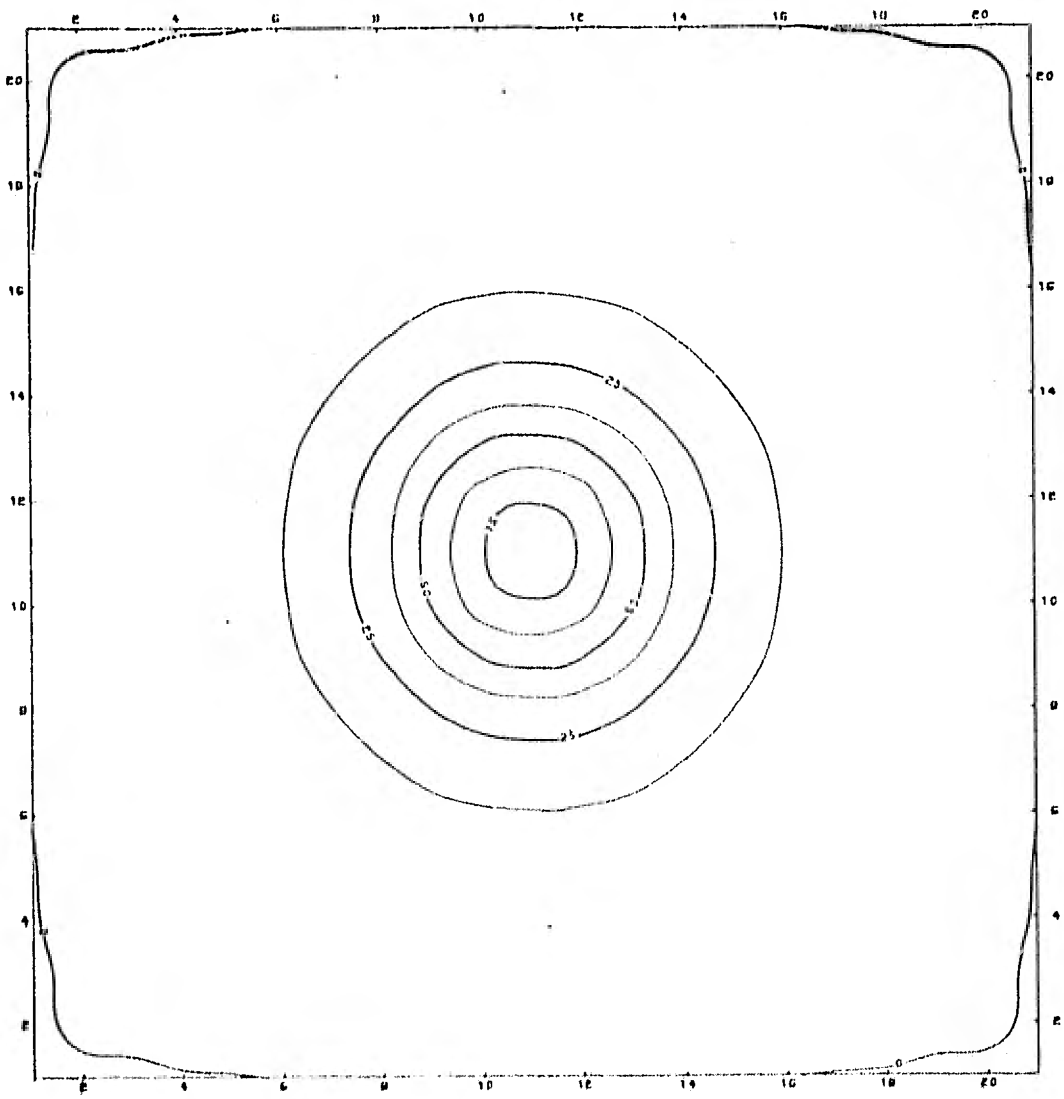
METODOS CONVENCIONALES:
Magnetometría
(Segunda Derivada).



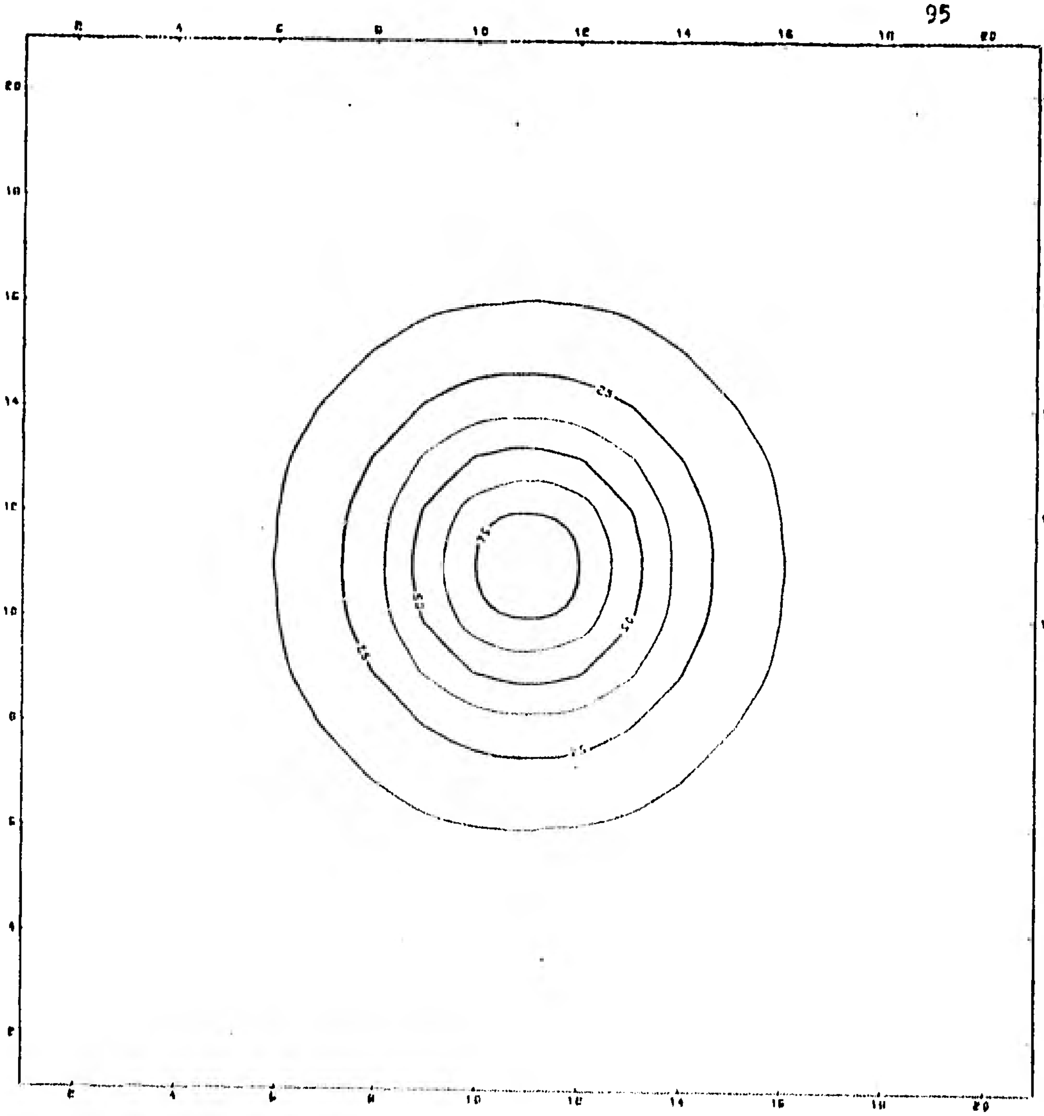

METODO PROPUESTO: Gravimetría (Anomalía del Campo).



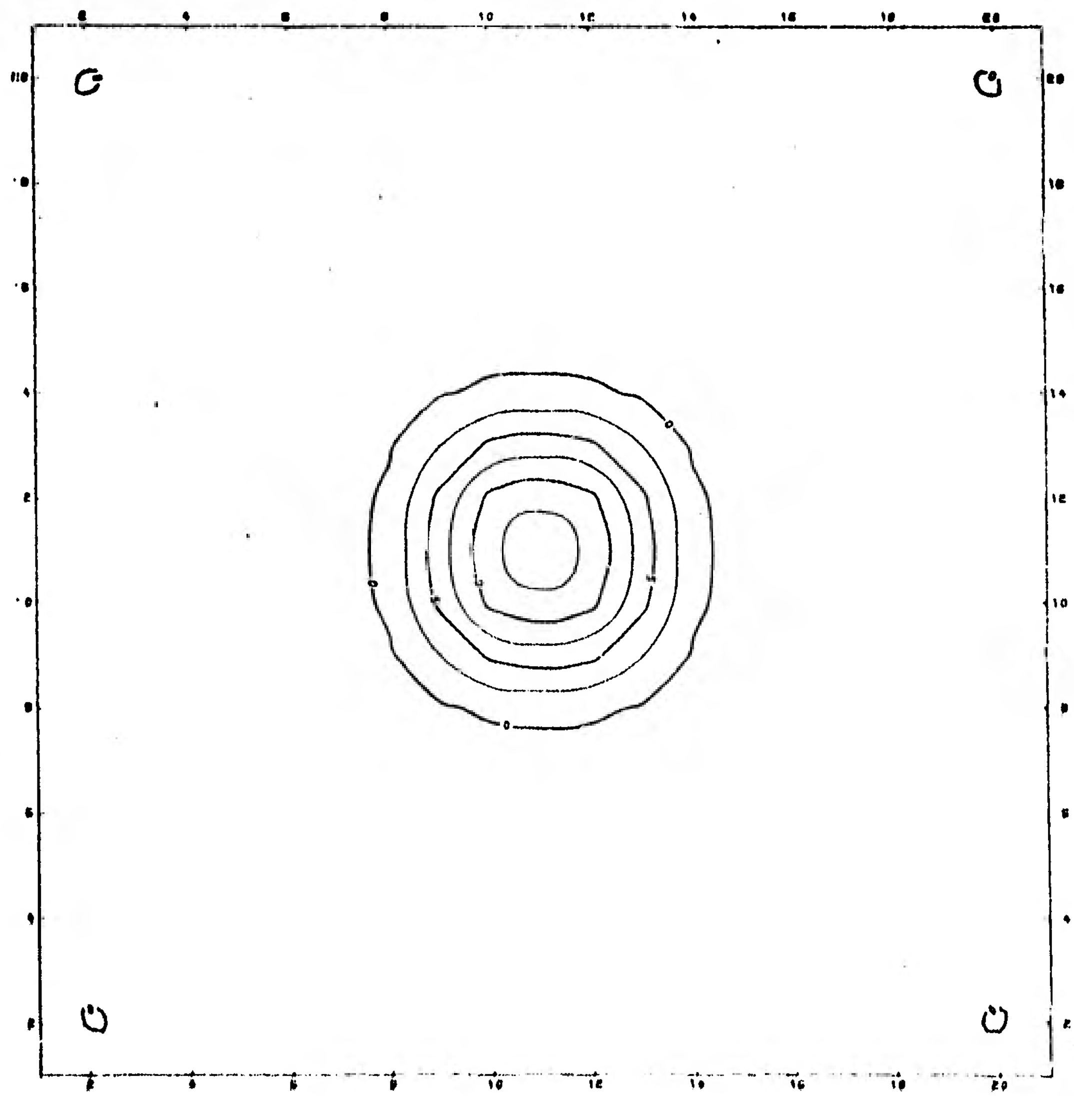
METODOS CONVENCIONALES: Gravimetría (Anomalía del Campo).



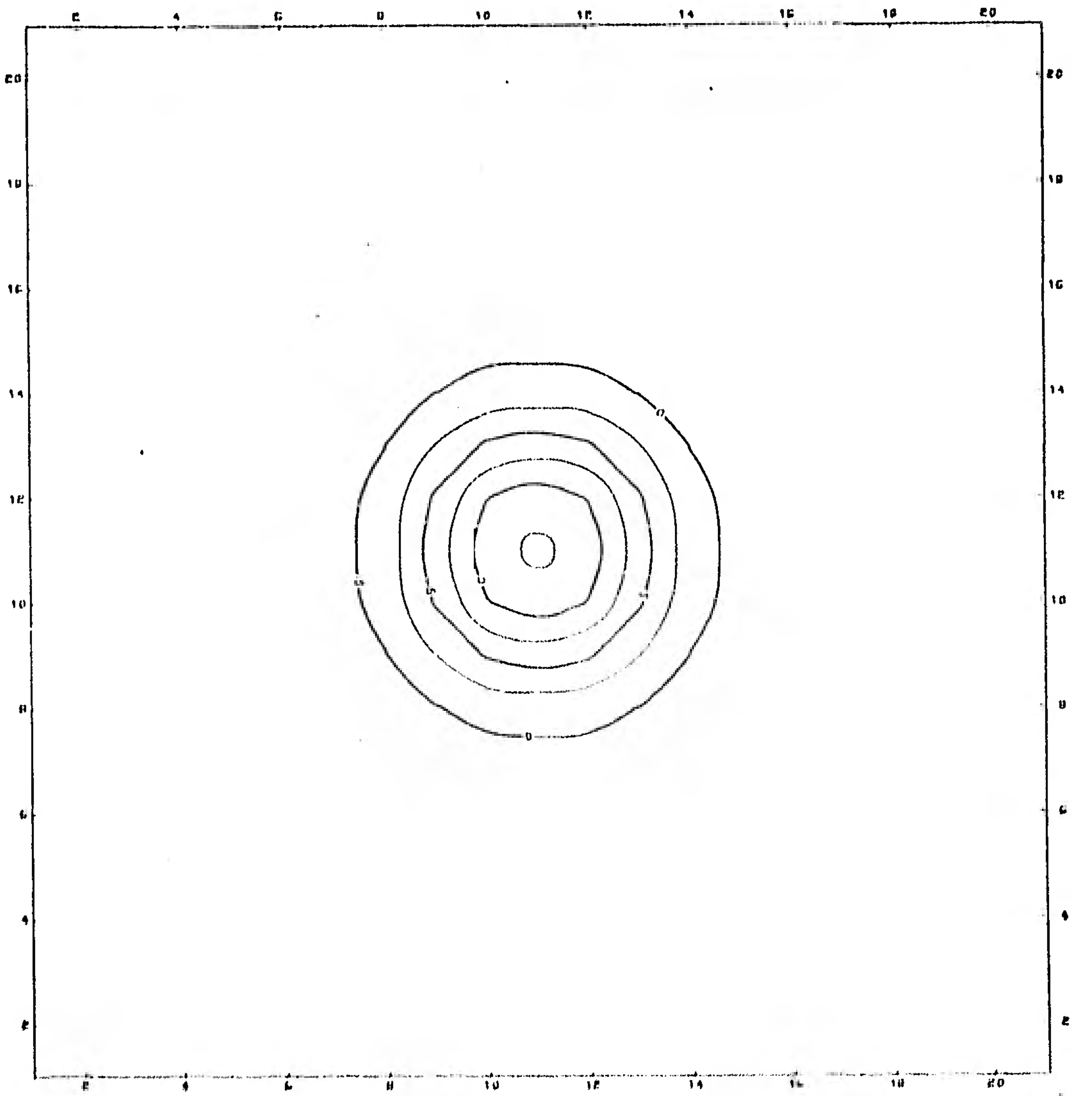
METODO PROPUESTO; Gravimetría (Continuación Analítica).



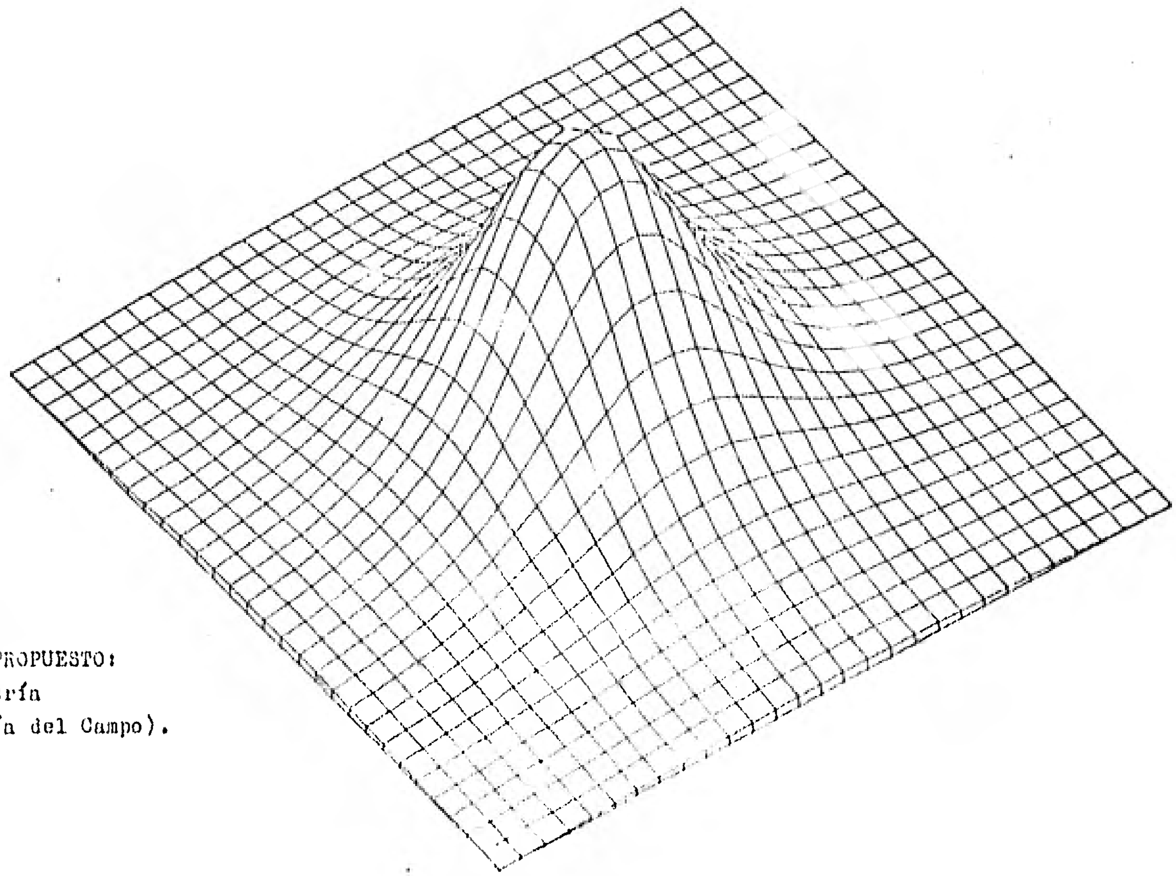
METODOS CONVENCIONALES: Gravimetría (Continuación Analítica).



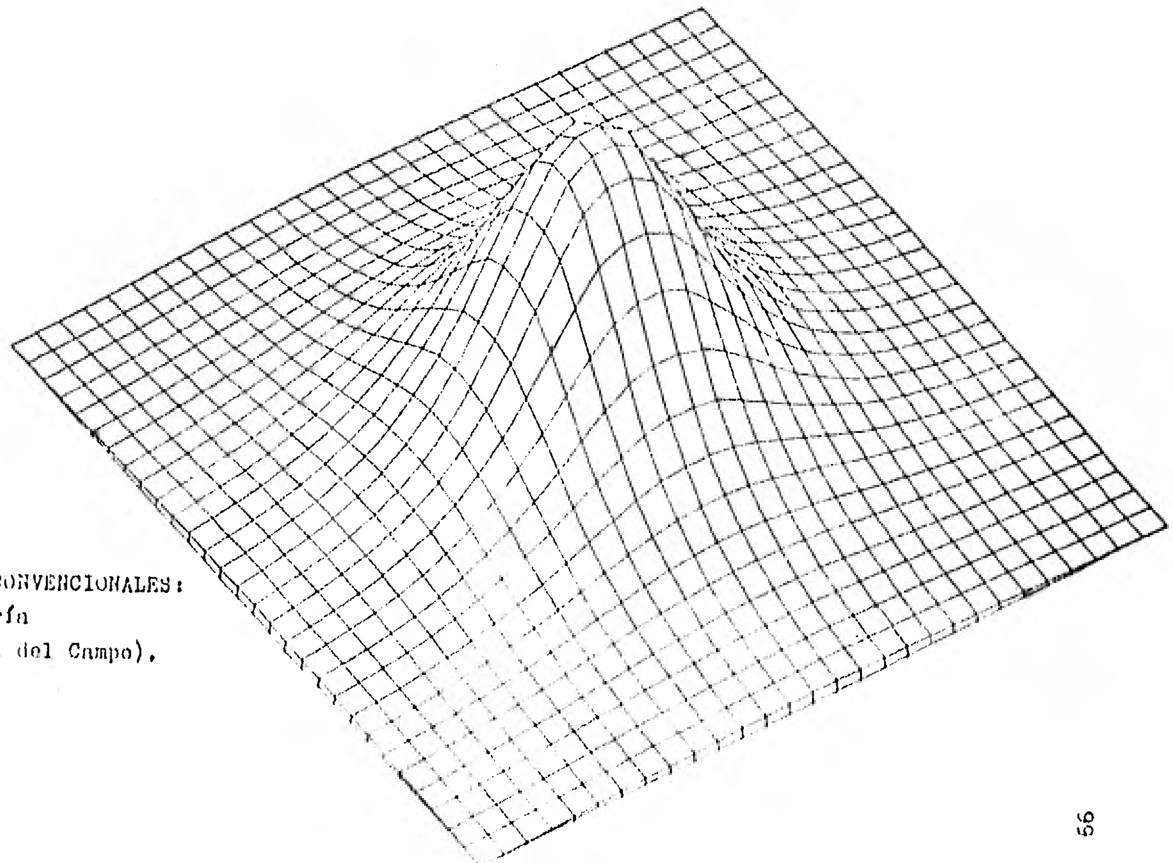
METODO PROPUESTO: **Gravimetría** (Segunda Derivada).



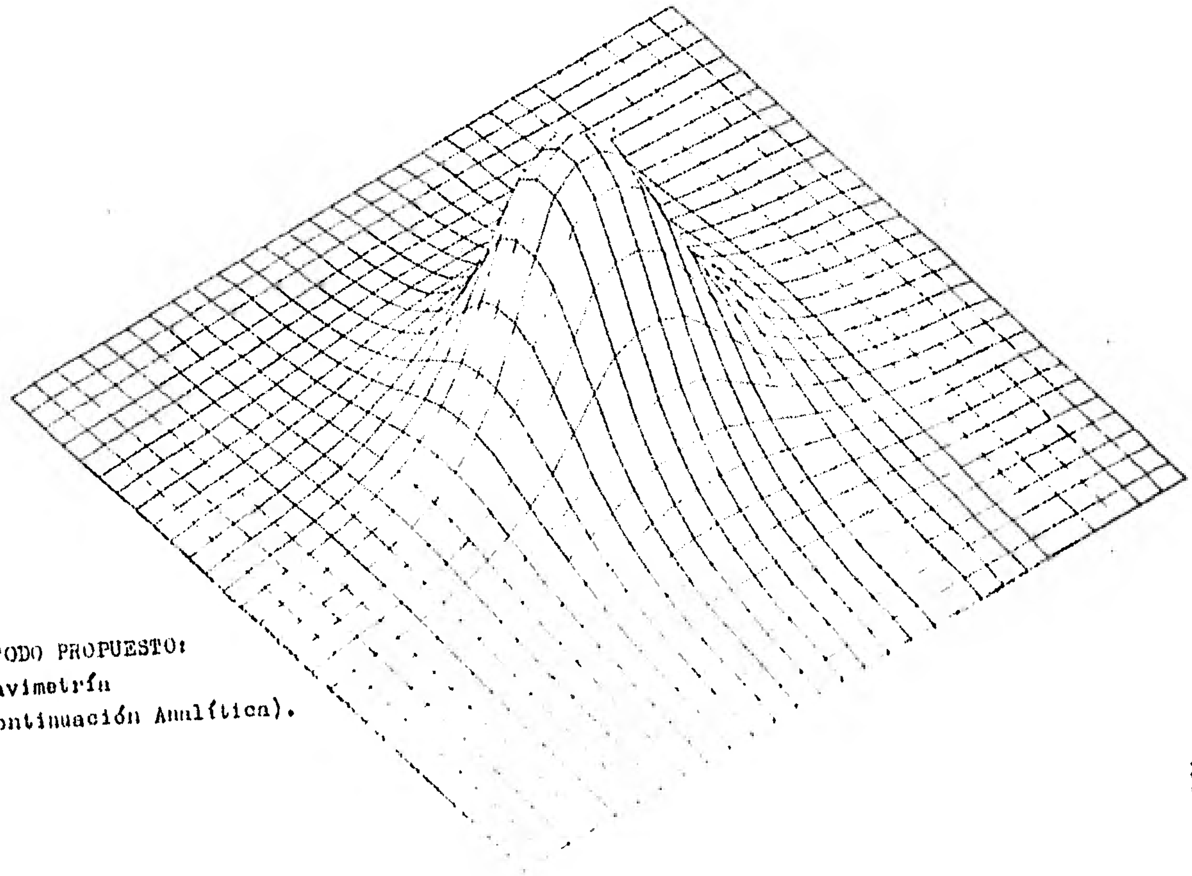
METODOS CONVENCIONALES: Gravimetría (Segunda Derivada),



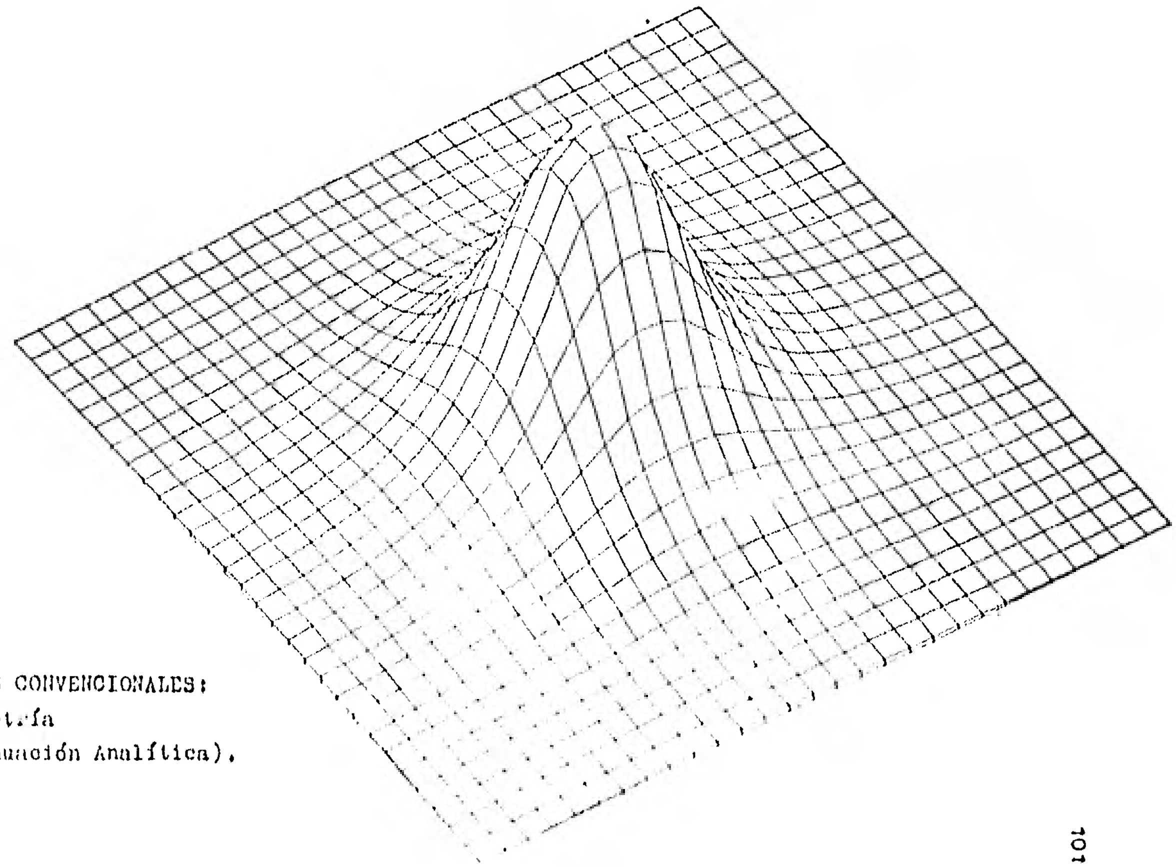
METODO PROPUESTO:
Gravimetría
(Anomalía del Campo).



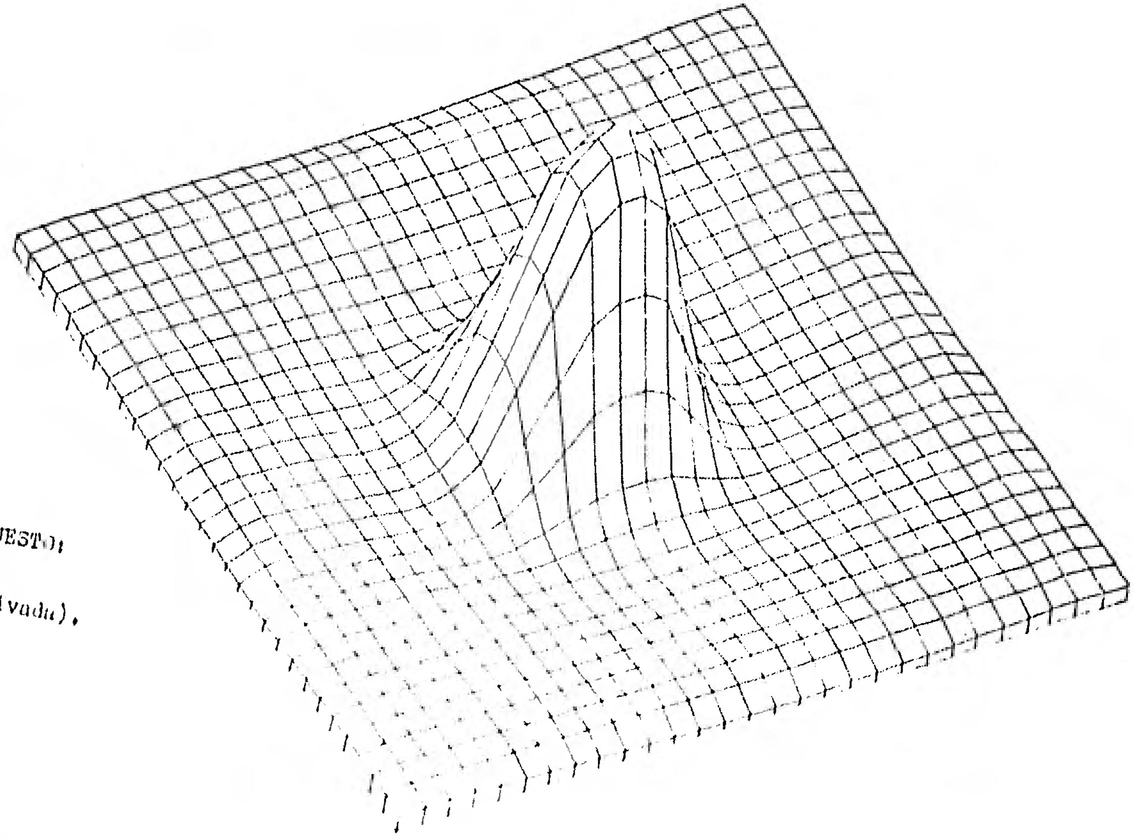
MÉTODOS CONVENCIONALES:
Gravimetría
(Anomalía del Campo).



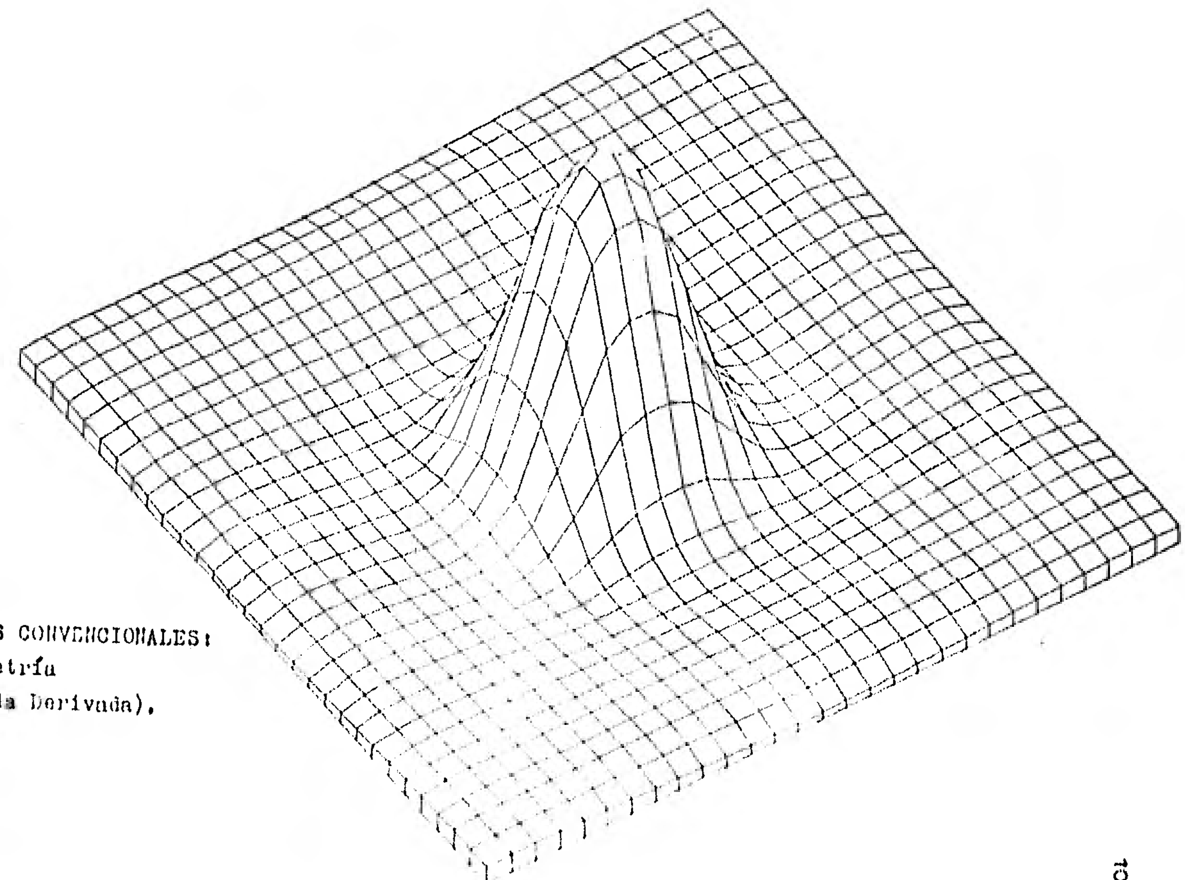
METODO PROPUESTO:
Gravimetría
(Continuación Analítica).



METODOS CONVENCIONALES:
Gravimetría
(Continuación Analítica).



METODO PROPUESTO:
Gravimetría
(Segunda Derivada).



METODOS CONVENCIONALES:
Gravimetría
(Segunda Derivada).

# V, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

En este capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones del presente trabajo, en base al análisis de los resultados obtenidos tanto por el método propuesto, como por los métodos convencionales de cálculo.

Conclusiones:

1).- Los resultados obtenidos para la Continuación Analítica y la Segunda Derivada del campo por el método propuesto, son excepcionalmente precisos comparados con los obtenidos por los métodos convencionales de cálculo.

2).- El método propuesto (como la mayoría de todos los métodos), no proporciona resultados confiables a lo largo de las orillas del área en estudio. El ancho de esta zona, generalmente es menor a dos veces el intervalo de muestreo de la malla seleccionada.

3).- En el cálculo de la Continuación Analítica hacia abajo por el método propuesto se observo que: se pueden obtener resultados de gran precisión hasta una profundidad, la cúal es igual a las dos terceras partes de la profundidad del cuerpo anómalo desde el nivel de observación.

4).- Debido a que; tanto el campo magnético, como el campo gravimétrico son ambos campos potenciales, el método propuesto se puede aplicar a los dos campos, sin la necesidad de tomar en cuenta consideraciones especiales para cada caso. Esto representa una gran ventaja sobre los métodos convencionales.

5).- Analizando los programas de computación que se utilizaron en este trabajo, se encontro que; -

el programa del método propuesto requiere aproximadamente el 50 por ciento del tiempo de ejecución del requerido por los métodos convencionales de cálculo. Esto hace al método propuesto más rápido y económico en comparación con los métodos convencionales.

Recomendaciones:

1).- Debido a que no se pudo contar con información real del campo; los ejemplos presentados aquí, se realizaron en base a modelos teóricos. Se recomienda por tanto, probar el método propuesto con información real.

BIBLIOGRAFIA.

1.- Bhattacharyya B. K. " Two-Dimensional Harmonic Analy sis as a Tool for Magnetic Interpretation". Geophysics, vol XXX, no. (Octubre 1965).

2.- Churchill M. " Fourier Series and Boundary Value P".

3.- Davis C. John. " Statistics and Data Analysis in Geology". Ed. Wiley International Edition.

4.- Henderson G. Roland. " On the Validity of the Use of the Upward Continuation Integral for Total Magnetic-Intensity Data". Geophysics, vol 35, no. 5 (octubre-1970).

5.- Henderson G. Roland and Zietz Isidore. " The Computation of Second Vertical Derivatives of Geomagnetic - Fields". Geophysicist, U.S. Geological Survey (1949)

6.- Hsu P, Hwei. " Análisis de Fourier". Fondo Educativo Interamericano, S.A. (1973).

7.- Miller S. K. " Partial Differential Equations".

8.- Morones C. Luis. " Sistematización de la Interpretación Gravimétrica, haciendo uso de calculadoras electrónicas". Boletín de la Asociación de Geofísicos de Exploración, vol VI, Octubre-Noviembre-Diciembre de-1965, no. 4 pags. 219-236.

9.- Plouff Donald. " Gravity and Magnetic Fields of Polygonal Prisms and Application to Magnetic Terrain Corrections", Geophysics, vol 41, no. 4 (agosto 1976).

10.- Rainville D. Earl. " Ecuaciones Diferenciales Ele--

mentales". Ed. Trillas (1976).

11.- Sheriff R. E. " Encyclopedic Dictionary of Exploration Geophysics". Society of Exploration Geophysicsts. (1976).

12.- Talwani Manik. " Computation with help of a Digital Computer of Magnetic Anomalies caused by Bodies of arbitrary Shape". Geophysics, vol XXX, no. 5 (Octubre 1965).

13.- Talwani Manik and Ewing Maurice. " Rapid Computation of Gravitational Attraction of Three-Dimensional arbitrary Shape". Geophysics, vol XXV, no. 1 (Febrero 1960).

APENDICE.

```
C**********************************************************************
C*                                                                    *
C* PROGRAMA PARA EL CALCULO DE LA ANOMALIA MAGNETICA TOTAL DEL CAMPO  *
C*                 ALGORITMO DE PLOUFF (1976).                        *
C*                                                                    *
C* VARIABLES DEL PROGRAMA:                                            *
C*           NC=NUMERO DE CUERPOS                  FORMATO(I10)       *
C*         XMIN=ABSCISA MINIMA DE LA MALLA           ''   (F7.0)      *
C*         YMIN=ORDENADA MINIMA DE LA MALLA          ''    ''         *
C*         XMAX=ABSCISA MAXIMA DE LA MALLA           ''    ''         *
C*         YMAX=ORDENADA MAXIMA DE LA MALLA          ''    ''         *
C*         XINC=INCREMENTO DE MUESTREO               ''    ''         *
C*            F=INTENSIDAD MAGNETICA DEL CAMPO       ''    ''         *
C*         ADEC=DECLINACION MAGNETICA ''   ''        ''    ''         *
C*         AINC=INCLINACION MAGNETICA ''   ''        ''    ''         *
C*         NVER=NUMERO DE VERTICES DEL CUERPO        ''   (I5)        *
C*           Z1=DISTANCIA DE LA SUPERFICIE AL TOPE                    *
C*              DEL CUERPO                           ''   (F10.0)     *
C*            E=ESPESOR DEL CUERPO (E=H-Z1)          ''    ''         *
C*           AK=SUSCEPTIBILIDAD MAGNETICA            ''    ''         *
C*   XX(I),YY(I)=COORDENADAS DE LOS VERTICES DEL CUERPO               *
C*              (SE REPITE LA PRIMERA COORDENADA)    ''   (2F5.0)     *
C*      SE LEEN EN EL SENTIDO DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ             *
C*         MAGX=COMPONENTE X DE LA ANOMALIA TOTAL                     *
C*         MAGY=COMPONENTE Y DE LA ANOMALIA TOTAL                     *
C*         MAGZ=COMPONENTE Z DE LA ANOMALIA TOTAL                     *
C*         MAGT=ANOMALIA TOTAL DEL CAMPO MAGNETICO                    *
C**********************************************************************
      REAL    NOMB,MAGX,MAGY,MAGZ,MAGT
      DIMENSION XX(200),YY(200),MAGX(100,100),MAGY(100,100),MAGZ(100,
     *100),MAGT(100,100),NOMB(2)
      DATA NOMB/'MAGY','MAGT'/
C     LECTURA DE NC
      READ(5,1) NC
    1 FORMAT(I10)
      DO 61 L=1,NC
C     LECTURA DE XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,XINC,F,ADEC,AINC
      READ(5,4)XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,XINC,F,ADEC,AINC
    4 FORMAT(8F7.0)
      RAD=57.2957800
      ACOS=COS(AINC/RAD)
      ASEN=SIN(AINC/RAD)
      BCOS=COS(ADEC/RAD)
      BSEN=SIN(ADEC/RAD)
      AX=F*ACOS*BCOS
      AY=F*ACOS*BSEN
      AZ=F*ASEN
      NF=(XMAX-XMIN)/XINC+1
      NC=(YMAX-YMIN)/XINC+1
C     LECTURA DE NVER,Z1,E,AK
      READ(5,5)NVER,Z1,E,AK
    5 FORMAT(I5,3F10.0)
      H=E+Z1
      NLEC=NVER+1
      FX=AX*AK
      FY=AY*AK
      FZ=AZ*AK
```

```
C     LECTURA DE XX(I),YY(I)
      READ(5,1000)(XX(I),YY(I),I=1,NLC)
1000  FORMAT(16F5.0)
C     EMPIEZA EL CALCULO DE LA [illegible] TOTAL
      DO 60 J=1,NN
      DO 60 I=1,NN
      [illegible]AOY(I,J)=0.
      [illegible]AOY(I,J)=0.
      [illegible]AOZ(I,J)=0.
      VV1=0.
      VV2=0.
      VV3=0.
      VV4=0.
      VV5=0.
      VV6=0.
      DO 60 K=1,NVE[illegible]
      X=XX(K)-(I-1)*XINC
      X1=XX(K+1)-(I-1)*XINC
      Y=YY(K)-(J-1)*XINC
      Y1=YY(K+1)-(J-1)*XINC
      R=SQRT(X*X+Y*Y)
      R1=SQRT(X1*X1+Y1*Y1)
      RR1=SQRT((X-X1)*(X-X1)+(Y-Y1)*(Y-Y1))
      S=(Y1-X)/RR1
      C=(Y1-Y)/RR1
      G1=X*S+Y*C
      G2=X1*S+Y1*C
      R11=SQRT(R*R+Z1*Z1)
      R12=SQRT(R*R+Z2*Z2)
      R21=SQRT(R1*R1+Z1*Z1)
      R22=SQRT(R1*R1+Z2*Z2)
      P=X*C-Y*S
      F1=(R22+Z2)/(R12+[illegible]))
      F2=(R11+Z1)/(R21+Z1))
      F3=ALOG(F1*F2)
      G1=(R22+G2)/(R12+G1))
      G2=(R11+G1)/(R21+G2))
      Q=ALOG(G1+G2)
      IF(P.EQ.0) GO TO 20
      IF(P.GT.0) GO TO 15
      A1=ATAN((Z2*G2)/(P*R22))+180./3.1[illegible]
      A2=ATAN((Z2*G1)/(P*R12))+180./3.1[illegible]
      A3=ATAN((Z1*G2)/(P*R21))+180./3.1[illegible]
      A4=ATAN((Z1*G1)/(P*R11))+180./3.1[illegible]
      GO TO 19
15    A1=ATAN((Z2*G2)/(P*R22))
      A2=ATAN((Z2*G1)/(P*R12))
      A3=ATAN((Z1*G2)/(P*R21))
      A4=ATAN((Z1*G1)/(P*R11))
19    A=A1-A2-A3+A4
      GO TO 21
20    A=0.
21    V1=S*C*F3-C*C*[illegible]
      V2=S*C*A+C*C*[illegible]
      V3=C*[illegible]
      V4=-(S*C*F3+S*S*[illegible])
      V5=-S*[illegible]
      V6=[illegible]
      VV1=VV1+V1
      VV2=VV2+V2
```

```
      VV3=VV3+V3
      VV4=VV4+V4
      VV5=VV5+V5
      VV6=VV6+V6
   40 CONTINUE
C     CALCULO FINAL DE LA ANOMALIA TOTAL
      MAGX(I,J)=MAGX(I,J)+FX*VV1+FY*VV2+FZ*VV3
      MAGY(I,J)=MAGY(I,J)+FX*VV2+FY*VV4+FZ*VV5
      MAGZ(I,J)=MAGZ(I,J)+FX*VV3+FY*VV5+FZ*VV6
      MAGT(I,J)=MAGX(I,J)*ACOS*ACOS+MAGY(I,J)*ASEN*ACOS+MAGZ(I,J)*ASEN
   60 CONTINUE
      PRINT 8,L,AK,F,ADEC,AINC,Z1,H
    8 FORMAT(1H1,//,8X,' DATOS DE ENTRADA ',//,
     +         5X,'CUERPO NUMERO         ',I9//
     +         5X,'SUSCEPTIBILIDAD       ',F15.5/
     +         5X,'INTENSIDAD DEL CAMPO ',F15.5/
     +         5X,'DECLINACION DEL       ',F15.5/
     +         5X,'INCLINACION DEL       ',F15.5/
     +         5X,'PROF.DEL CUERPO(TOPE)',F15.5/
     +         5X,'ESPR.DEL CUERPO(BASE)',F15.5/)
C     ESCRITURA DE LA ANOMALIA TOTAL
      CALL ESCRIB(MAGT,100,100,M,MM,ANOM(2),L,1)
   61 CONTINUE
      STOP
      END
```

```
C*********************************************************************
C*                                                                   *
C* PROGRAMA PARA CALCULAR LA COMPONENTE VERTICAL DEL CAMPO GRAVITACIONAL*
C*                  ALGORITMO DE PLOUFF (1976)                       *
C*                                                                   *
C* VARIABLES DEL PROGRAMA                                            *
C*          XMIN=ABSCISA MINIMA DE LA MALLA        FORMATO(F10.0)    *
C*          YMIN=ORDENADA MINIMA DE LA MALLA          ''      ''     *
C*          XMAX=ABSCISA MAXIMA DE LA MALLA           ''      ''     *
C*          YMAX=ORDENADA MAXIMA DE LA MALLA          ''      ''     *
C*          XINC=INCREMENTO DE MUESTREO               ''      ''     *
C*          NLAM=NUMERO DE LAMINAS DEL CUERPO         ''    (I10)    *
C*          NVER=NUMERO DE VERTICES DEL CUERPO        ''    (I5)     *
C*            RO=CONTRASTE DE DENSIDAD                ''    (F10.0)  *
C*            Z1=DISTANCIA DE LA SUPERFICIE AL TOPE                  *
C*               DEL CUERPO                           ''      ''     *
C*            Z2=DISTANCIA DE LA SUPERFICIE A LA BASE                *
C*               DEL CUERPO                           ''      ''     *
C*  XX(I),YY(I)=COORDENADAS DE LOS VERTICES DEL CUERPO               *
C*               (SE REPITE LA PRIMERA)               ''     (2F5.0) *
C*    SE LEEN EN SENTIDO DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ                 *
C*          GRAD=ANOMALIA GRAVIMETRICA (COMPONENTE VERTICAL)         *
C*********************************************************************
      REAL    MM,NN,MM1,MM2,NN1,NN2
      DIMENSION XX(200),YY(200),GRAD(100,100),XEST(100),
     *YEST(100)
      RAD=57.29578D
C     LECTURA DE XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,XINC
      READ(5,3)XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,XINC
    3 FORMAT(5F10.0)
      NM=(XMAX-XMIN)/XINC+1
      MN=(YMAX-YMIN)/XINC+1
      NN1=XMIN/XINC+1
      NN2=XMAX/XINC+1
      MM1=YMIN/XINC+1
      MM2=YMAX/XINC+1
      DO 35 J=NN1,NN2
      L=J-NN1+1
   35 XEST(L)=XINC*(J-1)
      DO 36 I=MM1,MM2
      L=I-MM1+1
   36 YEST(L)=XINC*(I-1)
C     LECTURA DE NLAM
    1 READ(5,101) NLAM
      IF(NLAM.EQ.0) GO TO 13
  101 FORMAT(I10)
C     EMPIEZA EL CALCULO DE LA ANOMALIA
      DO 60 L=1,NLAM
C     LECTURA DE NVER,RO,Z1,Z2
      READ(5,100)NVER,RO,Z1,Z2
  100 FORMAT(I5,3F10.0)
      NVEC=NVER+1
      CON=6.67*RO
      Z2=Z2
C     LECTURA DE XX(I),YY(I)
      READ(5,120)(XX(I),YY(I),I=1,NVEC)
  120 FORMAT(2F5.0)
```

```
      DO 60 I=1,NM
      DO 60 J=1,MM
      GRAV=0.0
      DO 40 K=1,NVER
      X=XX(K)-XEST(I)
      X1=XX(K+1)-XEST(I)
      Y=YY(K)-YEST(J)
      Y1=YY(K+1)-YEST(J)
      R=SQRT(X*X+Y*Y)
      IF(R.EQ.0.0) GO TO 69
      R1=SQRT((X-X1)*(X-X1)+(Y-Y1)*(Y-Y1))
      P=(Y1-Y)*X/R1-(X1-X)*Y/R1
      IF(P.EQ.0.0) GO TO 69
      R2=SQRT(X1*X1+Y1*Y1)
      IF(R2.EQ.0.0) GO TO 69
      S=(X1-X)/R1
      C=(Y1-Y)/R1
      D1=X*S+Y*C
      D2=X1*S+Y1*C
      R22=SQRT(R2*R2+Z2*Z2)
      R21=SQRT(R2*R2+Z1*Z1)
      R12=SQRT(R*R+Z2*Z2)
      R11=SQRT(R*R+Z1*Z1)
      IF(P.LT.0.0) GO TO 52
      W1=ATAN(Z2*D1/(P*R12))
      W2=ATAN(Z2*D2/(P*R22))
      W3=ATAN(Z1*D1/(P*R11))
      W4=ATAN(Z1*D2/(P*R21))
      GO TO 53
   52 W1=ATAN(Z2*D1/(P*R12))+180./RAD
      W2=ATAN(Z2*D2/(P*R22))+180./RAD
      W3=ATAN(Z1*D1/(P*R11))+180./RAD
      W4=ATAN(Z1*D2/(P*R21))+180./RAD
   53 A=ARCOS((X*X1+Y*Y1)/(R*R2))
      Q1=((R22+D2)/(R12+D1))
      Q2=((R11+D1)/(R21+D2))
      Q=ALOG(Q1*Q2)
      IF(P.GT.0.0) SP=1
      IF(P.LT.0.0) SP=-1
      G=SP*A*(Z2-Z1)+Z2*(W1-W2)-Z1*(W3-W4)-P*Q
      GO TO 70
   69 G=0.0
   70 GRAV=GRAV+G*COF
   40 CONTINUE
C     CALCULO FINAL DE LA ANOMALIA
      GRAD(I,J)=GRAD(I,J)+GRAV
   60 CONTINUE
      GO TO 1
   13 WRITE(6,10)XINC,[illegible]XX(1),[illegible]YY(1),XX[illegible],XX(3),[illegible]YY(3),
     *XMAX,Z1,YMAX,Z2
   10 FORMAT(1H1/5X,'DATOS [illegible] ALLA',/5X,'DATOS DEL CUERPO',//
     1      5X,'INTERVALO DE SEP',F10.3,5X,'CO[illegible]',F10.3/
     2      5X,'NUMERO DE COLUMNAS',F[illegible],5X,'[illegible]',F10.3/
     3      5X,'NUMERO DE FILAS',F10.3,5X,'[illegible] Y',F10.3/
     4      5X,'   X-MINIMA',F10.3,5X,'[illegible] X',F10.3/
     5      5X,'   Y-MINIMA',F10.3,5X,'[illegible] Y',F10.3/
     6      5X,'   X-MAXIMA',F10.3,5X,'PROF. [illegible] (Z1)',F10.3/
     7      5X,'   Y-MAXIMA',F10.3,5X,'PROF. [illegible] (Z2)',F10.3/)
      CALL CAMBIO(GRAD,[illegible])
      CALL ESCRIB(GRAD,[illegible])
```

```
      STOP
      END

      SUBROUTINE CAMBIO(A,L,K,N,M)
      REAL  M,N
      DIMENSION A(L,K)
      M1=M+1
      N=M/2
      DO 1 I=1,N
      M1=M1-1
      DO 1 J=1,N
      AUX=A(I,J)
      A(I,J)=A(M1,J)
    1 A(M1,J)=AUX
      RETURN
      END
```

```
C*************************************************************************
C*                                                                       *
C*   PROGRAMA PARA EL CALCULO DE LA SEGUNDA DERIVADA DEL CAMPO TOTAL     *
C*                    (GRAVIMETRIA O MAGNETOMETRIA)                      *
C*                       (OPERADOR DE HENDERSON)                         *
C*                                                                       *
C* VARIABLES DEL PROGRAMA                                                *
C*          ANOM=MATRIZ DE LA ANOMALIA TOTAL DEL CAMPO      CALL LEER    *
C*            NC=NUMERO DE COLUMNAS DE ANOM.                  ''    ''   *
C*            NR=NUMERO DE RENGLONES DE ANOM.                 ''    ''   *
C*          BAUX=MATRIZ AUXILIAR DONDE SE APLICA EL OPERADOR.            *
C*           SDH=MATRIZ DE LA SEGUNDA DERIVADA DEL CAMPO TOTAL.          *
C*             R=INCREMENTO DE MUESTREO.                                 *
C*************************************************************************
      REAL  NN,MM,L,K,NC,NR
      DIMENSION ANOM(100,100),BAUX(100,100),SDH(100,100)
      CALL LEER(ANOM,NR,NC,100,100)
      L=NC
      K=NR
      NN=L+2
      MM=K+2
      DO 1 I=1,K
      BAUX(I+1,1)=ANOM(I,1)
      BAUX(I+1,NN)=ANOM(I,L)
      DO 1 J=1,L
      BAUX(I+1,J+1)=ANOM(I,J)
      BAUX(1,J+1)=ANOM(1,J)
      BAUX(MM,J+1)=ANOM(K,J)
    1 CONTINUE
      BAUX(1,1)=ANOM(1,1)
      BAUX(1,NN)=ANOM(1,L)
      BAUX(MM,1)=ANOM(K,1)
      BAUX(MM,NN)=ANOM(K,L)
      DATA R/1./
      R1=(1./(3.*(R**2.)))
      DO 2 I=2,(MM-1),1
      DO 2 J=2,(NN-1),1
      SDH(I,J)=(8.*BAUX(I,J)-BAUX(I,J+1)-BAUX(I+1,J)-BAUX(I,J-1)
     * -BAUX(I-1,J)-BAUX(I+1,J+1)-BAUX(I+1,J-1)-BAUX(I-1,J-1)-
     *BAUX(I-1,J+1))*R1
    2 CONTINUE
      DO 3 I=1,NR
      DO 3 J=1,NC
      SDH(I,J)=SDH(I+1,J+1)
    3 CONTINUE
      CALL ESCRIB(SDH,100,100,NR,NC,'SDH',1,1)
      STOP
      END
```

```
C*********************************************************************
C*                                                                   *
C*       PROGRAMA PARA EL CALCULO DE LA ANOMALIA TOTAL DEL CAMPO     *
C*                      CONTINUACION ANALITICA Y                     *
C*                          SEGUNDA DERIVADA                         *
C*               POR EL METODO DE LA SERIE DOBLE DE FOURIER          *
C*                   (GRAVIMETRIA-O-MAGNETOMETRIA)                   *
C*                                                                   *
C* VARIABLES DEL PROGRAMA                                            *
C*          AMAG=MATRIZ DE LA ANOMALIA DEL CAMPO      CALL LEFA      *
C*            NC=NUMERO DE COLUMNAS                     **   **      *
C*            NR=NUMERO DE RENGLONES                    **   **      *
C*       A,B,C,D=COEFICIENTES DE LA SERIE DOBLE DE FOURIER           *
C*        Z(I,J)=ANOMALIA TOTAL CALCULADA POR LA S-D-F.(*)           *
C*       ZZ(I,J)=CONTINUACION ANALITICA CALCULADA POR LA S-D-F.(*)   *
C*       ZS(I,J)=SEGUNDA DERIVADA CALCULADA POR LA S-D-F.(*)         *
C*          ZETA=NIVEL DONDE SE DESEA CALCULAR LA CONTINUACION (**)  *
C*                                                                   *
C* NOTAS                                                             *
C*      (*) S-D-F=SERIE DOBLE DE FOURIER (GRAVIMETRIA O MAGNETOMETRIA) *
C*     (**)  ZETA=ESTE PARAMETRO SE ESPECIFICA DIRECTAMENTE EN LA INS- *
C*                  -TRUCCION (CALL CONA).                           *
C*SUBRUTINA CONA=CALCULA LA CONTINUACION ANALITICA DEL CAMPO         *
C*SUBRUTINA SEGD=CALCULA LA SEGUNDA DERIVADA DEL CAMPO               *
C*********************************************************************
      REAL  [illegible]
      DIMENSION A(60,60),B(60,60),C(60,60),D(60,60),AMAG(100,100)
      DIMENSION Z(100,100),TCX(100),TSX(100),CX(100),SX(100),
     *ZZ(100,100)
C       LECTURA DE LOS DATOS DE ENTRADA
      CALL LEFA(AMAG,NR,NC,100,100)
      PII=6.2831853/FLOAT(NR)
      PIA=6.2831853/FLOAT(NC)
      R=4.0/FLOAT(NR*NC)
      NNR=NR/2+1
      NNC=NC/2+1
      DO 101 I=1,NNR
      DO 101 J=1,NNC
      AA=0.0
      BB=0.0
      CC=0.0
      DD=0.0
      DO 101 JJ=1,NC
      ARG=FLOAT((J-1)*(JJ-1))*PIA
      TCX(JJ)=COS(ARG)
      TSX(JJ)=SIN(ARG)
  101 CONTINUE
      DO 102 II=1,NR
      ARG=FLOAT((I-1)*(II-1))*PII
      CY=COS(ARG)
      SY=SIN(ARG)
      DO 102 JJ=1,NC
      CX=TCX(JJ)
      SX=TSX(JJ)
      XX=AMAG(II,JJ)
```

```
      AA=AA+AX*CY*CX
      BB=BB+AX*CY*SX
      CC=CC+AX*SY*CX
      DD=DD+AX*SY*SX
  102 CONTINUE
      RR=R
      IF(I.EQ.1) RR=RR/2.0
      IF(J.EQ.1) RR=RR/2.0
      A(I,J)=AA*RR
      B(I,J)=BB*RR
      C(I,J)=CC*RR
      D(I,J)=DD*RR
  100 CONTINUE
      CALL ESCRIB(A,[illegible],'COEF',1,1)
      CALL ESCRIB(B,[illegible],'COEF',1,1)
      CALL ESCRIB(C,[illegible],'COEF',1,1)
      CALL ESCRIB(D,[illegible],'COEF',1,1)
      DO 103 I=1,NR
      DO 103 J=1,NC
      X=0.0
      DO 104 L=1,NC
      ARG=FLOAT((J-1)*(L-1))*PIX
      CSX(L)=COS(ARG)
      SSX(L)=SIN(ARG)
  104 CONTINUE
      DO 105 K=1,NR
      ARG=FLOAT((I-1)*(K-1))*PIY
      COSY=COS(ARG)
      SENY=SIN(ARG)
      DO 105 N=1,NC
      COSX=CSX(N)
      SENX=SSX(N)
      X=X+A(K,N)*COSY*COSX
     1    +B(K,N)*COSY*SENX
     2    +C(K,N)*SENY*COSX
     3    +D(K,N)*SENY*SENX
  105 CONTINUE
      Z(I,J)=X
  103 CONTINUE
      CALL ESCRIB(A,[illegible],1,1)
      CALL ESCRIB(Z,[illegible],1,1)
      CALL COMP(A,B,C,[illegible])
      CALL ESCRIB(Z2,[illegible],1,1)
      CALL COMP(A,B,C,[illegible])
      CALL ESCRIB(Z2,[illegible],1,1)
      CALL SEGR(A,B,C,[illegible])
      CALL ESCRIB(Z2,[illegible],1,1)
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE COMA(A,NR,C,[illegible],B,NC,[illegible],PIX,PIY,ZETA,ZZ)
      REAL [illegible]
      DIMENSION A(60,60),B(60,60),C(60,60),D(60,60),ZZ(100,100)
      DIMENSION DCX(60),DSX(60)
      ANR=NR
      ANC=NC
      DO 113 I=1,NR
      DO 113 J=1,NC
      X=0.0
      DO 114 L=1,NC
      ARG=FLOAT((J-1)*(L-1))*PIX
      DCX(L)=COS(ARG)
      DSX(L)=SIN(ARG)
  114 CONTINUE
      DO 115 M=1,NR
      ARG=FLOAT((I-1)*(M-1))*PIY
      COSY=COS(ARG)
      SENY=SIN(ARG)
      S1=FLOAT(M-1)/ANR
      S=S1*S1
      DO 115 N=1,NC
      COSX=DCX(N)
      SENX=DSX(N)
      T1=FLOAT(N-1)/ANC
      T=T1*T1
      ST=S+T
      BETA=-0.2831850*ZETA*SQRT(ST)
      ALFA=EXP(BETA)
      AOC=ALFA*A(M,N)
      BOC=ALFA*B(M,N)
      COC=ALFA*C(M,N)
      DOC=ALFA*D(M,N)
      X=X+AOC*COSY*COSX
     1     +BOC*COSY*SENX
     2     +COC*SENY*COSX
     3     +DOC*SENY*SENX
  115 CONTINUE
      ZZ(I,J)=X
  113 CONTINUE
      RETURN
      END
SE[illegible]IS  ,TYPE1,SEGD
      SUBROUTINE SEN(A,[illegible],C,[illegible],NC,[illegible],PIX,PIY,ZETA,ZZ)
      REAL [illegible]
      DIMENSION A(60,60),B(60,60),C(60,60),D(60,60),ZZ(100,100)
      DIMENSION DCX(60),DSX(60)
      ANR=NR
      ANC=NC
      DO 113 I=1,NR
      DO 113 J=1,NC
      X=0.0
      DO 114 L=1,NC
      ARG=FLOAT((J-1)*(L-1))*PIX
      DCX(L)=COS(ARG)
      DSX(L)=SIN(ARG)
  114 CONTINUE
```

```
      DO 115 M=1,MTA
      ARG=FLOAT((I-1)*(M-1))*P[illegible]
      COSY=COS(ARG)
      SENY=SIN(ARG)
      S1=FLOAT(M-1)/ANR
      S=S1+S1
      DO 115 N=1,NNC
      COSX=CCX(N)
      SENX=SSX(N)
      T1=FLOAT(N-1)/ANC
      T=T1+T1
      ST=S+T
      TS=ST
      DELTA=-0.2831[illegible]*ZETA*SQRT(ST)
      GAMMA=(0.2831[illegible]**2)*TS
      ALFA=GAMMA*EXP(DELTA)
      AOC=ALFA*A(M,N)
      BOC=ALFA*B(M,N)
      COC=ALFA*C(M,N)
      DOC=ALFA*D(M,N)
      X=X+AOC*COSY*COSX
     1     +BOC*COSY*SENX
     2     +COC*SENY*COSX
     3     +DOC*SENY*SENX
  115 CONTINUE
      ZZ(I,J)=X
  113 CONTINUE
      RETURN
      END
```