

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

FLUJO LENTO ALREDEDOR DE CILINDROS

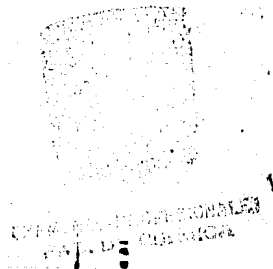
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO QUIMICO

PRESENTA

FELIX BENJAMIN NUNEZ OROZCO

1 9 8 4





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Indice

I.1. Introducción	1
II. Antecedentes Teóricos	
II.1. Caso Newtoniano	4
II.1.1. Aproximación de Stokes	5
II.1.1.1. Flujo alrededor de una esfera	6
II.1.1.2. Flujo alrededor de un cilindro	7
II.1.2. Aproximación de Oseen	8
II.1.2.1. Flujo alrededor de una esfera	9
II.1.2.2. Flujo alrededor de un cilindro	9
II.2. Caso viscoelástico	10
II.2.1. Análisis de Ultman y Denn	10
II.2.2. Análisis de Mena y Caswell	12
III. Antecedentes experimentales y objetivos del presente trabajo	16
IV. Descripción del experimento	19
V. Análisis de los resultados y conclusiones	26
VI. Propiedades físicas y cálculos	41
Bibliografía	56

I.1 INTRODUCCION

El flujo alrededor de obstáculos sumergidos es un problema que ha atraído a los investigadores desde hace más de cien años. Desde entonces se ha reconocido la dificultad para obtener una solución analítica manipulando las ecuaciones pertinentes, por lo que se ha recurrido a métodos aproximados.

El primer éxito fue obtenido por Stokes en 1851 (1, p.170; 2, p.602), quien con la consideración de flujo muy lento resolvió el problema del flujo alrededor de una esfera. Desafortunadamente, Stokes mismo se vio obligado a reconocer que su método era inadecuado para describir el fenómeno en el caso de los flujos bidimensionales. Esta dificultad permaneció sin aclararse hasta 1910, en que Oseen propuso

* En el flujo de fluidos se considera que una cierta situación de flujo es un problema; por ejemplo, el flujo en una tubería de cierta geometría, el movimiento de un cuerpo en un fluido estacionario, etc.

Se considera que la solución del problema se tiene cuando se encuentran las propiedades del fluido y los parámetros relevantes de cada situación, así como su dependencia con respecto a la posición y al tiempo. Por ejemplo, el problema del flujo de un fluido Newtoniano en un tubo de sección circular se considera resuelto cuando se encuentra el perfil de velocidades (el campo de velocidades), pues las otras propiedades relevantes del flujo se pueden obtener a partir de la velocidad.

De aquí en adelante, cuando aparezca el comentario de que se ha resuelto un problema, se debe entender en el sentido que se menciona anteriormente.

una modificación al método de Stokes (1, p.175; 2, p.609; 3, p.273).

Los dos métodos anteriores son los clásicos, adecuados para el flujo de fluidos Newtonianos con la condición que el flujo sea lento; ambos han demostrado su validez en diversos campos de la física, como por ejemplo, en la determinación de la carga del electrón por Millikan en 1911 (véase, por ejemplo, Ander, P. y Sonnessa, A. : Principles of Chemistry: An Introduction to Theoretical Concepts, Collier-Macmillan International).

En la actualidad, el interés ha sido enfocado a fluidos que se caracterizan por comportarse en forma diferente a los fluidos Newtonianos, en particular a sustancias de peso molecular grande, como los polímeros fundidos, o a disoluciones de solutos de peso molecular elevado en disolventes con un peso molecular menor, como las disoluciones de polímeros o los fluidos biológicos.

Ahora se reconoce que el caso del flujo lento engloba a las situaciones en que la dimensión geométrica relevante es pequeña, además de aquellas reconocidas clásicamente, en donde la velocidad es muy baja y la viscosidad muy grande. En consecuencia, el campo de interés se ha ampliado a la biología y a la medicina, pues el caso de los eritrocitos en la sangre y el movimiento de microorganismos o de partículas en movimiento Browniano son similares al típico problema de la sedimentación.

El comportamiento anómalo de las sustancias (que ha aumentado el interés en el problema) ha elevado la complejidad en el grupo de ecuado

ciones que deben resolverse; tanto, que a la fecha existen solamente dos tratamientos analíticos (limitados a flujos muy lentos) y en general se ha tratado la situación en forma numérica.

La enorme dificultad en los tratamientos analíticos evita que en este trabajo se haga un estudio crítico de ellos y obliga a presentar solamente los resultados más importantes y las predicciones más relevantes.

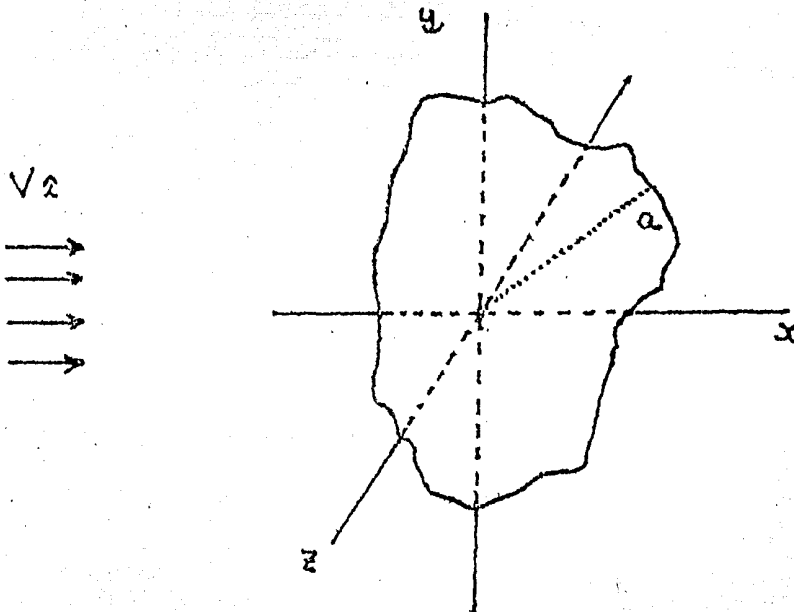
A pesar de todas estas limitaciones se espera que estudio resulte de utilidad, pues su objetivo principal consiste en obtener evidencias experimentales de condiciones de flujo que se encuentran dentro del intervalo de validez de las teorías antes mencionadas.

II. Antecedentes Teóricos

II. 1. Caso Newtoniano.

Consideremos un cuerpo en reposo que posee una longitud característica a , que se encuentra sumergido en una corriente que fluye con una velocidad constante \underline{V} en la dirección x de un sistema de referencia cartesiano.

Figura 1



Las ecuaciones de continuidad y de movimiento para un fluido Newtoniano e incompresible que circula en régimen estacionario son:

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho(\underline{v} \cdot \nabla)\underline{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} \quad (2)$$

en donde \underline{v} representa al vector de velocidad, ρ a la densidad,

μ a la viscosidad y p a la presión isotrópica.

Este sistema de ecuaciones debe ser resuelto de tal forma que las condiciones de contorno pertinentes sean satisfechas. A saber:

$$\underline{u} = 0 \quad r = a \quad (3)$$

$$\underline{u} = V\hat{i} \quad r \rightarrow \infty \quad (4)$$

en donde \hat{i} es el vector unitario que apunta en la dirección de x creciente.

II. 1. 1. Aproximación de Stokes.

La condición de flujo lento es equivalente a que el número de Reynolds ($Re = \frac{y}{\mu} \frac{Dp}{r}$) sea mucho menor que la unidad: $Re \ll 1$. Bajo esta circunstancia, Stokes consideró que el término convectivo (o inercial) que aparece en la ecuación de movimiento (el lado izquierdo de la expresión (2)) era despreciable cuando se le comparaba con los términos representativos de las fuerzas viscosas que actúan sobre el fluido (el lado derecho de la expresión (2)).

De esta manera, las ecuaciones resultantes de la aproximación de Stokes son:

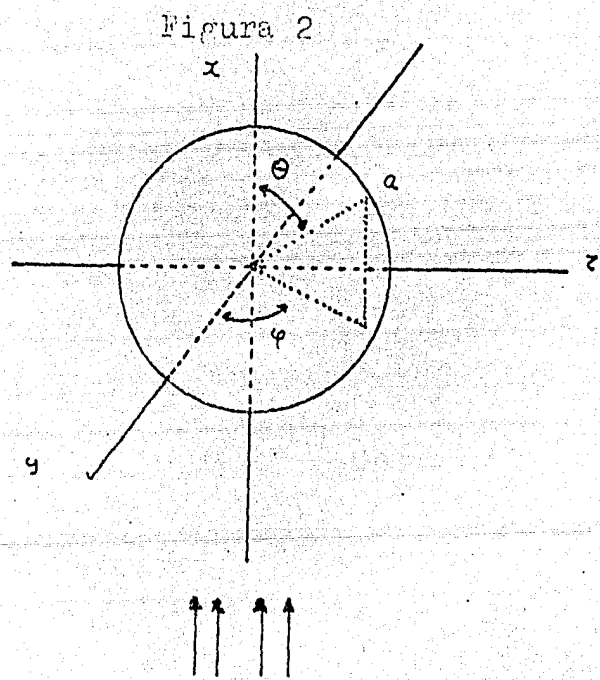
$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (4)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla^2 p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \underline{u} \quad (5)$$

Esta aproximación conduce a una simplificación en el manejo matemático, en el sentido de que el sistema de ecuaciones por resolver está formado ahora por ecuaciones diferenciales lineales.

La suposición de Stokes puede justificarse, bien sea por argumentos físicos o mediante el proceso formal de adimensionalización de las ecuaciones (2) (3, p. 253). Al emplearse este último procedimiento, el parámetro característico del problema (el número de Reynolds) debe cumplir con la condición establecida: $Re \ll 1$.

II.1.1.1. Flujo alrededor de una esfera.



Sea una esfera de radio a . La solución de Stokes que satisface las condiciones de contorno (3) y (4) da el siguiente resultado para la función de corriente ψ (1, p.170 ; 2, p.602) :

$$\psi = -\frac{1}{2} V r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right) \quad (6)$$

en donde r y θ forman parte de un sistema de coordenadas esféricas: r, θ, ϕ , elegido de tal manera que el eje $\theta = 0$ coincide con la dirección de la corriente. Es de notar que ψ es simétrica con res

pecto al plano $\theta = \frac{1}{2}\pi$; es decir que las líneas de corriente son simétricas con respecto a la esfera.

la fuerza ejercida por el fluido sobre la esfera es :

$$D = 6\pi\mu va \quad (7)$$

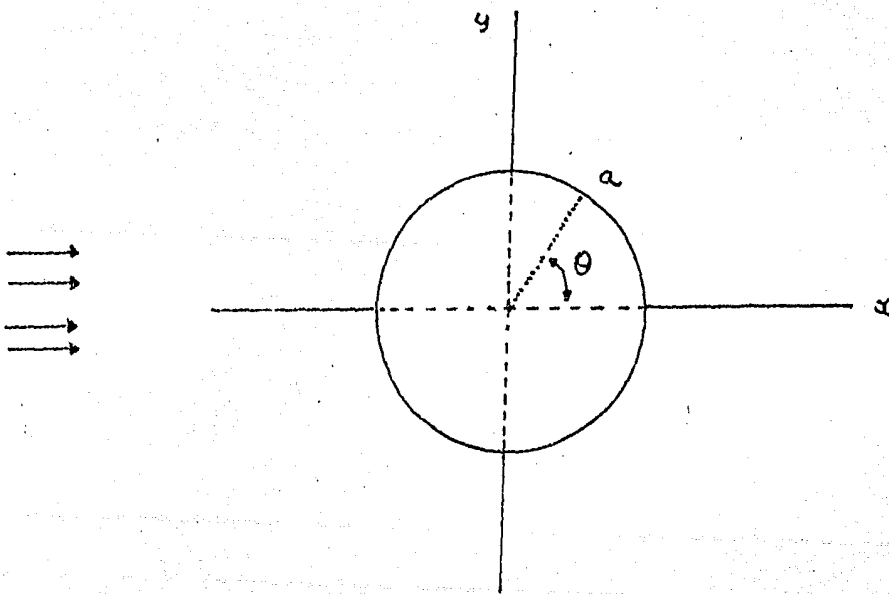
o bien, expresada como un coeficiente adimensional de arrastre :

$$C_D = \frac{24}{Re} = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 \pi a^2} \quad (8)$$

en donde el número de Reynolds está basado en el diámetro D .

II.1.1.2. Flujo alrededor de un cilindro.

Figura 3



El método de Stokes conduce a la siguiente ecuación para la función de corriente (1, p.171 ; 3, p.270) :

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (9)$$

como es un flujo en dos dimensiones :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = 0 \quad (10)$$

que en coordenadas cilíndricas se transforma en :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi = 0 \quad (11)$$

Por la ec. (4) se postula que $\psi = f(r) \sin \theta$, lo que transforma a (11) en :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) f(r) = 0 \quad (12)$$

Esta ecuación es del tipo de Euler o equidimensional (4, p.12) que tiene una solución de la forma :

$$f(r) = A_1 r^3 + A_2 r \ln r + A_3 r + \frac{A_4}{r} \quad (13)$$

En consecuencia, la función de corriente toma la forma :

$$\psi = \left(A_1 r^3 + A_2 r \ln r + A_3 r + \frac{A_4}{r} \right) \sin \theta \quad (14)$$

Debido a la condición señalada por la ecuación (1), $A_1 = A_2 = 0$ y $A_3 = V$, de donde :

$$\psi = \left(Vr + \frac{A_4}{r} \right) \sin \theta \quad (15)$$

pero la condición (3) requiere que $\psi = 0$ cuando $r = a$, de lo que se desprende que no se puede encontrar una constante A_4 que satisfaga las condiciones de contorno (3) y (4).

Este resultado se conoce como la Paradoja de Stokes.

II.1.2. Aproximación de Oseen.

Para remediar el inconveniente encontrado en la aproximación de Stokes, Oseen propuso en 1910 (1, p.175 ; 2, p.609 ; 3, p.273) otro tipo de aproximación : linealizar las ecuaciones (2) conside

rando que la cantidad de movimiento se transporta con la velocidad que posee la corriente lejos del obstáculo y no con la velocidad local (como ocurre en la realidad) ni con una velocidad igual a cero (como corresponde a la aproximación de Stokes).

De esta manera, las ecuaciones por resolver se convierten en:

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho V \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} \quad (16)$$

II.1.2.1. Flujo alrededor de una esfera.

Los resultados obtenidos presentan pequeñas correcciones a los resultados encontrados por Stokes (1, p.176 ; 2, p.612) pero en términos generales los corroboran. (Véase la figura 2).

II.1.2.2. Flujo alrededor de un cilindro.

El análisis de Oseen para el flujo alrededor de un cilindro de radio a (véase la figura 3) conduce a la siguiente expresión para la función de corriente (1, p.180 ; 2, p.615) :

$$\psi = \frac{V a \sin \Theta}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \gamma + \ln \frac{8}{Re} \right\}^{-1} \left\{ \frac{r}{a} (2 \ln \frac{r}{a} - 1) + \frac{a}{r} + \dots \right\} \quad (17)$$

en donde γ es la constante de Euler y r y Θ son parte del sistema de coordenadas polares.

Similáramente, para el coeficiente adimensional de arrastre se tiene :

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V^2 2a} = \frac{8\pi}{Re} \left\{ \frac{1}{2} - \gamma + \ln \frac{8}{Re} \right\}^{-1} \quad (18)$$

II.2. Caso viscoelástico.

En el caso Newtoniano se ha visto que las ecuaciones dinámicas son no lineales y que se debe recurrir a soluciones aproximadas para completar el análisis. En el caso viscoelástico, se debe añadir a esta circunstancia el hecho de que la ecuación reológica de estado (o ecuación constitutiva, como se le conoce también) es de por sí no lineal. Es por ello que los análisis del flujo de fluidos viscoelásticos alrededor de una esfera son poco numerosos y los análisis para el flujo alrededor de un cilindro son verdaderamente escasos.

A la fecha, existen solamente dos estudios teóricos del flujo lento de fluidos viscoelásticos alrededor de cilindros : uno debido a Ultman, J.S. y Denn, M.M. (ref. 6) y otro debido a Caswell, B. y Aona, B. (ref. 5).

II.2.1. Análisis de Ultman y Denn.

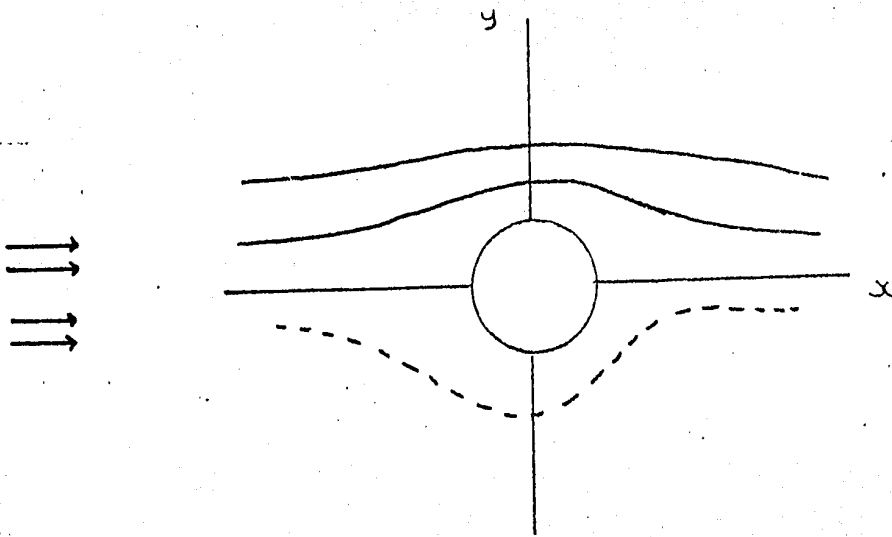
Este análisis se basa en una linealización del tipo de Oseen,

tanto de los términos inerciales de la ecuación de movimiento, como de los términos no lineales de la ecuación reológica de estado que eligieron para su trabajo (7, p.11).

Para satisfacer las condiciones de contorno, emplearon un método numérico aproximado.

El resultado de este estudio es la predicción de un desplazamiento de las líneas de corriente anterior al objeto (cilindro o esfera) e incluso predice una separación en la parte posterior del obstáculo (7, p.77).

Figura 4



— Comportamiento Newtoniano

- - - Predicción de Ultman y Denn para una condición de flujo

$We = \frac{\lambda V}{2a} = 0.5$, donde λ es un tiempo característico del fluido.

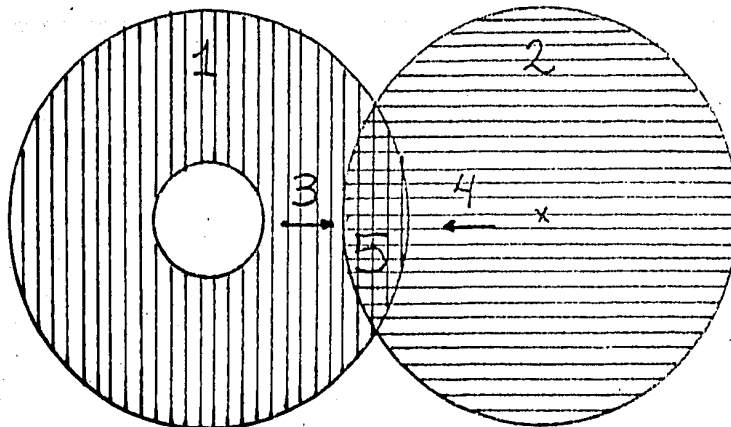
Estas predicciones, unidas al hecho de que bajo unas condiciones iniciales el sistema de ecuaciones diferenciales se convierte en hiperbólico, permitiendo así la propagación de discontinuidades en el esfuerzo, hacen dudar de la validez del análisis.


II.2.2. Análisis de Mena y Caswell.

Este análisis se basa en el método de expansiones asintóticas acopladas. La solución de Oseen satisface las condiciones de contorno lejos del objeto, pero falla en las condiciones cercanas al objeto, situación contraria a la solución de Stokes. Sin embargo, se espera que ambas representen diferentes formas aproximadas de una misma solución única. Así, al llevar a las aproximaciones a un orden cada vez mayor, pueden acoplarse término a término, hasta obtenerse la aproximación deseada de la solución general (13, 1.47).

El manejo matemático es extraordinariamente complicado (8, 1.42), pero el siguiente esquema puede ilustrar su fundamento :

Figura 5



- 1.- Región de validez para la aproximación de Stokes (es una zona cercana al objeto). ||||
- 2.- Región de validez para la aproximación de Oseen (el objeto parece haberse encogido hasta el punto de representar sólo una pequeña perturbación α . (13, p.4)). ≡≡≡
- 3.- Expansión del método de Stokes (se aleja del cuerpo).
- 4.- Expansión del método de Oseen (se acerca al cuerpo).
- 5.- Zona de expansión acoplada, en donde la solución se obtiene acoplando términos de ambas aproximaciones. 

En este análisis, la ecuación reológica de estado empleada es del tipo de Oldroyd con tres constantes (5, p.120). En particular, para el caso de un cilindro o una esfera, se predice un desplazamiento en las líneas de corriente posterior al obstáculo (véase la figura 6).

Cuando se trata de un cilindro recto, la expresión para la función de corriente es:

$$\psi^* = \psi_0^* - \beta \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \quad (19)$$

en donde

$$\psi_0^* = \left(\frac{1}{2} - \gamma + \ln \frac{r}{R_0} \right)^{-1} \left(r^* \ln r^* - \frac{r^*}{2} + \frac{1}{2r^*} \right) \sin \theta \quad (20)$$

y $\beta = V(2\lambda_1 - \lambda_2)/a$; λ_1 y λ_2 son tiempos característicos del fluido, β es un parámetro equivalente al número de Weissenberg $We = V\lambda/(2a)$, y ψ^* indica variables stoksonianas (1, p.160):

$$\psi^* \equiv \frac{\psi}{Va} \quad (21)$$

Con respecto al coeficiente adimensional de arrastre, también para el caso de un cilindro, el análisis predice una disminución con respecto al valor Newtoniano:

$$C_D = \frac{8\pi}{Re} \left\{ \frac{1}{2} - \gamma + \ln\left(\frac{8}{Re}\right) \right\}^{-1} \left\{ 1 - \alpha^2 \left(\frac{V}{a}\right)^2 \right\} \quad (22)$$

en donde α es un tiempo característico del fluido. Cuando este parámetro se anula, la expresión se reduce a la ec. 18.

En este punto conviene hacer notar que en el caso Newtoniano el único parámetro adimensional que surge y que determina el carácter del flujo es el número de Reynolds ($Re = V\rho 2a/\mu$) con dos propiedades físicas del fluido: la densidad ρ y la viscosidad μ .

Las sustancias viscoelásticas presentan otras propiedades físicas relevantes. Por ejemplo, se sabe que cuando se suprime el gradiente de presiones que provoca el flujo de una de estas sustancias el movimiento no cesa instantáneamente, sino que el fluido se retrae sobre su trayectoria original durante un cierto lapso de tiempo antes de llegar al reposo.

Este comportamiento sugiere que estas sustancias presentan un tiempo característico (mencionado anteriormente en la p. 11) que rige su comportamiento mecánico y que las diferencia de las sustancias Newtonianas. A este tiempo se le llama el tiempo de relajamiento. En particular, hablando del experimento que se describe en este escrito, se espera que una sustancia con tiempo de relajamiento elevado difiera de una sustancia Newtoniana en su comportamiento y que esta diferencia aumente al aumentar el tiempo de relajamiento.

Sin embargo, el valor del tiempo de relajamiento no es el factor determinante en el comportamiento de una sustancia (como se ve en la p. 29) , sino que existe un número adimensional, llamado el número de Weissenberg, que es el que indica verdaderamente el comportamiento elástico del flujo. Esto es análogo al caso Newtoniano en el que el carácter del flujo se determina según el número de Reynolds y no únicamente de acuerdo al valor de la viscosidad del fluido.

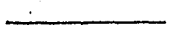
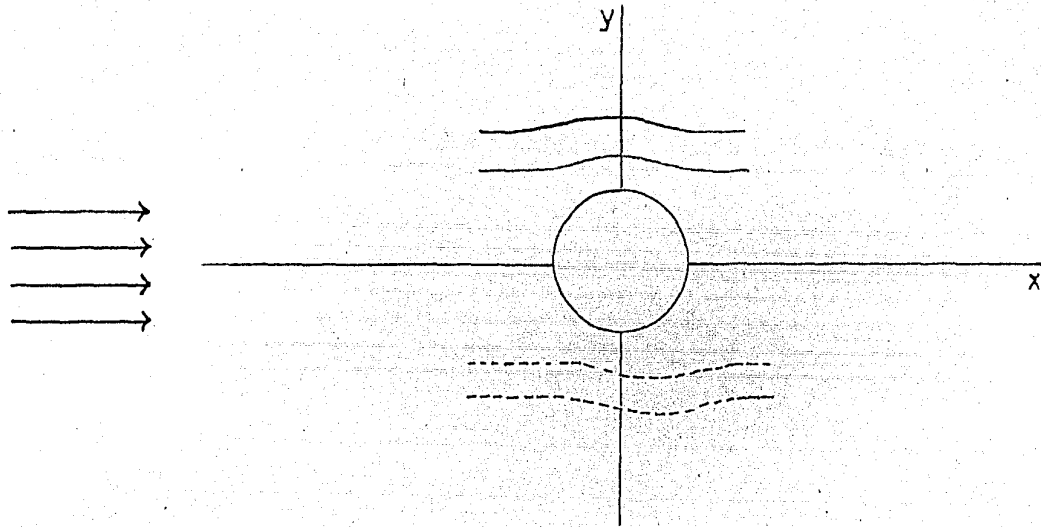
El número de Weissenberg se define como: $We = \lambda \dot{\gamma} \equiv \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} (\sigma_1 - \sigma_2) / \tau$ en donde $\dot{\gamma}$ es la rapidez de deformación, $\sigma_1 - \sigma_2$ y τ son la primera diferencia de esfuerzos normales y el esfuerzo tangencial, respectivamente. y λ es el tiempo de relajamiento. Una definición más general del número de Weissenberg, que incluye el caso de flujos que no son viscométricos, es: $We = V \lambda / D$ en donde V es alguna velocidad característica del flujo y D es una dimensión característica en la dirección en que varía la velocidad; V/D es entonces una rapidez de deformación equivalente. Esta es la definición más usualmente empleada en la literatura y, por tanto, la que se emplea en el presente trabajo.

Regresando al tema de esta sección, el análisis de Mena y Caswell es válido cuando el problema se restringe a las condiciones siguientes:

- a) el flujo es lento: $Re \ll 1$
- b) el flujo es ligeramente elástico: $We < 1$.

La representación del comportamiento del patrón de flujo se muestra en la figura 6.

Figura 6



Comportamiento Newtoniano



Predicción de Caswell y Mena para una condición de
flujo con $We = 0.5$

III. Antecedentes experimentales y objetivos del presente trabajo.

Los estudios experimentales acerca del flujo lento alrededor de cilindros son tan escasos como los estudios teóricos. Las únicas visualizaciones hechas hasta la fecha son :

i) James, D.F. y Acosta, A.J. (ref. 10) quienes hicieron su experiencia en una región intermedia de números de Reynolds ($5 < Re < 35$) empleando soluciones de polyox. Sus resultados comprobaron que el patrón de flujo que se obtenía con disoluciones poliméricas era distinto del que se obtenía con un fluido Newtoniano (agua, en su caso). Esta evidencia fue presentada en 1970.

ii) Ultman, J.S. y Denn, M.M. (ref. 6) quienes presentaron una fotografía de una disolución al 1.7% de carboximetilcelulosa en agua.

En ella se aprecian líneas de corriente desplazadas ampliamente en el sentido contrario al flujo (anterior al obstáculo). En su estudio, los autores compararon el comportamiento viscoelástico con el Newtoniano, en su caso una disolución al 85% de miel de maíz en agua; las condiciones del flujo viscoelástico fueron : $Re = 2 \times 10^{-4}$, $We = 3.2 \times 10^{-3}$ y $Re \times We = 6.4 \times 10^{-7}$.

Estos investigadores consideran que su análisis es el adecuado para condiciones de flujo tales que el producto de Reynolds (Re) por Weissenberg (We) sea menor que la unidad ($Re \times We < 1$).

Esta evidencia fue presentada en 1971.

iii) Broadbent, J.M. y Mena, M. (ref. 9) quienes presentaron dos fo

topografías tomadas en un depósito de paredes rectas; una correspondiente a una disolución al 2% de poliacrilamida en agua, y la otra correspondiente a una disolución al 2% de poliácridamida en una disolución al 50% de agua y glicerina.

En ninguna de las dos fotografías es perceptible alguna clase de desplazamiento, con respecto al simétrico comportamiento Newtoniano. Esta evidencia fue presentada en 1974.

Existe otra experimentación que ha tenido como finalidad obtener evidencia visual orientada hacia el flujo alrededor de esferas pero que ha encontrado resultados interesantes:

iv) Zana, E., Tiefenbruck, G., Leal, G. (ref. 11) han encontrado que el carácter de las desviaciones en las líneas de corriente depende del valor del número de Weissenberg. Para $We < 1$ y $We \approx 0(1)$, las líneas de corriente parecen coincidir con aquellas que corresponden al flujo Newtoniano. Para $We > 1$ sufren una desviación opuesta al sentido del flujo (antes del obstáculo). En todo caso, esta desviación es muy pequeña, y bajo ninguna circunstancia se tuvo una desviación tan pronunciada como la pronosticada por Ultman y Denn.

En ese escrito se hace una revisión crítica del trabajo de Ultman y Denn, pero no se procura obtener evidencias experimentales del flujo alrededor de cilindros. Esta evidencia se presentó en 1975.

v) Trabajos experimentales similares al presente se están efectuando actualmente en la Universidad de Gales.

Debido a las controversias anteriores y a la carencia de re-

sultados experimentales para el flujo lento alrededor de un cilindro,
se presentan en este trabajo experimentos de visualización de las lí-
neas de corriente alrededor de un cilindro para fluidos con comporta-
miento viscoelástico.

Se pretende así comprobar o contradecir, según el caso, las teo-
rías existentes y presentar una evidencia, aunque sólo sea cualitati-
va, del comportamiento de estos fluidos alrededor de cilindros.

IV. Descripción del experimento.

Para obtener la visualización del flujo alrededor de cilindros sumergidos se emplea un ducto, construido con acrílico transparente, con una sección transversal cuadrada de 49 cm^2 y una longitud de 40 cm, sin incluir ni la entrada ni la salida. Estas tienen la forma de pirámide cuadrangular truncada, de 60° , con el objetivo de minimizar los posibles efectos secundarios que se presentan generalmente cuando la entrada o la salida es abrupta.

La parte terminal está entonces formada por dos zonas de 15 cm. cada una, de tal forma que la longitud total del equipo es de 55 cm. Las conexiones en las zonas terminales están hechas con tubo de acrílico de 1 cm de diámetro.

En una de las paredes, cercano a la salida, se encuentra un pequeño tapón que facilita la tarea del llenado, pues permite eliminar completamente el aire que queda atrapado en esta operación, viéndose así libre el dispositivo de burbujas que podrían interferir en la visualización (para apreciar este inconveniente, véase la ref. 6, figura 6).

En el interior del canal se encuentran los cilindros, sujetos gracias a excavaciones practicadas en las paredes del recipiente; de esta manera se evita que el canal sea perforado con tornillos o dispositivos similares para sujetar a los obstáculos, con lo que se minimiza el riesgo de fugas.

Los cilindros están contruidos con varilla de acrílico de

distintos diámetros : $1/16$, $2/16$ y $3/16$ de pulgada. Sus centros están situados a una altura de 3.5 cm , exactamente la necesaria para que el eje de simetría de cada cilindro bisecte la sección transversal de flujo. Los cilindros se encuentran a una distancia de 10 cm uno del otro.

La visualización se hace observando la sección circular del cilindro, que está construido con acrílico transparente. Este hecho provoca que sea difícil determinar con certeza las fronteras del cilindro (esta desventaja se ve en la ref. 10): para suprimir este inconveniente, se colocó un círculo de película fotográfica velada del tamaño adecuado para cada cilindro sobre la pared del canal, de tal suerte que al mirar al ducto en la dirección del eje de cada cilindro, lo que se observa es un círculo negro. Este representa una buena referencia, de mucha utilidad en la delicada tarea del enfoque de la cámara.

El fluido objeto de la experiencia se hace circular mediante una bomba peristáltica Masterflex, accionada por un motor Servodyne, a su vez controlado por una consola De Luxe

(Cole-Parmer). Todos estos elementos se encuentran esquematizados por B en la figura 7.

A la salida del canal de observación (D en la figura) el fluido se recoge en un recipiente , construido también con acrílico (R en la figura), del cual sale una conexión a la bomba.

Esta manera de operar permite medir el gasto volumétrico a la

salida del ducto mediante la sustitución del tanque receptor por una probeta graduada y con la ayuda de un cronómetro (P y T respectivamente en la figura).

Para eliminar las pulsaciones producidas por la bomba peristáltica y garantizar un flujo continuo y uniforme, se utiliza un tanque amortiguador (A en la figura).

El método de visualización se basa en la inclusión de partículas trazadoras dentro del fluido. Estas partículas reflejan la luz que se hace incidir sobre ellas y la eviancia óptica del patrón de flujo queda registrada en una fotografía.

Las partículas trazadoras son partículas de polietileno, de tamaño uniforme, con un diámetro aproximadamente igual a 0.1 mm y con una densidad aparente de $9.9 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3$, adecuada para añadir las a fluidos con densidad similar a los que se usan en el presente trabajo, de tal manera que no se produzca flotación ni precipitación (véase la ref. 11). La concentración empleada es de 2.3 g por cada ocho litros de fluido, suficiente para obtener una solución homogénea.

La iluminación se logra mediante un emisor de rayos laser de rubí, de 0.3 miliwatts, fabricado y proporcionado por el Centro de Instrumentos de la U.N.A.M.. El haz luminoso que surge del aparato se agranda con una lente cilíndrica de 2/16 de pulgada de diámetro provocando de esta forma un plano luminoso uniforme, en forma de abanico.

La intensidad de este plano luminoso disminuye desde el centro

tro hasta las orillas, pero este hecho no presenta ningún inconveniente en este experimento, pues la lente cilíndrica se coloca a unos cuantos centímetros del canal, alineando el centro del plano iluminado con el cilindro en cuestión, de tal manera que el campo visual registrado por la fotografía no incluye a los bordes del abanico luminoso. Además debe señalarse que el fenómeno que se desea observar es debido a la perturbación que ejerce el obstáculo sobre el fluido circulante, y que la zona más importante está en las cercanías del objeto sumergido, zona que queda iluminada homogéneamente.

Otra dificultad que tiene probabilidades de surgir es que cada cilindro que actúa como obstáculo pueda actuar como una lente cilíndrica (hay que recordar que los obstáculos están contruidos con acrílico transparente) ; sin embargo, en las condiciones de trabajo esta dificultad no aparece perceptiblemente.

El plano luminoso corta al ducto longitudinalmente en la zona central, y a los cilindros los corta transversalmente. Al pasar las partículas trazadoras por este plano iluminado de observación, reflejan la luz, proporcionando la evidencia visual del patrón de flujo.

La fotografía se toma en la dirección longitudinal del cilindro ; se utiliza un soporte Minolta para tener ortogonalidad entre el plano iluminado y la cámara fotográfica, que en el caso presente es una Nikon, F.T.N., equipada con lentes Nikkor

de 55 mm.

El problema del alineamiento entre la cámara y los cilindros se resuelve por medio de una señal en la lente objetivo de la cámara y con el uso simultáneo de dos niveles de precisión.

La obtención de las fotografías, bajo las restricciones impuestas por la velocidad de las partículas y la débil intensidad del plano luminoso, se consigue con un tiempo de exposición del orden de 11 minutos con el diafragma totalmente abierto. §

La disposición de todos los elementos se muestra en la figura 7.

Los fluidos estudiados son disoluciones de poliacrilamida (de nombre comercial Separan AP-30, fabricado por Dow Chemical de México) en glucosa (miel de maíz, de nombre comercial miel Karo, fabricada por Productos de Maíz) a concentraciones de 750, 500, 400 y 200 p.p.m. en peso.

La densidad de los fluidos se obtiene de la manera tradicional mediante el uso de un picnómetro calibrado de 10 cm^3 y una balanza de precisión.

El resto de las propiedades físicas se investiga con un Reogoniómetro Weissenberg-19 que pertenece a la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M.

§ En este lugar se desea agradecer la importantísima colaboración del Dr. Raúl Valenzuela M. , por su ayuda material y moral y

por los consejos de carácter técnico que hicieron que las fotografías obtenidas tuvieran una calidad que en otras circunstancias hubieran estado muy lejos de alcanzar.

- L = LENTE
- E = EMISOR RAYOS LASER
- C = CAMARA
- D = DUCTO DE OBSERVACION

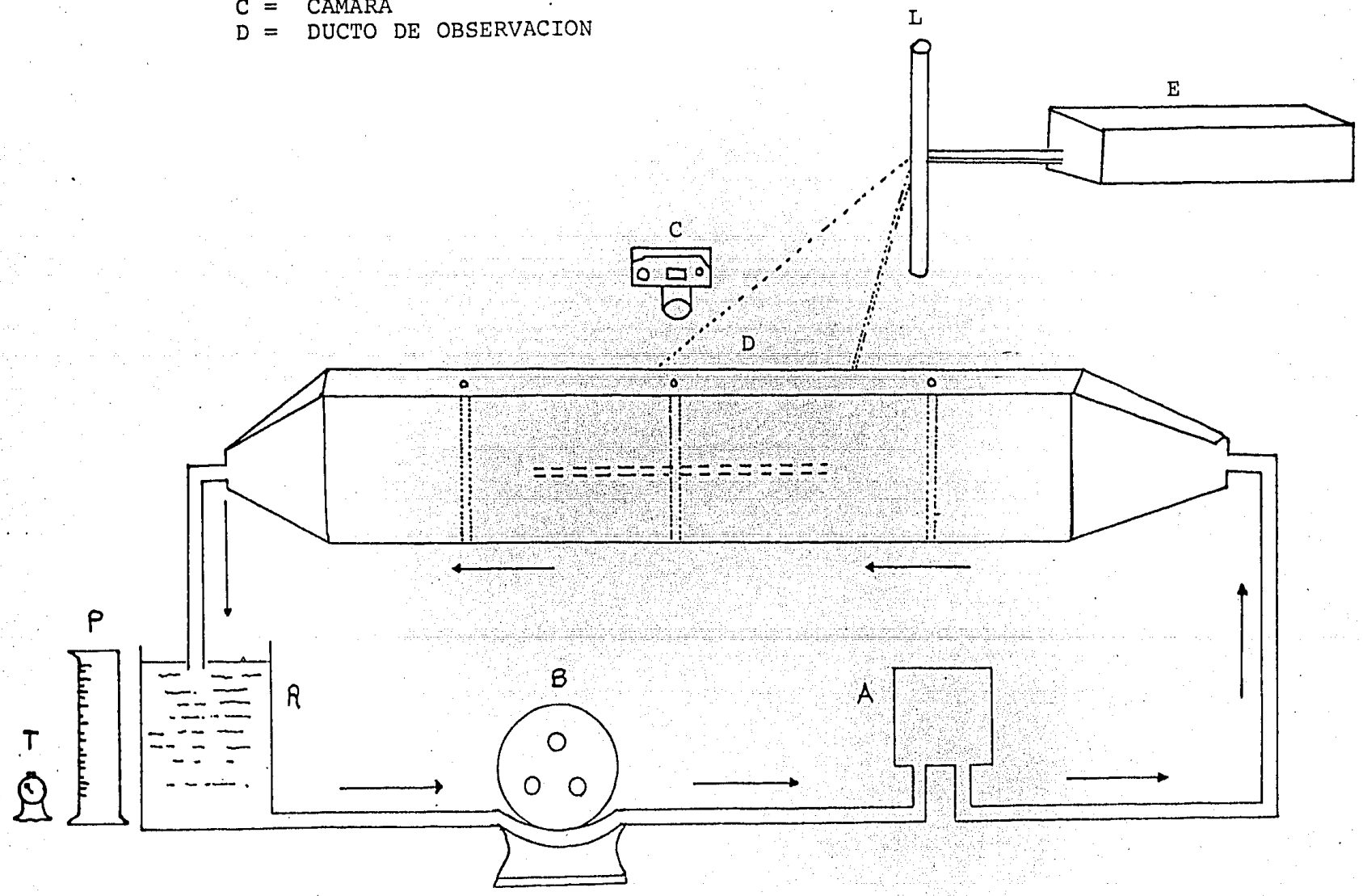


FIGURA 7.-

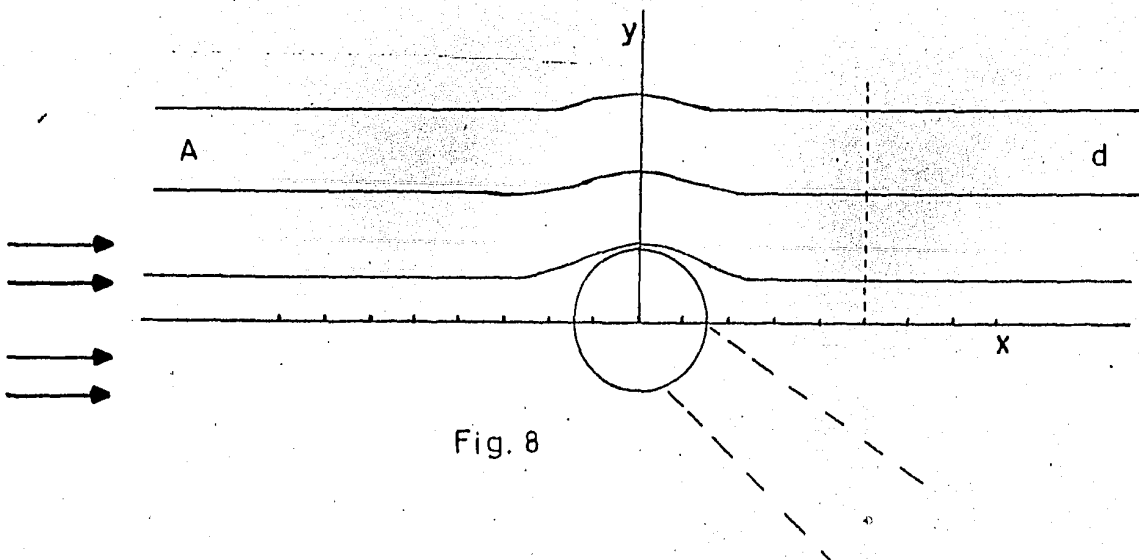
V. Análisis de los resultados y conclusiones.

Los resultados experimentales son fotografías que se anexan más adelante.

El análisis consiste en tomar medidas sobre las líneas de corriente (con respecto al eje de simetría) para valuar el área bajo la curva, tanto antes como después del obstáculo.

Sobre las fotos amplificadas se coloca un plástico transparente (conocido comercialmente como plástico cristal), de tal manera que se puedan dibujar trazos sobre la fotografía sin marcarla permanentemente.

Sobre el plástico se traza una línea por el eje de simetría, cortando al círculo negro que corresponde a la sección del cilindro (x en la fig. 8).



Se traza una línea perpendicular a ésta exactamente en el punto me_

dio del círculo (y' en la fig. 8), dividiendo así la parte superior de x en las dos zonas deseadas: antes (A) y después (d) del obstáculo.

Las líneas de corriente que se analizan son aquellas que cruzan la línea " y " en los puntos correspondientes a $(1/2)D$, $(1)D$ y $(1.5)D$, medidos desde el eje de simetría x . Cada línea se marca sobre el plástico con una línea punteada, empleando tinta china, para facilitar las mediciones.

Sobre el eje x se ponen marcas distanciadas 1 cm, sobre las cuales se localizan los puntos deseados en cada línea de corriente.

Las mediciones se hacen con una regla "Rabone Chesterman" que tiene graduaciones de 0.05 cm, lo que permite considerar que cada lectura tiene una variación de ± 0.05 cm.

En este punto conviene decir que la localización de las líneas de corriente es una labor bastante difícil, puesto que en cada foto aparece un número enorme de líneas. Esta es una desventaja del medio de visualización que se emplea; permite una observación clara de todo el patrón de flujo, pero cada foto requiere de una gran amplificación para identificar a cada línea de corriente en forma individual. El método tradicional de visualización, mediante la inyección de tinte, permite el seguimiento de cada línea (ref.9), pero no puede dar una visión global del patrón de flujo, i.e. se aprecia el comportamiento de la línea de tinte, pero es imposible seguir la variación de las líneas de corriente en función de la distancia con respecto al obstáculo (en la ref. 14 se ven, a lo sumo, dos inyecciones de tinte en cada foto).

Al proceder de la manera que se indica se obtiene una serie de datos que permite valuar el área bajo la curva limitada por cada línea de corriente y el eje x . Esto es así para cada fotografía.

Como se ha establecido en las secciones precedentes, el objetivo principal de este trabajo es la búsqueda de una evidencia definitiva en lo que respecta al comportamiento de las líneas de corriente antes y después del obstáculo. En el caso del comportamiento Newtoniano el patrón es absolutamente simétrico; esto quiere decir que el área bajo la curva de una cierta línea de corriente antes del obstáculo es igual que el área correspondiente después del obstáculo.

Un comportamiento distinto señalaría una tendencia anómala del patrón de flujo, ya sea de acuerdo a las predicciones de Ultman y Denn (ref. 6) o a las de Broadbent y Mena (ref. 9).

En la gráfica 1, al final de esta sección, se aprecian los valores de las áreas que se obtienen para las líneas de corriente situadas a $(0.5)D$. Se señala el área corriente arriba (antes, A) y corriente abajo (después, d). La fotografía correspondiente se identifica con el valor del producto $RexWe$.

De la misma manera, en las gráficas 2 y 3 se da la misma información pero para las líneas de corriente situadas a $(1)D$ y $(1.5)D$, respectivamente.

En las tres gráficas se ilustra el valor medio de cada área y su incertidumbre correspondiente.

Se puede ver que los valores de las áreas no son exactamente

iguales: en algunos casos se aprecia que "A" es mayor que "d", mientras que en otros "A" es menor que "d". Sin embargo, de las gráficas se aprecia que este comportamiento no está relacionado con el parámetro $RexWe$. Por tanto, se acepta que este patrón anómalo es el resultado de las variaciones que son inevitables en la marcación de las líneas de corriente y en su medición correspondiente.

Como se ve, para un mismo valor de $RexWe$ las diferencias en los valores de las áreas van disminuyendo en función de la distancia, como es de esperarse debido a que la perturbación del obstáculo es más importante en sus cercanías que en las zonas alejadas de él. Sin embargo, debido al análisis que se sigue, resulta que entre más cerca se encuentra la línea de corriente del eje de simetría el área es menor y una diferencia en el valor, por más pequeña que sea, produce una diferencia relativa más notable que en el caso de las líneas más alejadas.

En cada una de las gráficas se ve que en todos los casos se enciman las zonas de incertidumbre de las áreas. Por lo tanto, se considera que todas las áreas "A" y "d" son iguales para cada línea de corriente.

Con base en este hecho se concluye entonces que a las condiciones del presente experimento no hay una diferencia entre el comportamiento viscoelástico y el Newtoniano. Esto quiere decir que para flujos muy lentos el carácter elástico de los fluidos no es el factor determinante en el comportamiento del patrón de flujo, al menos para los pequeños valores de We que se alcanzan en este trabajo (desde $1.7 E^{-3}$ hasta $3.6 E^{-3}$).

Esta conclusión está en franca desavenencia con los resultados de Ultman y Denn, sobre todo porque el valor de los parámetros físicos de las soluciones que emplearon es muy similar al que aquí se ha manejado.

Por otra parte, este resultado está de acuerdo con los de Zana, Tienbruck y Leal (ref. 11) y los de Mena (ref. 14), quienes sostienen que el carácter de las desviaciones en las líneas de corriente es función del valor del número de Weissenberg.

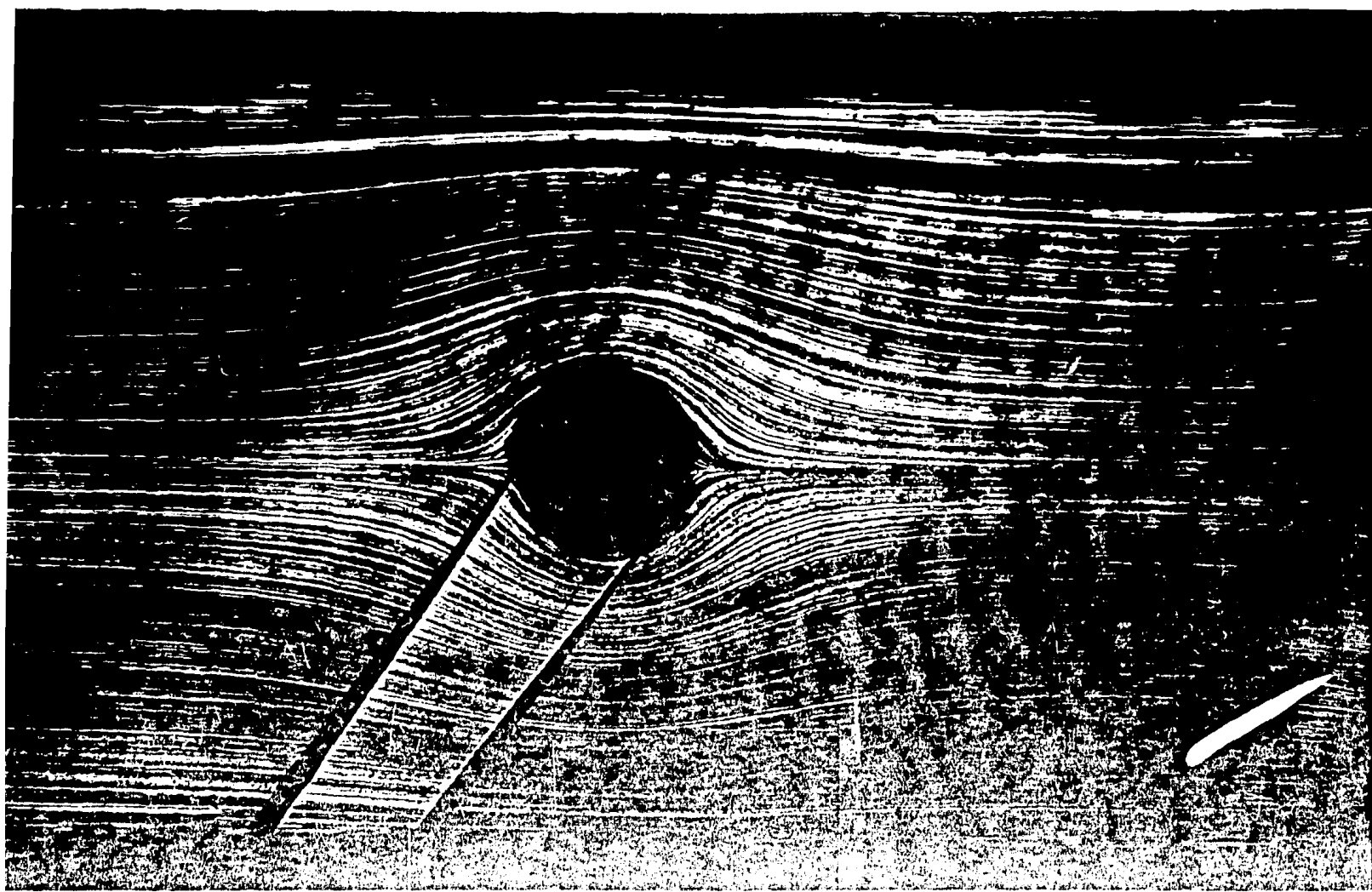


PHOTO 1
1.5"



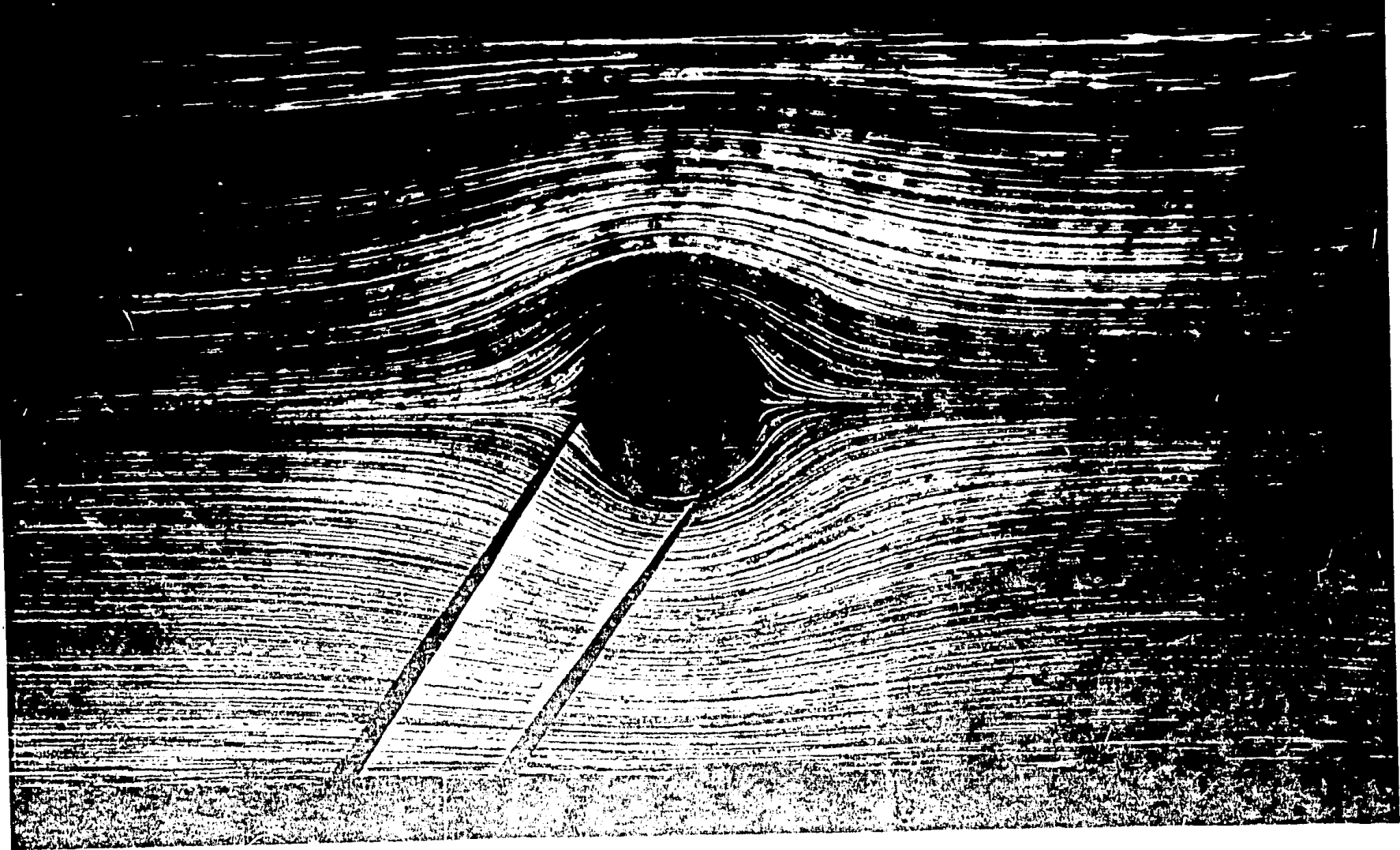


FOTO 2

Scale
1,175-6

4

SECCION DEL FENNO

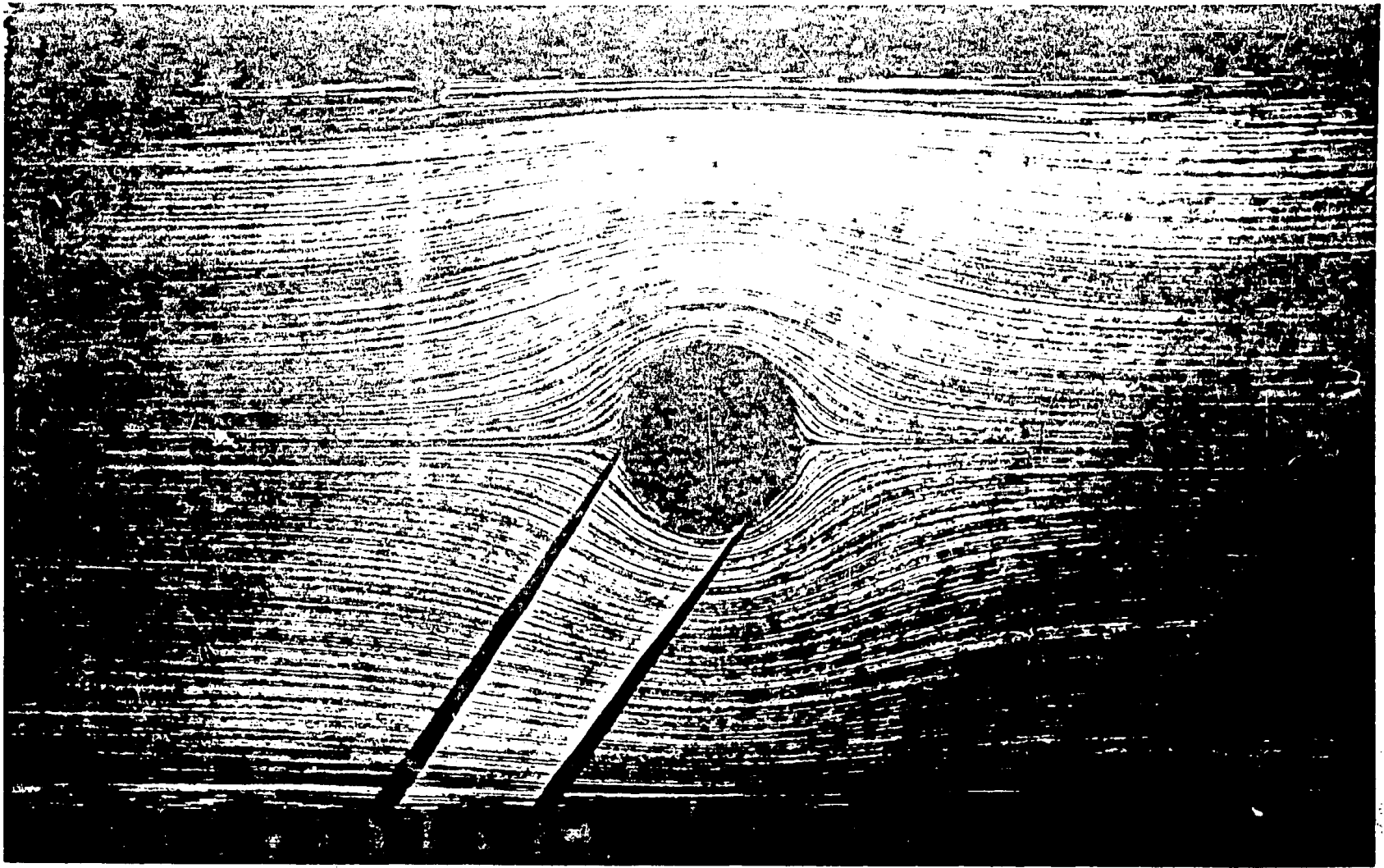


FOTO 3

ReWe
1.16E-6

← SENTIDO DEL FLUJO

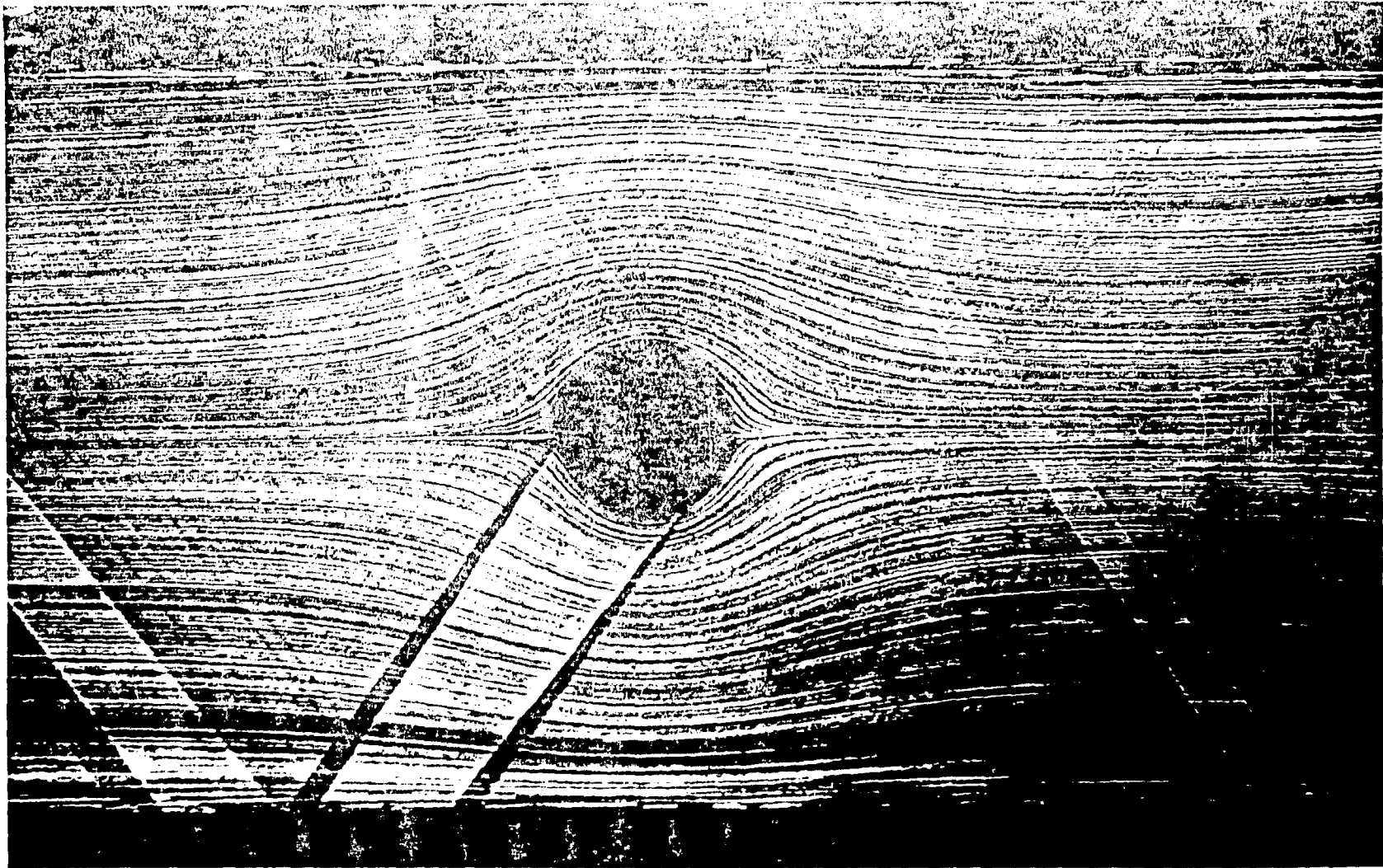
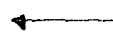


FOTO 4

ReWe
9.4E-7



SENTIDO DEL FLUJO

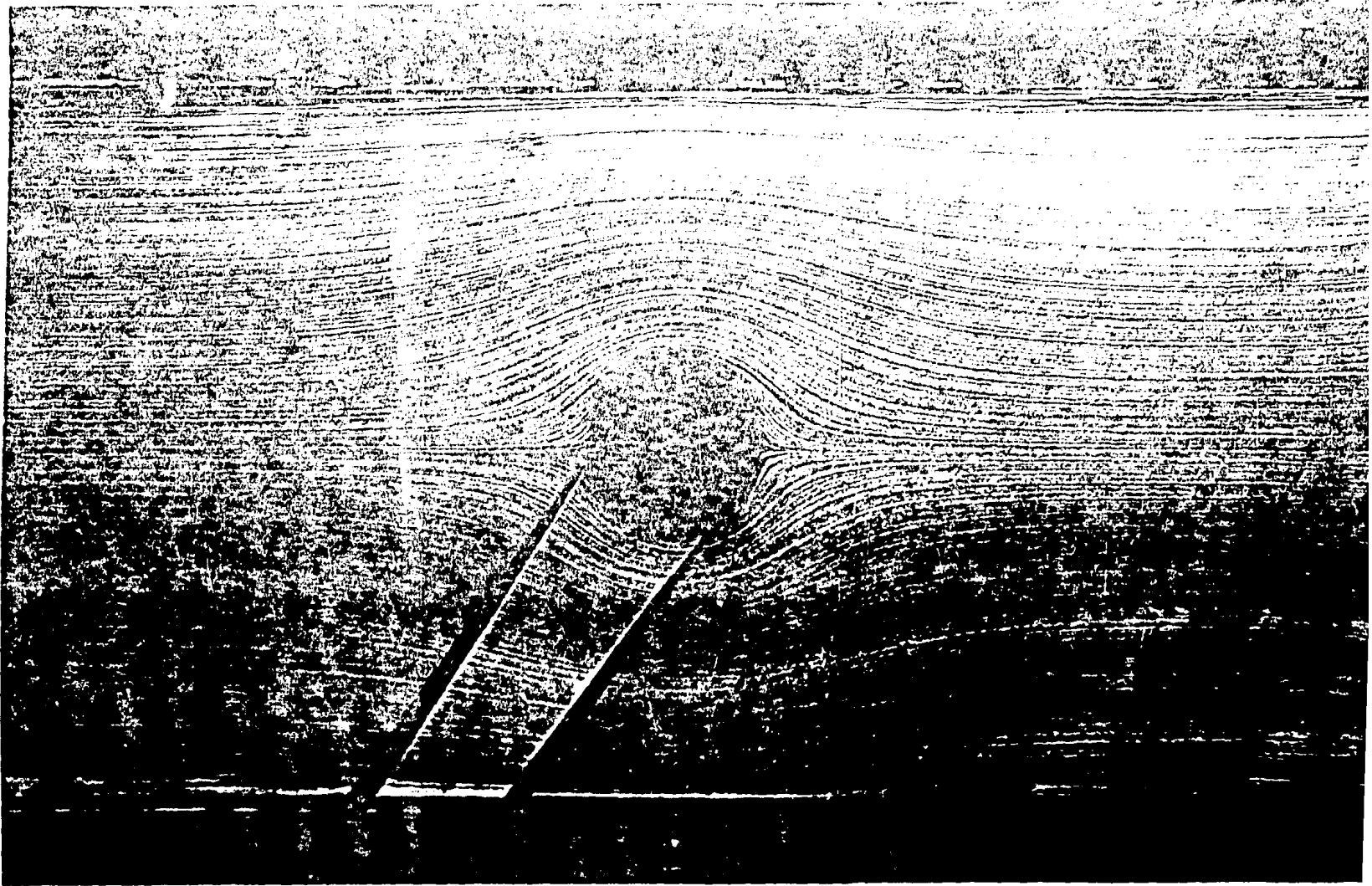
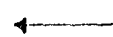


FOTO 5

ReWe
5.1E-7



SENTIDO DEL FLUJO



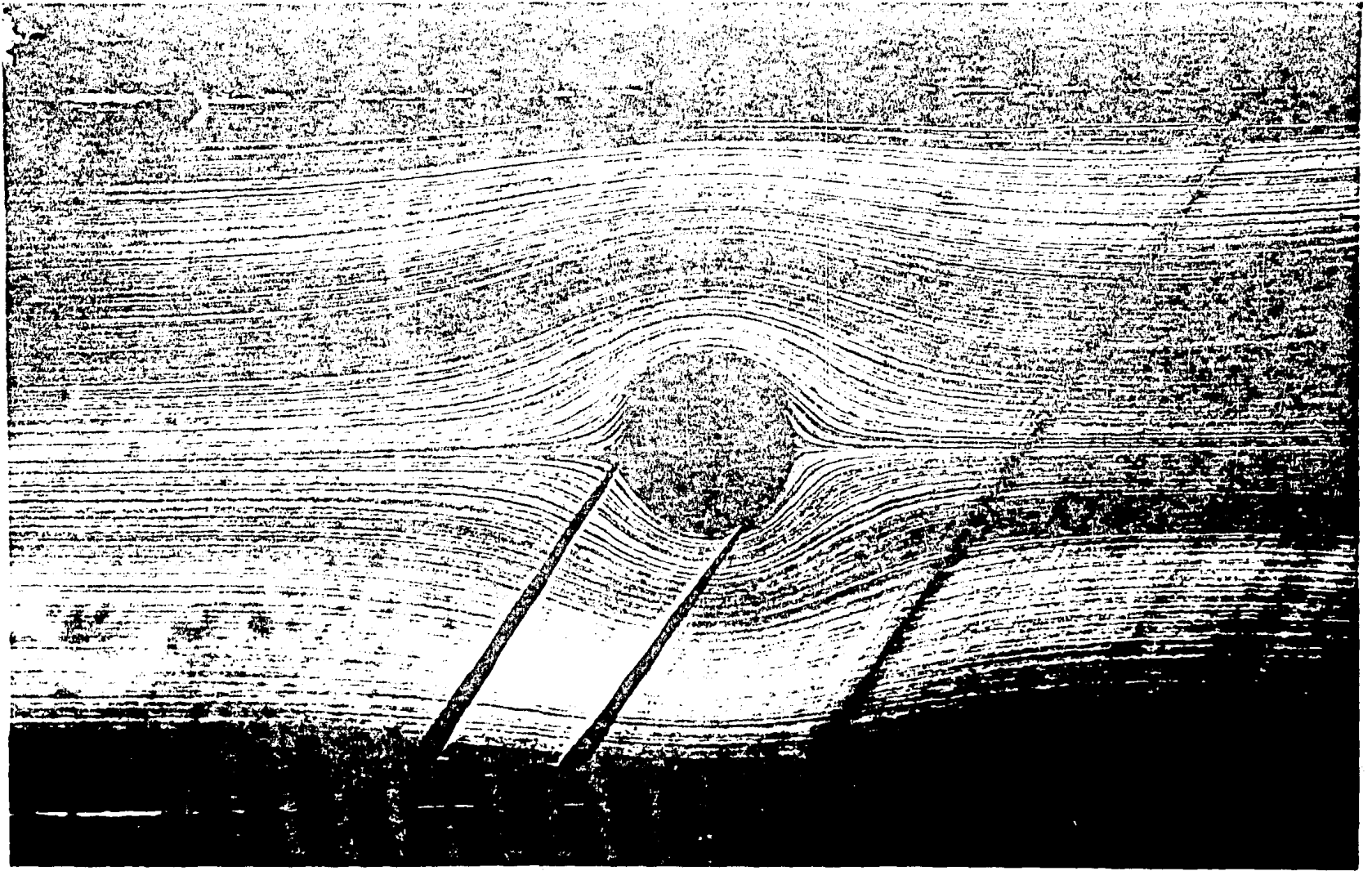
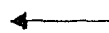


FOTO 6

ReWe
4.5E-7



SENTIDO DEL FLUJO



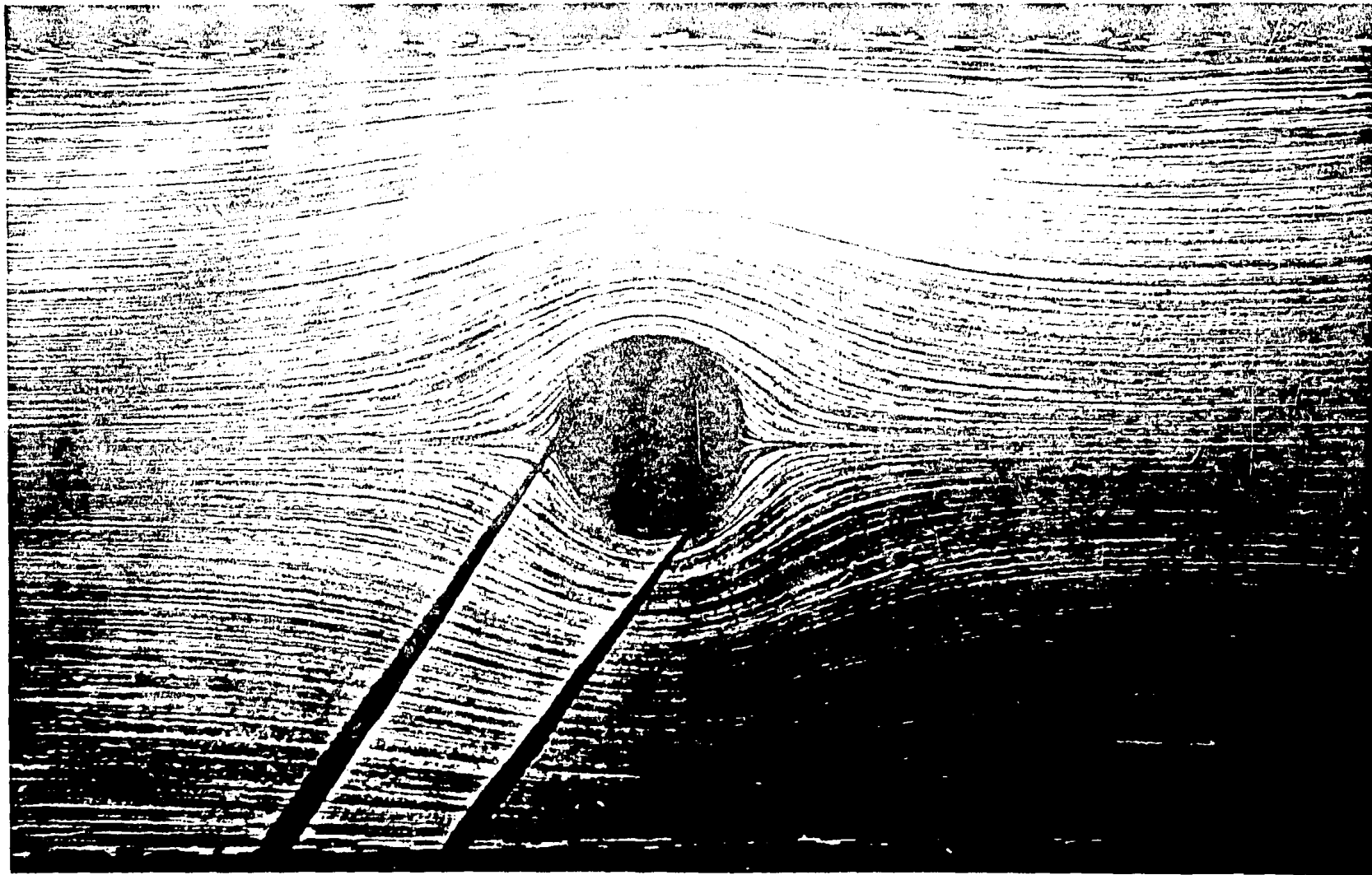


FOTO 7

ReWe
2.6E-7

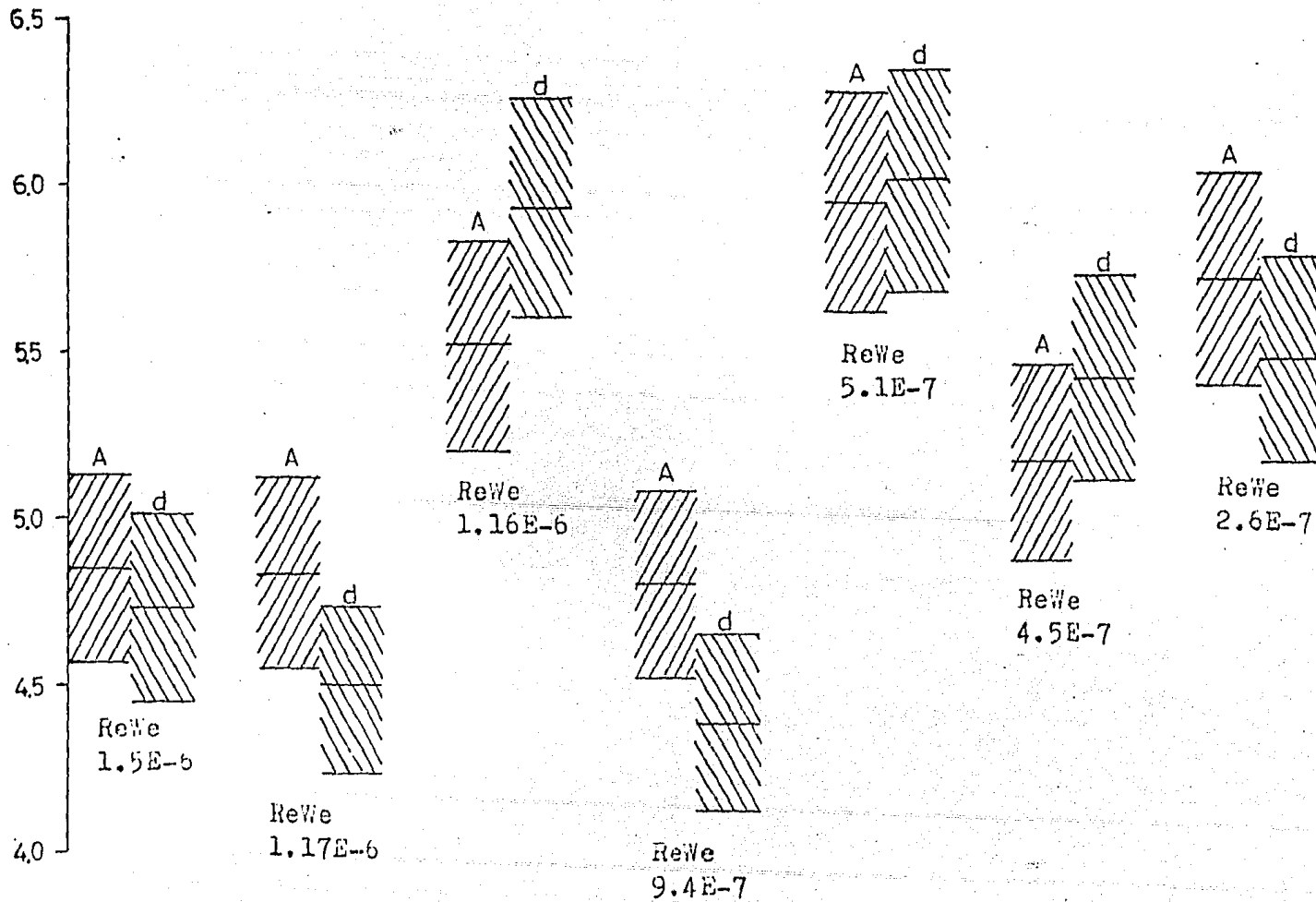
← SENTIDO DEL FLUJO



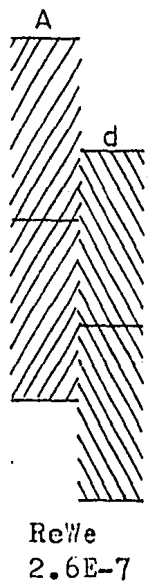
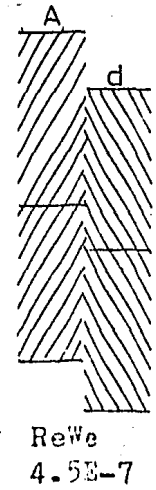
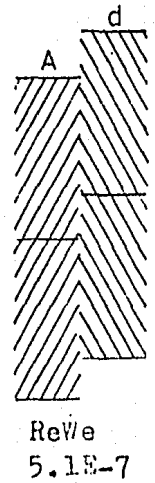
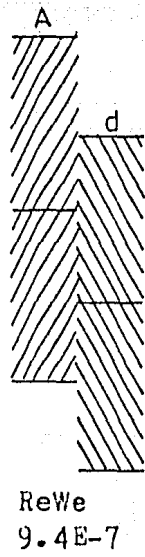
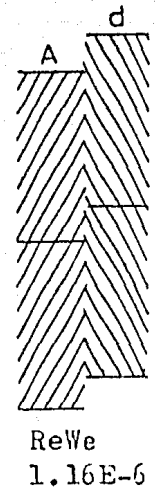
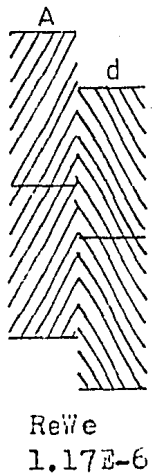
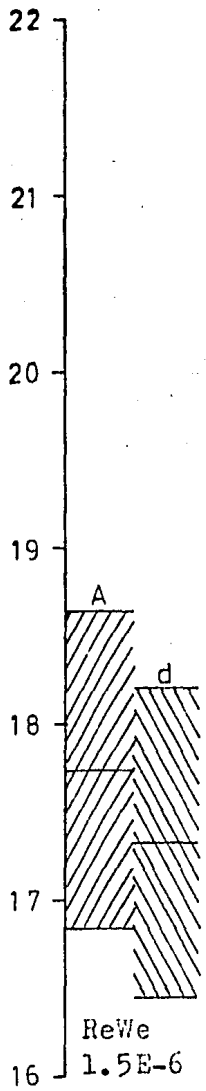
GRAFICA 1 : AREA BAJO LA LINEA

DE CORRIENTE A (1/2)D

AREA (cm²)



AREA (cm²)

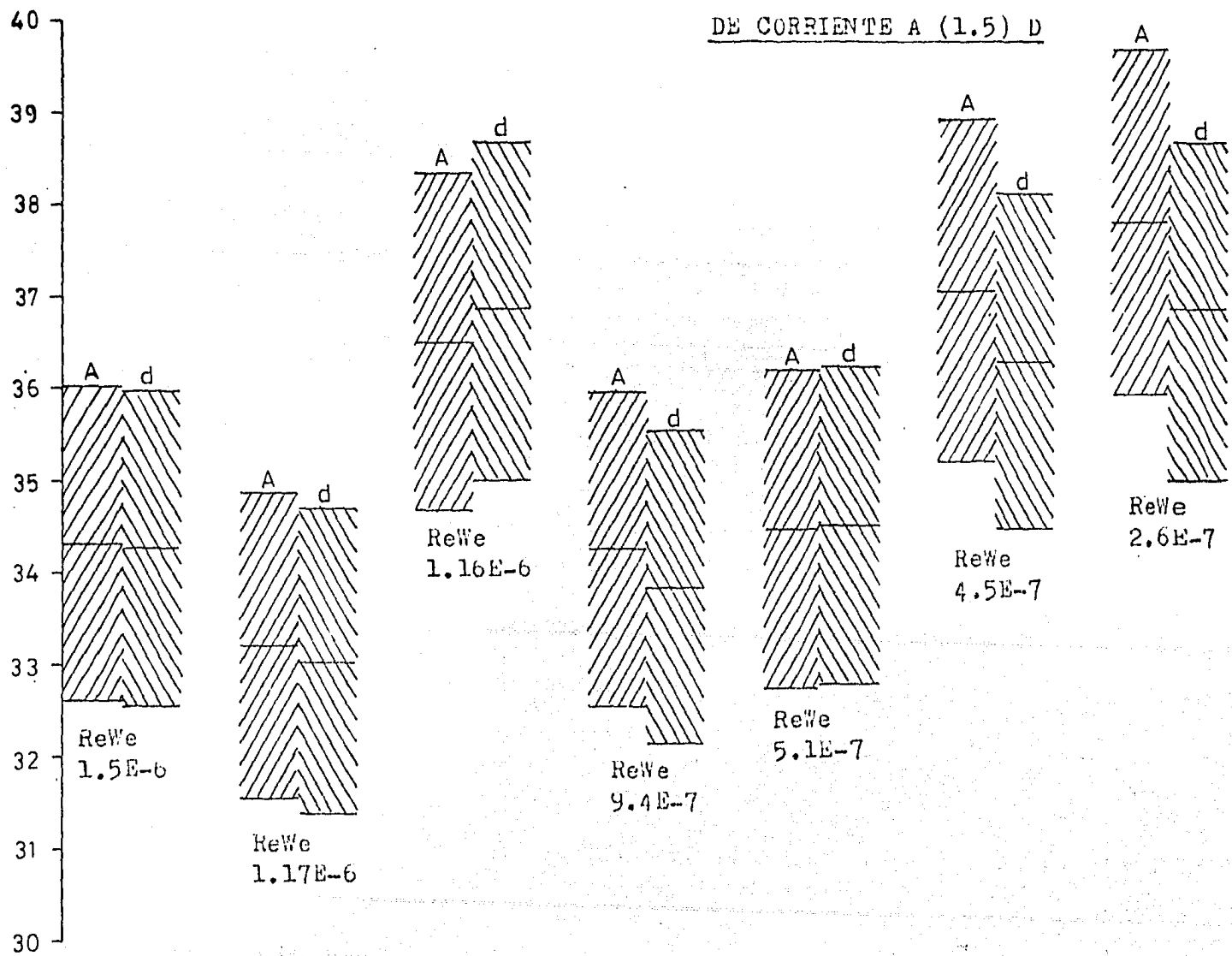


GRAFICA 2 : AREA BAJO LA LINEA
DE CORRIENTE A (1) D

AREA (cm²)

GRAFICA 3 : AREA BAJO LA LINEA

DE CORRIENTE A (1.5) D



VI. Propiedades físicas y cálculos.

La determinación de las propiedades físicas de las soluciones se realizó después de las corridas experimentales; es decir, todas las muestras incluían ya las partículas trazadoras de polietileno.

Se encontró que para todas las soluciones la densidad era la misma: 1.4 g/cm^3 . Este valor, como se ha dicho antes (p.23), se obtuvo con un picnómetro y una balanza analítica.

El resto de las propiedades necesarias se obtuvo mediante un Reogoniómetro Weissenberg-19, perteneciente a la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

Para ejemplificar la manera en que se tratan las lecturas del aparato, se presenta el cálculo de las propiedades de la solución de 400 ppm de separán AP-30 en miel de maíz. Los resultados directos del instrumento se dan en la tabla A:

TABLA A

MOTOR	TORSION ΔT	FUERZA NORMAL ΔN	RPM
2.2	63	14.5	2.84
1.9	110	17.0	5.68
1.6	205	25.0	11.30
1.3	400	49.0	22.60
1.0	770	115.0	45.00

Las expresiones necesarias para el cálculo son:

$$\eta = \theta_0 k_T \Delta_T / (120 a^3 \Omega) ; \quad \dot{\gamma} = \Omega / \theta_0 ; \quad \nu_1 = 2 k_N \Delta_N / (\pi a^2) ; \quad \lambda = \nu_1 / \dot{\gamma} \eta$$

En donde:

η es la viscosidad en poises ($\text{g}/(\text{cm}\cdot\text{s})$)

θ_0 es el ángulo del cono en grados (1.9858°)

a es el radio del cono (3.75 cm)

Ω es la velocidad angular (rad/s)

k_T es una constante del aparato (900 din·cm)

θ_0 es el ángulo del cono ($3.4659 \text{ E-}2$ rad)

k_N es una constante del aparato (953 din)

Al combinar las expresiones precedentes se obtiene:

$$\eta = 0.3075 (\text{g}/(\text{cm}\cdot\text{s}^2)) \Delta_T / \Omega \quad ; \quad \dot{\gamma} = 28.8523 \Omega \quad ; \quad \lambda = 0.1605 \Delta_N / (\Delta_T \Omega)$$

Los resultados se ven en la tabla B:

TABLA B

Δ_T	Δ_N	Ω (rad/s)	η (poises)	$\dot{\gamma}$ (1/s)	$\lambda \cdot E3$ (s)
63	14.5	0.2974	65.1468	8.5807	130.42
110	17.0	0.59481	56.8733	17.1616	43.786
205	25.0	1.1833	53.2786	34.1409	17.368
400	49.0	2.3667	51.9769	68.2846	8.7227
770	115.0	4.7124	50.2507	135.9634	5.3410

El valor de las propiedades para las soluciones que se han empleado se da en la tabla C.

Los parámetros pertinentes se requieren a una rapidez de deformación igual a cero, por lo que se grafican y se extrapolan, como se ve en las gráficas 4,5,6,7,8 y 9 al final de esta sección.

En vista de la incertidumbre en la extrapolación se optó por ajustar a cada conjunto de datos un polinomio de la forma:

$$f(\dot{\gamma}) = c_5 + (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_5) \left[c_4 + (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_4) \left\{ c_3 + (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_3) \left[c_2 + c_1 (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_2) \right] \right\} \right]$$

TABLA C

RAPIDEZ DE DEFOR MACION (1/s)	SOLUCION DE 750 ppm		SOLUCION DE 400 ppm		SOLUCION DE 200 ppm	
	VISCOSI DAD (poises)	TIEMPO DE RELAJA MIENTO E2 (s)	VISCOSI DAD (poises)	TIEMPO DE RELAJA MIENTO E2 (s)	VISCOSI DAD (poises)	TIEMPO DE RELAJA MIENTO E2 (s)
8.58	86.35	18.19	65.15	13.04	65.15	9.89
17.16	71.09	8.24	56.87	4.38	45.50	5.15
34.14	67.57	5.78	53.28	1.74	42.10	1.76
68.28	63.67	2.11	51.98	0.87	41.58	0.53
135.96	62.00	1.92	50.25	0.53	40.14	0.22

TABLA D

SOLUCION DE 750 ppm

$$\eta = 61.9977 + (\dot{\gamma} - 135.9634) \left[-2.4734 \text{ E-}2 + (\dot{\gamma} - 68.2846) \left\{ 8.7921 \text{ E-}4 + (\dot{\gamma} - 34.1409) \left[-7.9078 \text{ E-}6 + (\dot{\gamma} - 17.1616) (7.7774 \text{ E-}6) \right] \right\} \right]$$

$$\lambda = 1.9198 \text{ E-}2 + (\dot{\gamma} - 135.9634) \left[-2.8753 \text{ E-}5 + (\dot{\gamma} - 68.2846) \left\{ 1.0258 \text{ E-}5 + (\dot{\gamma} - 34.1409) \left[2.4182 \text{ E-}8 + (5.1375 \text{ E-}8) (\dot{\gamma} - 17.1616) \right] \right\} \right]$$

TABLA D
(CONTINUACION)

SOLUCION DE 400 ppm

$$\eta = 50.2507 + (\gamma - 135.9634) \left[-2.5506 \text{ E-}2 + (\gamma - 68.2846) \left\{ 1.2393 \text{ E-}4 + (\gamma - 34.1409) \left[-2.7538 \text{ E-}5 + (3.2082 \text{ E-}6)(\gamma - 17.1616) \right] \right\} \right]$$

$$\lambda = 5.3410 \text{ E-}3 + (\gamma - 135.9634) \left[-4.9967 \text{ E-}5 + (\gamma - 68.2846) \left\{ 1.996 \text{ E-}6 + (\gamma - 34.1409) \left[-1.9769 \text{ E-}7 + (3.9031 \text{ E-}8)(\gamma - 17.1616) \right] \right\} \right]$$

SOLUCION DE 200 ppm

$$\eta = 40.1353 + (\gamma - 135.9634) \left[-2.1369 \text{ E-}2 + (\gamma - 68.2846) \left\{ -5.9829 \text{ E-}5 + (\gamma - 34.1409) \left[-3.0915 \text{ E-}5 + (1.0033 \text{ E-}5)(\gamma - 17.1616) \right] \right\} \right]$$

$$\lambda = 2.1515 \text{ E-}3 + (\gamma - 135.9634) \left[-4.7124 \text{ E-}5 + (\gamma - 68.2846) \left\{ 3.0582 \text{ E-}6 + (\gamma - 34.1409) \left[-2.4426 \text{ E-}7 + (1.2017 \text{ E-}8)(\gamma - 17.1616) \right] \right\} \right]$$

en donde: $\dot{\gamma}_j$ es la rapidez de deformación en el punto j ($j = 1, \dots, 5$)
 C_j es una constante que depende de los puntos tabulados.

Para el caso de la solución de 400 ppm :

j	$\dot{\gamma}$ (1/s)	μ (poises)			
1	8.5807	65.1468			
2	17.1616	56.8733	$(\mu_2 - \mu_1)/(\dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_1) = -0.9642$	0.0294	-
3	34.1409	53.2786	$(\mu_3 - \mu_2)/(\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_2) = -0.2117$	0.0034	-0.0004
4	68.2846	51.9769	$(\mu_4 - \mu_3)/(\dot{\gamma}_4 - \dot{\gamma}_3) = -0.0381$	0.0001	$-2.77 \cdot 10^{-5}$
5	135.9634	50.2507	$(\mu_5 - \mu_4)/(\dot{\gamma}_5 - \dot{\gamma}_4) = -0.0255$		$3.21 \cdot 10^{-6}$
		(C_5)	(C_4)	(C_3)	(C_2)

La expresión de cada polinomio se da en la tabla D.

Los valores de las propiedades pertinentes resultaron ser, luego de la extrapolación a la rapidez de deformación igual a cero :

RAPIDEZ DE DEFORMACION	SOLUCION (ppm)	VISCOSIDAD (μ_0 (poises))	TIEMPO DE RELAJAMIENTO λ_0 (s)
0	750	118.34	0.39
0	400	81.05	0.31
0	200	106.86	0.18

Las fotografías que se presentan en este trabajo corresponden a un diámetro de cilindro $D = 1.43$ cm

Los números adimensionales relevantes en el análisis de este trabajo son :

$$Re \equiv v \rho D / \mu_0$$

$$We \equiv (v \lambda_0) / D$$

en donde v es la velocidad (cm/s)

ρ es la densidad (g/cm^3)

D es el diámetro del cilindro (cm).

μ_0 es la viscosidad a una rapidez de deformación igual a cero (poises)

λ_0 es el tiempo de relajamiento cuando la rapidez

de deformación es igual a cero (s)

Los valores que se calculan para las fotografías son:

FOTO	V E2 (cm/s)	η (poises)	λ E1 (s)	Re E4	We E3	ReWe E7
1	1.7035	81.0497	3.0564	4.2041	3.6441	15.320
2	1.4884	81.0497	3.0564	3.6733	3.184	11.696
3	1.4834	81.0497	3.0564	3.6607	3.1731	11.616
4	1.337	81.0497	3.0564	3.2996	2.8601	9.4373
5	1.4726	106.8590	1.7974	2.7565	1.8526	5.1066
6	1.3778	106.8590	1.7974	2.579	1.7333	4.4703
7	0.75395	118.3369	3.9015	1.2744	2.0588	2.6238

Si bien los valores obtenidos con el Reogoniómetro Weissenberg-19 no coinciden con los valores de la literatura para soluciones similares (véase la ref. 15), también es cierto que a las condiciones de flujo que se reportan los valores de los parámetros físicos no son de terminantes; es decir, si los valores de la viscosidad y de la rapidez de deformación cambiaran en 5 o 6 veces, los valores de los números adimensionales Re y We mantendrían su orden de magnitud ($\ll 1$), por lo tanto, en las fotos se redondean las cifras a dos dígitos.

Una vez que se han determinado las propiedades físicas y que se han calculado con ellas los números adimensionales que rigen el fenómeno que se estudia, se procede a continuación al cálculo del área bajo la curva definida por cada línea de corriente.

Para hacerlo, se emplea el bastante bien conocido método de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = S \doteq (h/3) \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + 4f(x_7) + f(x_8) \right]$$

en donde S es el área que se desea valorar

x_j son los valores que se sitúan sobre el eje de las abscisas; en este caso se encuentran señalados en la figura 8 de la sección V

h es la separación entre x_j y x_{j+1} . En este trabajo tiene el valor de 1 ± 0.05 cm

$f(x_j)$ es el valor que se determina por el cruce de una vertical que pasa por x_j y la línea de corriente deseada.

Para dar una idea de los valores que se manejan, se presentan las lecturas tomadas de la foto 5 (ReWe = 5.11 E-7) correspondientes a la línea de corriente situada a (0.5)D:

$x(\text{cm})$	$f(x)$ A (cm)	$f(x)$ d (cm)
0	1.95	1.95
1	1.75	1.7
2	1.1	1.1
3	0.6	0.65
4	0.4	0.45
5	0.35	0.35
6	0.3	0.35
7	0.3	0.3
8	0.3	0.3

El valor medio de S_A (el área bajo la línea de corriente, entre la vertical $x = 0$, la vertical $x = 8$ y el eje de simetría) es 5.95 cm^2 y el de S_d es 6.0167 cm^2 . Estos valores se encuentran dibujados en la gráfica 1 de la sección V (ambos son las líneas centrales de

la quinta barra)

De acuerdo con lo dicho en la sección precedente, las lecturas se hacen con una regla que posee graduaciones de 0.5 mm; también se ha mencionado que por las características de las fotos las mediciones son difíciles y por tanto, inciertas.

Para determinar la incertidumbre de las áreas que se calculan, se considera que todas las lecturas: x_j , $f(x_j)$ y h tienen una incertidumbre de ± 0.05 cm y se toman estos valores en la expresión que proponen Kline-McClintock, que para el caso que nos ocupa toma la forma:

$$E_S = \sqrt{\left\{ (S/h)^2 + (78/9)(h^2) \right\} E_x^2}$$

en donde:

E_S es la incertidumbre en el área (cm^2)

S es el área calculada con los valores leídos (cm^2)

h es la distancia entre los valores de las abscisas (cm)

E_x es la incertidumbre en todas las lecturas (0.05 cm)

Para los valores que se señalan de la foto 5 ($\text{ReWe} = 5.11 \text{ E-7}$):

$$S_A = 5.95 \pm 0.3319 \text{ (cm}^2\text{)}$$

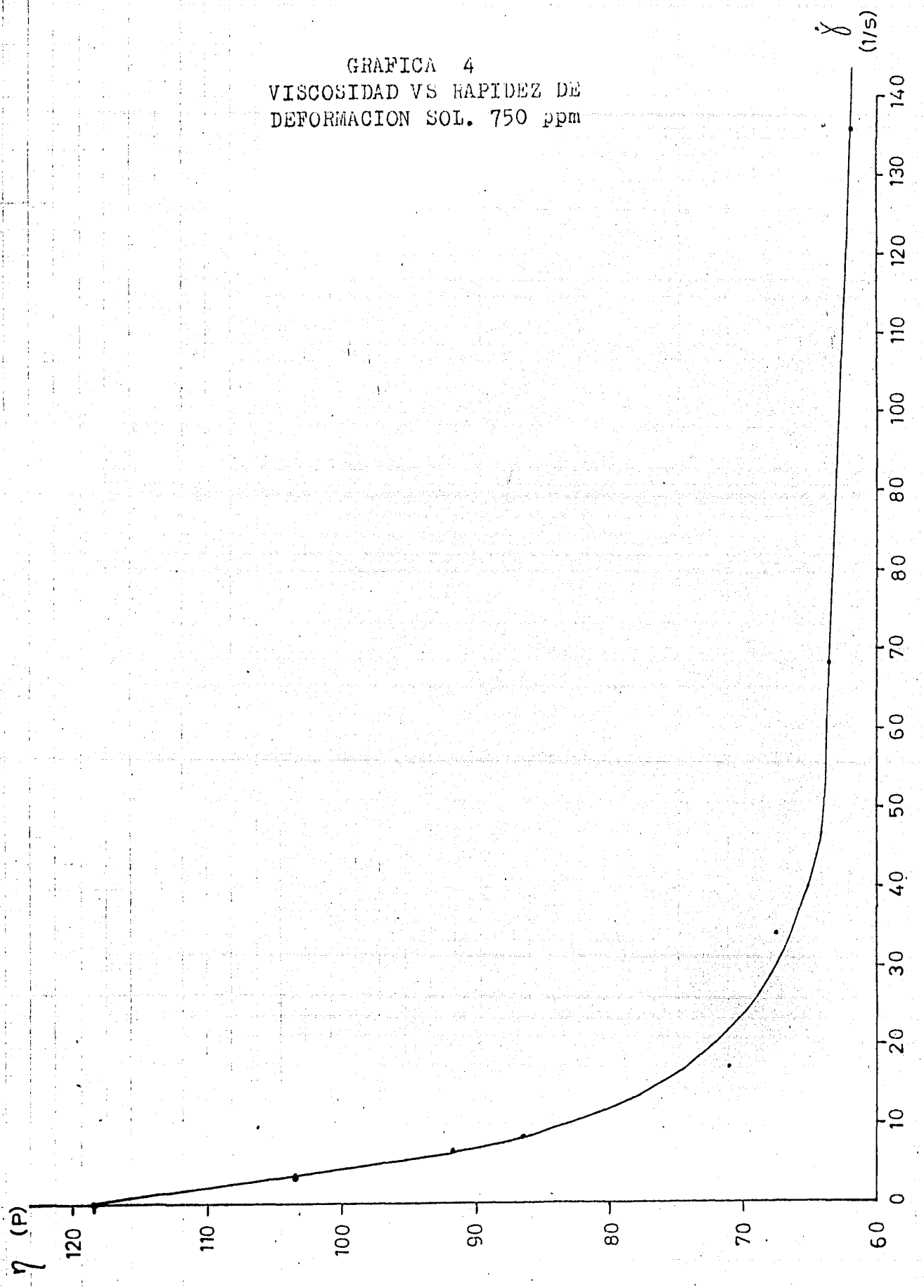
$$S_B = 6.0167 \pm 0.3349 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Los valores que se han manejado de esta manera y que se hallan representados en las gráficas 1, 2 y 3 de la sección precedente, se dan en la tabla E.

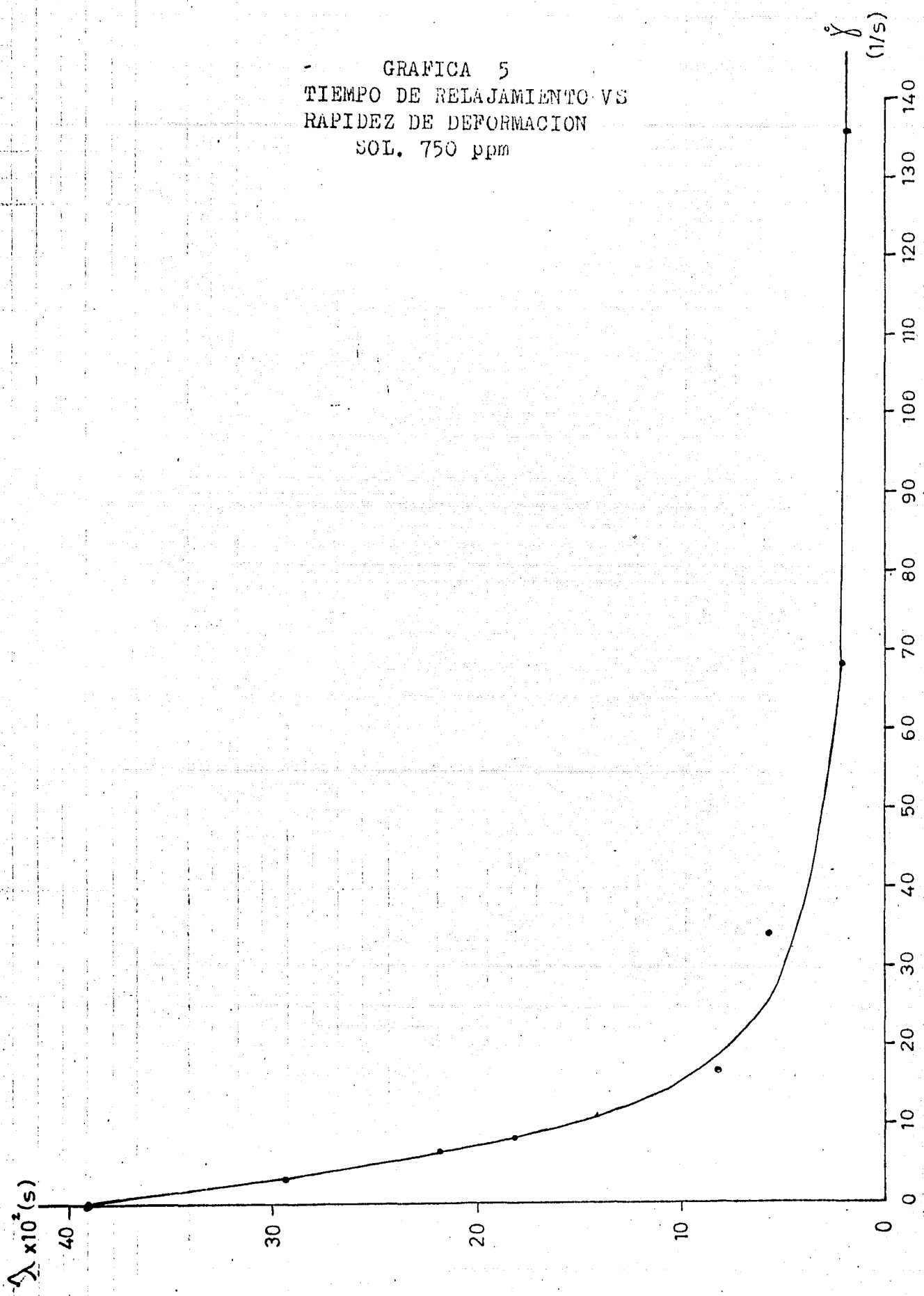
TABLA E

LÍNEA DE CORRIENTE	FOTO	ReWe E7	$S_A \pm E_S$ (cm ²)	$S_d \pm E_S$ (cm ²)
0.5D	1	15.320	4.85 \pm 0.2837	4.7333 \pm 0.2787
"	2	11.696	4.8333 \pm 0.2830	4.5 \pm 0.2689
"	3	11.616	5.5167 \pm 0.3127	5.9333 \pm 0.3319
"	4	9.4373	4.80 \pm 0.2815	4.3833 \pm 0.2640
"	5	5.1066	5.95 \pm 0.3319	6.0167 \pm 0.3349
"	6	4.4703	5.1667 \pm 0.2973	5.4167 \pm 0.3083
"	7	2.6238	5.7167 \pm 0.3215	5.4833 \pm 0.3112
1D	1	15.320	17.7367 \pm 0.899	17.3333 \pm 0.8791
"	2	11.696	17.2333 \pm 0.8741	16.9333 \pm 0.8594
"	3	11.616	19.0833 \pm 0.9655	19.2833 \pm 0.9753
"	4	9.4373	19.35 \pm 0.9786	18.8167 \pm 0.9523
"	5	5.1066	18.1833 \pm 0.9210	18.4333 \pm 0.9333
"	6	4.4703	18.55 \pm 0.9391	18.25 \pm 0.9243
"	7	2.6238	20.3 \pm 1.0256	19.7 \pm 0.9959
1.5D	1	15.320	34.3333 \pm 1.723	34.2667 \pm 1.7196
"	2	11.696	33.2167 \pm 1.6673	33.05 \pm 1.659
"	3	11.616	36.5167 \pm 1.8318	36.8833 \pm 1.85
"	4	9.4373	34.2667 \pm 1.7196	33.85 \pm 1.6989
"	5	5.1066	34.4833 \pm 1.7304	34.5167 \pm 1.7321
"	6	4.4703	37.0833 \pm 1.86	36.3167 \pm 1.8218
"	7	2.6238	37.8333 \pm 1.8974	36.8833 \pm 1.85

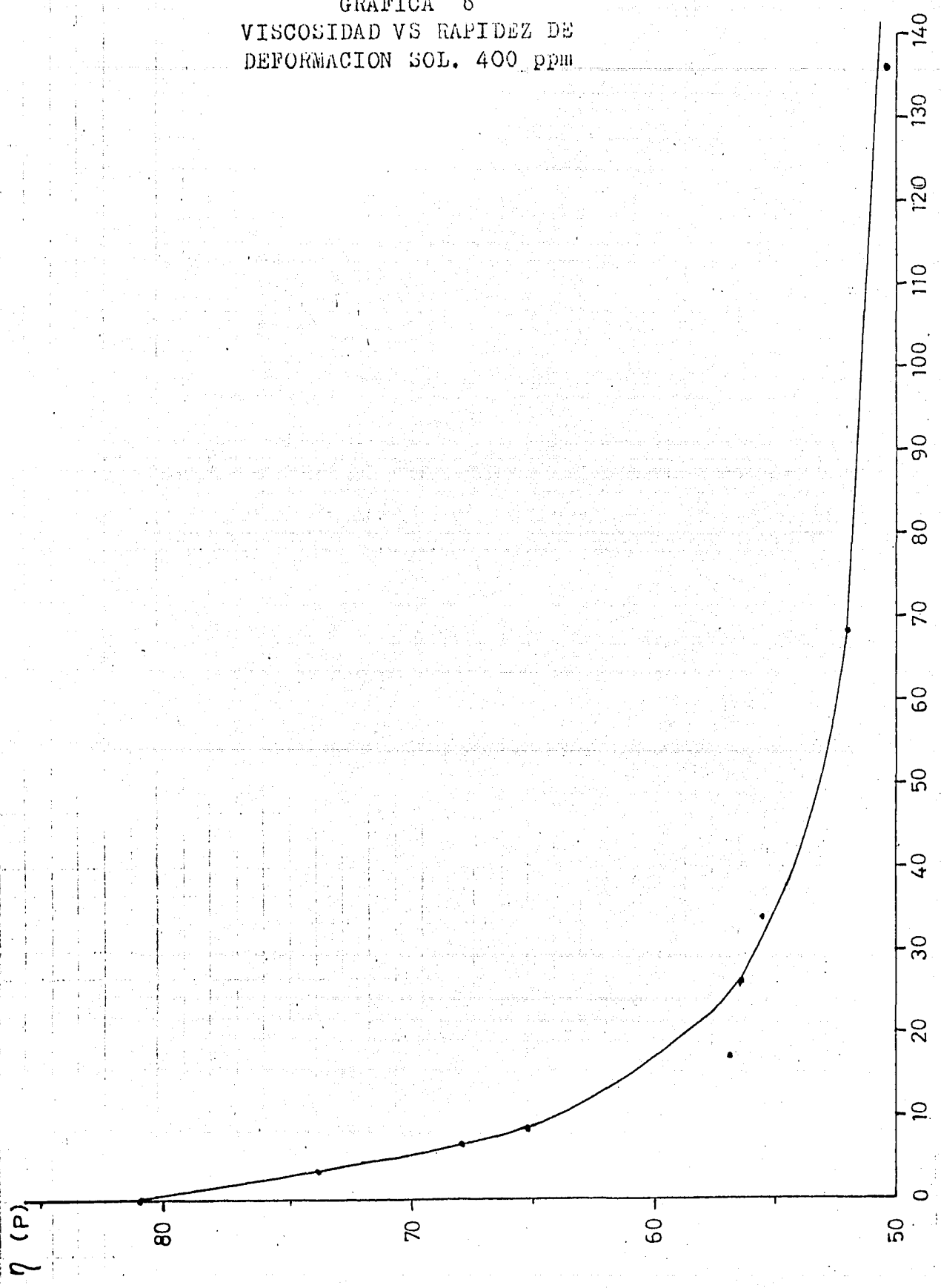
GRAFICA 4
VISCOSIDAD VS RAPIDEZ DE
DEFORMACION SOL. 750 ppm



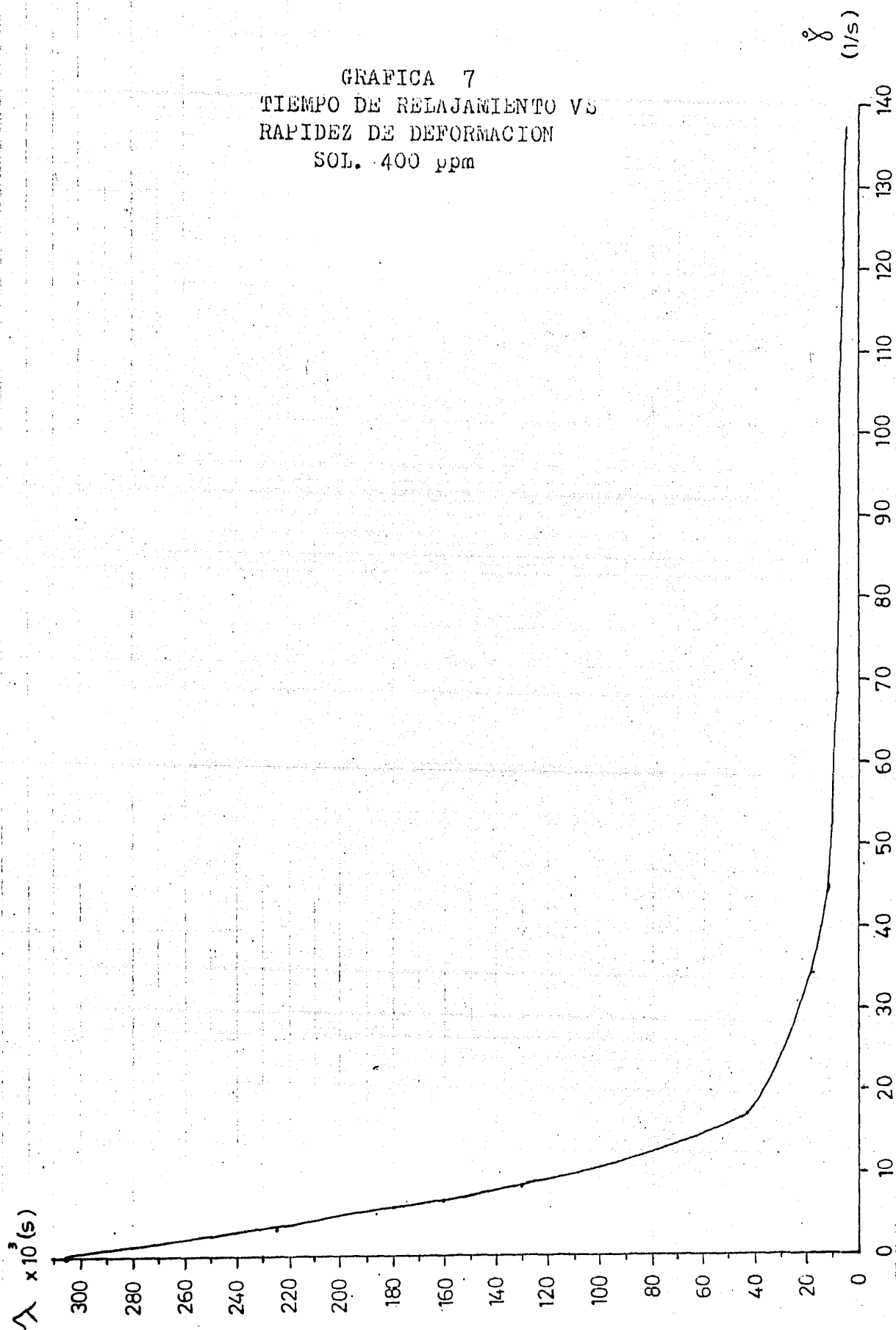
GRAFICA 5
TIEMPO DE RELAJAMIENTO VS
RAPIDEZ DE DEFORMACION
SOL. 750 ppm



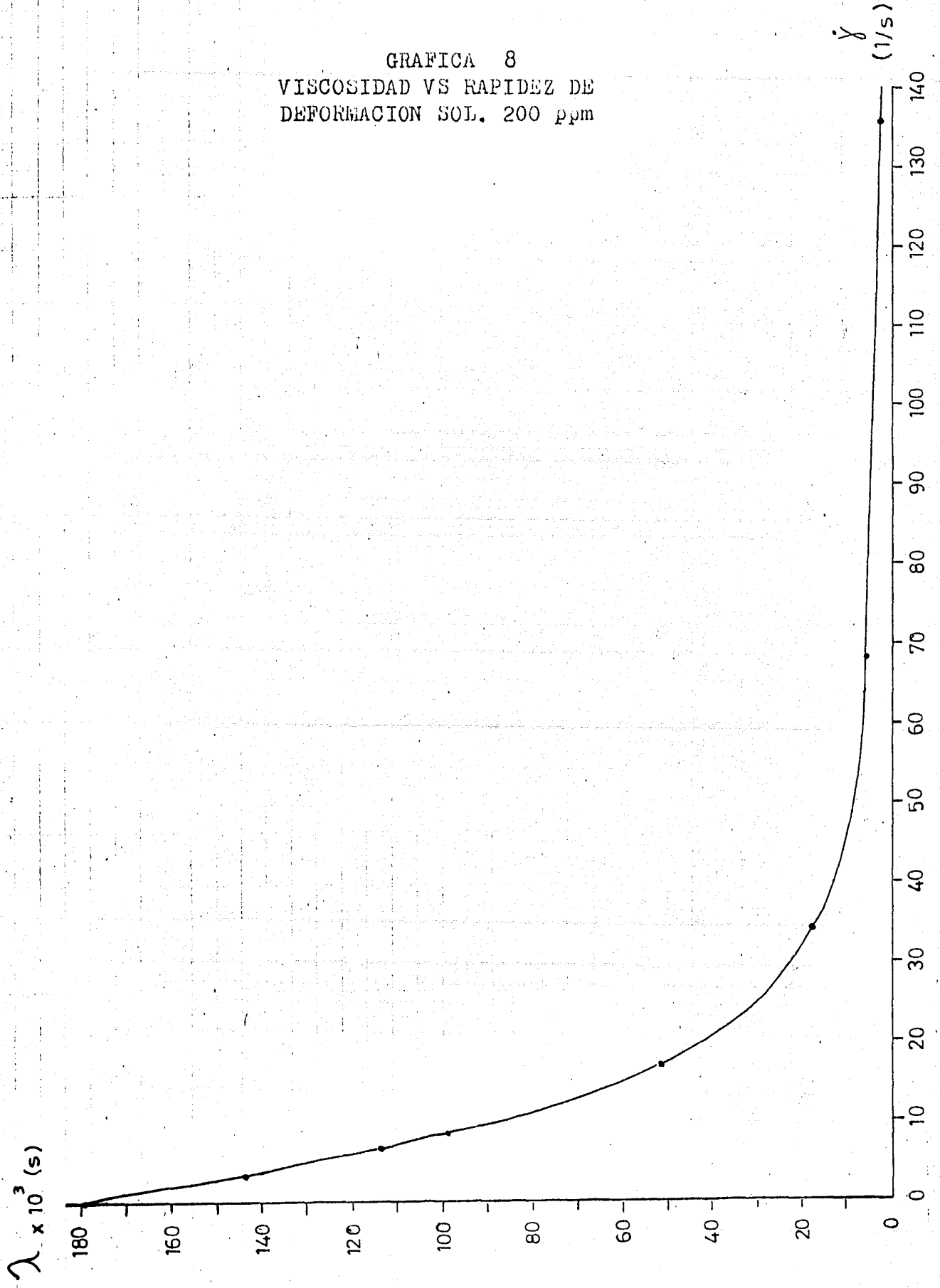
GRAFICA 6
VISCOSIDAD VS RAPIDEZ DE
DEFORMACION SOL. 400 ppm



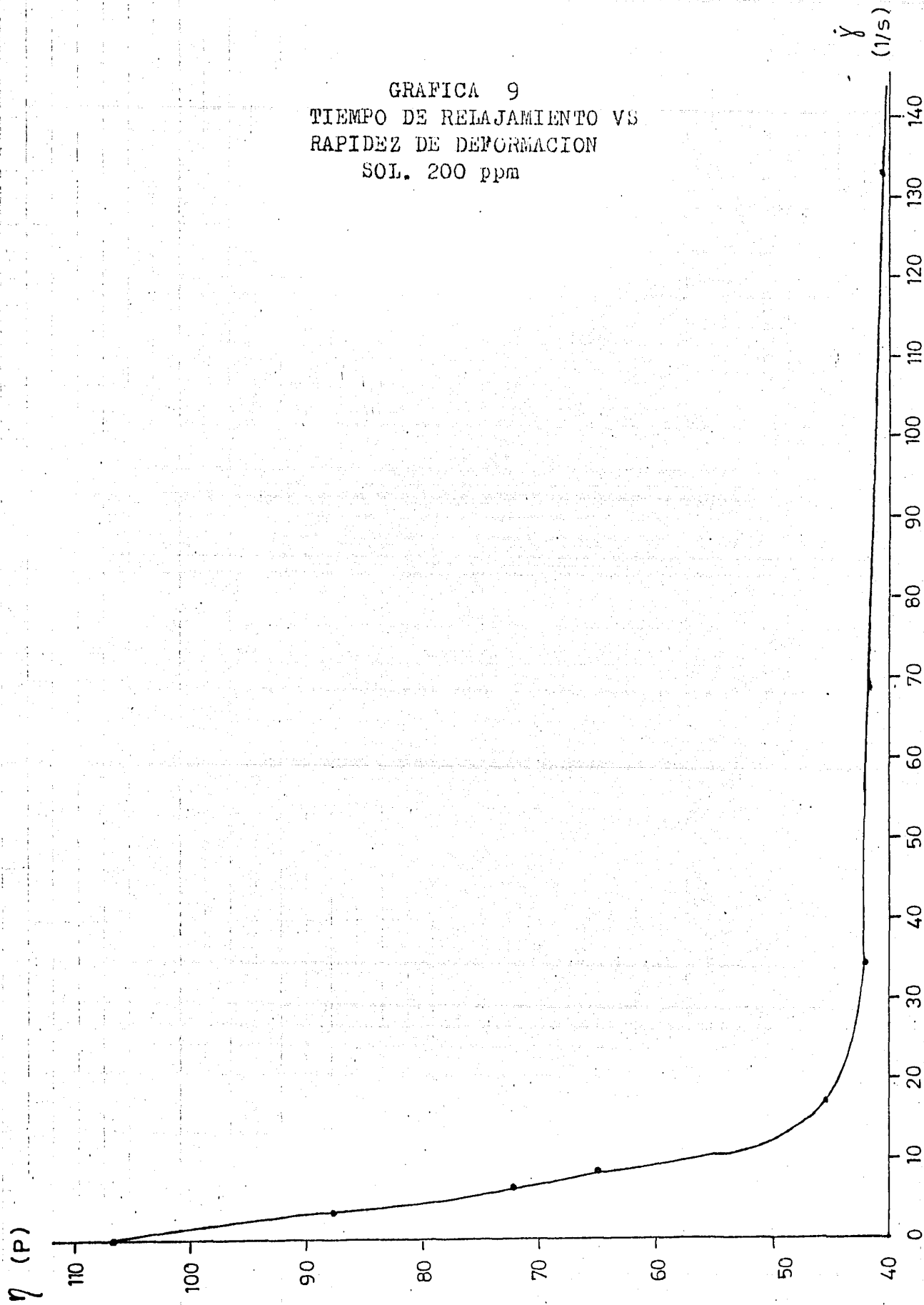
GRAFICA 7
TIEMPO DE RELAJAMIENTO VS
RAPIDEZ DE DEFORMACION
SOL. 400 ppm



GRAFICA 8
VISCOSIDAD VS RAPIDEZ DE
DEFORMACION SOL. 200 ppm



GRAFICA 9
TIEMPO DE RELAJAMIENTO VS
RAPIDEZ DE DEFORMACION
SOL. 200 ppm



Bibliografía

- 1.- Illingworth, C.R., Laminar Boundary Layers, L. Rosenhead, Editor, Oxford University Press, (1963).
- 2.- Lamb, H., Hydrodynamics, Cambridge University Press, 6th Edition, (1962).
- 3.- Currie, I.G., Fundamental Mechanics of Fluids, McGraw-Hill (1974).
- 4.- Hildebrand, F.B., Advanced Calculus for Applications, Prentice-Hall, 2nd Edition, (1976)
- 5.- Mena, B. y Caswell, B., Chem. Eng. J., 6, (1974), 125.
- 6.- Ultman, J.S. y Denn, M.M., Chem. Eng. J., 2, (1971), 61.
- 7.- Ultman, J.S., Ph. D. dissertation, Dept. of Chem. Eng., University of Delaware, U. S. A. (1971).
- 8.- Mena, B., Ph. D. dissertation, Brown University, U.S.A. (1973).
- 9.- Broadbent, J.M. y Mena, B., Chem. Eng. J., 6, (1974), 11.
- 10.- Acosta, A. y James, D., J. Fluid Mech., 42, (1970), 269.
- 11.- Zana, E., Tiefenbruck, G. y Leal, G., Rheol. Acta, 14, (1975), 691.
- 12.- Cochrane, T., Comunicación Personal, Dept. of Physics and Appl. Mathematics, University College of Wales.
- 13.- Kaplun, S., Fluid Mechanics and Singular Perturbations, Layers trom, P., Howard, L., Liu, C.S., Editors, Academic Press, (1967).
- 14.- Mena, B., Joint Meeting of the American and Japanese Rheological Societies, (1979).

- 15.-Chhabra, R.P., Uhlherr, F.A.T. and Boger, D.V., J. of Non-Newtonian Fluid Mech., 6, (1980), 187.