UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ingeniería

EJERCICIOS DE ASTRONOMIA ESFERICA

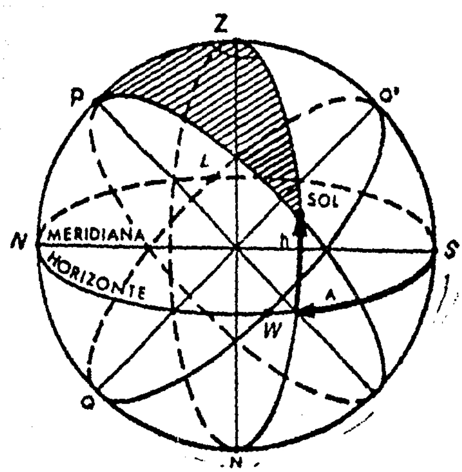
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE;

INGENIERO TOPOGRAFO Y GEODESTA

P R E S E N T A :

MIGUEL ANGEL GALLEGOS BENITEZ



México, D. F. 1984

C O N T E N I D O

Pag.

INTRODUCCION

El estudio de una ciencia, arte o disciplina de-determinada, requiere para su adecuado aprendizaje, el constante ejercicio de sus conceptos teóricos más rele-vantes (y aún los que no lo son tanto), ya que esto es lo que va a ser posible que se logre el dominio deseado en la actividad por aprender.

Por esta razón, el objetivo original y primor-dial del trabajo que se expone; es, que el estudiante de la carrera de Ingeniería Topográfica y Geodésica, adquiera la capacidad necesaria para resolver los problemas teóricos que se le presentan en el curso de Astronomía Esférica; asignatura impartida en esta carrera en la Facultad de Ingeniería. Aunque tambien puede ser de utilidad para todo aquel, que de alguna forma se interese ó se relacione con esta rama de la Astronomía y sus soluciones inmediatas.

Los problemas aquí resueltos, son en resumen: Los ya sugeridos en algunos textos de la materia, es decir los propuestos por los autores de los mismos; y los problemas creados por iniciativa propia.

En lo que a estos últimos se refiere, cabe hacer mención que un buen numero de ellos fueron formulados en forma tal, que se requiera una mayor flexibilidad en la imaginación del estudioso; esto debido a su relativa complejidad en el planteamiento de los conceptos involucrados.

Mucho sería de mi agrado, saber que estas páginas pudiesen ayudar de alguna manera a la formación de Ingenieros Topógrafos y Geodestas. Si esto fuese así, el pequeño esfuerzo realizado para presentar este trabajo, me daría por satisfecho.

Cd. Universitaria, 9-julio-1984.

TEMA I. TRIGONOMETRIA ESFERICA

Resolver los triángulos esféricos rectángulos ABC cuyo lado recto es C.

I.1) $A = 125^\circ 24' 48''$
$b = 32^\circ 16' 30''$

I.2) $b = 158^\circ 22' 24''$
$c = 122^\circ 36' 42''$

I.3) $A = 67^\circ 38' 48''$
$B = 155^\circ 12' 36''$

I.4) $B = 68^\circ 38' 12''$
$c = 152^\circ 24' 24''$

Solución:

I.1) Los elementos que se deben conocer para este caso son:

a, B, c (ver fig. I.a)

Utilizando las reglas de Neper:

$$\text{sen}(\text{co}-B) = \cos(\text{co}-A)\cos b$$
$$\cos B = \text{sen}\, A \cos b$$

Sustituyendo los valores

$$\cos B = \text{sen}(125^\circ 24' 48'')\cos(32^\circ 16' 30'')$$
$$\underline{B = 46^\circ 26' 35''.8}$$

De la fig. obtenemos:

$$\text{sen}\, a = \tan(\text{co}-B)\tan b$$
$$\text{sen}\, a = \cot B \tan b$$
$$\text{sen}\, a = \cot(46^\circ 26' 35''.8)\tan(32^\circ 16' 30'')$$
$$\underline{a = 143^\circ 05' 34''.1}$$

Para obtener c tenemos que:

$$\text{sen}(\text{co}-c) = \cos b \cos a$$
$$\cos c = \cos(32^\circ 16' 30'')\cos(143^\circ 05' 34''.1)$$

Por lo que $\underline{c = 132^{o}32'13''}$

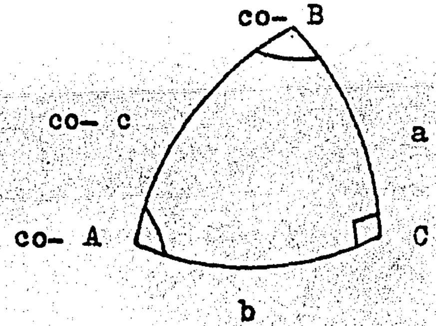


Fig. I.a

I.2) Los elementos a conocer son: A,B,a

Usando las reglas de Neper nuevamente:

$$\text{sen}(\text{co-}A) = \tan(\text{co-}c)\tan b$$
$$\cos A = \cot c \tan b$$
$$\cos A = \cot(122^{o}36'42'')\tan(158^{o}22'24'')$$
$$\underline{A = 75^{o}18'19''.9}$$

Para el segundo elemento tendremos:

$$\text{sen}(\text{co-}B) = \cos(\text{co-}A)\cos b$$
$$\cos B = \text{sen}\,A \cos b$$
$$\cos B = \text{sen}(75^{o}18'19''.9)\cos(158^{o}22'24'')$$
$$\underline{B = 154^{o}03'11''.1}$$

Y para el tercer elemento:

$$\text{sen}\,a = \tan(\text{co-}B)\tan b$$
$$\text{sen}\,a = \cot B \tan b$$

Sustituyendo

$$\text{sen}\,a = \cot(154^{o}03'11''.1)\tan(158^{o}22'24'')$$
$$\underline{a = 54^{o}34'00''.4}$$

I.3) Las incognitas a encontrar son: a,b,c

Apoyandonos en la fig. I.a para encontrar c

$$\text{sen}(\text{co}-c) = \tan(\text{co}-a)\ \tan(\text{co}-B)$$
$$\cos c = \cot A \cot B$$
$$\cos c = \cot(67^{\circ}38'48'')\ \cot(155^{\circ}12'36'')$$
$$\underline{c = 152^{\circ}55'08''.8}$$

Para encontrar a: $\text{sen}\ a = \cos(\text{co}-c)\ \cos(\text{co}-A)$

$\text{sen}\ a = \text{sen}\ c\ \text{sen}\ A$ Sustituyendo

$$\text{sen}\ a = \text{sen}(152^{\circ}55'08''.8)\ \text{sen}(67^{\circ}38'48'')$$
$$\underline{a = 24^{\circ}54'00''.7}$$

Finalmente para conocer b:

$$\text{sen}\ b = \tan(\text{co}-A)\ \tan a$$
$$\text{sen}\ b = \cot A \tan a$$
$$\text{sen}\ b = \cot(67^{\circ}38'48'')\ \tan(24^{\circ}54'00''.7)$$
$$\underline{b = 168^{\circ}59'45''}$$

I.4) Los elementos que hay que buscar son: A,a,b

Encontremos primeramente b mediante:

$$\text{sen}\ b = \cos(\text{co}-c)\ \cos(\text{co}-B) = \text{sen}\ c\ \text{sen}\ B$$
$$\text{sen}\ b = \text{sen}(152^{\circ}24'24'')\ \text{sen}(68^{\circ}38'12'')$$
$$\underline{b = 25^{\circ}33'15''.5}$$

Encontremos ahora a:

$$\text{sen}\ a = \tan(\text{co}-B)\ \tan b$$
$$\text{sen}\ a = \cot B \tan b$$
$$\text{sen}\ a = \cot(68^{\circ}38'12'')\ \tan(25^{\circ}33'15''.5)$$
$$\underline{a = 169^{\circ}13'14''}$$

Ahora para encontrar el valor de A tendremos que:

$$\operatorname{sen}(co-A) = \tan(co-c)\ \tan b$$

$$\cos A = \cot c\ \tan b$$

$$\cos A = \cot(152^{\circ}24'24'')\ \tan(25^{\circ}33'15''.5)$$

$$\underline{A = 156^{\circ}11'07''}$$

I.5) Un barco parte del puerto de Acapulco con un rumbo de 78° al NW, recorriendo una distancia de 1186 Km. Al cabo de este recorrido queda anclado en una isla.

Determine:

a.-) Las coordenadas (φ, λ) donde se encuentra el barco

b.-) El rumbo del barco con el cual llegó a la isla

Solución:

Las coordenadas geográficas del puerto de Acapulco son:

$$\varphi_A = 16^{\circ}50'21''$$

$$\lambda_A = 99^{\circ}55'01''$$

En la fig. I.b se observa que el barco parte de (A) entonces:

$$i = 90^{\circ} - \varphi_A$$

$$i = 73^{\circ}09'39''$$

$$\measuredangle A = 78^{\circ}$$

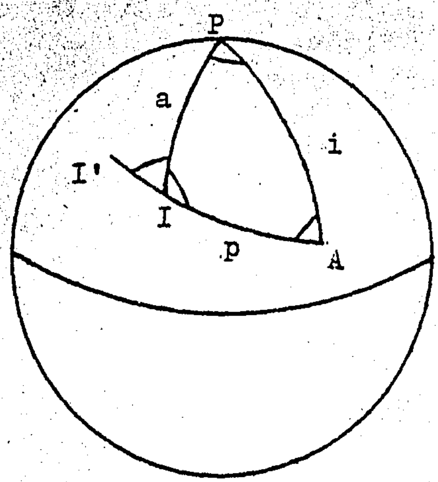


Fig. I.b

Convirtiendo distancias lineales en arco, y tomando el radio medio de la tierra; tendremos:

$$\frac{1186}{111.1988} = 10^{\circ}39'56" = p$$

Conociendo i,p &$\sphericalangle$A estamos en posibilidad de conocer los elementos que faltan del triángulo formado.

de la fig. I.b $\quad \varphi_I = 90^{\circ} - a \quad$ entonces:

$$\cos a = \cos i \cos p + \operatorname{sen} i \operatorname{sen} p \cos \sphericalangle A$$

$$\cos a = \cos(73^{\circ}09'39") \cos(10^{\circ}39'56") + $$
$$+ \operatorname{sen}(73^{\circ}09'39") \operatorname{sen}(10^{\circ}39'56") \cos(78^{\circ})$$

$$a = 71^{\circ}14'44"$$

para encontrar P:

$$\operatorname{sen} P = \frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen}(10^{\circ}39'56") \operatorname{sen}(78^{\circ})}{\operatorname{sen}(71^{\circ}14'44")}$$

$$P = 11^{\circ}01'18".4$$

como P nos dá la diferencia de longitudes de las posiciones del barco en los puntos I,A :

$$\lambda_I = \lambda_A + P$$

finalmente para calcular I:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} I} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} \; ; \quad \operatorname{sen} I = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} a} \operatorname{sen} A \; ; \quad I = 98^{\circ}37'16"$$

concluyendo:

$$\varphi_I = 90^{\circ} - a \quad ; \underline{\varphi_I = 18^{\circ}45'16"}$$

$$\lambda_I = \lambda_A + P \quad ; \underline{\lambda_I = 110^{\circ}56'19".4}$$

el rumbo IA = SE 81°22'44"
y su inverso es NW 81°22'44"

el rumbo de llegada fué

<u>NW 81°22'44" = $\sphericalangle$I'IP</u>

I.6) En Ciudad Universitaria se observó la altura del sol y se determinó su azimut el dia 8/Dic./79.

Los datos de que se disponen son:

$Az = 136^\circ 20' 22''.6$ $\qquad \varphi_U = 19^\circ 19' 50''$

$\delta = -22^\circ 42' 50''$ $\qquad \lambda_U = 99^\circ 11' 03''$

Se desea determinar el azimut del sol que un barco observaría en el oceano Atlántico en el mismo momento. Las coordenadas del barco en altamar son:

$\varphi_B = 31^\circ 10' 10''$ N

$\lambda_B = 40^\circ 02' 16''$ W

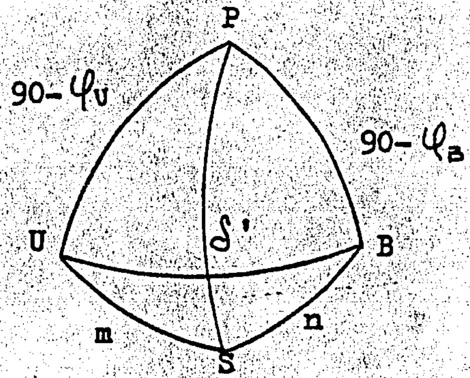


Fig. I.c

Solución

Resolvamos el triángulo UPS de la fig. I.c

$$\text{sen} \measuredangle USP = \frac{\text{sen } U}{\text{sen } \delta'} \cos \varphi_U$$

$$\delta' = 90^\circ + |\delta| = 112^\circ 42' 50''$$

$$\text{sen} \measuredangle USP = \frac{\text{sen}(136^\circ 20' 22''.6)}{\text{sen}(112^\circ 42' 50'')} \cos(19^\circ 19' 50'')$$

$$\measuredangle USP = 44^\circ 55' 45''.6$$

Ahora, tomando una de las analogías de Neper:

$$\cot 1/2(\measuredangle UPS) = \tan 1/2(\measuredangle USP - U)\ \text{sen } 1/2(90-\varphi_U+\delta') \cdot$$
$$\cdot \left(\csc 1/2(90-\varphi_U-\delta') \right)$$

introduciendo los valores angulares:

$\cot 1/2(\sphericalangle UPS) = \tan(-45^{o}42'18''.5)\ \text{sen}(91^{o}41'30'') \cdot$

$\cdot\ (\csc(-21^{o}01'20''))$

$1/2(\sphericalangle UPS) = \cot^{-1}(2.8558403) = 19^{o}17'53''.5$

$\sphericalangle UPS = 38^{o}35'46''.9$

Por otra parte si tomamos el triángulo SPB tenemos que:

$\sphericalangle SPB = (\lambda_{U} - \lambda_{B}) - \sphericalangle UPS \quad ; \quad \sphericalangle SPB = 20^{o}33'00''.1$

mediante ley de cosenos:

$\cos n = \cos\delta' \cos(90-\varphi_{B}) + \text{sen}\,\delta' \,\text{sen}(90-\varphi_{B}) \cos \sphericalangle SPB$

$\cos n = \cos(112^{o}42'50'')\ \text{sen}(31^{o}10'10'')\ +$

$+\text{sen}(112^{o}42'50'') \cos(31^{o}10'10'') \cos(20^{o}33'00''.1)$

$n = 57^{o}22'13''.3$

y ahora con ley de senos:

$\text{sen}\ B = \dfrac{\text{sen}\sphericalangle SPB}{\text{sen}\ n}\ \text{sen}\,\delta' \quad ; \quad$ sustituyendo:

$$\text{sen}\ B = \frac{\text{sen}(20^{o}33'00''.1)}{\text{sen}(57^{o}22'13''.3)}\ \text{sen}(112^{o}42'50'')$$

$B = 157^{o}23'18''.1$

En la fig. I.c se observa que el azimut del sol que se tuvo que haber observado en el barco , es :

$Az = 360 - B$

<u>$Az = 202^{o}36'41''.9$</u>

Dos barcos militares cuyas posiciones geográficas se conocen, se encuentran en altamar. Uno de ellos se mueve en dirección al norte que les indica la brújula; navegando sin mapas isogónicos avanzan 3000 Km. y queda anclado el barco. En el segundo navío saben que la declinación magnética en el punto donde se encontraba el primero antes de que se moviera es de 12^{o} al este, y despues de que se movió los primeros 1800 Km. la declinación cambia a 8^{o} al este tambien, hasta el término del viaje.

El segundo barco recibe la orden de que se encuentre con el primero.

Las posiciones de los barcos son:

$$\varphi_1 = 10^{o}21'10'' \text{ N} \qquad \varphi_2 = 18^{o}29'00'' \text{ N}$$

$$\lambda_1 = 179^{o}02'00'' \text{ W} \qquad \lambda_2 = 130^{o}11'02'' \text{ W}$$

Sea el planteamiento anterior, resuelva los siguientes problemas:

I.7) Calcule las coordenadas (φ, λ) donde los dos barcos se encontrarán.

I.8) Que distancia deberá navegar el segundo barco para encontrarse con el primero?

I.9) En que dirección inicial deberá navegar el segundo?

Solución:

Debido a la complejidad del planteamiento y con el objeto de no hacer cálculos repetitivos, daremos solución a los tres problemas en forma simultánea.

De la fig. I.d tomemos el triángulo PB_1D_1 del cual podemos conocer $\measuredangle B_1, d_1$ y p

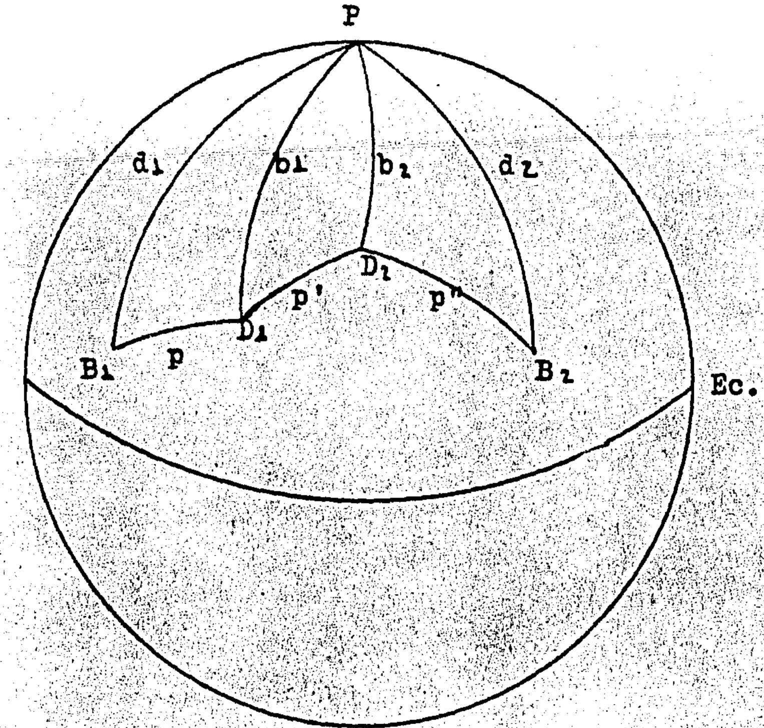


Fig. I.d

$\measuredangle B_1$ es el valor de la declinación magnética que se tenía cuando el primer barco se empezó a mover. $B_1 = 12^\circ$

$d_1 = 90 - \varphi_1 = 79^\circ 38' 50''$

p es la distancia 1800 Km. que avanzó el primer barco con la misma declinación. $p = 16^\circ 11' 14''$

calculemos b_1 y $\measuredangle B_1 P D_1$ mediante:

$$\cos b_1 = \cos d_1 \cos p + \operatorname{sen} d_1 \operatorname{sen} p \cos B_1$$

$$\cos b_1 = \cos(79^\circ 38' 50'') \cos(16^\circ 11' 14'') + $$
$$+ \operatorname{sen}(79^\circ 38' 50'') \operatorname{sen}(16^\circ 11' 14'') \cos(12^\circ)$$

$$b_1 = 63^\circ 50' 35''.4$$

$\operatorname{sen} \measuredangle B_1 P b_1 = \dfrac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} B_1}{\operatorname{sen} b_1}$; sustituyendo:

$$\text{sen}\measuredangle B_1Pb_1 = \frac{\text{sen}(16^\circ 11'14'')\ \text{sen}(12^\circ)}{\text{sen}(\ 63^\circ 50'35''.4)}$$

$$\measuredangle B_1Pb_1 = 3^\circ 42'08''.6$$

ahora tomaremos el triángulo PD_1D_2

b_1 lo acabamos de conocer

D_1 es la declinación que tiene el lugar despues de haber avanzado la distancia p

p' es la distancia avanzada a partir de D_1

por lo que; $D_1 = 8^\circ$; $p' = 10^\circ 47'29''$

aplicando la ecuación sig:

$$\cos b_2 = \cos b_1 \cos d_1 + \text{sen}\ b_1\ \text{sen}\ d_2 \cos D_1$$

$$b_2 = 53^\circ 10'08''$$

empleando otra ecuación:

$$\text{sen}\measuredangle D_1PD_2 = \frac{\text{sen}\ D_1}{\text{sen}\ b_2}\ \text{sen}\ p' \quad ; \quad \text{resolviendola:}$$

$$\measuredangle D_1PD_2 = 1^\circ 51'56''.3$$

si ahora tomamos el triángulo PD_2B_2

$$\measuredangle D_2PB_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) - (\measuredangle B_1PD_1 + \measuredangle D_1PD_2)$$

$$\measuredangle D_2PB_2 = 43^\circ 16'53''.1$$

obtendremos por la ley de los cosenos la relación sig:

$$\cos p'' = \cos b_2 \cos d_2 + \text{sen}\ b_2\ \text{sen}\ d_2\ \cos\measuredangle D_2PB_2$$

pero $d_2 = 90 - \varphi_2 = 71^\circ 31'$; introduciendo los valo-- res y resolviendola:

$$p'' = 42^\circ 02'23''.3$$

finalmente encontraremos B_2 por la ley de los senos, y la relación es la siguiente:

$$\operatorname{sen} B_2 = \frac{\operatorname{sen}(\sphericalangle D_2PB_2)\ \operatorname{sen} b_2}{\operatorname{sen} p''} \quad ; \qquad B_2 = 55^\circ 01' 48''.3$$

analizando los datos que obtuvimos de los tres triángulos:

I.7) La latitud de los barcos encontrados es:

$$\underline{\varphi = 90 - b_2} \quad ; \qquad \underline{\varphi = 36^\circ 49' 52''\ \ N}$$

y la longitud de los mismos:

$$\underline{\lambda = \lambda_2 + \sphericalangle D_2PB_2} \quad ; \qquad \underline{\lambda = 173^\circ 27' 55''.1\ \ W}$$

I.8) La distancia que debe navegar el segundo barco, esta da da por la conversión que se debe dar a p" tomando el ra dio medio de la tierra, y será:

$$\underline{B_2D_2 = 4674.77\ \text{Km}}.$$

I.9) El rumbo inicial del segundo barco es el $\sphericalangle B_2$ $\therefore$

$$\underline{\text{Rumbo en } B_2 = NW\ 55^\circ 01' 48''.3}$$

Resuelva los triángulos cuadrantales siguientes cuyo lado recto es c.

I.10) $a = 60^{\circ}34'54''$ | I.11) $A = 32^{\circ}53'36''$

$B = 122^{\circ}18'48''$ | $B = 115^{\circ}24'54''$

Solución:

I.10) Los datos de este problema son: a,B,c ; las incógnitas serán: A,C,b.

Sean: A',B',C' y a',b',c' los ángulos y lados del triángulo polar del triángulo ABC. (Fig.I.e) :

$A' = 180-a = 119^{\circ}25'06''$

$C' = 180-c = 90^{\circ}$

$b' = 180-B = 57^{\circ}41'12''$

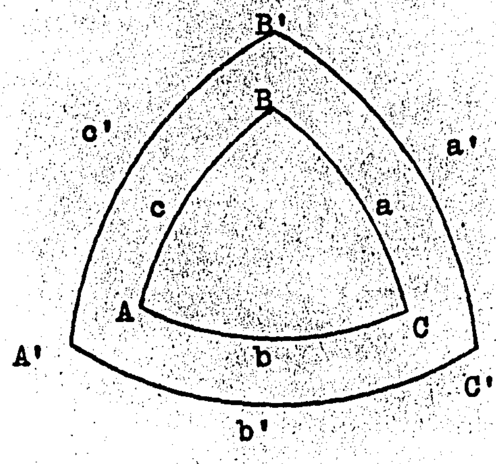


Fig. I.e

Ahora tenemos tres elementos del triángulo polar con los cuales partiremos para conocer los restantes.

De la fig.I.f tenemos:

$$\text{sen } (co-B') = \cos (co-A') \cos b'$$

sustituyendo valores en la ecuación

$$B' = 62^{\circ}14'58''$$

$$\text{sen } (co-c') = \tan (co-A') \tan (co-B') = \cot A' \cot B'$$

de donde $\quad c' = 107^{\circ}15'31''$

$\text{sen } a' = \tan(\text{co}-B') \tan b' = \cot B' \tan b'$

de donde $a' = 123^{\circ}42'43''$

Ahora con el triángulo polar resuelto podemos conocer los elementos del triángulo original de la siguiente forma:

$A = 180-a'$

$C = 180-c'$ sustituyendo los valores del triángulo polar, tenemos:

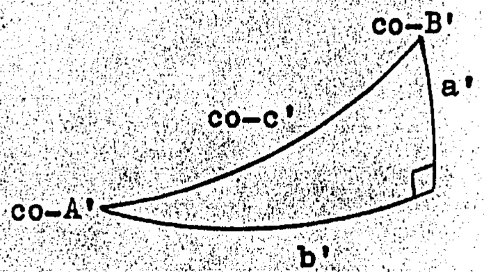
$b = 180-B'$

$\underline{A = 56^{\circ}17'17''}$

$\underline{C = 72^{\circ}44'29''}$

$\underline{b = 117^{\circ}45'02''}$

Fig. I.f



I.11) Los datos del problema son: A,B,c ; las incógnitas serán: a,b,C.

Del triángulo polar obtenemos:

$A = 180-a'$

$B = 180-b'$ despejando la literal del segundo miembro en ambas ecuaciones:

$a' = 180-A$

$b' = 180-B$ ademas $C' = 180-c$

de donde: $a' = 147^{\circ}06'24''$

$b' = 64^{\circ}35'06''$

$C = 90^{\circ}$

Con los valores obtenidos ya tenemos elementos para resolver el triángulo polar.

De la fig. I.f tenemos:

$\text{sen}\ (\text{co}-c') = \cos b' \cos a'$ de donde

$c' = 111^{\circ}07'22''$

$\text{sen}\ (\text{co}-A') = \tan\ (\text{co}-c') \tan b'$

$\cos A' = \cot c' \tan b'$; sustituyendo:

$A' = \cos^{-1}\ (-0.8130485)$

$A' = 144^{\circ}23'42''$

en forma analoga:

$\text{sen}\ (\text{co}-B') = \tan\ (\text{co}-c') \tan a'$

$\cos B' = \cot c' \tan a'$; sustituyendo:

$B' = \cos^{-1}\ (0.2498609)$

$B' = 75^{\circ}31'51''$

Utilizando estos resultados y relacionandolos con el trián gulo ABC :

$a = 180-A'$

$b = 180-B'$

$C = 180-c'$ haciendo las restas nos queda:

$\underline{a = 35^{\circ}36'18''}$

$\underline{b = 104^{\circ}28'09''}$

$\underline{C = 68^{\circ}52'38''}$

I.12) Sea el triángulo esférico definido por los elementos siguientes:

$b = 67^{o}16'$ $\qquad$ $R = 0.6367395$ m.

$A = 84^{o}56'$

$C = 96^{o}19'$ $\qquad$ R : Radio de curvatura del triángulo

Determine el área del triángulo

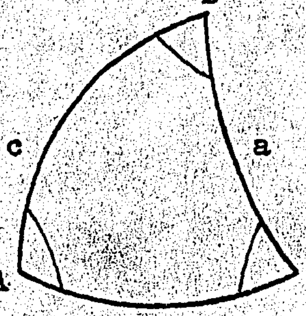


Fig. I.g

Solución:

Lo mas práctico es calcular el ángulo faltante, para poder conocer el exceso esférico del triángulo.

Usando la ley de los cosenos para los ángulos:

$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b$$

resolviendo la ecuación

$$B = \cos^{-1}(0.3923126) \qquad \text{donde} \qquad B = 66^{o}54'05''$$

Ahora calculemos el exceso esférico E_o

$$E_o = (A+B+C)-180$$

$$E_o = 248^{o}09'05'' - 180^{o} \quad ; \quad E_o = 68^{o}09'05''$$

y aplicando finalmente la ecuación que nos da el área:

$$A = \frac{\pi R^2 E_o}{180} \qquad \text{de donde}$$

$\underline{A = 0.4822538 \text{ m}^2}$

17

I.13) Calcule el área del triángulo esférico definido por sus tres lados.

$a = 128^{o}43'$ $R = 6.367395$ m.

$b = 107^{o}14'$

$c = 88^{o}38'$

Solución: sea $s = 1/2(a+b+c)$

Resolvamos este problema mediante la fórmula del exceso esférico en función de los lados. Y tendremos:

$$\tan 1/4\ E_o = \sqrt{\tan 1/2\ s(\tan \frac{s-a}{2})(\tan \frac{s-b}{2})(\tan \frac{s-c}{2})}$$

sustituyendo y haciendo operaciones

$\tan 1/4\ E_o = 656^{o}04'47''.2$ de donde:

$E_o = 164^{o}01'11''.8$

introduciendo este valor en la ecuación

$A = \frac{\pi R^2 E_o}{180}$ obtenemos para el triángulo el área siguiente:

$\underline{A = 116.064\ m^2}$

I.14) En dos lugares de la tierra cuya diferencia de longitu-des es conocida, se conocen tambien los azimutes de la linea que los une.

Se pide determinar la latitud de los dos lugares.

$Az\ \overline{S_1 S_2} = 58^\circ 08' 24''$

$Az\ \overline{S_2 S_1} = 268^\circ 02' 48''$

$\lambda_1 - \lambda_2 = 68^\circ 37' 48''$

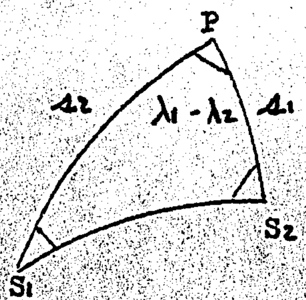


Fig. I.h

Solución:

Tomemos el triángulo $S_1 P S_2$

considerando que: $s = 1/2(S_1 + P + S_2) = 109^\circ 21' 42''$

apliquemos la ecuación sig: $\tan R = \sqrt{\dfrac{\cos(s-S_1)\ \cos(s-P)\ \cos(s-S_2)}{-\cos s}}$

sustituyendo tenemos $\tan R = 1.1687502$

aplicando otra ecuación $\cot 1/2\ \Delta_1 = \dfrac{\tan R}{\cos\ (s-S_1)}$

obtenemos que $\Delta_1 = 56^\circ 22' 18''.7$

en forma análoga obtenemos

$$\Delta_2 = 78^\circ 27' 29''.2$$

y finalmente para conocer las latitudes

$\varphi S_1 = 90 - \Delta_2$; $\varphi S_2 = 90 - \Delta_1$

$\varphi S_1 = \underline{11^\circ 32' 30''.8}$ $\qquad \varphi S_2 = \underline{33^\circ 37' 41''.3}$

I.15) En una observación astronómica se midió con un teodoli-to, la distancia zenital de una estrella; despues de un lapso de tiempo, se midió nuevamente esta. La lati-tud del lugar es $\varphi = 59^{o}59'50"$

y la declinación $\delta = 15^{o}11'18"$

Cuanto tiempo transcurrió entre las dos mediciones de z ?

Solución:

$$z = 58^{o}52'40"$$
$$z' = 58^{o}48'21"$$

Para resolver este problema vamos a dar solución al trian gulo ZPE, determinando el ángulo horario para cada posición de la estrella, es decir para z y z'. (Ver Fig. I.i)

$$\cos z = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos AH \qquad \text{para } z$$

$$\cos z' = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos AH' \qquad \text{para } z'$$

despejando tenemos:

$$\cos AH = \cos z \sec\varphi \sec\delta - \tan\varphi \tan\delta$$
$$\cos AH = 0.6008997$$
$$AH = 53^{o}03'56".3$$

apliquemos ahora la misma ecuación cuando la estrella se encuentra en z'

$$\cos AH' = \cos z' \sec\varphi \sec\delta - \tan\varphi \tan\delta$$
$$\cos AH' = 0.6031263$$
$$AH' = 52^{o}54'21".12$$

El tiempo que transcurrió entre las mediciones de z y z' está dado por:

$$t = \frac{AH - AH'}{15}$$

$$\frac{AH - AH'}{15} = \frac{(53^{o}03'56''.3) - (52^{o}54'21''.12)}{15}$$

finalmente $\underline{t = 38^{s}.34}$

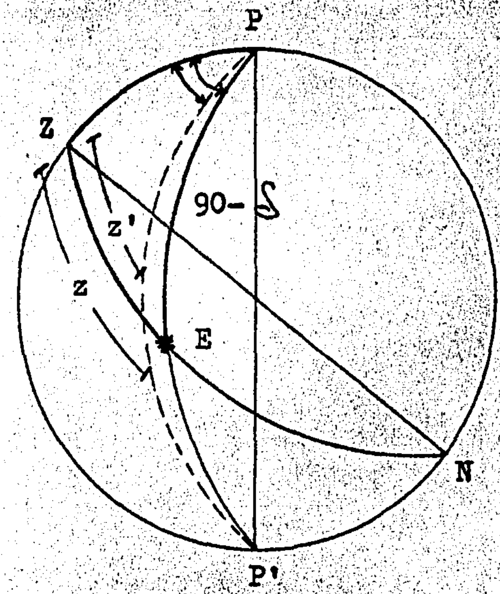


Fig. I.i

II.16) En que punto de la tierra la eclíptica puede coincidir con el horizonte; y cuando ocurre esto ?

Solución:

De la fig.II.j se deduce que la eclíptica coincide con el horizonte para un lugar de latitud $\varphi = (90-\varepsilon) = 66^{o}33'$ y ocurre cuando los puntos (♈ y ♎) se encuentran al este y al oeste respectivamente, del lugar.

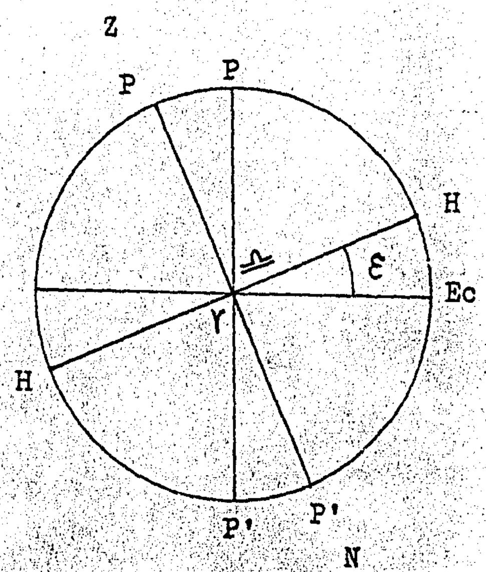


Fig. II.j

II.17) Qué ángulo forma la eclíptica con el horizonte en el momento del orto del punto vernal?

Latitud del lugar $\varphi = 55$ N

Solución:

$\sphericalangle HoI_{\varepsilon} = 90-(PoH+ \sphericalangle I_{\varepsilon}oE)$

pero $\sphericalangle PoH = \varphi$ porque es la altura del polo; y tambien

$\sphericalangle I_{\varepsilon}oE = 23^{o}27'$ entonces

$\sphericalangle HoI_{\varepsilon} = 11^{o}33'$

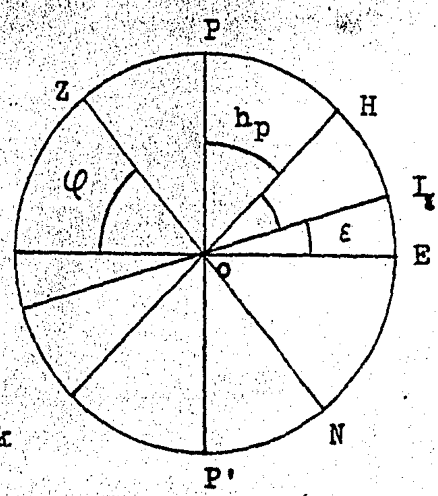


Fig. II.k

II.18) Cuales son las coordenadas horizontales del polo norte celeste en un lugar cuya latitud geográfica es:

$$\varphi = 23^{o}27'$$

Solución:

Como las coordenadas horizontales son (Az,h) entonces observamos en la fig.II.1 lo siguiente:

$\underline{Az\ \overline{ZP} = 0}$

$\underline{h = 23^{o}27'}$

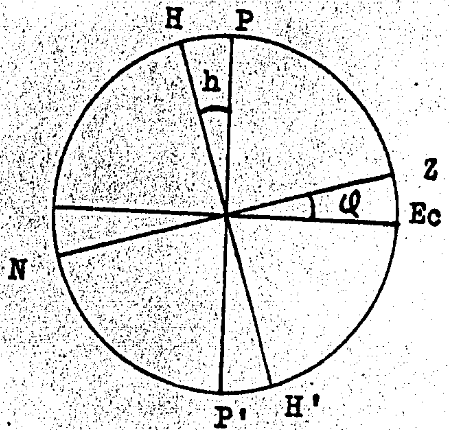


Fig. II.1

II.19) Determinar la distancia zenital del sol, cuando la longitud de la sombra de un objeto es igual a su altura.

Solución:

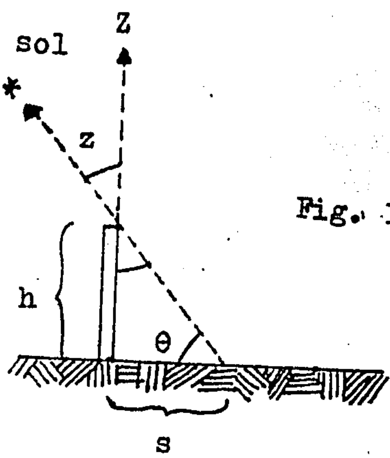


Fig. II.m

En la fig.II.m si h = s

$\tan \theta = 1$; $\theta = 45^{o}$

y $\underline{z = 45^{o}}$ por ser ángulo opuesto al complemento de θ

II.20) Determine cual es la declinación que una estrella debe tener para poder ser vista en un lugar de latitud conocida y para un instante determinado.

Solución:

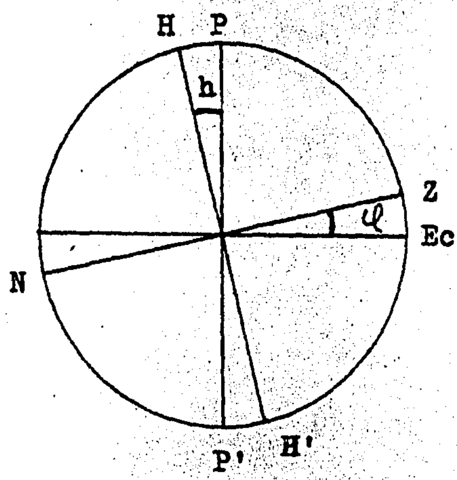


Fig. II.n

Para poder ser observada una estrella estando en un lugar de latitud φ conocida, se requiere que esté por arriba del horizonte; es decir, para este caso que se localice entre el arco HZH' $\therefore$

como $h_p = \varphi_z$ es necesario que una estrella tenga el valor de su declinación $\delta \geq (90-\varphi)$

para el hemisferio boreal.

Y para el hemisferio austral es necesario que tengan una declinación $\delta \geq (90-\varphi)$

III.21) Determine la longitud de la proyección sobre la tie--rra del punto aries (γ) cuando se observa una es--trella cuya declinación es $\delta = 40^{o}20'16"$ en el momento del ocaso.

Las coordenadas del lugar son:

$$\varphi = 44^{o}51'13" \quad N$$

$$AR_{\star} = 13^{h}22^{m}02^{s} \qquad \lambda = 60^{o}12'03" \quad E.G.$$

Solución:

Calculemos el ángulo horario de la estrella

$$\cos AH = \text{sen}(34') \sec\varphi \sec\delta - \tan\varphi \tan\delta$$

$$\cos AH = -0.823583$$

$$AH = 145^{o}44'51"$$

$$AH = 09^{h}42^{m}59^{s}.4$$

Es evidente que la diferencia de longitudes entre el lugar de observación y el punto aries (γ) está dado por AH y AR

De la fig. III. o

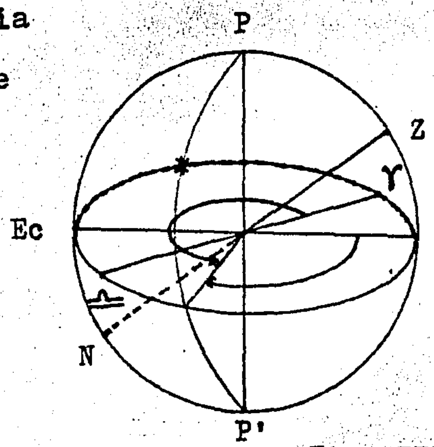


Fig. III.o

$$\lambda_{\gamma} - \lambda_{z} = 360^{o} - (AH + AR)$$

$$\lambda_{\gamma} - \lambda_{z} = 360^{o} - 346^{o}15'21"$$

$$\lambda_{\gamma} - \lambda_{z} = 13^{o}44'39"$$

$$\lambda_{\gamma} = 60^{o}12'03" + 13^{o}44'39" = \underline{73^{o}56'42" \quad E.G.}$$

III.22) En un lugar de latitud $\varphi = 21^{\circ}00'03''$ N , se obser--vó la estrella polar; su altura fué $h = 21^{\circ}49'03''$ cuando culminó por el paso superior. Cual es su decli-nación ?

Solución:

$h_p = \varphi_z$ y además

$h_{polar} = h_p + p$

$p = h_{polar} - h_p$

$p = 21^{\circ}49'03'' - 21^{\circ}00'03''$

$\delta_{polar} = 90 - p$

$\underline{\delta_{polar} = 89^{\circ}11'}$

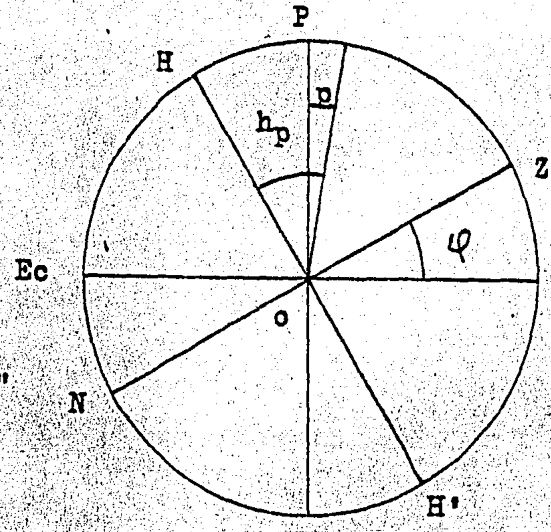


Fig. III.p

III.23) La altura de una estrella situada en el ecuador ce--leste durante su culminación superior es $h = 30^{\circ}$ Cual es la altura del polo en el lugar de observación?

Solución:

$h_E = 30^{\circ}$; $\varphi_z = 90 - h$

$\varphi_z = z_E = 90 - h_E = 60^{\circ}$

como $h_p = \varphi_z$ entonces

$\underline{h_p = 60^{\circ}}$

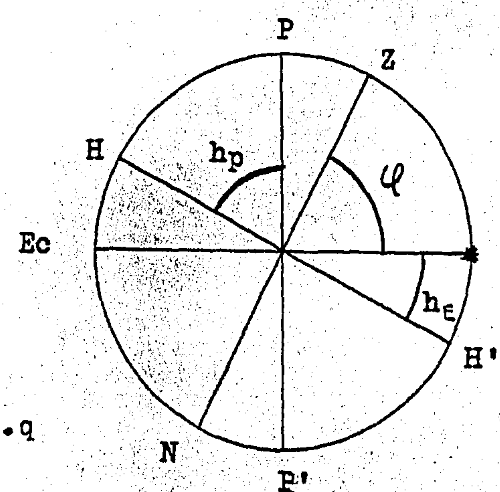


Fig. III.q

Las dos estrellas más brillantes del hemisferio boreal son "Vega" y "Capella".

$$AR_V = 18^h 36^m$$

$$AR_C = 5^h 15^m$$

Con estos datos, determine lo que se pide en los problemas siguientes:

III.24) a.-) Que ángulo horario tienen estas estrellas en el momento de la culminación del punto vernal ?

b.-) Que intervalo de tiempo transcurre, desde la culminación inferior de "Capella" hasta la culminación superior de "Vega" ?

III.25) a.-) Cual es el ángulo horario de "Capella" en el momento de la culminación superior de "Vega"?

b.-) Determine el tiempo sidereo de "z" con las dos estrellas para el momento anterior.

Solución:

III.24) a.-) Como el punto vernal está sobre el mismo meridiano que "z", y el ángulo horario se mide en dirección opuesta a la ascención recta, tendremos:

$$AH_V = 24^h - AR_V$$

$$AH_C = 24^h - AR_C$$

$$AH_V = 24^h - 18^h 36^m$$

$$AH_C = 24^h - 5^h 15^m$$

$$\underline{AH_V = 5^h 24^m}$$

$$\underline{AH_C = 18^h 45^m}$$

(Ver fig.III.r)

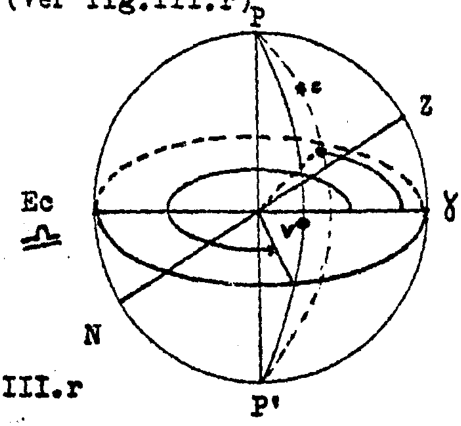


Fig.III.r

b.-) Cuando "Capella" se encuentre en su culminación inferior, es decir su $AH = 12^h$; "Vega" se encuentra en $AR = 1^h 21^m$

Ahora bien, como los astros tienen un movimiento aparente hacia el oeste, y la estrella Vega se encuentra al este; tardará en llegar a su paso superior lo que tenga de ascención recta; es decir, ha transcurrido $1^h 21^m$ de tiempo sidereo.

III.25) a.-) Como "Capella" tiene $AR_c < AR_V$ en $13^h 21^m$, cuando la estrella "Vega" esté en su paso superior, la primera estrella se encontrará en $AH = 13^h 21^m$

dado que $AH_{\gamma} = \underline{AH_c = 13^h 21^m}$ (Ver fig.III.s)

b.-) Como T.S.L. = AR+AH tenemos:

$TSz = AR_V + AH_V$ pero $AH_V = 0$

$\underline{TSz = AR_V = 18^h 36^m}$

de igual forma:

$TSz = AR_c + AH_c$; $\underline{TSz = 18^h 36^m}$

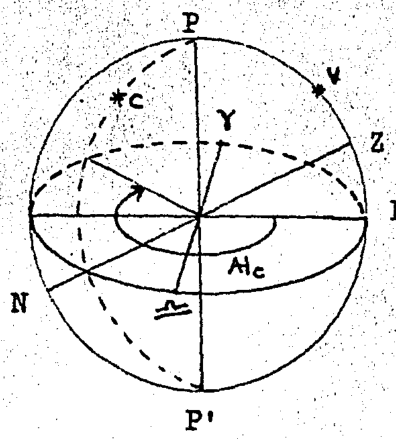


Fig. III.s

La declinación media de la estrella α Cephei (Alderamin) es: $\delta = 62^\circ 31'$

Considerando lo anterior, resuelva los problemas siguientes:

III.26) Determine si la estrella considerada es circumpolar a la latitud de $\varphi = 19^\circ 20'$

III.27) a.-) Mencione tres estrellas que sean circumpolares a la latitud del problema anterior, es decir, cuando $\varphi = 19^\circ 20'$

b.-) Determine el ángulo horario y el azimut de una de las tres estrellas en los momentos de sus máximas elongaciones.

Solución:

III.26) Se observa en la fig. III.t que cuando la estrella esté en su culminación superior, su altura será:

$$h_E = h_P + (90 - \delta) = 19^\circ 20' + 27^\circ 29'$$

$$h_E = 46^\circ 49'$$

la abertura del ángulo formado por la estrella en sus culminaciones, superior e inferior; es:

$$\measuredangle \text{C.I. O C.S.} = 2(90 - \delta) = 54^\circ 58'$$

la estrella en culminación inferior, se encuentra debajo del horizonte un ángulo de: $(54^\circ 58' - 46^\circ 49') = 8^\circ 09'$

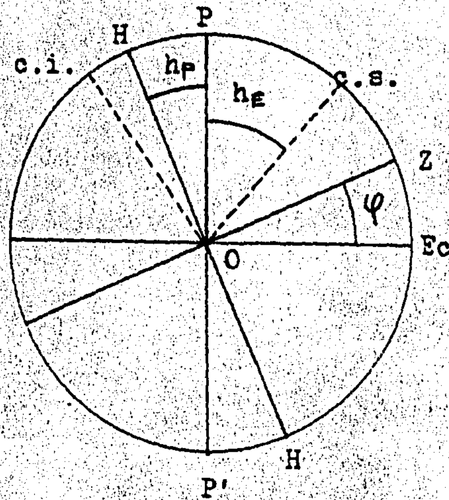
$\therefore$ <u>La estrella no es circumpolar</u>

III.27) a.-) Para que una estrella sea circumpolar en una latitud dada, se requiere que su declinación sea:

$\delta \geq (90-\varphi)$; introduciendo los valores

$(90-\varphi) = 70^\circ 40'$

tres estrellas circumpolares en $\varphi = 19^\circ 20'$ son:



"35 Draconis"

" γ Ursae Minoris"

" β Ursae Minoris"
(Kochab)

b.-) Tomemos la estrella Kochab con $\delta = 74^\circ 13' 45''$ para calcular su ángulo horario y azimut:

Fig. III.t

Aplicando las ecuaciones sig.

$\cos AH = \tan\varphi \cot\delta$; $\operatorname{sen} Az = \cos\delta \sec\varphi$

sustituyendo los datos:

$\cos AH = \tan(19^\circ 20') \cot(74^\circ 13' 45'')$ de donde

$\underline{AH = 84^\circ 18' 48''}$ En su elongación occidental

$\underline{AH = 275^\circ 41' 12''}$ En su elongación oriental

$\operatorname{sen} Az = \cos(74^\circ 13' 45'') \sec(19^\circ 20')$ de donde

$\underline{Az = 16^\circ 44' 24''.8}$ En su elongación oriental

$\underline{Az = 343^\circ 15' 35''.2}$ En su elongación occidental

III.28) Determine el ángulo horario que tuvo la estrella " Shedir " el día 23 de agosto de 1982 en el momento del orto. No tome en cuenta la refracción de la at--mósfera.

La declinación de la estrella para esa fecha es:

$\delta = 56^{o}26'20''$

La latitud del lugar

$\varphi = 29^{o}10'11''$

Solución:

Como en el orto la distancia zenital $z = 90^{o}$; va-mos a obtener de la ley de los cosenos la ecuación sig.

$$\cos(90-h) = \cos(90-\varphi)\cos(90-\delta) + \sin(90-\varphi)\sin(90-\delta)\cos AH'$$

$$\text{sen } h = \text{sen}\varphi\,\text{sen}\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos AH'$$

como $h = 0$ entonces $\cos AH' = -\dfrac{\text{sen}\varphi\,\text{sen}\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$

$\cos AH' = -\tan\varphi\tan\delta$ sustituyendo valores

$\cos AH' = -\tan(29^{o}10'11'')\tan(56^{o}26'20'')$

$\cos AH' = -0.8413798$

$AH' = 147^{o}17'10''$ este valor lo restamos de 360^{o} en virtud del sentido en el cual se mide el ángulo ho-rario

$360^{o} - AH' = 212^{o}42'50''$

$\underline{AH = 14^{h}10^{m}51^{s}.3}$

III.29) El dia 21 de junio la declinación del sol es:

$$\delta = 23^{o}27'$$

A que latitud la duración de ese día es de tres horas ? No tome en cuenta ninguna correción.

Solución:

Tomaremos la ecuación que nos dá el ángulo horario para el orto

$$\cos AH = -\tan\varphi \tan\delta$$

$\tan\varphi = -\dfrac{\cos AH}{\tan\delta}$; como AH se cuenta a partir del meridiano, representa solo la mitad del día; por lo que:

$AH = 1^{h}30^{m} = 22^{o}30'$

sustituyendo los valores

$$\tan\varphi = -\frac{\cos(22^{o}30)}{\tan(23^{o}27')} \quad ; \quad \tan\varphi = -2.097083$$

El lugar donde la duración del día es de solo tres horas el 21 de junio, tiene de latitud $\underline{\varphi = 64^{o}50'57''.3 \text{ , Sur}}$

Resuelva los siguientes problemas.

III.30) Determine la hora de la puesta del sol el día 21 de diciembre de 1982, en la ciudad de México.

III.31) Cual es el tiempo solar verdadero para el mismo momento y el mismo lugar?

$$\varphi = 19^{\circ}25'59''$$

$$\lambda = 06^{h}36^{m}31^{s}.6$$

$$12+E = 11^{h}58^{m}07^{s}.35 \quad M\ 90$$

Solución:

Calculemos la declinación al momento del ocaso (Aprox.)

Declinación al paso M 90	$-23^{\circ}26'27''.2$
Variación Horaria	$-\ 01''.1$
Intervalo de Tiempo	$6^{h}00^{m}00^{s}.0$
Variación en el intervalo	$-\ 06''.6$
Declinación en el ocaso	$-23^{\circ}26'33''.8$

Sustituyendo este valor en la siguiente ecuación:

$$\cos H = -0.0145 \sec\varphi \sec\delta - \tan\varphi \tan\delta$$

$$\cos H = 0.1388776$$

$$\underline{H = 82^{\circ}01'01''.5}$$

Convirtiendo arco en tiempo

$H = 05^h 28^m 40^s.9$

$$12+E = 11^h 58^m 07^s.35$$

$$\Delta\lambda = \quad 36^m 31^s.90$$

Hora del paso en México $= 12^h 34^m 39^s.25$

$$H = 05\ 28\ 40\ .90$$

Hora de la puesta del sol $\quad 18^h 03^m 20^s.15$ T.M.L.

Para conocer el tiempo verdadero del ocaso, emplearemos la fórmula de la Ecuación del Tiempo.

Interpolando "E" entre los días 21 y 22:

" E " para el día 21	$-01^m 52^s.65$	
" E " para el día 22	$-01\ 22\ .76$	$\dfrac{29^s.89}{4} = +7^s.47$
Diferencia	$+\ 29^s.89$	

$$Tv = Tm - E$$

$$E \left\{ \begin{array}{r} -01^m 52^s.65 \\ +\ 07\ .47 \\ \hline -\ 01^m 45^s.18 \end{array} \right\} \text{6 Hrs. despues de culminar.}$$

$$Tv = \quad 18^h 03^m 20^s.15$$

$$-\ \quad 01^m 45^s.18$$

$$Tv = \quad 18^h 01^m 34^s.97$$

para el ocaso del sol el día 21 de diciembre de 1982.

El Tiempo Sideral Local de un lugar es T.S.L. = $23^h 02^m 41^s$ la latitud φ = $29^o 18' 12''$ N. Para este momento las coordenadas Ecuatoriales Independientes de una determinada estrella son :

$$AR = 20^h 47^m 54^s$$

$$\delta = 8^o 22' 14''$$

Con los datos resuelva los problemas siguientes:

III.32) Determine la corrección a las coordenadas (AR, δ) por efecto de aberración diurna.

III.33) Determine la misma corrección a las coordenadas (AR, δ) cuando la estrella se encuentra en el meridiano.

Solución:

Para dar solución al primer problema apliquemos, directamente las ecuaciones:

$$dAR = 0^s.021 \cos\varphi \sec\delta \cos(T.S.L. - AR)$$

$$d\delta = 0''.315 \cos\varphi \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}(T.S.L. - AR)$$

sustituyendo los datos, tenemos que las correcciones a las coordenadas por aberración diurna son:

$$\underline{dAR = 0^s.01540}$$

$$\underline{d\delta = 0''.02218}$$

Cuando la estrella se encuentra en el meridiano, las ecuaciones de corrección son:

$$dAR = 0^{s}.021 \cos\varphi \sec\delta \cos(T.S.L. - AR)$$

$$d\delta = 0''.315 \cos\varphi \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}(T.S.L. - AR)$$

como es sabido $AH = (T.S.L. - AR)$ de donde

$$dAR = 0^{s}.021 \cos\varphi \sec\delta \cos AH$$

$$d\delta = 0''.315 \cos\varphi \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen} AH$$

como $AH = 0$ en el meridiano

$$dAR = 0^{s}.021 \cos\varphi \sec\delta$$

$$d\delta = 0$$

sustituyendo valores y resolviendo, tenemos que las correcciones por aberración diurna cuando la estrella está sobre el meridiano, son:

$$\underline{dAR = 0^{s}.01851}$$

$$\underline{d\delta = 0}$$

Dos estrellas se encuentran en los puntos Norte y Sur respectivamente de un lugar de observación. Si en el mismo momento una tercera estrella tiene como distancia zenital:

$z = 62^\circ 01'11''$ y declinación $\delta = 77^\circ 00'02''$ en su culminación inferior.

Resuelva los problemas siguientes:

IV.34) Determine las coordenadas horizontales de las tres estrellas.

IV.35) Determine las declinaciones de las dos estrellas ubicadas en el norte y en el sur.

Solución:

La primera estrella está en el punto norte y en el horizonte

$\therefore$ $\underline{Az = 0}$; $\underline{h = 0}$

La segunda estrella está en el punto sur y en el horizonte

$\therefore$ $\underline{Az = 180^\circ}$; $\underline{h = 0}$

La tercera estrella está al norte y se conoce " z "

$\therefore$ $\underline{Az = 0}$; $\underline{h = 27^\circ 58'49''}$

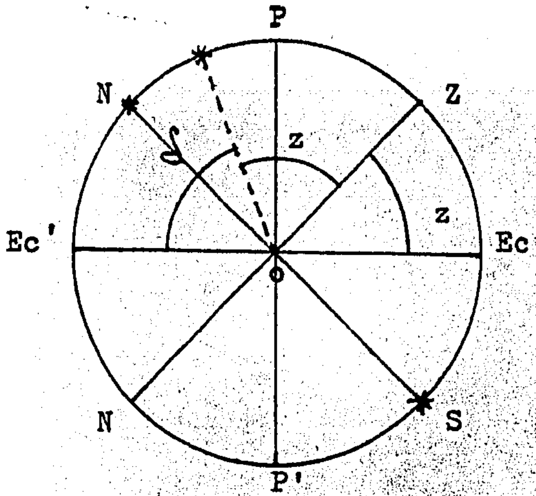


Fig.IV.u

En la fig. IV.u se observa que para la tercera estrella

$$\varphi_z = 180^o - (\delta + z)$$

$$\varphi_z = 180^o - (77^o00'02") - (62^o01'11")$$

$$\varphi_z = 40^o58'47"$$

Por otro lado; para la estrella en el sur $\delta_s = (90^o - \varphi_z)$

$$\underline{\delta_s = -49^o01'13"}$$

además $\measuredangle$ Ec oS = $\measuredangle$ No Ec' por ser opuestos

$\therefore$ la declinación de la estrella en el norte

$$\underline{\delta_n = +49^o01'13"}$$

En el momento en el que el sol llega al "Solsticio de verano", es observado en la tierra; y su altura medida es

$h_1 = 55^{o}20'$. y su azimut $Az = 180^{o}$

Con los datos anteriores, resuelva los problemas sig:

IV.36) Determine la altura de la estrella polar para el mismo instante, si estuviese en su máxima elongación oriental.

$$\delta_p = 89^{o}10'$$

IV.37) Determine la altura de la polar si la estrella estuviese en su culminación superior.

IV.38) Cual es el Angulo Horario del equinoccio de otoño ? (♎)

Solución:

Cuando la polar se encuentra en su máxima elongación, la estrella se encuentra en la posición "p", ver fig. IV. v

$\measuredangle \Sigma oHS = h_1 - \varepsilon$ $\qquad \varepsilon = 23^{o}27'$

$\measuredangle \Sigma oHS = 31^{o}53'$

$\measuredangle HSoP' = 90^{o} - \measuredangle \Sigma oHS$

$\measuredangle HSoP' = 58^{o}07'$

Pero $\measuredangle$ PoHN = $\measuredangle$HSoP' por ser opuestos

$\therefore$ la altura de la polar en su máxima elongación es:

$\underline{h_{p.m.e.} = 58^{o}07'}$

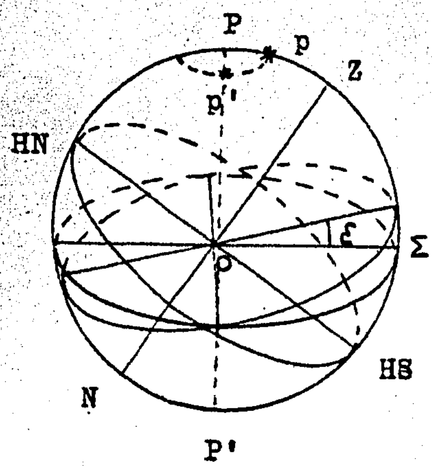


Fig. IV.v

Para conocer la altura de la polar en su culminación superior, solo basta ver fig.IV.v La estrella en posición "p" aumenta su altura respecto a "p' " ;ya que se cuenta a partir del plano HNo

$\therefore$ la altura de la polar en su culminación superior es:

$h_{p.c.s.} = h_{p.m.e.} + (90- \delta_{p})$

$\underline{h_{p.c.s.} = 58^{o}57'}$

Como Z se encuentra en el mismo meridiano que el punto del solsticio de verano, aquí AH = 0 ; el punto otoñal se encuentra al este del observador; y su ángulo horario es:

$\underline{AH = 18^{h}}$

TEMA V. RELACION ENTRE LOS DIVERSOS SISTEMAS DE COORDENADAS CELESTES.

V.39) Las coordenadas horizontales de un astro son:

$Az = 160^{o}02'22"$ En un lugar de latitud

$z = 53^{o}11'31"$ $\varphi = 25^{o}41'03"$

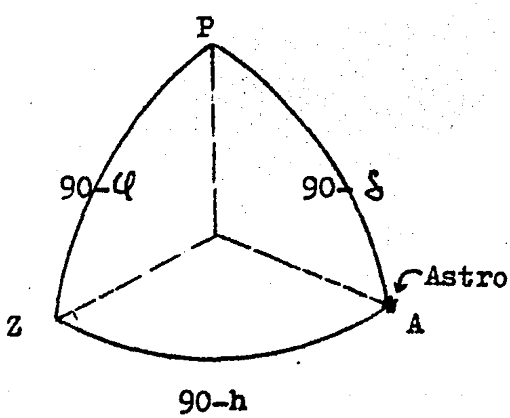
" z " está corregida por refracción

Se desean conocer las coordenadas ecuatoriales dependientes del astro (AH, δ)

Solución:

Los elementos que buscamos, los podemos encontrar empleando las ecuaciones de transformación de coordenadas; pero lo mas práctico, es obtenerlas resolviendo el triángulo formado con los datos que se tienen.

Fig.V.w



En la fig. V.w se observa el caso III de los triángulos esféricos oblicuángulos, cuya solución es:

$$\cos(90-\delta) = \cos z \cos(90-\varphi) + \operatorname{sen} z \operatorname{sen}(90-\varphi) \cos Az$$

$$\operatorname{sen}\delta = \cos z \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen} z \cos\varphi \cos Az$$

$$\operatorname{sen} \quad = -0.4185245$$

$$\underline{\delta = -24^{\circ}44'29''.3}$$

Ahora hay que conocer $\sphericalangle$ZPA para encontrar el ángulo horario.

$$\cos z = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos \sphericalangle ZPA$$

despejando el término que nos interesa

$$\cos \sphericalangle ZPA = \cos z \sec\varphi \sec\delta - \tan\varphi \tan\delta$$

$$\cos \sphericalangle ZPA = 0.9536417$$

$$\sphericalangle ZPA = 17^{\circ}30'51''.6$$

el ángulo horario está dado por $AH = \dfrac{360 - \sphericalangle ZPA}{15}$

de donde $\underline{AH = 22^{h}49^{m}56^{s}.56}$

Se observó la distancia zenital de una estrella; y fueron calculadas las coordenadas ecuatoriales dependientes de la misma, en base a su azimut y su distancia zenital "debidamente corregida por refracción media". Las coordenadas calculadas son:

$AH = 22^h 49^m 56^s.56$ Latitud del lugar

$\delta = -24°44'29".3$ $\varphi = 25°41'03"$

Con los datos expuestos resuelva lo que se pide en los siguientes problemas:

V.40) Se requiere conocer las coordenadas horizontales (Az, z) con las cuales se calculó el ángulo horario y la declinación de la estrella.

V.41) Determine en forma muy aproximada la distancia zenital leida en el teodolito al observar el astro.

Solución:

Ver Fig. V.w

Para el primer problema tenemos que para encontrar " z "

$$\cos z = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos \measuredangle ZPA$$

pero $\measuredangle ZPA = (24^h - AH)15 = (24^h - 22^h 49^m 56^s.56)15$

$$\measuredangle ZPA = 17°30'51".6$$

sustituyendo los datos

$$\cos z = \text{sen}(25^\circ 41'03'') \ \text{sen}(-24^\circ 44'29''.3) +$$

$$+ \cos(25^\circ 41'03'')\cos(-24^\circ 44'29''.3)\cos(17^\circ 30'51''.6)$$

$$\cos z = 0.5991362$$

$$\underline{z = 53^\circ 11'31''}$$

para encontrar el azimut $\quad \text{sen Az} = \dfrac{\text{sen} \measuredangle \text{ZPA}}{\text{sen } z} \cos \delta$

$$\text{sen Az} = \frac{\text{sen}(17^\circ 30'51''.6)}{\text{sen}(53^\circ 11'31'')} \cos(-24^\circ 44'29''.3)$$

$$\text{sen Az} = 0.3413730$$

$$\underline{\text{Az} = 160^\circ 02'22''}$$

Para el segundo problema. La distancia zenital obtenida en el primero, es la ya corregida por refracción media, es decir: z_c

La distancia zenital pedida en este problema, es la observada en el teodolito; o sea la que no tenga la corrección por refracción ; es decir: z_o

Sean: R = Refracción media

z_c = Distancia zenital corregida por R

z_o = Distancia zenital observada

sabemos que $z_c = z_o + R$ despejemos z_o

$z_o = z_c - R$; $z_o = z_c - 60''.6 \tan z_o$

Como no conocemos z_o , pues es lo que queremos encontrar, utilicemos z_c para encontrar R en forma aproximada.

$z_o \cong z_c - 60''.6 \tan z_c$ sustituyendo

$z_o \cong (53^\circ 11' 31'') - 60''.6 \tan(53^\circ 11' 31'')$

$z_o \cong 53^\circ 11' 31'' - 80''.98$

$\underline{z_o \cong 53^\circ 10' 10''.02}$ Esta fué la lectura muy aproximada de "z" observada en el teodolito.

V.42) Las coordenadas ecuatoriales independientes de una estrella son: $AR = 2^h 21^m 48^s.17$

$$\delta = -6^\circ 59'07''.97$$

En un lugar de latitud $\varphi = 19^\circ 24'10''$

Para un tiempo sideral de $T.S.L. = 22^h 40^m 36^s$

Determine las coordenadas horizontales (Az,h) de la estrella.

Solución:

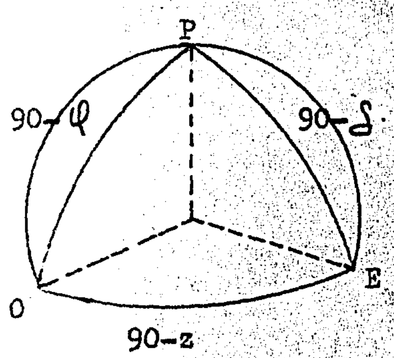


Fig. V.x

Con los datos que tenemos, calculemos $\measuredangle OPE$

El tiempo sidereo es $T.S.L = AR + AH$

$$AH = T.S.L. - AR$$

$$AH = 304^\circ 41'57''.4$$

$$\measuredangle OPE = 360 - AH = 55^\circ 18'02''.6$$

Ahora ya tenemos tres elementos del triángulo de la fig. V.x y podemos dar solución al mismo.

$$\cos(90-h) = \cos(90-\varphi)\cos(90-\delta) + \sin(90-\varphi)\,\mathrm{sen}(90-\delta)\cos\measuredangle OPE$$

$$\mathrm{sen}\, h = \mathrm{sen}\,\varphi\ \mathrm{sen}\,\delta + \cos\varphi\ \cos\delta\ \cos\measuredangle OPE$$

$$\mathrm{sen}\, h = 0.4925501 \quad ; \quad \underline{h = 29^\circ 30'30''}$$

Calculemos ahora el azimut:

$$\cos(90-\delta) = \cos(90-\varphi)\cos(90-h) +$$
$$+ \operatorname{sen}(90-\varphi)\operatorname{sen}(90-h)\cos Az$$

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} h + \cos\varphi \cos h \cos Az$$

despejemos el factor que nos interesa

$$\cos\varphi \cos h \cos Az = \operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} h$$

$$\cos Az = \operatorname{sen}\delta \sec\varphi \sec h - \tan\varphi \tan h$$

sustituyendo los valores, tenemos:

$\cos Az = -0.3453047$ de donde $\underline{Az = 110^\circ 20'04''}$

V.43) Las coordenadas horizontales de una estrella son:

$Az = 110^\circ 20'04''$ En un lugar de latitud $\varphi = 19^\circ 24'10''$

$h = 29^\circ 30'30''$ y para un momento de tiempo sidereo

$T.S.L. = 22^h 40^m 36^s$

Determine las coordenadas ecuatoriales independientes de la estrella.

Solución: Obtengamos $\measuredangle$OPE y δ

Utilizando la ley de los cosenos en la fig. V.x

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} h + \cos\varphi \cos h \cos Az$$

$$\operatorname{sen}\delta = -0.121619$$

$\underline{\delta = -6^{\circ}59'07".97}$

Determinemos ahora $\sphericalangle OPE$ mediante la ley de los senos

$$\text{sen} \sphericalangle OPE = \frac{\text{sen Az}}{\cos \delta} \cos h$$

$$\text{sen} \sphericalangle OPE = \frac{\text{sen}(110^{\circ}20'04")}{\cos(-6^{\circ}59'07".97)} \cos(29^{\circ}30'30")$$

de donde $\sphericalangle OPE = 55^{\circ}18'02".6$; $AH = 360^{\circ} - \sphericalangle OPE$

$$\underline{AH = 304^{\circ}41'57".4}$$

Por otro lado sabemos que el tiempo sideral de un lugar es:

T.S.L. = AR + AH ; AR = T.S.L. - AH

$AR = 340^{\circ}09' - 304^{\circ}41'57".4$

$\underline{AR = 35^{\circ}27'02".6} = \underline{2^{h}21^{m}48^{s}.17}$

VI.44) Resuelva las preguntas:

a.-) En un lugar costero a 10 metros $^s/n$ m ; se observó la estrella polar con un teodolito de 1" de aproximación, en el momento de culminar por el paso superior. La declinación para ese momento, fué de: $\delta = 89^\circ 51'20''$

su altura es $h = 38^\circ 36'55''$; la temperatura es $t = 29^\circ$ C

Se pide determinar la latitud del lugar.

b.-) Desde un faro es observada una estrella con un sextante, su altura corregida es: $h = 29^\circ 18'$

la depresión del horizonte: $D = 14'30''$

Determine la altura del faro.

Solución:

a.-) Primero conozcamos la altura verdadera de la estrella, que dadas las condiciones corregiremos por refracción

$R = r \cdot \beta \cdot T$ además, en el lugar de la observación se estima que $P' = 762$ mm Hg

por lo que $\beta = 1$; y la fórmula queda: $R = r \cdot T$

sustituyendo los datos

$$r = 60''.6 \tan(51^\circ 23'05'') \quad ; \quad r = 75''.87 .$$

$$T = \frac{1}{1+0.004(29)} \quad ; \quad T = 0.896057$$

de donde nos resulta $\underline{R = 1'07''.98}$

como R es positiva para distancias zenitales

$$z + R = z_E = 51^{\circ}24'12''.98$$

$$h_E = 90 - z = 90^{\circ} - 51^{\circ}24'12''.98$$

$$h_E = 38^{\circ}35'47''.02$$

de la fig. VI.y $\quad h_P = \varphi_E \quad ; \quad h_P = h_E - (90 - \delta_E)$

$$h_P = (38^{\circ}35'47''.02) - ((90^{\circ} - (89^{\circ}51'20''))$$

de donde $\quad \underline{\varphi_E = 38^{\circ}27'07''.02}$

b.-) Para conocer la altura del faro, despejemos "a" en la fórmula:

$$D = 115''.5 \sqrt{a}$$

y tenemos:

$$a = \left(\frac{D}{115''.5}\right)^2$$

sustituyendo

$$a = \left(\frac{14'30''}{115''.5}\right)^2$$

de donde

la altura del faro es:

$$\underline{a = 56.74 \text{ m.}}$$

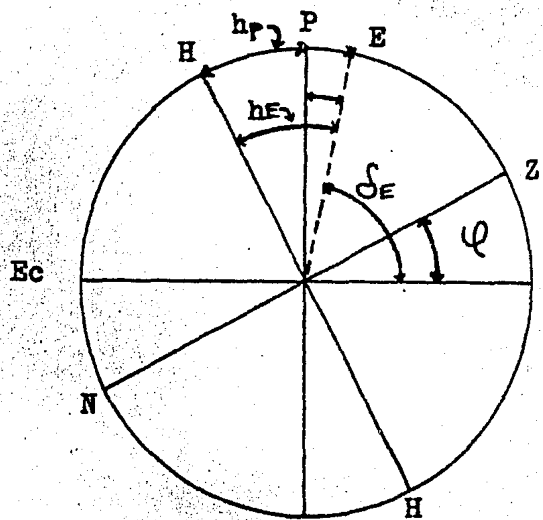


Fig. VI.y

VI.45) Se observó el limbo superior del sol con un teodolito de $a = 1''$, siendo la altura $h = 35^o22'11''$

el semidiámetro es $s.d. = 15'52''$

$t = 11^o.5\ C$; $P' = 610$ mm Hg

Determine la distancia zenital real del sol

Solución:

Como se hizo la observación con precisión de 1", las correcciones que deben hacerse son:

- semidiámetro
- paralaje
- refracción

La primera corrección es por refracción

$R = r\beta T$ donde $r = 60''.6\ \tan(54^o37'49'')$

$$\beta = \frac{610}{762}$$

$$T = \frac{1}{1+0.004(11.5)}$$

$R = 1'05''.33$

$z_R = z+R = 54^o38'54''.33$

la corrección siguiente es por semidiámetro, que es positiva $z_{R,Sd} = z_R + s.d. = 54^o54'46''.33$

la última corrección es por paralaje, y es negativa

$P = 8''.8\ \text{sen}\ z$; $P = 7''.19$

la distancia zenital corregida es: $z_c = z_{R,Sd} - P$

introduciendo el valor de la paralaje $\underline{z_c = 54^o54'39''.1}$

VI.46) Se observó el limbo oriental del sol con un tránsito de ingeniero, ver fig.VI.z La altura corregida del astro es:

$$h = 36^{\circ}03'30''.7$$

El diámetro solar es: $d = 30'52''$

Determine la corrección que deba hacerse al azimut del sol por efecto del semidiámetro.

Solución:

Esta corrección al azimut del sol se hace mediante la ecuación siguiente:

$$Az - Az' = 1/2\ d \csc z \quad ; \quad 1/2\ d = 15'26''$$

$z = 90-h = 53^{\circ}56'29''.3$ por lo que

$Az - Az' = 15'26''\ (\ \csc(53^{\circ}56'29''.3)\ )$ de donde

$$\underline{Az - Az' = 19'05''.4}$$

Esta corrección será negativa dado el limbo que fué observado.

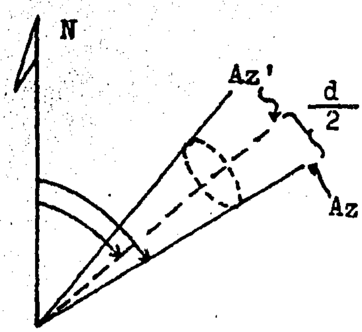


Fig. VI.z

VI.47) En un momento dado, la estrella "ε Piscium" es observada en el orto, en un lugar de latitud:

$$\varphi = 19^\circ 24' 10''$$

Determine el tiempo que se adelanta el orto de la estrella, por el efecto de la refracción atmosférica.

$$\delta = 7^\circ 48'$$

Solución:

En el triángulo ZPE de la fig. VI.a' hay tres elementos conocidos; a saber:

$90-\varphi$

$90-\delta$

z

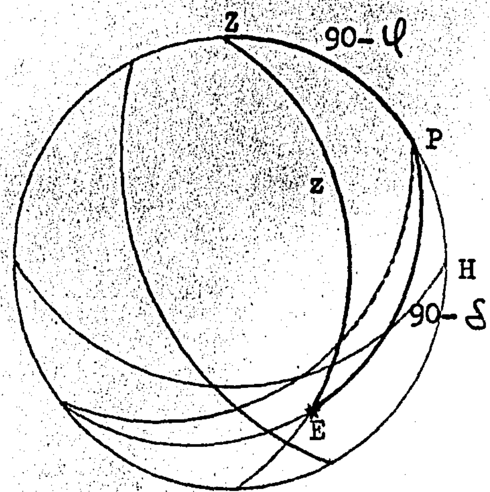


Fig. VI.a'

Como la refracción incrementa la distancia zenital en 34', la estrella en el orto tiene: $z = 90^\circ 34'$

calculemos $\sphericalangle$ ZPE mediante las ecuaciones sig:

$$s = 1/2\ ((90-\varphi) + (90-\delta) + z) \quad ; \quad \text{sustituyendo}$$

$$s = 1/2\ ((70^\circ 35' 50'') + (82^\circ 12') + (90^\circ 34'))$$

$$s = 121^\circ 40' 55''$$

$$\tan r = \sqrt{\frac{\text{sen}(s-(90-\delta))\ \text{sen}(s-z)\ \text{sen}(s-(90-\varphi))}{\text{sen } s}}$$

sustituyendo los datos

$$\tan r = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(39^\circ 28'55'')\ \operatorname{sen}(31^\circ 06'55'')\ \operatorname{sen}(51^\circ 05'05'')}{\operatorname{sen}(121^\circ 40'55'')}}$$

$\tan r = 0.5481122$; aplicando la ecuación siguiente:

$$\tan(1/2 \measuredangle ZPE) = \frac{\tan r}{\operatorname{sen}\ (s-z)}$$; sustituyendo valores

$\tan(1/2 \measuredangle ZPE) = 1.0606674$ donde $\measuredangle ZPE = 93^\circ 22'21''.6$

apliquemos ahora la ecuación diferencial que nos da el adelanto horario aparente de la estrella

$$dAH = \frac{dz}{\cos \varphi \cos \delta \operatorname{sen} \measuredangle ZPE}$$; como $dz = R$

y $R = 34'$ en el orto ; la ecuación nos queda:

$$dAH = \frac{34'}{\cos(19^\circ 24'10'')\ \cos(7^\circ 48')\ \operatorname{sen}(93^\circ 22'21''.6)}$$

de donde

<u>$dAH = 2^m\ 25^s.8$</u> Tiempo que se adelanta el orto de la estrella " ε Piscium"

Se observó el sol con un teodolito en posición directa e inversa; en un lugár de latitud $\varphi = 11^{o}32'36"$

$AH = 291^{o}22'12"$ $t = 35^{o}$ C

$h_o = 24^{o}05'06$ $P' = 700$ mm Hg

Con los datos anteriores, resuelva los siguientes problemas:

VI.48) Con los datos que se tienen, podemos calcular la declinación solar corrigiendo la altura por refracción para obtenerla correctamente. Si no se corregiera la altura por refracción y se calculara la declinación. En cuanto quedaría afectada ?

VI.49) Determine la altura del sol corregida por refracción tomando como dato $d\delta$ calculada en el problema anterior.

Solución:

VI.48) En el triángulo formado con los elementos conocidos, podemos conocer el ángulo paraláctico del sol. Fig. VI.b'

Mediante ley de senos:

$$\text{sen } Q = \frac{\text{sen}(360-AH)}{\text{sen}(90-h_o)} \text{ sen}(90-\varphi)$$

$$\text{sen } Q = \frac{\text{sen}(360-AH)}{\cos h_o} \cos \varphi$$

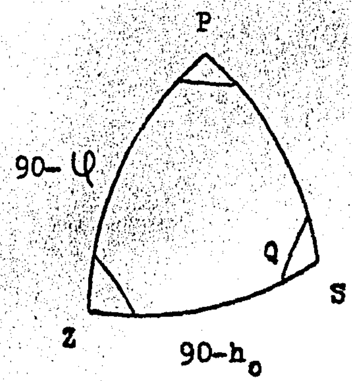


Fig. VI.b'

sustituyendo los valores en la ecuación; tenemos:

$$Q = 88^{o}02'50''.9$$

ahora conozcamos el valor de la refracción

$$R = 60''.6 \tan z \frac{P'}{762} \frac{1}{1+0.004t} \quad ; \quad \text{sustituyendo}$$

$$R = 1'49''.24$$

emplearemos en seguida, la siguiente ecuación diferencial

$$d\delta = -\cos Q \, dz \qquad \text{ademas} \quad dz = R = 1'49''.24$$

$$d\delta = -\cos(88^{o}02'50''.9)\ 109''.24$$

$$\underline{d\delta = -3''.72}$$

VI.49) Este problema es el inverso al anterior, ya que la ecuación diferencial empleada nos muestra la diferencial de " z " en función de la corrección de " δ ", es decir $d\delta$.

si despejamos dz en la ecuación

$$dz = -\frac{d\delta}{\cos Q} \quad ; \quad dz = 109''.24$$

de la fig. VI.c'

$$z_o = z_c - dz \quad ; \quad z_c = z_o + dz$$

$$\begin{array}{rl} z_c = & 65^{o}54'54'' \\ + & \underline{\quad 01\ 49.24} \\ & 65^{o}56'43''.24 \end{array}$$

$$\underline{h_c = 24^{o}03'16''.76}$$

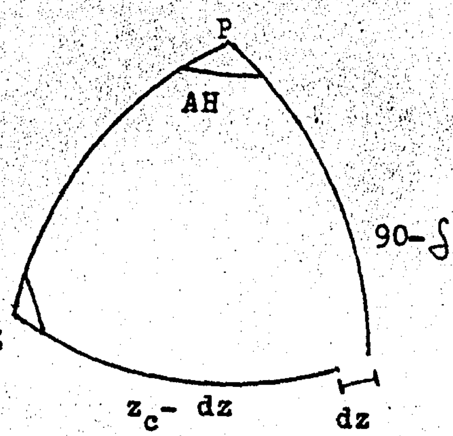


Fig. VI.c'

VII.50) Se desea conocer el Tiempo Sideral Local en el M 90- W G en el momento de la culminación superior de la estrella " Sirio " el día 29 de noviembre de 1983.

Solución:

Como T.S.L. = AR + AH ; AH = 0

T.S.L. = AR

La Ascención Recta de Sirio la obtendremos interpolando los valores que aparecen en el Anuario Astronómico, mediante el método de Newton.

Fecha	AR $6^h 44^m$	Δy	$\Delta^2 y$
5-Nov. 83	$25^s.92$		
		0.27	
15-Nov. 83	26 .19		-0.03
		0.24	
25-Nov. 83	26 .43		-0.02
		0.22	
5-Dic. 83	26 .65		-0.03
		0.19	
15-Dic. 83	26 .84		

$k = \dfrac{x_k - x_o}{h}$; $h = 10$; $k = \dfrac{24-20}{10} = 0.4$

$Y_k = y_o + k\Delta y + \dfrac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y$; sustituyendo

$Y_k = 26^s.521$ de donde $\underline{T.S.L. = 6^h 44^m 26^s.521}$

CONCLUSIONES

Esta tesis se puede sumar a los libros con problemas propuestos y resueltos, que sobre el tema ya existen; en virtud de que una gran mayoría de los ejercicios que aquí aparecen, son nuevos. Por lo que su contenido vendrá a ampliar el acervo de consulta para el interesado en esta área.

Finalmente, se puede agregar que la objetividad del trabajo, se encuentra sencillamente en las interrogantes y en los resultados de cada uno de los problemas.

B I B L I O G R A F I A

"ASTRONOMIA"

Dr. Fernando Asín
Editorial Paraninfo, 1976.

"ELEMENTOS DE ASTRONOMIA DE POSICION"

Ing. Manuel Medina Peralta
Editorial Limusa, 1978.

"INTRODUCCION A LA ASTRONOMIA"

Ramon M. Aller
Consejo Superior de Investigación Científica, 1957.
Madrid, España.

"ELEMENTOS DE COSMOGRAFIA"

Dr. Florencio Charola
Editorial Kapeluz, 1957.

"CHART OF THE STARS"

George Philip & Son, Ltd.
Editado por E.O. Tancock. B.A. F.R.A.S.

"ANUARIO ASTRONOMICO NACIONAL AÑOS 1979, 1982, 1983."

Instituto de Astronomía, UNAM.

"METODOS NUMERICOS"

Luthe, Olivera, Shutz.
Editorial Limusa, 1979.

"TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA"

Granville, Smith, Mikesh
Editorial Uteha, 1978.

"METODOS TOPOGRAFICOS"
Ing. Ricardo Toscano
Editorial Porrua, 1977.

"ENCICLOPEDIA TEMATICA PLANETA"
Editorial Planeta, 1979.

"APLETON'S NEW CUYAS DICTIONARY"
Vol. 1 Editorial Cumbres, 1982.

"APUNTES DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL"
Facultad de Ingeniería, UNAM.

"PROBLEMAS Y EJERCICIOS PRACTICOS DE ASTRONOMIA"
B. A. Vorontsov - Veliamínov
Editorial Mir, Moscú.

"TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA"
Frank Ayres, Jr.
Libros McGraw-Hill de México, 1967.

60