

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**  
**FACULTAD DE INGENIERIA**



**LA ANOMALIA MAGNETICA DE CUERPOS**  
**CILINDRICOS VERTICALES**

**TESIS PROFESIONAL**  
**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE**  
**INGENIERO GEOFISICO**  
**P R E S E N T A**

**HECTOR MARCOS CABRERA**

**México, D. F.**

**1979**

2ej.  
15



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# LA ANOMALIA MAGNETICA DE CUERPOS CILINDRICOS VERTICALES

## C O N T E N I D O

- I.- *Introducción al problema de interpretación magnetométrica.*
  - II.- *Deducción de la expresión analítica para el cálculo de la anomalía magnética de cuerpos cilíndricos verticales.*
  - III.- *Efectos de la inclinación y declinación magnéticas - en las anomalías.*
  - IV.- *Efectos de la profundidad y radio del cilindro en las anomalías.*
  - V.- *Efectos de la magnetización remanente.*
  - VI.- *Determinación de "índices de profundidad" para la interpretación cuantitativa de anomalías magnéticas.*
  - VII.- *Programa FORTRAN para el cálculo de anomalías magnéticas de cilindros verticales.*
  - IX.- *Bibliografía.*
- Apendice A.*
- Apendice B.*

## 1.- INTRODUCCION AL PROBLEMA DE INTERPRETACION MAGNETOMETRICA.

Las anomalías magnéticas de origen geológico son generalmente causadas por cuerpos extensos que muchas veces no pueden ser representados fácilmente por polos aislados o por arreglos lineales de polos y dipolos. En este trabajo los cuerpos idealizados que serán computados son cilindros verticales de longitud infinita; la superficie superior del cilindro es horizontal y la intensidad magnética total se calcula sobre un plano horizontal. Hasta el momento no existe una regla sencilla para la interpretación rápida y exacta de estos campos, por eso en este trabajo se analiza una forma menos difícil de interpretar dichos campos.

Los objetivos de este trabajo son:

- 1) Presentar el desarrollo matemático de la fórmula para computar los campos magnéticos.
- 2) Presentar algunas relaciones empíricas entre el cilindro físico y el campo computado.
- 3) Ilustrar cómo el cilindro puede ser usado en la interpretación de anomalías magnéticas.

Una descripción acerca de la manera por la cual los estudios magnéticos revelan la estructura general del basamento -- se ilustra en las figuras 1 y 2.

Generalmente las componentes horizontales de la intensidad magnética y de polarización no se consideran. El cuerpo -- ABCD representa un complejo rocoso cuya polarización magnética es mayor que la de sus alrededores por una cantidad constante. La polarización magnética del cuerpo ABCD es debida a particu-

las magnéticas dispersadas por todo el cuerpo, las cuales bajo la influencia del campo magnético terrestre, son alineados de tal forma que sus polos sur representan las partes más someras.

Un estudio de esta geometría ha mostrado (Vaquier, The -- Geological Society of America, Memoir 47) que las anomalías causadas por cuerpos profundos tales como ABCD serán más grandes en magnitud y diferentes en características, que las anomalías causadas por los cuerpos ABC'D'. Esta relación está indicada -- por los perfiles magnéticos que se encuentran en la parte superior de la figura).

Cuando la superficie superior del cuerpo es muy profunda la anomalía será más suave, como se ilustra en las figuras 2b y 2c. Si el cuerpo tiene sus lados inclinados en lugar de verticales (figura 2d), su efecto magnético puede ser calculado aproximadamente considerando el cuerpo como una serie de capas delgadas, es decir, sumando los ángulos sólidos subtendidos por las partes superiores y después restándolos con las partes inferiores de dichas capas. Es evidente que la contribución de las -- áreas comunes de las capas superiores e inferiores sumarán cero, entonces, la anomalía consistirá de la suma de los ángulos sólidos subtendidos por las áreas horizontales de cada capa.

Aunque las partes superiores de los cuerpos de las figuras 2a, 2d están a la misma profundidad, la figura 2d, debido a sus lados inclinados producirá un perfil magnético que será de la misma característica que el presentado por el cuerpo de la figura 2c. Así un cuerpo con lados inclinados, cuya cima es somera dará anomalías muy similares a los de cuerpos más profundos con

lados verticales, como el de la figura 2a; de este modo, se puede decir que la magnitud de las anomalías magnéticas es una medida que depende de la máxima profundidad posible de la superficie superior del cuerpo.

El presente trabajo trata solamente el caso de cuerpos cilíndricos verticales con una polarización arbitraria. La expresión del potencial gravitacional de un cilindro dada por Singh (1977) y la relación de Poisson se usan aquí para derivar el campo magnético. La expresión final del campo total, se derivará partiendo de la idea de que la magnetización es uniforme en todo el cuerpo (caso ideal).

Finalmente, el campo anómalo total se evalúa con la ayuda de un computador digital y las configuraciones se obtienen por medio de un paquete Geofísico GPCPII, (CalComp, GPCPII, Pemex).

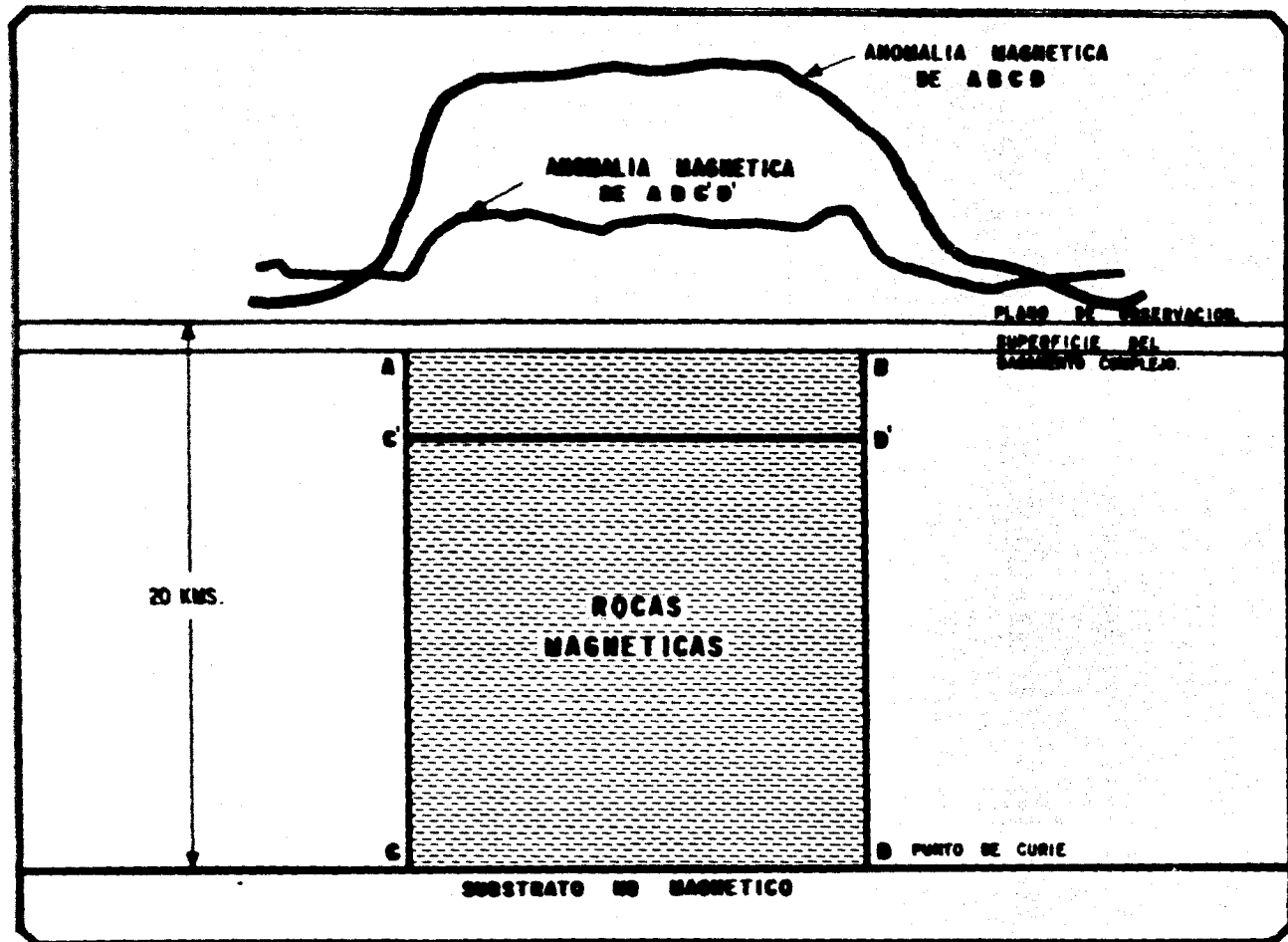


FIGURA 1- INTENSIDAD MAGNETICA VERTICAL CON CONTRASTE CON POLARIZACION VERTICAL (VAGUIER, MEMOIR 47)

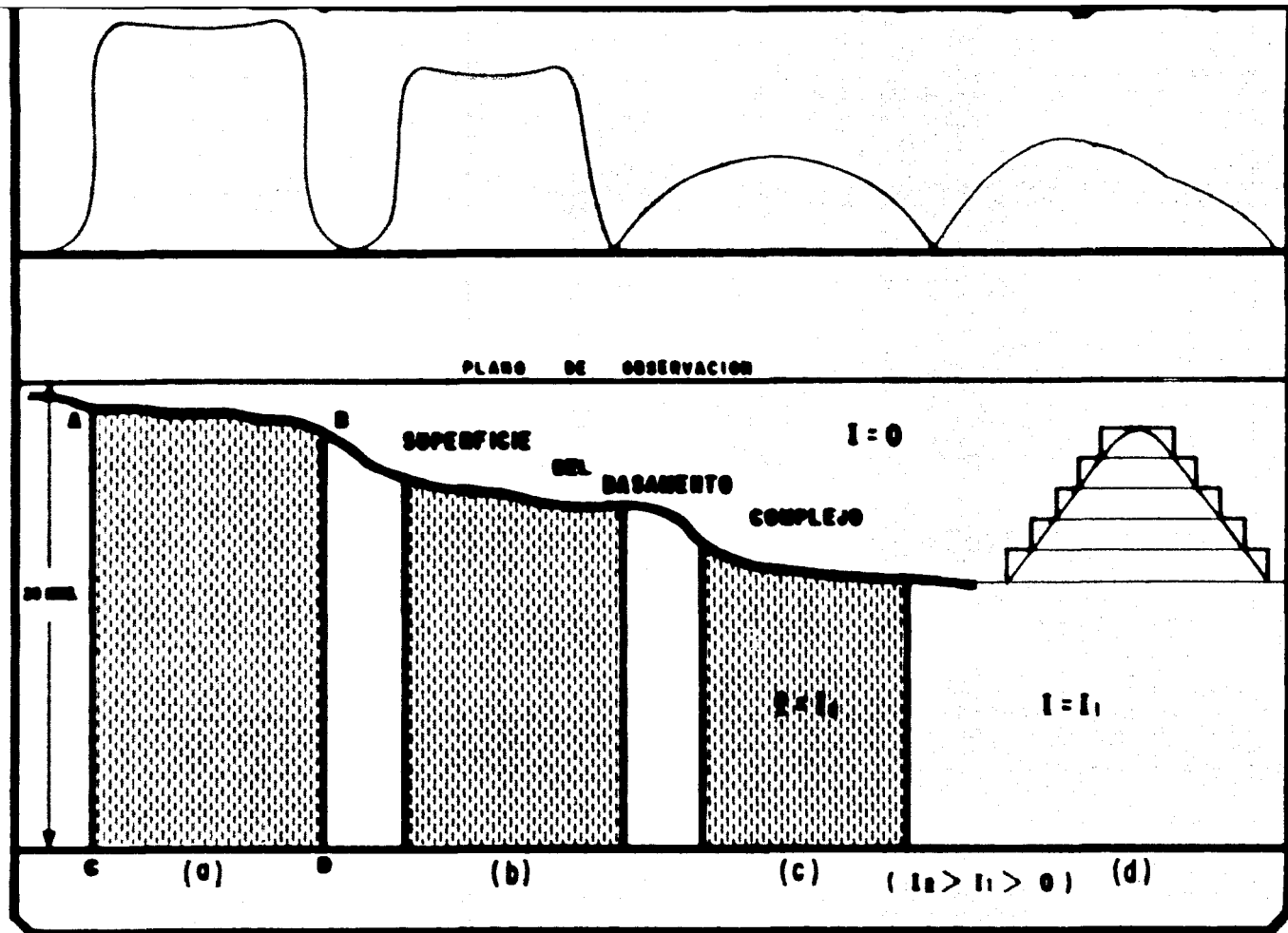


FIGURA 2.- VARIACION DE ANOMALIAS DE INTENSIDAD MAGNETICA VERTICAL CON LA PROFUNDIDAD DE SEPULTAMIENTO —  
(VALORES MEDIO 47)



## II.- DEDUCCION DE LA EXPRESION ANALITICA PARA EL CALCULO DE LA ANOMALIA MAGNETICA DE CUEPROS CILINDRICOS VERTICALES.

Consideramos un cilindro circular simiinfinito de radio  $a$  localizado en el plano  $z=0$  (figura 3).

Considerando para un caso ideal, si el cilindro esta uniformemente magnetizado, sea  $(l,m,n)$  y  $(L,M,N)$  los cosenos directores del campo magnético terrestre y del vector de polarización, respectivamente. Ya que la magnitud del campo magnético terrestre generalmente predomina sobre el campo anómalo, entonces, el campo resultante será tomado en la dirección del campo terrestre.

La expresión para el campo magnético anómalo total  $F$  producido por un cilindro fue calculado por Telford et al (1976, P. - 113). Esta expresión está derivada en términos de integrales elípticas completas de primera y de segunda clase y de la función de Lambda Heuman, y es de la siguiente forma.

$$F = \frac{I_t}{G\varrho} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \phi(r, z) \quad (1)$$

Lista de símbolos.

$I_t$	-Es la magnetización total (remanente más inducida).
$G$	-Constante gravitacional universal.
$\varrho$	-Densidad del cilindro.
$\phi(r, z)$	-Potencial gravitacional del cilindro.
$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}$	-Son las derivadas direccionales en las direcciones de los vectores de polarización y del campo terrestre.

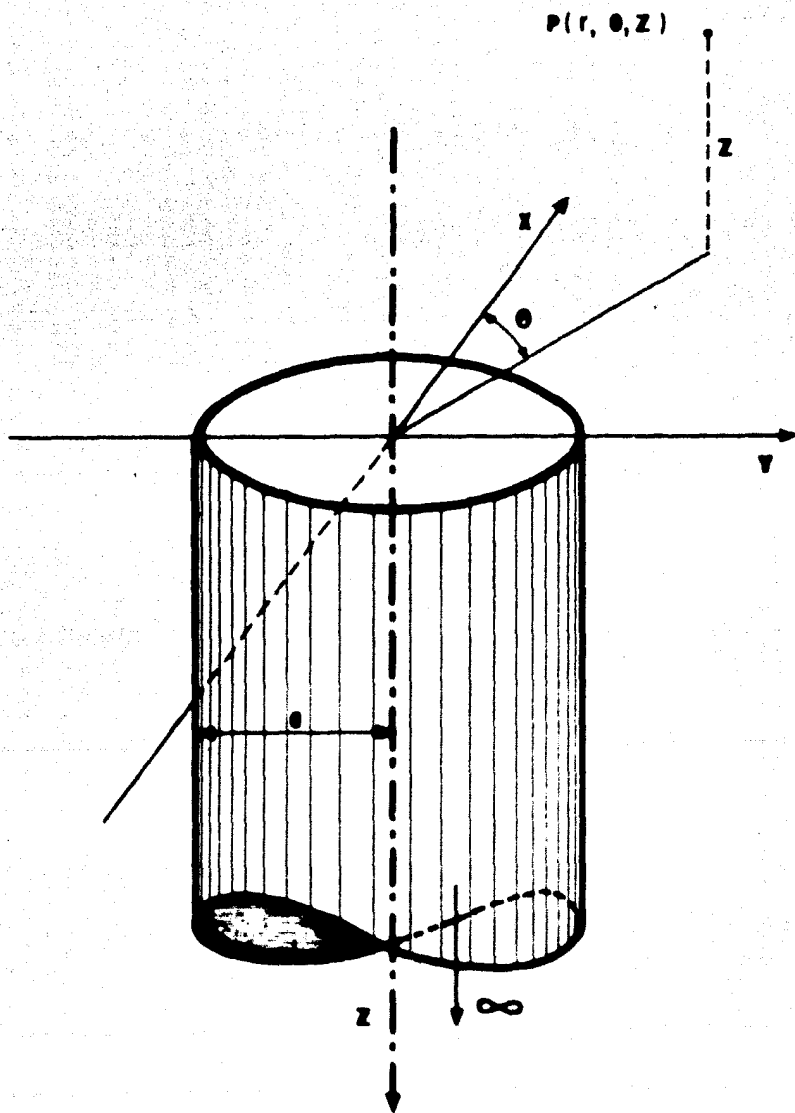


FIGURA 3.- CILINDRO CIRCULAR SEMIINFINITO DE RADIO a

Utilizando cambios de coordenadas, de cartesianas a cilíndricas y haciendo uso de la definición de derivadas direccionales se obtienen los siguientes resultados.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} &= L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} + N \frac{\partial}{\partial z} \\ &= (L \cos \theta + M \operatorname{sen} \theta) \frac{\partial}{\partial r} + (-L \operatorname{sen} \theta + M \cos \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + N \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial v} &= l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \\ &= (l \cos \theta + m \operatorname{sen} \theta) \frac{\partial}{\partial r} + (-l \operatorname{sen} \theta + m \cos \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + n \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

Definiendo:

$$\begin{aligned}A &= (2L \cos^2 \theta) + (2M + mL) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + mM \operatorname{sen}^2 \theta \\ B &= (2N + nL) \cos \theta + (2nM + nN) \operatorname{sen} \theta \\ C &= nN \\ D &= 2L \operatorname{sen}^2 \theta - (2M + mL) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + mM \cos^2 \theta\end{aligned} \quad (2)$$

Y como  $(I_0, D_0)$  y  $(I, D)$  son las inclinaciones y declinaciones del vector del campo terrestre y del vector de polarización, respectivamente, entonces:

$$\begin{aligned}l &= \cos I_0 \cos D_0 && \text{Cosenos directores del vector} \\ m &= \cos I_0 \operatorname{sen} D_0 && \text{campo terrestre.} \\ n &= \operatorname{sen} I_0 \\ L &= \cos I \cos D && \text{Cosenos directores del vector de} \\ M &= \cos I \operatorname{sen} D && \text{polarización.} \\ N &= \operatorname{sen} I\end{aligned}$$

Por lo tanto, substituyendo las expresiones anteriores en la ecuación 1, obtenemos.

$$\left(\frac{G_p}{I_t}\right) F = A \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{D}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3)$$

Puede demostrarse, (anexo A, ecuación A4) que el potencial gravitacional  $\phi(r, z)$  para el cilindro mencionado puede ser escrito de la siguiente forma.

$$\phi(r, z) = 2\pi G \rho a \int_0^{\infty} J_1(ap) J_0(rp) e^{-p|z|} p^{-2} dp \quad (4)$$

$$\phi(r, z) = 2\pi G \rho a I(1, 0; -2)$$

Donde los parámetros  $I(1, 0; -2)$  indican la clase de funciones Bessel que fueron utilizados en la obtención del potencial gravitacional.

De aquí se puede observar que  $I(1, 0; -2)$  es una función de  $r$  y  $z$  solamente. Llevando nuestra diferenciación como es requerida en la ecuación 3 y sustituyendo la expresión del potencial (ver apéndice A), se obtiene finalmente la fórmula para el cálculo de la anomalía de cuerpos cilíndricos verticales.

$$\frac{F}{I_t} = 2\pi a \left[ (C-A) I(1, 0; 0) - (D-A) \frac{1}{r} I(1, 1; -1) - B I(1, 1; 0) \right] \quad (z < 0) \quad (5)$$

### III.- EFECTOS DE LA INCLINACION Y DECLINACION MAGNETICA EN LAS ANOMALIAS.

La configuración de los campos normalizados para un cilindro particular, depende de la dirección de la magnetización (inclinación y declinación). Para cada dirección de magnetización está asociado un campo distinto con una relación espacial entre los valores máximos y mínimos y la geometría del cilindro.

Los campos presentados aquí están ordenados de tal forma - que permiten mostrar los efectos de variación de la inclinación y de la declinación de la magnetización.

Las figuras A1-A21 son mapas de la intensidad magnética total producidos por cuerpos cilíndricos verticales, estos mapas son de gran utilidad en la interpretación de datos magnéticos.

En todos los casos estudiados se ha considerado al eje X - en la dirección del Norte magnético, y la inclinación del campo terrestre igual a  $75^\circ$  y  $45^\circ$ . Cuando la declinación de magnetización está en la dirección del Norte magnético y la inclinación es menor que  $90^\circ$ ; se presenta un mínimo sobre el lado Norte del cilindro. La magnitud del mínimo es más grande cuando la inclinación es  $0^\circ$  y menor cuando la inclinación se aproxima a  $90^\circ$ . -- Para inclinaciones mayores de  $90^\circ$  (y menores que  $180^\circ$ ) el máximo valor es localizado sobre el lado Sur del cilindro y sus magnitudes aumentan con el incremento de la inclinación, y es mucho mayor cuando la inclinación es igual a  $180^\circ$ .

Cuando la declinación se incrementa de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , el valor mínimo migra en la dirección del incremento para inclinaciones menores iguales a  $90^\circ$ , y el valor máximo gira en la dirección del incremento para inclinaciones mayores que  $90^\circ$ .

Para inclinaciones bastante pequeñas entre ( $0^\circ$  y  $60^\circ$ ) y entre ( $150^\circ$  y  $180^\circ$ ) existe una relación espacial entre el campo magnético y el cilindro, tal que, el máximo y el mínimo se sitúa aproximadamente en los extremos del cilindro. Estas relaciones pueden ser observadas en las figuras A1-A21.

La correspondencia de los calores máximos y mínimos de los campos normalizados  $AT/It$  con los límites del cilindro pueden ser observados en las perfiles magnéticos de la figura 5. La declinación es igual a  $0^\circ$  y la inclinación de  $0^\circ$  a  $150^\circ$  para producir cinco perfiles magnéticos. El máximo ocurre cerca de los lados del cilindro para inclinaciones menores o iguales a  $60^\circ$  y cuando la inclinación es mayor a  $150^\circ$ . El perfil para cuando la inclinación es mayor a  $180^\circ$  no está mostrado aquí, pero se puede deducir que es idéntico al perfil para cuando la inclinación es igual a  $0^\circ$ , excepto que el máximo y el mínimo ocupan posiciones contrarias.

La declinación de la magnetización puede determinarse aproximadamente a partir de los contornos de los campos normalizados. Si los máximos y mínimos de los campos magnéticos se conectan por una línea recta, entonces el ángulo así formado por esta línea y el Norte magnético, es una aproximación de la declinación del vector de magnetización. Esta aproximación, sin embargo, es válida solamente para inclinaciones pequeñas; cuando el ángulo de inclinación se aproxima a  $90^\circ$  este procedimiento no es aplicable.

De los estudios de los campos teóricos de varios modelos, se observa que los máximos y los mínimos magnéticos definen aproximadamente la localización de los lados del cilindro.

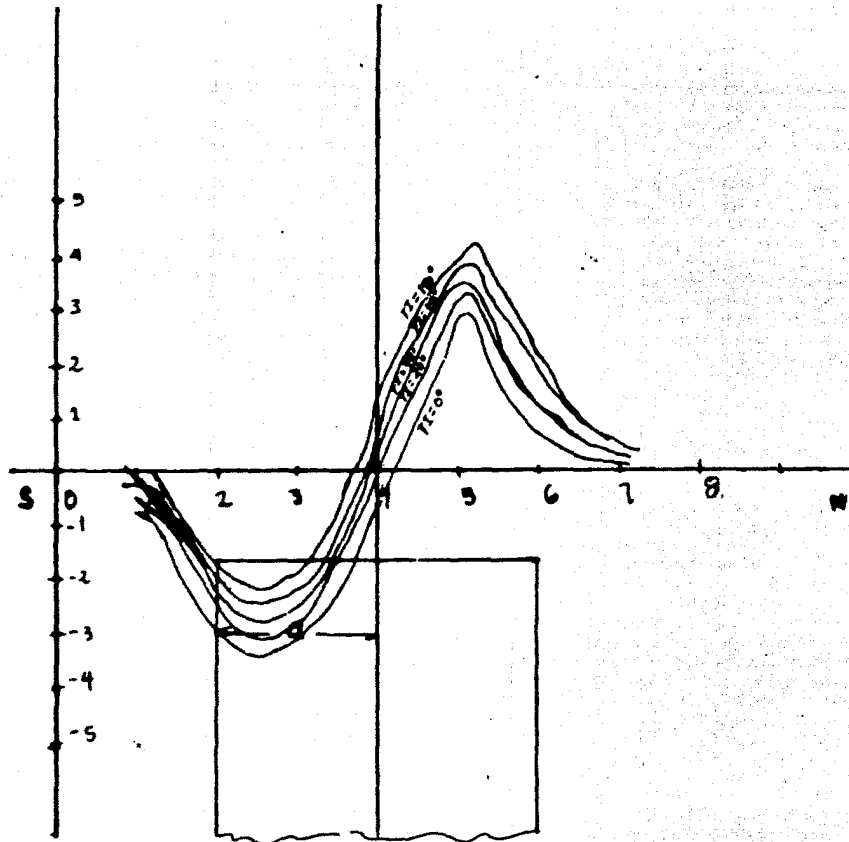


FIGURA 5. PERFILES DE CAMPO MAGNETICO ANOMALO NORMALIZADO --  
 ( $F/I\alpha$ ) ( $Z = 1$  UNIDAD,  $\alpha = 2$  UNIDADES). CON  $T_0 = E_0 = 0$ ,  $E_L = 75^\circ$   
 Y VARIANDO  $T\alpha$ .

#### IV.- EFECTOS DE LA PROFUNDIDAD Y RADIO DEL CILINDRO EN LAS ANOMALIAS.

Aquí se presenta los campos normalizados de 3 cilindros para analizar las variaciones de las anomalías que ocurren al hacer variar tanto la profundidad como el radio del cilindro. Estos campos son para: Cuando  $a$  vale 2,4 y 6 y para cuando la profundidad  $z$  vale 1,3, 7 (figuras A5, A6 y A7). De análisis de las anomalías se observó que las configuraciones de los campos normalizados para estos cilindros depende más de la dirección de la magnetización que de la profundidad y del radio del cilindro. Para cada dirección de la magnetización existe un campo distinto con una relación espacial entre los valores máximos y mínimos y el tamaño del cilindro. Se observó también que para ciertas direcciones de la magnetización los campos presentan simetría con los ejes del sistema coordenado. Como los casos cuando la declinación de la magnetización coincide con el norte magnético.

Cuando la profundidad  $z=1$ , las declinaciones de magnetización y campo terrestre son iguales a  $0^\circ$ , y las inclinaciones de la magnetización y del campo terrestre valen  $45^\circ$  y  $75^\circ$ , respectivamente, una variación de los valores máximos y mínimo se presenta al incrementar el valor del radio del cilindro. Ocorre lo contrario cuando se hace variar el valor de la profundidad  $z$  con los valores 1,3, y 7.



## V.- EFECTOS DE MAGNETIZACION REMANENTE.

Los modelos (figura A1 - A21) son cilindros verticales - con lados verticales y con polarización uniforme. El vector - de polarizaciones considerado a partir de la dirección del -- vector campo terrestre y la intensidad magnética es computada considerando esta misma dirección en la ecuación 5 del capítu - lo II.

La discusión anterior de las figuras 1 y 2 presenta un - cuadro simplificado del origen de las anomalías magnética. -- Aunque en las áreas de sedimentación profunda los efectos mag - néticos por si solos nos dan idea de la profundidad de los -- límites entre rocas de diferentes propiedades magnéticas, --- existen situaciones geológicas donde esta idea no es válida, pero que si llega a combinarse con otros factores geológicos pueden ser útiles en la interpretación.

Es completamente reconocido que los cuerpos rocosos en - general no son de formas cilíndricas, pero en general, la la - bor de computar estas figuras es de gran ayuda para la inter - pretación. El método es útil solamente si el tipo de postula - do de distribución, es decir, la polarización es uniforme con la profundidad.

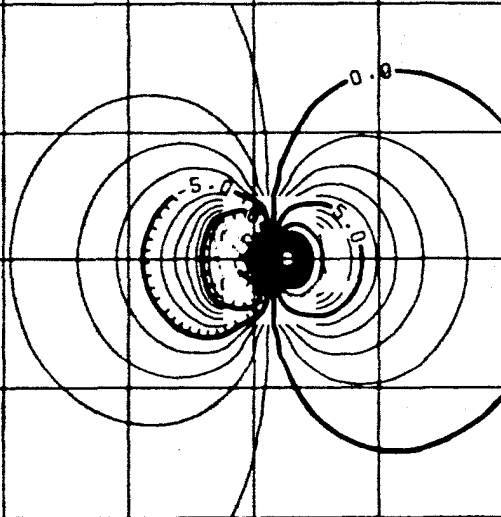
La idea de considerar la magnetización a partir de la di - rección del campo terrestre y que la magnitud de este campo - generalmente, predomina sobre el campo anómalo fue para apro - ximarse a un valor para la magnetización, pero debido precisa

mente a esta componente se puede ver una diferencia entre las direcciones de estos vectores.

Los cambios progresivos de la expresión magnética para un mismo cuerpo idealizados debido a esta componente, y la -- variación de la latitud, pueden ser observados en las anoma-- llas de las figuras A1 - A21. Estos cambios debido a esta com-- ponente han sido tratados en otros estudios (Isidore Zietz y G.E. Andreasen, U.S. Geological Survey), y los resultados han demostrado que esta componente es un factor importante en las anomalías.

UNIDAD  
DE  
PROFUNDIDAD

DIRECCION  
MAGNETICA



$A_1$

$T_1$ - INCLINACION DE MAGNETIZACION =  $0^\circ$

$T_0$ - DECLINACION DE MAGNETIZACION =  $0^\circ$

$E_1$ - INCLINACION DEL CAMPO TERRESTRE =  $70^\circ$

$R$ - RADIO DEL CILINDRO = 1

$Z$ - PROFUNDIDAD DEL CILINDRO = 1

U.N.A.M

FAC. DE INGENIERIA

TESTS PROFESIONAL

ANOMALIA MAGNETICA

DE UN CILINDRO

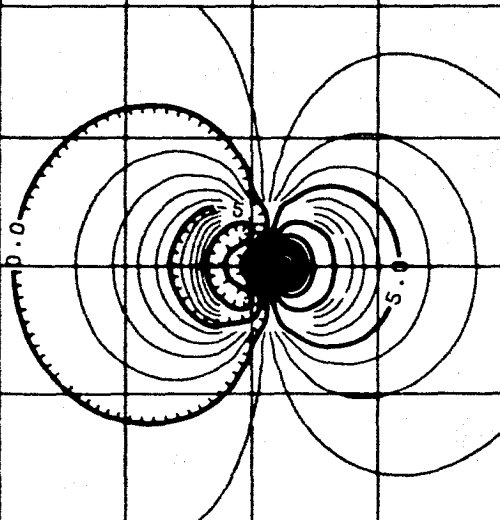
CIRCULAR VERTICAL

AGOSTO, 1979

H. MARCOS CABRERA

UNIDAD  
DE  
PROFUNDIDAD

ORTE  
MAGNETICO



$A_0$   
 $T_1 = 20^\circ$   
 $T_0 = 0^\circ$   
 $\alpha = 75^\circ$   
 $\theta = 4$   
 $Z = 1$

U.N.A.M

FAC. DE INGENIERIA  
TESIS PROFESIONAL

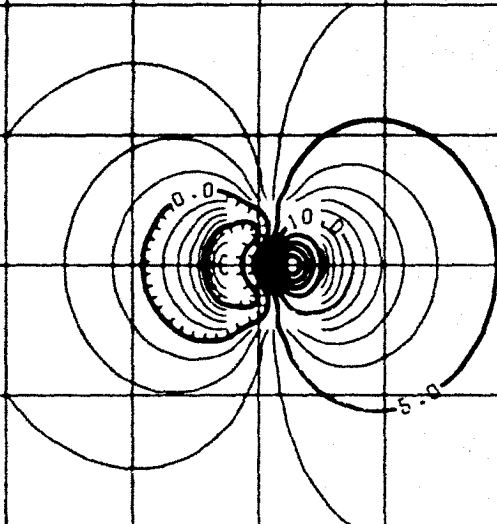
ANOMALIA MAGNETICA  
DE UN CILINDRO  
CIRCULAR VERTICAL

AGOSTO, 1979

H. MARCOS CABRERA

UNIDAD  
DE  
PROFUNDIDAD

ORTE  
MAGNETICO



$A_s$   
 $T_1 = 45^\circ$   
 $T_0 = 0^\circ$   
 $S_1 = 70^\circ$   
 $\theta = 3$   
 $Z = 1$

U.N.A.M

FAC. DE INGENIERIA

TESTS PROFESIONAL

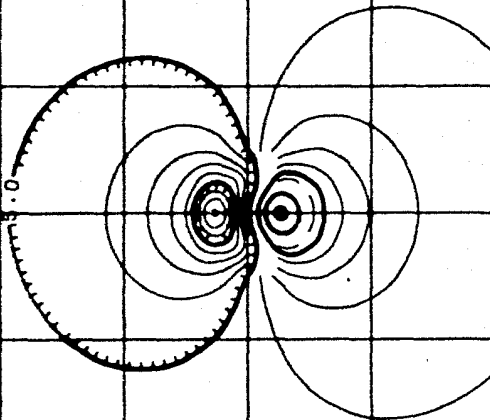
ANOMALIA MAGNETICA  
DE UN CILINDRO  
CIRCULAR VERTICAL

AGOSTO, 1979

H. MARCOS CABRERA

UNIDAD  
DE  
PROFUNDIDAD

NORTE  
MAGNETICO



$A_s$   
 $H_s = 75^\circ$   
 $T_s = 0^\circ$   
 $G_s = 700$   
 $g = 2$   
 $Z = 1$

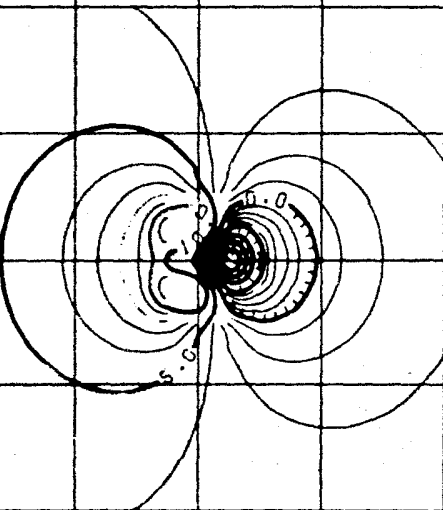
U.N.A.M

FAC. DE INGENIERIA  
TESTS PROFESIONAL

ANOMALIA MAGNETICA  
DE UN CILINDRO  
CIRCULAR VERTICAL

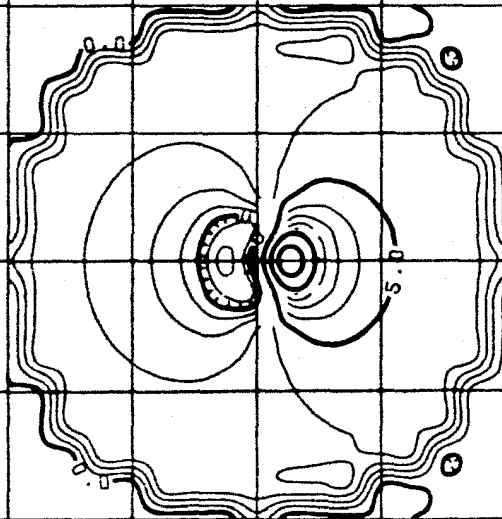
AGOSTO, 1979

M. MARCOS CABRERA



$\Delta_s$   
 $T_i = 150^\circ$   
 $T_b = 0$   
 $E_i = 75^\circ$   
 $C = 2$   
 $Z = 1$

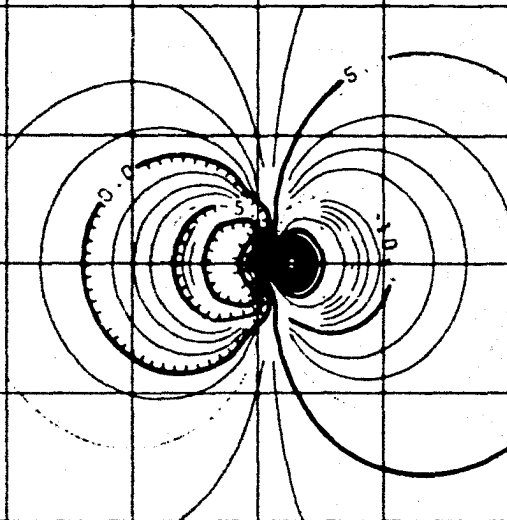
U.N.A.M  
FAC. DE INGENIERIA  
TESIS PROFESIONAL  
ANOMALIA MAGNETICA  
DE UN CILINDRO  
CIRCULAR VERTICAL  
AGOSTO, 1979  
H. MARCOS CABRERA



$M$   
 $T_i = 45^\circ$   
 $T_0 = 0$   
 $E_i = 75^\circ$   
 $\theta = 2$   
 $Z = 1$

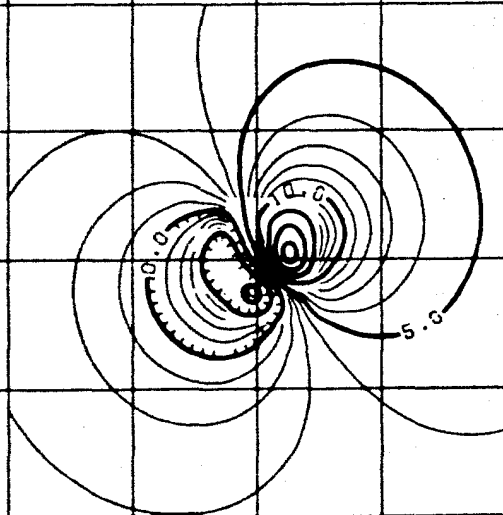
U.N.A.M.  
 FAC. DE INGENIERIA  
 TESIS PROFESIONAL  
 ANOMALIA MAGNETICA  
 DE UN CILINDRO  
 CIRCULAR VERTICAL  
 AGOSTO , 1979  
 H. MARCOS CABRERA





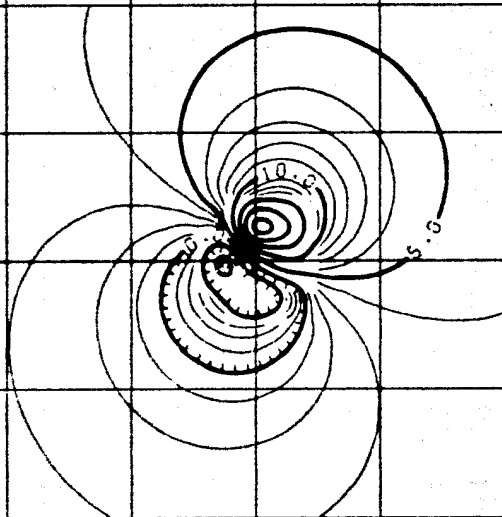
$A_7$   
 $T_i = 45^\circ$   
 $T_0 = 0$   
 $E_i = 75^\circ$   
 $\theta = 6$   
 $Z = 1$

U.N.A.M  
 FAC. DE INGENIERIA  
 TESTIS PROFESIONAL  
 ANOMALIA MAGNETICA  
 DE UN CILINDRO  
 CIRCULAR VERTICAL  
 AGOSTO , 1979  
 H. MARCOS CABRERA



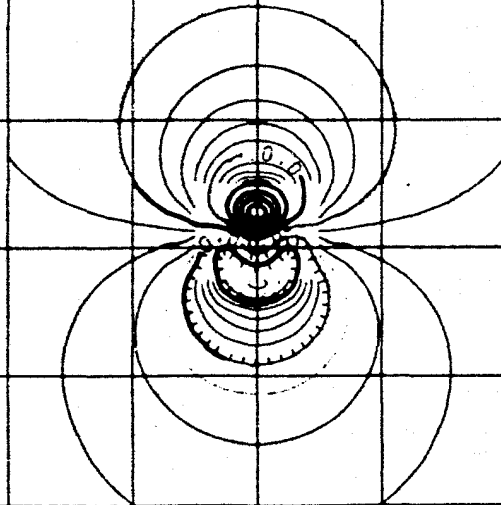
$A_0$   
 $T_i = 45^\circ$   
 $T_0 = 30^\circ$   
 $E_i = 75^\circ$   
 $\beta = 2$   
 $\alpha = 1$

U.N.A.M.  
 FAC. DE INGENIERIA  
 TESTIS PROFESIONAL  
 ANOMALIA MAGNETICA  
 DE UN CILINDRO  
 CIRCULAR VERTICAL  
 AGOSTO, 1979  
 H. MARCOS CABRERA



$A_0$   
 $T_i = 45^\circ$   
 $T_0 = 60^\circ$   
 $E_i = 75^\circ$   
 $\theta = 2$   
 $Z = 1$

U.N.A.M.  
 FAC. DE INGENIERIA  
 TESIS PROFESIONAL  
 ANOMALIA MAGNETICA  
 DE UN CILINDRO  
 CIRCULAR VERTICAL  
 AGOSTO , 1973  
 H. MARCOS CABRERA



$\Delta_{00}$   
 $T_i = 45^\circ$   
 $T_0 = 0$   
 $E_i = 270^\circ$   
 $n = 2$   
 $Z = 1$

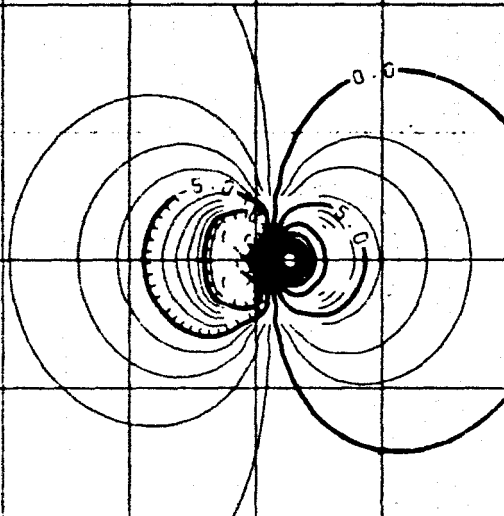
U.N.A.M

FAC. DE INGENIERIA  
 TESIS PROFESIONAL

ANOMALIA MAGNETICA  
 DE UN CILINDRO  
 CIRCULAR VERTICAL

AGOSTO, 1979

H. MARCOS CABRERA



$A_1$   
 $T_i = 45^\circ$   
 $T_p = 0$   
 $E_i = 45^\circ$   
 $\theta = 2$   
 $Z = 1$

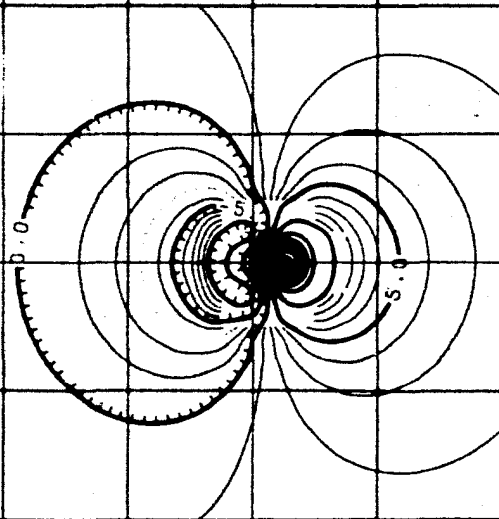
U.N.A.M

FAC. DE INGENIERIA  
 TESTS PROFESIONAL

ANOMALIA MAGNETICA  
 DE UN CILINDRO  
 CIRCULAR VERTICAL

AGOSTO, 1979

H. MARCOS CABRERA

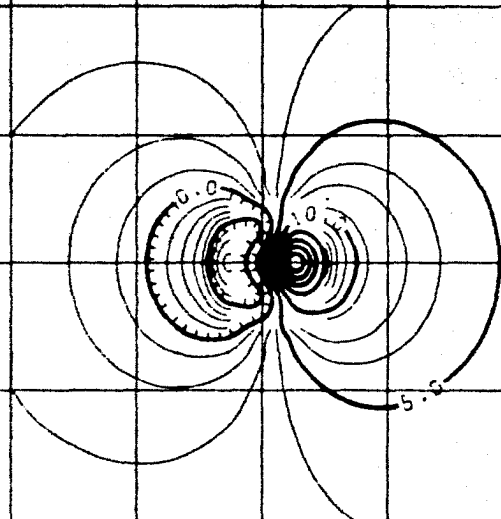


$A_0$   
 $T_i = 49^\circ$   
 $T_0 = 20^\circ$   
 $E_i = 46^\circ$   
 $\theta = 2$   
 $Z = 1$

U.N.A.M

FAC. DE INGENIERIA  
 TESIS PROFESIONAL  
 ANOMALIA MAGNETICA  
 DE UN CILINDRO  
 CIRCULAR VERTICAL

AGOSTO , 1979  
 H. MARCOS CABRERA



$\Delta\alpha$   
 $T_1 = 45^\circ$   
 $T_2 = 45^\circ$   
 $\theta_1 = 45^\circ$   
 $\theta = 2$   
 $Z = 1$

U.N.A.M

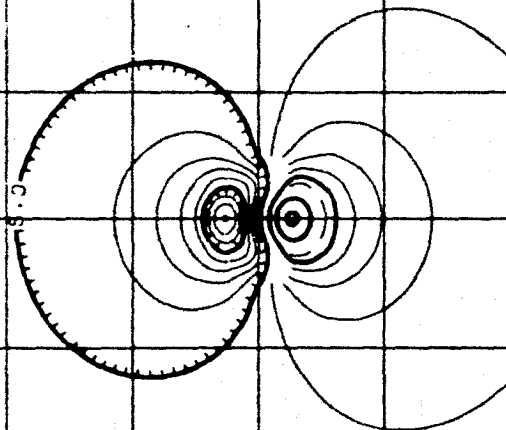
FAC. DE INGENIERIA

TESIS PROFESIONAL

ANOMALIA MAGNETICA  
 DE UN CILINDRO  
 CIRCULAR VERTICAL

AGOSTO . 1979

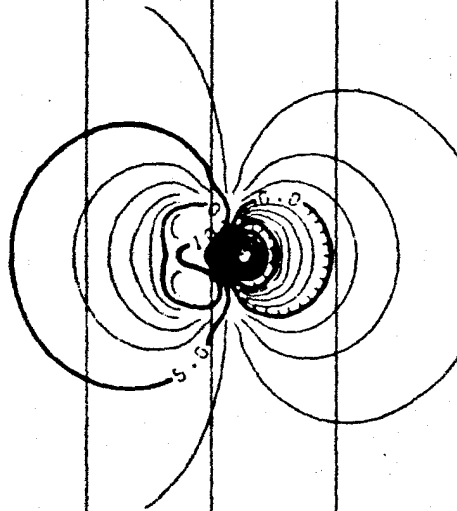
H. MARCOS CABRERA



$A_m$   
 $T_1 = 75^\circ$   
 $T_0 = 0^\circ$   
 $\theta = 45^\circ$   
 $n = 2$   
 $Z = 1$

U.N.A.M.  
 FAC. DE INGENIERIA  
 TESTIS PROFESIONAL  
 ANOMALIA MAGNETICA  
 DE UN CILINDRO  
 CIRCULAR VERTICAL  
 AGOSTO, 1979  
 H. MARCOS CABRERA

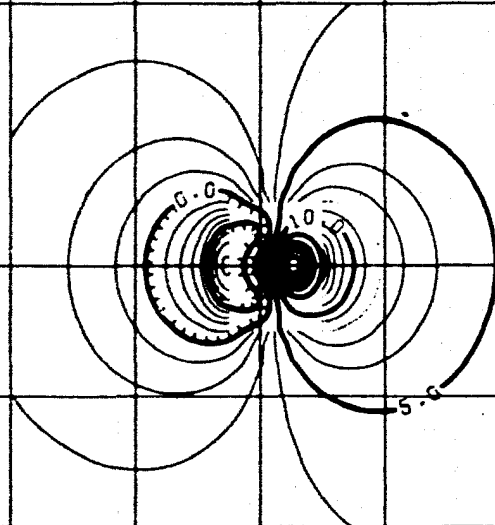




$\theta = 75^\circ$   
 $\gamma_0 = 20^\circ$   
 $\epsilon_1 = 40^\circ$   
 $n = 2$   
 $Z = 1$

U.N.A.M

FAC. DE INGENIERIA  
 TESIS PROFESIONAL  
 ANOMALIA MAGNETICA  
 DE UN CILINDRO  
 CIRCULAR VERTICAL  
 AGOSTO, 1979  
 H. MARCOS CABRERA



END OF PLOTTER TAPE

$A_0$   
 $T_1 = 75^\circ$   
 $T_0 = 45^\circ$   
 $E_1 = 45^\circ$   
 $\theta = 2$   
 $Z = 1$

U.N.A.M

FAC. DE INGENIERIA

TESTIS PROFESIONAL

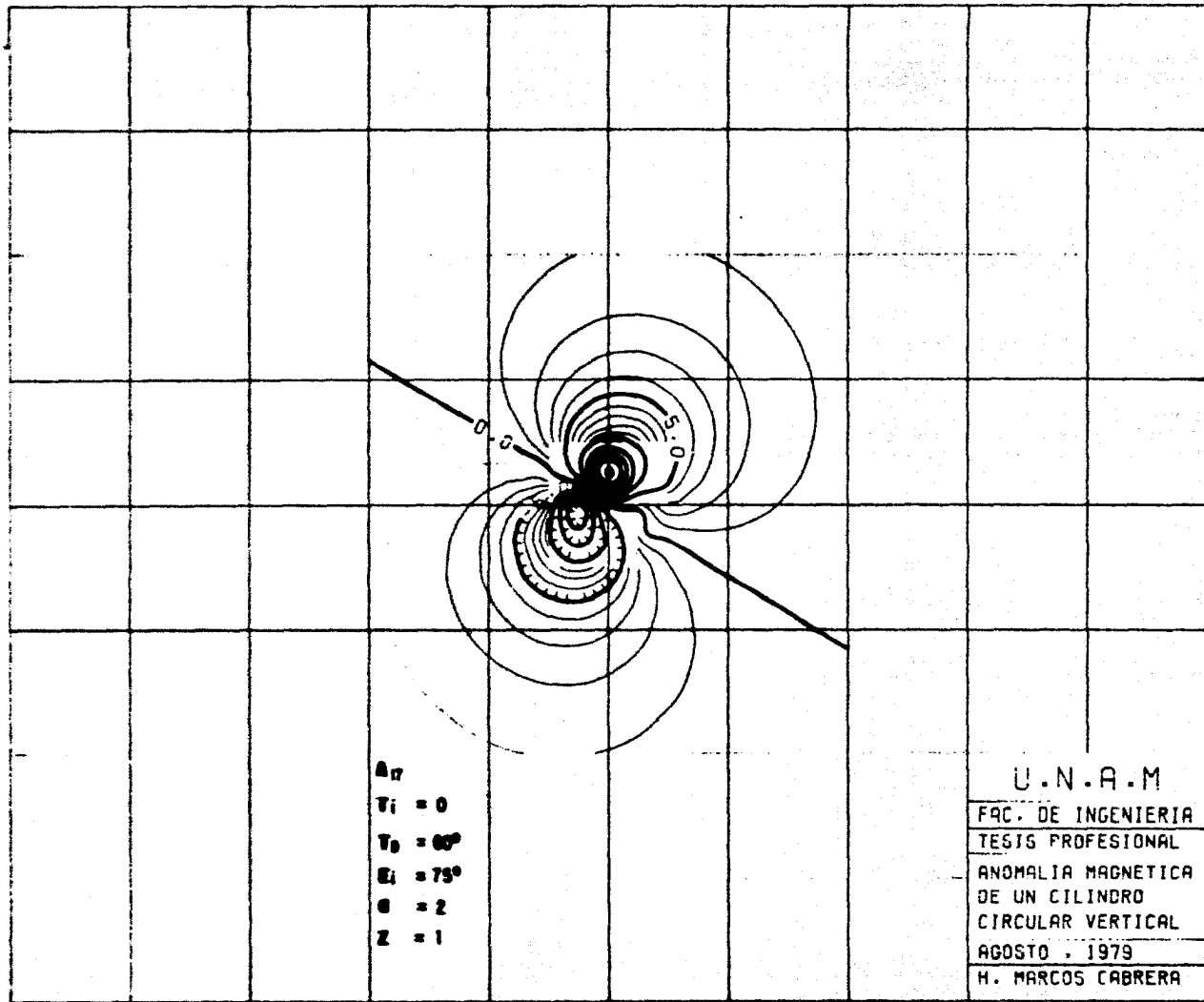
ANOMALIA MAGNETICA

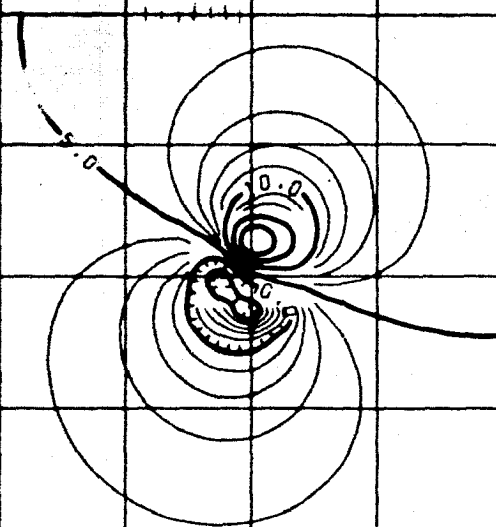
DE UN CILINDRO

CIRCULAR VERTICAL

AGOSTO , 1979

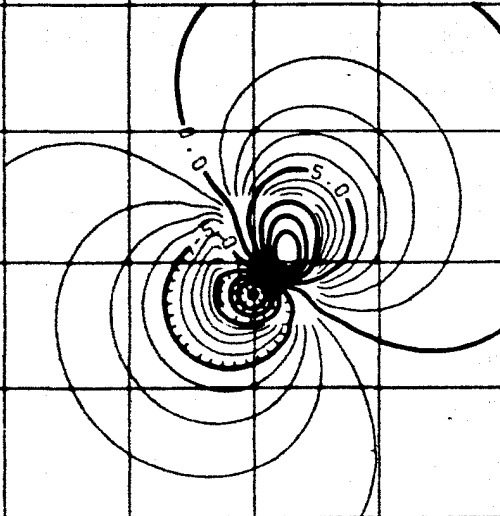
M. MARCOS CABRERA





$\alpha = 0^\circ$   
 $\beta = 60^\circ$   
 $\gamma = 75^\circ$   
 $\delta = 2$   
 $\epsilon = 1$

U.N.A.M  
 FAC. DE INGENIERIA  
 TESIS PROFESIONAL  
 ANOMALIA MAGNETICA  
 DE UN CILINDRO  
 CIRCULAR VERTICAL  
 AGOSTO , 1979  
 H. MARCOS CABRERA



END OF PLOTTER TAPE

$R_0 = 0$   
 $T_0 = 0$   
 $R = 250$   
 $\theta = 2$   
 $Z = 1$

U.N.A.M

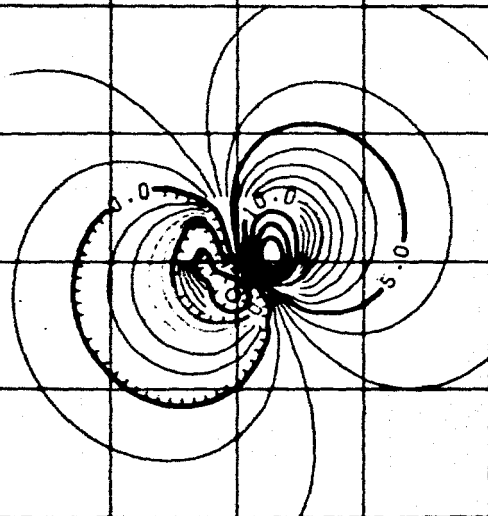
FAC. DE INGENIERIA

TESIS PROFESIONAL

ANOMALIA MAGNETICA  
DE UN CILINDRO  
CIRCULAR VERTICAL

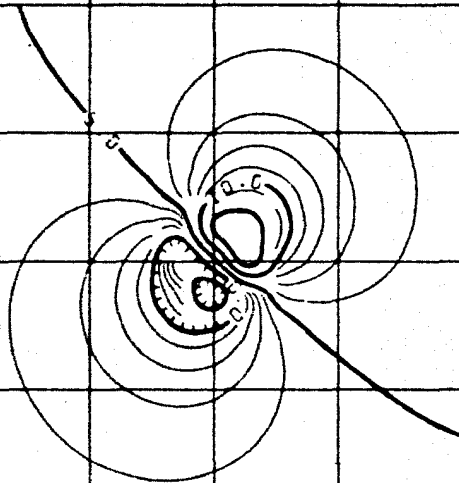
AGOSTO, 1979

H. MARCOS CABRERA



$A_m$   
 $T_i = 30^\circ$   
 $T_o = 30^\circ$   
 $\alpha_i = 70^\circ$   
 $\theta = 2$   
 $Z = 1$

U.N.A.M.  
FAC. DE INGENIERIA  
TESIS PROFESIONAL  
ANOMALIA MAGNETICA  
DE UN CILINDRO  
CIRCULAR VERTICAL  
AGOSTO , 1979  
H. MARCOS CABRERA



$A_m$   
 $T_i = 60^\circ$   
 $T_o = 60^\circ$   
 $E_i = 75^\circ$   
 $\theta = 2$   
 $Z = 1$

U.N.A.M  
 FAC. DE INGENIERIA  
 TESIS PROFESIONAL  
 ANOMALIA MAGNETICA  
 DE UN CILINDRO  
 CIRCULAR VERTICAL  
 AGOSTO , 1979  
 H. MARCOS CABRERA

## VI.- DETERMINACION DE INDICES DE PROFUNDIDAD PARA LA INTERPRETACION CUANTITATIVA DE ANOMALIAS MAGNETICAS.

Los índices de profundidad pueden ser calculados ya sea directamente de los mapas de intensidad magnética total o por medio de un análisis espectral de las anomalías. El primero se aplica analizando los planos de intensidad magnética total seleccionando aquellas que nos permitan obtener segmentos rectos medibles, que son intervalos comprendidos entre dos puntos donde las curvas son equidistantes (Vaquier, Memoir 47). Este método no es discutido en este trabajo, unicamente es mencionado para efecto de complementación.

El segundo método es un análisis espectral de las anomalías magnéticas teóricas. Debido a que su explicación requiere muchos conceptos matemáticos difíciles y laboriosos de explicar, nos limitaremos solamente en las formulas más necesarias, partiendo de la fórmula para el cálculo del campo total descrito en el capítulo 2. (Sharma y Geldest, 1968; Bhattacharyya, 1966; y Singh 1977) han presentado trabajos sobre análisis espectral de anomalías magnéticas utilizando cuerpos prismáticos y cilíndricos.

Considerando nuevamente el campo magnético total para un punto  $(x, y, 0)$  debido a un cuerpo uniformemente magnetizado con un vector de magnetización de intensidad total  $I_t$  y cosenos directores  $(L, M, N)$ . También es considerado que el campo magnético total está medido en la dirección del campo terrestre, cuyos cosenos directores son  $(l, m, n)$ . Entonces el campo magnético total está dado por.



$$F_t(x, y, z) = \frac{I_t}{G\beta} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi(x, y, z) \quad (6)$$

Donde nuevamente  $\frac{\partial}{\partial x}$  y  $\frac{\partial}{\partial y}$  son las derivadas direccionales en la dirección del vector de polarización y del vector campo terrestre, respectivamente.

$$\frac{\partial}{\partial x \partial y} = ll \frac{\partial^2}{\partial x^2} + mm \frac{\partial^2}{\partial y^2} + nn \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha_{13} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \alpha_{23} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \quad (7)$$

$$y \quad \alpha_{12} = (lm + ml), \quad \alpha_{13} = (ln + nl) \quad y \quad \alpha_{23} = (mn + nm)$$

De las expresiones 6-1, 6-2 y la transformada del potencial gravitacional (Apendice A), la transformada del campo magnético total  $F_t$  está dada por.

$$F_t(u, v, z) = 4\pi^2 I_t a \frac{J_1(a\omega)}{\omega^3} J \left[ e^{-\omega(z_2 - z_1)} - e^{-\omega(z_1 - z)} \right] \quad (8)$$

donde

$$J = -ll u^2 - mm v^2 + nn \omega^2 - \alpha_{12} uv + i\omega(\alpha_{13} u + \alpha_{13} v)$$

$$F_t(u, v, 0) = 4\pi^2 I_t a \frac{J_1(a\omega)}{\omega^3} J \left[ e^{-\omega z_2} - e^{-\omega z_1} \right]$$

#### CALCULO DE INDICES DE PROFUNDIDAD

Utilizando la transformada del campo magnético total, los Indices de profundidad pueden ser estimados por considerar los espectros de las anomalías.

Para determinar  $Z_1$  y  $Z_2$  nosotros consideraremos el espectro de amplitud radial  $A(\omega)$  de  $F_t(\omega)$ , entonces.

$$A_t(\omega) = 4\pi^2 G \rho a \frac{|J_1(a\omega)|}{2\omega} J' I_t \begin{bmatrix} e^{-\omega z_1} & -e^{-\omega z_2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde

$$J' = \left[ (-1L - nM + 2nN - \alpha_{12})^2 + 2(\alpha_{13} + \alpha_{23}) \right]^{1/2}$$

Definiendo.  $f_t = \frac{\omega A_t(\omega)}{2\pi^2 G a |J_1(a\omega)| J' I_t} = f \begin{bmatrix} e^{-\omega z_1} & -e^{-\omega z_2} \end{bmatrix} \quad (10)$

$$\left. \begin{aligned} \omega_j &= j\omega_i, \quad j=2,3 \\ \mu_k &= e^{-\omega_i z_k}, \quad k=1,2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Donde  $\omega_j$  son valores para los cuales la expresión 10 se satisfice y  $\omega_i$  es cualquier frecuencia mayor o igual que la frecuencia fundamental. La solución de 10 es dada por.

$$\mu_{1,2} = \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2}; \quad \alpha_1 = \frac{f_t(2\omega_i)}{f_t(\omega_i)} = 2 \frac{A_t(2\omega_i) |J_1(a\omega_i)|}{A_t(\omega_i) |J_1(2\omega_i)|}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1^2 - 3 \frac{A_t(3\omega_i) |J_1(a\omega_i)|}{A_t(\omega_i) |J_1(3\omega_i)|}$$

Entonces, las profundidades pueden ser obtenidas de 11.

$$z_k = \frac{1}{\omega_i} \ln \mu_k, \quad k=1,2 \quad (12)$$

Finalmente, la intensidad de magnetización  $I_t$ , asumiendo que  $(L, M, N)$  y  $(l, m, n)$  son conocidos, está dado por.

$$I_t = \frac{f_t(\omega_i)}{J'(\mu_1, -\mu_2)} \quad (13)$$

De igual manera se puede encontrar otras relaciones tal que nos permita calcular el radio y la densidad del cilindro.

## VII.- CONCLUSIONES.

En este trabajo ha sido presentado los resultados de un estudio sobre las anomalías magnéticas producidas por cuerpos cilíndricos verticales. La fórmula del campo total para todos los posibles casos en relación con un cilindro puede ser obtenida ya sea directamente de este trabajo o por simple extensión de las fórmulas dadas aquí.

De los resultados obtenidos de perfiles magnéticos de varias anomalías se observó que para inclinaciones bajas los puntos máximos y mínimos de las anomalías marcan los límites de las masas rocosas. Las técnicas interpretacionales desarrolladas de otros trabajos sobre prismas pueden ser utilizadas también para el cilindro.

El problema de interpretación de anomalías puede ser extremadamente difícil en algunos casos donde la magnetización debida a inducción juega un papel insignificante comparada con la magnetización remanente. Un intento para simplificar este problema ha sido presentado en varios trabajos, pero desafortunadamente ellos son solamente unos de las varias posibilidades.

Los índices de profundidad fueron estudiados por medio de análisis espectral de las anomalías magnéticas. El espectro de una anomalía contiene generalmente efectos bastante largos debido a la parte superior del cuerpo, comparado con la parte inferior. Para enfatizar este efecto es necesario transformar la anomalía en el dominio del espacio y entonces usar el espectro de la anomalía transformada para el análisis.

## VIII.- PROGRAMA FORTRAN PARA EL CALCULO DE ANOMALIAS MAGNETICAS DE CILINDROS VERTICALES.

La ecuación 5 desarrollada en el capítulo 2 es una expresión exacta para el campo normalizado debido a un cilindro vertical en cualquier punto del plano X-Y.

El programa para este campo está escrito en lenguaje - - - FORTRAN, consta de tres Partes: un programa principal y dos - - subrutinas, como se puede observar al final de este capítulo. El programa es alimentado por medio de dos tarjetas de entrada. La primera tarjeta contiene los siguientes datos: N números - - de puntos que alimenta a la Subrutina para el cálculo de la - - función de Lambda Heuman, IX y JY definen los límites Mínimo y máximo de la matriz en la dirección X y JW y JZ definen los límites mínimo y máximo en la dirección Y. DELTX y DELTY son los incrementos en la dirección X y Y respectivamente. La segunda - tarjeta contiene los siguientes datos: XIN y YIN son las coordenadas inferiores de la matriz (-X, -Y), a y r radio y profundidad del cilindro, ED, EI y TD, TI son las declinaciones e inclinaciones de los vectores campo terrestre y polarización respectivamente.

Los campos han sido computados para varios cilindros cuyos parámetros son: radio igual a 2, 4 y 6, profundidad igual a 1, 3 y 7, siendo los valores de los ángulos de declinación e inclinación de la magnetización los siguientes: 0°, 30°, 60°, 90°, y 0°, 20°, 45°, 75° y 150° en forma correspondiente. Estas variaciones fueron repetidas para dos valores de la inclinación - - del campo terrestre que fueron 45° y 75°. En todos estos casos - considerados los ángulos de la declinación del campo terrestre

y los de la magnetización fueron iguales.

Los valores del campo normalizado para 1353 puntos pueden ser calculados en 35 segundos en un computador CDC-6400, la interpolación requiere aproximadamente de 40 segundos y alrededor de 60 segundos para la configuración.



WRITE(6,\*) A1,Z100,TS,TO,TZ,DELTA,DELTY,

1 XIN,YIN

5 FORMAT(1H1,10X,'DATA O.S. DE ENTRADA',//

15X,'LEIDA DE LA MATRIZ'//)

215X,'PROPOSICION DEL VECTOR'//

515X,'INCLINACION CAMPO TERRESTRE'//

615X,'DECLINACION CAMPO TERRESTRE'//

715X,'INCLINACION DE LA MATRIZ'//

815X,'DECLINACION DE LA MATRIZ'//

915X,'INCREMENTO EN X'//

015X,'INCREMENTO EN Y'//

115X,'VALOR PRINCIPAL DE LA MATRIZ'//

215X,'VALOR PRINCIPAL DE LA MATRIZ'//

C  
C  
C

RUTINA PARA CALCULAR LAS COORDENADAS DE UNA MATRIZ

PRINT

7 FORMAT(1H1,20X,'COORDENADAS DE LA MATRIZ'//,29X,

1 \*X(I),' ',6X,'Y(I)'//)

DO 2 I=1,4

2 X(I)=XIN+(DELTX\*I)-DELTX

DO 4 J=1,4

4 Y(J)=YIN+(DELTY\*J)-DELTY

DO 21 I=1,4

WRITE(6,\*) X(I),Y(I)

21 CONTINUE

C  
C  
C

CALCULO DE LOS Cosenos Directores

PI=8.01748329

EI=EI\*PI

TI=TI\*PI

VI=VI\*PI

VO=VO\*PI

C  
C  
C  
C  
C

COSENO DIRECTORES DEL VECTOR CAMPO TERRESTRE

COSENO DIRECTORES DEL VECTOR DE POLARIZACION

EL=COS(EI)\*COS(VI)

EM=COS(EI)\*SIN(VI)

EN=SIN(EI)

TL=COS(TI)\*COS(VI)

TM=COS(TI)\*SIN(VI)

TN=SIN(TI)

Y1 = EL \* TL

Y2 = EM \* TM

Y3 = EN \* TN

Y4 = EM \* TL + TM \* EL

Y5 = EL \* TM + TL \* EN

Y6 = EM \* TN + TM \* EN

AL = 1./A

C

```

119 A1E = A*E,
    A2 = A * A
    A3 = A2 * A
    PRIN 11
120 11 FORMAT(2X, 'ANGULOS', //, 5X,
    1 *ANGULOS', 5X, 'DISTANCIAS', 10X, *X(I)', 11X, *Y(J)', 10X,
    2 *ANOMALIAS', //, 19X', //)

```

```

C
C RUTINA PARA CALcular LA ANOMALIA MAGNETICA
C EN DOS FASES
C

```

```

125 DO 100 J=1, N
    DO 200 I=1, M
    IF (X(I) .EQ. 0.00 .AND. Y(J) .EQ. 0.00) GO TO 73 43
    T=ATAN2(Y(J), X(I))
    GO TO 130

```

```

130 T = 0.00
    44 ST = SIN(T)
    CT = COS(T)

```

```

135 ST2 = ST * ST
    CT2 = CT * CT
    A11 = TL * CT + TH * ST
    A12 = TH * CT - TL * ST

```

```

140 1 = TH2 * ST2
    B = TH5 * CT + TH6 * ST
    C = TH7 * ST2 - TH8 * CT
    D = TH9 * ST2 - TH10 * CT
    R = SORT(X(I)**2 + Y(J)**2)
    Z50 = Z * Z

```

```

C
C FASE UNO
C CALCULO DE LAS INTEGRALES R1,R2,R3. PARA R MENOR QUE 0.1
C

```

```

145 Z1 = Z * Z
    Z2A = R1 - C * SORT(Z1 + B**2) * B
    Z22 = SORT(1. + (Z50/A2))
    R11 = -0.75 * (Z * A) * B * (R**2/A2) * (Z22**5)
    R1 = Z22 * Z2A * R11
    R2 = Z22 * Z2A * C * R11
    R3 = (Z2A/2.) * R/A
    GO TO 50

```

```

150 AK = SORT(CK * CK + BK**2) * 2000
    CK=1.-AK*AK
    BK = SORT(Z50/((1-R)*(A-R) + Z50))

```

```

155 CALL CEL1(SUBR,AK,5,1,10)
    CALL CEL2(EE,AK,1,CK,IER)
    CALL LANJ(RET,AK,N,IES)
    END

```

```

C
C FASE DOS
C CALCULO DE LAS INTEGRALES R1,R2,R3. PARA R MAYOR QUE 0.1
C

```



```

10 R1 = -(AK*Z*EK)/(4.*A*AR) + (-RES * A12) + AU
R2 = (Z*EE)/(2.*AK*AR) - (AK*Z*(A2+R*R*(ZSQ/2.)))/ (4.*A*R*AR)
175 1 + ((A2-RES) * RES)/(4.*A*AR) + (A1A12)
R2 = R2/R
GO TO 300
20 R1 = -(AK*Z*EK)/(4.*A2) + A12
R2 = (Z*EE)/(2.*AK*AR) - (AK*Z*(A2 + R*R*(ZSQ/2.)))/ (4.*A*AR)
100 1 + 0.5
R2 = R2/R
GO TO 300
30 R1 = (AK*Z*EK)/(4.*A*AR) + RES * A12
R2 = (Z*EE)/(2.*AK*AR) - (AK*Z*EK*(A2 + R*R*(ZSQ/2.)))/ (4.*A*AR)
185 1 + ((R*R - A2) * RES)/(4.*A*AR) + (A/(2*R))
R2 = R2/R
300 R1 = (1. - (AK*AR/Z.)*R) * R1 / (A*AR)
R2 = -Z.*R.10159265 * ((A1-C)*R1 - (A1-D)*R2 + B*R2)
TF = TF
WRITE(6,400) T,R,X(I),Y(J),TF
400 FORMAT(2X,F10.4)
L = L + 1
200 CONTINUE
100 CONTINUE
500 WRITE(1,601) M1,M,MY,MU,J
601 FORMAT(A4,5X,I1,3X,I2,4X,I1,3X,I2)
600 FORMAT(8(*ARAY *,5E1+.6/),*ARAY *,1E1+.6)
WRITE(1,600) (F(L),L=1,62)
WRITE(1,700) M1
700 FORMAT(A4)
CALL EXIT
END

```

SUBROUTINE LAMBDA

73774 OPT=1

FTN 4.64461

7

SUBROUTINE LAMBDA(ALP, BET, M, R)

C

SUBROUTINA PARA EVALUAR LA FUNCION DE LAMBDA MEHMAN

C

DIMENSION Y(200),C(200),D(200),A(200)

AN=1-BET\*\*2

CALL CEL2(EK,BET,1, 1,IER)

CALL CEL2(EK,BET,1,AN,IER)

TS=ALP

Y(2)=(ALP-SIN(ALP))\*COS(ALP)/2

DO 1 N=4,N,2

Y(N)=1/(SIN(ALP)) \* ((N-1)\*COS(ALP)) / ((N-1)\*Y(N-2))

1 CONTINUE

AB=-EE

C(2)=EK\*AN

D(2)=EE\*AN/2

A(2)=C(2)-D(2)

DO 2 N=4,N,2

C(N)=(N-3)\*C(N-2)\*A1/(N-2)

D(N)=(N-3)\*D(N-2)\*A1/N

A(N)=C(N)-D(N)

2 CONTINUE

R=AB\*TS

DO 3 N=2,N,2

R=R+A(N)\*Y(N)

3 CONTINUE

R=2.\*R/3.14159265

RETURN

END

SUBROUTINE CEL2

73/76

OPT=1

FTN 4,6+461

7

1 SUBROUTINE CEL2(A, B, C, D, E, F)

C  
C SUBROUTINA PARA CALCULAR LAS INTEGRALES  
C ELIPTICAS DE PRIMER Y DE SEGUNDA CLASE

5 C  
C AK MODULUS  
C K(K) : A=1, B=1  
C K(K) : A=1, B=1

10 C  
C IER=0  
C ARI=2.  
C BC=1.0-A\*1.0  
C GEC=SEC\*GEC\*AK  
C RES=A

15 C  
C AI=A+B  
C BC=BC  
C IF(GEC) 1, 2, 3

1 C IER=1  
2 IF (B) 3, 4, 5  
3 BC=BC-BC

4 RETURN  
4 RES=1.E65  
RETURN

5 C BC=SEC\*AK  
6 GEC=SEC\*GEC\*AK  
C ARI=ARI

7 C BC=BC+RES\*GEC  
RES=AI

8 C BC=BC  
AI=BC/ARI+AI

9 IF(GEC/ARI-0.999999) 5, 7, 7

35 7 RES=AI/ARI  
8 RES=RES\*0.5  
9 RETURN  
END

PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PLMEX PEMEX PEMEX  
 PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX PEMEX

9 CONFIGURACION DE LA ANOMALIA MAGNETICA

WGN	1						
AGE	30.	0.					
EF	2.						
IZL	1.000	1.000	0.000	0.000	-5.000	.250	5.000
LNK	4						
ND		-2.000		-2.000		2.000	
ND		-2.000		2.000			
BIT	17	1					
RAY	.030	.060	2	2	0		
RAY	1	41	1	33			
RAY	-.21085600E+00	-.17896800E+00	-.14425200E+00	-.10676300E+00	-.66752700E-01		
RAY	-.24590000E-01	.19192000E-01	.63918100E-01	.10869600E+00	.15245600E+01		
RAY	.13414700E+00	.23238600E+00	.26592300E+00	.29352900E+00	.31411600E+00		
RAY	.32683300E+00	.33113500E+00	.32683300E+00	.31411600E+00	.39352900E+01		
RAY	.26592300E+00	.23238600E+00	.19414700E+00	.15249600E+00	.10869600E+01		
RAY	.63918100E-01	.19192000E-01	-.24590000E-01	-.66752700E-01	-.10676300E+01		
RAY	-.14425200E+00	-.17896800E+00	-.21085600E+00	-.88265700E-01	-.44562600E-01		
RAY	-.19986400E+00	-.16605200E+00	-.12882500E+00	-.15172100E+00	.20182700E+00		
RAY	-.19344000E-02	.50686400E-01	.10094100E+00	.36597300E+00	.39028500E+00		
RAY	.24986200E+00	.29429000E+00	.33351100E+00	.36597300E+00	.36597300E+00		
RAY	.41534700E+00	.41044900E+00	.40534700E+00	.39028500E+00	.36597300E+00		
RAY	.33351100E+00	.29429000E+00	.24986200E+00	.20182700E+00	.15172100E+00		
RAY	.10094100E+00	.50686400E-01	.19344000E-02	-.44562600E-01	-.98265700E-01		
RAY	-.12882500E+00	-.16605200E+00	-.19986400E+00	-.73850200E-01	-.26467600E-01		
RAY	-.19243700E+00	-.15686600E+00	-.11736300E+00	-.19213400E+00	.24935600E+00		
RAY	.24482100E-01	.78472400E-01	.13471500E+00	.40236000E+00	.46947900E+00		
RAY	.30473200E+00	.35639800E+00	.40236000E+00	.44065200E+00	.44065200E+00		
RAY	.48740100E+00	.49348300E+00	.48740100E+00	.46947900E+00	.44065200E+00		
RAY	.40236000E+00	.35639800E+00	.30473200E+00	.24935600E+00	.19213400E+00		
RAY	.13471500E+00	.78472400E-01	.24482100E-01	-.26467600E-01	-.73850200E-01		
RAY	-.11736300E+00	-.15686600E+00	-.19243700E+00	-.64721300E-01	-.13852500E-01		
RAY	-.18922700E+00	-.15235300E+00	-.11089400E+00	.22805900E+00	.29322900E+00		
RAY	-.14953000E-01	.10084800E+00	.16341900E+00	.51649500E+00	.55086500E+00		
RAY	.35700500E+00	.41713300E+00	.47113700E+00	.53086500E+00	.51649500E+00		
RAY	.57233100E+00	.57963200E+00	.57233100E+00	.29322900E+00	.22805900E+00		
RAY	.47113700E+00	.41713300E+00	.35700500E+00	-.13852500E-01	-.64721300E-01		
RAY	.16341900E+00	.10084800E+00	.14953000E-01	-.18922700E+00	-.62303400E-01		
RAY	-.11089400E+00	-.15235300E+00	-.11059800E+00	.25988000E+00	.33093100E+00		
RAY	-.19102100E+00	-.15341400E+00	-.11059800E+00	.34224800E+00	.63359900E+00		
RAY	.51024400E-01	.11561900E+00	.18465900E+00	.40430500E+00	.33093100E+00		
RAY	.40430500E+00	.47440500E+00	.53414100E+00	.51024400E-01	-.64029400E-02		
RAY	.65958000E+00	-.14466000E+00	.65958000E+00	.63359900E+00	.59224800E+00		
RAY	.53814100E+00	.47440500E+00	.40430500E+00	.33093100E+00	.25692400E+00		
RAY	.18465900E+00	.11561900E+00	.51024400E-01	-.64029400E-02	-.62303400E-01		
RAY	-.11059800E+00	-.15341400E+00	-.19102100E+00	-.68242100E-01	-.12126000E-01		
RAY	-.19582400E+00	-.16110800E+00	-.11779500E+00	.27568000E+00	.35925400E+00		
RAY	.50681200E-01	.12092900E+00	.19537800E+00	.96729200E+00	.97289600E+00		
RAY	.44368100E+00	.49343500E+00	.496051400E+00	.51649500E+00	.51649500E+00		
RAY	-.97659000E+00	-.97737700E+00	-.97659000E+00	.35925400E+00	.27568000E+00		
RAY	-.96351400E+00	-.99343500E+00	-.44368100E+00	-.12126000E-01	-.68242100E-01		
RAY	.19537800E+00	.12092900E+00	.50681200E-01	-.19862400E+00	-.27344100E-01		
RAY	-.11779500E+00	-.16110800E+00	-.19862400E+00	-.94374200E-01	-.27344100E-01		
RAY	-.21283200E+00	-.17651200E+00	-.13391300E+00	.28321200E+00	.10088400E+00		
RAY	.37633300E-01	.11374600E+00	.19184300E+00	.59889500E+00	.78089500E+00		
RAY	-.66113000E-01	-.97324600E+00	-.98857900E+00	.94374200E-01	.27344100E-01		
RAY	-.101930500E-01	-.10175500E+00	-.10153000E+00	-.94374200E-01	.27344100E-01		
RAY	-.19897900E+00	-.17320000E+00	-.93011300E+00	-.11268300E+00	-.56622100E-01		
RAY	.19184300E+00	.11374600E+00	.37633300E-01	-.94374200E-01	-.27344100E-01		
RAY	-.15391000E+00	-.17651200E+00	-.21283200E+00	-.11268300E+00	-.56622100E-01		
RAY	-.23437700E+00	-.20067700E+00	-.16040300E+00	-.94374200E-01	-.27344100E-01		
RAY	-.28173000E-02	.33917200E-01	-.93843700E+00	-.10504900E+00	-.10663200E+00		
RAY	-.16708500E+00	-.18089500E+00	-.10307300E+00	-.10504900E+00	-.10663200E+00		

ARAY	-16765700E+01	-10801200E+01	-10765700E+01	-10663200E+01	-10504900E+00
ARAY	-10302330E+01	-10089500E+01	-98708500E+00	-96688000E+00	-94970500E+00
ARAY	-33064700E+00	-83917200E-01	-86510000E-02	-56622100E-01	-11268300E+00
ARAY	-16040300E+00	-22067700E+00	-23437700E+00		
ARAY	-26384500E+00	-23452600E+00	-19865200E+00	-15511300E+00	-10262500E+00
ARAY	-39702100E-01	-93163200E+00	-94809700E+00	-97031000E+00	-99764000E+00
ARAY	-10285500E+01	-10620900E+01	-10949300E+01	-11247400E+01	-11485800E+01
ARAY	-11640300E+01	-11693800E+01	-11640300E+01	-11485800E+01	-11247400E+00
ARAY	-10944900E+01	-10620900E+01	-10285500E+01	-99764000E+00	-97031000E+00
ARAY	-94809700E+00	-93163200E+00	-39702100E-01	-10262500E+00	-15511300E+00
ARAY	-19865200E+00	-23452600E+00	-26384500E+00		
ARAY	-30156800E+00	-27871900E+00	-24977700E+00	-21340700E+00	-16786600E+00
ARAY	-92396900E+00	-94213800E+00	-96779300E+00	-10088800E+01	-10407100E+00
ARAY	-10857900E+01	-11337500E+01	-11813700E+01	-12247300E+01	-12596600E+00
ARAY	-12824100E+01	-12303000E+01	-12824100E+01	-12596600E+01	-12247300E+00
ARAY	-11813700E+01	-11337500E+01	-10857900E+01	-10407100E+01	-10088800E+00
ARAY	-96779300E+00	-94213800E+00	-92396900E+00	-16786600E+00	-21340700E+00
ARAY	-24977700E+00	-27871900E+00	-30156800E+00		
ARAY	-34749700E+00	-33347500E+00	-31440600E+00	-28878300E+00	-91364100E+00
ARAY	-93155300E+00	-95824900E+00	-99444000E+00	-10403000E+01	-10952400E+00
ARAY	-11577000E+01	-12247900E+01	-12922000E+01	-13543800E+01	-14050400E+00
ARAY	-14383100E+01	-14499200E+01	-14383100E+01	-14050400E+01	-13543800E+00
ARAY	-12922000E+01	-12247900E+01	-11577000E+01	-10952400E+01	-10403000E+00
ARAY	-99444000E+00	-95824900E+00	-93155300E+00	-91364100E+00	-28878300E+00
ARAY	-31440600E+00	-33347500E+00	-34749700E+00		
ARAY	-40106300E+00	-39837000E+00	-39239600E+00	-90159700E+00	-91734000E+00
ARAY	-94240700E+00	-97825500E+00	-10266500E+01	-10865000E+01	-11594900E+00
ARAY	-12436300E+01	-13356600E+01	-14300100E+01	-15187300E+01	-15922900E+00
ARAY	-16412100E+01	-16584000E+01	-16412100E+01	-15922900E+01	-15187300E+00
ARAY	-14300100E+01	-13356600E+01	-12436300E+01	-11594900E+01	-10865000E+00
ARAY	-10266500E+01	-37825500E+00	-94240700E+00	-91734000E+00	-30159700E+00
ARAY	-39239600E+00	-39837000E+00	-40106300E+00		
ARAY	-66106400E+00	-47213300E+00	-48252700E+00	-90134300E+00	-92248700E+00
ARAY	-95461500E+00	-99972500E+00	-10597500E+01	-11263500E+01	-12304100E+00
ARAY	-13413100E+01	-14658600E+01	-15471900E+01	-17241600E+01	-18319900E+00
ARAY	-19349900E+01	-19384900E+01	-19349900E+01	-18319900E+01	-17241600E+00
ARAY	-15971900E+01	-14658600E+01	-13413100E+01	-12304100E+01	-11363500E+00
ARAY	-10597500E+01	-99972500E+00	-95461500E+00	-92248700E+00	-90134300E+00
ARAY	-88252700E+00	-47213300E+00	-48252700E+00		
ARAY	-52547200E+00	-55267900E+00	-88558200E+00	-9014000E+00	-92731700E+00
ARAY	-96571800E+00	-10195700E+01	-10916800E+01	-11852600E+01	-13036300E+00
ARAY	-14461900E+01	-16127400E+01	-17951300E+01	-19781800E+01	-21389200E+00
ARAY	-22505200E+01	-22965500E+01	-22505200E+01	-21389200E+01	-19781800E+00
ARAY	-17451300E+01	-16127400E+01	-14461900E+01	-13530300E+01	-11852600E+00
ARAY	-18918000E+01	-10195700E+01	-96571800E+00	-92731700E+00	-9014000E+00
ARAY	-88558200E+00	-55267900E+00	-52547200E+00		
ARAY	-59161500E+00	-63603200E+00	-88180300E+00	-90039100E+00	-92988700E+00
ARAY	-37325618E+00	-10341300E+01	-11169400E+01	-12269200E+01	-13696000E+00
ARAY	-15500200E+01	-17634500E+01	-20219800E+01	-22886000E+01	-25380000E+00
ARAY	-27102200E+01	-27768300E+01	-27102200E+01	-25380000E+01	-22886000E+00
ARAY	-20219800E+01	-17634500E+01	-15500200E+01	-13696000E+01	-12269200E+00
ARAY	-11169400E+01	-10341300E+01	-97325600E+00	-92988700E+00	-90039100E+00
ARAY	-98180300E+00	-63603200E+00	-59161500E+00		
ARAY	-59603300E+00	-86538700E+00	-87691500E+00	-89698700E+00	-92830100E+00
ARAY	-97420700E+00	-10396600E+01	-11296100E+01	-12531500E+01	-14191800E+00
ARAY	-163876300E+00	-19212700E+01	-22679800E+01	-26801100E+01	-30451100E+00
ARAY	-33367300E+01	-34666300E+01	-33367300E+01	-30451100E+01	-26801100E+00
ARAY	-22679800E+01	-19212700E+01	-163876300E+00	-14191800E+01	-12531500E+00
ARAY	-11296100E+01	-10396600E+01	-97420700E+00	-92830100E+00	-90698700E+00
ARAY	-87691500E+00	-86538700E+00	-59603300E+00		
ARAY	-71473700E+00	-35333400E+00	-87691500E+00	-8931100E+00	-92098600E+00
ARAY	-10341300E+01	-10341300E+01	-11243200E+01	-12544000E+01	-14366700E+00
ARAY	-10107000E+01	-20441300E+01	-25356300E+01	-30943200E+01	-37093600E+00
ARAY	-42200000E+01	-44201300E+01	-42200000E+01	-37093600E+01	-30943200E+00
ARAY	-16307000E+01	-20441300E+01	-16307000E+01	-14366700E+01	-12544000E+00
ARAY	-11243200E+01	-10341300E+01	-87691500E+00	-92098600E+00	-9011000E+00

AY	-34911800E+00	.37616400E+00	.31300200E+00	.26193200E+00	.21500500E+00
AY	-18660000E+00	.16110000E+00	.14295000E+00	.12500000E+00	.10800000E+00
AY	-19100100E+00	.20999000E+00	.23439400E+00	.26506800E+00	.30273800E+00
AY	-34790500E+00	.40100700E+00	.46165600E+00	.52906400E+00	.60159700E+00
AY	-87074100E+00	.75112500E+00	.82069400E+00	.88103900E+00	.92787700E+00
AY	-35753900E+00	.15468800E+00	.35759300E+00	.52787700E+00	.69103900E+00
AY	-57003400E+00	.75112500E+00	.67674100E+00	.60159700E+00	.52906400E+00
AY	-30155500E+00	.40100700E+00	.34796500E+00	.30273800E+00	.26506800E+00
AY	-23439400E+00	.20999000E+00	.19100100E+00	.17500000E+00	.16000000E+00
AY	-33523100E+00	.25380000E+00	.27783900E+00	.30594200E+00	.33954800E+00
AY	-37892500E+00	.42407300E+00	.47461800E+00	.52971000E+00	.58793700E+00
AY	-64729100E+00	.70521000E+00	.75871900E+00	.80466900E+00	.84005900E+00
AY	-36240000E+00	.67004000E+00	.66240000E+00	.64005900E+00	.60466900E+00
AY	-75871900E+00	.70521000E+00	.64729100E+00	.58793700E+00	.52971000E+00
AY	-47461800E+00	.42407300E+00	.37892500E+00	.33954800E+00	.30594200E+00
AY	-27783900E+00	.25380000E+00	.23629100E+00	.22000000E+00	.20500000E+00
AY	-27823300E+00	.29606100E+00	.31762100E+00	.34324800E+00	.37317900E+00
AY	-40746800E+00	.44602800E+00	.48835700E+00	.53367500E+00	.58078900E+00
AY	-62810200E+00	.67366300E+00	.71527800E+00	.75068100E+00	.77775500E+00
AY	-79476300E+00	.88056500E+00	.79476300E+00	.77775500E+00	.75068100E+00
AY	-71527800E+00	.67366300E+00	.62810200E+00	.58078900E+00	.53367500E+00
AY	-48835700E+00	.44602800E+00	.40746800E+00	.37317900E+00	.34324800E+00
AY	-31762100E+00	.29606100E+00	.27823300E+00	.26000000E+00	.24500000E+00
AY	-31719100E+00	.33420300E+00	.35426800E+00	.37758000E+00	.40423900E+00
AY	-43420100E+00	.46724100E+00	.50290500E+00	.54047500E+00	.57895400E+00
AY	-61874000E+00	.65334300E+00	.68612800E+00	.71378300E+00	.73479400E+00
AY	-74793500E+00	.75240800E+00	.74793500E+00	.73479400E+00	.71378300E+00
AY	-68612800E+00	.65334300E+00	.61874000E+00	.57895400E+00	.54047500E+00
AY	-50290500E+00	.46724100E+00	.43420100E+00	.40423900E+00	.37758000E+00
AY	-35426800E+00	.33420300E+00	.31719100E+00	.30000000E+00	.28500000E+00
AY	-35348200E+00	.36961100E+00	.38822200E+00	.40941000E+00	.43318800E+00
AY	-45943800E+00	.48790800E+00	.51816100E+00	.54956900E+00	.58138700E+00
AY	-61236700E+00	.64160000E+00	.66770000E+00	.68969500E+00	.70824700E+00
AY	-71635000E+00	.72006000E+00	.71635000E+00	.70624700E+00	.68969500E+00
AY	-66770000E+00	.64160000E+00	.61236700E+00	.58138700E+00	.54956900E+00
AY	-51816100E+00	.48790800E+00	.45943800E+00	.43318800E+00	.40941000E+00
AY	-38822200E+00	.36961100E+00	.35348200E+00	.33000000E+00	.30800000E+00

DO  
 0.050 0.000  
 1.000

CR	2					
NE	1	-4.0000	-4.0000	-4.0000	4.0000	0.0000
NE	1	-3.0000	-4.0000	-3.0000	-4.0000	0.0000
NE	1	-2.0000	-4.0000	-2.0000	4.0000	0.0000
NE	1	-1.0000	4.0000	-1.0000	-4.0000	0.0000
NE	1	0.0000	-4.0000	0.0000	4.0000	0.0000
NE	1	1.0000	4.0000	1.0000	-4.0000	0.0000
NE	1	2.0000	-4.0000	2.0000	4.0000	0.0000
NE	1	3.0000	4.0000	3.0000	-4.0000	0.0000
NE	1	4.0000	-2.0000	4.0000	4.0000	0.0000
NE	1	5.0000	3.0000	-5.0000	3.0000	0.0000
NE	1	-5.0000	2.0000	5.0000	2.0000	0.0000
NE	1	5.0000	1.0000	-5.0000	1.0000	0.0000
NE	1	-5.0000	0.0000	5.0000	0.0000	0.0000
NE	1	5.0000	-1.0000	-5.0000	-1.0000	0.0000
NE	1	-5.0000	-2.0000	5.0000	-2.0000	0.0000
NE	1	3.0000	-3.0000	-5.0000	-3.0000	0.0000
NE	1	3.0000	-2.4000	5.0000	-2.4000	0.0000
NE	1	5.0000	-2.6000	3.0000	-2.6000	0.0000
NE	1	3.0000	-2.4000	5.0000	-2.4000	0.0000
NE	1	5.0000	-3.5000	3.0000	-3.5000	0.0000
NE	1	3.0000	-3.7000	5.0000	-3.7000	0.0000

YMB	1	3.1000	-2.5500	0.0000	.1000	18 FAC. DE INGENIERIA
YMB	1	3.1000	-2.7500	0.0000	.1000	17 TESIS PROFESIONAL
YMP	1	3.1000	-3.0000	0.0000	.1000	18 ANCHALIA MAGNETICA
YMB	1	3.1000	-3.2000	0.0000	.1000	15 DE UN CILINDRO
YMB	1	3.1000	-3.4000	0.0000	.1000	17 CIRCULAR VERTICAL
YMB	1	3.1000	-3.6500	0.0000	.1000	14 ESCALA . 1 . 4
YMB	1	3.1000	-3.9500	0.0000	.1000	17 H. MARCOS CABRERA

ND \*\*\*\*\* END PLOTTER TAPE BLOCK NUMBER 1 \*\*\*\*\*

TCP \*\*\*\*\* END PLOTTER TAPE BLOCK NUMBER 2 \*\*\*\*\*

## B I B L I O G R A F I A

B.-K. BATTACHARYYA

*Magnetic Anomalies due to Prism-shaped Bodies with arbitrary Polarization: Geophysies, v.29, No.4, P.517-531 (August, 1964).*

G. Eason, B. Noble and I.N. Sneddon

*On Certain Integrals of the Lipschitz Hankel type involving products of Bessel Functions: Phil. Trans. Roy. Soc. London, V.247A, P. 529-551 (1955).*

Isidore Zietz and G.E. Andreasen

*Remanent Magnetization and Aeromagnetic Interpretation; Mining Geophysics, V. 2, Theory, SEG. Tulsa, P. 569-590.*

Misac N. Nabighian

*The gravitational Attraction of a Right Vertical Circular Cylinder At Point external to it; Geofis. Pura E Appl., V 53, P. 41-51 (1962).*

Nagy Dezso

*The Evaluation of the Function Lambda Heuman and its Application to calculate the Gravitational effect of a Right circular cylinder: Geofis. Pura e appl V.62, P. 5-12 (1965).*



Shri Krishna S. and F.J. Sabina.

Magnetic anomaly due to a vertical --  
right circular cylinder with arbitrary  
polarization. Geophysics. V. 43, No. 1  
P. 173-178, (February 1978).

Shri K. Singh.

Gravitational attraction of a vertical  
right circular cylinder: Geophys J., n.  
Astr. Soc. (1977) 50, 243-246.

B.K. Bhattacharyya and L. Kuang Leu.

Spectral analysis of Gravity and Magne  
tic anomalies due to rectangular pris  
matic bodies: Geophysics. V. 42 No. 1  
(february 1977) P. 41-50.

## A P E N D I C E A

Consideremos un cilindro de radio  $a$ , longitud  $l$  localizado en el plano  $X-Y$ ,  $z=0$ . La geometría de este problema está mostrada en la figura 4. El potencial gravitacional  $\Phi(r, z)$  satisface la ecuación de Poisson.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -4\pi G \rho (a-r) H(z) \quad A1$$

Donde  $\rho$  es la densidad del cilindro,  $G$  es la constante gravitacional universal y  $H(z)$  es la función del impulso unitario.

Considerando un par de transformadas de tipo Fourier-Hankel  $\Phi(r, z)$  y  $\Phi^*(p, \xi)$ , definidas por las siguientes ecuaciones.

$$\Phi^*(p, \xi) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi(r, z) e^{-\xi z} r J_0(pr) dz dr \quad A2$$

$$\Phi(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi^*(p, \xi) e^{i\xi z} p J_0(pr) d\xi dp$$

Donde  $J_n(x)$  es la función de Bessel de orden  $n$  y argumento  $x$ .

Tomando la transformada de Fourier con respecto a  $z$  y la transformada de Hankel con respecto a  $r$  de las ecuaciones A1 y A2 se determina.

$$\Phi^*(p, \xi) = 4\pi G \rho a \frac{J_1(ap)}{p} \left\{ \frac{i(l - \exp(-i\xi l))}{\xi(p^2 + \xi^2)} \right\} \quad A3$$

Ahora, tomando la transformada inversa de la ecuación A3, obtenemos.

$$\Phi(r, z) = 2\pi G \rho a \int_0^{\infty} J_1(ap) J_0(rp) e^{-p|z|} p^{-2} dp$$

( $z \leq 0$ ) A4

$$\Phi(r, z) = I(1, 0; -2) 2\pi G \rho a$$

Por lo tanto.

$$I(\mu, \nu; \lambda) = \int_0^{\infty} J_{\mu}(ap) J_{\nu}(rp) \exp(-pc) \frac{dp}{p}$$

Para más información sobre potencial gravitacional ver - - Singh (1977) y Nabighian (1962).

La integral A6 es de tipo Lipschitz-Hankel y está explicada brevemente en el Apendice B.

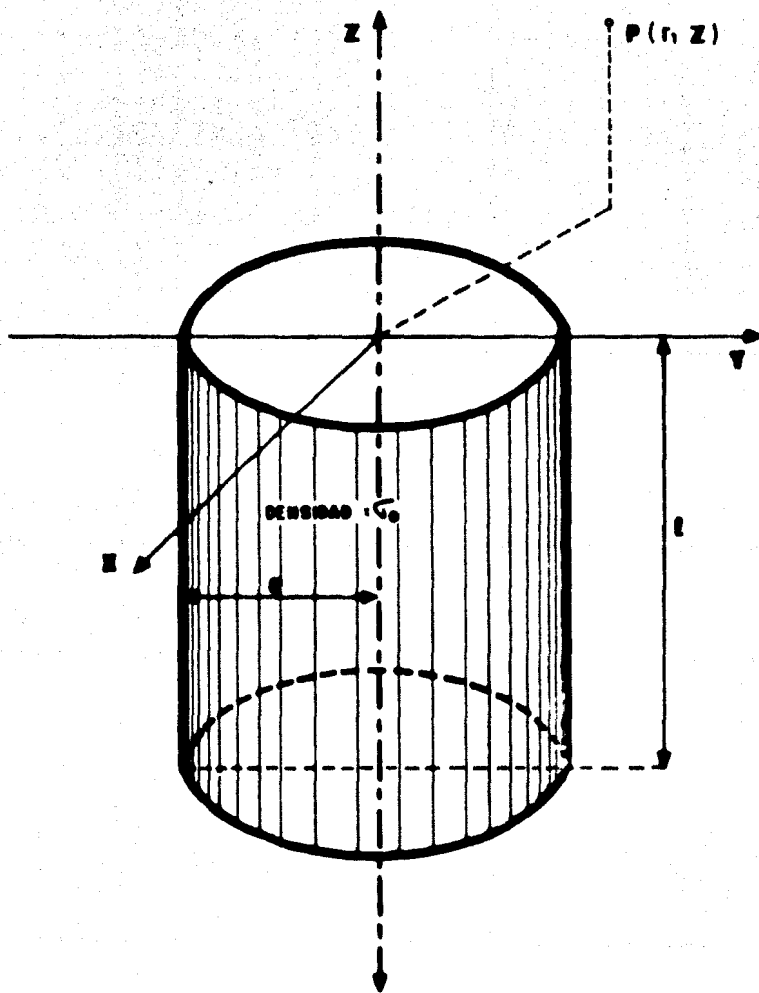


FIGURA 4.- GEOMETRIA DEL PROBLEMA.

A P E N D I C E B

Sucede frecuentemente que las soluciones de problemas Físico-Matemáticos relacionados con cuerpos que presentan simetrías con los ejes coordenados pueden ser reducidos a simples combinaciones de este tipo.

$$I(\mu, \nu; \lambda) = \int_0^{\infty} J_{\mu}(at) J_{\nu}(bt) \bar{e}^{ct} t^{\lambda} dt \quad B1$$

En este trabajo solamente se listará las integrales que se usaron para obtener la expresión exacta del campo magnético total. Para más detalle ver (G. Eason, B. Noble and I.N. Snedon, 1954).

$$I(1,0;0) = \begin{cases} -\frac{k|z|}{4a\sqrt{ar}} F_0(k) - \frac{1}{2a} \Lambda_0(a, k) + \frac{1}{a} & (a > r) \\ -\frac{k|z|}{4a^2} F_0(k) + \frac{1}{2a} & (a = r) \\ -\frac{k|z|}{4a\sqrt{ar}} F_0(k) + \frac{1}{2a} \Lambda_0(b, k) & (a < r) \end{cases} \quad B2$$

$$I(1,1;1) = \begin{cases} \frac{|z| E_0(k)}{2k\sqrt{ar}} - \frac{k|z|}{4r\sqrt{ar}} \left( a^2 + r^2 + \frac{z^2}{2} \right) F_0(k) + \frac{a^2 r^2}{4ar} \Lambda_0(b, k) + \frac{r}{2a} & (a > r) \\ \frac{|z| E_0(k)}{2ka} - \frac{k|z|}{4a^3} \left( 2a^2 + \frac{z^2}{2} \right) F_0(k) + \frac{1}{2} & (a = r) \\ \frac{|z| E_0(k)}{2k\sqrt{ar}} - \frac{k|z|}{4r\sqrt{ar}} \left( a^2 + r^2 + \frac{z^2}{2} \right) F_0(k) + \frac{r^2 - a^2}{4ar} \Lambda_0(a, k) + \frac{a}{2r} & (a < r) \end{cases} \quad B3$$

$$I(b, a; 0) = \frac{1}{k\sqrt{ar}} \left[ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) F_0(k) - E_0(k) \right],$$

Donde  $a = a$ ,  $b = r$ ,  $c = z^2$

B4

$$k^2 = -\frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}, \quad \text{Sen}^2 B = \frac{z^2}{(a-r)^2 + z^2}$$

$$F_0(k) = \frac{z}{\pi} K, \quad E_0(k) = \frac{z}{\pi} E$$

$K$  y  $E$  son las integrales elípticas de primera y de segunda clase, respectivamente y  $\Lambda_0(\theta, k)$  es la función de Lambda -- Heuman. Un esquema computacional para el cálculo de esta función ha sido desarrollado por Nagy Dezso (Geofis. Pure E Appl. 1965) y es el que a continuación se escribe.

$$K = \left[ \left( (0.01451196212\eta + 0.03742563713)\eta + 0.03590092383 \right)\eta + 0.09666344259 \right)\eta + 1.38629436112 \right] \ln \frac{1}{\eta} \quad \text{B5}$$

$$+ \left[ \left( (0.0044787012\eta + 0.03328365346)\eta + 0.06180248576 \right)\eta + 0.12498593597 \right)\eta + 0.5 \right] \ln \frac{1}{\eta}$$

$$E = \left[ \left( (0.01736506451\eta + 0.04757383546)\eta + 0.06260601220 \right)\eta + 0.44325141463 \right)\eta + 1 \right] \ln \frac{1}{\eta} \quad \text{B6}$$

$$+ \left[ \left( (0.00526449639\eta + 0.04669697526)\eta + 0.09280180037 \right)\eta + 0.24998368310 \right)\eta \right] \ln \frac{1}{\eta}$$

$$\eta = 1 - k^2$$

## CALCULOS DE LA FUNCION DE LAMBDA-HEUMAN.

Por definición la definición de Lambda-Heuman es de la siguiente forma.

$$\frac{\pi}{2} \Delta_0(\varphi, k) = KE(\varphi, k) + (E - K)F(\varphi, k) \quad B7$$

$$\text{con } k'^2 \equiv \eta \equiv 1 - k^2$$

$$\text{y } F(\varphi, k') = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} \quad B8$$

$$E(\varphi, k') = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \quad B9$$

por expansión binomial se puede escribir.

$$F(\varphi, k') = \int_0^\varphi \left[ 1 + \frac{1}{2} k'^2 \sin^2 \varphi + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n)}{2 \cdot 4 \dots 2n} k'^{2n} \sin^{2n} \varphi + \dots \right] d\varphi \quad B10$$

En general, la integral de  $\text{Sen}^n \varphi$  puede ser escrita como

$$\int \text{sen}^n \varphi \, d\varphi = -\frac{\text{sen}^{n-1} \varphi \cos \varphi}{n} + \frac{n-1}{n} \int \text{sen}^{n-2} \varphi \, d\varphi$$

donde para  $n=2$  y  $n=4$  se tiene que

$$\int \text{sen}^2 \varphi \, d\varphi = -\frac{\text{sen}^1 \varphi \cos \varphi}{2} + \frac{1}{2} \int d\varphi = \frac{1}{2} [\varphi - \text{sen} \varphi \cos \varphi]$$

$$\int \text{sen}^4 \varphi \, d\varphi = -\frac{\text{sen}^3 \varphi \cos \varphi}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} (\varphi - \text{sen} \varphi \cos \varphi)$$

Definiendo

$$t_2 = \int \text{sen}^2 \varphi \, d\varphi$$

$$t_4 = \int \text{sen}^4 \varphi \, d\varphi$$

Se encuentra que

$$t_4 = - \frac{\sin^3 \varphi \cos \varphi}{4} + \frac{3}{4} t_2$$

En forma general resulta

$$t_{2m} = - \frac{1}{2m} \sin^{2m-1} \varphi \cos \varphi + \frac{2m-1}{2m} t_{2m-2} \quad B11$$

Para  $m = 1, 2, \dots$  con  $t_0 = \varphi$

Integrando B10 término por término y haciendo uso de B11 obtenemos.

$$F(\varphi, k') = t_0 + \frac{1}{2} t_2 k'^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} t_4 k'^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} t_{2n} k'^{2n} \quad B12$$

Similarmente

$$E(\varphi, k') = E t_0 - \frac{1}{2} (2k - E) t_2 k'^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} (4E - 3E) t_4 k'^4 \dots \quad B13$$

Sustituyendo B12 y B13 en B7.

$$\frac{II}{2} \Lambda_0(\theta, k) = E t_0 - \frac{1}{2} (2R - E) t_2 k'^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} (4E - 3E) t_4 k'^4 \dots -$$

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n} (2n k - (2n-1) E) t_{2n} k'^{2n} \dots - \quad B14$$

La ecuación B14 puede ser usada para evaluar la función de Lambda-Human, pero las expresiones han sido reorganizadas de tal forma para preveer un esquema computacional más simple.

Haciendo.

$$\begin{aligned} d_0 &= -E \\ d_2 &= C_2 - d_2 \\ C_2 &= K k'^2 \\ d_2 &= \frac{1}{2} E k'^2 \end{aligned}$$



Se puede generar las siguientes relaciones para  $a_{2m}$ .

$$a_{2m} = c_{2m} - d_{2m} \quad \text{Para } m \geq 2 \quad \text{B15}$$

$$c_{2m} = \frac{2m-3}{2m-2} c_{2m-2} k'^2 \quad \text{y} \quad d_{2m} = \frac{2m-1}{2m} d_{2m-2} k'^2$$

Finalmente, usando B15 la función final de Lambda-Heuman puede ser escrita como.

$$\frac{\Pi}{2} \Lambda_0(p, k) = - \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} t_{2m} \quad \text{B16}$$