

85
2 y'



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

T E S I S

**"EFECTOS VISCOELASTICOS EN FLUJOS
ROTACIONALES EN GEOMETRIAS
NO - SIMETRICAS"**

**FERMIN PEREZ GUEVARA
INGENIERO QUIMICO**

1 9 8 5



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

I. INTRODUCCION	...1
II. MATERIALES NO-NEWTONIANOS	...4
Generalidades	...5
Ecuaciones constitutivas	...6
Clases de fluidos	...8
Clasificación	...9
Pseudoplásticos	...10
Dilatantes	...15
Viscoplásticos	...15
Tixotrópicos	...17
Reopécticos	...19
III. MATERIALES VISCOELASTICOS	...20
Generalidades	...21
Fenómenos en flujo	...22
Comparación de comportamientos	...22
Consecuencias de la elasticidad en los líquidos	...25
Modelos diferenciales	...28
Modelo de Maxwell	...31
Comportamiento del fluido de Maxwell	...34
Modelo de Voigt	...39
Comportamiento del sólido de Voigt	...41
Extensión de los modelos	...44
Modelo de Maxwell generalizado	...44
Modelo de Voigt generalizado	...46
Funciones materiales	...47
Funciones de Relajación y Memoria	...60
Espectro de Relajación	...62
Interrelaciones entre las funciones materiales	...65
Restricciones de la linealidad	...66
Efecto de los esfuerzos normales	...68
Funciones materiales para esfuerzos normales	...72

IV. PARTE EXPERIMENTAL	..75
Definiciones fundamentales	..76
Técnicas de visualización	..78
Descripción del sistema experimental	..83
V. ANALISIS DE RESULTADOS	..95
Tipos de flujos observados	
(Fotografías obtenidas)	.100
VI. CONCLUSIONES	.125
VII. BIBLIOGRAFIA	.128
Apéndices:	
A. Aspectos elementales sobre algebra tensorial	.131
B. Glosario de términos	.137
C. Notación	.139

CAPITULO I

INTRODUCCION

La determinación de patrones de flujo de polímeros fundidos en geometrías donde ocurren flujos no-viscométricos, como es el caso del flujo de un polímero en un extrusor, en boquillas, en el proceso de moldeo por soplado, etc. ha constituido en tiempos recientes uno de los problemas más importantes a modelar, ya que, en adición a la importancia industrial inherente, el que el material fluya en una geometría no-simétrica ó que presente discontinuidades en la superficie que lo acota (no es una superficie regular), v.gr. flujo alrededor de esquinas, en un pozo de presión, etc. dá lugar a la presencia de flujos secundarios (también ocurre esto para materiales newtonianos) cuyas características están determinadas, en general, no solo por las propiedades viscosas del material sino también por sus contribuciones elásticas. Esto implica a su vez que en la integración de la ecuación de movimiento se haga uso de una ecuación constitutiva que contemple ambas contribuciones del material.

La amplia gama del comportamiento no-newtoniano ha dado lugar a la formulación de una gran variedad de modelos, algunos meramente empíricos, otros formulados por lo menos de acuerdo al principio de indiferencia material y otros desde el punto de vista estadístico, los que en conjunción con las ecuaciones de continuidad y movimiento, deberían representar el patrón de flujo con exactitud. En los capítulos II y III se discuten algunos de éstos, los que son de aceptación más general. Sin embargo su uso en la práctica se ha visto restringido en su validez a flujos unidireccionales y simétricos habiendo fallado en su aplicación a flujos más complejos.

La técnica general de solución de este tipo de problemas conlleva dos aspectos. Uno donde se determine el patrón de flujo de manera experimental mediante una visualización del mismo y el otro la resolución de las ecuaciones de cambio, la que dada la complejidad del problema puede ser analítica o numérica, restando solamente la comparación de los resultados experimentales y teóricos.

En este trabajo se aborda sólo el primer aspecto en la solución del problema que se discute a continuación y en donde como una primera aproximación al análisis del flujo de un polímero fundido en una geometría no-simétrica y con discontinuidades en la superficie que lo acota se usaron dos soluciones de distintas concentraciones

poliacrilamida (Separan AP-30).

La visualización se efectuó en un recipiente semicircular que contenía el material, donde el flujo fue generado por un cilindro que rota a distintos valores de rapidez angular, colocado a la mitad del diámetro de dicho recipiente.

Se tomaron fotografías del patrón de flujo de estos materiales y se compararon con los patrones de flujo producidos en fluidos newtonianos de alta y baja viscosidad.

El patrón de flujo general consistió en dos regiones perfectamente distinguibles. Una primaria situada en la vecindad del cilindro rotatorio y otra alejada de este y que constituye el flujo secundario.

Para las distintas relaciones de diámetro de cilindro a diámetro de recipiente analizadas, se observó que los patrones de flujo secundario no dependen fundamentalmente de la contribución elástica del material sino esencialmente de la contribución viscosa, tanto para los fluidos viscoelásticos como para el newtoniano de alta viscosidad.

Mientras que para los materiales de baja viscosidad el patrón de flujo secundario resultó inestable.

Este comportamiento contrasta con aquel que ocurre para materiales viscoelásticos y newtonianos en otras geometrías, en donde también aparecen flujos secundarios.

CAPITULO II.

MATERIALES NO NEWTONIANOS.

Generalidades.

Al aplicar una fuerza o una carga a cualquier material - sea líquido, sólido, gas u otro estado intermedio- este sufre una deformación. Se pueden considerar 2 tipos de deformación
 a) deformación espontáneamente reversible, llamada elasticidad, y
 b) deformación irreversible llamada flujo.

Una ecuación constitutiva describe el comportamiento del material, lo que se logra expresando el tensor de esfuerzos como una función del movimiento relativo de partículas materiales, esto es, del tensor de deformación (sólidos) o del tensor de rapidez de deformación (fluidos).

Para que esta descripción sea adecuada, la ecuación debe satisfacer dos principios básicos (ref. 11) :

- Principio de determinismo. El comportamiento de un elemento del material depende solamente de su historia previa, y no del estado de sus alrededores.
- Principio de Indiferencia material. El comportamiento de un elemento dado, no depende del movimiento del material como un todo en el espacio, es decir, para considerar el comportamiento de un elemento basta considerar un pequeño entorno, ignorando el movimiento del material como un todo.

Además, la descripción dada por la ecuación constitutiva debe ser invariante a cambios del marco de referencia, de aquí la necesidad del uso de tensores.

Se acostumbra definir al tensor de esfuerzo total como:

$$\underline{T} = - p \underline{\delta} + \underline{S} \quad 2.1$$

en donde el primer termino constituye una parte isotrópica definida como un campo escalar, en donde se incluye la presión, y el segundo una parte deviatorica donde se consideran los demás esfuerzos existentes.

El escalar p se asocia, para fluidos compresibles con la presión termodinámica. Para fluidos incompresibles la práctica común consiste en definirlo como una variable dinámica adicional, determinable experimentalmente, denotada como la presión media:

$$p = - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \underline{T} \quad 2.2$$

El tensor \underline{S} , el tensor de esfuerzos adicionales, resulta de eliminar todo esfuerzo isotrópico, y se define formalmente como:

$$\underline{S} = \underline{T} + p \underline{\delta}$$

este tensor tiene gran importancia ya que con él se define la ecuación reológica de estado o ecuación constitutiva, la que, como se mencionó define la manera como un material responde a la acción de un esfuerzo.

Se puede demostrar (ref. 8,11) que la respuesta del material es función de las propiedades locales del material y del tensor de rapidez de deformación \underline{D} , el que, en coordenadas cartesianas se define como:

$$\underline{D} = \nabla u_{(s)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} & 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad 2.3$$

Ecuaciones constitutivas.

La ecuación constitutiva más simple, es la correspondiente al Modelo Newtoniano, la que es adecuada para fluidos estructuralmente simples, donde la disipación de energía por efectos viscosos se debe a la colisión de especies moleculares relativamente pequeñas, como es el caso de todos los gases, líquidos y de soluciones de bajo peso molecular.

Esta posee la forma general:

$$\underline{\underline{S}} = 2 \mu \underline{\underline{D}} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \underline{\underline{u}}) \underline{\underline{\delta}} \quad 2.4$$

el coeficiente de viscosidad, μ es función estrictamente de la presión, la temperatura y la composición. Para un fluido incompresible, es decir, cualquier líquido a temperatura constante, el segundo término desaparece, ya que $(\nabla \cdot \underline{\underline{u}}) = 0$; por lo que la ecuación 24) se reduce a:

$$\underline{\underline{S}} = 2 \mu \underline{\underline{D}} \quad 2.5$$

A los líquidos no-newtonianos puramente viscosos se les asocia una ecuación constitutiva lineal en $\underline{\underline{D}}$ por analogía con el modelo newtoniano, pero conteniendo un coeficiente de viscosidad variable, llamado viscosidad aparente, como:

$$\underline{\underline{S}} = 2 \eta \underline{\underline{D}} \quad 2.6$$

Se ha encontrado experimentalmente, que η , en flujos de corte simple, es una función de una combinación de varios componentes de $\underline{\underline{D}}$, además de depender de las variables termodinámicas. Esta funcionalidad se expresa (ref.3,8,9,10,11) en términos de los invariantes del tensor $\underline{\underline{D}}$, llamados así porque no cambian bajo transformación de coordenadas. Estos invariantes son:

$$I_D = \text{tr } \underline{\underline{D}} \quad 2.7$$

$$II_D = \text{tr } \underline{\underline{D}}^2 \quad 2.8$$

$$III_D = \text{det. } \underline{\underline{D}} \quad 2.9$$

Ahora bien, siendo η un escalar, deberá, en consecuencia, ser una función escalar de las componentes de $\underline{\underline{D}}$. Para esto se defi

ne la rapidez de corte $\dot{\gamma}$, como:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \operatorname{tr} \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}} \quad \dots 2.10$$

Bajo una argumentación similar, se define el escalar esfuerzo cortante como:

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr} \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{S}}} \quad \dots 2.11$$

Para definir la viscosidad aparente como:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad \dots 2.12$$

Esta ecuación no solo es una definición, sino que expresa la manera como ha de calcularse η . $\dot{\gamma}$ y τ se determinan experimentalmente en viscosímetros (ref.1,9,10) y la gráfica de τ vs $\dot{\gamma}$ se denota como "curva de flujo".

Clases de Fluidos.

Para los fluidos newtonianos, la curva de flujo es una línea recta, que pasa por el origen y cuya pendiente es la viscosidad μ .

Para los fluidos no-newtonianos, la curva de flujo no es lineal, y la viscosidad no es constante a una temperatura y presión dadas, sino que depende de otros factores como pueden ser:

- que la rapidez de corte en un punto del fluido dependa del esfuerzo cortante en ese punto.
- que la relación entre el esfuerzo cortante y la rapidez de corte dependa de la historia de deformaciones previas a las que se ha sometido el fluido (dependencia del tiempo).
- que se tengan presentes características correspondientes tanto a líquidos como a sólidos, y exhibición de recuperación elástica parcial después de la deformación (materiales viscoelásticos).

Los fluidos no-newtonianos, cuyas propiedades son independientes del tiempo son generalmente descritos por ecuaciones simples, de la forma

$$\dot{\gamma} = f(\tau) \quad 2.13$$

de manera que la rapidez de corte en cualquier punto depende solo del esfuerzo en ese punto, y

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad 2.14$$

pudiendo expresarse la funcionalidad de η como:

$$\eta = \eta(\dot{\gamma}) \quad 2.15$$

o

$$\eta = \phi(\tau) \quad 2.16$$

Clasificación. Según el comportamiento de la viscosidad aparente (ecuaciones 2.15 y 2.16) se tienen los siguientes grupos:

- Pseudoplásticos. Aquellos en que la viscosidad disminuye al aumentar la rapidez de corte.
- Dilatante. Aquellos en que, por el contrario, la viscosidad aumenta al aumentar la rapidez de corte
- Viscopásticos. Fluidos en los que se requiere de un esfuerzo finito τ_0 para iniciar el flujo.

El comportamiento se representa en las Fig.2.1 y 2.2

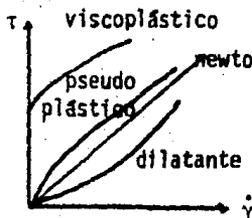


Fig.2.1
Curvas de flujo

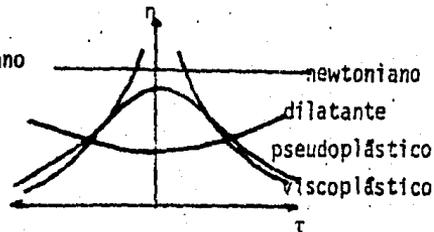


Fig 2.2
Curvas η - τ

Pseudoplásticos. El comportamiento pseudoplástico es típico de suspensiones de polímeros, y se puede explicar según 2 teorías (ref.9); Las moléculas de esta clase de fluidos están arregladas en una distribución compleja cuando se encuentran en reposo; bajo la influencia de un esfuerzo cortante se produce un reacomodo y las partículas tienden a orientarse en la dirección del deslizamiento. Esta orientación es proporcional a la relación de deslizamiento y se opone a los efectos del movimiento browniano, cuya influencia está determinada por la temperatura. Así la viscosidad aparente va disminuyendo al incrementarse la rapidez de deformación, hasta un punto tal donde no es posible un mayor alineamiento con las líneas de corriente y la curva de flujo se vuelve lineal; por otra parte, este alineamiento debe ser muy rápido (instantáneo) ó al menos indetectable por las técnicas viscosimétricas ordinarias, por lo que se considera independiente del tiempo.

En las dispersiones existen moléculas o partículas solvatadas. Al aumentar el deslizamiento éste separa las capas solvatadas resultando una menor interacción entre las partículas, y consecuentemente, una reducción de la viscosidad aparente. La linealidad de la curva de flujo a valores altos de la rapidez de corte puede corresponder a la completa destrucción de las capas solvatadas y a que la interacción entre las moléculas o partículas es constante.

Entre estos fluidos contamos los hules, adhesivos soluciones de polímeros o polímeros fundidos, grasas, suspensiones de almidón, acetato de celulosa, etc.

Para evaluar η (ec.2.14) es conveniente tener una representación analítica, aunque sea aproximada de $\eta(\dot{\gamma})$ ó $\phi(\tau)$, la que se obtiene de la curva de flujo de los datos obtenidos de viscosimetría.

El comportamiento reológico de un fluido pseudo-plástico típico tiene la forma mostrada en la Figura 2.3.

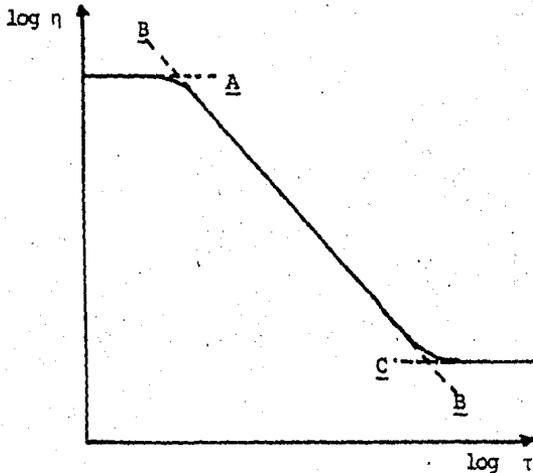


Fig.2.3 curva típica de $\eta-\tau$ para fluidos pseudoplásticos

Es posible usar varias expresiones dependiendo del rango de $\dot{\gamma}$ ó τ investigando, ya sea de $\eta(\dot{\gamma})$ ó $\psi(\tau)$

El modelo más simple y más usado es el de Oswald-de Walle ó "ley de la potencia", que propone (ref. 8,9)

$$\delta \quad \eta = k (\dot{\gamma})^{n-1} \quad \dots 2.17$$

$$\eta = k \frac{1}{n} (\tau^2)^{-(1-n)/2n} \quad \dots 2.18$$

para que

$$\tau = |k| |\dot{\gamma}|^{n-1} |\dot{\gamma} \quad \dots 2.19$$

Si $n=1$ y $k=\mu$, el modelo se reduce a la ley de Newton, de aquí que n se define como una medida de desviación del comportamiento newtoniano, y es llamado índice de comportamiento de flujo, y en el caso pseudoplástico se tiene $n < 1$.

NOTA: Las referencias se marcan con*

Claramente, el modelo de la potencia no ajusta toda la curva mostrada en la fig.2.3. En la particular ajusta solo uno de las líneas punteadas.

Las líneas marcadas A y C dan $n=1$ en ambos casos, y $k=\eta_0$ para A y $k = \eta_\infty$ para C; para la línea B $n < 1$ y corresponde la región propia para la ley de la potencia. En la práctica (ref:8), el rango en que el modelo ajusta sería de 1 a 4 órdenes de magnitud, lo que significa que en muchos casos, el modelo dará una excelente representación de los datos, aunque falla tanto a valores bajos y muy altos, ya sea de $\dot{\gamma}$ a τ .

Si los esfuerzos encontrados en la práctica son muy pequeños, se puede usar el modelo de Ellis (ref.8):

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\phi(\tau)} = \frac{1}{\eta_0} + m^{-1/n} (\tau^2)^{(1-n)/2n} \quad \dots 220$$

que consta de 3 parámetros positivos ajustables (η_0 , m , n). Si $n < 1$ el modelo tiende a la Ley de Newton para valores pequeños de τ , se ha encontrado este modelo muy adecuado para soluciones poliméricas hasta esfuerzos bastante grandes.

Si los esfuerzos encontrados en la práctica son más bien grandes, se puede usar el modelo de Sisko (*8):

$$\eta = \phi(\tau) = \eta_\infty + m^{1/n} (\tau^2)^{-(1-n)/2n} \quad \dots 221$$

que predice $\eta \rightarrow \eta_\infty$ si $\tau \rightarrow \infty$; pero a bajos esfuerzos $\eta \rightarrow \infty$ con $\tau^2 \rightarrow 0$, Sisko encontró que este modelo da una excelente representación para el comportamiento de varias grasas no-newtonianas.

A manera de mantener la simplicidad de la ley de la potencia y superar la objeción de que el tiempo característico no está incluido entre los parámetros, se puede usar el modelo de potencia truncado de Spriggs (*10).

$$\eta = \eta_0 \quad \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0$$

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} \right)^{n-1} \quad \dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0$$

..2.22

donde η_0 es la viscosidad a rapidez de corte cero, $(1/\dot{\gamma}_0)$ es un tiempo característico y n el índice de la ley de potencia (adimensional).

El modelo da una asíntota horizontal para $\dot{\gamma}$ pequeños y la asíntota de la ley de potencia para $\dot{\gamma}$ grandes.

El modelo de Carreau mantiene las propiedades útiles de la ley de potencia truncada pero no tiene discontinuidades en su primera derivada, mediante 4 parámetros:

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \quad 2.23$$

donde λ es una constante de tiempo, y n el índice de la ley potencia.

El modelo de Reiner-Philippoff (*8)

$$\eta = \eta_\infty + \frac{(\eta_0 - \eta_\infty)}{1 + \tau/G} \quad 2.24$$

y el de estabilidad estructural de Reiner:

$$\frac{1}{\dot{\eta}} = \frac{1}{\dot{\eta}_\infty} - \left(\frac{1}{\dot{\eta}_\infty} - \frac{1}{\dot{\eta}_0} \right) e^{-\frac{\tau^2}{X^2}} \quad 2.25$$

están basados en ciertas suposiciones acerca del comportamiento nonewtoniano. Aunque predicen correctamente la forma "S" de la curva η vs $\dot{\gamma}$ usualmente no son cuantitativamente correctas.

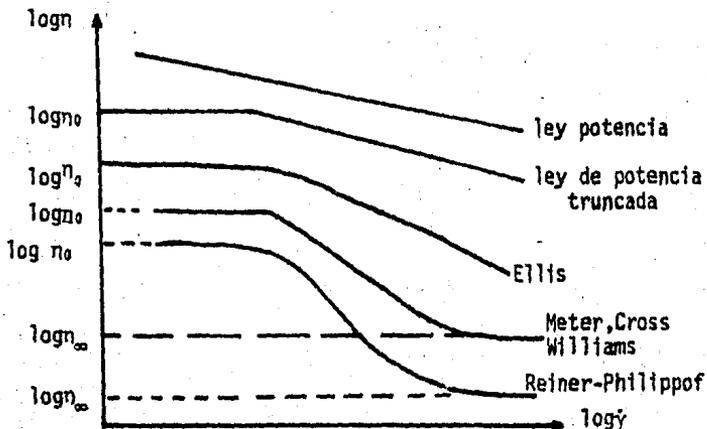


Fig. 24. Características de los modelos para fluidos no-newtonianos.

Basado en la teoría cinética de los líquidos, Eyring propone el modelo (*11)

$$\tau = A \operatorname{arc} \operatorname{senh} \left(- \frac{1}{B} \dot{\gamma} \right)$$

2.26

que predice el comportamiento pseudoplástico para valores finitos de τ y tiende asintóticamente a la ley de Newton si $\tau \rightarrow 0$, en cuyo caso $\mu = \frac{A}{B}$

Por medio de modelos moleculares (físico-químicos) Ree, Ree y Eyring proponen (*8):

$$\eta = \sum_{k=1}^{N_S} x_k \frac{\beta_k}{a_k} + \sum_{k=N_S+1}^N x_k \frac{\beta_k}{a_k} \frac{\operatorname{senh}^{-1} (\beta_k \sqrt{\tau^2})}{\beta_k \sqrt{\tau^2}} \quad 2.27$$

en donde

N_S y $(N-N_S)$ representan el número de "unidades newtonianas y no newtonianas respectivamente; X_k la fracción de área de flujo ocupada por el k -ésimo tipo de unidad de flujo y β_k y a_k son constantes determinadas empíricamente.

Otros modelos propuestos son (*9)

Kreiger Dougherty

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \frac{\tau_c}{\tau_c + \tau}$$

2.28

Casson:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \eta_{\infty} \sqrt{\dot{\gamma}}$$

2.29

Oldroyd:

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{1 + a'' \dot{\gamma}^2}{1 + a' \dot{\gamma}^2} \right)$$

2.30

Harris:

$$\eta = \eta_0 [1 - a_2 [1 - \exp(-\lambda_V^2 \dot{\gamma}^2)]]$$

2.31

$$\eta = \eta_0 [1 - a_2 \exp[-(\lambda_V \dot{\gamma})^2]]$$

2.32

Estos modelos resultan ser mucho más complicados, y no parecen presentar ventajas adicionales lo que explica su poco uso. Debe tenerse en cuenta además, que estas expresiones son empíricas, y por tanto, no se puede asegurar que los parámetros sean los mismos si se determinan en distintos dispositivos geométricos, y que es sumamente aventurado usar estos modelos fuera del rango en que se han evaluado las constantes del fluido.

Dilatantes. En los fluidos dilatantes se presenta una "dilatación" volumétrica bajo deformación, lo que resulta en un aumento de la viscosidad aparente a medida que aumenta la rapidez de corte. Aunque el término dilatante se usa para todos los fluidos que exhiben un incremento en la viscosidad con el incremento en la rapidez del corte; este comportamiento fue originalmente encontrado por Reynolds en suspensiones con alta concentración de sólidos y quien sugirió, que cuando estas suspensiones están en reposo, las partículas están orientadas en tal forma que los espacios vacíos son mínimos, y el líquido de la suspensión es suficiente para llevarlos.

Cuando el material es puesto en movimiento a bajas velocidades el líquido lubrica el movimiento de las partículas y el esfuerzo es pequeño. Al aumentar la rapidez de corte hay un aumento de espacios vacíos, con la consiguiente dilatación volumétrica. En estas condiciones la lubricación es inadecuada y la superficie de las partículas adyacentes llega a estar en contacto directo causando un aumento de la viscosidad aparente.

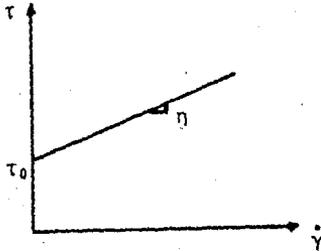
Algunas suspensiones acuosas de dióxido de titanio, soluciones de bórax y goma arábiga, almidón, silicato de potasio o goma arábiga en agua, lodo, arena mojada y polvo de tierra en líquido de baja viscosidad presentan este comportamiento.

El modelo de Ostwald-de Waele se aplica en este caso, con $n > 1$ (ya que $n < 1$ corresponde al comportamiento pseudo plástico).

Viscoplasticos. El modelo de plástico de Bingham consiste en una η constante arriba del valor del esfuerzo crítico τ_0 , el cual debe ser excedido para que se inicie el flujo.

$$\begin{array}{ll} \dot{\gamma} = 0 & \tau \leq \tau_0 \\ \tau - \tau_0 = \eta \cdot \dot{\gamma} & \tau > \tau_0 \end{array} \quad 2.33$$

lo que corresponde a una curva de flujo del tipo de la fig.2.5.



Este comportamiento se explica considerando que este plástico de Bingham, en reposo contiene una estructura tridimensional con rigidez suficiente para resistir cualquier esfuerzo menor que τ_0 . Cuando este valor es superado la estructura se desintegra por completo y el flujo es el correspondiente a un fluido newtoniano bajo el efecto de un esfuerzo cortante $\tau - \tau_0$. Los lodos, pinturas de aceite, pastas de dientes, etc. muestran este tipo de comportamiento.

El modelo generalizado de Bingham.

$$\tau - \tau_0 = k |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma} \quad 2.34$$

incluye además, las características correspondientes al modelo de Ostwald-de Waele.

Fluidos no newtonianos dependientes del tiempo.

Para muchos fluidos reales, no es posible aplicar una ecuación reológica simple como

$$\dot{\gamma} = f(\tau) \quad 2.13)$$

ya

que la relación entre rapidez de corte ($\dot{\gamma}$) y esfuerzo cortante (τ) varía con el tiempo, es decir, el valor de la viscosidad aparente no solo depende de la rapidez de corte, sino además del tiempo durante el cual se ha sometido a esfuerzo el material. Hablamos entonces de fluidos tixotrópicos y reopécticos.

Tixotrópicos. Los fluidos tixotrópicos son aquellos que, al ser sometidos a un esfuerzo cortante, presentan cambios en su estructura interna; como pueden ser flogulación o deflogulación de una fase dispersa en un sistema multifásico, o por ruptura de moléculas de cadena larga, o por otros factores, como puede ser una reacción química.

La tixotropía frecuentemente es confundida con el comportamiento pseudoplástico, ya que ambos se refieren a una disminución en la viscosidad aparente. Sin embargo, la tixotropía es más un efecto dependiente del tiempo que de la rapidez de corte y se refiere a un decremento de la viscosidad aparente no instantáneo, si la rapidez de corte es constante. Este decrecimiento, tiene sin embargo un valor de viscosidad limitante al que tiende el material.

El resultado es una serie de curvas de histéresis de τ vs $\dot{\gamma}$ cuando $\dot{\gamma}$ se somete a repetidos reciclajes. La altura de las curvas se incrementa aplicando el esfuerzo a intervalos mayores de tiempo antes de hacer la trayectoria de regreso.

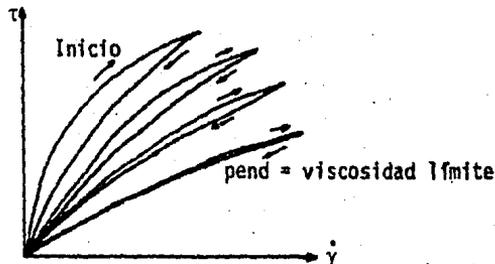


Fig.2.6 Comportamiento tixotrópico

El criterio de reversibilidad (es decir que la estructura se recupera al reposo) es condición necesaria para la existencia del comportamiento tixotrópico. En el caso de una disminución irreversible de la viscosidad se habla de degradación al corte. Si la estructura no se recobra completamente al cesar el esfuerzo, es posible que algún factor además del tiempo, influya en su comportamiento (ej. la deformación total acumulada).

Muy pocas investigaciones, teóricas o experimentales se han desarrollado sobre fluidos tixotrópicos y no es fácil obtener resultados experimentales consistentes para este tipo de fluidos.

El caso más simple es el de tixotropía simétrica, en el cual la estructura del fluido al cesar el esfuerzo se rehace con la misma rapidez que la del proceso de ruptura, siendo simétrica en este sentido.

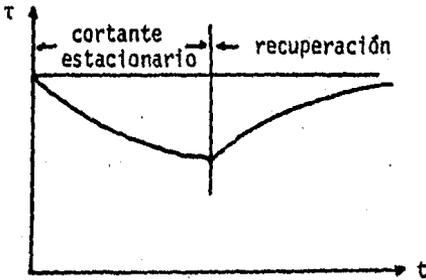


Fig. 2.7.
Tixotropía Simétrica

Estos fluidos se distinguen de los llamados viscoelásticos, que serán tratados en el siguiente capítulo, en que un fluido tixotrópico (simétrico) tiene, en esencia, memoria perfecta y por tanto recobra todas sus propiedades con el reposo.

Bajo el principio de que debe existir un cambio isotrópico en las propiedades materiales debido al movimiento cortante, se ha sugerido una forma similar a la ecuación del esfuerzo en viscoelásticos para el cambio de la viscosidad con el tiempo (*3):

$$\eta(t) = \eta_0 - \int_0^t \chi_T (t - t') \frac{d f(\dot{\gamma}^*)}{d t'} dt'$$

donde:

2.34

$$\chi_T (t-t') = \int_0^{\infty} \frac{R(II)}{II} \exp \left[- \frac{(t-t')}{II} \right] dII$$

II es el tiempo de relajación tixotrópico y $R(II)$ es la función de distribución de los tiempos de relajación. η_0 es la viscosidad inicial (sin perturbar) y $f(\dot{\gamma}^2)$ una función simétrica de la rapidez de corte.

Reopécticos. El tipo de comportamiento opuesto a la tixotropía es el de los fluidos reopécticos, en los que la estructura se forma bajo el efecto del movimiento al corte estacionario, presentándose un incremento en la viscosidad con el tiempo, si la rapidez de corte es constante. Las curvas de histéresis también pueden observarse al someter a ciclos la rapidez de corte, pero en este caso tienen la dirección opuesta al del comportamiento tixotrópico (fig. 2.6).

Existe por lo general un valor crítico del esfuerzo, arriba del cual la estructura no solo no se forma, sino que sufre ruptura. Las soluciones diluidas de pentóxido de Vanadio y bentonita, suspensiones de oleato de amonio, pastas, exhiben este tipo de comportamiento, y es frecuente asociarlo con un sistema metaestable que tiende a una gel bajo el efecto del flujo cortante.

•

CAPITULO III

FLUIDOS VISCOELASTICOS.

CAPITULO III FLUIDOS VISCOELASTICOS.

Generalidades.

Como indica el nombre, un material viscoelástico es aquel que posee simultáneamente propiedades elásticas y viscosas en diferentes y variables grados.

Estos van desde sólidos viscosos, como lo es el hule, mucho más elástico que viscoso, hasta líquidos elásticos, como los polímeros fundidos y las soluciones poliméricas, que son más viscosos que elásticos. Los fluidos compresibles pueden ser viscosos al corte, y elásticos en deformaciones volumétricas, pero el término viscoelástico está reservado para los materiales que exhiben ambas propiedades, elásticas y viscosas, en cualquier deformación, al corte y/o volumétrica.

Estos materiales, entonces, constituyen una categoría intermedia entre sólidos y líquidos. Vale la pena, por tanto, establecer la diferencia entre éstos, la cual puede ser que: "un fluido es capaz de sostener una deformación continua a una rapidez finita cuando es sujeto a un esfuerzo constante no-isotrópico, mientras que un sólido no". (ref.10).

El sólido en respuesta a un esfuerzo anisotrópico alcanza un estado deformado de equilibrio, mientras que no hay tal estado de equilibrio para el líquido.

Por su comportamiento al esfuerzo los materiales se pueden clasificar dentro de un esquema como el mostrado en la fig.3.1 (ref.13).

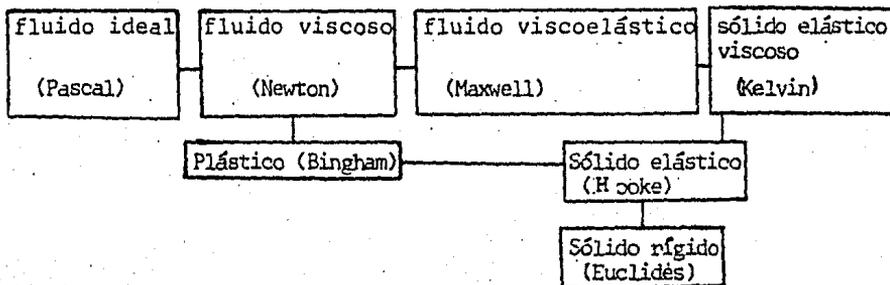


Fig.3.1 Clasificación general

Fenómenos en flujo

Como se menciona en el capítulo anterior, en los materiales puramente viscosos, los esfuerzos internos son función solamente de la rapidez de corte instantánea; así también, en los materiales puramente elásticos los esfuerzos desarrollados son función únicamente de la deformación instantánea.

Para los materiales viscoelásticos los esfuerzos internos no son solo función de la deformación instantánea (corte, rapidez de corte, etc.), sino que dependen también de la historia de sus deformaciones. Por esta razón, estos materiales son frecuentemente llamados materiales con memoria, dado que las deformaciones previas influyen en el estado de esfuerzos presente.

Para los materiales reales, la historia del pasado reciente es más importante que la historia distante, así que pueden describirse con una función de memoria desvaneciente.

Como se verá, la influencia del tiempo sobre la relación entre esfuerzo y deformación puede ser descrita ya sea por una ecuación diferencial que involucre derivadas del esfuerzo y/o de la deformación con respecto al tiempo, o por una ecuación integral con el tiempo como variable.

No es pues, sorprendente que las diferencias en el comportamiento mecánico de los materiales viscosos, elásticos y viscoelásticos sea más evidente en situaciones no estacionarias o dependientes del tiempo. Para fluidos, esto incluye flujos no estacionarios en el sentido Lagrangiano o Euleriano.

Comparación de comportamientos.

Uno de los métodos de comparar las propiedades de un material es estableciendo la curva de respuesta de dicho material a algún esfuerzo o deformación específicos. En principio cualquier función temporal del esfuerzo o de la deformación sería suficiente, pero, como en el caso de la teoría de control automático, son las entradas escalonada y sinusoidal las más fáciles de manejar matemáticamente, y las preferidas.

Al comparar las características de respuesta de materiales idealmente viscosos (Newtonianos), idealmente elásticos (Hookeanos) y materiales típicamente viscoelásticos, observamos (fig.3.2):

A: Experimentos en transiente. Respuesta a distintas funciones escalón:

1-Experimento de deslizamiento y recuperación.

Un esfuerzo constante es aplicado al tiempo t_0 y removido al tiempo t_1

- el fluido newtoniano responde con una rapidez de corte constante entre t_0 y t_1 , con una deformación constante (desplazamiento) después de t_1 (no hay recuperación)
- el sólido de Hooke responde con una deformación constante entre t_0 y t_1 , con una recuperación completa e instantánea en t_1
- el fluido viscoelástico responde con una deformación no lineal, que se aproxima a una rapidez de corte constante.

2-Relajación a un esfuerzo: una deformación instantánea (desplazamiento) se mantiene constante en la prueba para sólidos, mientras que en la de líquidos se mantiene una rapidez de corte constante hasta el tiempo t_1 . Para el primer caso:

- el fluido newtoniano responde instantáneamente con un esfuerzo infinito, que corresponde a una rapidez de corte instantánea infinita (ya que se requiere un esfuerzo infinito para producir una rapidez de corte infinita, en fluido newtoniano)
- el sólido de Hooke responde instantáneamente con un esfuerzo constante.
- el fluido viscoelástico responde con un esfuerzo instantáneo, infinito y se relaja a una rapidez finita. La relajación es total.

B: Experimentos dinámicos - respuesta a una frecuencia.

3- Oscilatorio: una deformación sinusoidal es aplicada al material:

- en el fluido newtoniano se desarrolla un esfuerzo oscilato

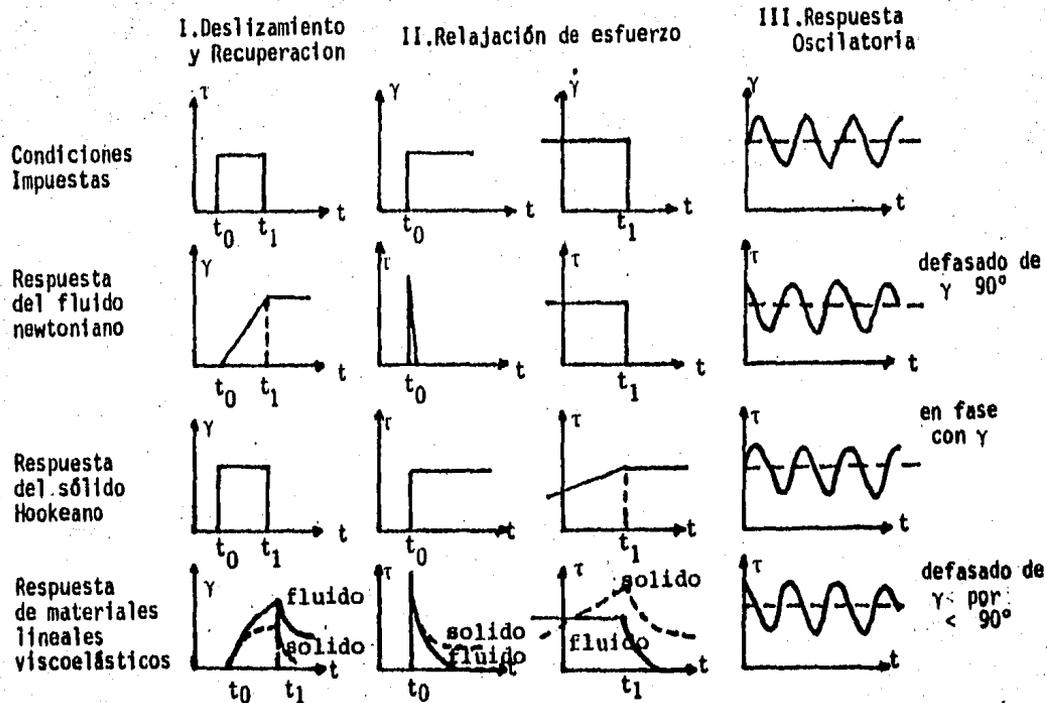


Fig. 3.2 Respuesta comparativa de materiales viscosos, elásticos y viscoelásticos.

- rio, desfasado de la deformación 90° (el esfuerzo está en fase con la rapidez de corte).
- en el sólido de Hooke el esfuerzo oscilatorio está en fase con la deformación.
- en el fluido viscoelástico el esfuerzo se desfasa de la deformación menos de 90° , dando componentes del esfuerzo -- "en fase" y "fuera de fase".

Es importante mencionar que los efectos descritos anteriormente son consecuencia solo de las propiedades reológicas de los materiales, y se han despreciado los efectos inerciales. Por ejemplo; una deformación (desplazamiento) instantanea requerirá una fuerza infinita para cualquier cuerpo de masa finita, dado que corresponde a una aceleración infinita. Sin embargo, si la masa del sistema o sus aceleraciones son lo suficientemente pequeñas para -- que las fuerzas inerciales sean mucho menores que las fuerzas elásticas y viscosas, la respuesta será muy parecida a la descrita en la fig. 3.2

Consecuencias de la elasticidad en los líquidos

Algunas consecuencias adicionales de la elasticidad en líquidos se pueden encontrar en varias situaciones de flujo, que contrastan con el comportamiento de los líquidos puramente viscosos.

En la fig. 3.3 se dibuja una línea dentro del fluido al inyectar carbón en suspensión (a) y se inicia el flujo al aplicar un gradiente de presión (b).

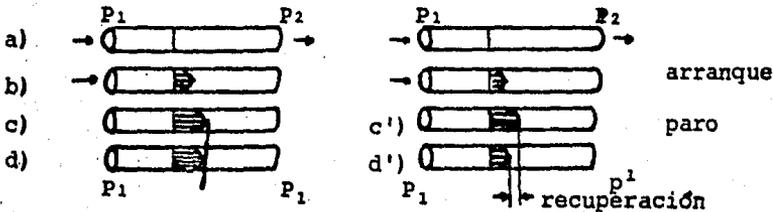


Fig. 3.3

Al remover el gradiente de Presión, (c), el líquido inelástico se detiene inmediatamente (d) (si las fuerzas inerciales son pequeñas). Pero en el caso de un líquido elástico, el líquido se detiene (c') pero retrocede a una posición corriente arriba de la posición que ocupaba al tiempo de remover el gradiente de presión (d').

La fig.3.4 muestra a un fluido contenido entre las superficies de un cono y un plato. Atando una pesa de manera que al caer aplique un torque al cono superior, y retirando esta pesa tiempo t_1 después, se obtiene un torque que es una función cuadrática pulsante como se observa en la gráfica de la fig.3.4. Para un líquido inelástico, el torque en el cono se estabilizará gradualmente, pero si el fluido es elástico, se observarán una o más oscilaciones.

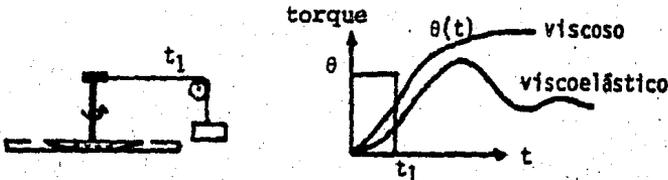


Fig.3.4

La fig. 3.5 ilustra el efecto de reducción del arrastre observado en flujo turbulento cuando un pequeño porcentaje (algunas partes por millón) de ciertos polímeros solubles en agua de alto peso molecular se disuelven en agua. El resultado puede ser una drástica reducción en las pérdidas por fricción (caída de presión) a una rapidez de flujo dada, en régimen turbulento a altas tasas de flujo.

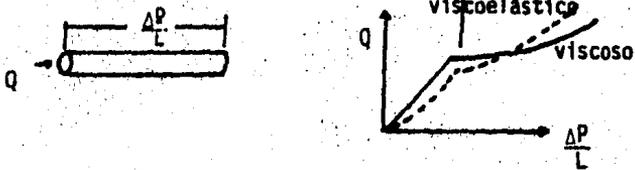


fig. 3.5

La fig. 3.6 representa al patrón de flujo en los alrededores de una contracción súbita, al fluir desde un tubo de diámetro mayor a otro significativamente más pequeño. El líquido inelástico fluye en línea recta directamente hacia la entrada del tubo pequeño, aproximándose desde todas direcciones. El fluido viscoelástico, sin embargo, fluye hacia la entrada del tubo pequeño sólo a partir de una pequeña región cónica alrededor de la línea del centro. Una porción significativa del fluido es atrapada en grandes regiones de recirculación y no entra al tubo pequeño.

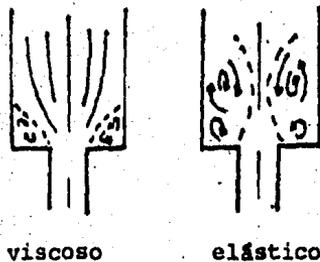


fig 3.6

El último efecto fig. 3.7, puede ser observado al transferir soluciones diluidas de polímeros con un sifón. Si al sifonear un líquido puramente viscoso la punta del sifón se eleva sobre el nivel del líquido el flujo, por supuesto, se detiene. Sin embargo, en el caso de una solución de un polímero elástico la

punta del sifón puede ser elevada (hasta a más de una pulgada) sobre a superficie sin que se interrumpa el flujo.

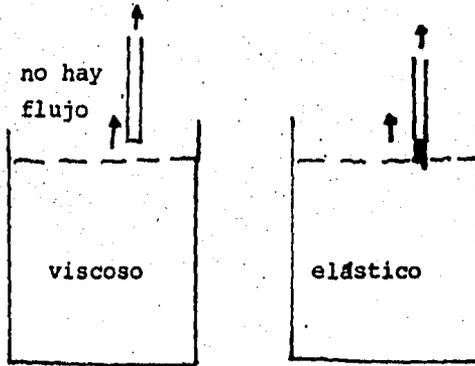


fig. 3.7

Por otra parte los fluidos viscoelásticos exhiben otros comportamientos de flujo no usuales en estado estacionario, como consecuencia de la presencia de esfuerzos normales extra, los que se desarrollan en direcciones normales a la de flujo y que se analizaran posteriormente.

Modelos diferenciales

Dadas las características de los fluidos viscoelásticos encontramos que no es posible caracterizarlos con un ecuación simple como:

$$\dot{\gamma} = f(\tau)$$

La diferencia esencial será, en que para estos materiales se requiere hacer uso de derivadas de τ y $\dot{\gamma}$ con respecto al tiempo en general por tanto:

$$f_1 (D) \tau = f_2 (D) \dot{\gamma}$$

Ecuación general que sujeta a las condiciones de fronteras correctas dará la respuesta del material a los esfuerzos o deformaciones impuestos. Sin embargo, para los fluidos reales las ecuaciones son muy difíciles de resolver, aún suponiendo que los valores de los parámetros relevantes pueden ser derivados a partir de la experimentación. En este sentido se tiene que una gran cantidad de información cualitativa puede ser obtenida del estudio de modelos mecánicos idealizados o analogías, las que son diseñadas para explicar aproximadamente la dependencia temporal de un fluido real. Por otra parte, desde el punto de vista fenomenológico la postulación de un modelo tiene relevancia siempre y cuando los parámetros del modelo a ajustar tengan un sentido físico.

La aproximación clásica a la descripción de la respuesta de materiales que exhiben propiedades viscosas y elásticas combinadas está basada en una analogía con la respuesta de ciertos elementos mecánicos.

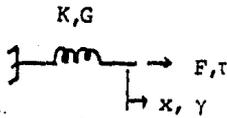
Esto involucra la construcción de modelos viscoelásticos por combinación de elementos mecánicos que representan propiedades puramente viscosas y puramente elásticas. Estos modelos son, por supuesto, ideales, y son útiles para representar el comportamiento de materiales reales solo en la extensión en que la respuesta observada por el material real puede ser aproximada a la del modelo.

Los modelos analógicos contruidos a partir de elementos viscosos lineales (Newtonianos) y elásticos lineales (Hookeanos) representan el comportamiento viscoelástico lineal. Dado que los materiales reales generalmente exhiben comportamiento no lineal a grandes deformaciones, estos modelos son apropiados solo para desplazamientos de pequeña amplitud, y por lo tanto no son adecuados para predecir las deformaciones continuas, o comportamiento de flujo de los materiales reales.

Un material lineal es aquel que obedece el Principio de Superposición, por ej: si $\gamma_1(t)$ es la deformación al tiempo t cuando el material está sujeto al esfuerzo τ_1 y $\gamma_2(t)$ es la deformación al mismo tiempo t si está sujeto al esfuerzo τ_2 entonces, si éste es lineal la deformación al tiempo t , cuando esté sujeto al esfuerzo $\tau_1 + \tau_2$ será $\gamma_1(t) + \gamma_2(t)$.

Los elementos mecánicos convencionalmente usados para representar el comportamiento lineal elástico y viscoso son el resorte y el amortiguador.

dor (fig. 3.8).



$$F = K x$$

$$\tau = G \gamma$$

$$F = D \frac{dx}{dt}$$

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt}$$

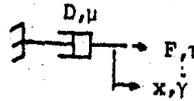


Fig 3.8 Elementos mecánicos

La fuerza aplicada a un resorte lineal es directamente proporcional a su deformación, y la constante del resorte es la constante de proporcionalidad. Si la fuerza se asume análoga al esfuerzo cortante - y la deformación del resorte análoga a la deformación al corte, el resorte resulta ser análogo a un material elástico al corte de Hooke con la constante del resorte representando el modulo de deslizamiento (al corte) G . En forma similar la fuerza que actúa sobre un amortiguador lineal es proporcional a su rapidez de extensión estableciéndose la analogía con el esfuerzo cortante y la rapidez de corte - para un fluido newtoniano sujeto a un corte simple, respectivamente. El factor de proporcionalidad representa en este caso la viscosidad newtoniana. Se supone que el amortiguador es infinito y no está restringido en extensión para que sea posible el desplazamiento continuo, es decir el flujo.

El comportamiento lineal viscoelástico, es entonces representado por varias combinaciones de resortes y amortiguadores y éstos sirven pa-

ra formular las ecuaciones reológicas de estos materiales.

Modelo de Maxwell.

Uno de los modelos más simples puede construirse con un resorte y un amortiguador en serie y es conocido como Modelo de Maxwell; el que corresponde a un fluido, dado que la aplicación de un esfuerzo constante ocasiona una deformación continua debido a la extensión no restringida del amortiguador.

La tensión total (desplazamiento del modelo) es la suma de la tensión elástica del resorte, γ_r , y la tensión fluida del amortiguador γ_a ;

$$\gamma = \gamma_r + \gamma_a$$

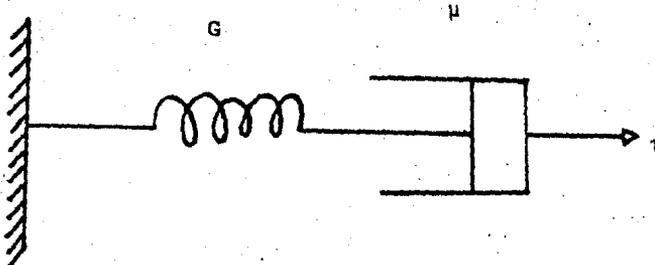


fig. 3.9 Modelo de Maxwell

donde:

$$\dot{\gamma}_r = \frac{\dot{\tau}}{G} \quad 3.4$$

$$\dot{\gamma}_a = -\frac{\dot{\tau}}{\mu} \quad 3.5$$

diferenciando γ_r con respecto al tiempo:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_r + \dot{\gamma}_a = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\dot{\tau}}{\mu} \quad 3.6$$

o

$$\tau + \lambda \dot{\tau} = \mu \dot{\gamma} \quad 3.7$$

donde:

$$\lambda = \frac{\mu}{G} \quad 3.8$$

El parametro λ , representa una constante de tiempo y su significado físico se establece considerando que si el movimiento cesa en un instante dado, el esfuerzo decae exponencialmente y alcanza un valor de τ/e en un tiempo $t = \lambda$ (lo que se demostrará posteriormente).

Se puede observar que si $G \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow 0$) el resorte se vuelve una conexión rígida y el modelo se reduce a un fluido de Newton. Así también si $\mu \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow \infty$) el amortiguador se vuelve rígido y el modelo correspondé a un sólido Hookeano.

Multiplicando la ecuación 3.7 por el factor integrante $e^{\frac{t}{\lambda}} dt$, re-
 rreglando e integrando (con la condicional adicional de τ finita
 a $t = -\infty$) se obtiene la forma generalizada, frecuentemente usa-
 da en la mecánica de fluidos no newtonianos.

$$\tau = - \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\mu}{\lambda} \exp\left[-\frac{(t-t')}{\lambda}\right] \right\} \dot{\gamma} dt' \quad 3.9$$

o en la forma equivalente:

$$\tau = \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\mu}{\lambda} \exp\left[-\frac{(t-t')}{\lambda}\right] \right\} \gamma dt' \quad 3.10$$

La función incluida dentro de las llaves en la ecuación 3.9 es llamada módulo o función de relajación $\psi(t)$ y se define como el esfuerzo por unidad de deformación inicial, expresada como una función del tiempo t cuando el material ha sido sujeto a una deformación inicial instantánea γ_0 al tiempo cero.

$$\psi(t) = \frac{\tau(t)}{\gamma_0} \quad 3.11$$

$$= \frac{\mu}{\lambda} \exp\left[-\frac{t-t'}{\lambda}\right] \quad 3.12$$

De esta forma el Modelo de Maxwell dice que el esfuerzo en el tiempo actual t depende la rapidez de corte al tiempo t y de la rapidez de corte de todos los tiempos anteriores t' , con un factor de peso (la función de relajación) que decae exponencialmente al tomar tiempos anteriores. Así el modelo de Maxwell utiliza la noción de memoria desvaneciente; el fluido recuerda muy bien lo experimentado en tiempos muy recientes, pero solo tiene un lejano recuerdo de los eventos en el pasado distante.

La ecuación 3.10 se obtiene integrando por partes la ecuación 3.9 y usando:

$$\gamma(t, t') = \int_t^{t'} \dot{\gamma}(t'') dt'' \quad 3.13$$

debe notarse que el estado de referencia para γ es el que corresponde a $t = t'$; es decir, la deformación es medida con referencia a la configuración al tiempo presente t . Esta ecuación muestra también el concepto de memoria desvanecimiento y la cantidad contenida entre llaves en la ecuación 3.10 es llamada función memoria.

Comportamiento del Fluido de Maxwell

- **Relajación de esfuerzo:** A fin de conocer el comportamiento del fluido de Maxwell en una prueba de relajación del esfuerzo en corte simple analizaremos su respuesta al imponer súbitamente una tensión γ_0 al tiempo cero y mantenerla constante. Si la extensión inicial fuese infinitamente rápida el amortiguador permanecería rígido, dado que una rapidez de corte infinita requeriría un esfuerzo infinito para extenderlo. Por lo tanto, solo el resorte se extenderá inicialmente. Si esta extensión se mantiene constante, la fuerza de contracción del resorte hará reaccionar el amortiguador causando que la extensión del resorte disminuya.

La función de imposición de la tensión se puede representar como:

$$\gamma(t) = \gamma_0 U_0(t) \quad 3.14$$

donde $U_0(t)$ es la función escalón definida como:

$$U_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

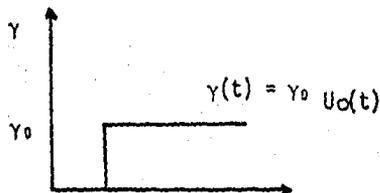


Fig. 3.10

Tensión aplicada en la prueba de relajación de esfuerzo

El esfuerzo resultante como función del tiempo se obtiene resolviendo las ecuaciones 7 y 13, lo que es posible utilizando la transformada de Laplace, entonces:

$$\bar{\tau}(s) [1 + \lambda s] - \lambda \tau(0) = \mu [s \bar{\gamma}(s) - \gamma(0)] \quad 3.15$$

Considerando como valor inicial, a $t=0$, como el correspondiente al estado de referencia de material no deformado ($t \rightarrow 0$):

$$\tau(0) = \gamma(0) = 0 \quad 3.16$$

y considerando la transformada de la tensión:

$$\bar{\gamma}(s) = \frac{Y_0}{s} \quad 3.17$$

resolvemos para $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau}(s) = \frac{\mu Y_0}{1 + \lambda s} = \frac{G Y_0}{1 + 1/\lambda} \quad 3.18$$

Aplicando la transformada inversa:

$$\tau(t) = G Y_0 e^{-t/\lambda} = \tau_0 e^{-t/\lambda}$$

De manera que la respuesta inicial del esfuerzo ($\tau_0 = G Y_0$ si $t \rightarrow 0^+$) es puramente elástica y decae exponencialmente con el tiempo, alcanzado $\sim 37\%$ ($1/e$) de su valor inicial en un tiempo igual a λ .

Si el material fuera puramente viscoso, $G=0$ y $\lambda = 0$, el esfuerzo se relaja infinitamente rápido. En realidad los efectos inerciales impiden la aplicación de desplazamientos verdaderamente instantáneos. Si el material fuera puramente elástico, $\mu = 0$ y $\lambda = \infty$ el esfuerzo no se relaja.

Las respuestas comparadas se muestran en la fig. 3.11.

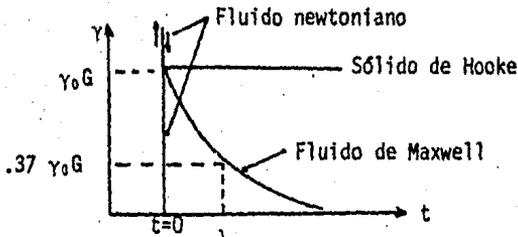


Fig.3.11

Respuesta a la prueba de relajación

El efecto de la rapidez finita al imponer la deformación se muestra en la Fig.3.12

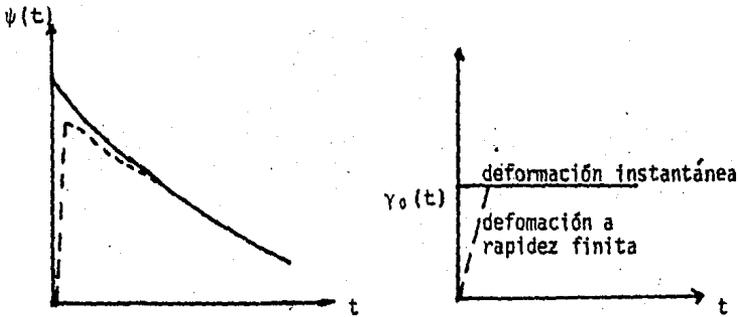


Fig.3.12

Efecto de la rapidez finita en la imposición de la deformación.

Este efecto frecuentemente puede generar soluciones espúreas.

Todos los materiales reales exhiben propiedades viscosas y elásticas en diferentes grados. La naturaleza viscosa o elástica relativa de un material específico está determinada por la mag-

nitud de la constante de tiempo característica del material (equivalente al tiempo de relajación) relativa al tiempo de observación.

Por ejemplo: la formación de granito tiene un tiempo característico de algunos años. Así que si es sujeto a una prueba de relajación de esfuerzo por algunas horas o días, o incluso semanas aparentara ser un sólido elástico. Sin embargo, si fuera observado por varias décadas, el esfuerzo probablemente se relajaría completamente, y parecería tratarse de un fluido. Así también una prueba de relajación de agua en la cual el tiempo de observación fuera medido con una precisión, digamos de 0.1 seg nos indicaría un fluido puramente viscoso. Pero si las observaciones fueran limitadas a 10^{-12} seg, la prueba probablemente indicaría un comportamiento sólido. Obviamente, los efectos inerciales deberían ser considerados en esta prueba.

La razón del tiempo característico de relajación de un material al tiempo de observación característico ha sido llamada Número de Deborah:

$$De = \frac{\lambda}{t_e} \quad 3.20$$

En la escala física, t_e representa la escala de tiempo en la que ocurren cambios significativos, y puede ser desde el tiempo de residencia en una tubería o tanque hasta el tiempo (estadístico) de las fluctuaciones turbulentas. Así $De \ll 1$ representa un comportamiento predominantemente viscoso (fluido), $De \gg 1$ un comportamiento predominantemente elástico (sólido) y $De = 1$ un comportamiento viscoelástico.

- Deslizamiento: La prueba de deslizamiento también nos permite distinguir entre un comportamiento relativamente viscoso o elástico. En este caso se aplica instantáneamente un esfuerzo constante de magnitud τ_0 , y se mantiene indefinidamente, observándose la deformación resultante como función del tiempo. Se observa también

respuesta de la deformación al retirar el esfuerzo después de un tiempo finito, lo que constituye la prueba de recuperación.

Las condiciones impuestas corresponden a:

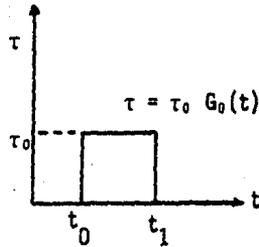


Fig.3.13

Esfuerzo aplicado a la prueba de deslizamiento

$$\tau(t) = \tau_0 [U(t) - U(t-t_1)] = \tau_0 G_0(t_1) \quad 3.21$$

en donde la función $G_0(t)$ representa un pulso rectangular de magnitud unitaria que inicia a $t=0$ y termina a $t=t_1$,

Aplicando la transformada de Laplace, y resolviendo con condiciones de referencia en el estado no deformado, se obtiene para la ec.3.21

$$\bar{\tau}(s) = \frac{\tau_0}{s} (1 - \exp[-t_1 s]) \quad 3.22$$

Resolviendo para la ecuación 15 obtenemos para $\bar{\gamma}$:

$$\bar{\gamma} = \frac{\tau_0}{s} \left[\frac{1+\lambda s}{\mu s} \right] [1 - e^{-t_1 s}] \quad 3.23$$

$$= \frac{\tau_0}{\mu} \left[\frac{1}{s} + \frac{\lambda}{s} \right] [1 - e^{-t_1 s}] \quad 3.24$$

que al aplicar transformada inversa nos lleva a:

$$\gamma(t) = \frac{\tau_0}{\mu} \{ t + \lambda - [(t-t_1) + \lambda] U(t-t_1) \} \quad 3.25$$

en que la función escalón es cero si $t < t_1$. Para $t > t_1$, las variables de tiempo se cancelan y la deformación al corte es constante y de un valor de $\tau_0 t_1 / \mu$.

La respuesta completa se da en la fig.3.14

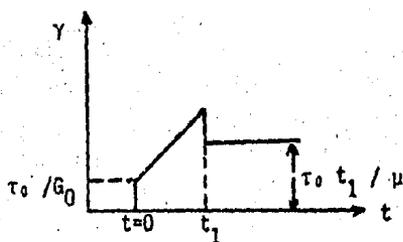


Fig.3.14

Deslizamiento y recuperación en la prueba de deslizamiento para un fluido de Maxwell

Se observa que la respuesta inicial es elástica, seguida de una respuesta del fluido puramente viscosa. Cuando el esfuerzo es retirado, la respuesta es nuevamente elástica, mostrando una recuperación al corte o efecto de memoria. Este tipo de comportamiento se representa cualitativamente para fluidos elásticos; sin embargo, ningún fluido real se ha encontrado, que corresponda cualitativamente al Modelo de Maxwell.

Modelo de Voigt. Un resorte y un amortiguador en paralelo representan el modelo más simple posible para un sólido viscoelástico el cual es llamado cuerpo de Voigt. Dado que una respuesta de deformación continua a esfuerzo constante es imposible, debido al

resorte, el modelo representa un sólido viscoelástico.

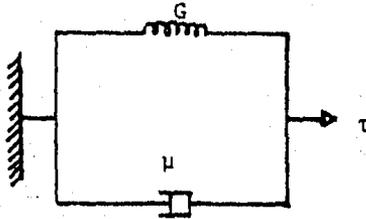


Fig.3.15 Analogía mecánica del Modelo de Voigt

En este caso, el esfuerzo total es la suma de esfuerzos elástico (sólido) y viscoso (fluido):

$$\tau = \tau_r + \tau_a = G\gamma + \mu \dot{\gamma} \quad 3.26$$

o

$$\frac{\tau}{G} = \lambda' \dot{\gamma} + \gamma \quad 3.27$$

donde:

$$\lambda' = \frac{\mu}{G} \quad 3.28$$

representa el tiempo de retardación, así que si el esfuerzo es removido, la tensión decae exponencialmente, con una constante temporal de λ' (es decir, la tensión decae al 37% (1/e) de su valor inicial en un tiempo λ').

El modelo se reduce al del líquido newtoniano si $G = 0$ o $\lambda' \rightarrow \infty$ y al sólido de Hooke si $\mu = 0$ o $\lambda' = 0$.

Comportamiento del sólido de Voigt.

-Deslizamiento reptante y recuperación. En este caso, al aplicar la transformada de Laplace a la ec. 3.27 se obtiene:

$$\bar{\gamma}(s) = G \lambda' [s \bar{\gamma}(s) - \gamma(0)] + G \bar{\gamma}(s) \quad 3.29$$

y el estado no deformado - de referencia - corresponde a $\gamma(0) = 0$.

Resolviendo con la ecuación 3.22

$$\bar{\gamma}(s) = \frac{\tau_0}{\lambda' G} \frac{1}{s(s + 1/\lambda')} [1 - e^{-t, s}] \quad 3.30$$

Que al aplicar la transformada inversa nos lleva a:

$$\gamma(t) = \frac{\tau_0}{G} [(1 - e^{-t/\lambda'}) - (1 - e^{-(t-t_1)/\lambda'}) U(t-t_1)] \quad 3.31$$

Como se ilustra en la fig. 3.16

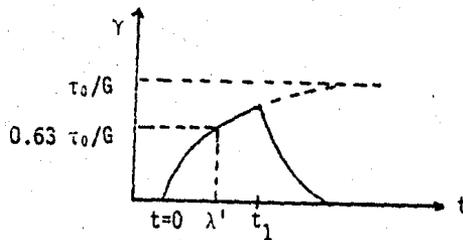


Fig 3.16 Deslizamiento y recuperación de un sólido de Voigt

Si el esfuerzo no es removido a $t=t_1$, sino que se mantiene constante, la respuesta se simplifica, y:

$$\tau(t) = \frac{\tau_0}{G} (1 - e^{-t/\lambda'}) \quad 3.32$$

Es evidente que la deformación inicialmente se incrementa exponencialmente, aproximándose finalmente al valor asintótico de τ_0/G . Si el material fuera un sólido de Hooke ($\mu = 0$) se desplazaría instantáneamente a esta cantidad.

La viscosidad, por tanto, retarda la rapidez en la que se alcanza el estado de equilibrio.

La cantidad λ' representa al tiempo característico del material, y el tiempo requerido para que la deformación aumente a un 63% de su valor final de equilibrio, razón por la que es llamada tiempo de retardación del sólido viscoelástico.

Al igual que en el Modelo de Maxwell, en el modelo de Voigt se define la función de deslizamiento como:

$$\phi(t) = \frac{\gamma(t)}{\tau_0} \quad 3.33$$

Se observa que si $De \ll 1$, $t \gg \lambda'$ la ecuación 32 se reduce a:

$$\gamma = \frac{\tau_0}{G} \quad 3.34$$

y el comportamiento corresponde al de un sólido puramente elástico.

Derivando la ecuación 32 con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau_0}{\mu} e^{-t/\lambda'} \quad 3.35$$

y si $De \gg 1$, $t \ll \lambda'$ se tiene:

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau_0}{\mu} \quad 3.36$$

y el material parece un fluido puramente viscoso

- Relajación de esfuerzo: en este caso la ecuación transformada es:

$$\bar{\tau}(s) = G \gamma_0 \left[\frac{1}{s} + \lambda' \right] \quad 3.37$$

y por tanto:

$$\tau(t) = \gamma_0 (G + \mu \delta(t)) \quad 3.38$$

donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

La eliminación de τ_1 y τ_2 en estas ecuaciones nos da la ecuación que relaciona τ y $\dot{\gamma}$. Esto es más fácil usando la transformada de Laplace, dado que las ecuaciones son lineales. El resultado es:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 \tau + (\lambda_1 + \lambda_2) \dot{\tau} + \tau &= \\ &= \lambda_1 \lambda_2 (G_1 + G_2) \gamma + (\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2) \dot{\gamma} \end{aligned} \quad 3.42$$

Se observa que en flujo cortante estacionario, todos los términos se anulan, excepto los que involucran τ y $\dot{\gamma}$. Así que es evidente que el material se comporta como fluido newtoniano en estado estacionario, con una viscosidad de:

$$\mu_0 = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = \mu_1 + \mu_2 \quad 3.43$$

Considerando la extensión de un conjunto de N elementos en paralelo; para cada elemento el esfuerzo es relacionado con la deformación por la ecuación:

$$\tau_i + \lambda_i \dot{\tau}_i = \mu_i \dot{\gamma} \quad 3.44$$

El esfuerzo total será la suma de los esfuerzos individuales:

$$\tau = \sum_{i=1}^N \tau_i \quad 3.45$$

Considerando una prueba de relajación de esfuerzo, en donde sujetamos el conjunto de N elementos a una deformación γ_0 que se mantiene constante, el esfuerzo estará dado por:

$$\tau(t) = \gamma_0 \sum_{n=1}^N G_n \exp\left(\frac{-t}{\lambda_n}\right) \quad 3.46$$

Los resultados anteriores se pueden resumir en una tabla:

prueba:	Fluido de Maxwell	Sólido de Voigt.
Relajación de esfuerzo	relajación completa con rapidez exponencial	relajación instantánea incompleta
Deslizamiento	Deformación elástica inicial instantánea seguida de flujo estacionario	aproximación a equilibrio constante de la deformación con rapidez exponencial
recuperación (a deslizamiento)	recuperación instantánea incompleta	recuperación total con rapidez exponencial
Número de Deborah	fluido viscoso si $De \ll 1$ sólido elástico si $De \gg 1$	sólido elástico si $De \ll 1$ fluido viscoso si $De \gg 1$

$$De = \frac{\lambda}{t_e} \quad \text{o} \quad \frac{\lambda'}{t_e}$$

Extensión de los modelos. Los modelos de Maxwell y Voigt.

Los modelos simples de Maxwell y Voigt no son suficientemente generales para describir adecuadamente el comportamiento de materiales reales, así que, a fin de extender estos modelos a situaciones realistas, capaces de describir fluidos reales, es conveniente considerar un conjunto de elementos de Voigt conectados en serie o un grupo de cuerpos de Maxwell en paralelo.

Modelo de Maxwell Generalizado.

Hay un gran número de modelos que pueden ser formulados uniendo varios amortiguadores y resortes de diferentes maneras, tal que simule una respuesta y pueda ser usado para aproximar el comportamiento de un material viscoelástico específico. Uno de los más útiles para fluidos viscoelásticos es el modelo generalizado de Maxwell que, en esencia, supone que en lugar de un solo

tiempo de relajación el fluido tiene una respuesta caracterfsti ca en toda una gama ó distribución de tiempos de relajación.

Este modelo puede usarse para ajustar datos de muchos fluidos reales si se tiene disponible la distribución de tiempos de relajación.

El modelo ffsico es simplemente un arreglo en paralelo de varios elementos de Maxwell, cada uno con diferente tiempo de relajación. Esto implica también una distribución de viscosidades y/o módulos de elasticidad.

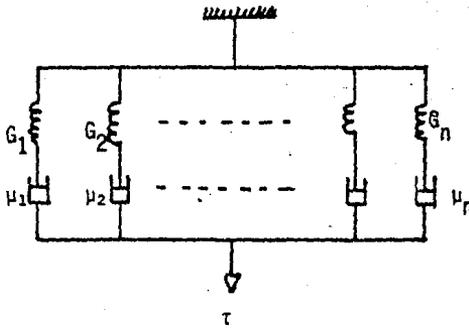


Fig.3.17

Analogía mecánica del Modelo de Maxwell Generalizado. Consideremos inicialmente solo 2 elementos en paralelo, las ecuaciones para estos serán:

$$\tau_1 + \lambda_1 \dot{\tau}_1 = \mu_1 \dot{\gamma} \quad 3.39$$

$$\tau_2 + \lambda_2 \dot{\tau}_2 = \mu_2 \dot{\gamma} \quad 3.40$$

con

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1}{G_1} \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2}{G_2}$$

El esfuerzo total es la suma de los esfuerzos:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 \quad 3.41$$

Cuando $N \rightarrow \infty$ las constantes $(G_n, \gamma_{\lambda n})$ se reemplazan por la función de distribución $G(\lambda)$ que está dada por el valor del módulo elástico asociado con el tiempo de relajación y la ecuación 3.46 se convierte en:

$$\tau(t) = \gamma_0 \int_0^{\infty} G(\lambda) \exp(-t/\lambda) d\lambda \quad 3.47$$

De manera que usando la definición de función de relajación $\psi(t)$ (ecuación 3.11)

$$\psi(t) = \frac{\tau(t)}{\gamma_0} = \int_0^{\infty} G(\lambda) e^{-t/\lambda} d\lambda \quad 3.48$$

Que resulta ser una manera adecuada de caracterizar un material como explicaremos al analizar las funciones de relajación y memoria.

Modelo de Voigt Generalizado.

De igual forma podemos considerar N elementos de Voigt en serie. Para cada elemento:

$$\tau = G_i \gamma_i + \mu \dot{\gamma}_i \quad 3.49$$

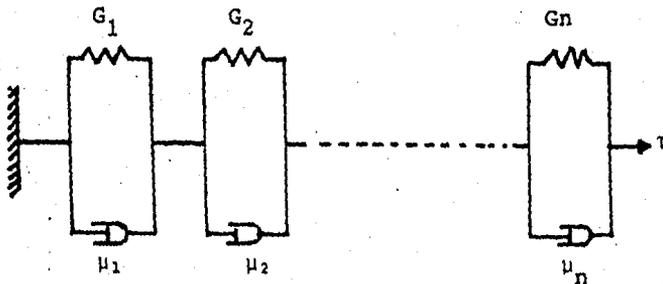


Fig.3.18

Analogía Mecánica del Modelo de Voigt Generalizado

Considerando una prueba de deslizamiento, aplicando repentinamente un esfuerzo τ_0 a $t=0$ y manteniendolo constante, para cada elemento tendremos:

$$\gamma_i(t) = \frac{\tau_0}{G_i} (1 - \exp(-t/\lambda_i)) \quad 3.50$$

La deformación total será la suma de las deformaciones individuales de todos los elementos, así que:

$$\gamma(t) = \tau_0 \sum_{i=1}^N \frac{1}{G_i} (1 - \exp(-t/\lambda_i)) \quad 3.51$$

El termino $1/G_i$ se acostumbra escribir como J_i , extensión no recuperable, de tal forma que:

$$\gamma(t) = \tau_0 \sum_{i=1}^N J_i (1 - \exp(-t/\lambda_i)) \quad 3.52$$

De nuevo considerando que $N \rightarrow \infty$, reemplazamos los elementos J_i y λ_i por una función de distribución $J(\lambda)$, que considera la extensión no recuperable elástica asociada a cada tiempo de retardación λ , llamada distribución de tiempos de retardación, obtenemos:

$$\gamma(t) = \tau_0 \int_0^{\infty} J(\lambda) (1 - \exp(-t/\lambda)) d\lambda \quad 3.53$$

Definimos entonces la función de deslizamiento $\phi(t)$ como la deformación por unidad de esfuerzo (ec.3.33)

$$\phi(t) = \frac{\gamma(t)}{\tau_0} = \int_0^{\infty} J(\lambda) (1 - \exp(-t/\lambda)) d\lambda \quad 3.54$$

Que analizaremos a continuación.

Funciones materiales. Los modelos especificados anteriormente (basados en analogías mecánicas) parecen describir adecuadamente las características generales de los materiales viscoelásticos lineales. Sin embargo, como ya anotamos anteriormente, los modelos simples (de Maxwell y Voigt) no representan adecuadamente, el comportamiento observado para materiales reales bajo de-

formaciones finitas, además de que normalmente es imposible, en la práctica, postular el modelo apropiado a un material desconocido a priori.

Es mucho más satisfactorio el describir un material dado por alguna función de respuesta definida en términos de cantidades medibles experimentalmente bajo ciertas condiciones impuestas, independientemente del modelo propuesto; de tal suerte que estas funciones materiales sean evaluables experimentalmente, y sus resultados puedan ser modelados para determinar el modelo o la función que mejor ajuste a los datos.

Esto es lo que hizo para proponer los modelos no-newtonianos del capítulo anterior y obtener la función material "viscosidad aparente", para la que se obtiene un "modelo" que ajuste a los datos obtenidos.

En el caso de los materiales viscoelásticos, hemos visto que una de sus características más significativas es la dependencia temporal para responder a ciertas condiciones impuestas; así que, la inclusión del tiempo como una variable independiente es indispensable para definir adecuadamente las propiedades viscoelásticas. De hecho, las funciones materiales que caracterizan el comportamiento viscoelástico lineal son funciones solo del tiempo.

Estas funciones materiales pueden ser definidas con respecto a una condición de prueba específica. Estas pruebas, como lo son la de relajación de esfuerzo, de deslizamiento y recuperación o de respuesta oscilatoria, tendrán como variable independiente, en los primeros casos al tiempo, y en el último a la frecuencia. Pero, aunque estas funciones sean diferentes mediciones de las mismas propiedades, no son independientes, sino que están interrelacionadas como se mostrará adelante.

En principio, por tanto, cualesquiera de estas funciones describe completamente las características de respuesta temporal (o memoria) de cualquier material viscoelástico lineal, aunque en la práctica frecuentemente se usan combinaciones de éstas, debido a las limitaciones experimentales de una prueba dada.

Dado que las funciones materiales son suficientes para definir las propiedades de un material viscoelástico lineal, podemos redefinir: un material viscoelástico lineal es aquel definido por una función material que depende únicamente del tiempo, y no de la magnitud del esfuerzo o deformación impuestas. La respuesta de un material verdaderamente lineal será la misma función del tiempo para todas las magnitudes del esfuerzo o deformación.

En relación con las ecuaciones diferenciales 3.44 y 3.49, que definen los modelos generalizados de Maxwell y Voigt, respectivamente estos se pueden reescribir en términos de operadores lineales P y R como:

$$P \tau = R \dot{\gamma} \quad 3.55$$

con:

$$P \equiv 1 + P_1 \frac{d}{dt} + P_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots + P_N \frac{d^N}{dt^N} \quad 3.56$$

y

$$R \equiv \mu_0 \left(1 + r_1 \frac{d}{dt} + r_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots + r_M \frac{d^M}{dt^M} \right) \quad 3.57$$

como $M = N-1$

3.58

De tal forma que los parámetros P_i y r_i son propiedades materiales relacionadas únicamente con λ_i y μ_i (o G_i).

En general, será posible establecer una ecuación de la forma:

$$P \tau = Q \gamma \quad 3.59$$

donde

$$P = \sum_{j=0}^N p_j \frac{d^j}{dt^j}$$

$$Q = \sum_{j=0}^N q_j \frac{d^j}{dt^j}$$

3.60

en donde una o más de las constantes pueden ser cero, según el caso. En particular si el material es un fluido, q_0 debe ser cero.

Así, una consecuencia de la linealidad es que las ecuaciones diferencial o integral que representan el modelo son lineales matemáticamente. En consecuencia todos los parámetros elásticos y viscosos del modelo serán constantes, así que tales materiales son fluidos newtonianos en flujo, y sólidos hookeanos bajo deformación en equilibrio.

En general los materiales reales que exhiben propiedades viscoelásticas son también no lineales. Esto es, son no-newtonianos en flujo cortante, estacionario ó no-hookeanos en deformación en equilibrio, si se considera un rango amplio de deformaciones o de valores de la rapidez de deformación. Esto podría negar el uso de funciones lineales para tales materiales, sin embargo, aún los no lineales exhiben un comportamiento esencialmente lineal al sujetarse a deformaciones suficientemente pequeñas. Así que estas funciones materiales lineales pueden considerarse características para todo material si la deformación es restringida a una magnitud lo suficientemente pequeña.

Las funciones materiales para viscoelásticos linealmente dependientes del tiempo, evaluables por métodos experimentales son, principalmente:

A.-Extensión no recuperable al deslizamiento.

Para la prueba de deslizamiento, señalamos que un esfuerzo constante es aplicado al material a $t = 0$, y la deformación resultante se determina en función del tiempo. El esfuerzo aplicado τ_0 se representa como:

$$\tau(t) = \tau_0 U(t) \quad 3.61$$

La deformación resultante, como función de tiempo, se expresa como:

$$\gamma(t) = \tau(t) J(t) = \tau_0 U(t) J(t) \quad 3.62$$

donde $J(t)$ es llamada extensión no recuperable, y es definida como:

$$J(t) = \frac{\gamma(t)}{\tau_0} \quad 3.63$$

donde se entiende que la deformación es medida respecto al estado no deformado a $t=0$ y τ_0 es la magnitud del esfuerzo impuesto.

Esta función es característica solo de las propiedades viscoelásticas del material bajo prueba, siendo por lo tanto una función material.

Debe ponerse énfasis en que $J(t)$ representa una función temporal medible, y por tanto, puramente empírica; por lo que puede o no representarse por medio de una función analítica o "modelo" matemático. Por ejemplo; si esta función puede representarse por una función lineal del tiempo, que no intercepta a cero indicaría que el fluido es un fluido de Maxwell (ecuación 3.25). Si la respuesta es exponencialmente asintótica a un valor constante y puede ser representada por la ecuación 3.31, entonces se trataría de un sólido de Voigt.

En cualquier caso, si el material es lineal la magnitud de la deformación será proporcional a la magnitud del esfuerzo aplicado y la extensión no recuperable al deslizamiento será independiente de ambos.

B.- Módulo de relajación

En la prueba de relajación de esfuerzo, se aplica una deformación constante γ_0 instantáneamente a $t=0$ y se mide el esfuerzo resultante como función del tiempo, la relación entre ambos se expresa como:

$$\tau(t) = \gamma_0 U(t) G(t) \quad 3.64$$

lo que sirve para definir el módulo de relajación

$$G(t) = \frac{\tau(t)}{\gamma_0} \quad 3.65$$

Como en el caso anterior, el esfuerzo observado se entiende relativo al estado no deformado a $t=0$, y γ_0 es la magnitud de la deformación impuesta. Esta también caracteriza las propiedades viscoelásticas del material, y por lo tanto es una función material.

Un material que se comporta como fluido de Maxwell exhibirá una relajación de esfuerzo que decrece exponencialmente con el tiempo, representada por la ecuación 3.19, siendo el módulo de relajación caracterizado por $G \exp(-t/\lambda)$. Si el material se comporta como un sólido de Voigt, la relajación de esfuerzo estará dada por la ecuación 3.38 y la función de relajación será $G + \mu \delta(t)$.

Debe notarse que las propiedades elásticas causan un término de equilibrio constante en el módulo de relajación para el sólido de Voigt y en la extensión no recuperable para ambos modelos (Maxwell y Voigt). Por esta razón, el módulo de relajación es algunas veces separado en 2 partes:

$$G(t) = G_e + G_1(t) \quad 3.66$$

donde el módulo de equilibrio G_e es cero para los fluidos viscoelásticos, ya que el esfuerzo se relaja completamente para estos materiales. De manera similar la extensión no recuperable puede separarse en dos partes:

$$J(t) = J_e + J_1(t) \quad 3.67$$

donde J_e representa una extensión no recuperable de equilibrio para un sólido y una extensión a estado estacionario (respuesta elástica instantánea) para fluidos viscoelásticos. Notese que para un fluido viscoelástico G_e debe ser cero aunque J_e puede o no serlo.

Sin embargo, para un sólido viscoelástico ni J_e ni G_e son cero. Específicamente $J_e \cdot G_e = 1$ para un sólido. Además, para materiales reales, $G(t)$ es una función decreciente en el tiempo, mientras que $J(t)$ es una función creciente en el tiempo.

C. Experimentos dinámicos. Ya hemos considerado experimentos de función escalonada y establecido que su mayor limitación está en caracterizar el comportamiento a tiempos cortos (ya que real

mente no es posible aplicar una condición instantáneamente). Las características dinámicas pueden ser, en general, determinadas con más exactitud por medio de una señal sinusoidal forzada, técnica que constituye el método de respuesta en frecuencia, y que es también usada en el estudio del comportamiento a corto tiempo de materiales viscoelásticos.

Si un esfuerzo sinusoidal es aplicado a un material viscoelástico lineal, la deformación variará también sinusoidalmente con el tiempo, pero estará defasada con respecto al esfuerzo aplicado.

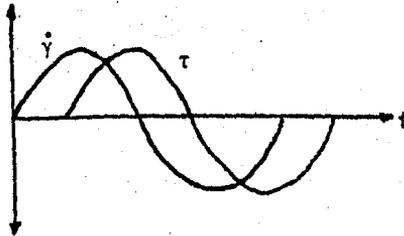


Fig. 3.19

Comportamiento en experimentos sinusoidales.

A una frecuencia dada el comportamiento del material estará especificado por 2 cantidades determinadas experimentalmente. Estas pueden tomarse de varias maneras, por ejemplo, es posible especificar la razón de las amplitudes del esfuerzo y la deformación resultante, τ_0 / γ_0 y la diferencia de fase entre ellos, ϕ , cantidades que serán dependientes, por supuesto, de la frecuencia.

La aplicación de una deformación cortante sinusoidal a un material puede representarse con una función seno o coseno, por ej:

$$\gamma = \gamma(\omega) = \gamma_0 \cos(\omega t)$$

3.68

Si el material es linealmente elástico (de Hooke), el esfuerzo cortante estará en fase con la deformación:

$$\tau(\omega) = \gamma(\omega) = G\gamma_0 \cos(\omega t) \quad (\text{Hooke}) \quad 3.69$$

Si, por otro lado, el material es viscoso lineal (Newtoniano) el esfuerzo se defasará de la deformación por 90° , dado que el esfuerzo es proporcional (y está en fase con) la rapidez de corte:

$$\begin{aligned} \tau(\omega) &= \mu \dot{\gamma}(\omega) \\ &= \mu \omega \gamma_0 \sin(\omega t) \\ &= \mu \omega \gamma_0 \cos(\omega t + \pi/2) \end{aligned} \quad 3.70$$

Para un material viscoelástico, es de esperarse que haya una diferencia de fase entre el esfuerzo y la deformación entre 0° y 90° .

La manera mas conveniente de manipular las cantidades oscilatorias es en función de números complejos, que pueden representarse en términos de sus partes real e imaginaria, o en su forma exponencial o en el plano complejo (Fig.3.20)

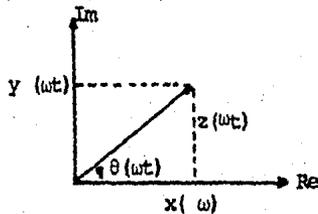


Fig.3.20 Representación en el plano complejo

Así que:

$$\begin{aligned}\gamma(\omega t) &= \gamma_0 e^{i\omega t} = \gamma_0 (\cos(\omega t) + i \sin \omega t) \\ &= \gamma'(\omega) + i \gamma''(\omega)\end{aligned}\quad 3.71$$

y

$$\begin{aligned}\tau(\omega t) &= \tau_0 e^{i\omega t + \epsilon} = \tau_0 \text{cis } \omega t + \epsilon \\ &= \tau'(\omega) + i \tau''(\omega)\end{aligned}\quad 3.72$$

donde τ_0 y γ_0 son las amplitudes del esfuerzo y la deformación (fig.3.18), ϵ es el ángulo de defasamiento entre ambos; las primadas (') representan la parte real y las doblemente primadas (') representan la parte imaginaria de la cantidad compleja.

Nos interesa la relación entre el esfuerzo y la deformación, es decir, la posición relativa de los "fasores" τ y γ en el plano complejo en cualquier instante.

Consideremos el instante en que el fasor de deformación coincide con el eje real (fig. 3.20)

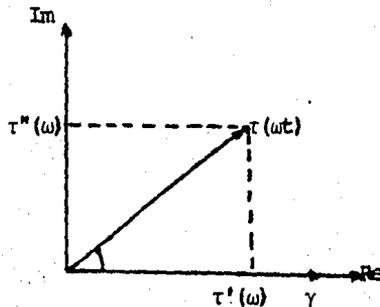


Fig.3.21 Componentes del esfuerzo y la deformación en la prueba oscilatoria.

En este caso, τ' ($\tau_0 \cos \phi$) representa el componente del esfuerzo en fase con la deformación (componente elástico) y τ'' ($= \tau_0 \sin \phi$) la componente defasada 90° (componente viscoso).

Las relaciones entre el esfuerzo oscilatorio y la deformación se basan en la definición de las diferentes funciones materiales, entonces definimos el módulo complejo como:

$$G^*(\omega) = \frac{\tau(\omega t)}{\gamma(\omega t)} = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos \phi + i \sin \phi \quad 3.73$$

de tal forma que:

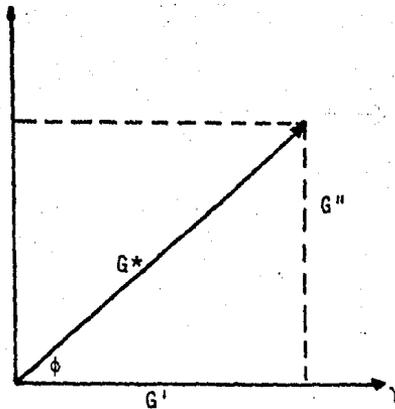


Fig.3.22 Definición del Módulo complejo

El módulo "en fase", G' , representa las características elásticas del material y se denomina Módulo de Almacenamiento (relacionado con energía elástica, que se almacena y que puede ser recuperada). el componente defasado, G'' , representa el carácter viscoso, y se llamado Módulo de pérdida (dado que se pierde energía por disipación viscosa). La tangente del ángulo de fase ϕ es llamada algunas veces tangente de pérdida y está dada por:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\tau''}{\tau'} = \frac{G''}{G'} \quad 3.74$$

Para un fluido viscoso lineal, newtoniano tenemos entonces que:

$$G^*(\omega) = \frac{\tau(\omega t)}{\gamma(\omega t)} = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos \phi + i \operatorname{sen} \phi \quad 3.75$$

y:

$$G' = 0, \quad G'' = \omega \mu, \quad \phi = 90^\circ$$

Para el sólido elástico lineal, hookeano

$$G^* = \frac{\tau(\omega t)}{\gamma(\omega t)} = \frac{G\gamma}{\gamma} = G$$

y

$$G' = G, \quad G'' = 0, \quad \phi = 0^\circ$$

Para los materiales viscoelásticos G' y G'' serán diferentes de cero, y en general funciones de la frecuencia. Por ejemplo, para el fluido de Maxwell;

$$G^* = \frac{\tau_0 e^{i\phi}}{\gamma_0} = \frac{i\omega G \lambda}{1 + i\omega\lambda} \quad 3.76$$

o

$$G' = \frac{G \omega^2 \lambda^2}{1 + \omega^2 \lambda^2} \quad 3.77$$

$$G'' = \frac{G}{1 + \omega^2 \lambda^2} \quad 3.78$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{1}{\omega\lambda} \quad 3.79$$

de manera que, tanto G'' como G' y ϕ son funciones de la frecuencia (o el tiempo).

Para el sólido de Voigt tendríamos:

$$G^*(i\omega) = G(1 + i\omega\lambda')$$

$$G' = G$$

$$G'' = \omega\lambda' G = \omega\mu$$

Alternativamente se puede descomponer la deformación, considerando que el esfuerzo coincide con el eje real, uno de los componentes de la deformación en fase, y el otro defasado 90° del esfuerzo

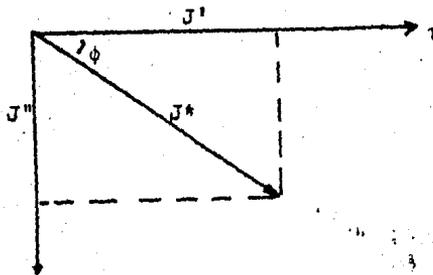


Fig.3.23 Definición de la extensión no recuperable compleja

En este esquema definimos la función $J^*(\omega)$, extensión no recuperable compleja y:

$$J'(\omega) = \frac{\text{componente de la def. en fase con el esfuerzo}}{\text{esfuerzo}}$$

y

$$J''(\omega) = \frac{\text{componente de la def. defasado } 90^\circ}{\text{esfuerzo}}$$

de tal forma que:

$$J^*(\omega) = J'(\omega) + iJ''(\omega) \quad 3.80$$

y

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{J''}{J'} \quad 3.81$$

Los esquemas son por supuesto, equivalentes y tanto $J^*(\omega)$ como $G^*(\omega)$ definen las propiedades reológicas del material, así $J^*(\omega)$ es el recíproco del módulo complejo:

$$J^*(\omega) = \frac{1}{G^*(\omega)} = \frac{Y'(\omega)}{\tau(\omega)} \quad 3.82$$

y sus componentes real e imaginario se expresan como:

$$J'(\omega) = \frac{G'}{G'^2 + G''^2} \quad 3.83$$

$$J''(\omega) = - \frac{G''}{G'^2 + G''^2} \quad 3.84$$

Para el sólido de Voigt tendremos

$$J'(\omega) = \frac{J^*}{1 + \omega^2 \lambda^2} \quad 3.85$$

$$J''(\omega) = \frac{\omega \lambda J^*}{1 + \omega^2 \lambda^2} \quad 3.86$$

con ; $J^* = \gamma / \tau$

Dado que tanto G^* como J^* están definidos en términos de componentes del esfuerzo y la deformación son muy usados para caracterizar materiales viscoelásticos, esencialmente "sólidos". Un parámetro equivalente, pero mucho más apropiado para caracterizar fluidos está definido en función de la rapidez de deformación y no de la deformación, y es llamada viscosidad compleja:

$$\eta^*(\omega) = \frac{\tau(\omega t)}{\gamma(\omega t)} = \frac{\tau}{\omega \lambda} = \eta'(\omega) - i \eta''(\omega) \quad 3.87$$

Debe notarse que la parte imaginaria de la viscosidad compleja es definida con $-i$ en oposición a las definiciones usuales.

Los componentes de esta función material están relacionados con los del módulo complejo como:

$$\eta^* = \frac{G^*}{\omega} \quad \eta' = \frac{G''}{\omega} \quad \eta'' = \frac{G'}{\omega} \quad 3.88$$

donde η' representa la componente viscosa o "en fase" con el esfuerzo y η'' "en cambio, representa la componente "defasada" o elástica.

Las funciones materiales complejas G^* , J^* y η^* proveen la misma información acerca de un material dado, y por lo tanto solo se usan como referencia para el material sujeto a consideración. Es usual caracterizar a las propiedades viscosas con η^* y las propiedades elásticas con G' . Debe notarse, sin embargo, que los componentes real e imaginario de estas cantidades son, en general, funciones de la frecuencia, así que, la naturaleza de la dependencia de la frecuencia sirve para distinguir la naturaleza viscoelástica del material.

Funciones de Relajación y memoria.

Al tomar $\gamma(t')$ la deformación al corte, como "causa" y $\tau(t)$ el esfuerzo cortante como "efecto", se puede definir una función de influencia, propiedad del sistema y que relaciona causa y efecto, como la función de relajación: $\psi(t-t')$, si:

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \int_{\gamma(-\infty)}^{\gamma(t)} \psi(t-t') d\gamma(t') = \\ &= \int_{-\infty}^t \psi(t-t') \dot{\gamma}(t') dt' \end{aligned} \quad 3.89$$

Esta ecuación implica que el esfuerzo en cualquier tiempo t depende de la historia pasada de la deformación. Por esta razón, esta expresión se identifica como una integral de herencia.

La ecuación 3.89 puede escribirse en una forma alternativa, integrando por partes como:

$$\tau(t) = \psi(0)\gamma(t) + \int_{-\infty}^t \phi(t-t')\gamma(t') dt' \quad 3.90$$

donde:

$$\dot{\psi}(t-t') = - \frac{d\psi(t-t')}{dt'} = \frac{d\psi(t-t')}{d(t-t')} \quad 3.91$$

o:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} \quad 3.92$$

que es llamada función de memoria. Ahora bien, por la memoria la deformación ocurrida al tiempo $t' = -\infty$ no tiene influencia en el esfuerzo en el momento presente t , y la función $\psi(\infty)$ debe ser cero. Así que el primer término de la integración por partes se reduce a $\psi(0) \gamma(t)$. Posteriormente, si la configuración en el tiempo presente t es tomada como estado de referencia (no deformado), entonces: $\gamma(t) = 0$ por definición, y el término $\psi(0) \gamma(t)$ se vuelve cero.

Al tomar la ecuación 3.90, con referencia en el tiempo de tal forma que $\gamma=0$ para $t \leq 0$, por integración por partes obtenemos:

$$\tau(t) = \gamma(0)\psi(t) + \int_0^t \psi(t-t') \dot{\gamma}(t') dt' \quad 3.93$$

Función de deslizamiento.

Si consideramos como "causa" el esfuerzo cortante y como "efecto" la deformación al corte, un proceso análogo que relaciona la deformación al tiempo presente t con la historia de esfuerzo en todos los tiempos pasados será:

$$\gamma(t) = \int_{(-\infty)}^{t(t)} J(t-t') \tau(t') dt' = \int_{-\infty}^t J(t-t') \dot{\tau}(t') dt' \quad 3.94$$

$$= J(t)\tau(0) + \int_0^t J(t-t') \dot{\tau}(t') dt' \quad 3.95$$

donde la función de influencia $J(t)$ es llamada función de deslizamiento.

Es evidente, que la especificación, ya sea de la función de deslizamiento o de relajación (memoria) define la dependencia de las propiedades reológicas de material con el tiempo, y por tanto son funciones materiales..

Espectro de relajación.

Considerando el modelo generalizado de Maxwell (3.44 y 3.45) la función de relajación apropiada corresponde a una serie in finita de tiempos de relajación como:

$$G(t) = \psi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i e^{-t/\lambda_i} \quad 3.96$$

Así que usando el principio de superposición de Boltzmann obtenemos:

$$\tau(t) = \sum_{i=1}^n G_i \int_0^t \exp[-(t-t')/\lambda_i] \dot{\gamma}(t') dt' \quad 3.97$$

ya que, si

$$\tau(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi(t-t') \Delta\gamma(t'_i) \quad 3.98$$

para $N \rightarrow \infty$, continuo:

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \int_{\gamma(-\infty)}^{\gamma(t)} \psi(t-t') d\gamma(t') \\ &= \int_{-\infty}^t \psi(t-t') \dot{\gamma}(t) dt' \end{aligned} \quad 3.99$$

Así que si el espectro de tiempos de relajación es continuo tendremos que (3.96) se puede escribir como:

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} F(\lambda) \exp[-t/\lambda] d\lambda \quad 3.100$$

y 3.97 se convierte en:

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t \int_0^{\infty} F(\lambda) e^{-(t-t')/\lambda} \dot{\gamma}(t') d\lambda dt \quad 3.101$$

donde $F(\lambda)d\lambda$ puede interpretarse como el módulo al corte correspondiente a un tiempo de relajación entre λ y $\lambda + d\lambda$, de manera que $F(\lambda)$ es el espectro de distribución del módulo al corte. En general un material dado exhibirá una distribución de tiempos de relajación (o espectro) que a su vez permite obtener una distribución (o espectro) del módulo al corte, funciones de distribución que serán marcadamente diferentes (diferencia que puede deberse, por ejemplo a la distribución del módulo viscoso y a la del módulo al corte, ya que $\eta = \lambda G$).

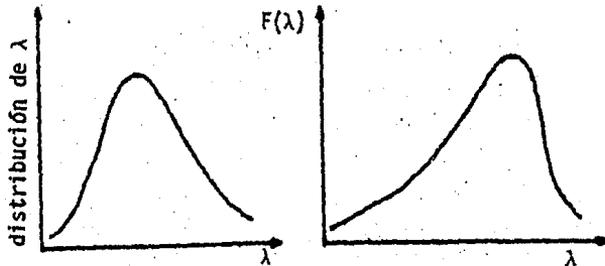


Fig.3.24 Espectro de tiempos de relajación y distribución del Módulo al corte.

Algunas veces se define una función de distribución alternativa $H(\lambda)$ en lugar de $F(\lambda)$ como:

$$H(\lambda) = F(\lambda) \lambda$$

Es evidente, entonces, que como $F(\lambda)$ representa la función de distribución del módulo al corte, $H(\lambda)$ es la función de distribución o espectro correspondiente al módulo viscoso o viscosidad.

Esto se puede explicar considerando que una distribución en el peso molecular o la longitud de cadena o los tamaños de partícula originan una distribución en los tiempos de relajación y por tanto una distribución en la viscosidad y el módulo al corte.

Como puede observarse solo 2 de estas 3 funciones de distribución - pueden ser independientes. Entonces, otra expresión para la función de relajación, en términos de $H(\lambda)$ será:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \int_0^{\infty} \frac{H(\lambda)}{\lambda} e^{-t/\lambda} d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda) e^{-t/\lambda} d \ln \lambda\end{aligned}\quad 3.103$$

y cambiando el orden de integración en 3.101

$$\tau(t) = \int_0^{\infty} F(\lambda) \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\lambda} \dot{\gamma}(t') dt' d\lambda \quad 3.104$$

en Flújo estacionario ($\dot{\gamma}$ constante)

$$\tau = \dot{\gamma} \int_0^{\infty} F(\lambda) \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\lambda} dt' d\lambda \quad 3.105$$

$$= \dot{\gamma} \int_0^{\infty} F(\lambda) \int_0^{\infty} e^{-s/\lambda} ds d\lambda =$$

$$= \dot{\gamma} \int_0^{\infty} F(\lambda) \lambda d\lambda \quad 3.106$$

Así que la viscosidad del fluido será:

$$\eta_0 = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \int_0^{\infty} \lambda F(\lambda) d\lambda \quad 3.107$$

o

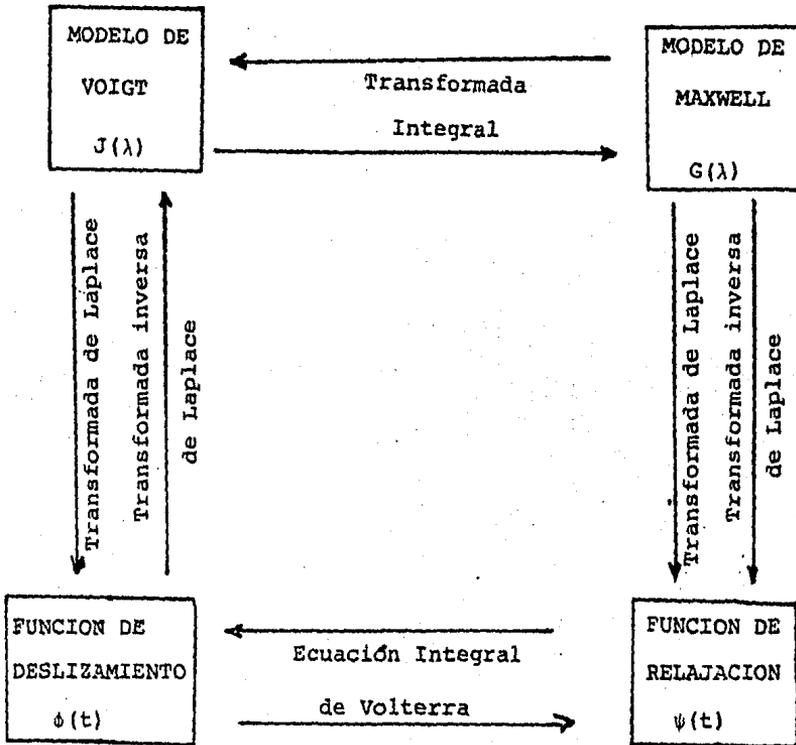
$$\eta_0 = \int_0^{\infty} H(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda) d \ln \lambda \quad 3.108$$

El procedimiento análogo, usando la función de deslizamiento $J(\lambda)$ en lugar de la función de relajación, usando el modelo generalizado del Voigt, nos lleva a definir una distribución del módulo de deslizamiento al corte, definido en función de una distribución de módulos $L(\lambda)$ análoga a $F(\lambda)$.

Las expresiones empíricas para $\mu(t)$ basadas en la analogía con el modelo de Maxwell generalizado, son útiles debido a su versatilidad (3.96). La serie como está escrita involucra un número infinito de términos, sin embargo, la teoría molecular de soluciones poliméricas, desarrollada por Zim y Rouse (ref. 10) sugiere una forma para la distribución de tiempo de relajación, que reduce el número de parámetros de la serie.

Interrelaciones entre las funciones materiales.

Cualquiera de las funciones materiales lineales para viscoelásticos descritos anteriormente caracterizan la dependencia de la relación esfuerzo-deformación con el tiempo para un material dado, para deformaciones al corte de pequeña magnitud. Por lo tanto, representan diferentes mediciones de las mismas propiedades del material, y están interrelacionadas. Alfrey ha descrito totalmente estas relaciones (ref. 1, 10) y son ilustradas como:



Restricciones de la Linearidad.

La suposición de una respuesta lineal por parte del material ha estado implícita en todos los modelos anteriormente descritos así como en las funciones materiales y en los módulos, ya que han sido desarrollados a partir de combinaciones de elementos elásticos lineales (de Hooke) y viscosos lineales (newtonianos).

Una de las consecuencias de la linealidad de un fluido es el comportamiento newtoniano en estado estacionario. Sin embargo, todos los fluidos que exhiben elasticidad son también no-newtonianos en estado estacionario, si se considera un rango suficiente grande de condiciones de flujo.

Por lo tanto, las funciones materiales presentadas anteriormente no son completamente adecuadas para materiales bajo deformaciones grandes o continuas (flujo), de manera que la validez de las funciones materiales dependientes del tiempo estan restringidas a deformaciones pequeñas y/o valores de rapidez de deformación pequeños aunque la extensión de esta restricción dependerá del grado de no-linearidad del material.

Sin embargo, aún los materiales no lineales responden en una forma lineal si las magnitudes de la deformación y/o rapidez de deformación son suficientemente pequeñas; de manera que pueden considerarse validas las funciones para cualquier material viscoelástico, bajo ciertas condiciones.

La "función material de viscosidad no está sujeta a estas restricciones, dado que está definida en términos de un sistema de rapidez de corte constante, y es, por tanto una medida de las propiedades viscosas del fluido, exclusivamente.

Las funciones materiales discutidas hasta aquí para las distintas condiciones temporales impuestas, han sido definidas en términos de un solo componente del esfuerzo y de la rapidez de corte, asociados con la rapidez de deformación en un flujo cortante simple. Así mismo, se pueden definir funciones similares en términos de cualesquiera componentes del tensor de esfuerzos extra y/o el tensor de rapidez de deformación siempre y cuando estén definidos en función de variables observables - que puedan ser; esfuerzo y deformación isotrópica o volumétrica, o componentes normales anisotrópicos relacionados con los componentes en flujos cortantes simples, etc. - de manera que se satisfagan los postulados inherentes a una ecuación neológica de estado.

Efectos de los esfuerzos normales.

Hay varios, poco usuales, pero extraordinarios efectos que exhiben los fluidos viscoelásticos en estado estacionario, que no pueden ser atribuidos a los efectos viscosos (esfuerzos cortantes). Entre ellos podemos citar los siguientes:

a) Efecto de Weissenberg:

La forma de la superficie libre de un líquido cambia cuando es sujeto a una deformación angular por medio de una barra o cilindro rotatorio.

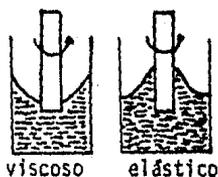


Fig. 3.26 Efecto Weissenberg.

Para fluidos viscosos (sin elasticidad) la fuerza centrífuga crea un vórtice cóncavo en el líquido. En contraste, los líquidos elásticos se mueven en la dirección opuesta y trepan por la barra (fig. 3.26), es decir, el líquido elástico desarrolla esfuerzos opuestos a la fuerza centrífuga y causa que el fluido suba por la barra; si medimos la diferencia de presión en dos puntos A y B localizados a la misma altura (fig. 3.27) para el líquido newtoniano la presión en B excede a la de A, como resultado de la fuerza centrífuga; pero en el líquido elástico la presión en A excede a la de B.

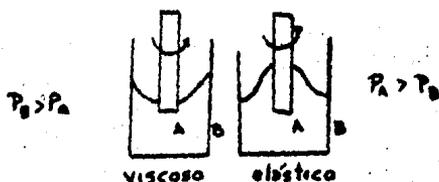


Fig. 3.27 Mediciones de Presión en el experimento del efecto de Weissenberg

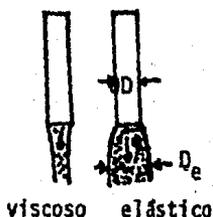


Fig. 3.28 Hinchamiento a la salida de un surtidor (jet)

b) La fig. 3.28 ilustra la forma de la corriente líquida a la salida de un chorro surtidor (jet). El jet de un líquido no elástico se contrae ligeramente y resulta por tanto más pequeño que el tubo, mientras que para un líquido elástico se presenta una dilatación hasta un diámetro (D_e) mayor que el correspondiente al tubo (D).

c) Si se deja caer, por gravedad un fluido inelástico a través de un canal inclinado y observamos su superficie libre, ésta es una recta horizontal. Para un fluido elástico, observaremos una superficie ligeramente convexa. (fig. 3.29)

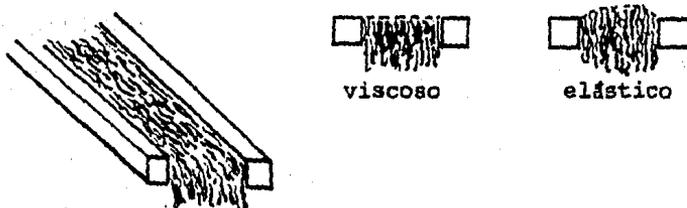


Fig. 3.29 Superficie libre en un canal inclinado.

d) En la fig. 3.30 se muestran dos discos paralelos sumergidos en un fluido, uno de ellos tiene un hoyo en el centro y rota. Para un fluido inelástico, las fuerzas centrífugas causan que el flujo sea a través de hoyo y hacia fuera de eje, mientras que para un fluido elástico el flujo se desarrolla desde la periferia y saliendo a través de hoyo en el centro.

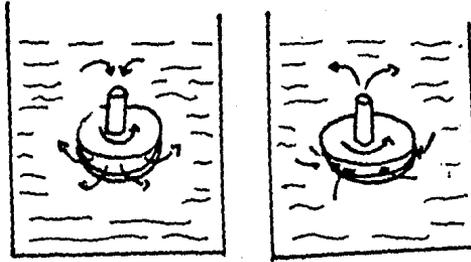


Fig. 3.30 Circulación invertida

e) Para el flujo estacionario axial en un anulo, de un fluido no elástico, la presión en las paredes interior y exterior de anulo son las mismas, mientras que el líquido elástico causa una menor presión en la pared interna que en la externa.

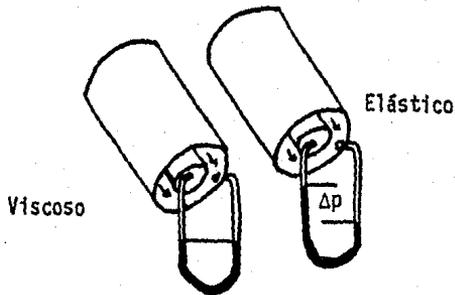


Fig. 3.31 Flujo axial estacionario en un anulo.

Todos los fenómenos anteriores pueden ser atribuidos a los esfuerzos extra los que son desarrollados por los fluidos elásticos bajo esfuerzo cortante, en direcciones normales al plano de flujo.

Los tres componentes del tensor de esfuerzos normales anisotrópicos, son designados con τ_{11} , τ_{22} y τ_{33} . Donde la convención establece la dirección 1 coincidente con la dirección de flujo; la dirección 2 como la que coincide con el gradiente de deformación y la dirección 3 como la dirección "neutral" en la que el flujo no varía.

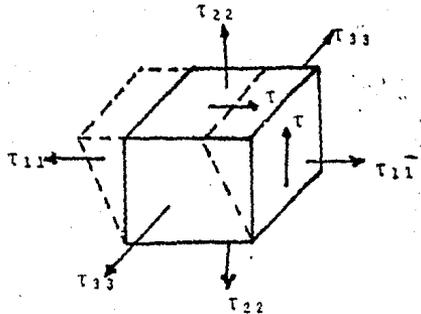


Fig. 3.32 Esfuerzos normales anisotrópicos en movimiento cortante simple.

Las formas generalizadas de las ecuaciones de estado para viscoelásticos, predicen la existencia de estos efectos debidos a esfuerzos normales anisotrópicos, aún para fluidos con viscosidades newtonianas. Por lo tanto, estos efectos son, generalmente, considerados como una manifestación de las propiedades elásticas del fluido en movimiento cortante estacionario.

Debe señalarse que los esfuerzos normales anisotrópicos pueden ser predichos por ecuaciones de estado generalizadas para fluidos puramente viscosos (fluidos stokesianos o de Reiner-Rivlin (ref. 10)). Sin embargo, el carácter de estos esfuerzos predichos no es consistente con las observaciones hechas a fluidos reales, y por tanto estos fluidos se consideran como puramente hipotéticos.

Funciones materiales para esfuerzos normales.

Los componentes anisotrópicos normales del esfuerzo, considerados en la fig. 3.30 no pueden ser medidos directamente en un sistema fluido. Solo pueden medirse los componentes totales del esfuerzo. Como el tensor de esfuerzos totales (cap. 1 y apéndice A) incluye tanto esfuerzos isotrópicos (presión) como los esfuerzos al corte (anisotrópicos) se tiene:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = \begin{bmatrix} -p + \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & -p + \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & -p + \tau_{33} \end{bmatrix} \quad 3.109$$

Más adn, dado que para un fluido incomprensible, la presión estática y los elementos de la diagonal principal en el tensor de esfuerzos son idénticos:

$$p_0 = p = -1/3 \sum \sigma_{ii} \quad 3.110$$

es posible eliminar la contribución de la presión estática del -- tensor de esfuerzos totales, resultando el tensor de esfuerzos ca racterfsticos unicamente del fluido (tensor de esfuerzos "extra"). Si consideramos la diferencia entre los esfuerzos normales se tiene:

$$\sigma_{12} - \sigma_{22} = (-p + \tau_{11}) - (-p + \tau_{22}) = \tau_{11} - \tau_{22} \quad 3.111$$

De manera que los esfuerzos normales pueden ser completamente caracterizados por 2 diferencias de esfuerzos normales, que son fun ción de la deformación (p.e la rapidez de deformación) y la defi nición de presión:

Primera diferencia de esfuerzos normales

$$N_1 = \tau_{11} - \tau_{22} \quad 3.112$$

Segunda diferencia de esfuerzos normales:

$$N_2 = \tau_{22} - \tau_{33} \quad 3.113$$

Definición de presión:

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 0 \quad 3.114$$

Las diferencias de esfuerzos normales son independientes del signo (dirección) del mov. cortante, y se suponen proporcionales al cuadrado de la rapidez de corte. Entonces, se pueden definir dos funciones materiales de los esfuerzos normales (θ_s) en forma similar a la definición de la función de viscosidad aparente.

$$\theta_1(\dot{\gamma}) = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2} \quad 3.115$$

$$\theta_2(\dot{\gamma}) = \frac{N_2}{\dot{\gamma}^2} \quad 3.116$$

El grado de dependencia de estas funciones con la rapidez de deformación es también un índice del carácter no lineal del fluido viscoelástico.

Los datos de N_1 para fluidos poliméricos son abundantes y son obtenidos básicamente de mediciones con el Reogonómetro de Weissenberg. Weissenberg, alrededor de 1946-49 dedujo por consideraciones puramente teóricas que N_2 era igual a cero para una clase general de fluidos. Esto fue una aproximación satisfactoria para --

varias sustancias, sin embargo, el rango de aplicación de esta hipótesis está sujeto a discusión. Las mediciones de N_2 son pocas - pero se han determinado valores de $N_2/N_1 \neq 0$ (ref. 10).

Su análisis cualitativo nos muestra que típicamente la función η es 1 ó 2 ordenes de magnitud mayor que θ_1 , mientras que θ_2 es negativa y alrededor del 10% al 20% de θ_1 . Esta razón varía con la rapidez del movimiento cortante, sin embargo, normalmente es decreciente al incrementarse la rapidez de deformación. La magnitud relativa de las propiedades elásticas generalmente se incrementa con la viscosidad del solvente, para soluciones poliméricas. Para polímeros fundidos las magnitudes relativas de las funciones de esfuerzos normales son considerablemente mayores y no es poco común que la magnitud de los esfuerzos normales exceda la del esfuerzo cortante. También es posible que la magnitud de N_2 exceda a la de N_1 para polímeros fundidos, especialmente a valores de la rapidez de deformación bajos.

Combinación de comportamientos.

Cada una de las funciones materiales definidas anteriormente puede ser medida para cualquier material, mediante los diferentes métodos anteriormente descritos.

Sin embargo, aunque cada función material empírica represente exactamente las características de la respuesta reológica del material, en una deformación similar a la que corresponde a la prueba, no será suficiente para determinar las propiedades o deformaciones en situaciones más complejas. Esto solo será verdad si se conoce una verdadera ecuación reológica de estado (o ecuación constitutiva).

Tal ecuación, formulada en términos de los tensores de esfuerzo y deformación o rapidez de deformación es capaz de predecir, en principio, las propiedades de esfuerzo-deformación del material en cualquier sistema sin importar su complejidad. Por lo tanto, todas las funciones materiales medibles deben "estar contenidas" o ser predichas por una ecuación reológica.

CAPITULO IV

PARTE EXPERIMENTAL

Definiciones Fundamentales.

Probablemente no hay instrumento experimental conceptualmente más simple que la visualización de flujo, para elucidar este fenómeno físico para distintas geometrías y materiales. En numerosos artículos y conferencias y particularmente en el Simposium de Visualización de flujo (A.S.M.E. 1960) se han descrito un gran número de técnicas de visualización.

Su uso cotidiano es tal que no hay libro de mecánica de fluidos o temas afines que no muestre los resultados de alguna o algunas de estas técnicas a distintas situaciones de Flujo.

Uno de los conceptos necesarios, y sobre todo útiles al tratar con fluidos en movimiento es el de línea de corriente. Esta se define como aquella curva cuya dirección en cada punto coincide con el vector velocidad del fluido en ese punto.

A fin de establecer matemáticamente este concepto consideremos un campo de velocidades:

$$\underline{v} = f(\underline{r}, t) \quad \dots 4.1$$

de tal forma que el vector velocidad está definido para todo punto con posición \underline{r} de la región considerada, en adición este campo de velocidades se modifica con el tiempo.

Así, al mismo tiempo $t=t_1$ podemos graficar curvas de tal forma que la tangente en todo punto coincida con la velocidad en ese punto. Tendremos entonces una familia de curvas, dependientes del parámetro t , tangentes en todo punto al campo de velocidades cuyas ecuaciones paramétricas son soluciones de las ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dz}{d\alpha} = \underline{v} \quad \dots 4.2$$

o

$$\frac{dz}{d\alpha} \times \underline{v} = 0 \quad \dots 4.3$$

en las cuales α es un parámetro arbitrario medido a lo largo de las curvas, al tiempo t_1 constante.

En este contexto, vale la pena hacer mención a otras dos "líneas" frecuentemente encontradas en la literatura; las líneas de trayectoria y las líneas de trazo.

La curva a través de la cual una partícula material dada viaja, se denomina línea de trayectoria, de manera que puede ser determinada (para una partícula dada) considerando que la velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo siguiendo una partícula material. Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la partícula son las soluciones al sistema diferencial:

$$\frac{d \underline{z}}{d t} = \underline{v} \quad 4.4$$

Las líneas de trazo son de interés experimental, suponiendo que queremos saber cuáles partículas de fluido pasaron por un punto dado \underline{r}_1 . De manera que la línea de trazo a través del punto \underline{r}_1 , al tiempo t_1 , representa las posiciones al tiempo t , de las partículas materiales que en cualquier tiempo anterior, $t < t_1$, han ocupado el punto \underline{r}_1 .

Experimentalmente, éste sería el caso en el que se inyecta continuamente un colorante a una corriente en una posición fija \underline{z}_1 , de manera que la línea de colorante representa la línea de trazo correspondiente al punto \underline{z}_1 .

Matemáticamente, se tiene entonces que:

$$\underline{F}(\underline{r}, t) = \underline{r}_1 = \text{cte.} \quad 4.5$$

ecuación que deberá resolverse primero en el tiempo t_1 , y posteriormente en tiempos anteriores a t , a fin de obtener las posiciones de las partículas \underline{r} a los tiempos apropiados.

Se dice, por esto, que las líneas de trazo son forzadas desde los puntos finales.

Un caso especial de movimiento del fluido es aquel en el cual, en cualquier punto del espacio, la velocidad, presión, densidad, etc. se mantienen constantes con el tiempo. Esto hace que las gráficas de las líneas de corriente a diferentes tiempos sean iguales (es decir, inva-

riantes), y es entonces que el flujo es llamado "estacionario". En estas condiciones, las líneas de trayectorias y las líneas de trazo coinciden con las líneas de corriente.

En este sentido, las investigaciones experimentales usando líneas de trazo han sido hechas, generalmente cuando el flujo es estacionario, y por lo tanto las líneas de trazo dan información acerca de las líneas de corriente y las de trayectoria de las partículas.

Técnicas de visualización.

Puesto que los líquidos o gases estudiados son siempre homogéneos, y puesto que consecuentemente las partículas individuales no pueden ser distinguibles unas de otras, es fundamentalmente imposible observar el movimiento en un líquido o gas sin hacer uso de medios especiales.

Una manera de aproximarse al problema es la medición de la presión y la velocidad en muchos puntos del flujo, por ejemplo, por medio de un tubo pitot o aparatos similares. Esto, sin embargo, da solo un valor promedio de la velocidad, tanto en el espacio, como en el tiempo, y, en general, el método es demasiado burdo para dar una imagen del flujo.

Se han descrito, sin embargo, en numerosos artículos y conferencias diferentes técnicas de visualización de flujo, sobre todo desde el simposium de la A.S.M.E. (1960) anteriormente mencionado. De manera que se dispone de técnicas usando trazadores por reacción química o electroquímica inducida, métodos ópticos que incluyen colorantes fosforescentes excitados por laser, métodos trazadores - inyectoros, y otros; y muchas de estas técnicas han sido sucesivamente aplicadas en estudios experimentales, incluso de turbulencia (Kline, 1978).

Básicamente, sin embargo, la única manera en que el fenómeno de flujo puede ser hecho visible es insertando partículas muy pequeñas en el fluido, las cuales distingan los elementos (unos de otros) sin cambiar sensiblemente la densidad u otras propiedades del fluido.

Entonces, para un líquido es usual mezclar en ciertas partes de él un colorante, teniendo cuidado de que su densidad no sea diferente de la del líquido no colorante.

Así, los distintos métodos para visualizar el flujo en agua pueden

dividirse en 2 grupos, dependiendo si se desea el estudio del flujo en el interior del fluido, o solo en su superficie.

En el caso de un movimiento tridimensional del fluido, es necesario el estudio del flujo no solo en su superficie, sino también en el interior del fluido.

El flujo puede ser mostrado en algunos casos por inserción de líquido coloreado de la misma gravedad específica a través de numerosas boquillas en el flujo. En éste caso debe cuidarse que la velocidad de salida del fluido coloreado de la boquilla sea la misma que la del fluido del medio estudiado.

Para agua, se dispone de colorantes como el permanganato de potasio, o ciertos tipos de anilinas disueltas en pequeñas cantidades de alcohol que son entonces distribuidas en un gran volumen de agua. Si se intenta tomar fotografías del flujo y no solo observaciones visuales, la elección del color se determinará según la técnica fotográfica que se va a usar, de manera que es deseable elegir un color que no haga difícil la impresión en la placa fotográfica. En los casos en que hay un fondo oscuro la leche diluida es un buen agente fácilmente disponible.

Otro método de mostrar el flujo es usando una suspensión de partículas de aluminio extremadamente pequeñas en el líquido. Estas, de acuerdo con su tamaño permanecerán flotando por mucho tiempo.

Esta suspensión se puede hacer humedeciendo primero el polvo de aluminio con alcohol para esparcirlo posteriormente en una botella agitada violentamente.

Una ventaja de este método sobre el de colorante es que la suspensión de aluminio es capaz de mostrar detalles del flujo en una región turbulenta mientras que un chorro coloreado se mezcla completamente.

Si se necesita mostrar el movimiento en la capa límite, cerca de un cuerpo sumergido, es posible cubrir el cuerpo con un colorante (como la leche condensada) que se disuelva fácilmente.

Es también posible mezclar todo el fluido con una suspensión de partículas muy pequeñas. La concentración de las partículas debe ser más bien pequeña, a manera de hacer posible el observarlas con clari-

dad dentro del fluido. En el caso de que solo se busquen ciertas líneas de trayectoria es práctico tomar un pequeño número de partículas de mayor tamaño.

En el caso en el que el flujo es bidimensional, éste puede ser visualizado de manera mucho más simple, ya que normalmente solo es necesario observar el movimiento en la superficie del líquido, ya que el flujo (por ser bidimensional) será el mismo en todos los planos paralelos a la superficie. Ha de tenerse cuidado de que no se presenten efectos capilares, manteniendo la superficie del líquido meticulosamente limpia, ya que, hasta la inmersión de una mano limpia o el contacto de la superficie del líquido con la atmósfera durante algunas horas, hace inútil la superficie para este propósito.

Para asegurar que la condición de la superficie es satisfactoria se hace la siguiente prueba; se rocía la superficie con un poco de polvo de aluminio y se sopla verticalmente hacia abajo, extendiendo las partículas de aluminio en todas direcciones. Si después de soplar, las partículas permanecen en el lugar que ocupaban, la superficie está limpia; pero, si el círculo formado por las partículas se cierra sobre sí mismo, la superficie está contaminada y debe ser renovada.

Al estudiar el flujo alrededor de cuerpos sumergidos, si la superficie está limpia, se puede prevenir el que las partículas de aluminio se alejen de la zona de interés, bajo la influencia de la capilaridad entre la interfase del líquido y el objeto, cubriendo el modelo usado con una capa delgada de parafina. De esta forma la superficie del fluido permanece completamente horizontal a la del modelo.

Otro método de visualización del movimiento en un líquido, consiste en suspender pequeñas escamas de mica en el líquido. De esta forma, ciertos movimientos regulares, especialmente vórtices, pueden ser vistos claramente, debido a que gran número de estas escamas tienen en estas condiciones la misma orientación.

En todos los casos anteriores y en otras técnicas descritas en la literatura - mencionadas anteriormente - se hace uso de técnicas fotográficas.

Aparte del hecho de que las fotografías son mucho más convenientes y didácticas que una mera descripción de las observaciones de un experimentador, el uso del registro fotográfico permite identificar y/o establecer muchos hechos que no podrían ser obtenidos a partir de observaciones visuales.

Además, el elemento "tiempo" es muy importante. Mientras una fotografía puede estudiarse comodamente y con holgura, permitiendo encontrar muchos detalles, el observador visual tiene que digerir toda la información en unos pocos segundos. Las fotografías tienen la ventaja de que pueden observarse y/o mostrarse repetidamente, lo que las hace muy instructivas.

Las fotografías que se obtienen no dan las líneas de corriente con exactitud; ya que, en general, consisten en pequeñas extensiones de curva de varias longitudes, debidas al movimiento de partículas (individuales) de aluminio durante el tiempo de exposición. Por lo tanto, esas pequeñas extensiones son parte de líneas de trayectoria.

Por otro lado, durante un corto intervalo de tiempo las líneas de trayectoria y las líneas de corriente tienen la misma trayectoria, así que la fotografía formada por varias extensiones de línea de trayectoria puestas juntas, dan la apariencia de un campo de líneas de corriente. Por lo tanto, las líneas de corriente aparecen con mayor exactitud conforme al tiempo de exposición es menor.

Si el campo de velocidad es independiente del tiempo (flujo estacionario), las líneas de trayectoria y de corriente son idénticas. En este caso las líneas de corriente pueden ser obtenidas también con exposiciones largas. Para movimientos no estacionarios, las fotografías de líneas de corriente cambian con el tiempo, de manera que solo exposiciones cortas muestran (aproximadamente) la geometría instantánea de la corriente; mientras que exposiciones largas dan líneas de trayectoria, las que en general, dan fotografías muy irregulares y poco útiles.

Si el fenómeno ocurre velozmente, es útil tomar un gran número de exposiciones durante corto tiempo y reproducirlas a una menor velocidad, con lo cual se logra un efecto de desaceleración del movimiento.

Por ejemplo, si un fenómeno puede ser fotografiado 320 veces por segundo y es reproducido a 16 fotos por segundo, el movimiento parecerá 20 veces más lento que en la realidad.

El procedimiento opuesto, de tomar un pequeño número de fotos que son reproducidas más tarde a una mayor rapidez es útil para reproducir movimientos muy lentos.

Puesto que, en una fotografía tomada con una cámara con motor a velocidad normal la exposición es de alrededor de $1/140$ seg, una sola fotografía no muestra las características del flujo. Por ejemplo; una foto tomada de un tanque de agua con polvo de aluminio mostrará varias partículas de aluminio solo como puntos aislados. Pero si el manejo de la cámara se lleva a cabo más lentamente, de tal forma que solo se tomen 2 exposiciones por segundo, la iluminación es de alrededor de $1/4$ seg para cada foto, entonces, las partículas muestran líneas cortas, de tal forma que una sola fotografía da, en sí misma, clara idea del flujo.

Si la impresión se hace en papel transparente y se sobreponen varias fotos consecutivas, las diferentes imágenes de la misma partícula de aluminio formaran una línea punteada. Estos puntos muestran las diferentes posiciones, mientras que los espacios entre los puntos están dados por el cierre de los lentes durante el transporte de la película de una toma a otra. La longitud de los puntos, así como la de los espacios son una medida de la velocidad instantánea de la partícula considerada.

Dado que es deseable obtener el mayor contraste posible en las fotografías del flujo, es importante hacer el fondo tan negro como sea posible. Para este propósito el negro mate es el más útil, ya que refleja menos del 1% de la luz incidente.

En el sentido de obtener el máximo contraste es también mejor usar una eliminación intensa y buenos lentes que placas o películas sensibles, ya que aún las mejores placas o películas disponibles resultan relativamente inservibles ya que la relación de oscurecimiento aumenta abruptamente con la intensidad de iluminación, aún para películas hipersensibles. Por otra parte, las placas menos sensitivas tienen el grano más fino, lo que permite hacer mejores ampliaciones.

La elección de los lentes no es de particular importancia puesto que se requiere muy poca profundidad. De hecho, cualquier lente potente de distancia focal corta sirve para este propósito.

Tocante a la iluminación, debe tenerse en cuenta que se desea la máxima potencia disponible.

La elección de los baños revelador y fijador debe hacerse considerando la necesidad de tener el máximo contraste posible.

Descripción del sistema experimental.

A fin de obtener un sistema de flujo no simétrico, en el cual se pudiesen obtener efectos observables de estas irregularidades (asimetrías) se optó por realizar la visualización en un flujo rotacional inducido por un cilindro en un recipiente con forma de media circunferencia.

El sistema generado, y en el que se realizó la experimentación se muestra en la figura 4.1. El eje central (que consiste en una barra torneada de 2 cm. de diámetro) esta conectada en su extremo superior a un motor de velocidad variable Cole-Parmer Mod. 4555-30 con controlador de velocidad, y permite el uso de cilindros de diferentes diámetros que se acoplan en su extremo inferior. Este eje está sostenido por un soporte, que a la vez permite colocar el eje en posición vertical mediante 2 posicionadores y el uso de un nivel torpedo Level Stanley (364) y un plomada.

La técnica descrita anteriormente fue la elegida, principalmente por su bajo costo, debiendo resolverse en el proceso varios problemas como fueron: la iluminación, tamaño de partículas, dimensiones relativas del equipo y técnica fotográfica.

Se usaron como partículas trazadoras, polvo de aluminio lavado, con tamaño de 200 a 100 μ , tratado con alcohol. En todos los casos se comprobó la limpieza de la superficie del fluido por el método anteriormente descrito.

Como fuente de iluminación se usaron 2 "spots" fotográficos de 400 W. Dado que se esperaba tener tiempos de exposición grandes, se trabajó inicialmente película lenta, pero su disponibilidad en el mercado era muy limitada. También se consideró la posibilidad de usar película pancromática pero su costo resultaba prohibitivo. Finalmente se

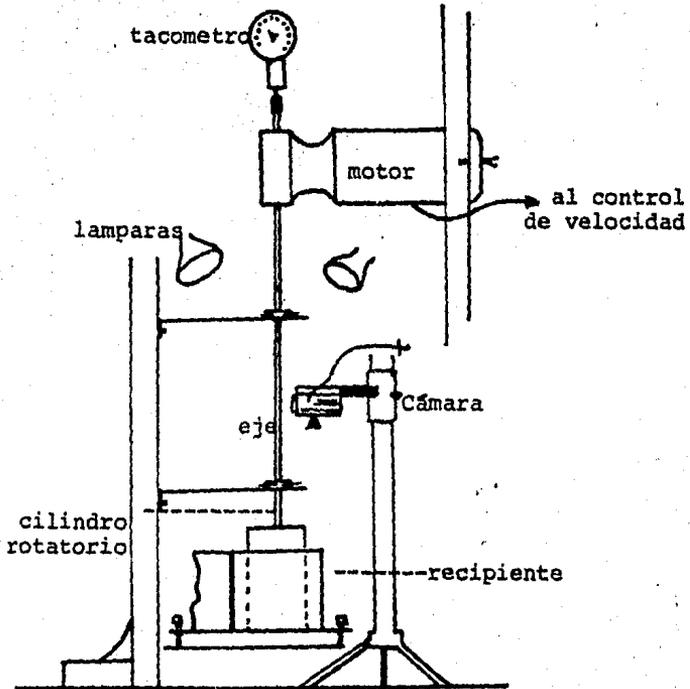


FIG. 4.1 Equipo experimental

optó por trabajar con película Kodak-Tri-X-Pan ASA400/27DIN.

La cámara utilizada fue Nikkormat-Nikon, Japan, FT2, 5134593, la cuál posee exposímetro integrado. Inicialmente la iluminación se estableció haciendo uso del exposímetro integrado considerando el mayor tiempo posible. Esta se modificó posteriormente dependiendo de las fotografías obtenidas en cada experimento.

Inicialmente se trabajo con agitadores delgados ($d < 2$ cm), pero en estas condiciones la velocidad del flujo es extremadamente pequeña, y aún con tiempos de exposición muy grandes ($t_e \gg 30$ seg), el movimiento del fluido era imperceptible en las fotografías. Por esta razón se decidió usar barras de diámetros mayores.

Finalmente las dimensiones del equipo, definidas según la fig. 4.2 fueron:

recipientes:	$D_+ = 22.3$ cm
	$D_- = 17.3$ cm
agitadores:	$d_+ = 7.59$ cm
	$d_o = 5.05$ cm
	$d_- = 3.83$ cm

Los agitadores pequeños fueron torneados en bronce, y el mayor en hierro "cold rolled".

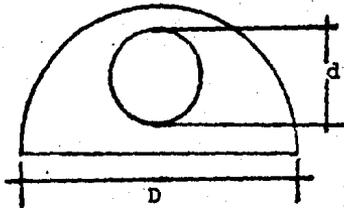


Fig 4.2 Dimensiones del equipo

En la experimentación, se coloca el recipiente bajo observación de tal forma que el cilindro agitador este colocado al "centro" del medio círculo, como muestra la fig. 4.3 .

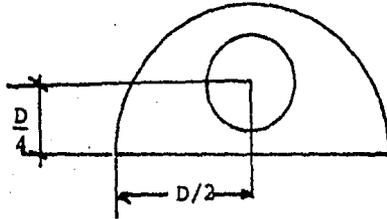


Fig. 4.3 Posiciones relativas en el sistema.

La base del recipiente se coloca antes completamente horizontal, comprobando esta condición mediante el nivel de burbuja.

El eje se alinea inmediatamente después, por medio de su soporte.

La sustentación del motor, el soporte del eje y el de la cámara son independientes, a fin de que las posibles vibraciones del motor no afecten los demás elementos del conjunto.

La cámara se coloca después directamente sobre la zona sujeta a observación, perfectamente horizontal (lo que se verifica con el nivel) y a la menor distancia posible, lo que depende del lente de la cámara, y en nuestro caso fué de 48 cm a partir de la superficie del fluido.

Las lámparas se colocaron en un plano superior a la cámara, alrededor de 60 cm sobre la zona de observación.

Para poder realizar la visualización, se efectuaron inicialmente pruebas con agua pura, como fluido newtoniano de referencia, y se establecieron de esta forma las condiciones básicas para efectuar la visualización.

Como fluidos viscoelásticos se usaron soluciones acuosas de SEPARAN AP-30 al 0.6% y 1% . Este es un polímero aniónico sintético de elevado peso molecular con fórmula semidesarrollada:



Es un sólido blanco, soluble en agua; usado como agente espesante y en suspensiones.

El Separan AP-30 ha sido ampliamente estudiado en varios países y en México, como parte de un proyecto del I.I.M.

Tabla 4.1
Resultados para la solución acuosa de Separan AP-30 al 0.6%
en el Reogoniometro de Weissenberg

ω (rpm)	Ω (rad/s)	$\dot{\gamma}$ (rad/s)	η (poises)	τ ($\frac{\text{dynas}}{\text{cm}^2}$)
3.58 E-2	3.749 E-3	1.082 E-1	7.257	0.785
7.15 E-2	7.487 E-3	2.16 E-1	7.267	1.57
1.42 E-1	1.487 E-2	4.291 E-1	6.888	2.955
2.84 E-1	2.974 E-2	8.581 E-1	6.188	5.310
5.68 E-1	5.948 E-2	1.716	5.112	8.773
1.13	1.183 E-1	3.414	4.125	14.08
2.26	2.367 E-1	6.829	3.922	26.782
4.5	4.712 E-1	13.597	2.785	37.86
8.99	9.414 E-1	27.164	1.955	53.11
10	1.885	54.3889	1.401	76.19

Tabla 4.2
Resultados para la solución acuosa de Separan AP-30 al 1%
en el Reogoniometro de Weissenberg

ω (rpm)	Ω (rad/s)	$\dot{\gamma}$ (rad/s)	η (poises)	τ ($\frac{\text{dynas}}{\text{cm}^2}$)
3.58 E-2	3.749 E-3	1.0817 E-1	1.3233 E2	1.4315 E1
7.15 E-2	7.487 E-3	2.16 E-1	9.832 E1	2.124 E1
1.42 E-1	1.487 E-2	4.291 E-1	7.318 E1	3.14 E1
2.84 E-1	2.974 E-2	8.581 E-1	4.951 E1	4.248 E1
5.68 E-1	5.948 E-2	1.716	3.269 E1	5.61 E1
1.13	1.183 E-1	3.414	2.164 E1	7.388 E1
2.26	2.367 E-1	6.829	1.352 E1	9.235 E1
4.5	4.712 E-1	13.597	8.49	1.154 E2
8.99	9.414 E-1	27.164	5.673	1.541 E2
10	1.885	54.3889	3.545	1.928 E2
35.8	3.749	1.08 E2	2.433	2.632 E2
71.5	7.487	2.16 E2	1.539	3.325 E2
142	1.487 E1	4.29 E2	0.9255	3.971 E2

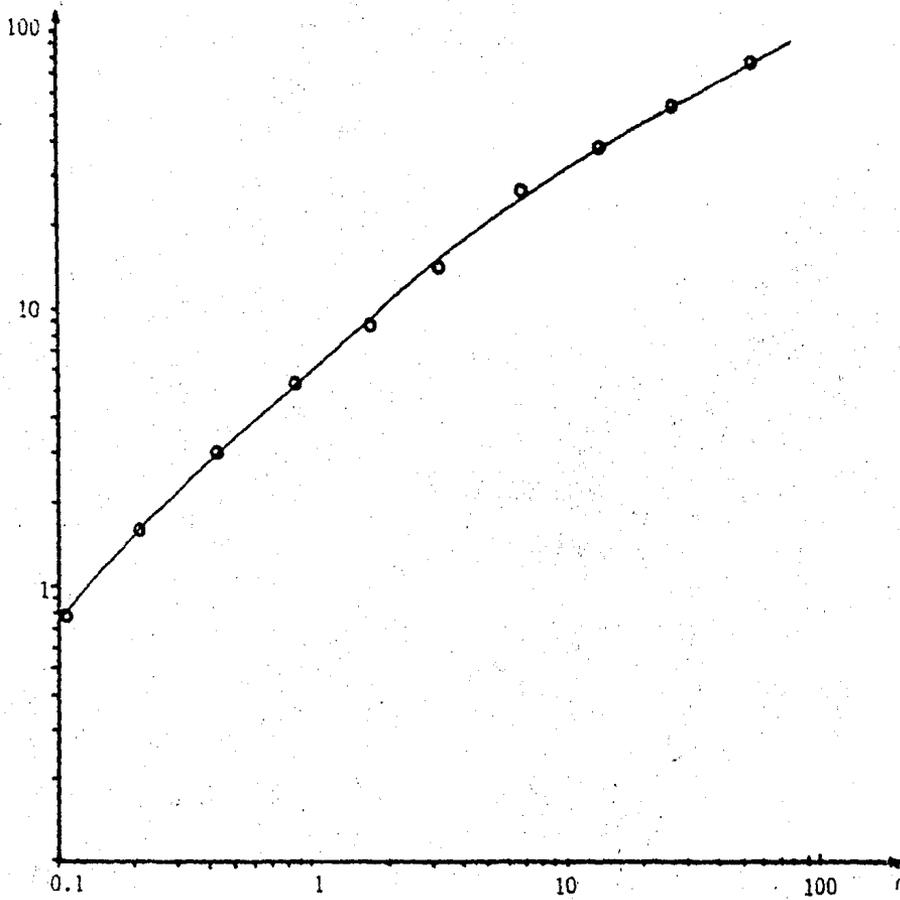


FIG. 4.4

Curva de flujo.

Separan AP-30 en agua al 0.6%.

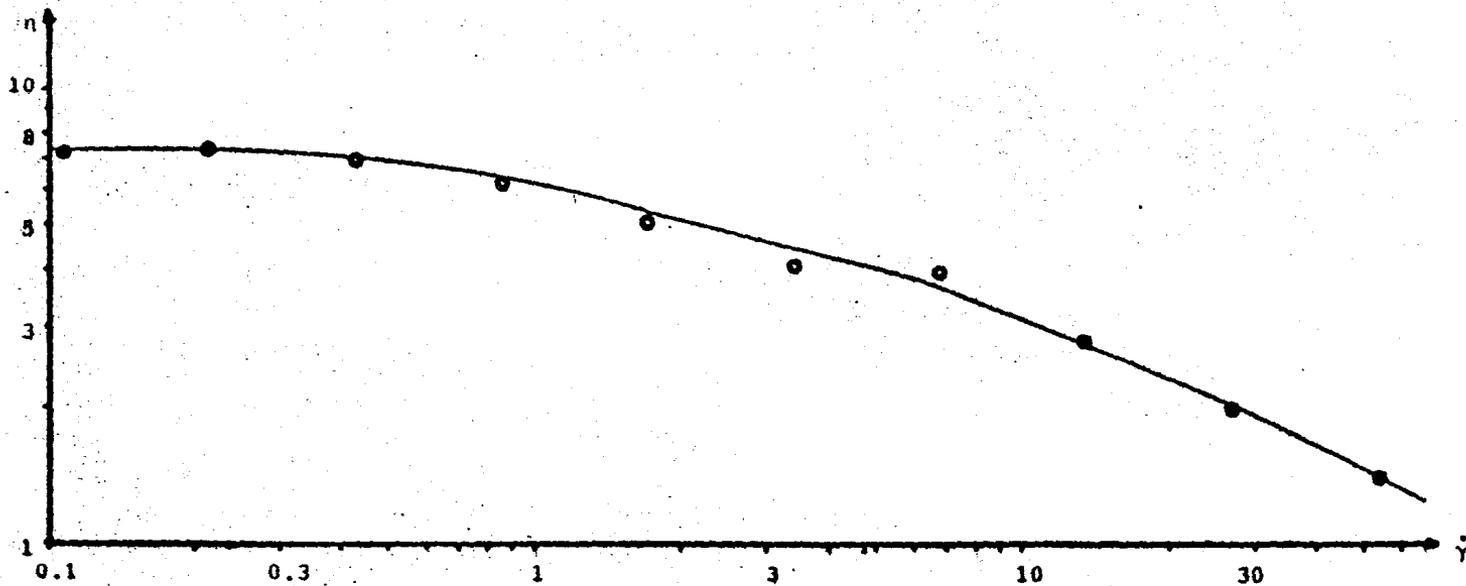


FIG 4.5 Curva de viscosidad vs $\dot{\gamma}$

Sol acuosa de Separan AP-30 al 0.6%

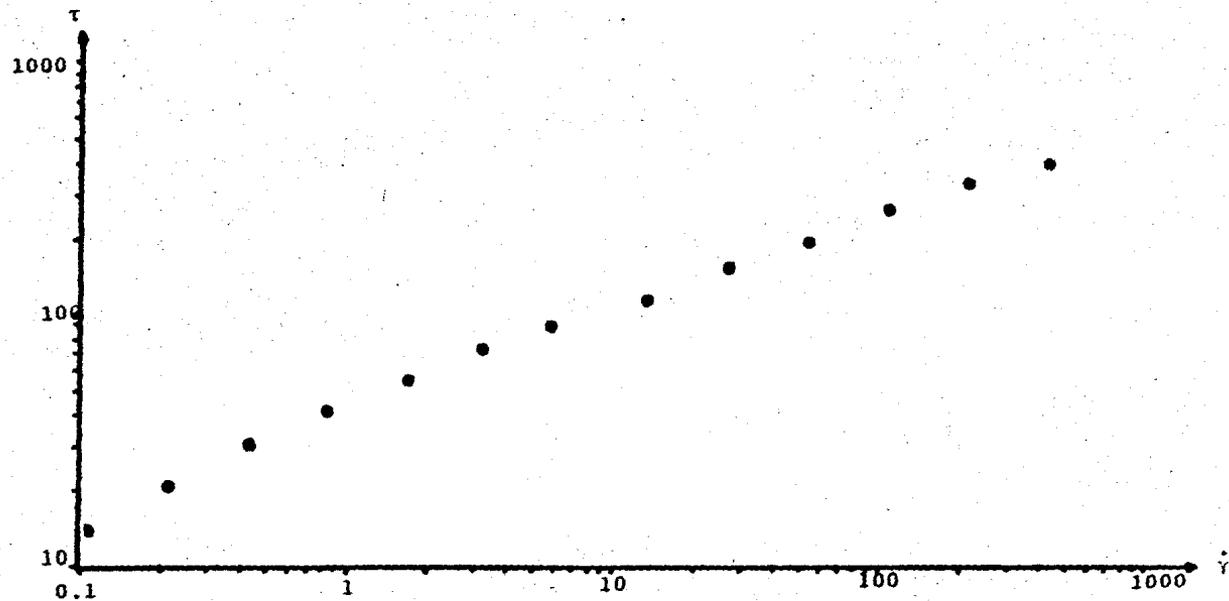


FIG 4.6 Curva de Flujo .

Separan AP-30 al 1% en agua.

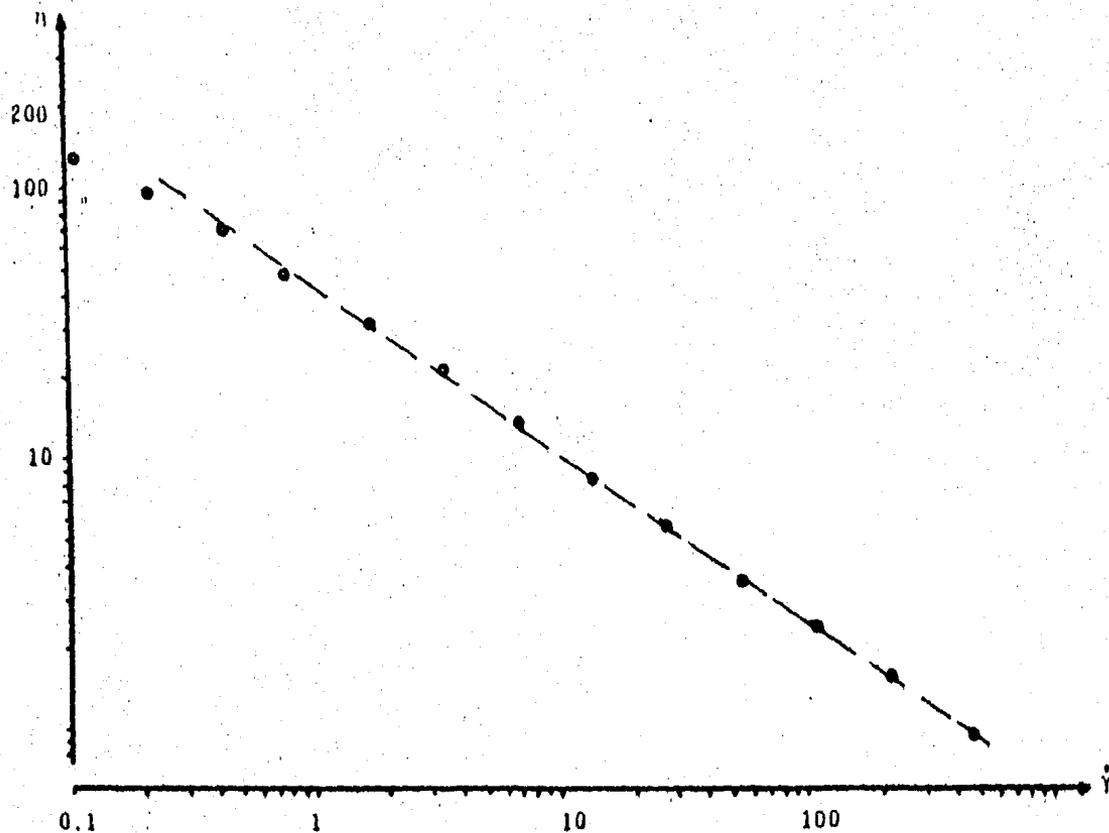


Fig 4.7 Curva de $\eta - \dot{\gamma}$ para la sol. acuosa de Separan A] 1%

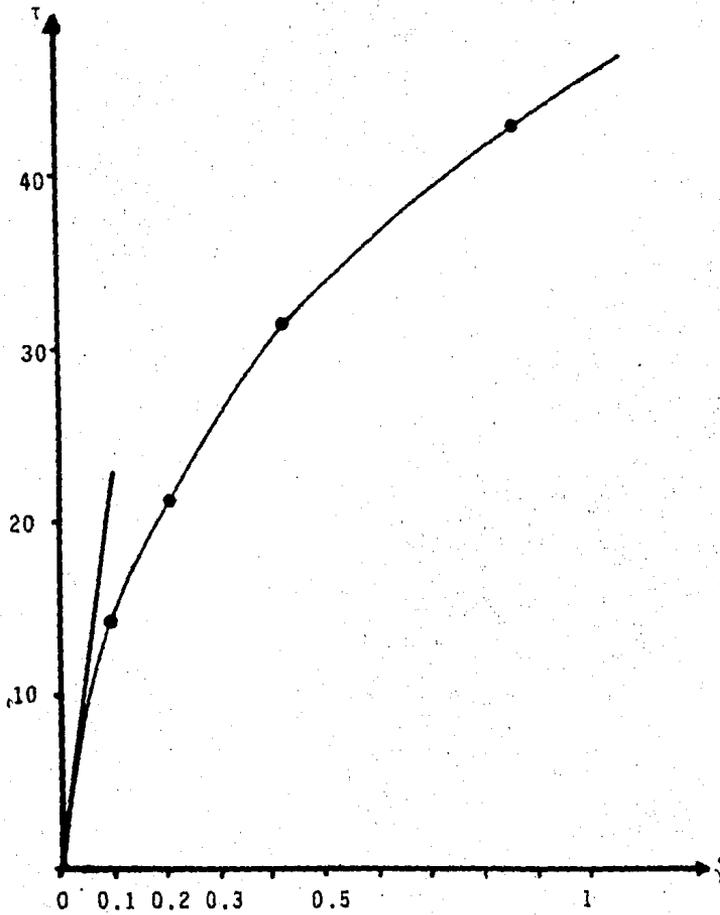


Fig 4.8

Evaluación de la viscosidad n_0 para la solución de Separan AP-30 al 1% en agua.

Las propiedades reológicas de ambas soluciones fueron determinadas en el Reogoniometro de Weissenberg modelo R-19 de Sangamo Weston Controls, G.B. situado en el Laboratorio de Fluidos de la Facultad de Ingenierfa (U.N.A.M.); con un sistema de "cono y plato" de $\theta_0 = 1.9857$. Los resultados apare- tabulados en las tablas 4.1 y 4.2, y se muestran en las fig. 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 que corresponden a las curvas de flujo y de viscosidad vs rapidez de corte para ambas soluciones.

Haciendo uso de estos valores, se determinaron las viscosidades a esfuerzo cero (o rapidez de corte cero) η_0 como $\eta_0 = 227$ poises para la solución al 1% y $\eta_0 = 7.6$ poises para la solución al 0.6%.

A fin de medir la desviación del comportamiento newtoniano se aplicó el modelo de la ley de la potencia a los datos anteriores obteniéndose un índice de 0.502 y 0.368, y viscosidades a $\omega = 1$ rad/seg (η_1) de 10.188 y 45.056 poises para las soluciones al 0.6% y 1% de Separan, respectivamente; como se resume en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3
Propiedades de los fluidos sometidos a prueba.

clãve	fluido	η_0 (poises)	Ley de la Potencia		
			n	η_1 (poises)	r^2
N1	agua	0.01	1	0.01	- -
N2	glicerina	14.9	1	14.9	- - -
V1	sol. acuosa Separan 0.6%	7.6	0.502	10.188	1.0000
V2	sol. acuosa Separan 1%	227	0.368	45.056	0.9995

Debe hacerse notar que la ley de la potencia aplica en el rango reportado para $\dot{\gamma} > 5$ en en el caso del Separan al 0.6%, y para $\dot{\gamma} > 0.3$ para el Separan al 1%; que son las regiones en que las gráficas $\log \eta$ vs $\log \dot{\gamma}$ presentan una tendencia lineal.

Como fluido de comparación, de comportamiento newtoniano, se uso glicerina pura, de $\mu = 14.9$ poises . Este es un líquido inodoro de peso molecular 92.1 g/gmol y fórmula desarrollada $\text{CH}_2\text{-OH - CH-OH - CH}_2\text{-OH}$, miscible en agua y alcohol, llamado también glicerol, alcohol glicólico o 1,2,3 propanotriol.

Las visualizaciones fueron realizadas para estos 4 fluidos en las 6 posibles combinaciones de recipiente-agitador.

Como se señalo anteriormente, se requieren tiempos de exposición relativamente largos para obtener las líneas de corriente deseadas, en las fotografias. Los tiempos de exposición usados variaron desde 4 seg para agua, hasta 40 seg para la solución de Separan más concentrada.

La rapidez de rotación del cilindro agitador varió en el intervalo acotado por la menor velocidad de operación del motor (≈ 40 r.p.m.) hasta aquella en que se empezaba a generar turbulencia o aparecían efectos indeseables (inerciales) (alrededor de 100 a 120 r.p.m. para los viscoelásticos).

La abertura del obturador bajo la condición de tiempos de exposición muy largos, se fijo en el valor mínimo posible, correspondiente a $f = 16$, de tal suerte que se tenia no solo la menor abertura del obturador , sino tambien una mayor profundidad de campo, evitando de esta forma, en la mayoría de los casos, que las fotografias fueran demasiado oscuras o fuera de foco.

C A P I T U L O V

ANALISIS DE RESULTADOS

Como se mencionó en el capítulo anterior, el trabajo se inició efectuando la visualización con agua pura, en este caso se observaron flujos secundarios de naturaleza inestable. Es decir, las fotos son obtenidas a tiempos de exposición pequeños, y no determinan un estado estacionario, como en el caso de los otros fluidos trabajados.

A partir de las primeras fotografías de los fluidos viscoelásticos se observó que se presentaban varios tipos de vórtices según el tamaño y la forma de los flujos secundarios, por lo que se les clasificó según se muestra en los esquemas de la fig. 5.1

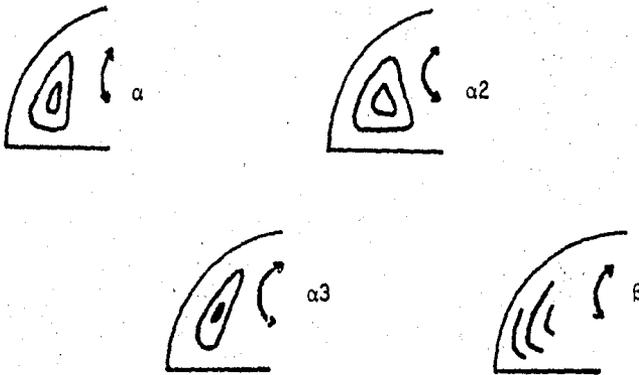


Fig. 5.1 . Clasificación de los vórtices observados.

Dado que el flujo tipo α se presenta un gran número de veces se decidió caracterizarlo mediante dos variables adimensionales A_1 y A_2 definidas con respecto al sistema como se muestra en la fig. 5.2 .

De tal manera que:

$$A_1 = \frac{x}{d}$$

$$A_2 = \frac{y}{d}$$

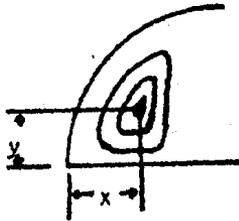


Fig. 5.2 Definición de las variables geométricas.

Donde x y y representan la localización del centro del vórtice principal del flujo secundario. Este tratamiento es aplicable a los tipos α y α_2 , pero no al α_3 en el cual la localización del centro del vórtice es poco confiable.

Para cada sistema (combinación de recipiente-agitador) es posible obtener estos datos, excepto en aquellos en que se tienen flujos inestables o del tipo β .

La relación del diámetro del agitador a radio del recipiente puede constituir una manera de caracterizar cada una de estas combinaciones. La tabla 5.1 presenta esta relación.

Tabla 5.1

Geometría	razón d/R
$D_- d_+$	0.875
$D_- d_0$	0.582
$D_- d_-$	0.440
$D_+ d_+$	0.707
$D_+ d_0$	0.453
$D_+ d_-$	0.3435

Este parámetro se ha usado en la representación de los tipos de flujo encontrados para cada fluido en la tabla 5.2 , en la cual N1 representa al agua, N2 a la glicerina, y V1 y V2 a las soluciones acuosas de Separan al 0.6% y 1% respectivamente.

Tabla 5.2

Geometría	Tipo de flujo:				
	inestable	α	$\alpha 2$	$\alpha 3$	β
0.875	N1,V1,V2				
0.582	N1	N2,V1,V2	V2		
0.44	N1	N2,V1,V2		V2	
0.707	N1	N2,V1		N1	N1
0.453	N1	N2,V1,V2			
0.3435	N1,V2	N2,V1,V2	V1		N1

De donde se observa que el agua, en los rangos de experimentación trabajados presenta unicamente flujos inestables.

Para la relación d/R mayor (0.875) el claro entre el recipiente y el cilindro es muy pequeño (0.54 cm) y para ambas soluciones de Separan se encontró que en uno de los lados se presenta el fenómeno de inundación, por lo que no se alcanza un régimen estacionario de flujo y en consecuencia no se reporta.

Por esta razón, y dado que el sentido de rotación del cilindro hace diferentes los fenómenos de flujo en ambos lados del recipiente, se decidió diferenciarlos, marcandolos con las letras O y U , como se muestra en la fig. 5.3°.

En el lado O es en donde se presenta el fenómeno de inundación mencionado anteriormente.

Posteriormente se procedió a graficar el valor de las variables A_1 y A_2 , como son definidas en la fig. 5.2 , en función de la rapidez de rotación (ω) del cilindro considerando el lado a que corresponden (O ó U) . Las gráficas asociadas estan en las fig. 5.3 a 5.12, en donde se usa la siguiente

simbología para cada fluido:

N2	Glicerina	○
V1	Sol. acuosa de Separan al 0.6%	△
V2	Sol. acuosa de Separan al 1%	□

Identica nomenclatura se usa en las fotografías que ilustran los resultados obtenidos de la visualización. En total se obtuvieron más de 350 fotografías, siendo las que acompañan este reporte representativas de los diferentes flujos observados.

Como se puede ver en las gráficas de A_1 y A_2 vs. ω (fig.5.3 a 5.12) no se presenta una tendencia definida de estas variables excepto que todos los puntos tienden a mantenerse dentro de un rango, relativamente estrecho, siendo en la generalidad de los casos, los valores correspondientes a 'y' ligeramente menores a los correspondientes a 'x', pero siempre en un rango semejante.

Posteriormente se definió, como una medida indirecta del tamaño del vórtice la longitud L , del vértice del recipiente al centro del vórtice; y se adimensionalizó con respecto a R , el radio del recipiente, definiendo A_3 como:

$$A_3 = \frac{L}{R} \quad \dots 5.3$$

Los resultados se presentan graficados en las fig. 5.13 a 5.17.

De nuevo se observa que la variable A_3 se mantiene en un estrecho intervalo (alrededor de 0.5), y que la tendencia de las curvas de Separan al 1% y de Glicerina es muy semejante y parece constituir una funcionalidad constante con respecto a la rapidez de rotación del cilindro (ω), siendo la solución de Separan al 0.6% la única que presenta variaciones notables, y que en la generalidad de los casos corresponde a una disminución del tamaño del vórtice al aumentar ω .

Considerando que es el cilindro rotatorio el que causa los flujos secundarios, se adimensionalizó también L con respecto a d , definiéndose la variable geométrica:

$$A_4 = \frac{L}{d} \quad \dots 5.4$$

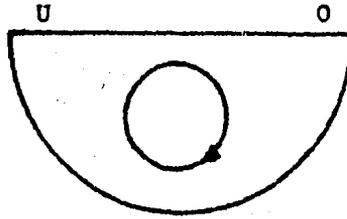


Fig. 5.3 Definición de los lados

TIPOS DE FLUJOS OBSERVADOS

Foto 1



Foto 2



Foto 3

Foto 1 . tipo α . V2. $d/R=0.585$. Lado O. 100 rpm. $t_e=15$ s.

Foto 2 . tipo α . N1. $d/R=0.44$. Lado O. 80 rpm. $t_e=6$ s.

Foto 3 . tipo α_1 . inestable. N1 . Lado U. 100 rpm. $t_e=2$ s.
 $d/R = 0.44$



Foto 4



Foto 5



Foto 6

Foto 4. tipo α_2 V2. $d/R=0.3435$. Lado O. 80 rpm. $t_e=10$ s.

Foto 5. tipo α_2 V1. $d/R=0.44$. Lado O. 100 rpm. $t_e=6$ s.

Foto 6. tipo α_3 V1. $d/R=0.44$. Lado U. 120 rpm. $t_e=8$ s.



Foto 7



Foto 8



Foto 9

Foto 7. tipo 3. V1. $d/R=0.44$. Lado U. 40 rpm. $t_e=10$ s.

Foto 8. tipo 8. N1. $d/R=0.582$. Lado U. 80 rpm. $t_e=8$ s.

Foto 9. tipo 8. N1. $d/R=0.582$. Lado U. 60 rpm. $t_e=4$ s.

Flujos típicos (a)



Foto 10



Foto 11



Foto 12

Foto 10. V2. Lado U. 60 rpm. $t_e=10$ s. $d/R=0.707$.

Foto 11. V2. Lado U. 120 rpm. $t_e=8$ s. $d/R=0.707$.

Foto 12. N2. Lado O. 120 rpm. $t_e=5$ s. $d/R=0.453$



Foto 13



Foto 14

Foto 13. N2. $d/R=0.582$. Lado O. 60 rpm. $t_e=12$ s.
 Foto 14. N2. $d/R=0.44$. Lado O. 60 rpm. $t_e=12$ s.



Foto 15



Foto 16

Foto 15. N2. $d/R=0.582$. Lado U. 60 rpm. $t_e=10$ s.
 Foto 16. V1. $d/R=0.44$. Lado U. 60 rpm. $t_e=15$ s.

Nota: La medición de las variables geométricas se realizó proyectando los negativos de las fotografías, de manera que la imagen obtenida, y en la cual se localizó el vórtice, tenía un tamaño aproximado de 1×1 m.

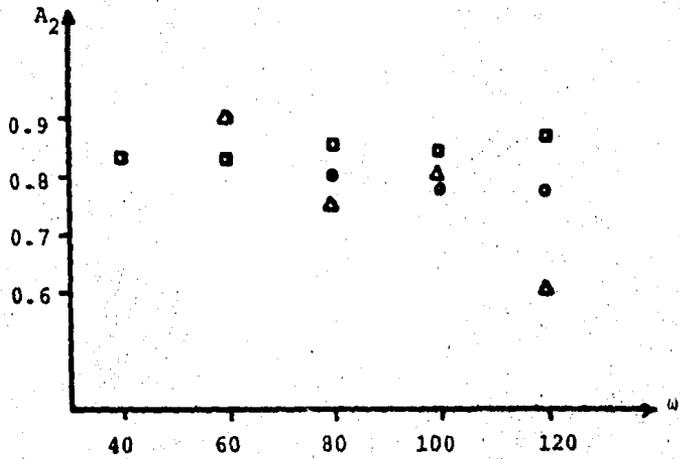
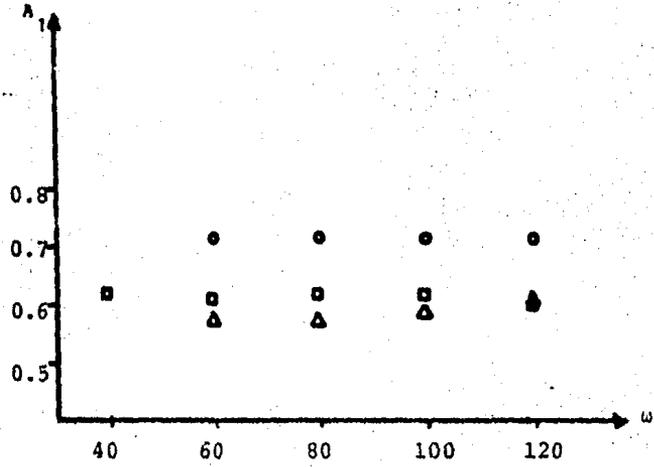


Fig. 5.3 $d/R = 0.3435$ Lado 0

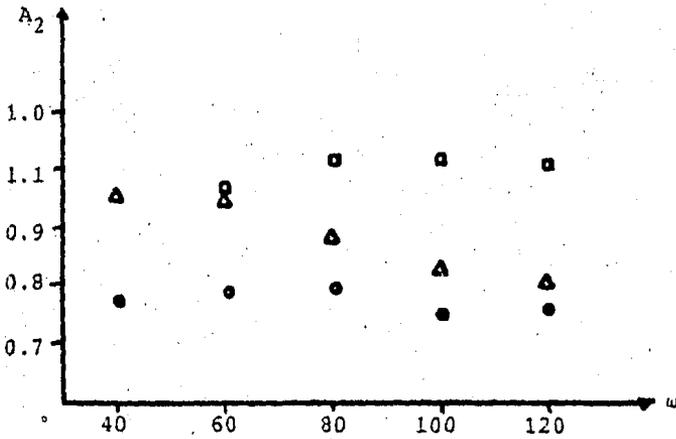
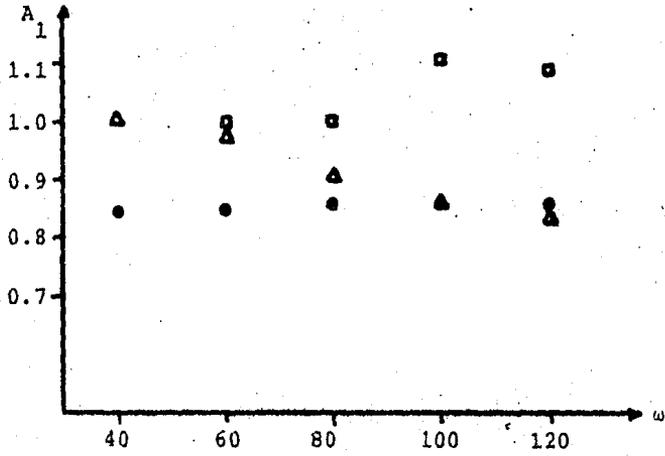


Fig. 5.4 $d/R = 0.44$ Lado O

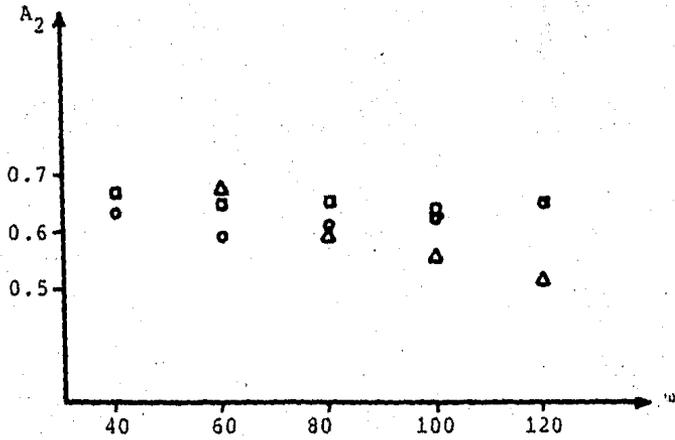
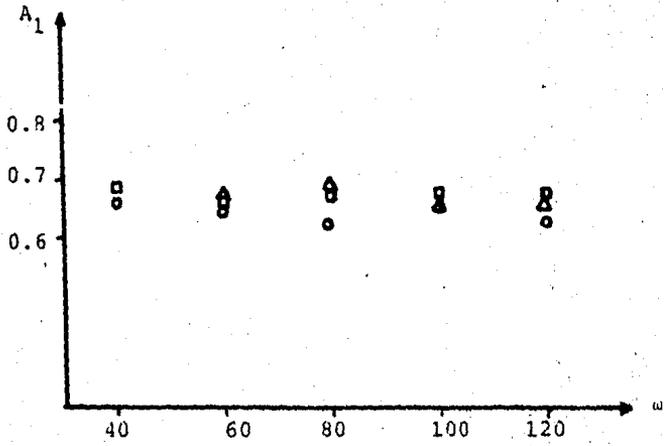


Fig. 3.5 $d/R = 0.453$ Lado O

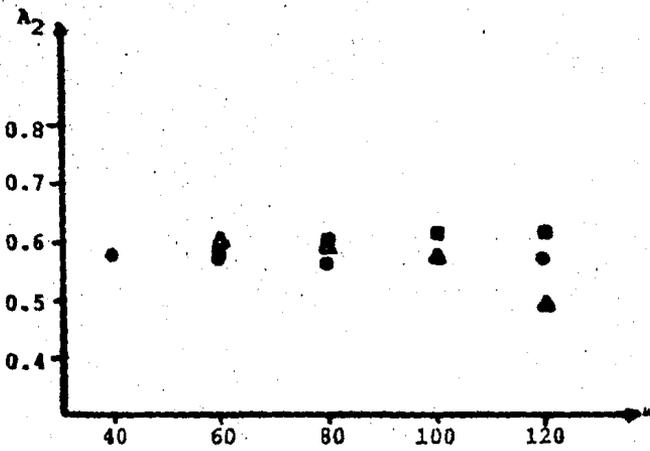
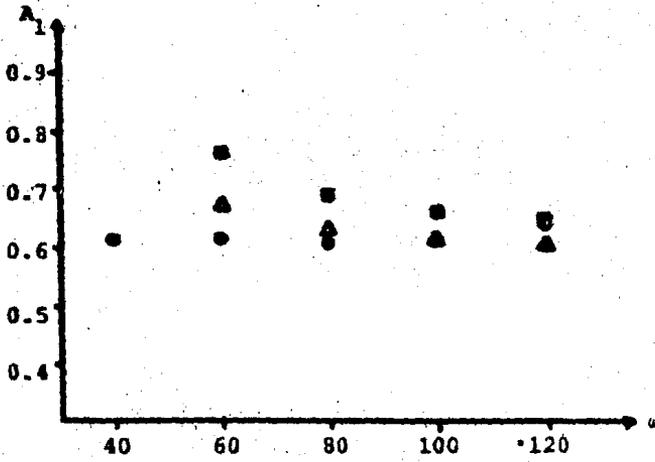
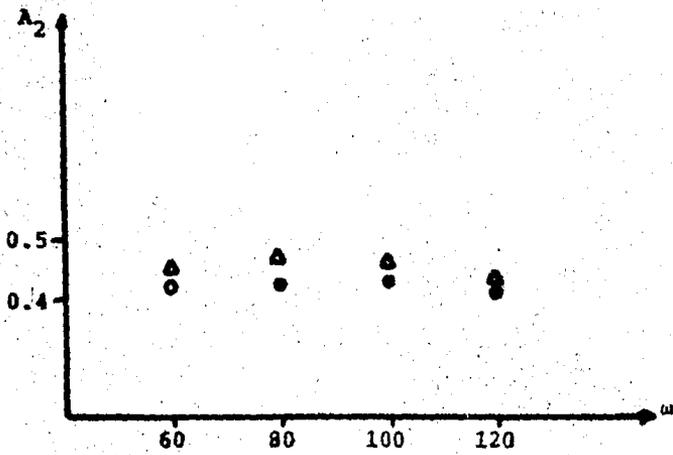
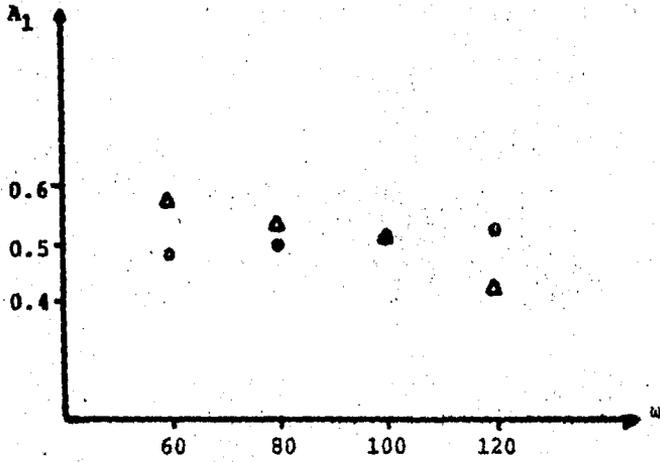


Fig. 5.6 $d/R = 0.583$ Lado O

Fig. 5.7 $d/R = 0.707$ Lado O

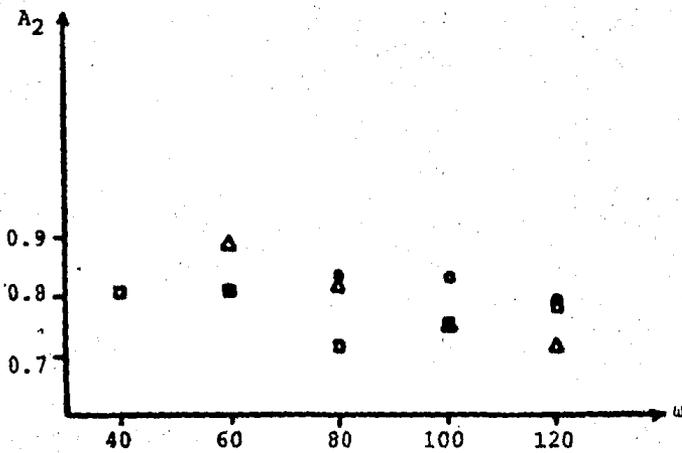
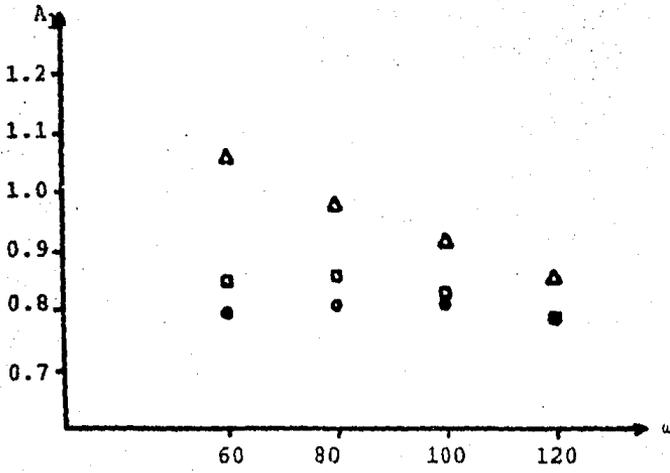


Fig. 5.8 $d/R = 0.3435$ Lado U

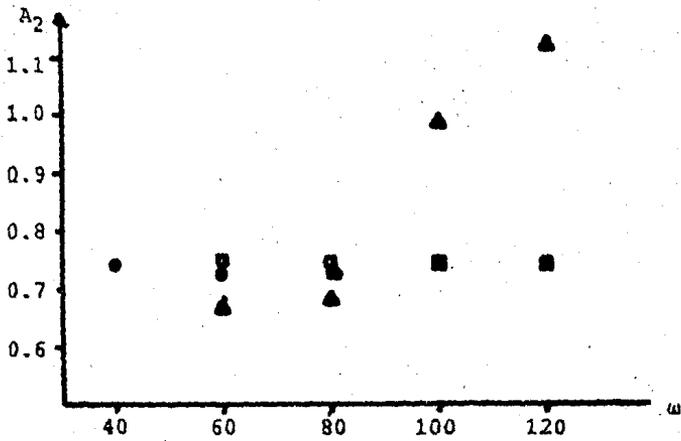
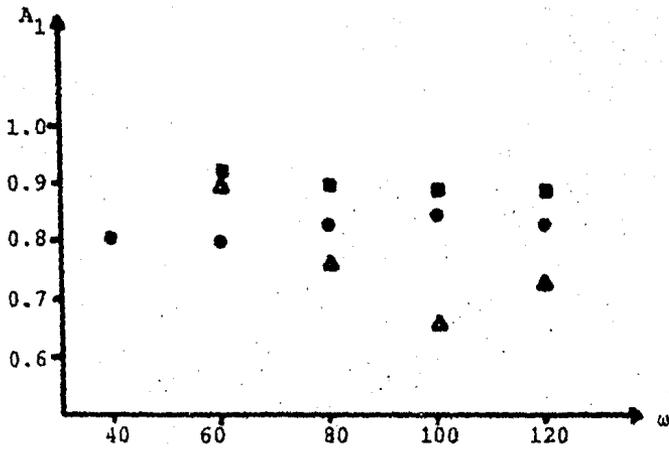


Fig. 5.9 $d/R = 0.44$ Lado U

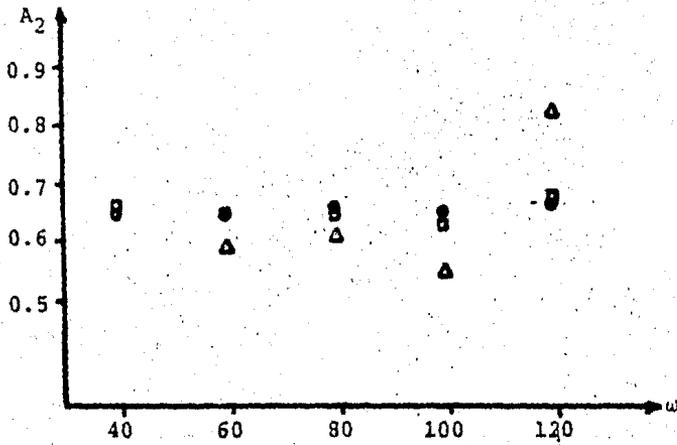
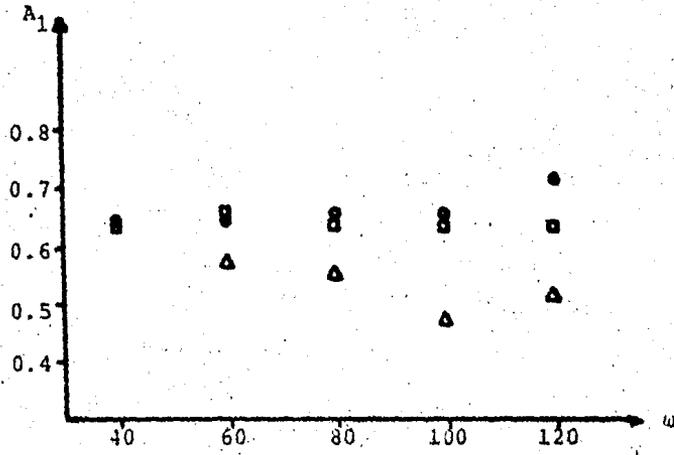


Fig. 5.10 $d/R = 0.453$ Lado U

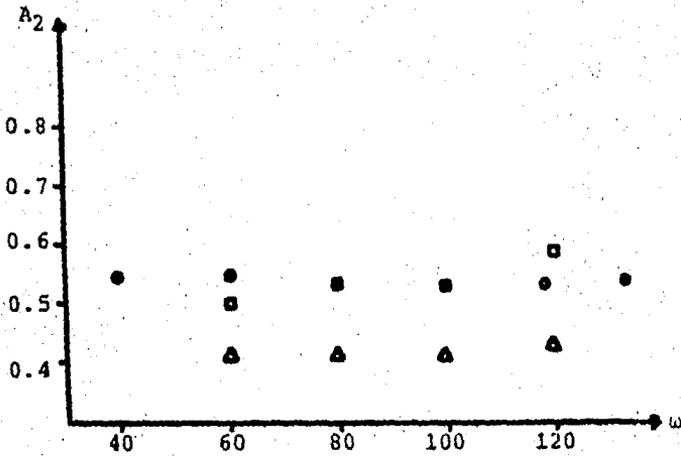
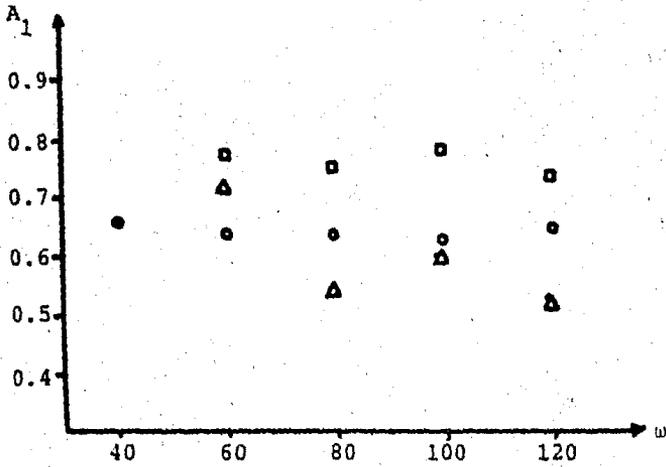
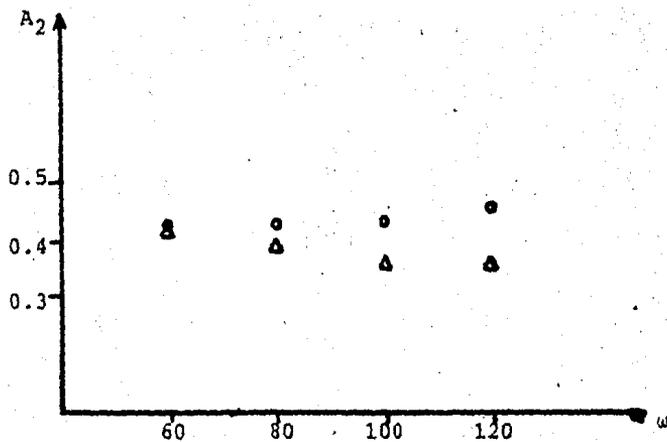
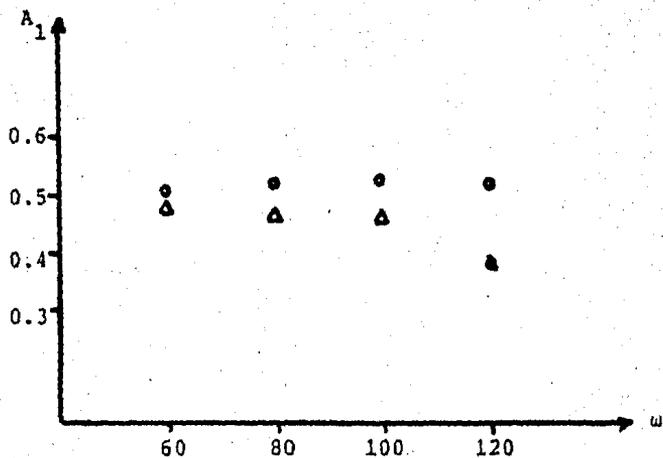


Fig. 5.11 $d/R = 0.583$ Lado U

Fig. 5.12 $d/R = 0.707$ Lado U

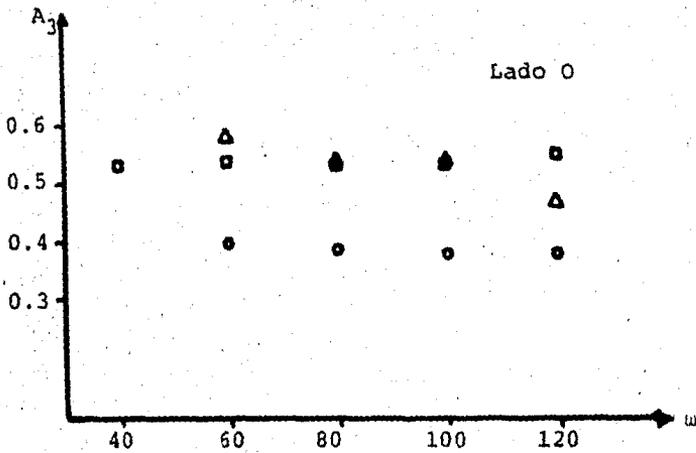
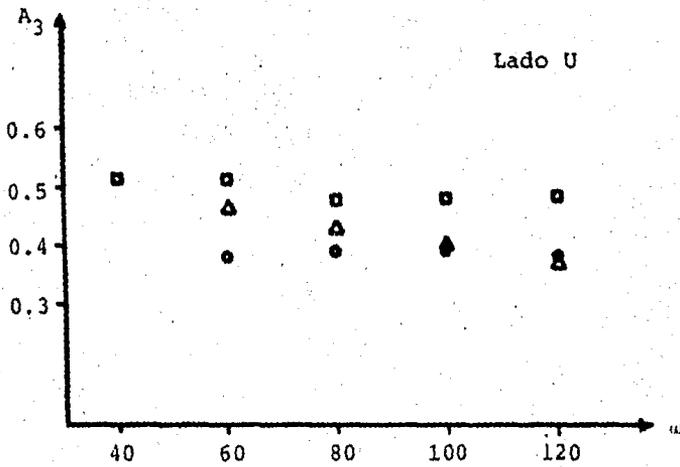


Fig. 5.13 A_3 para $d/R = 0.3435$

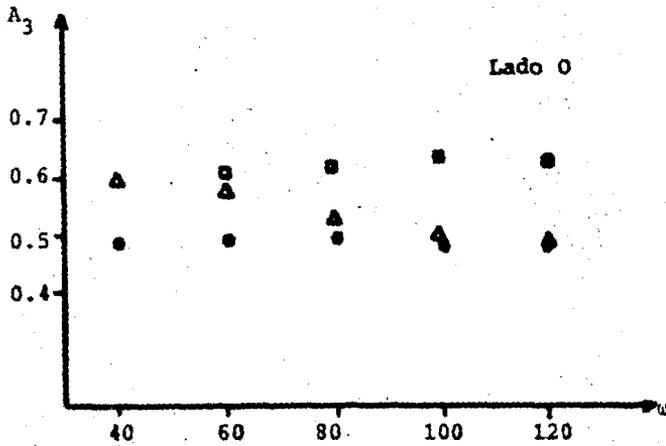
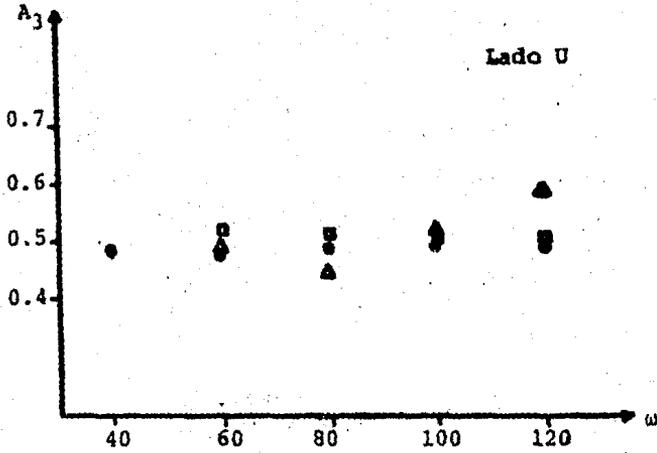


Fig. 5.14 A_3 para $d/R = 0.44$

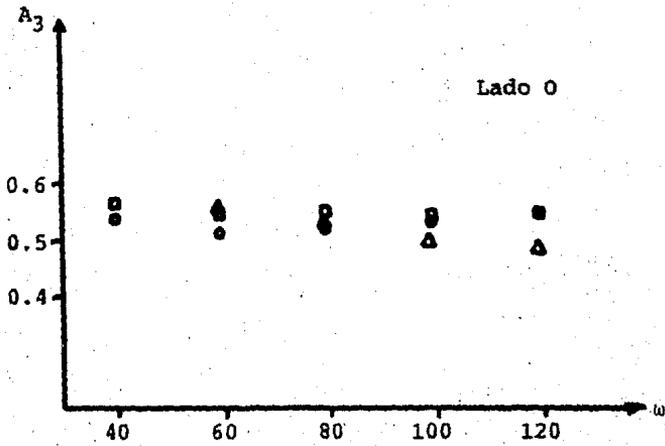
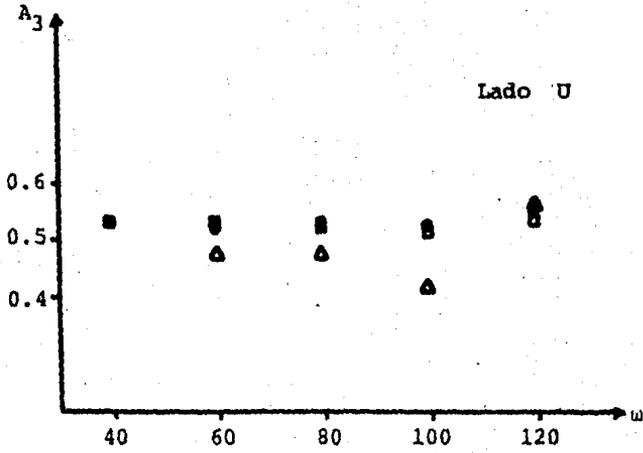


Fig. 5.15 A_3 para $d/R = 0.453$

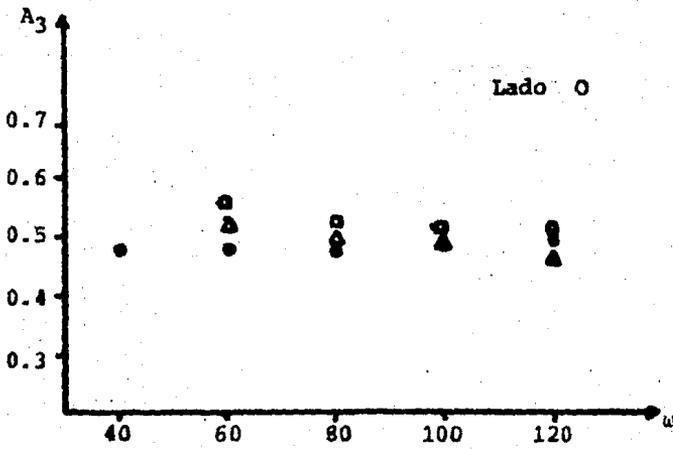
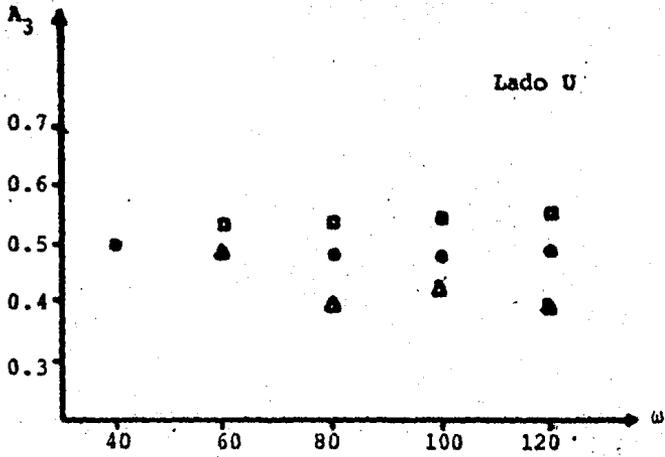


Fig. 5.16 A_3 para $d/R = 0.583$

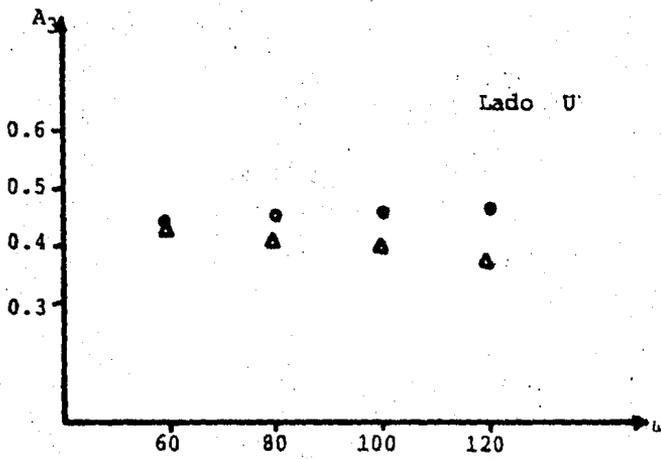
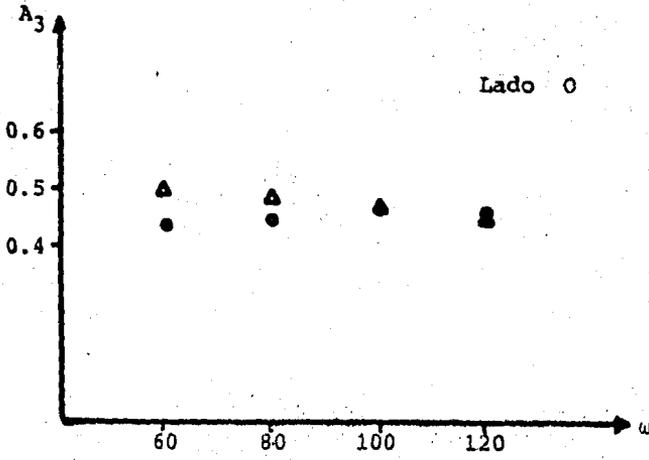


Fig. 5.17 A_3 para $d/R = 0.707$

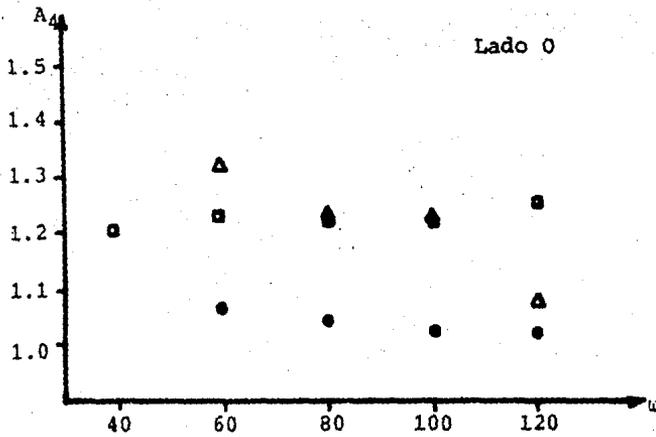
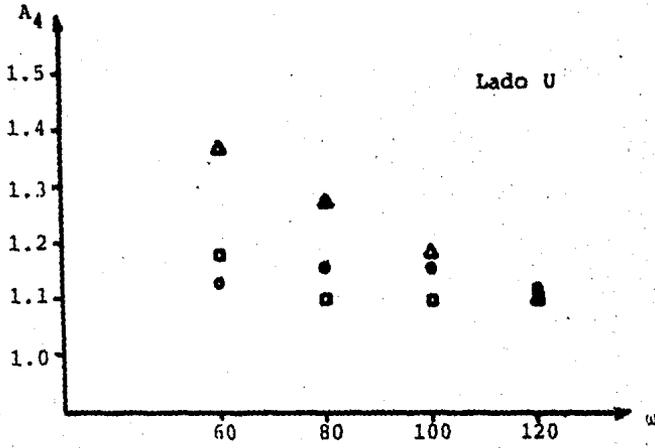


Fig. 5.18 A_4 para $d/R = 0.3435$

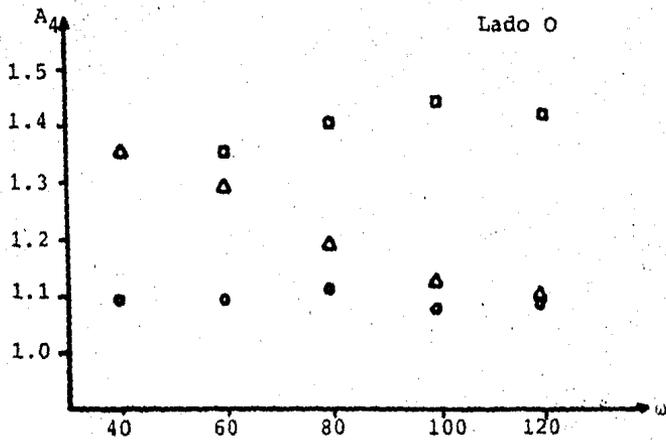
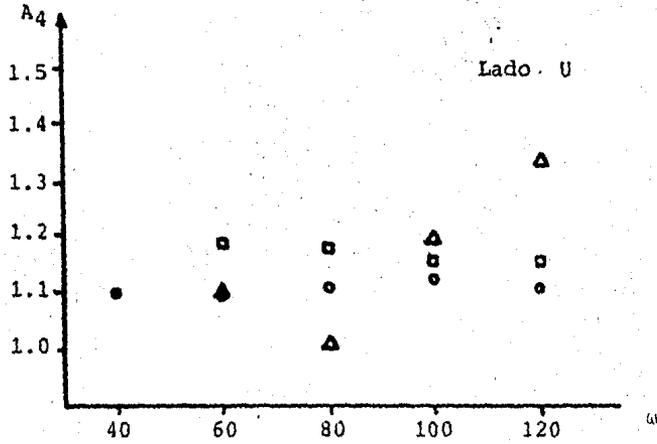


Fig. 5.19 A_4 para $d/R = 0.44$

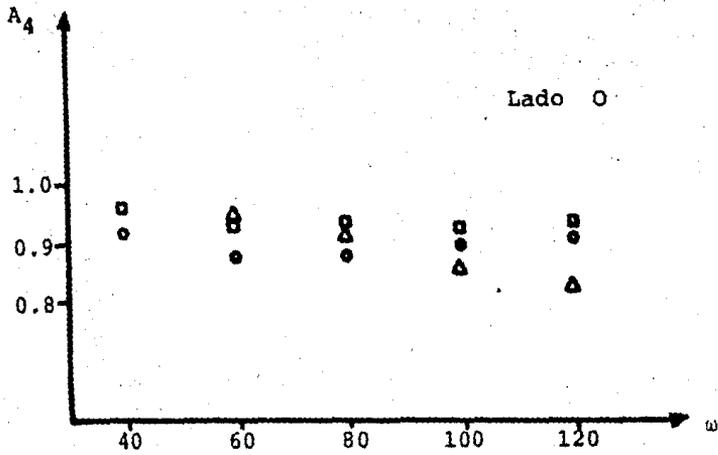
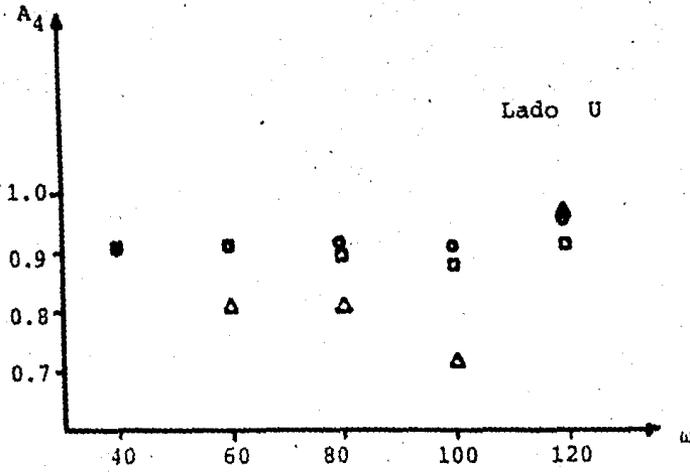


Fig. 5.20 A_4 para $d/R = 0.453$

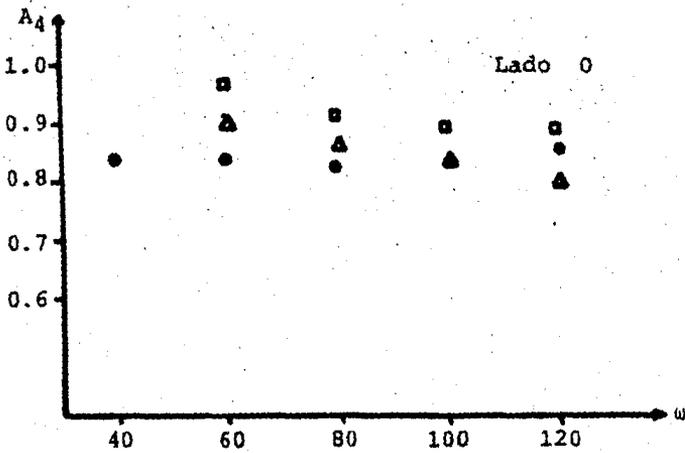
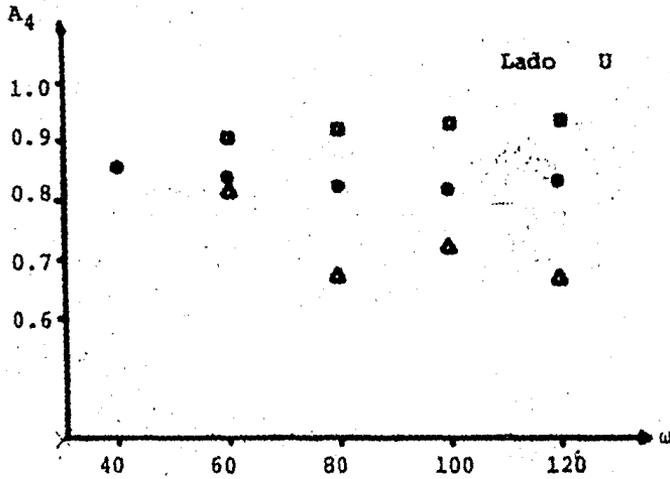


Fig. 5.21 A_4 para $d/R = 0.583$

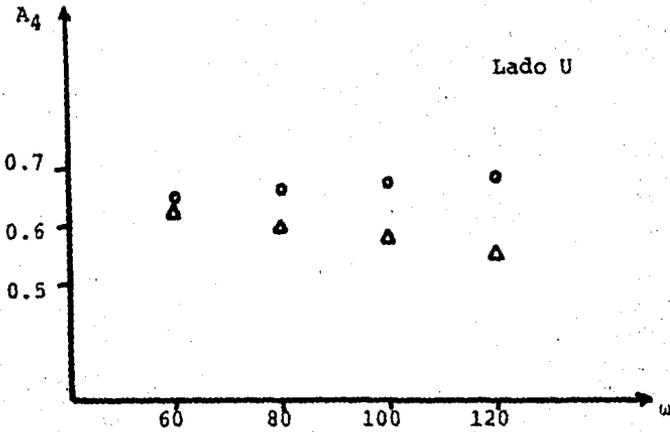
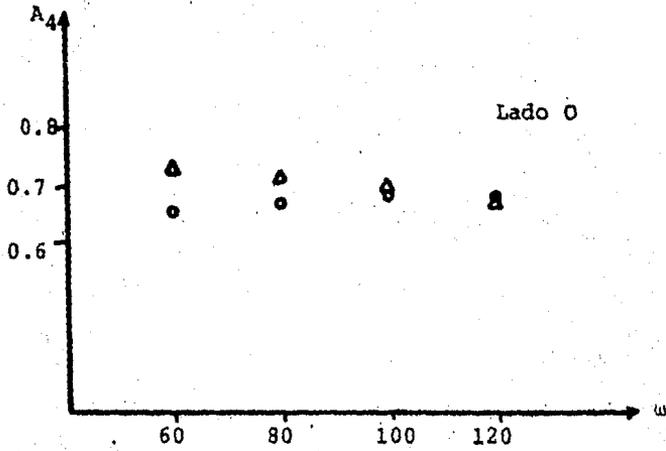


Fig. 5.22 A_4 para $d/R = 0.707$

Que se encuentra graficada en las fig. 5.18 a 5.22.

En este caso los valores de A_4 asociados a cada fluido aumentan (con respecto a los obtenidos al manejar A_3), separando las curvas, pero sin cambiar su tendencia lineal.

Por lo tanto, la tendencia regular de estas gráficas, así como el hecho de que en todos los casos el intervalo en que se localizan los resultados es muy estrecho, parece indicar que el tipo de fluido que se maneja no influye de manera notable en el tamaño de los vórtices.

Es importante hacer notar que la tendencia constante tanto de la solución de Separan al 1% como de la glicerina, nos lleva a pensar que el comportamiento esperado de la solución de Separan al 0.6% no solo tendría que ser similar, sino además debería representar un punto intermedio entre ambas soluciones, de ser el efecto elástico importante en este experimento, lo que no ocurrió.

Observamos, por otro lado; que la viscosidad aparente de esta solución (V1) es menor [$\eta_0 = 7.26 \text{ p}$] que la viscosidad de la glicerina ($\mu = 14.9 \text{ p}$), y por supuesto que la de la solución concentrada (V2) [$\eta_0 = 227 \text{ p}$]; por lo que es posible pensar que la viscosidad representa un factor determinante en la estabilidad de los flujos secundarios, y que la tendencia algunas veces errática de la solución diluida (V1) corresponde a aquellos casos en que el esfuerzo viscoso no es lo suficientemente fuerte para estabilizar los flujos secundarios.

Como se mencionó en el capítulo III, sin embargo, la experiencia respecto a la comparación de los flujos secundarios, generados en sistemas con singularidades (asimetrías), indica que los flujos secundarios para éstos últimos son de mayor tamaño y extensión que los correspondientes a fluidos puramente viscosos.

Es decir, el efecto de la parte elástica de un fluido, en presencia de asimetrías genera, comúnmente, flujos secundarios mayores que los que se tendrían si el fluido fuera puramente viscoso.

Esto nos lleva a concluir, que la asimetría de nuestro sistema no tiene ningún efecto notable en el patrón de flujo generado; posiblemente porque se encuentra demasiado alejada del

cilindro generador del flujo para producir una alteración apreciable, y por lo tanto su presencia no tiene consecuencias.

Es posible entonces pensar, en la existencia de asimetrías "débiles" o "fuertes", clasificables según la alteración en el patron de flujo que producen, y que pueden constituir un tema de estudio posterior.

En este sentido, existe evidencia experimental (ref. 13) de un resultado similar al presente y en el que se consideró el flujo de un fluido viscoelástico alrededor de objetos sumergidos. En ese estudio se analizó el flujo alrededor de cilindros en un canal rectangular, con una condición de frontera al infinito, y como en nuestro caso no se encontró diferencia entre las líneas de flujo observadas para los fluidos newtonianos y para los viscoelásticos, es decir, ese sistema también presentó un tipo de singularidad "debil" en este sentido.

Las singularidades "fuertes" parecen ocurrir preferencialmente en geometrías rectangulares y con condiciones de frontera finitas, tales como las que se reportan en las ref. 14 y 15.

Finalmente, al comparar los valores de A_3 a distintas razones de d/R (que caracteriza las dimensiones relativas del sistema) se observa que inicialmente esta variable aumenta al incrementarse d/R entre 0.3 y 0.45 aproximadamente, pero después, al seguir aumentando el valor de d/R , A_3 disminuye. Idéntica situación se presenta con la variable A_4 , pero ésta manifiesta su máximo valor a $d/R = 0.44$ y disminuye bruscamente para $d/R = 0.453$

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

La visualización efectuada en este sistema nos permite concluir que:

1.- La viscosidad es un factor determinante de la existencia o no de un patrón estacionario de flujo secundario, ya que un fluido de baja viscosidad no presenta este fenómeno.

2.- Para este sistema en particular, en los casos en que se alcanzan los patrones estacionarios mencionados en el párrafo anterior, el tamaño de los vórtices generados no depende visiblemente de la rapidez de rotación del agitador, como se hubiera esperado.

3.- Así también no existe una dependencia observable entre el tamaño del vórtice generado y el tipo de fluido que se somete a experimentación (viscoso o elástico). De manera que las características elásticas de los fluidos trabajados no tienen ninguna influencia notable en las variables consideradas.

4.- El tamaño del vórtice generado depende ligeramente de la relación geométrica del sistema (dimensión del cilindro rotatorio a dimensión del recipiente) presentando un máximo para algún valor particular de esta relación adimensional.

5.- Las asimetrías en esta geometría no ocasionan alteraciones notables en los flujos secundarios, por lo que puede decirse que son asimetrías "débiles" en el sentido de que su presencia no ocasiona alteraciones notables en el patrón de flujo secundario observado.

6.- Las observaciones arriba mencionadas claramente contradicen las reportadas por la literatura y que han sido discutidas anteriormente. Esto lleva a considerar la posible presencia de alguna fuerza adicional que afecte el patrón de flujo. Dado que la visualización se hizo sobre la superficie libre del fluido se puede afirmar que dicha fuerza sea la tensión superficial, la que de alguna manera equilibre la contribución elástica en la superficie.

En este sentido y antes de abordar el problema de la integración de las ecuaciones de movimiento y continuidad, discriminando implícitamente una ecuación constitutiva, es necesario determinar el efecto de la tensión superficial. Para esto sería necesario

determinar el patrón de flujo en el seno del fluido, (al interior) del recipiente, mediante la aplicación de otras técnicas de visualización (interferometría , etc.) y/o cuantificar el efecto de la tensión superficial y modelar el flujo de la superficie libre tomando en cuenta su presencia, incluyendola en las ecuaciones de cambio.

CAPITULO VII

BIBLIOGRAFIA

Bibliografía citada y consultada.

- [1] Wilkinson W. L. ; Non-newtonian fluids , Fluid mechanics mixing and heat transfer ; Pergamon Press , London, 1960.
- [2] Manero B.O. ; Determinación de propiedades de líquidos mediante un viscosímetro de esfera rotatoria ; Tesis. Fac. de Química, U.N.A.M. , 1976.
- [3] Harris J. ; Rheology and Non-newtonian Flow ; Longman, London, 1977.
- [4] Prandtl L. & Tietjens O.G. ; Applied Hydro- and Aeromechanics ; Dover Publications, Inc. , N. Y. , U.S.A. , 1934.
- [5] Carlson R., Windall A. & Peeters J. ; A flow visualization study of transition in plane Pouseville flow. J. Fluid Mech. (1982) Vol 121, pp 487-505; G.B.
- [6] Prandtl L. & Tietjens O.G. ; Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics ; Dover Publications, Inc. , N.Y. , U.S.A. , 1934.
- [7] Knudsen J.G. & Katz D.L. ; Fluid Dynamics and heat transfer McGraw-Hill, Tokyo, Japan, 1958 .
- [8] Frederickson A.G. ; Principles and Applications of Rheology Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc , 1964.
- [9] Bird R.B. , Armstrong R.C. & Hassager O. ; Dynamics of Polymeric liquids Vol. 1 (fluid mechanics) , Wiley & Sons U.S.A. , 1977.
- [10] Darby R. ; Viscoelastic Fluids - an introduction to their properties and behavior - ; Chemical processing and Engineering. Vol 9 , Marcel Dekker, Inc. , U.S.A. , 1976.
- [11] Slattery J.C. ; Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua , McGraw-Hill, U.S.A. , 1972.
- [12] Bird R.B. , Stewart W.E. & Lightfoot E.N. ; Transport Phenomena, Wiley & Sons, N.Y. , U.S.A. , 7th Printing, 1960.
- [13] Nuñez O.F.B. ; Flujo lento alrededor de cilindros. Tesis. Fac. de Química., U.N.A.M., 1984.
- [14] Walters K. ; Some modern developments in Non-newtonian fluid Advances in Rheology Vol 1, U.N.A.M. , 1984.
- [15] Binding . D.M. ; Planar flow of two fluids through contractions .Advances in Rheology. Vol. 2 , U.N.A.M. , 1984.

- [16] Bowskill, D. ; Photography Made Simple ; Ed. by W.H.Allen
London, Reprinted, Sep. 1978.
- [17] Ferry J.D. ; Viscoelastic Properties of Polymers, Wiley &
Sons, Inc. , U.S.A. , 1980.
- [18] Eirich F.R. Rheology. Theory and Applications. Vol 1 Cap 11
Academic Press Inc, . N.Y. , U.S.A. 1956.
- [19] Eirich F.R. ; Rheology . Theory and Applications .. Vol. 4
Cap 9. Academic Press Inc. , N.Y., U.S.A. , 1967 .

Apéndice A . Aspectos elementales de Algebra tensorial.

A.1 Fundamentos.

A fin de obtener una visión de las características de los "tensores" consideramos un sistema cartesiano de referencia.

En este sistema, se puede asociar un vector unitario a cada eje en su dirección positiva, según se muestra en la fig A.1.

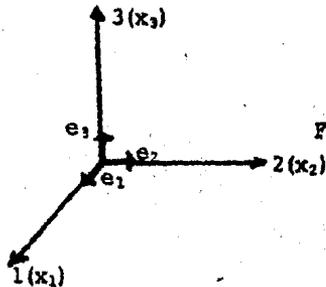


Fig A.1. Vectores base

De manera que cada uno de estos vectores \underline{e}_1 , \underline{e}_2 , y \underline{e}_3 constituyen los vectores base del sistema.

Cualquier vector (\underline{A} por ejemplo) se puede expresar como una combinación lineal de los vectores base:

$$\underline{A} = A_1 \underline{e}_1 + A_2 \underline{e}_2 + A_3 \underline{e}_3 \quad \text{A.1}$$

En donde precisamente los coeficientes de \underline{e}_1 , \underline{e}_2 y \underline{e}_3 son los componentes de \underline{A} .

Por lo tanto, un vector sugiere la asociación de un valor (escalar) a cada dirección particular del sistema cartesiano de referencia tal que:

- A_1 es el valor de \underline{A} en la dirección del eje 1
- A_2 es el valor de \underline{A} en la dirección del eje 2 A.2
- A_3 es el valor de \underline{A} en la dirección del eje 3

Una visión de lo que es un tensor, se puede obtener extendiendo este concepto; se dice entonces que un tensor de orden 2 asocia un vector a cada dirección del sistema cartesiano. De manera que si el tensor \underline{B} asocia el vector \underline{B}_1 a la dirección del eje 1, el vector \underline{B}_2 a la dirección del eje 2 y el vector \underline{B}_3 a la dirección del eje 3 tendremos:

$\underline{B}_1 = (B_{11}, B_{12}, B_{13})$ es el valor de \underline{B} en la dirección del eje 1
 $\underline{B}_2 = (B_{21}, B_{22}, B_{23})$ es el valor de \underline{B} en la dirección del eje 2 A.3
 $\underline{B}_3 = (B_{31}, B_{32}, B_{33})$ es el valor de \underline{B} en la dirección del eje 3

y:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \\ \underline{B}_2 \\ \underline{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = [B_{ij}] \quad \text{A.4}$$

donde $[B_{ij}]$ representa entonces la matriz con elementos B_{ij} definidos según las relaciones A.3.

En general, un tensor de orden n asocia un tensor de orden $n-1$ a cada dirección del espacio (sistema coordenado de referencia).

A.2 Ecuaciones de cambio.

Para obtener la solución al problema del flujo de un fluido, debemos considerar que éste debe cumplir las condiciones impuestas por las leyes físicas de conservación de la masa y del momentum (y en el caso de flujo no isotérmico, de energía).

La ecuación de continuidad expresa la ley de conservación de masa como:

$$\nabla \cdot (\rho \underline{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{A.5}$$

o, en su forma equivalente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) \quad \text{A.6}$$

La ecuación de movimiento expresa la ley de conservación del momentum, como:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_j + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} + \rho g_j \quad \text{A.7}$$

En las cuales ρ representa la densidad, t el tiempo, x_i las coordenadas cartesianas (según la fig A.1) y v_i los componentes de velocidad en las direcciones respectivas; g_j es el componente de la aceleración gravitatoria en la dirección j y σ_{ij} el componente correspondiente del tensor de esfuerzos (su definición se encuentra más adelante).

A.3 Tensor de rapidez de deformación.

Como se menciona en el cap 2, la descripción total del flujo se podrá obtener a partir de una ecuación reológica de esta o ecuación constitutiva, que sea capaz de expresar el tensor de esfuerzos en función del tensor de rapidez de deformación (para líquidos).

Para definir a éste último, consideremos el tensor gradiente de velocidades \underline{L} definido:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = [\frac{\partial v_i}{\partial x_j}] \quad \text{A.8}$$

Una de las propiedades de los tensores, se basa en los conceptos de tensor simétrico y antisimétrico; se dice que un tensor es simétrico si:

$$B_{ij} = B_{ji} \quad \text{A.9}$$

y antisimétrico si:

$$B_{ij} = - B_{ji} \quad \text{A.10}$$

De manera que esta propiedad establece que todo tensor se puede descomponer en una parte simétrica y una antisimétrica:

$$B_{ij} = \frac{1}{2} (B_{ij} + B_{ji}) + \frac{1}{2} (B_{ij} - B_{ji}) \quad \text{A.11}$$

De donde :

$$\frac{1}{2} (B_{ij} + B_{ji}) \quad \text{es la parte simétrica}$$

y

$$\frac{1}{2} (B_{ij} - B_{ji}) \quad \text{es la parte antisimétrica}$$

En base a esto, el tensor de rapidez de deformación \underline{D} se define como la parte simétrica del tensor gradientes de velocidades (según la ecuación 2.3) , es decir:

$$\underline{D} = \frac{1}{2} [\underline{L} + \underline{L}^T] = [D_{ij}] \quad \text{A.12}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{A.13}$$

A.4 Tensor de deformación.

El estado de deformación de un cuerpo en un punto dado está especificado por el tensor de deformación. Este representa los cambios relativos en dimensiones y ángulos de un pequeño elemento cúbico. Así, si $u_i = x_i - x_i^0$, donde el superíndice 0 se refiere a un estado no deformado, el tensor de deformación se define (en concordancia con la definición del tensor de rapidez de deformación) como:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = [\epsilon_{ij}] \quad \text{A.14}$$

A.5 Tensor de esfuerzos

Representamos el tensor de esfuerzos $\underline{\underline{T}}$ como:

$$\underline{\underline{T}} = [\sigma_{ij}] \quad \text{A.15}$$

donde σ_{ij} es el componente paralelo a la dirección j , de la fuerza por unidad de área actuando en la cara - de un elemento cúbico - que es perpendicular a la dirección i .

Los esfuerzos normales σ_{ii} son, en general positivos para tensión y negativos para compresión.

Los componentes del tensor de esfuerzos se muestran gráficamente en la fig A.2.

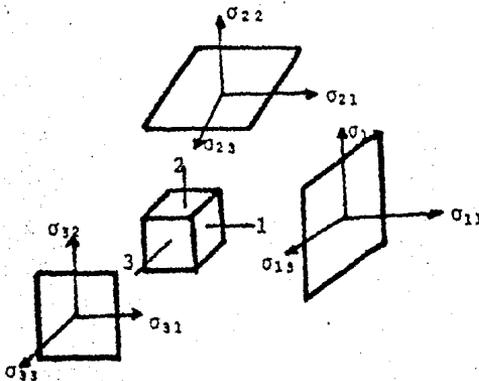


Fig A.2 Identificación de los componentes del tensor de esfuerzos.

Como se observa; σ_{11} , σ_{22} y σ_{33} son componentes normales, mientras que los demás son cortantes. Suele representarse con σ el esfuerzo normal promedio :

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \quad \text{A.16}$$

El esfuerzo normal promedio, σ , tiene el significado físico de una presión hidrostática (negativa). Así que si se sustrae el término "hidrostático" del tensor de esfuerzos (restando σ a cada uno de los 3 componentes normales del esfuerzo), el tensor residual es el denominado tensor deviatorico de esfuerzos o tensor de esfuerzos adicionales \underline{s} :

$$\underline{s} = [\tau_{ij}] = [\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}] \quad \text{A.17}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \quad \text{A.18}$$

De idéntica manera se puede resolver el tensor de deformación [ϵ_{ij}] definido por la ec. A.14 en una deformación normal promedio ϵ , más un tensor deviatorico de deformación [e_{ij}] con:

$$\epsilon = \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}}{3} \quad \text{A.19}$$

$$[e_{ij}] = [\epsilon_{ij}] - \epsilon \delta_{ij} \quad \text{A.20}$$

En donde, la deformación normal promedio, significa físicamente, la medida de la dilatación volumétrica del material deformado. El tensor deviatorico de deformación [e_{ij}], mide, por otro lado, la distorsión en la forma del material deformado.

A.6 Tensor de vorticidad

Es importante en este panorama, mencionar al tensor de vorticidad, el cual está definido como la parte antisimétrica del tensor gradiente de velocidad, según:

$$\underline{W} = \frac{1}{2} [\underline{L} - \underline{L}^T] \quad \text{A.21}$$

Los componentes del tensor de vorticidad representan la dirección del vector vorticidad como aquella que corresponde al eje local del spfn, y es característica de la presencia de vórtices en el flujo, condición en la que el flujo se denomina rotacional.

Una condición necesaria y suficiente para que el flujo sea irrotacional es que la velocidad sea representable en términos de un potencial escalar P :

$$\underline{v} = - \nabla P$$

A.22

Apéndice B . Glosario.

Termino usado		Termino en Inglés
viscosidad aparente	η	apparent viscosity
coeficiente de viscosidad o viscosidad	μ	viscosity (coefficient)
módulo complejo	G^*	complex modulus
extensión no recuperable	J^*	compliance
módulo de pérdida	G''	loss modulus
módulo de almacenamiento	G'	storage modulus
ecuación reológica de estado o ecuación constitutiva		constitutive (rheological) equation
deslizamiento		creep (cold flow)
función de deslizamiento	$\phi(t)$	creep function
amortiguador		dashpot
deformación		deformation
dilatancia		dilatancy
flujo		flow
fluido		fluid
sólido de Hooke o sólido Hookeano		Hooke body (solid) or Hookean solid
histéresis		hysteresis
fluido de Maxwell		Maxwell body (liquid)
sólido de Voigt		Voigt (or Kelvin) body
flujo laminar		laminar flow
líquido		liquid
ángulo de pérdida		loss angle
función de memoria	$\phi(t)$	memory function
módulo de elasticidad	G	elastic modulus
fluido newtoniano		newtonian fluid
esfuerzo normal	τ_{ii}	normal stress
pseudoplástico		pseudoplastic
rapidez	$\frac{d}{dt}$	rate
recuperación		recovery
cortante puro		pure shear
relajación		relaxation
función de relajación	$\psi(t)$	relaxation function

tiempo de relajación	λ	relaxation time
tiempo de retardación	λ'	retardation time
reómetro		rheometer
reopéctico		rheopexy
deformación		shear
línea de corriente		stream line
rapidez de corte	$\dot{\gamma}$	shear rate
esfuerzo normal		tension
tixotropía		thixotropy
efecto de Weissenberg		Weissenberg effect
esfuerzo crítico	τ_0	yield stress
viscoplástico o plástico de Bingham		viscoplastic or Bingham body
esfuerzo cortante	τ	shear stress
deformación (tensor)		strain
rapidez de deformación (tensor)	\underline{D}	rate of strain
esfuerzo (tensor)	\underline{T}	stress

Apéndice C. Notación.

Entre [] se especifican las dimensiones correspondientes; M (masa), L (longitud), T(tiempo) . Entre () las unidades correspondientes.

- A_i variable geométrica adimensional - cap. V -
 d diámetro del agitador (cm)
 D diámetro del recipiente (cm)
 De número de Deborah []
 $F(\lambda)$ función de distribución del módulo al corte
 G módulo elástico
 $G(t)$ módulo de relajación [M/LT^2]
 G' módulo de almacenamiento
 G'' módulo de pérdida
 G^* módulo complejo
 $H(\lambda)$ función de distribución de viscosidad
 $J(t)$ extensión no recuperable
 J^* extensión no recuperable compleja
 $L(\lambda)$ función de distribución del módulo de deslizamiento al corte
 N_i diferencia de esfuerzos
 NyV tipo de fluido - cap. IV y V -
 n índice de comportamiento del fluido (Modelo de Ostwald-de Waele)
 p presión [M/LT^2]
 R radio del recipiente (cm)
 t tiempo
 t_e tiempo de observación (seg)
 \underline{ryz} vector de posición [L]
 \underline{v} vector velocidad [L / T]
 \underline{D} tensor de rapidez de deformación [T^{-1}]
 \underline{S} tensor de esfuerzos adicionales [M/LT^2]
 \underline{T} tensor de esfuerzos totales [M/LT^2]
 \underline{I} tensor identidad
 α tipo de flujo - cap V -
 α_i tipo de flujo - V -
 β tipo de flujo - V -
 $\dot{\gamma}$ rapidez de corte [T^{-1}]

- ϵ ángulo de defasamiento (°) - IV -
 η coeficiente de viscosidad aparente (poises) [M/LT]
 η_0 viscosidad aparente si 0
 η_α viscosidad aparente si
 η^* viscosidad compleja
 θ_i funciones materiales para esfuerzos normales
 θ_0 ángulo del cono del Reogoniometro -IV-
 λ tiempo característico -II- o de relajación -III- [T]
 λ' tiempo de retardación
 μ coeficiente de viscosidad (poises) [M/LT]
 ρ densidad [M/L³]
 σ_{ii} componentes del tensor de esfuerzos totales
 τ esfuerzo cortante [M/LT²]
 τ_0 esfuerzo crítico (0)
 ϕ diferencia de fase -III-
 $\phi(t)$ función de deslizamiento
 $\phi(t)$ función de memoria
 $\psi(t)$ función de relajación
 ω rapidez de rotación del cilindro (r.p.m!) [T⁻¹]
 $\phi(\tau)$ viscosidad aparente
 Σ sumatoria
 . derivada con respecto al tiempo
 subíndices
 + mayor tamaño
 - menor tamaño
 o tamaño intermedio
 i contador en las sumatorias
 i, j direcciones i, j = 1, 2, 3