

3
2 ej.

Universidad Nacional Autónoma de México



FACULTAD DE INGENIERIA

División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica

PROYECTO DE LEVANTAMIENTOS

TESIS PROFESIONAL

Elaborada para obtener el Título de
INGENIERO TOPOGRAFO Y GEODESTA

P o r

ARTURO NAVARRO HERNANDEZ





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

	Página
PROLOGO.	1
I. INTRODUCCION	2
1.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES	4
1.2 DISTRIBUCION DE ERRORES ACCIDENTALES. . .	6
1.3 DISTRIBUCION DE ERRORES SISTEMATICOS. . .	11
1.4 FUNDAMENTOS DEL PREANALISIS	13
II. PRECISION EN LA MEDIDA DE ANGULOS HORIZONTALES	18
2.1 ERRORES AXIALES DEL TEODOLITO	19
2.2 ERROR DE CENTRADO	19
2.3 ERROR DE NIVELACION	21
2.4 ERROR DE PUNTERIA	23
2.5 ERROR DE LECTURA.	25
2.6 INESTABILIDAD DE LOS TRIPIES Y TORRES DE OBSERVACION	27
2.7 INFLUENCIA DE LA REFRACCION	28
III. PRECISION EN LA MEDIDA DE DISTANCIAS ELECTRO-- MAGNETICAS (EDM)	33
3.1 PRINCIPIOS BASICOS Y CLASIFICACIONES DE - MEDIDAS ELECTRONICAS DE DISTANCIAS. . . .	34

I N D I C E

	Página
3.2 ERROR DE VELOCIDAD DE PROPAGACION.	32
3.3 ERROR DE INDICE DE REFRACCION PARA RADIA-- CIONES VISIBLES E INFRARROJAS.	47
3.4 ERROR DE INDICE DE REFRACCION PARA MICROON DAS.	51
3.5 ERROR DE LA FRECUENCIA DE MODULACION	53
3.6 ERROR DE LA DIFERENCIA DE FASE	54
3.7 ERROR CERO	56
3.8 ERRORES DEBIDOS A LA REFRACCION Y A LAS CO RRECCIONES GEOMETRICAS	63
 IV. ANALISIS DEL ERROR DE REDES HORIZONTALES. . . .	 71
4.1 PROPAGACION DE ERRORES EN UNA POLIGONAL. . .	77
4.2 VARIANCIAS, COVARIANCIAS Y CORRELACION . . .	87
4.3 ERRORES DE AZIMUT, ANGULO Y DISTANCIA. . . .	99
4.4 VARIANCIAS Y COVARIANCIAS DE LAS COORDENA DAS DE UNA POLIGONAL	104
 V. CONCLUSIONES.	 114
 APENDICE	
- DEDUCCION DE LA CORRECCION PARA OBTENER DISTANCIA INCLINADA RECTA.	116

I N D I C E

	Página
- DEDUCCION DE LA CORRECCION PARA OBTENER DISTANCIA HORIZONTAL A UN NIVEL DE ELEVACION MEDIO	121
- DEDUCCION DE LA CORRECCION PARA REDUCIR UNA DISTANCIA HORIZONTAL A UN NIVEL DE REFERENCIA ESPECIFICADO.	122
- DEDUCCION DE LA CORRECCION PARA REDUCIR UNA DISTANCIA EN CUERDA A DISTANCIA EN ARCO (ESFEROIDAL).	123
REFERENCIAS	125

P R O L O G O

Este trabajo ha sido preparado para dar al profesional de la Carrera de Ingeniería y muy especialmente al Ingeniero Topógrafo y Geodesta, así como a aquellos quienes no hayan tenido contacto con este tema, una simple introducción al preanálisis y diseño de levantamientos.

El lector no debe esperar que después de leer este trabajo podrá estar capacitado para resolver todos los problemas de la precisión, preanálisis y del diseño económico de levantamientos, pero es mi propósito que él mismo pueda ser capaz de empezar a disfrutar la herramienta poderosa del preanálisis en sus rutinas de proyecto de levantamientos y que continúe interesándose e introduciéndose en este tema por sí mismo.

El contenido teórico en este trabajo está reducido a un mínimo necesario. Algunas simplificaciones en la teoría de errores quizás ofendan a aquellos lectores que ya conocen la materia y quienes defiendan el trato completo y muy fiel del análisis estadístico de mediciones.

Al final se da una lista de lecturas suplementarias en la materia del preanálisis y diseño de proyectos de levantamientos.

CAPITULO I

INTRODUCCION

El progreso tecnológico en levantamientos, la demanda para más y más medidas precisas y el alto costo de mano de obra hacen necesario un diseño muy cuidadoso de proyectos de levantamientos. El Ingeniero Topógrafo hoy en día puede seleccionar de aproximadamente 40 modelos de instrumentos para la medida de distancias, como unos 100 modelos de teodolitos y niveles y tiene alternativas múltiples en la elección de técnicas de medición y cálculo.

Por ejemplo; un problema simple de Topografía como es el de la determinación de las coordenadas de un punto desde el cual

son visibles otros tres puntos de coordenadas conocidas. El Ingeniero Topógrafo puede resolver el problema de muchas maneras; a saber:

- a.- Medir dos distancias solamente de dos cualesquiera de los tres puntos de coordenadas conocidas.
- b.- Medir dos ángulos desde el punto en cuestión a los -- otros tres puntos de coordenadas conocidas o medir -- dos ángulos desde dos cualesquiera puntos de coordenadas conocidas al nuevo.
- c.- Medir todas las distancias y ángulos posibles entre -- los cuatro puntos.

El Ingeniero Topógrafo puede usar tales técnicas e instrumentos de medición que los ángulos medidos tuvieran una precisión de una fracción de segundo y que la medida de distancias se determinara con pocos milímetros o podría usar solamente un teodolito de minuto. Finalmente, el Ingeniero Topógrafo puede calcular las coordenadas del nuevo punto usando una calculadora de bolsillo, una calculadora electrónica de escritorio o puede ir a un centro de cómputo.

La elección del Ingeniero Topógrafo se debe basar en un -- completo y cuidadoso preanálisis del proyecto, de tal manera -- que los métodos y los instrumentos seleccionados satisfagan los requerimientos de precisión fijados por el cliente y al mismo -- tiempo el proyecto se debe hacer de la forma más económica posible.

El preanálisis de las mediciones de los levantamientos es como su nombre lo dice un análisis de las medidas componentes de un proyecto de levantamiento antes que este se lleve a cabo.

El preanálisis es muy útil en el diseño de todo el proyecto de levantamiento porque proporciona una base para la evaluación de las precisiones, los métodos y los instrumentos.

1.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

1.1.1 Precisión, Intervalos de Confianza y Límites de Tolerancia.

Error estándar, desviación estándar, error de la raíz media cuadrática o error medio cuadrático son las expresiones que son usadas comúnmente en la literatura técnica como una medida de precisión. Los símbolos " σ ", "m" y "rms" se usan para abreviar estas expresiones. Aún cuando algunos autores tratan de hacer una diferencia del significado estadístico de cada una de estas expresiones, uno puede aceptar sin entrar en detalles que la misma interpretación de la precisión se puede aplicar a todos los términos mencionados anteriormente. A lo largo de este trabajo se usará el término desviación estándar con el símbolo " σ ".

Los errores de las mediciones pueden tener ya sea una influencia accidental o sistemática en el resultado final de la -

cantidad medida. En este escrito se asume que las mediciones solamente están afectadas por errores accidentales y que están libres de equivocaciones y de errores sistemáticos. Si este es el caso, entonces, el significado estadístico de la desviación estándar se puede visualizar en un ejemplo de un gran número de mediciones independientes de una cantidad "X". Debido a la influencia de los errores accidentales uno puede predecir estadísticamente que si todas las mediciones son de la misma precisión, entonces, el 68% de las mediciones estarán dentro del intervalo: $X - \sigma$, $X + \sigma$ y el 32% de los resultados caerán fuera del intervalo. Por ejemplo, si un resultado de una medida de distancia D_i es igual a 1000.00 mts. y su desviación estándar es $\sigma = 10$ cms. entonces, uno puede tener la confianza que hay una probabilidad de 68% que la distancia real D_o este dentro del intervalo de -- confianza de: $(1000.00 - 0.10 < D_o < 1000.00 + 0.10)$

Esto puede ser escrito en términos generales como:

$$P \left[(D_i - \sigma) < D_o < (D_i + \sigma) \right] = 68\%$$

El análisis estadístico muestra que las fracciones o múltiplos de " σ " corresponden a las siguientes probabilidades del intervalo de confianza:

0.67 σ	corresponde a	50%
1.00 σ	" "	68%
1.96 σ	" "	95%
2.58 σ	" "	99%
3.00 σ	" "	99.7%

El valor de 0.67σ corresponde al llamado error probable. La probabilidad de 99% es generalmente aceptada en la práctica como certeza. Así, el valor de 2.58σ es considerado como un -- error máximo permisible o como un límite de tolerancia en el - diseño de la precisión de mediciones. Se recomienda sin embar- go, usar 3σ como un límite de tolerancia en el preanálisis y - diseño de levantamientos de campo. En consecuencia, si a un In- geniero Topógrafo se le pidiera determinar las coordenadas "X" y "Y" de un punto con un error máximo de 15 cms. debería de di- señar sus procedimientos de levantamiento de tal forma que las coordenadas derivadas tuvieran una desviación estándar $\sigma_x < 5\text{cms.}$ y $\sigma_y < 5\text{ cms.}$ Esto por supuesto solamente se puede hacer en el caso cuando el Ingeniero Topógrafo conozca cual es la precisión de sus medidas de campo y cual es la relación entre las desvia- ciones estándares de las medidas y de las coordenadas.

1.2 DISTRIBUCION DE ERRORES ACCIDENTALES.

Permitamos que "F" sea una función de varias medidas inde- pendientes (no correlacionadas) $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ y supongamos que las desviaciones estándares " σ_{m_k} " de las medidas sean conocidas y que las medidas estén libres de equivocaciones y errores siste- máticos. En este caso uno calcula la desviación standar σ_F de - la cantidad F de la siguiente lev de propagación del error:

$$\sigma_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial m_1}\right)^2 \sigma_{m_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial m_2}\right)^2 \sigma_{m_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial m_k}\right)^2 \sigma_{m_k}^2 \quad 1.1$$

donde $\frac{\partial F}{\partial m_i}$ son las derivadas parciales y sus valores pueden ser calculados como derivadas de la función F para valores aproximados de las medidas correspondientes.

A los cuadrados de las desviaciones estándares $\sigma_{m_i}^2$ se les llama variancias.

Para visualizar el concepto expuesto anteriormente se presentan algunos ejemplos numéricos.

Ejemplo 1.1.- Una distancia de 500 mts. se va a medir con una cinta de 50 mts. de longitud. La desviación estándar de las medidas de cada segmento de 50 mts. se conoce y es $\sigma_d = 5$ mm. ¿Cuál será la desviación estándar de la distancia total $D=500$ mts?

Para obtener la respuesta tenemos que definir la relación funcional entre la distancia total D y los segmentos d_i . Esto es:

$$D = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{10}$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial D}{\partial d_1} = 1, \quad \frac{\partial D}{\partial d_2} = 1, \quad \frac{\partial D}{\partial d_3} = 1, \quad \dots \quad \frac{\partial D}{\partial d_{10}} = 1$$

Y la ecuación (1.1) se convierte en:

$$\sigma_D^2 = \sigma_{d_1}^2 + \sigma_{d_2}^2 + \sigma_{d_3}^2 + \dots + \sigma_{d_{10}}^2 = 250 \text{ mm}^2$$

Finalmente la desviación estándar de la distancia total de-

los 500 mts. es: $\sigma_D = \sqrt{250 \text{ mm}^2} = 16 \text{ mm.}$

Ejemplo 1.2.- Un ángulo β se ha medido en tres series independientes. Cada serie se midió con la misma precisión expresada por $\sigma_\beta = 5''0$.

¿Cuál es la desviación estándar del ángulo promedio β_0 calculado de las tres series?

Tenemos la función:

$$\beta_0 = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{3}$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_1} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_2} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_3} = \frac{1}{3}$$

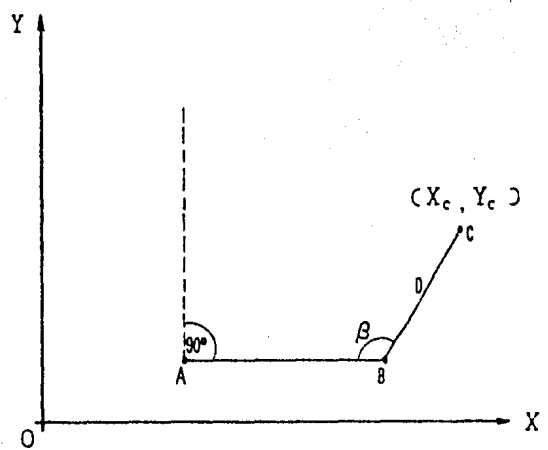
La variancia de β_0 se calcula de la ecuación (1.1) como:

$$\sigma_{\beta_0}^2 = \frac{\sigma_{\beta_1}^2}{9} + \frac{\sigma_{\beta_2}^2}{9} + \frac{\sigma_{\beta_3}^2}{9} = \frac{3(5''0)^2}{9}$$

$$\text{y finalmente: } \sigma_{\beta_0} = \frac{5''0}{\sqrt{3}} = 2''9$$

Ejemplo 1.3.- Un ángulo β y una distancia D se midieron con el fin de calcular las coordenadas del punto C. Las coordenadas de A y B se conocen y están exentas de error. ¿Cuáles son las desviaciones estándares de las nuevas coordenadas X_C y Y_C si las -

desviaciones stándars de D y β son $\sigma_D = 2$ cms. y $\sigma_\beta = 10''$ respectivamente?



Datos:

- $Y_B = 200$ $X_B = 1000$ mts.
- $D = 500.00$ mts. $\sigma_D = 2$ cms.
- $\beta = 120^\circ 00' 00''$ $\sigma_\beta = 10''$

El azimut α de $\overline{AB} = 90^\circ 00' 00''$ y esta exento de error.

Las funciones serán:

$$Y_C = Y_B + D \text{ Cos } (\alpha + \beta - 180^\circ)$$

$$X_C = X_B + D \text{ Sen } (\alpha + \beta - 180^\circ)$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial Y_C}{\partial D} = \text{Cos } (\alpha + \beta - 180^\circ) = 0.866$$

$$\frac{\partial Y_c}{\partial \beta} = -D \text{ Sen } (\alpha + \beta - 180^\circ) = -250$$

$$\frac{\partial X_c}{\partial D} = \text{ Sen } (\alpha + \beta - 180^\circ) = 0.500$$

$$\frac{\partial X_c}{\partial \beta} = D \text{ Cos } (\alpha + \beta - 180^\circ) = 433$$

Ya que Y_B , X_B y α están exentos de error, son tratados como constantes y las derivadas para ellos son cero.

Tenemos por lo tanto:

$$\sigma_{y_c}^2 = (0.866)^2 \sigma_D^2 + (-250)^2 \sigma_\beta^2 = 0.00045 \text{ mts}^2$$

$$\sigma_{x_c}^2 = (0.5)^2 \sigma_D^2 + (433)^2 \sigma_\beta^2 = 0.00054 \text{ mts}^2$$

Finalmente:

$$\sigma_{y_c} = 21\text{mm.} \quad \text{y} \quad \sigma_{x_c} = 23\text{mm.}$$

Nótese que σ_β en los cálculos anteriores se tuvo que expresar en radianes con el fin de obtener el resultado en unidades lineales. Esto significa que, $10''0$ se dividió entre $\rho'' = 206265$.

1.3 DISTRIBUCION DE ERRORES SISTEMATICOS.

Si un grupo de observaciones está sujeto a la influencia de la misma o similar fuente de error la cual tiene el mismo o similar efecto en todas ellas, las observaciones sufren del error sistemático y tales observaciones están correlacionadas.

Como un ejemplo uno puede considerar el error de calibración de una cinta. El error de calibración, si bien, en sí mismo es accidental por naturaleza. Tiene un efecto sistemático en todas las medidas hechas con la misma cinta. Otros ejemplos son: el error de graduación en los teodolitos, la torsión térmica de las torres de observación, el error cíclico cero en los instrumentos para la medida electromagnética de distancias (EDM), etc.

Si suponemos que las observaciones $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ de una función F tienen errores sistemáticos $\delta m_1, \delta m_2, \delta m_3, \dots, \delta m_k$ entonces, la función F de las observaciones tendrá el error:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial m_1} \delta m_1 + \frac{\partial F}{\partial m_2} \delta m_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial m_k} \delta m_k \quad 1.2$$

A continuación se da un ejemplo de aplicación.

Ejemplo 1.4.- Tomemos nuevamente el ejemplo 1.1 en el cual se mide la distancia de 500 mts. en 10 segmentos usando -- una cinta de 50 mts. de longitud. La cinta fue calibrada (comparada) a una longitud standar, con una desviación estándar $\sigma_c = 1.5$ mm. El error de calibración actuará como un error sistemático si se usa la misma cinta en cada uno de los 10 segmentos de las medidas. Por lo tanto su influencia en la distancia total se tiene que calcular usando la ecuación (1.2).

Tenemos:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \dots = \delta_{10} = \sigma_c = 1.5 \text{ mm.}$$

El error sistemático será:

$$\delta_D = 15 \text{ mm.}$$

La influencia de los errores accidentales, como se calcularon en el Ejemplo 1.1 es:

$$\sigma_D = 16 \text{ mm.}$$

El error total (la combinación de errores sistemáticos y accidentales) se calcula de:

$$\sqrt{\sigma_D^2 + \delta_D^2} = 22 \text{ mm.}$$

Notar, que como una regla, se da la raíz cuadrada de la suma de los errores accidentales y sistemáticos al cuadrado.

1.4 FUNDAMENTOS DEL PREANALISIS.

Las reglas de propagación del error se pueden usar en la determinación de cuáles debieran ser las precisiones de las mediciones, con el fin de satisfacer un límite de tolerancia especificado para una función de dichas mediciones. Esto quiere decir que el problema de propagación de errores es contrario a éste en el que se da σ_F^2 en la ecuación (1.1.) y se van a determinar las desviaciones estándares σ_{m_1} , σ_{m_2} ... σ_{m_k} .

El problema es simple, si sólo una observación esta comprendida en la determinación del valor de la función "F". Si -- hay más de una observación involucradas, entonces, uno puede suponer, en la primera etapa del preanálisis, que los errores de cada una de las observaciones contribuyen igualmente al error total σ_F . Esto significa suponiendo que:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial m_1} \sigma_{m_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial m_2} \sigma_{m_2}\right)^2 = \dots = \left(\frac{\partial F}{\partial m_k} \sigma_{m_k}\right)^2 = \frac{\sigma_F^2}{k} \quad 1.3$$

donde k es el número de observaciones, que si se conocen los valores aproximados de m_1 , m_2 , ... m_k (de un reconocimiento de campo o del proyecto proporcionado por el -- cliente) uno puede calcular los valores requeridos de σ_{m_i} de la ecuación (1.3.). La primera etapa del preanálisis puede mostrar que los requerimientos o necesidades para algunos de los σ_{m_i} están dentro de nuestras posibilidades pero las necesidades o requerimientos, por --

ejemplo, para σ_{m_3} son imposibles o antieconómicos para ser llevados a cabo. En este caso el valor de σ_{m_3} se debe aceptar como un valor mínimo alcanzable y razonable y el cálculo completo de (1.3.) se repite pero esta vez en la forma:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial m_1} \sigma_{m_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial m_2} \sigma_{m_2}\right)^2 = \dots = \left(\frac{\partial F}{\partial m_k} \sigma_{m_k}\right)^2 = \frac{\sigma_F^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial m_3} \sigma_{m_3}\right)^2}{K - 1} \quad 1.4$$

El preanálisis también puede mostrar que los requerimientos para todas las σ_{m_i} están más allá de nuestras capacidades y que entonces uno debe aconsejar al cliente que los límites de tolerancia especificados no se pueden satisfacer. A continuación se dan algunos ejemplos:

Ejemplo 1.5.- Una distancia D se va a medir entre dos puntos con una diferencia en altura $h = 100$ mts. y una distancia $D = 500$ mts.

¿Cuál será el límite de tolerancia para el error en altura h para obtener la corrección por inclinación ΔD con una desviación estándar $\sigma \Delta D < 1$ mm?

Tenemos la función: $\Delta D = \frac{h^2}{2D}$

de la ecuación (1.1.) tenemos:

$$\sigma \Delta D^2 = \left(\frac{h}{D} \sigma_h\right)^2 < 1^2 \text{ mm}^2$$

Esto significa que debe ser:

$$\sigma_h < 5 \text{ mm.}$$

El límite de tolerancia para el error en altura h es por lo tanto:

$$3\sigma = 15 \text{ mm.}$$

Ejemplo 1.6.- Una distancia inclinada D y un ángulo vertical β se deben medir con el fin de calcular una diferencia en elevación h . ¿Cuál debe ser la precisión de D y β para obtener h con una desviación estándar de $\sigma_h < 5 \text{ mm.}$?

Datos: $D = 500 \text{ mts.}$ $\beta = 30^\circ$

La función es: $h = D \text{ sen } \beta$

De la ecuación (1.1.)

$$\sigma_h^2 = \text{Sen}^2 \beta \sigma_D^2 + D^2 \text{Cos}^2 \beta \sigma_\beta^2$$

$$\sigma_h^2 = 0.25 \sigma_D^2 + 4.68 (\sigma_\beta'')^2 \leq 25 \text{ mm}^2$$

El valor de σ_β se debe expresar en radianes ($\sigma_\beta = \frac{\sigma_\beta'}{\rho''}$) con el fin de tener concordancia de unidades.

De acuerdo con la ecuación (1.3.) suponemos que:

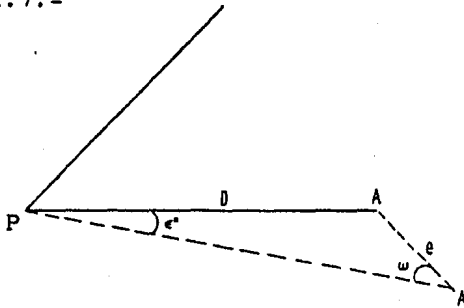
$$0.25\sigma_D^2 = 4.40 (\sigma_\beta'')^2 = \frac{\sigma_h^2}{2} = 12.5 \text{ mm}^2$$

Y finalmente podemos calcular de lo anterior que el requerimiento para $\sigma_h < 5 \text{ mm.}$ se puede satisfacer si D y β se --

midieran con desviaciones estándares:

$$\sigma_{\beta}'' < 1''68 \quad \text{y} \quad \sigma_D < 7 \text{ mm.}$$

Ejemplo 1.7.-



Al medir un ángulo haciendo estación en el punto P (Ver figura anterior), se tuvo que hacer puntería en una estación - excéntrica A' debido a algunos obstáculos en la línea P-A. Con el fin de reducir la dirección medida P-A' a la requerida P-A se tendrá que hacer una corrección ϵ'' . Para calcular ϵ'' uno - tiene que conocer los parámetros siguientes: e, D y ω .

¿Cuál deberá ser la precisión de estos parámetros si el límite de tolerancia para ϵ'' es $3\sigma_{\epsilon''} < 3''0$ y los valores aproximados de e, D y ω son: e = 10.0 mts., D = 1000 mts. y $\omega = 45^\circ$?

La función es:

$$\text{Sen } \epsilon'' = \frac{e}{D} \quad \text{Sen } \omega \quad \text{ó aproximadamente:}$$

$$\varepsilon'' = \frac{e}{D} \rho'' \quad \text{Sen } \omega = 1465'' \quad 1.5$$

donde: $\rho'' = 206265''$ (1 radián en segundos).

de las ecuaciones (1.5.) y (1.1.) tenemos:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \left(\frac{\rho''}{D}\right)^2 \text{Sen } \omega)^2 \sigma_e^2 + \left(-\frac{e}{D^2} \rho'' \text{Sen } \omega\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{e}{D} \rho'' \text{Cos } \omega\right)^2 \sigma_{\omega}^2 \quad 1.6$$

Substituyendo (1.5.) en (1.6.) tenemos:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \left(\frac{\varepsilon''}{e}\right)^2 \sigma_e^2 + \left(-\frac{\varepsilon''}{D}\right)^2 \sigma_D^2 + (\varepsilon'' \text{ctg } \omega)^2 \sigma_{\omega}^2 < (1'')^2$$

porque σ_{ε}'' debe ser $< 1''$

Igualando ahora de acuerdo a (1.3.) la influencia de los tres errores tenemos:

$$\left(\frac{\varepsilon''}{e} \sigma_e\right)^2 = \left(\frac{\varepsilon''}{D} \sigma_D\right)^2 = (\varepsilon'' \text{ctg } \omega)^2 \sigma_{\omega}^2 = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{3} \quad 1.7$$

De (1.7.) podemos calcular las desviaciones estándares de e, D y ω para el requisito de que $\sigma_{\varepsilon} < 1''$

$$\sigma_e = \frac{\sigma_{\varepsilon} e}{\varepsilon'' \sqrt{3}} = 4 \text{ mm.}$$

$$\sigma_D = \frac{\sigma_{\varepsilon} D}{\varepsilon'' \sqrt{3}} = 40 \text{ cms.}$$

$$\sigma_{\omega} = \frac{\sigma_{\varepsilon}}{\varepsilon'' \sqrt{3} \text{ctg. } \omega} = 0.000395 \text{ radianes} = 81''.$$

C A P I T U L O I I

PRECISION EN LA MEDIDA DE ANGULOS HORIZONTALES

En esta parte se analizará cuáles valores de σ podemos esperar en la medición de ángulos. La medición de ángulos esta -- afectada por los errores de observación e instrumentales siguientes:

- 2.1 Errores Axiales del Teodolito.
- 2.2 Error de Centrado.
- 2.3 Error de Nivelación.
- 2.4 Error de Puntería.
- 2.5 Error de Lectura.
- 2.6 Errores debidos a la inestabilidad (Torsión y/o Hundi

miento) del Trípode o de la Torre de observación.

2.7 Errores de Refracción.

2.1 Errores Axiales del Teodolito.

Los errores axiales, tales como la no perpendicularidad del eje de la visual con el eje de rotación del telescopio, la no perpendicularidad del eje del telescopio al eje vertical del teodolito y la excentricidad del círculo horizontal, se eliminan midiendo los ángulos en dos posiciones del telescopio y tomando el promedio. Por lo tanto, la influencia de los errores axiales no se discutirá porque, como una regla, los ángulos siempre se deben medir en dos posiciones.

Por una serie uno debe entender una medición del mismo ángulo dos veces, cada vez en una posición diferente del telescopio. Una serie incluye, entonces, dos posiciones a cada visual y dos lecturas del círculo horizontal en cada dirección.

2.2 Error de Centrado.

Se considerarán cuatro métodos de centrado:

- a) De plomada óptica.
- b) De plomada de varilla o bastón.
- c) De plomada con hilo, y
- d) De centrado automático.

El plomeo con una plomada óptica da una desviación estándar de centrado de $\sigma_c = 0.5$ mm. por un metro de altura del instrumento sobre la marca de referencia si la plomada esta bien ajustada y si la marca de referencia tiene un centro bien definido.

Las plomadas ópticas, particularmente aquellas que están integradas en los tripies, requieren una verificación y ajuste frecuente. Los errores de 1 cm. o más pueden ocurrir debido a golpes por transporte entre las estaciones del levantamiento. El plomeo de varilla o bastón, tal como por ejemplo en el Sistema Kern, ofrece una precisión aproximadamente igual o ligeramente mejor.

La mecánica de plomeo con hilo da una desviación estándar de $\sigma_c = 1$ mm. por metro en condiciones atmosféricas sin viento o aún la misma precisión como con la plomada óptica particularmente cuando el centrado se hace bajo la marca de referencia. Sin embargo, dan grandes errores impredecibles en corrientes de aire. Los sistemas de autocentrado como aquellos usados en equipos de poligonación permiten un intercambio de teodolito con los objetivos o blancos con una desviación estándar $\sigma_c < 0.1$ mm.

La influencia de los errores de centrado en una medición de un ángulo se puede calcular como:

$$\sigma_{\beta_c}^2 = (\sigma)^2 \left\{ \frac{\sigma_{c_1}^2}{D_1^2} + \frac{\sigma_{c_2}^2}{D_2^2} + \frac{\sigma_{c_3}^2}{D_1^2 D_2^2} (D_1^2 + D_2^2 - 2D_1 D_2 \cos \alpha) \right\} \quad 2.1$$

donde:

σ_{C_1} y σ_{C_2} = errores de centrado de las marcas de referencia.

D_1 y D_2 = distancia a las marcas de referencia.

σ_{C_3} = error de centrado del teodolito.

ρ'' = 206265".

ó de una fórmula aproximada:

$$\sigma_{B_c} = \frac{2\sigma_c}{D} \rho'' \quad 2.2$$

Si las σ_c del teodolito y las de las marcas de referencia son aproximadamente las mismas y si las distancias a las marcas de referencia son aproximadamente las mismas.

El error puede decrecer por \sqrt{n} si el ángulo se vuelve a medir en "n" series y si los instrumentos se vuelven a centrar entre cada serie. El recentrado debe ser precedido por una rotación del teodolito y las visuales en posiciones de $180^\circ/n$.

2.3 Error de Nivelación.

La sensibilidad de los niveles tubulares de burbuja de

los teodolitos de mediana y alta precisión es generalmente de -
 , 10" a 40" segundos por una división.

Un observador cuidadoso y un nivel de burbuja bien ajusta-
 do puede dar una desviación estándar de nivel igual a $\sigma_N = 0.2$ de
 sensibilidad si el frasco del nivel esta protegido contra los -
 rayos solares u otras fuentes de calor. Una diferencia de tem-
 peratura de 1°C entre los extremos de un frasco de longitud de
 100 mm. dará como 5" de error en la nivelación.

El valor aproximado de la desviación estándar σ_{β_N} de un ángu-
 lo β debido al error de nivelación se puede calcular de:

$$\sigma_{\beta_N} = \sigma_N (\operatorname{tg} \gamma_2 - \operatorname{tg} \gamma_1) \quad 2.3$$

donde: γ_2 y γ_1 son los ángulos verticales de las dos visua-
 les. La influencia del error de nivelación es entonces desprecia-
 blemente pequeño si las visuales están aproximadamente a la mis-
 ma altura. Sin embargo, un error serio puede ocurrir, si una di-
 rección del ángulo esta más empinada que la otra el cual es un -
 caso frecuente en las mediciones de astro-acimut o en la medición
 de ángulos en montañas altas o en las minas. En esos casos uno -
 tiene que usar un nivel adicional de una gran sensibilidad en --
 los ejes de rotación del telescopio.

2.4 Error de Puntería.

El límite de difracción (poder de resolución) de los sistemas ópticos dan la máxima precisión de puntería igual a $-\frac{10''}{M}$, donde M es una amplificación del telescopio. Este valor se incrementa más por:

- a).- Diseño inapropiado del objetivo o blanco.
- b).- Condiciones de visibilidad.
- c).- Turbulencia térmica del aire, y
- d).- Error de enfoque.

Las investigaciones han mostrado que un punto de una fuente de luz parece ser el mejor objetivo o blanco. La segunda mejor sería el tipo mostrado en la figura (2.1) con las siguientes dimensiones: $b = 2a + c$, donde $a = 120 D/M\rho''$ y c es el ancho del hilo de la retícula en el objetivo o blanco a la distancia D. Para un solo cruce de hilos generalmente es de:

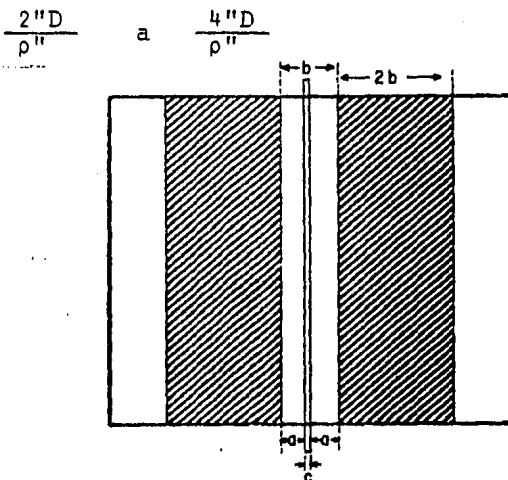


Fig. 2.1

Los objetivos o blancos en forma de V o círculos concéntricos serían los próximos. Una combinación de colores amarillo y negro dan los mejores resultados. El objetivo o blanco -- siempre debe de tener una superficie plana. Los objetivos o blancos cilíndricos o esféricos, pueden producir grandes errores de puntería debido a sombreados no simétricos. El error de enfoque de puntería generalmente no excede 1" en teodolitos de precisión con un sistema de enfoque interno. Su influencia se cancela en la medida de ángulos si la distancia a dos objetivos o blancos son aproximadamente iguales o si están a distancias no más cortas que del orden de 1 a 2 km. Si las distancias son muy cortas, entonces uno debe evitar ángulos con un radio grande de la distancia mayor a la menor. Esto, si se requiere una medida de ángulo de alta precisión.

Generalmente, con un objetivo o blanco diseñado apropiadamente y con visibilidad normal y condiciones de turbulencia termal la desviación estándar de una puntería sobre distancias cortas es igual a:

$$\sigma_p = \frac{30''}{M} \quad \text{hasta} \quad \sigma_p = \frac{60''}{M} \quad 2.4$$

para distancias mayores de varios cientos de metros. Si un ángulo se mide en "n" series, entonces tenemos 2n punterías en cada objetivo o blanco. El ángulo entre dos objetivos o blancos se calcula de:

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{2n} (\delta_2 - \delta_1) i}{2n} \quad 2.5$$

donde δ_2 y δ_1 son lecturas del círculo horizontal en la dirección de los objetivos o blancos 2 y 1 respectivamente, a la mitad de la serie. Aplicando la ley de la propagación del error y suponiendo que los errores de puntería $\sigma_{p1} = \sigma_{p2} = \sigma_p$ tenemos:

$$\sigma_{\beta} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} \quad 2.6$$

2.5 Error de Lectura.

Uno puede esperar las siguientes desviaciones estándares de una sola lectura del círculo horizontal:

- a).- Para teodolitos con micrómetros ópticos y con la división más pequeña de 1" o 0"5:

$$\sigma_L = 2.5 \text{ d}'' \quad 2.7$$

- b).- Para teodolitos con un microscopio y con una estimación de la fracción de la división más pequeña:

$$\sigma_L = 0.3 \text{ d}'' \quad 2.8$$

donde d'' es el valor angular nominal de la división más pequeña (típicamente de $10''$ a $1''$).

c).- Para teodolitos de vernier con dos vernieres:

$$\sigma_L = 0.3d'' \quad 2.9$$

donde d'' es el valor angular de la división del vernier. Estos valores pueden ser ligeramente aumentados por excentricidad al azar (aberración) del círculo horizontal, y por errores de graduación del círculo horizontal y del micrómetro. Típicamente, la influencia de esos errores no exceden $1''$ en teodolitos de precisión.

Si se mide un ángulo β en n series, entonces tenemos $2n$ lecturas en cada dirección y la influencia total del error de lectura se puede calcular como:

$$\sigma_{R_L} = \frac{\sigma_L}{\sqrt{n}} \quad 2.10$$

Hay sin embargo una condición, las lecturas en cada serie se deben tomar en diferentes porciones del círculo horizontal rotando el círculo $180^\circ/n$ entre las series. También el micrómetro se debe colocar en lecturas diferentes con el fin de reducir la influencia de los errores de graduación.

2.6 Inestabilidad de los Tripies y Torres de Observación.

La expansión térmica debido a los rayos solares u otras fuentes de calor pueden producir un giro (de rotación) de las torres de observación hasta de varios minutos de arco. Otra - fuente de inestabilidad puede ser el hundimiento de las patas de los tripies en el terreno, hielo o pavimento y movimiento - de las torres debido a las fuerzas del viento.

El sombreado de los instrumentos y tripies contra las radiaciones de calor se recomienda firmemente en la medición - precisa de ángulos y es necesario un chequeo frecuente de nivelación y centrado. En el caso de una sospecha de inestabili--dad, se recomiendan los siguientes procedimientos de medición, con el fin de minimizar la influencia en la precisión de medi--ciones.

- a).- Las mediciones de cada serie se deben hacer tan - rapido como sea posible.
- b).- La secuencia de puntería a dos objetivos o blan--cos deben seguir el patrón 1-2-2-1 en cada serie.
- c).- Los instrumentos deben de ser renivelados y recentrados entre cada serie.
- d).- Si se van a observar más de dos direcciones desde la misma estación, entonces cada ángulo entre pa--res de objetivos o blancos de deberán de medir --

separadamente (método de ángulos en vez de método de direcciones) checando el cierre a 360° .

2.7 Influencia de la Refracción.

La refracción atmosférica es la fuente de error más peligrosa en la medición de ángulos porque hasta ahora no hay un método de la determinación exacta de su magnitud en condiciones de campo. La refracción de la visual es proporcional a los gradientes (cambios por unidad de distancia) de la línea medida. En consecuencia, los errores de las medidas de ángulo horizontal serán particularmente grandes si los levantamientos se ejecutan en la vecindad de objetos que radian calor. Errores de varios -- segundos o más se pueden presentar en áreas urbanas si las visuales están cerca de las paredes de edificios expuestos al Sol. - Errores de varios segundos se pueden producir en las medidas a lo largo de pendientes, en lugares montañosos o a lo largo de - una línea de agua y en playas arenosas escarpadas. Los días nublados o preferentemente, noches posteriores a días nublados -- son los más seguros para la medición de ángulos. Las horas tempranas en la mañana son las mejores.

La única manera para reducir la influencia de la re-- fracción es repetir la medición de ángulos en condiciones atmosféricas diferentes en días distintos, o al menos, con diferencia

de varias horas entre las mediciones.

En un terreno plano o solo ligeramente ondulado con una Topografía homogénea uno puede esperar que los gradientes horizontales de temperatura sean despreciablemente pequeños. Pero si se requiere un trabajo de alta precisión, uno debe de repetir -- las mediciones en condiciones diferentes.

Ejemplo del Diseño de Mediciones de Angulos:

Consideremos, como un ejemplo, un circuito cerrado de poligonal consistente de cuatro estaciones que se van a medir para un proyecto de ingeniería en una área moderadamente plana con una topografía razonablemente homogénea. Las distancias en tre las estaciones de la poligonal son aproximadamente iguales a 300 mts. Las especificaciones para la medición permiten un error de cierre máximo de los cuatro ángulos de 12". ¿Cómo se deben hacer las mediciones y con qué tipo de teodolito?

Considerando el error máximo de 12" igual a 3σ , tenemos la desviación estándar permisible de 4" de cierre de la poligonal. Si se supone la misma precisión σ_{β} de las mediciones en cada estación, entonces de acuerdo a la regla de propagación del error tenemos:

$$4\sigma_{\beta}^2 = (4")^2 = 16$$

Y la desviación estándar permisible de la medición de los ángulos en cada estación viene a ser:

$$\sigma_{\beta} \leq \sqrt{\frac{16}{4}} = 2''$$

Suponiendo que se usara un teodolito adecuadamente -- ajustado y objetivos o blancos también adecuadamente diseñados en las mediciones, el error total estará influenciado solamente por errores de lectura, puntería y centrado. Los errores -- accidentales de nivelación pueden ser despreciados en el terreno plano. Uno puede escribir entonces:

$$\sigma_{\beta} = \sqrt{\sigma_{\beta_L}^2 + \sigma_{\beta_P}^2 + \sigma_{\beta_C}^2} \leq 2''$$

Para propósitos del preanálisis se supone que:

$$\sigma_{\beta_L} = \sigma_{\beta_P} = \sigma_{\beta_C} = \frac{2''}{\sqrt{3}} = 1.16$$

Usando las ecuaciones (2.7) y (2.10) uno puede calcular de lo anterior:

$$\sigma_{\beta_L} = \frac{2.5d''}{\sqrt{n}} = 1.16$$

$$Y d'' = \frac{1.16}{2.5} = 0.5'' \text{ para } n=1 \text{ ó } d'' = 1'' \text{ para } n = 4$$

Usando la ecuación (2.4) y (2.6) para condiciones normales:

$$\sigma_{\beta_p} = \frac{45''}{M\sqrt{n}} = 1.16$$

$$Y M = 39 \text{ para } n = 1 \text{ ó } M = 20 \text{ para } n = 4.$$

Usando la ecuación (2.2):

$$\sigma_{\beta_c} = \frac{2 \sigma_c}{D} \rho'' = 1.16$$

$$Y \sigma_c = 0.9 \text{ mm. para } D = 300\text{m.}$$

Conclusiones.-

Los ángulos se deben medir ya sea en una serie con un teodolito el cual tenga la amplificación $M = 39$ y lectura del micrómetro $d = 0.5''$ o en cuatro series con un teodolito de $1''$ y una mínima amplificación de $M = 20$. En ambos casos se debe -- usar una plomada óptica o un centrado de varilla o bastón. Uno podría usar, por ejemplo, el Teodolito Kern DKM-3 ($M = 45$, $d = 0.5''$) en una serie o un teodolito Wild T-2 ($M = 28$, $d = 1''$) en cuatro series, Con el fin de comprobar que la refracción u --

otros errores sistemáticos están involucrados en las mediciones, los levantamientos se deben repetir después de un intervalo de tiempo de por lo menos varias horas con el número correspondiente de series ($n = 1$ o $n = 4$) dependiendo del teodolito usado. La diferencia entre los dos grupos de mediciones no deben exceder - (el 95% del intervalo de confianza) el valor:

$$1.96\sigma_{\beta} \sqrt{2} = 5''6 \quad \text{para la } \sigma_{\beta} = 2'' \text{ especificada.}$$

si no estuviesen involucrados errores sistemáticos.

C A P I T U L O I I I

PRECISION EN LA MEDIDA DE DISTANCIAS

ELECTROMAGNETICAS (EDM)

Este capítulo cubre el análisis del error y diseño de medidas electromagnéticas de distancias (EDM). La Tabla 1 proporciona información de los métodos de medición de distancias disponibles y precisiones obtenibles con estos métodos, si las observaciones se ejecutan con equipo calibrado apropiadamente de una manera adecuada y por un observador que entiende el proceso del levantamiento. La precisión en la medición de distancias generalmente se expresa como una razón de la desviación estándar - σ_s a la distancia S. Las precisiones muy altas se expresan con

frecuencia en partes por millón (ppm). Por ejemplo, si $\sigma_s = 10\text{mm}$ y $S = 2000\text{ mts.}$, entonces la precisión se puede expresar como:

$$\frac{\sigma_s}{S} = \frac{1}{2 \times 10^5} \quad \text{ó} \quad \frac{\sigma_s}{S} = 5 \text{ ppm.}$$

Como se verá más adelante la precisión de la medida electromagnética de distancias EDM depende no solamente de la calidad del equipo sino depende, en una gran proporción, de la calidad del observador y en su entendimiento de las fuentes o causas de los errores que afectan el procedimiento del levantamiento.

3.1 Principios Básicos y Clasificaciones de Medidas Electrónicas de Distancias.

Ya disponibles, los instrumentos para la medida electrónica de distancias que son usados en Topografía pueden ser clasificados de acuerdo al tipo de radiación electromagnética - la cual lleva señales inteligentes utilizadas en la medida de distancias. Tenemos por lo tanto los siguientes grupos de instrumentos:

- a) Instrumentos de microondas para la medida electromagnética de distancias los cuales emplean generalmente ondas de radio de longitud de onda $\lambda = 3\text{ cms.}$

Tabla 1. Precisiones factibles de medidas de distancia.

M E T O D O	INSTRUMENTO	PRECISION $\sigma_s, s \text{ o } \sigma_s$
Métrico	Cinta de acero Cintas invar o alambres	1/20,000 1/10 (1PPM)
Optico	Barra subtensa y teodolito de 1"	1/10,000
	Teodolito con hilos de esta- día, o taquímetro autoreduc- tor (ejem: Wild RDS)	1/1 000
	Taquímetro de doble imagen (ejem: Wild RDH)	1/5 000
Electromagnético (EDM)	Instrumentos EDM de microondas	1.5 cm o 5 PPM para cualquier distancia.
	Instrumentos EDM infrarrojos	1.5 mm o 2 PPM para cualquier distancia.
	Instrumentos EDM Laser	1 mm o 2 PPM para cualquier distancia.
	Mekometer	0.3 mm o 1 PPM para cualquier distancia
Interferométrico	Comparador de Vaisala o interferómetros de rayos Laser	0.5 PPM

Solamente un instrumento en este grupo (el modelo MRA-4) usa una longitud de onda diferente (de $\lambda = 8 \text{ mm.}$)

- b) Instrumentos electroópticos para la medida electrónica de distancias, los cuales utilizan radiación visible y cerca del infrarrojo para llevar las señales de medición. En este grupo tenemos ya sea - instrumentos con lasers de Helio - Neon (He-Ne) -- con una longitud de onda de $\lambda = 0.63\mu\text{m}$ o con diodos de Galio - Arseniuro (Ga - As) el cual produce radiación invisible con una longitud de onda de -- $\lambda = 0.9\mu\text{m}$.

Los instrumentos de tipo antiguo utilizaban lámparas de tungsteno o lámparas de arco de mercurio, - pero han sido substituidas por las de rayo laser - de He - Ne, las cuales gracias a su radiación coherente pueden ser utilizadas en distancias grandes en la noche y en el día debido a su alto poder de densidad y posibilidad de filtración a la luz ambiente.

Generalmente, mientras más corta sea la longitud de onda -- portadora mejor es la precisión de la medida electrónica de distancias. En consecuencia, los instrumentos de microondas son generalmente menos precisos que los instrumentos electroópticos.

Por otro lado mientras más grande sea la longitud de onda mejor es la penetración a través de la bruma y la niebla. Por lo tanto los instrumentos de microondas pueden ser utilizados en distancias largas en condiciones atmosféricas malas. Los instrumentos electroópticos son útiles sólo en condiciones de visibilidad buena.

Los instrumentos de rayos infrarrojos están caracterizados por una radiación muy profunda y por lo tanto su rango máximo es generalmente más corto que el de otros instrumentos y es del orden de 1 a 3 km. dependiendo del modelo.

Todos los instrumentos para la medición electrónica de distancias (EDM) los cuales se usan en Topografía utilizan una radiación modulada para las mediciones de distancias. La longitud de onda de señal modulada se designa como un modelo de longitud de onda y es usada como una unidad de medición. Diferentes instrumentos utilizan diferentes patrones de longitud de onda que varían desde algunos metros hasta cuarenta metros dependiendo del modelo, con la excepción del Mekometer, el cual usa solamente un modelo de longitud de onda $\lambda_p = 60$ cms. y algunos instrumentos de rango corto que usan el modelo de longitud de onda de pocos cientos de metros.

La Tabla 2 da ejemplos de instrumentos para la medida electrónica de distancias (EDM) con sus principales características, incluyendo sus precisiones sostenidas por los fabricantes. Se verá del análisis del error en que condiciones son-

Tabla 2.- Instrumentos EDM disponibles

MODELO	FABRICANTE	RANGO	PRECISION		CARACTERISTICAS
			a	b	
INSTRUMENTOS EDM DE MICROONDAS					
Tellurometros :	Tellurometer (Pty) Ltd				
MRA-3	" " "	60 Km.	1.5 cm. + 5 ppm.		
MRA-101	" " "	60 Km.	1.5 cm. + 5 ppm.		Fuera de producción
MRA-4	" " "	30 Km.	0.3 cm. + 5 ppm.		
CA 1000	" " "	25 Km.	1.5 cm. + 5 ppm.		Peso de la batería 4 Kg.
MRA-5	" " "	50 Km.	1.5 cm. + 5 ppm.		Especificaciones Militares, lectura digital
Distomat DI-50	Wild Heerbrug	150 Km.	2 cm. + 5 ppm.		
Electrolape DM-20	Cubic Corporation	60 Km.	1.5 cm. + 5 ppm.		
INSTRUMENTOS EDM DE RAYOS LASER					
Geodolite 3G	Spectra - Physics	80 Km.	1 mm. + 2 ppm.		
Geodímetros	AGA Corp.				
AGA-8	"	50 Km.	6 mm. + 2 ppm.		
AGA-68L	"	25 Km.	6 mm. + 2 ppm.		
AGA-700	"	4 Km.	5 mm. + 2 ppm.		Dist automática & medición de ángulos
AGA-76	"	3 Km.	10 mm. + 2 ppm.		
Ranger I	Laser Syst. & Electron	4 Km.			
Ranger II	" " "	6 Km.			
Ranger III	" " "	12 Km.	5 mm. + 2 ppm.		
Rangemaster		50 Km.	5 mm. + 2 ppm.		
INSTRUMENTOS EDM DE RAYOS INFRARROJOS					
DI-10	Wild Heerbrug	2 Km.	10 mm. + 2 ppm.		Montado sobre un teodolito
DI-3	" "	500 mts.	<10 mm.		Conversión de dist. inclinada a horizontal
HP 3800	Hewlett Packard	2.5 Km.	3 mm. + 10 ppm.		
MA 100	Tellurometer (Pty) Ltd.	2 Km.	1.5 mm. + 2 ppm.		Cambio de frecuencia manual
CD-6	" " "	2 Km.	5 mm. + 5 ppm.		Montado sobre un teodolito. Peso 2.5 kg.
Reg.-Elta 14	Carl Zeiss	2 Km.	10 mm. + 2 ppm.		Medición automática de ángulos y distancias
Microranger	Keuffel & Esser	1.5 Km.	6 mm. + 2 ppm.		Montado sobre un teodolito
Cubitape DM-60	Cubic Corp.	2 Km.	5 mm. + 10 ppm.		
SDM-3	Sakkisho Ltd.	1 Km.	10 mm.		
DM-1000	Kern & Co. Ltd.	2.5 Km.	5 mm. + 2 ppm.		
DM-500	" "	500 mts.	6 mm.		Montado sobre un teodolito. Peso 1.6 kg.
INSTRUMENTOS EDM DE LUZ BLANCA					
Mekometer ME 3000	Kern & Co. Ltd	2 Km.	0.3 mm. + 1 ppm.		

factibles estas precisiones.

Todos los instrumentos para la medida electrónica de distancias utilizan el mismo principio de medición de distancias. La señal modulada es transmitida continuamente desde uno de -- los extremos y es reflejada o retransmitida devuelta al otro -- extremo. Una diferencia de fase entre la referencia (transmitida) y la señal modulada regresada se mide en el instrumento -- transmisor. Si un número entero exacto "m" de la mitad de una longitud de onda está contenida en la distancia, entonces la -- diferencia de fase es cero. En todos los otros casos la dife-- rencia de fase es trasladada en una fracción U de la mitad de una longitud de onda y se muestra en unidades lineales.

La distancia S entre el transmisor y el reflector es por lo tanto igual a:

$$S = U + \frac{m\lambda}{2} \quad 3.1$$

Con el fin de encontrar el número "m" la medida se debe -- de repetir con dos o más longitudes de onda diferentes.

La longitud de onda λ es una función de la frecuencia de modulación "f" y de la velocidad "v" de propagación de ondas -- electromagnéticas:

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad 3.2$$

En el vacío, la velocidad de propagación es constante para todas las ondas electromagnéticas y es igual a:

$$C = 299792.5 \text{ km/seg.}$$

En la atmósfera, la velocidad de propagación es siempre -- más pequeña que "C" y se puede calcular de:

$$v = \frac{c}{n} \quad 3.3$$

Donde "n" es un índice de refracción del aire el cual es -- una función de la densidad de aire y la longitud de onda portadora.

El valor "n" varía desde $n = 1$ en el vacío hasta $n = 1.0003$ en condiciones atmosféricas promedio. Su valor exacto se puede -- determinar en una base de mediciones meteorológicas de la temperatura, de la presión barométrica y humedad del aire a lo largo de la línea medida. Por lo tanto, el valor de " λ " de la señal modulada es desconocido durante la medición a menos que conozcamos "n" y luego podamos calcular:

$$\lambda = \frac{c}{nf} \quad 3.4$$

La frecuencia de modulación es conocida y establecida con alta precisión.

Los fabricantes generalmente dan el valor de $\lambda = \lambda_1$ para condiciones atmosféricas especificadas, esto es para un cierto

valor de $n = n_1$.

Tenemos entonces, para una frecuencia modulaci3n conocida:

$$\lambda_1 = \frac{c}{n_1 f} \quad 3.5$$

En consecuencia, la distancia la cual es corregida por instrumentos EDM es igual a:

$$S_1 = U_1 + m \frac{\lambda_1}{2}$$

donde U_1 es una fracci3n de $\frac{\lambda_1}{2}$

Si durante las mediciones $n = n_2 \neq n_1$ entonces el valor correcto de λ_2 se iguala a:

$$\lambda_2 = \frac{c}{n_2 f} \quad 3.6$$

Y la distancia real es:

$$S = U_2 + m \frac{\lambda_2}{2} \quad 3.7$$

De (3.6) y (3.5) tenemos que:

$$\lambda_1 n_1 = \frac{c}{f} \quad , \quad \lambda_2 n_2 = \frac{c}{f}$$

igualando las expresiones,

$$\lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2$$

de donde:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{n_1}{n_2} \quad 3.8$$

Y finalmente la distancia correcta se puede calcular haciendo las consideraciones siguientes de la expresión:

$$U_1 \text{ es una función de } \frac{\lambda_1}{2} = \frac{c}{2n_1 f}$$

Así como:

$$U_2 \text{ es una función de } \frac{\lambda_2}{2} = \frac{c}{2n_2 f}$$

Por consiguiente,

$$\frac{U_1}{\frac{c}{2n_1 f}} = \frac{U_2}{\frac{c}{2n_2 f}}$$

$$\frac{U_1 2n_1 f}{c} = \frac{U_2 2n_2 f}{c}$$

Eliminando términos semejantes y poniendo la expresión en función de U_2

$$U_2 = U_1 \frac{n_1}{n_2}$$

Y finalmente:

$$S = U_1 \frac{n_1}{n_2} + \frac{m\lambda_1 n_1}{2n_2} = S_1 \frac{n_1}{n_2} \quad 3.9$$

La ecuación 3.9 da la fórmula básica para corregir la distancia medida de acuerdo a las condiciones atmosféricas reales.

Debido al hecho de que los centros electrónicos de los -- instrumentos EDM generalmente no coinciden exactamente con el centro de plomeo uno tien que determinar y agregar una corrección cero (Z_0), así llamada a la distancia calculada. La distancia $S + Z_0$ corresponde a una distancia de espacio a lo largo de una trayectoria electromagnética entre los dos puntos levantados. Se deben hacer correcciones posteriores para reducir la distancia medida a un nivel de referencia.

La distancia reducida final S_0 se calcula, entonces, como:

$$S_0 = S_1 \frac{n_1}{n_2} + Z_0 + \Delta S \quad 3.10$$

Donde: S_1 es la distancia medida, Z_0 es la corrección cero y ΔS incluye todas las correcciones necesarias para reducir la distancia medida a un plano de referencia. Con el fin de saber que precisión uno espera obtener con un instrumento en particular y en condiciones específicas tiene uno que adentrarse - en un arduo, pero útil análisis de precisión de todos los recursos posibles de errores.

Si ponemos (3.5) y (3.9) en (3.10) obtendremos una expresión para S_0 :

$$S_0 = U_1 \frac{n_1}{n_2} + m \frac{C}{2n_2 f} + Z_0 + \Delta S \quad 3.11$$

Si las reglas de propagación del error (ecuación 1.1) se aplican a la función en la ecuación (3.11), tendremos una expresión para la varianza de distancia reducida:

$$\sigma_{S_0}^2 = \sigma_U^2 + \left(\frac{m}{2nf}\right)^2 \sigma_C^2 + \left(\frac{cm}{2nf^2}\right)^2 \sigma_f^2 + \left(\frac{cm}{2n^2 f}\right)^2 \sigma_n^2 + \sigma_{Z_0}^2 + \sigma_{\Delta S}^2 \quad 3.12$$

La ecuación (3.12) se puede simplificar por una aproximación: $2S = m\lambda = mc/nf$ y entonces tenemos:

$$\sigma_{S_0}^2 = \sigma_U^2 + S^2 \left\{ \left(\frac{\sigma_C}{C}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_n}{n}\right)^2 \right\} \sigma_{Z_0}^2 + \sigma_{\Delta S}^2 \quad 3.13$$

En la ecuación anterior σ_U representa una desviación estándar del valor completo de $U_1 \frac{n_1}{n_2}$. Ya que U_1 corresponde generalmente a una distancia muy corta, la influencia de los errores en n_1 y n_2 en la precisión de U_2 puede ser despreciada. La precisión en la medida electrónica de distancias generalmente se da en la literatura técnica en una forma general:

$$\sigma_S^2 = a^2 + b^2 S^2 \quad 3.14$$

ó en una forma simplificada:

$$\sigma_S = \pm a \pm bS \quad 3.15$$

La ecuación (3.13) se puede reducir a la forma (3.14) substituyendo:

$$\sigma U^2 + \sigma_{Z_0}^2 = a^2 \quad 3.16$$

y

$$\left\{ \left(\frac{\sigma c}{c} \right)^2 + \left(\frac{\sigma f}{f} \right)^2 + \left(\frac{\sigma n}{n} \right)^2 \right\} = b^2 \quad 3.17$$

Donde:

σc = error de la velocidad de propagación en el vacío.

σf = error de la frecuencia de modulación.

σn = error del índice de refracción.

σu = error en la determinación de la diferencia de fase.

σ_{Z_0} = error en la corrección de calibración (corrección cero).

El error $\sigma_{\Delta S}$ de las reducciones no se incluye en las expresiones (3.14) y (3.15).

Uno puede darse cuenta ahora, porque las precisiones de los instrumentos EDM como se muestra en la tabla 2, consiste de dos números; el primer número representa el valor de "a" y el segundo el de "b" en ppm.

Las ecuaciones (3.16) y (3.17) muestran todos los recursos de errores en la medición electrónica de distancias EDM. Cada fuente o recurso de error se discutirá separadamente.

3.2 Error de Velocidad de Propagación.

El valor de la velocidad de propagación "C" se aceptó en 1957 siendo igual a 299792.5 km/seg. con una desviación estándar de $\sigma_c = 0.4$ km/seg. Resultados recientes confirman el valor de "C" y dan la desviación estándar $\sigma_c = 0.1$ km/seg. Esto corresponde al error relativo de 0,3ppm. El error es despreciablemente pequeño para aplicaciones topográficas en la medida electrónica de distancias. Su influencia es de una naturaleza constante introduciendo un cambio de escala constante en la determinación de la distancia absoluta.

3.3 Error de Índice de Refracción para Radiaciones Visibles e Infrarrojas.

El índice de refracción para la radiación modulada visible y cerca del infrarrojo en la atmósfera normal, que está en el aire seco a 0°C, 760mm. de presión de mercurio y con 0.03% -- del dióxido de carbono, se puede calcular de la fórmula de Barrel y Sears:

$$N_o = 1 + \left(287.604 + \frac{4.8864}{\lambda^2} + \frac{0.068}{\lambda^4} \right) 10^{-6} \quad 3.18$$

donde λ es la longitud de onda de la radiación portadora en micrómetros (μm). Por ejemplo, para un rayo laser He-Ne

de $\lambda = 0.6328\mu\text{m}$. y $N_0 = 1,000300$. Si la temperatura t , la presión barométrica P y la humedad del aire difiere de las condiciones normales, entonces el índice de refringente se calcula de:

$$(n - 1) = \frac{0.359408(N_0 - 1)}{273.15+t} P - \frac{1.5026}{273.15+t} 10^{-5} e \quad 3.19$$

donde e es la presión parcial de vapor de agua en -- mm. de mercurio, t está en grados centígrados y P en mm. de mercurio (mm. Hg.).

El valor de φ se determina de mediciones de una diferencia en temperatura entre la temperatura seca t_D y la temperatura t_W de los termómetros de los bulbos y usando una fórmula apropiada:

$$e = E - 0.6 (t_D - t_W) = E - 0.6\Delta t \quad 3.20$$

donde E es la presión de vapor de agua saturada en -- mm. Hg.

Los valores de E estan tabulados en tablas metereológicas. Una muestra de estos valores se dan en la tabla 3, incluyendo cambios ΔE por 1°C en la vecindad de las temperaturas indicadas.

T_w	-10°C	0°C	10°C	20°C	30°C
Emm Hg	2	4.6	9.2	17.50	31.90
$\Delta E/10^\circ\text{C}$	± 0.2	± 0.35	± 0.6	± 1.0	± 1.8

TABLA 3. PRESION DE VAPOR DE AGUA SATURADO

Uno puede ver de lo anterior, que la influencia de la humedad del aire es despreciablemente pequeña para la mayoría de las aplicaciones prácticas. En condiciones extremas como por ejemplo, a la temperatura $t = 30^\circ\text{C}$ y humedad 100% esto es, para $t_w = t_D$, tenemos $e = E = 31.9$ mm.Hg. Si en estas condiciones, la influencia de e fuera rechazada poniendo $e = 0$ en la ecuación (3.19), el error de la n calculada sería de 1.6 ppm. solamente. La influencia de los errores σ_p y σ_t en las medidas de P y t pueden ser calculados aplicando la ley de propagación del error a la ecuación (3.19). Uno obtiene:

$$\sigma_n^2 = -\left\{-\frac{0.269578(\text{No} - 1)}{(273.15-t)^2} P\right\}^2 \sigma_t^2 + \left\{\frac{0.269578(\text{No} - 1)}{273.15-t}\right\}^2 \sigma_p^2 \quad 3.21$$

Por ejemplo, para $\sigma_t = 1^\circ\text{C}$ y $\sigma_p = 2.5$ mm.Hg. σ_n/n varía entre 1.3ppm. a 1.8ppm. para el rango de temperaturas de -30°C a $+30^\circ\text{C}$ y para P variando de 740 mm.Hg. a 800 mm.Hg. En condiciones normales 1°C de error produce un error de 1ppm. en n , y 1mm.Hg. produce un error de 0.4ppm.

En la práctica, la temperatura y la presión se miden solamente en ambos extremos de la distancia medida, o aún en un extremo solamente. La experiencia muestra que en muchos casos, particularmente en mediciones en condiciones topográficas diversas, la temperatura promedio a lo largo de la línea medida puede diferir en varios grados ($^{\circ}\text{C}$) de las mediciones finales. Los levantamientos en áreas urbanas, o mediciones a lo largo de valles profundos en las montañas son algunos ejemplos. Muchos Ingenieros Topógrafos no checan con suficiente frecuencia sus termómetros y barómetros con otros instrumentos normales y no se dan cuenta que los errores de más de 2°C y 5 mm.Hg. son bastante comunes en el equipo metereológico proporcionado con los instrumentos EDM.

Esta pequeña discusión demuestra claramente, que si las mediciones metereológicas se hacen en ambos extremos solamente, entonces con el fin de obtener el valor de $b \leq 2\text{ppm}$. como lo demandan los productores, uno tiene que estar seguro que la variación en temperatura y en presión barométrica a lo largo de la línea medida esté dentro de 1.5°C y 3mm. Hg. respectivamente. Si no es así, el índice refringente se tiene que determinar no solamente en los extremos de la línea medida sino también en los puntos intermedios. Los termómetros y barómetros se deben de calibrar frecuentemente.

3.4 Error de Índice de Refracción para Microondas.

El índice refringente para microondas se puede calcular de la fórmula de Essen y Froome, la cual se puede escribir de la forma:

$$(n-1) = \frac{103.49}{T} 10^{-6} P + \left\{ \frac{0.496}{T^2} - \frac{17.23}{T} 10^{-6} \right\} e \quad 3.22$$

donde $T = 273.15^\circ\text{C} + t$. Aquí, t está en $^\circ\text{C}$ y P y e en mm. Hg. Los errores σ_t en la temperatura, σ_p en la presión barométrica y σ_e en la presión de vapor de agua producirán un error de σ_n en el índice refringente de acuerdo a la regla de propagación del error igual a:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 = & \left\{ \frac{77.624}{T} 10^{-6} \right\}^2 \sigma_p^2 + \\ & + \left\{ -\frac{77.624P}{T^2} 10^{-6} + \frac{12.92e}{T^2} 10^{-6} - \frac{0.74e}{T^3} \right\}^2 \sigma_T^2 + \\ & + \left\{ \frac{0.372}{T^2} - \frac{12.92}{T} 10^{-6} \right\}^2 \sigma_e^2 \end{aligned} \quad 3.23$$

La fórmula anterior deriva las siguientes conclusiones:

Un error de 1 mm.Hg. en P producirá un error $\sigma_n/n = 0.4$ ppm. dentro del rango de temperatura de -30°C a $+30^\circ\text{C}$.

Un error de 1°C en T producirá un error $\sigma_{n/n}$ variando de 0.8ppm. a 2ppm. para valores extremos de P , T y e con valor de $\sigma_{n/n} = 1.2\text{ppm}$. en condiciones atmosféricas promedio.

La influencia de los errores en la determinación de e son muy críticos en mediciones de microondas. Por ejemplo - para $t = 0^{\circ}\text{C}$ tenemos $\sigma_{n/n} = 6.6\sigma_e$ y para $t = 30^{\circ}\text{C}$ el error $\sigma_{n/n} = 5.4\sigma_e$ en ppm. El valor de σ_e se puede calcular aplicando la regla de propagación del error a la ecuación (3.20) obteniendo:

$$\sigma_e^2 = \sigma_E^2 + 0.36 \sigma_{\Delta t}^2 \quad 3.24$$

Si tomamos $\sigma_{tw} = 1^{\circ}\text{C}$ entonces σ_E se puede obtener de la tabla 3 igual a $\Delta E/1^{\circ}\text{C}$ para la t dada. Por ejemplo, para $t = 30^{\circ}\text{C}$, $\sigma_t = 1^{\circ}\text{C}$ y $\sigma_{\Delta t} = 0.5^{\circ}\text{C}$ obtendremos $\sigma_E = 1.8\text{mm.Hg.}$ y:

$$\text{mm.Hg. } \sigma_e = \sqrt{(1.8)^2 + (0.36 \times 0.5)^2} = 1.8$$

El error total debido al error σ_e viene a ser:

$$\frac{\sigma_n}{n} = 5.4 \times 1.8 = 9.7 \text{ ppm.}$$

Uno puede darse cuenta del ejemplo anterior que es - muy difícil obtener en la práctica $b \leq 5\text{ppm}$. como lo sostienen los fabricantes.

La repetición de mediciones en diferentes condiciones atmosféricas (diferentes valores de n) con, por ejemplo, una serie de mediciones en el día y otra en la noche puede mejorar la precisión. La medición de las condiciones meteorológicas de puntos intermedios entre los instrumentos es otra posibilidad de mejorar los resultados si se pide una precisión más alta.

3.5 Error de la Frecuencia de Modulación.

La frecuencia de oscilación se mide en unidades de Hertz (Hz).

1 Hertz = 1 ciclo/segundo

1000 Hz = 1 KHz

10⁶ Hz = 1 MHz

10⁹ Hz = 1 GHz

Con el fin de alcanzar, por ejemplo, una longitud de onda de modulación de 10m., uno tiene que producir oscilaciones de la señal con una frecuencia de aproximadamente 30 MHz. (Ver Ec. 3.2). La frecuencia de modulación puede ser calibrada con una precisión de 0.1ppm. y se puede establecer durante el uso de instrumentos EDM dentro de unos pocos Hz, si el circuito de oscilación el cual incluye cristales de cuarzo se mantiene a -

una temperatura constante; si la temperatura no es controlada ocurrirá una deriva de frecuencia produciendo errores $\sigma f/f$ arriba de 10ppm. o más. La mayoría de los instrumentos EDM tienen hornos integrados con un termostato y por lo tanto, requieren un tiempo de calentamiento. Pero aún con el horno, la frecuencia puede desviarse debido al envejecimiento de los cristales de control. Algunos instrumentos de microondas muestran una deriva de 50Hz por año, lo cual por ejemplo, para una frecuencia de modulación de 10MHz. produciría el error de 5ppm. Es entonces, recomendable checar las frecuencias por lo menos una vez al año o aún cada mes si el instrumento se usa en condiciones extremas de tiempo. Los métodos de la estabilización de frecuencia y de la calibración pueden diferir de un modelo de instrumento EDM a otro. Los usuarios de instrumentos EDM deben consultar con los fabricantes acerca de los requerimientos para la calibración de frecuencia de sus instrumentos.

Por ejemplo, el Mekometer emplea estabilización de longitudes de onda (no frecuencia) por medio de cavidades sónicas de referencia las cuales incluyen correcciones por la temperatura local y presión barométrica.

3.6 Error de la Diferencia de Fase.

Como se mencionó anteriormente, la medida de una --

diferencia de fase entre la señal modulada transmitida y la regresada es la base de todos los instrumentos, los cuales están listados en la tabla 2. Hay muchas maneras posibles para la determinación de la diferencia de fase usando métodos de pun--to-nulo o digital. Todos ellos dan una resolución de 1/1000 del ciclo o aún mejor. Esto dá por ejemplo, un error de 10mm. en una determinación simple de distancia con el Wild DI-10, - el cual utiliza la modulación de la mitad de la longitud de onda de aproximadamente 10m., o de 0.3mm. en mediciones con el - Mekometer, el cual usa la longitud de onda de modulación de -- 0.6m. Las mediciones de fase se repiten generalmente varias - veces en el proceso de la determinación de la distancia y el - error de fase disminuye tomando un promedio de todos los resultados. Las mediciones de fase en los instrumentos de microondas pueden ser afectados seriamente por reflexiones del terreno de una porción de la señal que viaja entre los dos extremos de las estaciones.

El ángulo del cono α de radiación de microondas se puede calcular aproximadamente de:

$$\text{Sen } \frac{\alpha}{2} = \frac{\lambda}{D}$$

donde, λ = longitud de onda portadora.

D = diámetro del reflector de la microonda.

Por ejemplo, para $\lambda = 3$ y $D = 36$ cm., como es el caso de algunos modelos de telurómetros, el ángulo del cono de radiación es de nueve grados. Por lo tanto, a menos que la distancia se mida a través de un valle profundo, una porción de la señal quizás siempre esté reflejada por el terreno y quizás interfiera a la estación remota con la señal de medición directa. La interferencia puede producir un cambio de fase sistemático haciendo imposible medir la distancia. El último caso puede ocurrir si las mediciones se ejecutan sobre cuerpos extensos reflejantes, tales como aguas en calma o masas de hielo flotantes, - las cuales pueden producir las llamadas reflexiones del tipo de espejos en los cuales la señal reflejada es casi de la misma intensidad como la directa y pueden diferir 180° en la fase.

Hay muchos factores que afectan la intensidad y la diferencia de fase entre la señal directa y la reflejada. Dos de los factores a saber el ángulo de incidencia de la señal reflejada y la frecuencia portadora de los instrumentos de microondas, se pueden controlar a un cierto alcance por los observadores durante el proceso de la medición de distancia. El ángulo de incidencia puede diferir cambiando la altura del instrumento sobre la marca levantada. En muchos casos, un cambio de unos pocos decímetros solamente pueden producir un cambio grande en la fase y la intensidad de la señal reflejada. El mismo efecto puede obtenerse por un cambio de la longitud de onda portadora cambiando la llamada cavidad de tono. Entonces, con-

el fin de reducir la influencia de las reflexiones del terreno, se recomienda repetir las mediciones de fase 10 y 20 veces, -- cambiando la cavidad de tono (la longitud de onda portadora), en pasos iguales cada vez. Si las mediciones repetidas dan -- una propagación insatisfactoria de los resultados, el procedimiento completo se repetiría usando diferentes alturas de los instrumentos. Con el fin de evaluar si la propagación de los resultados es satisfactoria o no, el resultado promedio de todas las cavidades de tonos es calculado y se dibujan las desviaciones de los resultados individuales. De esta manera, se obtiene la llamada curva de oscilación del terreno como se -- muestra, por ejemplo, en la figura (3.1). Si la oscilación del terreno es cercana a un ciclo completo de una curva sinusoidal y las máximas desviaciones de los resultados no exceden cinco veces la longitud de onda portadora (15 cm. para instrumentos con $\lambda = 3$ cm.), uno puede decir desde el punto de vista de las reflexiones del terreno, que la distancia media es casi perfecta.

Si la curva de oscilación del terreno muestra grandes irregularidades y, particularmente, saltos repentinos en ciertas cavidades de tono (figura 3.2) entonces, uno puede esperar que las mediciones sean afectadas por fuertes reflexiones y que probablemente la distancia media tenga un error sistemático grande. En tales casos las mediciones se deben de repetir con diferentes alturas de los instrumentos. Uno también

FIG. 3.1. CURVA DE OSCILACION DEL TERRENO, TIPICA DE UNA MEDICION PERFECTA.

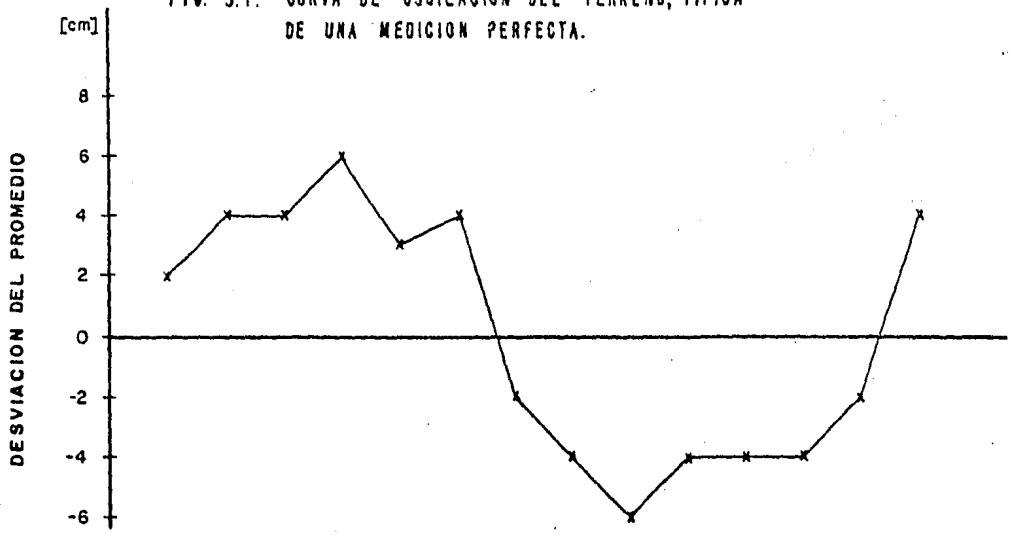
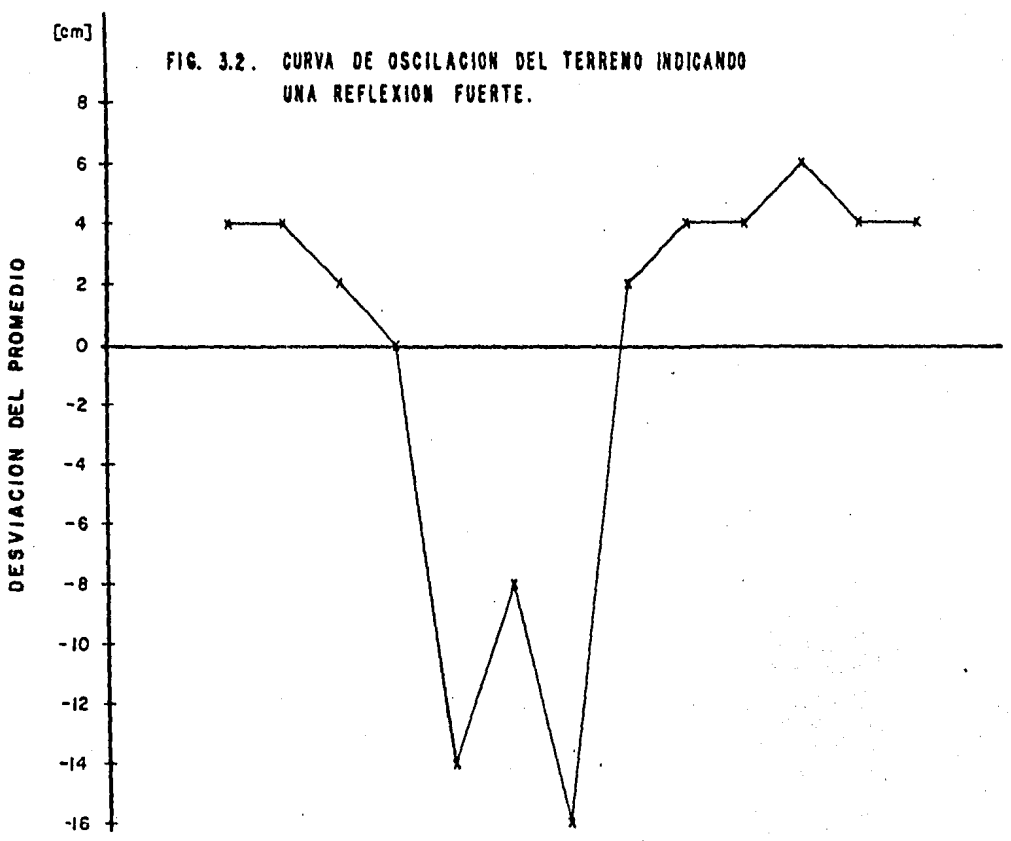


FIG. 3.2. CURVA DE OSCILACION DEL TERRENO INDICANDO UNA REFLEXION FUERTE.



puede tratar de inclinar los instrumentos ligeramente hacia adelante, con el fin de cambiar los parámetros de reflexión. Si cambiando las condiciones de reflexión del terreno la curva de oscilación del terreno muestra irregularidades sistemáticas, entonces, uno puede sospechar que las mediciones de distancia son afectadas por reflexiones internas. Este puede ser el caso cuando el reflector parabólico este encorvado, o tiene otra distorsión en su forma, causando una reflexión de regreso de la señal transmitida.

Generalmente, la influencia de las reflexiones del terreno en la desviación estándar de la distancia medida no exceden un valor de 1.5 a 3 cm. para instrumentos con $\lambda = 3$ cm. si se repiten las mediciones en 20 diferentes cavidades de tonos, y cuando la curva de oscilación del terreno tenga la forma satisfactoria. En condiciones extremadamente malas, con reflexiones fuertes, la distancia medida puede ser afectada por errores del orden de 10 cm. o aún mayores.

Las mediciones con el telurómetro MRA-4 el cual utiliza una longitud de onda portadora de 8mm. son afectadas por las reflexiones del terreno cuatro o cinco veces menos que las mediciones con la longitud de onda de 3 cm.

3.7 Error Cero.

Los centros eléctricos de los instrumentos EDM generalmente no coinciden con los centros de las marcas usadas para plomear los instrumentos sobre la estación levantada. La distancia interna que viajó por ondas electromagnéticas en los instrumentos es generalmente más grande que la distancia directa entre los puntos de arribo de la señal y las marcas de centrado. Esta diferencia puede ser bastante grande y, por ejemplo, en algunos modelos de telurómetros o geodímetros es de 30cm. Los fabricantes de los instrumentos EDM siempre proporcionan información acerca del valor de la corrección cero la cual debe ser agregada a la distancia medida con el fin de compensar la diferencia. La mayoría de los nuevos instrumentos están calibrados de tal manera que la corrección cero es igual a cero. Sin embargo, se ha encontrado que el valor de la corrección cero puede cambiar después de un uso prolongado de los instrumentos. El cambio es generalmente pequeño en instrumentos electroópticos (máximo de varios milímetros), pero en instrumentos de microondas puede ser del orden de varios centímetros. Por lo tanto, uno debe de chequear frecuentemente la corrección cero midiendo varias distancias sobre una línea base de calibración. Son recomendadas distancias entre 50 y 500mts. para la calibración de instrumentos ópticos y de 200 a 1000mts. para instrumentos de microondas. Si no se dispone de distancias conocidas entonces el valor de la corrección cero se puede encontrar

usando un método de distancias subdivididas. El método requiere una línea recta en una área plana con varios puntos marcados, digamos los puntos A, B, C y D como se muestra en la fig. (3.3).

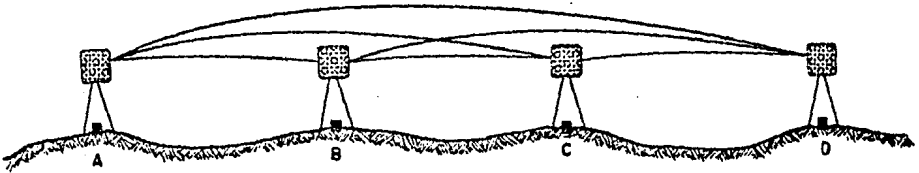


FIG. 3.3. DETERMINACION DE LA CORRECCION CERO USANDO EL METODO DE DISTANCIAS SUBDIVIDIDAS

La distancia total AD y las subdistancias AB, BC y CD se miden con el instrumento que va a ser calibrado. Asumiendo que la corrección cero es la misma para cada distancia medida, uno puede calcular su valor de la comparación entre la distancia total y la suma de las distancias parciales, esto significa:

$$AD - (AB + BC + CD) = 2 Z_0$$

Si las distancias en la figura (3.3) fueran medidas en todas las combinaciones entonces el valor de Z_0 podría ser calculado de las comparaciones:

$$AC - (AB + BC) = Z_c$$

$$BD - (BC + CD) = Z_0$$

En la práctica se recomienda usar una línea con un mínimo de cuatro subdivisiones medidas en todas sus combinaciones y el valor de Z_0 se calcula usando el método de ajustes por mínimos cuadrados. Por supuesto, las distancias medidas se deben de corregir por el índice refringente (refractor), de inclinación, etc., antes de los cálculos de Z_0 .

Algunos instrumentos EDM demuestran una relación entre el valor de Z_0 y el valor de la diferencia de fase (valor de U en la ec. 3.1) mostrando un cambio cíclico cuando se cambia la distancia sobre el rango de la mitad de la longitud de onda modulada. El cambio cíclico se puede descubrir midiendo una distancia conocida y cambiándola en pasos, igual por ejemplo a $1/20$ de la mitad de la longitud de onda. Si mediciones repetidas en distancias diferentes mostraran una relación notable entre los valores de Z_0 y U , entonces diferentes correcciones cero debieran aplicarse en mediciones de campo para diferentes valores de U utilizando un graficador tabulado o gráfico de los Z_0 cambiables. En la mayoría de los casos, sin embargo, los cambios de Z_0 están dentro de las precisiones de su determinación y se debe aplicar un valor promedio de Z_0 como una corrección constante sin hacer caso del valor de U contenido en la distancia medida.

3.8 Errores debidos a la Refracción y a las Correcciones Geométricas.

La medición electrónica de distancias da una distancia inclinada S_m figura 3.4 entre las estaciones levantadas A y B, a lo largo de una trayectoria curvada (debido a la refracción atmosférica). Con el fin de obtener una distancia esferoidal S_o , reducida a un nivel de referencia H_o , se deben de agregar las siguientes correcciones a S_m :

- a).- La corrección ΔS_1 , debida a la refracción, con el fin de obtener la distancia inclinada recta S_s .
- b).- La corrección ΔS_2 para reducir S_s a una distancia horizontal S_h al nivel de elevación medio - H_m ($H_m = (H_A + H_B)/2$)
- c).- La corrección ΔS_3 para reducir S_h a una distancia en cuerda S_c al nivel de referencia H_o .
- d).- La corrección ΔS_4 para reducir S_c a la distancia esferoidal S_o al nivel de referencia H_o .

Si nos gustara usar la distancia medida en los cálculos de coordenadas rectangulares planas, entonces, se debería -- aplicar una corrección de proyección de mapa (factor de escala) a la S_o . La distancia S_m en la figura 3.4 es la distancia obte-

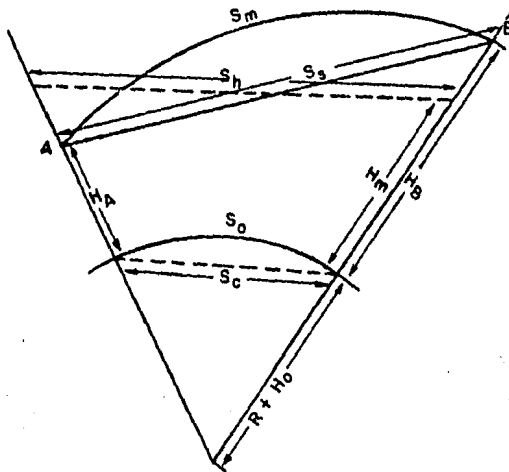


FIG. 3.4. REDUCCION DE LA DISTANCIA MEDIDA S_m A LA DISTANCIA ESFEROIDAL S_0 EN EL NIVEL H_0

nida directamente de las medidas de cálculo y reducida para el índice refringente (refractor) y la corrección cero (ecuación 3.10) esto significa:

$$S_m = S \frac{n_1}{n_2} + Z_0$$

Las correcciones listadas anteriormente pueden ser calculadas usando las fórmulas siguientes:

$$\Delta S_1 = \frac{S_m^3}{24R^2} (K^2 - 2K) = S_s - S_m \quad 3.25$$

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta H^2}{2S_s} - \frac{H^4}{8S_s^3} = S_h - S_s \quad 3.26$$

$$\Delta S_3 = - \frac{ShHm}{R+H_0+Hm} \quad 3.27$$

$$\Delta S_4 = - \frac{Sc^3}{24(R+H_0)^2} \quad 3.28$$

donde:

K.- coeficiente de refracción el cual es generalmente aceptado como igual a 0.12 para medidas electro-ópticas y 0.25 para instrumentos de microondas.

R.- radio de curvatura de la Tierra. Rigurosamente es un radio de curvatura de un elipsoide de referencia. Uno puede sin embargo, aceptar un valor aproximado de $R = 6370\text{km}$. como una constante en todas las reducciones de las distancias - mayores a 100km. de longitud y el error surgido de las aproximaciones será todavía más pequeño que 1ppm.

H_0 . es la diferencia de elevación $H_B - H_A$.-

Ya que el error en R no es crítico para la precisión de las reducciones uno puede simplificar las correcciones ΔS_1 , ΔS_3 y ΔS_4 substituyendo:

$$R + H_0 + Hm = R + H_0 \approx R \quad 3.29$$

Las correcciones ΔS_1 y ΔS_4 son muy pequeñas y uno puede combinarlas juntas en:

$$\Delta S_1 + \Delta S_4 = \frac{S_m^3}{24R^2} (1 - K)^2 \quad 3.30$$

Usando una aproximación $S_c = S_m$ y la aproximación - (3.29). Finalmente la distancia reducida se calcula de:

$$S_o = S_m - \frac{\Delta H^2}{2S_m} - \frac{\Delta H^4}{8S_m^3} - \frac{ShHm}{R} + \frac{S_m^3}{24R^2} (1 - K)^2 \quad 3.31$$

La corrección combinada de la ecuación (3.30) tiene un valor menor que 1ppm. para distancias mayores de 30 km. La segunda porción de la corrección inclinada a horizontal también puede ser despreciada en muchos casos porque su valor no excede 1ppm. para las inclinaciones con:

$$\frac{\Delta H}{S} < \frac{1}{20}$$

Por lo tanto, si los requerimientos de precisión para las reducciones de distancias es menor que 1ppm. y las distancias no exceden 30km. con una inclinación $\Delta H/S \leq 1/20$ entonces la ecuación (3.31) se simplifica a:

$$S_o = S_m - \frac{\Delta H^2}{2S_m} - \frac{ShHm}{R} \quad 3.32$$

Los errores en ΔH y H_m son los más críticos en la determinación de la distancia reducida S_0 . Un error $\sigma_{\Delta H}$ de ΔH producirán un error en S igual a:

$$\sigma_S = \frac{\Delta H}{S} \sigma_{\Delta H}$$

Por ejemplo, para $S = 1000$ mts. y $\Delta H = 100$ mts., un error $\sigma_{\Delta H} = 0.2$ mts. producirá $\sigma_S = 20$ mm. Muchos Ingenieros Topógrafos en la práctica subestiman la importancia de checar -- cuidadosamente la diferencia en elevación antes de introducir la reducción horizontal. Si un ángulo zenital β de la inclinación se mide con el fin de reducir la distancia inclinada, uno debe de recordar agregarle correcciones para la curvatura de la Tierra y para la refracción atmosférica. El ángulo corregido β_0 en segundos puede ser calculado de:

$$\beta_0 = \beta + \frac{S(1-K)}{2R} \rho'' \quad 3.33$$

donde:

K .- coeficiente de refracción igual a 0.12 en condiciones normales (puede, sin embargo, variar de -1 a +1, en condiciones extremas, como por ejemplo en mediciones sobre un glaciar o cerca del terreno en un día caliente).

$$\rho = 206265''.$$

Una omisión de la corrección producirá un error de 6ppm. de la distancia medida en una pendiente con una inclinación de 6°.

El error σ_H en la determinación H_m es importante -- cuando se reduce la distancia a un nivel de referencia.

Las elevaciones de los puntos se determinan generalmente con referencia al nivel medio del mar. Uno debe de recordar que los cálculos de las distancias son generalmente llevados a cabo sobre un elipsoide de referencia. La distancia vertical entre el nivel medio del mar y el elipsoide de referencia - puede ser del orden de varias decenas de metros. Uno puede checar fácilmente, que un error de 6 mts. en la determinación de H_m produce un error de 1ppm. en la reducción de la distancia. Por lo tanto, una negligencia por ejemplo de una distancia de 30 mts. entre el elipsoide y el nivel medio del mar producirá un error sistemático de 5ppm. en una red medida.

Conclusiones y Recomendaciones.-

El error total de la medida electrónica de distancias EDM se puede expresar en la forma:

$$\sigma_S^2 = a^2 + b^2 S^2 + \sigma_{\Delta S}^2 \quad 3.34$$

Los valores de los parámetros a y b para diferentes instrumentos

EDM se mostraron en la tabla 2. Uno se puede dar cuenta después de la discusión de todas las fuentes de errores en la medición electrónica de distancias EDM, que es muy difícil, aunque posible alcanzar las precisiones listadas.

En lo que concierne a los instrumentos electro-ópticos los valores listados para el parámetro "a" son bastante razonables si los instrumentos se checan frecuentemente para la corrección cero. El parámetro "b" depende principalmente en el conocimiento del índice refringente (refractor) del aire y en la estabilidad de las frecuencias de modulación. Los termómetros y barómetros se deben checar y calibrar cuidadosamente. La experiencia muestra que el valor sostenido de 2ppm. para el parámetro "b" es generalmente exagerado cuando se habla de las aplicaciones de la rutina de los instrumentos electro-ópticos aún cuando todos los procedimientos de campo se ejecuten de acuerdo a las especificaciones. Un valor de 4ppm. parece dar una mejor armonía con la realidad cuando se usan las variaciones de la medida electrónica de distancias EDM pesando las observaciones en un ajuste por mínimos cuadrados de redes de levantamiento.

Los instrumentos de microondas por el momento vulnerables a las reflexiones del terreno y por ahora afectados por las inseguridades en la determinación de la humedad relativa del aire puede dar desviaciones mucho más grandes de los valores --

listados de los parámetros "a" y "b". Estos requieren mucho - más habilidad y experiencia en la evaluación de resultados de levantamientos que los instrumentos electroópticos. Los instrumentos con microondas de 3 cm. pueden dar una "a" entre 2 y 3-centímetros si la corrección cero se checa frecuentemente en - forma separada para cada par de instrumentos y si las reflexiones del terreno son minimizadas por un procedimiento de campo apropiado y por una interpretación experta de las curvas de oscilación del terreno. El valor de "b", aunque es sostenido por los fabricantes a ser del orden de 3ppm. en realidad es gene-- ralmente más grande. El valor listado en la tabla 2 de $b = 5$ ppm., es más realista cuando se trabaja con instrumentos bien calibrados. La experiencia muestra que cuando se usan varian-- zas de las medidas de distancias de microondas pesando las ob-- servaciones en los ajustes de redes, un valor de $b = 3$ ppm. para levantamientos de rutina parecen dar un buen acuerdo con la -- realidad.

Muchos detalles acerca del uso y nuevas evoluciones en la medida electrónica de distancias EDM se han omitido en - este escrito pero es mi intención que los lectores después de la breve exposición de algunos de los problemas de la medida - electromagnética de distancias, traten de ahondar su conocimiento estudiando la literatura disponible en la materia.

C A P I T U L O I V

ANALISIS DEL ERROR DE REDES HORIZONTALES

Una red de control es un grupo de puntos marcados en el campo con posición relativa conocida en un sistema de coordenadas. Trataremos en esta discusión solamente con un sistema de coordenadas rectangulares planas, en el cual la posición horizontal de cada punto de control está determinada por un par de coordenadas X y Y o E y N. No hay ninguna diferencia en cuales símbolos sean usados para nombrar los ejes del sistema coordinado mientras los usuarios sepan cual eje es cual. Se supone que los lectores están familiarizados con los procedimientos básicos de los cálculos de coordenadas planas.

Las redes de control sirven como una base para detallar mapas, para establecer detalles de ingeniería de construcción por medio de coordenadas y para posicionamiento de esquinas de propiedades en los levantamientos catastrales. El uso de coordenadas en toda clase de proyectos de levantamientos no es solamente útil sino que viene a ser una necesidad con la creciente demanda para una digitación de los cálculos de la información de los levantamientos. No hay una manera más simple de describir y almacenar en la computadora la información en una posición de un punto que por medio de coordenadas.

Las coordenadas de un punto son inútiles si no conocemos cuál es su precisión. La red de control será inútil si estamos imposibilitados para determinar cuales son los errores relativos posicionales entre los puntos de control.

La precisión de una red de control depende de la precisión de las medidas, de la configuración geométrica de la red y del número de grados de libertad.

El número de grados de libertad en una red horizontal es una diferencia entre el número total de medidas, las cuales fueron usadas para los cálculos de coordenadas y el número necesario de medidas las cuales deberían hacerse con el fin de poder calcular las coordenadas.

Todos sabemos, que con el fin de poder calcular las coordenadas de un nuevo punto en una red uno tiene que hacer por lo menos dos mediciones; pueden ser, ya sea; dos ángulos o dos distancias desde dos estaciones conocidas al nuevo punto, o dos azimuts, o cualquier combinación de las anteriores. Por lo tanto, si tenemos k número de puntos que se van a posicionar en una red, el número necesario de mediciones es $2k$.

El análisis de la precisión de una red con sólo $2k$ mediciones, esto significa con cero grados de libertad, es comparativamente fácil porque uno puede aplicar directamente las reglas simples de la propagación del error como ya aprendimos anteriormente. Si tenemos, sin embargo, algunas medidas adicionales (redundantes) entonces, el análisis del error viene a ser un poco más complicado porque entonces se puede calcular varias veces las coordenadas de los puntos en una red usando cada vez una serie diferente de mediciones a lo largo de diferentes rutas de cálculo.

En el último de los casos, la técnica del ajuste por mínimos cuadrados ayuda en el análisis del error. La precisión de una red de control se puede expresar en términos de las desviaciones estándar σ_x y σ_y de las coordenadas X y Y para cada punto de la red. Ya tuvimos un ejemplo simple en el capítulo 1 calculando σ_x y σ_y del punto C (Fig. 4.1) cuya posición (coord

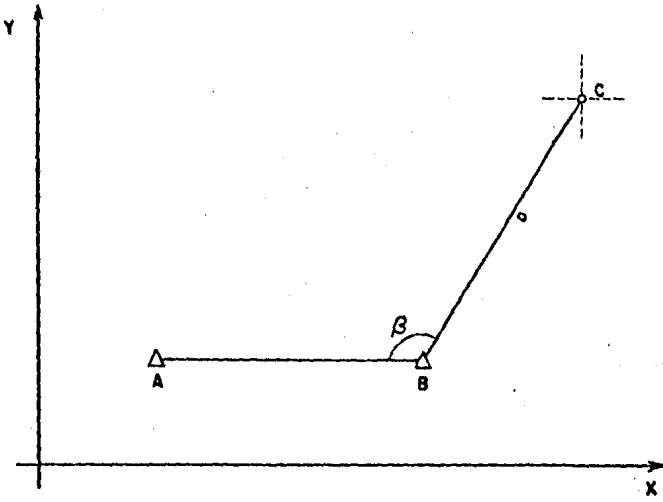


Fig. 4.1

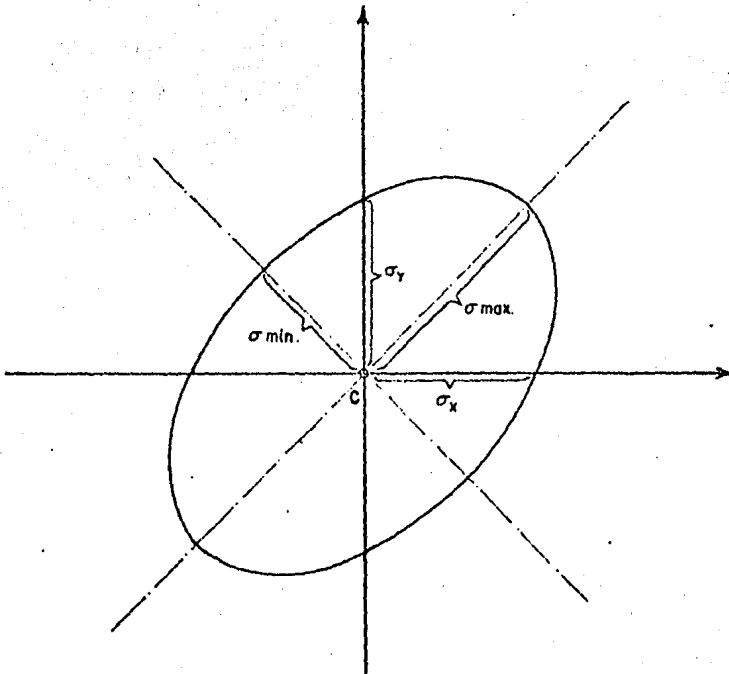


Fig. 4.2

denadas) se calculó en base a un ángulo medido θ y una distancia D desde dos puntos de coordenadas conocidas. Uno puede darse cuenta, de éste ejemplo simple, que los valores de σ_x y σ_y no dan información completa en la precisión posicional del punto C . Conocemos su precisión solamente a lo largo de los ejes del sistema de coordenadas. No conocemos, sin embargo, que error posicional podríamos esperar en cualquier otra dirección. Esto se podría resolver girando por pasos el sistema de coordenadas y realizando cada vez nuevos cálculos de propagación del error. Obtendríamos entonces como resultado, una curva de error, la cual se llama curva pedal, de una forma general la cual se muestra en la figura (4.2). Uno puede ver, que hay una dirección en la cual el error posicional alcanzaría su máximo valor ($\sigma_{\max.}$) con un valor mínimo ($\sigma_{\min.}$) a lo largo de la dirección perpendicular a este.

El conocimiento del valor y la dirección de $\sigma_{\max.}$ y $\sigma_{\min.}$ dan mucho más información acerca de la precisión posicional de un punto en una red que sólo el conocimiento de σ_x y σ_y . Hay una forma mucho más simple de calcular $\sigma_{\max.}$ y $\sigma_{\min.}$ que repetir un número de veces los cálculos de la propagación del error. Requiere, sin embargo, un conocimiento de la llamada covariancia para las coordenadas X y Y , por el momento, pospondremos para más adelante un trato más amplio de la materia.

Hay una relación importante entre las variancias (desvia-

ciones estándar al cuadrado) de las coordenadas calculadas para cualquier orientación del sistema de coordenadas:

$$\sigma_y^2 + \sigma_x^2 = \sigma_{\text{máx.}}^2 + \sigma_{\text{mín.}}^2 = \text{constante} \quad 4.1$$

El valor de $(\sigma_y^2 + \sigma_x^2)$ es usado con mucha frecuencia como una medida de la precisión posicional para el cálculo de una desviación estándar de la posición:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2} \quad 4.2$$

El valor de σ_p da alguna indicación sobre un máximo de la desviación estándar esperada de la posición de un punto el cual es útil, por ejemplo, en los cálculos aproximados de errores de cierre (desviación de cierre) esperados en poligonales. Se debe notar de las ecuaciones (4.1) y (4.2) que el valor de σ_p será siempre más grande que $\sigma_{\text{máx.}}$, pero no perjudica tener un factor de seguridad un poco más grande en el diseño de la precisión de mediciones en levantamientos de control.

El cálculo de σ_p no nos da la información acerca de la dirección de los errores de posición máximos de la dirección esperada, pero a pesar de éso da una información mucho mejor acerca de la precisión general de la red, que únicamente los valores de σ_x y σ_y ,

Usualmente en el preanálisis de la precisión se toma el valor de 3σ como un límite de tolerancia para precisiones de posición.

Esta discusión sobre el análisis del error y diseño de redes de levantamiento empezará con poligonales abiertas como el caso más simple de redes de control.

Ya que una poligonal abierta tiene cero grados de libertad, podemos encontrar σ_p para cualquier punto por la aplicación de la regla de propagación del error simple (ecuación 1.1).

4.1 Propagación del Error en una poligonal.

Llevemos una poligonal del punto O al punto K (fig. 4.3), en la cual se miden $(K - 1)$ distancias y $(K - 1)$ ángulos. Las coordenadas del punto 1 y el azimut de α_{01} de la línea O1 son conocidos.

Con el fin de calcular el error posicional σ_p del punto K, primero se tienen que calcular las desviaciones estándar σ_{XK} y σ_{YK} .

Las coordenadas de K se calculan en la forma conocida:

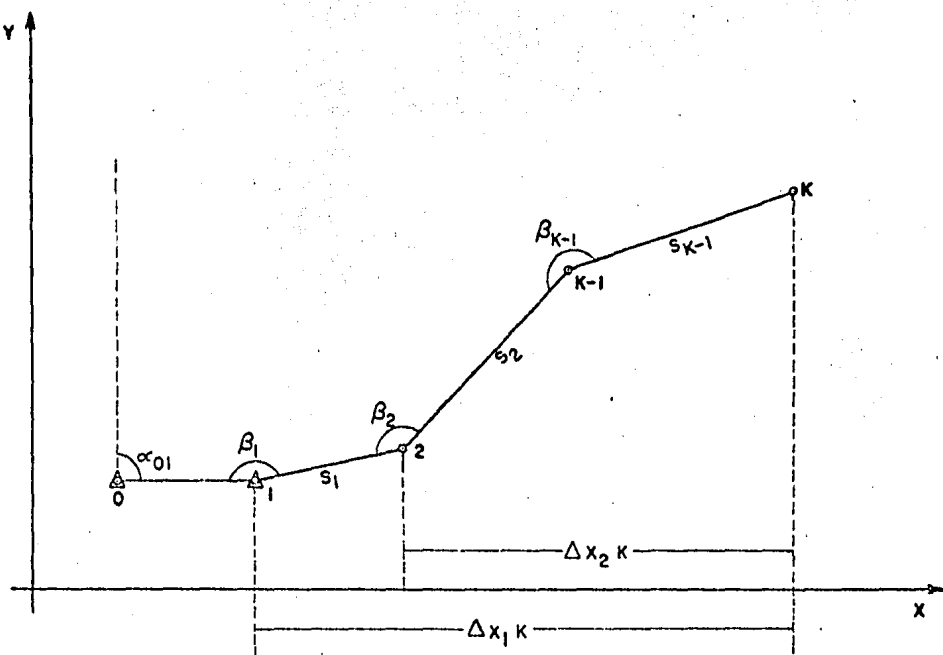


Fig. 4.3

$$X_K = X_1 + S_1 \text{ Sen}(\alpha_{01} + \beta_1 - 180^\circ) + S_2 \text{ Sen}(\alpha_{01} + \beta_1 + \beta_2 - 2(180^\circ)) \\ + \dots + S_{K-1} \text{ Sen}(\alpha_{01} + \beta_1 + \beta_2 \dots + \beta_{K-1} - (K-1) 180^\circ) \quad 4.3$$

$$Y_K = Y_1 + S_1 \cos(\alpha_{01} + \beta_1 - 180^\circ) + S_2 \cos(\alpha_{01} + \beta_1 + \beta_2 - 2(180^\circ)) + \dots + \\ + S_{K-1} \cos(\alpha_{01} + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{K-1} - (K-1) 180^\circ) \quad 4.4$$

Si se conocen los errores de los ángulos y distancias y si también se dan los errores de X_1 , Y_1 y α_{01} ; entonces usando la ecuación (1.1) uno puede calcular σ_{X_k} de:

$$\sigma_{X_k}^2 = \left(\frac{\partial X_k}{\partial X_1} \sigma_{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_k}{\partial \alpha_{01}} \sigma_{\alpha_{01}}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_k}{\partial \beta_1} \sigma_{\beta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_k}{\partial \beta_2} \sigma_{\beta_2}\right)^2 + \dots + \\ \left(\frac{\partial X_k}{\partial \beta_{k-1}} \sigma_{\beta_{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_k}{\partial S_1} \sigma_{S_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_k}{\partial S_2} \sigma_{S_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial X_k}{\partial S_{k-1}} \sigma_{S_{k-1}}\right)^2 \quad 4.5$$

Si las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial X_k}{\partial X_1} = 1$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial \alpha_{01}} = S_1 \cos \alpha_{12} + S_2 \cos \alpha_{2, k-1} + S_{k-1} \cos \alpha_{k-1, k}$$

$$= \sum_1^{k-1} \Delta Y_i = Y_k - Y_1$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial \beta_1} = S_1 \cos \alpha_{12} + S_2 \cos \alpha_{2, k-1} + S_{k-1} \cos \alpha_{k-1, k} = Y_k - Y_1$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial \beta_2} = S_2 \cos \alpha_{2, k-1} + S_{k-1} \cos \alpha_{k-1, k} = Y_k - Y_2$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial \beta_{k-1}} = S_{k-1} \cos \alpha_{k-1, k} = Y_2 - Y_{k-1}$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial S_1} = \text{Sen } \alpha_{1, 2} = \frac{(X_2 - X_1)}{S_1}$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial S_2} = \text{Sen } \alpha_{2, k-1} = \frac{(X_{k-1} - X_2)}{S_2}$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial S_{k-1}} = \text{Sen } \alpha_{k-1, k} = \frac{(X_k - X_{k-1})}{S_{k-1}}$$

Situado en la ecuación (4.5) los valores de las derivadas parciales calculadas para los valores aproximados de las variables, obtenemos:

$$\sigma_{X_k}^2 = \sigma_{X_1}^2 + (Y_k - Y_1)^2 \sigma_{\alpha_{01}}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_i)^2 \sigma_{\beta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{S_i} \right)^2 \sigma_{S_i}^2 \quad 4.6$$

Análogamente uno puede obtener para σ_{Y_k} :

$$\sigma_{Y_k}^2 = \sigma_{Y_1}^2 + (X_k - X_1)^2 \sigma_{\alpha_{01}}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (X_k - X_i)^2 \sigma_{\beta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{S_i} \right)^2 \sigma_{S_i}^2 \quad 4.7$$

Si las ecuaciones (4.6) y (4.7) se sitúan dentro de la ecuación (4.2) entonces:

$$\sigma_{P_k}^2 = \sigma_{P_1}^2 + R_{\alpha, k}^2 \sigma_{\alpha_0}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} R_{i, k}^2 \sigma_{\beta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_{S_i}^2 \quad 4.8$$

$$\text{donde: } R_{i, j}^2 = (X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 \quad 4.9$$

Los valores de R también se pueden obtener gráficamente de un plano a escala grande de la poligonal como se muestra en la figura (4.4). Se debe recordar que los valores de σ_{β} y σ_{α} en las ecuaciones (4.6), (4.7) y (4.8) se deben tomar en radianes ($1p'' = 206265''$), con el fin de obtener los resultados en unidades lineales.

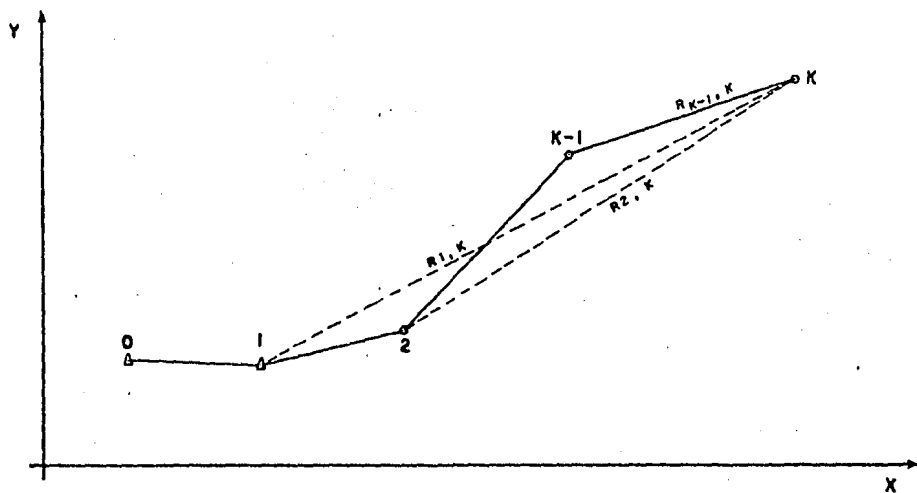


Fig. 4.4

Las ecuaciones derivadas para σ_x , σ_y y σ_p del punto final en una poligonal abierta pueden servir para predecir aproximadamente el error de cierre de una poligonal o para diseñar las medidas de una poligonal para una precisión requerida. A continuación se muestran dos ejemplos.

Ejemplo:

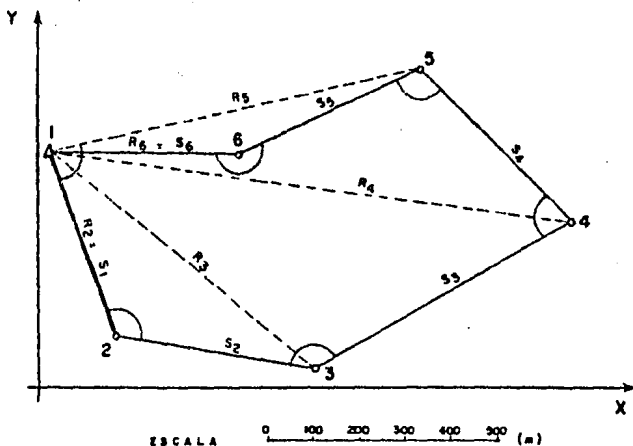
La que se da en una poligonal cerrada figura (4.5) la cual, de acuerdo a algunas especificaciones, no debe exceder un error de cierre de 1:20,000. Un Ingeniero Topógrafo decidió medir todas las distancias con el distanciómetro Wild DI-10, y los ángulos con el teodolito Wild T-2. En base al análisis del error el Ingeniero Topógrafo dedujo que si obedeciera todos los procedimientos de medición apropiados debiera obtener las distancias con una desviación estándar $\sigma_s \leq 10\text{mm}$. y los ángulos con una desviación estándar $\sigma_\beta \leq 3''$ si se midieran en dos series.

Como se supuso que la poligonal sirviera a un propósito local, se estableció un sistema de coordenadas local en el cual las coordenadas del punto 1 y el azimut de la primera línea (de 1 a 2) fueran escogidos arbitrariamente como libres de error. Ya que es una poligonal cerrada, se puede establecer en los cálculos que el punto 1 es también el punto K.

Tomando los valores gráficamente de R_i y S_i de una representación a escala grande fig. (4.5) el Ingeniero Topógrafo --

obtuvo:

Fig. 4.5



$$R_1 = 0\text{m.}$$

$$S_1 = 420\text{m.}$$

$$R_2 = 420\text{m.}$$

$$S_2 = 420\text{m.}$$

$$R_3 = 730\text{m.}$$

$$S_3 = 640\text{m.}$$

$$R_4 = 1120\text{m.}$$

$$S_4 = 460\text{m.}$$

$$R_5 = 800\text{m.}$$

$$S_5 = 420\text{m.}$$

$$\underline{R_6 = 400\text{m.}}$$

$$\underline{S_6 = 400\text{m.}}$$

$$\Sigma S_i^2 = 2763700$$

$$\Sigma S_i = 2760$$

$$y \Sigma R_i^2 \sigma_{\beta_i}^2 = 24873300 / (\rho'')^2 = 0.000585\text{m}^2$$

$$y \Sigma \sigma_{S_i}^2 = 0.00060\text{m}^2$$

colocando los valores anteriores en (4.8) obtuvo:

$$\sigma_{\rho_K} = \sqrt{0.00059 + 0.00060} = 0.034\text{m.}$$

El error de cierre relativo máximo esperado en este caso es entonces:

$$\frac{3\sigma_{p_K}}{\sum S_i} = 1/27600$$

Así el requisito de no exceder el error de cierre del circuito de poligonal 1/20000 se satisfizo.

Ejemplo:

Un túnel que se encuentra entre los puntos K y 3 se va a extender al punto 5 (fig. 4.6), con el fin de mantener la porción existente inalterable, se ha decidido abrir la nueva porción del túnel del punto 5 al punto K.

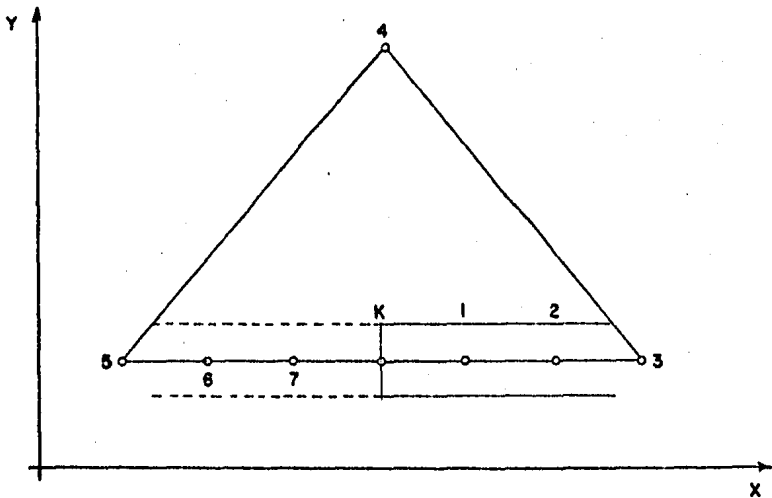


Fig. 4.6

Los puntos 3 y 5 se pueden conectar en la superficie por una poligonal: 3 - 4 - 5. Los nuevos puntos 6 y 7 se planea establecerlos durante el desarrollo de la perforación.

Se pide que el punto K se alcance con un error máximo en las coordenadas Y (perpendicular al eje del túnel) que no exceda de 20mm. usando la poligonal: K-1-2-3-4-5-6-7-K. El punto K, como punto inicial de la poligonal, y el azimut de la línea K-1 son seleccionados como fijos (libres de error) para el proyecto.

Se ha decidido medir todas las distancias con el telurómetro MA-100, estimando la desviación estándar de las medidas como $\sigma_S = 2\text{mm}$.

La pregunta debería ser: ¿Con qué precisión debe uno medir los ángulos en la poligonal para satisfacer el requisito de no exceder 20mm. en el cierre de la poligonal en el punto K?

Los valores aproximados de las coordenadas y de las medidas (tomadas de un mapa del proyecto a escala grande) son:

Distancias: K,1=1,2 = 2,3 = 5,6 = 6,7 = 7-K = 100m.

3,4 = 4,5 = 425mm.

Angulos: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_6 = \beta_7 = 180^\circ$
 $\beta_3 = \beta_5 = 45^\circ$
 $\beta_4 = 90^\circ$

Coordenadas de K: $X_K = 500\text{m.}$
 $Y_K = 100\text{m.}$

Azimut: Az K-1 = 90°

Puesto que el error máximo de cierre en k es 20mm., el error de posición estándar no debe exceder:

$$\sigma_{Y_k} \leq \frac{20}{3} \approx 7\text{mm.}$$

Usando la ecuación (4.7) y suponiendo que todos los ángulos se deben medir con igual precisión, uno puede escribir:

$$\sigma_{\beta}^2 \leq \frac{\sigma_{Y_k}^2 - \sum_{i=k}^{k-1} \left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{S_i} \right)^2 \sigma_{S_i}^2}{\sum_{i=1}^{k-1} (X_k - X_i)^2} (\rho'')^2 \quad 4.10$$

En la ecuación anterior tenemos:

$$\sigma_{Y_k}^2 = 49\text{mm}^2$$

$$\sigma_{S_i}^2 = 4\text{mm}^2$$

$$\rho'' = 206265''$$

Las coordenadas calculadas de la poligonal son:

	X	Y
1	600	100
2	700	100
3	800	100
4	500	400
5	200	100
6	300	100
7	400	100

Colocando todos los datos anteriores en la ecuación (4.10) se obtiene la desviación estándar angular con la cual deben medirse éstos:

$$\sigma_{\beta} \leq 2.6''$$

4.2 VARIANCIAS, COVARIANCIAS Y CORRELACION.

El análisis del error y los ejemplos de la propagación del error en los capítulos anteriores se basaron en la suposición - que las medidas eran independientes o, en otras palabras, no co rrelacionadas. En algunos procedimientos de levantamientos esto es cierto. Por ejemplo las medidas de los ángulos en una poligo-

nal no están correlacionadas con las medidas de distancias porque se usan diferentes instrumentos y no hay fuentes comunes de error las cuales pudieran influir en ambos procedimientos en una forma similar. Las medidas de los ángulos en diferentes estaciones de triangulación también pueden ser tratadas como medidas independientes mientras no incluyan la puntería a cada uno de los otros o puntería a un blanco común porque entonces uno puede esperar una influencia de la refracción lateral o errores de centrado del blanco común que influyan en las mediciones de ambos ángulos de una manera sistemática correlacionada. En resumen, si no hay errores sistemáticos involucrados los cuales puedan influir en una forma similar dos observaciones entonces uno puede suponer que no hay correlación entre las observaciones. Lo mismo se puede suponer de las funciones de las medidas. Por ejemplo, las coordenadas X y Y de las estaciones de una poligonal están, con una excepción, siempre correlacionadas porque los mismos ángulos y distancias son usados en los cálculos de ambos. La única excepción es el caso cuando la poligonal es recta y paralela a uno de los ejes coordenados (fig. 4.7), digamos paralela al eje X, y los puntos de partida de la poligonal (puntos 0 y 1 en la fig. 4.7) están libres de error. En el último de los casos la precisión de las coordenadas Y dependen solamente de la precisión de la medida de los ángulos y la precisión de las coordenadas X, depende solamente de la precisión de las medidas de distancias. Ya que los ángulos -

y las distancias no están correlacionados, tampoco lo están las coordenadas X y Y. Se debe notar, sin embargo, que por ejemplo

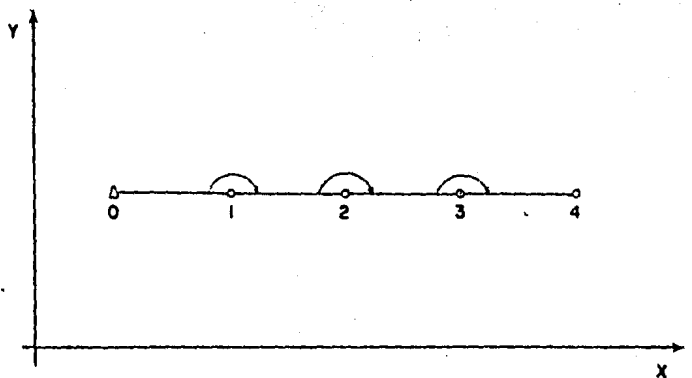


Fig. 4.7

las coordenadas Y_3 y Y_4 están correlacionadas en este caso porque sus precisiones dependen del error de sus ángulos en las estaciones 1 y 2, las cuales se usan en los cálculos de ambas; Y_3 y Y_4 .

Como se demostrará más adelante, una omisión de la correlación entre las observaciones puede llevar a resultados completamente equivocados en el análisis del error y en el diseño de redes de levantamientos.

El término covariancia con la notación σ_{xy} se usa como una medida numérica de la correlación entre dos observaciones X y Y,

o entre dos funciones de mediciones.

Con el fin de comprender cual es el significado práctico de las covariancias uno tiene que ir un poco más adentro en la teoría de errores y la propagación de éstos.

Hemos visto en la parte 1 que la desviación estándar σ se calcula como la raíz cuadrada de la variancia σ^2 y que sirve como una medida de precisión de mediciones o de sus funciones -- afectadas por errores accidentales. También hemos aprendido que si se conoce la desviación estándar de una medida entonces hay una probabilidad de 68% que el valor de la medida no difiera -- más de $+\sigma$ ó $-\sigma$ del valor verdadero de la cantidad medida.

Ahora, veremos un poco más acerca de la variancia y de la desviación estándar.

Supongamos que una cantidad X se mide n veces y que solamente los errores accidentales están influyendo en las medidas X_1, X_2, \dots, X_n . Los valores de los errores individuales son:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= X_1 - X_0 \\ \epsilon_2 &= X_2 - X_0 \\ &\vdots \\ \epsilon_n &= X_n - X_0 \end{aligned}$$

donde X_0 es un valor verdadero de la cantidad medida.

Los errores accidentales ϵ_i de medidas repetidas generalmente tienen la propiedad de que estos pueden ocurrir con una probabilidad igual, ya sea, con signo positivo, (+) o con signo negativo (-). Por lo tanto, la suma de todos los errores para un número suficientemente grande (teóricamente cerca de infinito) de las medidas será igual a cero. Se puede usar el símbolo Σ o paréntesis cuadrado { } como un símbolo de la suma. En resumen podemos escribir la propiedad anterior como:

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i = \{\epsilon_i\}_1^n \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty \quad 4.11$$

La variancia σ^2 de las medidas se define como un promedio de los cuadrados de los errores:

$$\sigma^2 = \frac{\{\epsilon_i \epsilon_i\}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{n} \text{ para } n \rightarrow \infty \quad 4.12$$

La desviación estándar es igual por lo tanto a:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\{\epsilon_i \epsilon_i\}}{n}} \text{ para } n \rightarrow \infty \quad 4.13$$

Usualmente el valor verdadero de la cantidad medida no es conocido en la práctica y el número de mediciones está limitado a un número finito. En este caso uno todavía está en la posibi-

lidad de estimar el valor de la variancia sobre una base de mediciones repetidas pero, por supuesto, una incertidumbre está entonces vinculada al valor obtenido. Esto se discutirá más adelante. Por ahora vamos a discutir el problema de las covariancias.

Si tenemos dos series de mediciones de dos cantidades X y Y entonces podemos calcular dos series de los errores:

Primera Serie

$$\epsilon_{X_1} = X_1 - X_0$$

$$\epsilon_{X_2} = X_2 - X_0$$

⋮

⋮

$$\epsilon_{X_n} = X_n - X_0$$

Segunda Serie:

$$\epsilon_{Y_1} = Y_1 - Y_0$$

$$\epsilon_{Y_2} = Y_2 - Y_0$$

⋮

$$\epsilon_{Y_n} = Y_n - Y_0$$

La covariancia σ_{xy} de X y Y se calcula como un promedio de la suma de productos de los pares de errores seleccionados al azar de la primera y segunda series:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum (\epsilon_{X_i} \epsilon_{Y_i})}{n} = \frac{\{\epsilon_{X_i}, \epsilon_{Y_i}\}}{n} \quad \text{para } n \rightarrow \infty \quad 4.14$$

Si no hay correlación entre X y Y entonces debido a la probabilidad igual de los signos más (+) y menos (-) de los errores en ambas series, el valor de σ_{xy} tenderá a cero para un nú-

mero n suficientemente grande (aproximado a infinito).

Con el fin de evaluar que tan fuerte es la correlación entre dos observables se puede examinar un coeficiente de correlación ρ_{xy} . El coeficiente se calcula como la razón:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad 4.15$$

Como el valor absoluto (haciendo caso omiso del signo) de la covariancia no puede ser más grande que el producto de ambas desviaciones stándars, en consecuencia, el máximo valor posible del coeficiente absoluto de correlación no puede ser más grande que la unidad. Si $\rho_{xy} = 1$ entonces las observables X y Y son funciones lineales exactas de cada una. Si $\rho_{xy} = 0$ entonces X y Y no están correlacionadas.

Las fórmulas para una propagación de variancias y covariancias se pueden derivar fácilmente si suponemos que:

- 1).- Las desviaciones stándars de las observaciones son tan pequeñas que las variancias se pueden aproximar por cambios de diferenciales al cuadrado de las observables, esto significa:

$$\sigma^2 = dx dx = (dx)^2 \quad 4.16$$

2).- Las covariancias se pueden aproximar por cambios de los productos de las diferenciales de las observables correspondientes.

$$\sigma_{xy} = dx dy = dy dx \quad 4.17$$

Tomemos por ejemplo, una función $Y(a, b, c)$ de observaciones a, b y c . La diferencial de la función Y es:

$$dy = \frac{\partial Y}{\partial a} da + \frac{\partial Y}{\partial b} db + \frac{\partial Y}{\partial c} dc \quad 4.18$$

De lo anterior obtendríamos:

$$\begin{aligned} (dy)^2 &= \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^2 da da + \left(\frac{\partial Y}{\partial b}\right)^2 db db + \left(\frac{\partial Y}{\partial c}\right)^2 dc dc + \\ &+ 2 \frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial b} da db + 2 \frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial c} da dc + \\ &+ 2 \frac{\partial Y}{\partial b} \frac{\partial Y}{\partial c} db dc \end{aligned} \quad 4.19$$

Situando las ecuaciones (4.16) y (4.17) en (4.19) tenemos una fórmula básica para la propagación de variancias y covariancias en una función de observables:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 + 2 \frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial b} \sigma_{ab} + \\ &+ 2 \frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial c} \sigma_{ac} + 2 \frac{\partial Y}{\partial b} \frac{\partial Y}{\partial c} \sigma_{bc} \end{aligned} \quad 4.20$$

La ecuación anterior se puede generalizar para cualquier número de observables.

Si tuvieramos otra función $X(a, b, c)$ de las mismas observables a, b y c , podríamos escribir:

$$dx = \frac{\partial X}{\partial a} da + \frac{\partial X}{\partial b} db + \frac{\partial X}{\partial c} dc \quad 4.21$$

Con el fin de calcular la covariancia σ_{xy} usaríamos la suposición (4.17) esto significa que multiplicaríamos (4.21) por (4.18) y obtendríamos:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = dx dy = & \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial a} \sigma_a^2 + \frac{\partial X}{\partial b} \frac{\partial Y}{\partial b} \sigma_b^2 + \frac{\partial X}{\partial c} \frac{\partial Y}{\partial c} \sigma_c^2 + \\ & + \left(\frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial b} + \frac{\partial X}{\partial b} \frac{\partial Y}{\partial a} \right) \sigma_{ab} + \left(\frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial c} + \frac{\partial X}{\partial c} \frac{\partial Y}{\partial a} \right) \sigma_{ac} + \\ & + \left(\frac{\partial X}{\partial b} \frac{\partial Y}{\partial c} + \frac{\partial X}{\partial c} \frac{\partial Y}{\partial b} \right) \sigma_{bc} \end{aligned} \quad 4.22$$

Si no hay correlación entre las observables a, b y c entonces tenemos: $\sigma_{ab} = \sigma_{bc} = \sigma_{ac} = 0$. y las ecuaciones (4.20) y (4.22) se reducen a un caso especial de la propagación del error con observaciones no correlacionadas:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial b} \right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial c} \right)^2 \sigma_c^2 \quad 4.23$$

y

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial a} \sigma_a^2 + \frac{\partial X}{\partial b} \frac{\partial Y}{\partial b} \sigma_b^2 + \frac{\partial X}{\partial c} \frac{\partial Y}{\partial c} \sigma_c^2 \quad 4.24$$

Se debe notar que la ecuación (4.23) es idéntica con la -- ecuación (1.1) la cual se usó en todos nuestros ejemplos numéri-- cos anteriores del análisis del error de mediciones y sus fun-- ciones. De ahora en adelante usaremos las ecuaciones (4.20), -- (4.22) y las suposiciones (4.16) y (4.17) en los problemas pos-- teriores del preanálisis de la precisión.

Ejemplo.-

Dos distancias (fig. 4.8) se midieron: $S_1 = \overline{AB} = 3000\text{m.}$ y $S_2 = \overline{AC} = 3200\text{m.}$ Se usaron dos diferentes instrumentos electro-- magnéticos para la medida de las distancias. La distancia S_1 se midió con un instrumento el cual se sabía que daba una varian-- cia $\sigma_S^2 = (5\text{mm})^2 + (4 \times 10^{-6}\text{S})^2$ y S_2 se midió con otro que daba -- una variancia $\sigma_S^2 = (10\text{mm})^2 + (4 \times 10^{-6}\text{S})^2$. Ambas distancias se mi-- dieron casi simultáneamente, por ésto se usaron los mismos da--

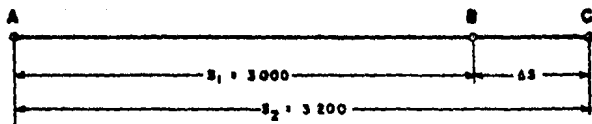


FIGURA 4.8

tos meteorológicos en la reducción para el índice refringente n . La pregunta surge de cuál es la precisión de la distancia $\overline{BC} = 200\text{m.}$, la cual se calculó como una diferencia $\Delta S = S_2 - S_1$? El índice refringente fue igual a $n = 1.000300$ con una desviación --

standard estimada de $4 \times 10^{-6} n$.

Obviamente se corrigieron ambas medidas debido al hecho de que si hubiera un error en la determinación de n entonces ambas distancias serían afectadas prácticamente en la misma forma. Todas las otras fuentes de errores podían ser tratadas como independientes porque los instrumentos fueron diferentes.

Nuestra función para los cálculos del error de ΔS es:

$$\Delta S = S_2 - S_1 \quad 4.25$$

Usando la ecuación general (4.20) para la propagación del error podríamos escribir:

$$\sigma_{\Delta S}^2 = \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial S_2}\right)^2 \sigma_{S_2}^2 + \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial S_1}\right)^2 \sigma_{S_1}^2 + 2 \frac{\partial \Delta S}{\partial S_2} \frac{\partial \Delta S}{\partial S_1} \sigma_{S_1 S_2} \quad 4.26$$

De (4.25) tenemos:

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial S_2} = 1 \quad , \quad \frac{\partial \Delta S}{\partial S_1} = -1$$

De los datos proporcionados tenemos:

$$\sigma_{S_1}^2 = 25 + (4 \times 10^{-6} S_1)^2 = 169 \text{mm}^2 \text{ para } S_1 = 3000 \text{m. } y$$

$$\sigma_{S_2}^2 = 100 + (4 \times 10^{-6} S_2)^2 = 264 \text{mm}^2 \text{ para } S_2 = 3200 \text{m.}$$

Se puede escribir de (4.26):

$$\sigma_{\Delta S}^2 = 169 + 264 + (-2) \sigma_{S_1 S_2} \quad 4.27$$

Con el fin de calcular $\sigma_{S_1 S_2}$ tenemos que encontrar las diferenciales de S_1 y S_2 como funciones de índice refringente n - porque es el único factor de correlación. Podríamos tener:

$$\sigma_{S_1 S_2} = dS_1 dS_2 \quad 4.28$$

De la discusión sobre los métodos de medición electromagnética de distancias sabemos que la reducción de las distancias medidas debido a n se obtiene de: $S = \frac{S_m}{n}$

donde S_m es la medida de distancia sin corregir y que entonces:

$$dS = -\frac{S_m}{n^2} dn = -\frac{S}{n} dn \quad 4.29$$

Por lo tanto tenemos, para las dos distancias en el ejemplo:

$$dS_1 = -\frac{S_1}{n} dn = -\frac{3 \times 10^6}{1.000300} dn \quad 4.30$$

y

$$dS_2 = -\frac{S_2}{n} dn = -\frac{3.2 \times 10^6}{1.000300} dn$$

Colocando las ecuaciones (4.30) en la (4.28) tenemos:

$$\sigma_{S_1 S_2} = \frac{9.6 \times 10^{12}}{(1.000300)^2} \text{ dndn} = \frac{9.6 \times 10^{12}}{(1.000300)^2} \sigma_n^2$$

Ya que $\sigma_n = 4 \times 10^{-6} n$ (como se estableció en los datos proporcionados), finalmente podemos escribir:

$$\sigma_{S_1 S_2} = 154 \text{ (mm}^2\text{)}$$

y

$$\sigma_{\Delta S}^2 = 169 + 264 - 2.154 = 125 \text{ mm}^2$$

Podemos decir, por lo tanto, que la distancia de 200m. de B a C se ha determinado con una desviación estándar de $\sigma = \sqrt{125} = 11\text{mm}$.

Si en el ejemplo anterior, la corrección entre S_1 y S_2 no fue tomada en consideración entonces la desviación estándar esperada sería igual a:

$$\sigma_{\Delta S} = \sqrt{169 + 264} = 21\text{mm.}$$

en lugar de la real 11mm.

4.3 ERRORES DE AZIMUT, ANGULO Y DISTANCIA.

Los cálculos de las orientaciones (azimut) ángulos y distancias como funciones de las coordenadas de puntos de control de levantamientos pertenecen a una rutina diaria de trabajo de los

ingenieros topógrafos prácticos. Ya que las coordenadas de los puntos de levantamiento se determinan por seres humanos y por sus instrumentos, quienes nunca son perfectos, las coordenadas tienen ciertos errores. Por lo tanto los ingenieros topógrafos siempre deben estar enterados que los azimuts, ángulos y distancias, si son calculados a partir de las coordenadas, también tienen errores. Estos errores siempre deben estar determinados a menos que el profesional no esté interesado en la precisión de su trabajo. En éste último caso la información proporcionada -- por éste es prácticamente inservible porque, como ya se enfatizó y debe ser subrayado una y otra vez, cualquier medida y resultados de cálculos en los proyectos de levantamientos quedan sin -- sentido si no están acompañados por una buena estimación de sus precisiones.

Sabemos que el azimut entre puntos coordenados i y j se calcula usando la fórmula:

$$\alpha_{ij} = \text{arc. tan } \frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i} = \text{arc. tan } \frac{\Delta X}{\Delta Y} \quad 4.31$$

y la distancia de i a j se calcula de:

$$S_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad 4.32$$

Un ángulo β en el punto C (Fig. 4.9) se calcula como una diferencia entre los azimuts al punto R y al punto L y tenemos:

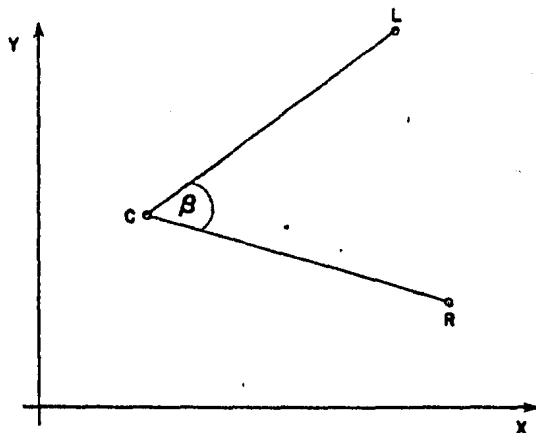


Fig. 4.9

$$\beta = \arctan \frac{X_R - X_C}{Y_R - Y_C} - \arctan \frac{X_L - X_C}{Y_L - Y_C} \quad 4.33$$

Como se puede ver de la ecuación (4.31), el azimut está en función de cuatro coordenadas y sus variancias se pueden calcular de una manera simple usando los postulados generales (4.16) y (4.18):

$$\sigma_\alpha^2 = (d\alpha)^2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial X_j} dX_j + \frac{\partial \alpha}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial \alpha}{\partial Y_j} dY_j + \frac{\partial \alpha}{\partial Y_i} dY_i \right)^2 \quad 4.34$$

Las derivadas parciales de la función (4.31) son:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial X_j} = \frac{Y_j - Y_i}{S^2} = \frac{\Delta Y}{S^2}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial X_i} = -\frac{Y_j - Y_i}{S^2} = -\frac{\Delta Y}{S^2}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial Y_j} = -\frac{X_j - X_i}{S^2} = -\frac{\Delta X}{S^2}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial Y_i} = \frac{X_j - X_i}{S^2} = \frac{\Delta X}{S^2}$$

Las cuales dan:

$$d\alpha = \frac{\Delta Y}{S^2} dX_j - \frac{\Delta Y}{S^2} dX_i - \frac{\Delta X}{S^2} dy_j + \frac{\Delta X}{S^2} dy_i \quad 4.35$$

Substituyendo (4.35) en (4.34) y aplicando la regla (4.17) obtendremos la variancia del azimut calculado de los puntos i y j :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^2 = & \frac{\Delta X^2}{S^2} (\sigma_{y_i}^2 + \sigma_{y_j}^2 - 2\sigma_{y_i y_j}) + \frac{\Delta Y^2}{S^2} (\sigma_{x_i}^2 + \sigma_{x_j}^2 - 2\sigma_{x_i x_j}) + \\ & + 2 \frac{\Delta X \Delta Y}{S^4} (\sigma_{x_i x_j} - \sigma_{y_i x_i} - \sigma_{y_j x_j} + \sigma_{x_i y_j}) \end{aligned} \quad 4.36$$

donde S es la distancia entre los puntos i y j . Análogamente, la variancia de una distancia S_{ij} se calcula diferenciando -

la función (4.32):

$$dS = \frac{\Delta X}{S} dx_j - \frac{\Delta X}{S} dx_i + \frac{\Delta Y}{S} dy_j - \frac{\Delta Y}{S} dy_i \quad 4.37$$

Y entonces:

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 = (dS)^2 &= \frac{\Delta X^2}{S^2} (\sigma_{X_j}^2 + \sigma_{X_i}^2 - 2\sigma_{X_j X_i}) + \\ &+ \frac{\Delta Y^2}{S^2} (\sigma_{Y_j}^2 + \sigma_{Y_i}^2 - 2\sigma_{Y_j Y_i}) + \\ &+ 2 \frac{\Delta X \Delta Y}{S^2} (\sigma_{X_j Y_j} + \sigma_{X_i Y_i} - \sigma_{X_j Y_i} - \sigma_{X_i Y_j}) \end{aligned} \quad 4.38$$

La fórmula para un cálculo de la variancia del ángulo β viene a ser un poco más larga porque tenemos de la función (4.33):

$$\begin{aligned} d\beta &= \frac{X_L - X_C}{S_L^2} dy_L - \frac{Y_L - Y_C}{S_L^2} dx_L - \frac{X_R - X_C}{S_R^2} dy_R - \frac{Y_R - Y_C}{S_R^2} dx_R + \\ &+ \left(\frac{Y_L - Y_C}{S_L^2} - \frac{Y_R - Y_C}{S_R^2} \right) dx_C - \left(\frac{X_L - X_C}{S_L^2} - \frac{X_R - X_C}{S_R^2} \right) dy_C \end{aligned} \quad 4.39$$

Ya que $\sigma_\beta^2 = (d\beta)^2$, ya se pueden imaginar la longitud de la fórmula para $(d\beta)^2$.

Podemos ver de las derivaciones anteriores que el profesional que está interesado en la determinación de la precisión

de los azimuts calculados, distancias y ángulos tiene que tener la información completa sobre la precisión de los puntos coordenados. La información está completa si se incluyen las desviaciones standars de todas las coordenadas involucradas en los -- cálculos y todas las covariancias las cuales expresan las corre laciones entre las coordenadas en todas sus combinaciones.

4.4 VARIANCIAS Y COVARIANCIAS DE LAS COORDENADAS DE UNA POLI- GONAL.

Regresemos al inciso (4.1) en el cual las fórmulas (4.6) y (4.7) se derivaron por el cálculo de las variancias de las -- coordenadas del punto K (fig. 4.3) en una poligonal abierta. En esas fórmulas la influencia del error en la orientación del azi mut α_0 se calculó en la suposición de que el azimut no estaba correlacionado con las coordenadas de los puntos de partida; 0 y 1. Podría ser verdad en el caso de determinar el azimut α_0 - de una medida independiente como por ejemplo, por observaciones astronómicas o usando un giroteodolito. Sin embargo, en la Topografía práctica, la orientación del azimut α_0 generalmente se calcula de las coordenadas dadas de los puntos de partida 0 y 1. Por lo tanto, una fórmula general para calcular la propagación del error en una poligonal tiene que contener las covariancias entre el azimut calculado α_0 y las coordenadas dadas.

Derivemos ahora las fórmulas generales. Diferenciando la función (4.3) y (4.4) las cuales se usan en los cálculos de las coordenadas en una poligonal obtendremos:

$$d_{X_k} = d_{X_1} + (Y_k - Y_1) d\alpha_0 + \sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_1) d\beta_i + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{S_i} \right) dS_i \quad 4.40$$

y

$$d_{Y_k} = d_{Y_1} - (X_k - X_1) d\alpha_0 - \sum_{i=1}^{k-1} (X_k - X_i) d\beta_i + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{S_i} \right) dS_i \quad 4.41$$

Con el fin de calcular las variancias y covariancias de las coordenadas X_k y Y_k tenemos que elevar al cuadrado las ecuaciones anteriores y calcular el producto $d_{X_k} \cdot d_{Y_k}$. Ya que el azimut α_0 , los ángulos individuales β_i y las distancias individuales S_i no están correlacionadas una con la otra, todos los elementos de $(d_{X_k})^2$, $(d_{Y_k})^2$ y $d_{X_k} \cdot d_{Y_k}$ que contienen los productos cruzados de las diferenciales de esas observables son iguales a cero. También las coordenadas X_1 y Y_1 no están correlacionadas con las observables β_i y S_i . Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{X_k}^2 = (d_{X_k})^2 = & \sigma_{X_1}^2 + (Y_k - Y_1)^2 \sigma_{\alpha_0}^2 + 2(Y_k - Y_1) \sigma_{X_1} \sigma_{\alpha_0} + \sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_1)^2 \sigma_{\beta_i}^2 \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{S_i} \right)^2 \sigma_{S_i}^2 \end{aligned} \quad 4.42$$

$$\begin{aligned} \sigma_{Y_k}^2 &= (d_{Y_k})^2 = \sigma_{Y_1}^2 + (X_k - X_1)^2 \sigma_{\alpha_0}^2 - 2(X_k - X_1) \sigma_{Y_1 \alpha_0} + \sum_{i=1}^{k-1} (X_k - X_1)^2 \sigma_{\beta_i}^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{S_i} \right)^2 \sigma_{S_i}^2 \end{aligned} \quad 4.43$$

$$\begin{aligned} \sigma_{X_k Y_k} &= \sigma_{X_1 Y_1} - (X_k - X_1)(Y_k - Y_1) \sigma_{\alpha_0}^2 + (Y_k - Y_1) \sigma_{Y_1 \alpha_0} + (X_k - X_1) \sigma_{X_1 \alpha_0} + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_i)(X_k - X_i) \sigma_{\beta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(X_{i+1} - X_i)(Y_{i+1} - Y_i)}{S_i^2} \sigma_{S_i}^2 \end{aligned} \quad 4.44$$

Si el azimut α_0 fuera observado independientemente tendríamos $\sigma_{X_1 \alpha_0} = 0$ y $\sigma_{Y_1 \alpha_0} = 0$ y entonces, las ecuaciones (4.42) y (4.43) serían idénticas con las fórmulas derivadas previamente (4.6) y (4.7) respectivamente.

Si el azimut α_0 se calcula de las coordenadas de los puntos 0 y 1 entonces el valor de $\sigma_{\alpha_0}^2$, en las ecuaciones anteriores, se debe de calcular de la ecuación (4.36). Las covariancias $\sigma_{X_1 \alpha_0}$ y $\sigma_{Y_1 \alpha_0}$ se calculan igual que los productos $d_{X_1} d_{\alpha_0}$ y $d_{Y_1} d_{\alpha_0}$, de donde d_{α_0} se obtiene de la ecuación (4.35).

Estas covariancias dan:

$$\sigma_{X_1 \alpha_0} = d_{X_1} d_{\alpha_0} = \frac{Y_1 - Y_0}{S_0^2} (\sigma_{X_1}^2 - \sigma_{X_1 X_0}^2) + \frac{X_1 - X_0}{S_0^2} (\sigma_{X_1 Y_0} - \sigma_{X_1 Y_1}) \quad 4.45$$

$$y$$

$$\sigma_{Y_1 \alpha_0} = d_{Y_1} \alpha_0 = \frac{Y_1 - Y_0}{S_0^2} (\sigma_{Y_1 X_1} - \sigma_{Y_1 X_0}) + \frac{X_1 - X_0}{S_0^2} (\sigma_{Y_1 Y_0} - \sigma_{Y_1}^2) \quad 4.46$$

Substituyendo (4.36), (4.45) y (4.46) en (4.42), (4.43) y (4.44) obtendremos las ecuaciones generales para el cálculo del error de posición de un punto K en una poligonal abierta con respecto a un punto original de una red de levantamiento, digamos el origen del sistema de coordenadas. Tenemos que saber en este caso las variancias y covariancias de los puntos 0 y 1 de un análisis de error previo de la red cuyos puntos 0 y 1 pertenecen. En muchos casos sólo estamos interesados en una determinación de una precisión posicional relativa de un punto K con respecto del punto 1, o la precisión de coordenadas de los puntos 0 y 1 es tan alta que la influencia de sus errores en la determinación de la posición del punto K es despreciablemente pequeña. En esos casos las posiciones de los puntos 0 y 1, así como la orientación calculada del azimut α_0 son tratados como fijos (sin error) y entonces las ecuaciones (4.42) a (4.44) se simplifican a la forma:

$$\sigma_{X_K}^2 = \sum_{i=1}^{k-1} (Y_K - Y_i)^2 \sigma_{\beta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(X_{i+1} - X_i)^2}{S_i^2} \sigma_{S_i}^2 \quad 4.47$$

$$\sigma_{Y_K}^2 = \sum_{i=1}^{k-1} (X_K - X_i)^2 \sigma_{\beta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(Y_{i+1} - Y_i)^2}{S_i^2} \sigma_{S_i}^2 \quad 4.48$$

$$\sigma_{X_k Y_k} = \sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_i) (X_k - X_i) \sigma_{\beta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(X_{i+1} - X_i)(Y_{i+1} - Y_i)}{S_i^2} \sigma_{S_i}^2 \quad 4.49$$

En todas las ecuaciones anteriores los valores de σ_{β} y σ_{α_0} se deben de tomar en radianes. Si se dan en segundos se tienen que dividir entre $\rho'' = 206265''$.

Ejemplo:

Una poligonal abierta se ha medido (Fig. 4.10) desde el punto 0 hasta el punto 4 y calculada en un sistema de coordenadas locales aceptando la orientación del azimut α_{01} y las coordenadas del punto 1 como fijas (sin error). Se midieron tres ángulos β_1 , β_2 y β_3 y tres distancias S_1 , S_2 y S_3 en la poligonal. Los ángulos se midieron con una desviación estándar de $\sigma_{\beta} = 5''$ y las distancias con una desviación estándar de $\sigma_S = 10\text{mm}$.

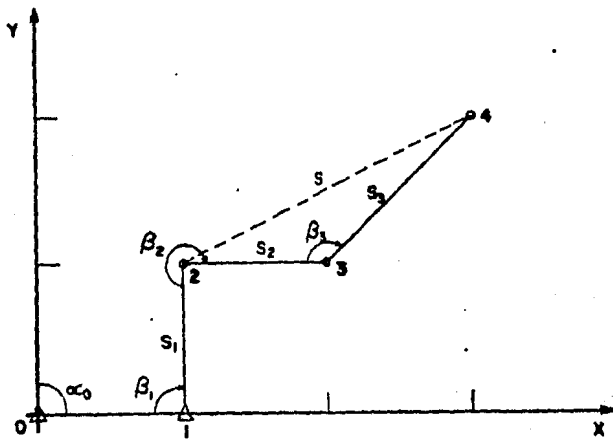


Fig. 4.10

Se obtuvieron las siguientes coordenadas:

	X	Y
Pto. 0	0.00 m.	0.00 m.
Pto. 1	1000.00 m.	0.00 m.
Pto. 2	1000.00 m.	1000.00 m.
Pto. 3	2000.00 m.	1000.00 m.
Pto. 4	3000.00 m.	2000.00 m.

Un requisito del levantamiento es que el azimut α_{24} entre los puntos 2 y 4 se debe calcular de las coordenadas obtenidas. La pregunta es: ¿Cuál será la desviación estándar del azimut -- calculado?

De la fórmula (4.36) podemos escribir:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha_{24}}^2 &= \frac{(X_4 - X_2)^2}{S^4} (\sigma_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_4}^2 - 2\sigma_{Y_2 Y_4}) + \\ &+ \frac{(Y_4 - Y_2)^2}{S^4} (\sigma_{X_2}^2 + \sigma_{X_4}^2 - 2\sigma_{X_2 X_4}) + \\ &+ 2 \frac{(X_4 - X_2)(Y_4 - Y_2)}{S^4} (\sigma_{Y_2 X_4} - \sigma_{Y_2 X_2} - \sigma_{Y_4 X_4} + \sigma_{Y_4 X_2}) \end{aligned} \quad 4.50$$

donde:

$$S = \sqrt{(X_4 - X_2)^2 + (Y_4 - Y_2)^2}$$

Las variancias y covariancias de las coordenadas de los puntos 2 y 4 se pueden calcular de las fórmulas generales de la (4.47) hasta la (4.49). Se usarán sin embargo, las fórmulas básicas de la diferencial (4.40) y (4.41) porque permitirá seguir claramente la forma de pensamiento. Ya que las coordenadas del punto 1 y el azimut α_0 se consideraron libres de error, las derivadas parciales con respecto a X_1 , X_2 y α_0 son iguales a cero.

Por lo tanto, de las ecuaciones (4.40) y (4.41) se tendrá:

$$d_{X_4} = (Y_4 - Y_1) d_{\beta_1} + (Y_4 - Y_2) d_{\beta_2} + (Y_4 - Y_3) d_{\beta_3} + \frac{X_4 - X_3}{S_3} dS_3 + \frac{X_3 - X_2}{S_2} dS_2 + \frac{X_2 - X_1}{S_1} dS_1 \quad 4.51$$

$$d_{Y_4} = -(X_4 - X_1) d_{\beta_1} - (X_4 - X_2) d_{\beta_2} - (X_4 - X_3) d_{\beta_3} + \frac{Y_4 - Y_3}{S_3} dS_3 + \frac{Y_3 - Y_2}{S_2} dS_2 + \frac{Y_2 - Y_1}{S_1} dS_1 \quad 4.52$$

$$d_{X_2} = (Y_2 - Y_1) d_{\beta_1} + \frac{X_2 - X_1}{S_1} dS_1 \quad 4.53$$

$$d_{Y_2} = -(X_2 - X_1) d_{\beta_1} + \frac{Y_2 - Y_1}{S_1} dS_1 \quad 4.54$$

Las distancias S_i se calculan de las coordenadas dadas. Sustituyendo todos los datos numéricos en las ecuaciones (4.51) a (4.54) obtendremos las variancias y covariancias necesarias, suponiendo que los ángulos medidos β_i y las distancias S_i no - estaban correlacionados:

$$\sigma_{Y_2}^2 = d_{Y_2} d_{Y_2} = 100 \text{mm}^2$$

$$\sigma_{Y_4}^2 = d_{Y_4} d_{Y_4} = 287 \text{mm}^2$$

$$\sigma_{Y_2 Y_4} = d_{Y_2} d_{Y_4} = 169 \text{mm}^2$$

$$\sigma_{X_2}^2 = d_{X_2} d_{X_2} = 588 \text{mm}^2$$

$$\sigma_{X_4}^2 = d_{X_4} d_{X_4} = 295 \text{mm}^2$$

$$\sigma_{X_2 X_4} = d_{X_2} d_{X_4} = 411 \text{mm}^2$$

$$\sigma_{Y_2 X_4} = d_{Y_2} d_{X_4} = 172 \text{mm}^2$$

$$\sigma_{Y_4 X_4} = d_{Y_4} d_{X_4} = 291 \text{mm}^2$$

$$\sigma_{Y_2 X_2} = d_{Y_2} d_{X_2} = 242 \text{mm}^2$$

$$\sigma_{Y_4 X_2} = d_{Y_4} d_{X_2} = 411 \text{ mm}^2$$

Sustituyendo todos los datos anteriores en la ecuación --
(4.50) obtendremos:

$$\sigma_{\alpha_{24}}^2 = 1.4280 \times 10^{-5} \text{ rad}^2$$

Y la respuesta final es:

$$\sigma_{\alpha_{24}} = 0.003778887 \text{ radianes}$$

$$\sigma_{\alpha_{24}} = 12'59''45$$

CAPITULO V

CONCLUSIONES

Es evidente señalar como conclusión de este escrito que debido al avance tecnológico en la elaboración de instrumentos (para la medida de ángulos y distancias) y equipo accesorio, del alto costo de mano de obra, que día a día se incrementa en forma desmedida, y también de los requerimientos para satisfacer precisiones preestablecidas en las mediciones, es necesario establecer como norma y como responsabilidad ética del profesional que lleva a cabo todo tipo de proyectos de levantamientos un análisis previo y un diseño muy cuidadoso de todos los elementos que lo integran para que de esta manera se garanticen con un límite aceptable de tolerancia las precisiones de dichos proyectos y -

del uso de procedimientos y técnicas razonables y alcanzables, - tomando en cuenta como una limitante primordial el costo en sí del proyecto.

Este análisis previo de proyectos de levantamientos implica un conocimiento adecuado de los errores en las mediciones y de la manera como se propagan en las redes de levantamientos, pues éstos nos dan las bases para calcular las precisiones, los métodos y los instrumentos que se deban utilizar en los proyectos - de levantamientos.

En términos generales las fuentes de error que influyen en una forma absoluta en los proyectos de levantamientos son la me di da de ángulos y la medida de distancias. En consecuencia, es recomendable tener un conocimiento adecuado de todos los elemen tos que intervienen en la medida de ángulos, así como los que - intervienen en la medida de distancias EDM y así mismo las carac terísticas de los diferentes instrumentos y sus precisiones real mente alcanzables.

Debido a que en el análisis previo de redes de levantamientos es necesario el conocimiento de las coordenadas de los pun- tos como la mejor manera para su procesamiento, es también indis pensable un conocimiento de la precisión posicional de estos pun tos y en consecuencia los errores relativos posicionales entre - los puntos de control. Para tal propósito es forzoso un entendi miento efectivo de varios términos como son: la desviación stán-

dar, la variancia, la covariancia y el coeficiente de correlación.

Ahora bien, hay que tomar en cuenta que los azimuts, los ángulos y distancias calculados a partir de las coordenadas, -- también tienen errores y que por consiguiente estos igualmente se deben determinar. Para concluir y como llamada de atención hay que tener muy presente que cualquier medida y resultados de cálculos en los proyectos de levantamientos son inútiles sino -- están acompañados por una buena estimación de sus precisiones.

A P E N D I C E

REDUCCION DE UNA DISTANCIA MEDIDA ELECTRONICAMENTE A UNA DISTANCIA ESFEROIDAL A CIERTO NIVEL DE REFERENCIA

A1. DEDUCCION DE LA CORRECCION PARA OBTENER DISTANCIA INCLINADA RECTA.

La distancia medida entre dos puntos por medio de radiación electromagnética no es la distancia más corta o la distancia en cuerda entre esos puntos, sino que es una función de la forma de la trayectoria del radio concerniente. Cuando se hacen las mediciones, la trayectoria del radio depende de las condiciones atmosféricas inherentes. Cuando el rayo pasa de una capa atmosférica a otra cambia su dirección.

La curvatura de la trayectoria se puede determinar cal--

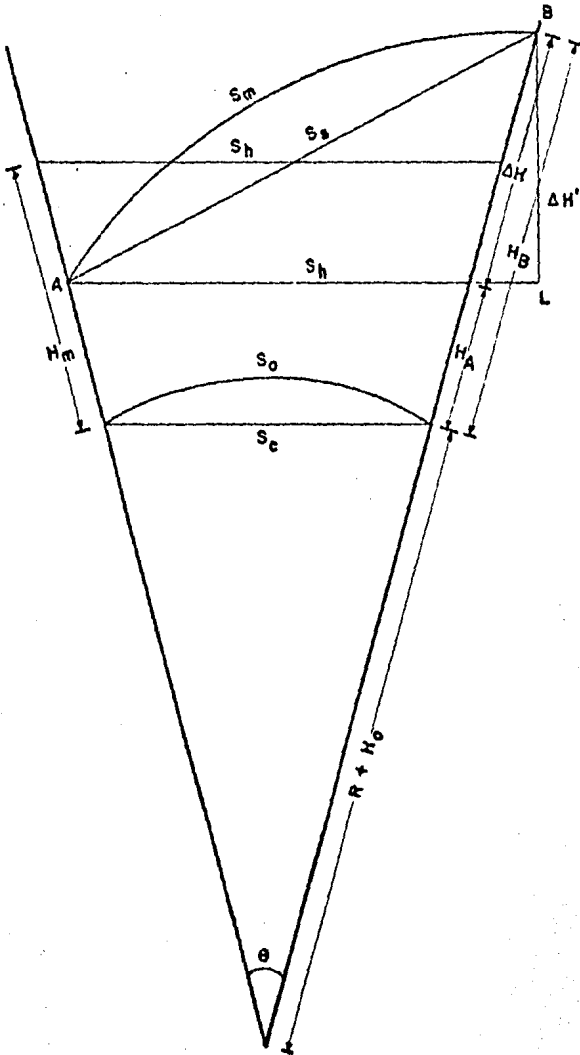


FIG. A1

culando el índice de refracción "n", usando observaciones meteorológicas o por medición directa de los ángulos zenitales en ambos extremos de dicha línea para calcular el coeficiente de refracción K.

El radio R en la corrección arco-a-cuerda, se aplica a -- cualquier caso general, pero en aplicaciones de radiación electromagnéticas los radios de curvatura R' de la trayectoria del rayo primero se deben encontrar y sustituir en la ecuación de corrección arco-a-cuerda. Para ondas medias y largas los radios de curvatura de la trayectoria del rayo se igualan al radio de curvatura de la Tierra, de tal modo que: $R' = R$. Las ondas de terreno de frecuencia baja siguen la superficie de la Tierra. En las regiones de ondas de luz de microondas y de onda corta los radios de curvatura de la trayectoria del rayo se deben determinar separadamente para cada línea medida. Varios métodos se desarrollan para esta determinación, dependiendo de la longitud de la línea, la precisión requerida y la técnica aplicada. En este estudio se hace la consideración de longitudes menores a 100km.

A pesar de que la curvatura de la trayectoria del rayo -- cambia continuamente su magnitud, cuando la radiación se propaga entre dos puntos, la forma de la trayectoria en todas las consideraciones prácticas se supone que es un arco circular, -

teniendo un radio equivalente al promedio de los radios de curvatura de la trayectoria del rayo.

De acuerdo a los conceptos básicos del coeficiente de refracción K , se puede escribir:

$$K = \frac{R}{R'} \quad \text{A-1}$$

Donde R es el radio de curvatura de la Tierra y R' es el radio de curvatura promedio de la trayectoria del rayo.

Para deducir una corrección, para reducir los datos de la longitud del arco medio a lo largo de la trayectoria del rayo a la longitud del arco elipsoidal (esferoidal), la corrección para la curvatura de la trayectoria del rayo se obtiene - primero substituyendo R' de la ecuación (A-1), en la ecuación de corrección arco-a-cuerda siguiente:

$$\Delta D_1 = - \frac{Sm^3}{24R^2} \quad \text{(A-2)}$$

Esto dá la expresión:

$$\Delta D_2 = - \frac{K^2 Sm^3}{24R^2} \quad \text{(A-3)}$$

Saastamoinen (1962) ha deducido una corrección adicional sugerida de las observaciones.

Ya que la curvatura de la Tierra es normalmente mucho más grande que la de la trayectoria del rayo, la última penetra en la atmósfera, la cual tiene un índice refractor promedio mayor que el valor promedio obtenido en los extremos de la línea.

Esto es:

$$\Delta D_1 = - \frac{K(1-K)}{12R^2} \text{ Sm}^3 \quad (\text{A-4})$$

Cuando una línea inclinada medida con un instrumento de alta precisión está sirviendo como un comparador para calibrar otros instrumentos de un orden de precisión más bajo, la última corrección requerida se debe a la curvatura de la trayectoria del rayo y su penetración en la atmósfera más baja. Esta se obtiene combinando (sumando) la corrección de la ecuación (A-3) y la de la (A-4) la cual da la corrección buscada.

$$\begin{aligned} & - \frac{K^2 \text{ Sm}^3}{24R^2} - \frac{K(1-K) \text{ Sm}^3}{12R^2} = \\ & = \frac{-(K^2 \text{ Sm}^3) - (2(K(1-K) \text{ Sm}^3))}{24 R^2} = \\ & \frac{-K^2 \text{ Sm}^3 - 2K\text{Sm}^3 + 2K^2 \text{ Sm}^3}{24R^2} = \\ & \frac{K^2 \text{ Sm}^3 - 2K\text{Sm}^3}{24R^2} = \frac{\text{Sm}^3 (K^2 - 2K)}{24R^2} = \\ \Delta S_1 & = \frac{\text{Sm}^3}{24R^2} (K^2 - 2K) \end{aligned}$$

A2. DEDUCCION DE LA CORRECCION PARA OBTENER DISTANCIA HORIZONTAL A UN NIVEL DE ELEVACION MEDIO.

De esta corrección geométrica y de las siguiente, se puede visualizar de una manera objetiva las relaciones y proporciones en la figura (A1) que para tal propósito se muestra al inicio de este apéndice.

En el triángulo BAL

$$(S_s)^2 = (S_h)^2 + (\Delta H')^2$$

$$(S_h)^2 = (S_s)^2 - (\Delta H')^2$$

$$S_h = ((S_s)^2 - (\Delta H')^2)^{1/2}$$

Multiplicando la ecuación por -1 y sumando S_s a cada miembro:

$$S_s - S_h = S_s - ((S_s)^2 - (\Delta H')^2)^{1/2}$$

Tomando ΔH en vez de $\Delta H'$ no trae mayores consecuencias por ser casi iguales:

$$S_s - S_h = S_s - (S_s^2 (1 - \frac{\Delta H^2}{S_s^2})^{1/2}$$

$$S_s - S_h = S_s - S_s (1 - (\frac{\Delta H}{S_s})^2)^{1/2}$$

Desarrollando $(1 - (\frac{\Delta H}{S_s})^2)^{1/2}$ en serie queda:

$$S_s - S_h = S_s - S_s (1 - \frac{\Delta H^2}{2S_s^2} - \frac{\Delta H^4}{8S_s^4} - \dots)$$

$$S_s - S_h = S_s - S_s + \frac{\Delta H^2}{2S_s} + \frac{\Delta H^4}{8S_s^3}$$

$$S_s - S_h = \frac{\Delta H^2}{2S_s} + \frac{\Delta H^4}{8S_s^3}$$

$$S_h - S_s = -\frac{\Delta H^2}{2S_s} - \frac{\Delta H^4}{8S_s^3}$$

Esta última expresión es la corrección ΔS_2 buscada:

$$\Delta S_2 = -\frac{\Delta H^2}{2S_s} - \frac{\Delta H^4}{8S_s^3}$$

A3. DEDUCCION DE LA CORRECCION PARA REDUCIR UNA DISTANCIA HORIZONTAL A UN NIVEL DE REFERENCIA ESPECIFICADO.

Para nuestra figura el nivel de referencia especificado es el nivel H_o .

De la figura se puede establecer la relación siguiente:

$$\frac{S_h}{S_c} = \frac{R + H_o + H_m}{R + H_o}$$

$$S_c = \frac{S_h(R + H_o)}{R + H_o + H_m}$$

(A-7)

Por otro lado sabemos que:

$$\Delta S_3 = S_c - S_h \quad (\text{A-8})$$

Substituyendo la ecuación (A-7) en la (A-8):

$$\Delta S_3 = -S_h + \frac{S_h (R + H_o)}{R + H_o + H_m}$$

$$\Delta S_3 = \frac{-S_h R - S_h H_o - S_h H_m + S_h R + S_h H_o}{R + H_o + H_m}$$

$$\Delta S_3 = - \frac{S_h H_m}{R + H_o + H_m}$$

De la figura se puede ver que esta corrección debe ser negativa.

A4. DEDUCCION DE LA CORRECCION PARA REDUCIR UNA DISTANCIA EN CUERDA A DISTANCIA EN ARCO (ESFEROIDAL).

De la figura se tiene:

$$S_o = (R + H_o)\theta \quad \text{de donde:} \quad (\text{A-9})$$

$$\theta = \frac{S_o}{(R + H_o)} \quad (\text{A-10})$$

Además, se tiene que:

$$S_c = 2(R + H_o) \text{ Sen } 1/2 \theta \quad (\text{A-11})$$

La diferencia entre el arco y la cuerda es:

$$\Delta S_4 = S_o - S_c \quad (\text{A-12})$$

Desarrollando por serie de Taylor $\text{Sen } 1/2\theta$:

$$\text{Sen } 1/2\theta = \frac{1}{2} \theta - \frac{\theta^3}{8} + \dots \quad (\text{A-13})$$

Substituyendo (A-13) en (A-11):

$$S_c = 2(R + H_o)(1/2\theta - \theta^3/48) \quad (\text{A-14})$$

Ahora substituyendo (A-9) y (A-14) en (A-12):

$$\Delta S_4 = ((R+H_o)\theta) - (2(R+H_o)(1/2\theta - \theta^3/48)) \quad (\text{A-15})$$

$$\Delta S_4 = R\theta + H_o\theta - ((2R + 2H_o)(1/2\theta - \theta^3/48))$$

$$\Delta S_4 = R\theta + H_o\theta - R\theta - H_o\theta + \frac{R\theta^3}{24} + \frac{H_o\theta^3}{24}$$

$$\Delta S_4 = \frac{R\theta^3}{24} + \frac{H_o\theta^3}{24} = \frac{\theta^3(R + H_o)}{24} \quad (\text{A-16})$$

Substituyendo (A-10) en (A-16):

$$\Delta S_4 = \frac{\left(\frac{S_o}{R + H_o}\right)^3 (R+H_o)}{24}$$

$$\Delta S_4 = \frac{S_o^3}{24(R+H_o)^2}$$

Lo cual se quería demostrar.

R E F E R E N C I A S

1. Blachut, Chrzanowski y Saastamoinen,
"Cartografía y Levantamientos Urbanos"
Catálogo de Publicaciones de la Librería del Congreso
México, 1980.
2. Simo H. Laurila
"Electronic Surveying and Navigation"
Wiley - Intersciencia Publication.
Estados Unidos, 1976.
3. C.D. Burnside,
"Electronic Distance Measurement"
Crosby Lockwood Staples,
Inglaterra, 1971.
4. Raymond E. Davis, Francis S. Foote, James M. Anderson y
Edward M. Mikhail,
"Surveying Theory and Practice"
Mc Graw Hill
Estados Unidos, 1981.
5. Paul R. Wolf
"Adjustment Computations"
P.B.L. Publishing, Co.
Estados Unidos, 1980.