UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

LA TRANSFORMADA Z APLICADA A ALGUNOS PROBLEMAS DE INGENIERIA QUIMICA

TESIS

ANGEL ENRIQUE CHAVEZ CASTELLANOS

INGENIERO QUIMICO

1984

INDICE.

I.- INTRODUCCION.

En el análisis de sistemas lineales discretos, se utiliza un método operacional análogo al de la transformada de Laplace, conocido como transformada Z, cuyos orígenes se remontan hasta DeMoivre y Laplace en el campo de la teoría de probabilidades con el empleo de funciones generadoras (9). Actualmente, estas transformaciones funcionales encuentran aplicaciones en muchos campos como son: cálculo de diferencias finitas, combinatoria, probabilidad y estadística (16); además, con el incremento del uso de las computadoras digitales en operaciones industriales, se aplican ampliamente en ingeniería eléctrica y electrónica, sistemas de comunicaciones, análisis y procesamiento de señales y sistemas de control (10, 28, 29, 30).

Por todo lo anterior, es mi objetivo proporcionar una revisión general del método de la transformada Z, no como algo novedoso ni ilimitado, pues no lo es, sino como medio de análisis y solución de algunos problemas de ingeniería química.

Por otro lado, durante las primeras etapas del desarrollo de este trabajo y conforme avanzaba en la búsqueda, selección y clasificación de la información, comprendí que para lograr que el lector entendiera los conceptos y terminología relacionados con esta técnica, era necesario incluir, de manera sucinta y con fines propedéuticos, un capítulo en el - cual se mencionaran temas tratados superficialmente o excluidos de los cursos normales de matemáticas de la licenciatura.

De este modo, la estructura final del escrito, quedó integrada de manera que los capítulos II y III sirvan como - fuente de información y de consulta para la comprensión de los ejemplos que se dan en el capítulo de aplicaciones.

II.- ANTECEDENTES MATEMATICOS.

Ecuaciones en Diferencias.

Al analizar algunos problemas que se presentan con frecuencia en el campo de la ingeniería química, se encuentran ecuaciones como las siguientes:

i) $$Y_{m+1} - (\alpha + 1) Y_m + \alpha Y_{m-1} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2.1)$$

que representa el balance del componente Y en una extracción líquido-líquido a contracorriente (26).

ii) La ecuación de Riccati (32), generada en problemas de destilación:

$$y_{x+1} y_x + a y_{x+1} + b y_x + c = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2.2)$$

iii) La ecuación de rapidez, para la concentración de reactivo, en cualquier tanque de un sistema de reactores de tanque agitado, para una reacción del tipo $A \longrightarrow B$, (23).

$$\frac{dC_{a_m}}{dt} + \left(\frac{k\theta_m + 1}{\theta_m}\right) C_{a_m} = \frac{C_{a_{m-1}}}{\theta_m} \quad \ldots\ldots \quad (2.3)$$

Todas ellas reciben el nombre de ecuaciones en diferencias (la última es una ecuación diferencial y en diferencias), porque se refieren a situaciones representadas por modelos de variables discretas.

Las diferencias de una función $y=y(x)$, es decir, el cambio que ésta sufre debido a un incremento de su argumento x, son: $X_k = X_0 + k\Delta X$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $\Delta X = h$, $h > 0$

$$y_k = y(X_k)$$

a) Diferencias hacia adelante:

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$
$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$
$$\vdots \qquad \ldots\ldots \qquad (2.4)$$
$$\Delta^r y_k = \Delta^{r-1} y_{k+1} - \Delta^{r-1} y_k = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} y_{k+r-j}, \quad r = 2, 3, \ldots$$

b) Diferencias hacia atrás:

$$\nabla y_k = y_k - y_{k-1} = \Delta y_{k-1}$$
$$\vdots$$
$$\nabla^r y_k = \nabla^{r-1} y_k - \nabla^{r-1} y_{k-1} = \Delta^r y_{k-r}, \quad r = 2, 3, \ldots \qquad \ldots\ldots \qquad (2.5)$$

Una ecuación en diferencias, relaciona una función desconocida con sus diferencias y su(s) variable(s) independiente(s) (25). Su forma general es:

$$F(k, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+r}) = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (2.6)$$

El orden de una ecuación en diferencias, es la diferencia entre el mayor y el menor argumento de y.

La forma de una ecuación en diferencias lineal es la que a continuación se muestra:

$$a_0(k) y_{k+r} + a_1(k) y_{k+r-1} + \ldots + a_r(k) y_k = f(k) \qquad \ldots\ldots \qquad (2.7)$$

A su vez, este tipo de ecuaciones pueden dividirse en ordinarias, si relacionan valores $y_k = y(X_0 + k\Delta X)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, de una función y=y(x), y parciales si relacionan valores $\phi_{ij\ldots} = \phi(X_0 + i\Delta X, y_0 + j\Delta y, \ldots)$; $i, j, \ldots = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, de una función $\phi = \phi(x, y, \ldots)$, (19).

Ejemplos:

a) Ecuaciones lineales (25):

$$\Delta^3 f_k + \Delta^2 f_k + 2 f_k = k^2 - 2k + 4$$

$$f(x+2) - 2f(x+1) + 2f(x) = 2^x$$

b) Ecuaciones no lineales (32):

$$y_{x+2} + 2 y_x y_{x+1} + y_x = x^5 + 8^x$$
$$y_{x+1} y_x + a y_{x+1} + b y_x + c = 0$$

c) Orden de la ecuación:

$$f_{k+4} + 8k f_k = 0, \qquad n = k+4-k = 4$$
$$y_{k+2} + 2 y_{k-2} = 0, \qquad n = k+2-k+2 = 4$$

Resolver una ecuación en diferencias, significa encontrar una función que al sustituirla en dicha ecuación, la transforme en una identidad (25); además, la solución general tendrá tantas constantes arbitrarias como sea el orden de la ecuación.

Tomando en consideración la ecuación (2.7), hacemos las siguientes observaciones:

a) Si $f(k) \neq 0$, la ecuación es no homogénea.

b) Si $f(k)=0$, la ecuación es homogénea.

c) Si los coeficientes de la variable dependiente son constantes, se trata de una ecuación **con coeficientes constantes.**

La solución completa de (2.7), consiste de la suma de la solución de la ecuación homogénea llamada complementaria $f_k^{(c)}$, y la solución de la ecuación no homogénea llamada --

particular $f_k^{(p)}$, entonces:

$$f_k = f_k^{(c)} + f_k^{(p)} \qquad \ldots\ldots \qquad (2.8)$$

Las n funciones $f_k^{(1)}, f_k^{(2)}, \ldots, f_k^{(n)}$, son linealmente independientes, si y sólo si el determinante llamado Casorati, de las n funciones es diferente de cero.

El Casorati queda definido de la manera siguiente:

$$C = \begin{vmatrix} y_k^{(1)} & y_k^{(2)} & \ldots & y_k^{(n)} \\ y_{k+1}^{(1)} & y_{k+1}^{(2)} & \ldots & y_{k+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{k+n-1}^{(1)} & y_{k+n-1}^{(2)} & \ldots & y_{k+n-1}^{(n)} \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots \qquad (2.9)$$

La solución propuesta para una ecuación lineal homogénea y de coeficientes constantes, es una función del tipo:

$$y_k = \beta^k \qquad \ldots\ldots \qquad (2.10)$$

para que esta proposición sea verdadera, debe satisfacer la ecuación:

$$a_0 y_{k+r} + a_1 y_{k+r-1} + \ldots + a_{r-1} y_{k+1} + a_r y_k = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (2.11)$$

sustituyendo (2.10) en la última ecuación:

$$(a_0 \beta^r + a_1 \beta^{r-1} + \ldots + a_{r-1}\beta + a_r)\,\beta^k = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (2.12)$$

como $\beta^k \neq 0$ (solución trivial), debe cumplirse la condición que sigue:

$$a_0 \beta^r + a_1 \beta^{r-1} + \ldots + a_{r-1}\beta + a_r = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (2.13)$$

A esta ecuación se le llama ecuación característica, de ella se obtienen "r" soluciones linealmente independientes, la solución general de (2.11), es una combinación lineal de - de ellas.

$$y_k^{(c)} = C_1 y_k^{(1)} + C_2 y_k^{(2)} + \dots C_r y_k^{(r)} \qquad \dots\dots \quad (2.14)$$

Las constantes que aparecen quedan determinadas por condiciones iniciales o de valores a la frontera, dependiendo de la naturaleza específica del problema.

Si la ecuación característica tiene "m" raíces iguales, $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = \beta$, la solución toma la forma:

$$y_k^{(c)} = (C_1 + C_2 k + C_3 k^2 + \dots + C_m k^{m-1})\, \beta^k \qquad \dots\dots \quad (2.15)$$

y para raíces complejas, en el caso de una ecuación de segundo orden:

$$y_k^{(c)} = r^k \,(C_1 \cos k\theta + C_2 \operatorname{sen} k\theta) \qquad \dots\dots \quad (2.16)$$

donde "r", es la norma de las raíces complejas y θ , el ángulo formado por los componentes real e imaginario del número complejo.

La solución particular, en el caso de ecuaciones no homogéneas, puede obtenerse mediante los métodos de coeficientes indeterminados o por el de variación de parámetros. Estos métodos de solución son similares a sus homólogos empleados - en ecuaciones diferenciales (25, 26).

Variable Compleja.

a) Generalidades sobre números complejos:

Definición: Sea $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos y z uno de sus elementos. z es un par ordenado (x,y), con $x, y \in \mathbb{R}$, y siendo éstos los componentes real e imaginario respectivamente, con las operaciones siguientes:

1.- $z_1+z_2 = (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

2.- $z_1z_2 = (x_1,y_1)(x_2,y_2) = (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$

y la igualdad definida como:

3.- $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ si y sólo si $x_1=x_2$, $y_1=y_2$

Considerando estas operaciones, puede demostrarse que el conjunto de los números complejos tiene estructura de campo: bajo las operaciones de suma y producto (exceptuando el elemento z=0, en la segunda), forma un grupo abeliano y existe la distributividad del producto sobre la primera operación (12).

Algunas propiedades son:

4.- (x,0)= x, esta pareja se identifica con el número real x.

5.- (0,1)= i, unidad imaginaria.

6.- (0,y), número imaginario puro.

7.- z= (x,y)= 0 si y sólo si x=y=0.

8.- (x,0) + (0,y)= (x,y)

9.- (0,y)= (y,0)(0,1)

10.- z= (x,y)= x + yi

11.- $i^2 = -1$

12.- $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i$

13.- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\, i$

14.- $|z| = |x+yi| = \sqrt{x^2+y^2}$, valor absoluto.

Geométricamente, los números complejos se representan en el llamado plano complejo, cuyo origen representa al punto $z=0$, del cual parten dos ejes ortogonales, el de las abscisas corresponde a los valores de x (eje real) y el de las ordenadas a los de y (eje imaginario).

15.- $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$, distancia entre dos puntos.

16.- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

17.- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

18.- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

19.- $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$, $\quad |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

20.- $\bar{z} = (x,-y) = x - yi$, número complejo conjugado.

21.- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

22.- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\, \bar{z}_2$

23.- $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

24.- $|\bar{z}| = |z|$

La forma polar de un número complejo $z = x + iy$, es:

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$$

con $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\theta$, entonces:

25.- $\bar{z} = r(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\theta)$, $r = |z|$, $\theta = \text{ang tan } (y/x)$.

26.- $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\right]$

27.- $z^n = r^n(\cos (n\theta) + i\,\mathrm{sen} (n\theta))$

28.- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\right]$, $r_2 \neq 0$

28.- De la ecuación $z_o^n = z$:

$$z_\alpha = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)$$

$k=0,1,2,\ldots,(n-1)$, es decir, existen n valores de $z^{1/n}$.

b) Funciones Analíticas:

Sea w una función de z tal que :

$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, con $z = x+iy$,

si existe una correspondencia uno a uno entre los elementos - del dominio y los elementos del rango de la función, w es una función unívoca de z. Si más de un valor de w corresponde a - cada z, la función toma el nombre de multívoca o multiforme.

Una función multívoca puede manejarse como unívoca, seleccionando una rama particular a la que se le llama principal y su valor correspondiente valor principal (41).

La definición de límite para funciones de variable compleja es igual a la establecida para funciones de variable real: lo que significa que si $\lim_{z\to z_0} f(z)= w_0$, el valor de la diferencia de $f(z)$ menos w_0, puede hacerse arbitrariamente pequeña cuando se escogen los puntos z suficientemente próximos a z_0, excepto posiblemente en $z= z_0$. Se establecen además los siguientes teoremas (7):

Teorema 2.1: Sean $f(z)= u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$. Entonces, la condición para que el límite de $f(z)$ exista en z_0, $\lim_{z\to z_0} f(z)= u_0+iv_0$, se satisface si y sólo si

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)= u_0, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)= v_0$$

Teorema 2.2: Sean f y F funciones cuyos límites existen en z_0.

$$\lim_{z\to z_0} f(z)= w_0, \qquad \lim_{z\to z_0} F(z)= W_0$$

entonces:

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z) + F(z)\right] = w_0 + W_0$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)F(z) = w_0 W_0$$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0}, \qquad W_0 \neq 0$$

Todo lo anterior, conduce directamente a las condiciones que debe reunir una función $f(z)$ para ser continua en un punto z_0, a saber:

1.- $f(z_0)$ existe.

2.- $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe

3.- $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

como consecuencia de lo anterior y del teorema 2.1, $f(z)=u+iv$ es continua si y sólo si las funciones u y v lo son.

La función derivada en un punto z, se define como:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

siempre que el límite exista.

Las fórmulas de derivación de sumas, productos, cocientes, potencias y composición de funciones corresponden a las mismas empleadas en Cálculo de variable real.

Los siguientes teoremas presentan las condiciones necesarias (teorema 2.3) y suficientes (teorema 2.4), que aseguran la existencia de la derivada $f'(z)$ (7):

Teorema 2.3: Si la derivada $f'(z)$ de una función $f= u+iv$ existe en un punto z, entonces las derivadas parciales de primer orden, con respecto a "x" y "y", de cada uno de los componentes "u" y "v", existen en dicho punto y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \ldots\ldots \quad (2.17)$$

y la derivada de $f(z)$ está dada en términos de las siguientes derivadas parciales:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \quad ..... \quad (2.18)$$

Teorema 2.4: Sean u y v funciones reales de "x" y - "y"; además éstas y sus derivadas parciales de primer orden - son continuas en el punto (x_0,y_0). Si las derivadas parciales satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann en ese punto, entonces la derivada $f'(z_0)$ de la función $f= u+iv$ existe, donde $z= x+iy$, $z_0= x_0+iy_0$.

Se dice que una función "f" de una variable compleja "z" es analítica en un punto z_0, si su derivada $f'(z)$ existe en z_0 y en todo punto z de una vecindad de z_0. Una función entera es aquella que es analítica en cada punto del plano - complejo. De la misma manera, una función que es la suma, - producto o cociente (para denominadores no nulos), de dos --- funciones analíticas, es también analítica.

c) Funciones Elementales:

Si $z= x+iy$, la función exponencial está dada por:

$$e^{z}=e^{(x+iy)}=e^{x}(\cos y+i\,\mathrm{sen}\,y) \quad ..... \quad (2.19)$$

de donde:

$$e^{iy}=\cos y+i\,\mathrm{sen}\,y \quad ..... \quad (2.20)$$

$$e^{-iy}=\cos y-i\,\mathrm{sen}\,y \quad ..... \quad (2.21)$$

sumando y restando las dos últimas ecuaciones, y arreglando - la expresión resultante para ambos casos:

$$\cos y = \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2.22a)$$

$$\operatorname{sen} y = \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2.22b)$$

de los resultados anteriores:

$$e^{z} = U + iV,\ U = e^{x}\cos y,\ V = e^{x}\operatorname{sen} y \quad \ldots\ldots \quad (2.23)$$

las funciones seno y coseno y seno y coseno hiperbólicos, se definen de la forma siguiente:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right),\ \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2.24)$$

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right),\ \operatorname{senh} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2.25)$$

todas ellas son funciones enteras. Asimismo, se pueden definir otras funciones (tan z, cot z, coth z, etc.), y encontrar propiedades similares a sus análogas reales.

Otras funciones importantes son las logarítmicas, - las trigonométricas inversas y aquellas de la forma z^{c}, donde c es complejo.

La primera de ellas, se define para la variable compleja $z = r\exp(i\theta \pm 2k\pi)$, con θ medido en radianes, mediante- la ecuación:

$$w = \ln z = \ln\left(re^{i\theta}\right) = \ln r + i(\theta \pm 2k\pi) \quad \ldots\ldots \quad (2.26)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

es decir, w es una función multívoca, para cada z existe un - número infinito de w.

El valor principal de ln z, se obtiene para k=0:

$w = \ln z = \ln r + i\theta$

Para cualquier intervalo de longitud 2π, puede utili zarse. También valen las siguientes igualdades:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$$

$$\ln\frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$$

$$\ln(z^{n/m}) = \frac{n}{m}\ln z$$

Además, las fórmulas de derivación de todas estas - funciones son iguales a aquellas cuyos argumentos no poseen componentes imaginarios.

d) Integración Compleja y Teoremas Relacionados:

Recibe el nombre de lisa una curva, si puede representarse paramétricamente; $z = f(t)$, $a \leq t \leq b$, con $f(t)$ derivable y $f'(t)$ continua y nunca nula (42).

Para una función compleja $f(z)$, continua en todos - los puntos de una curva lisa λ, la integral de línea

$$\int_\lambda f(z)\,dz \qquad \ldots\ldots \qquad (2.27)$$

se define mediante una partición del intervalo $[a,b]$ y a partir del límite, cuando tiende a cero la norma de la partición, de la suma de Riemann formada, con las siguientes propiedades:

1.- $\int_\lambda \{Af(z) + Bg(z)\}dz = A\int_\lambda f(z)dz + B\int_\lambda g(z)dz$

con A y B constantes.

2.- $\int_a^b g(z)dz = -\int_b^a g(z)dz$

3.- $\int_{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m} g(z)dz = \int_{\lambda_1} g(z)dz + \ldots + \int_{\lambda_m} g(z)dz$

4.- $\int_a^b g(z)dz = \int_a^m g(z)dz + \int_m^b g(z)dz, \quad a,b,m \in \lambda$

Empleando los componentes u(x,y) y v(x,y) de la función f(z), se puede escribir la integral de línea en términos de integrales reales de línea sobre λ :

$$\int_{\lambda} f(z)\,dz = \int_{\lambda} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\lambda} (u\,dy + v\,dx)$$

Teorema de Cauchy-Goursat (2.5): Si una función f, es analítica en todos los puntos en el interior y sobre la - frontera C de una región R, entonces

$$\oint_{C} f(z)\,dz = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (2.28)$$

Teorema de Morera (2.6): Si una función f es continua en una región R simplemente conexa, y si para cada curva simple cerrada C en R, se cumple

$$\oint_{C} f(z)\,dz = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (2.29)$$

entonces f es analítica en R.

Algunas consecuencias del teorema de Cauchy son las siguientes (41):

Para f(z) analítica en una región R simplemente conexa:

1.- La integral $\int_{a}^{b} f(z)\,dz$, es independiente del camino que - une los puntos a y b.

2.- Si a y b son dos puntos en R y $F'(z) = f(z)$, entonces se cumple:

$$\int_{a}^{b} f(z)\,dz = F(b) - F(a)$$

3.- Para una región limitada por dos curvas simples cerradas

C y C_1 (C_1 es una región limitada por C); sea f(z) analítica en dicha región y sobre las curvas, entonces:

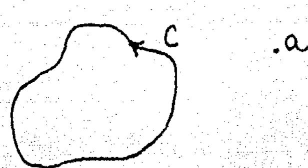
$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz$$

lo anterior puede generalizarse para n curvas simples cerradas disjuntas interiores a C:

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{m} \oint_{C_i} f(z)\,dz \qquad \ldots\ldots \qquad (2.30)$$

Para ilustrar lo anterior, se presentan los siguientes ejemplos (41):

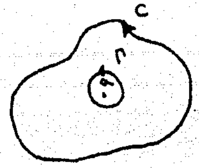
Ejemplo 2.A. La integral de $f(z)= (z-a)^{-1}$, alrededor de C, una curva simple cerrada, y con a fuera de ella.



la única discontinuidad de f(z) está en $z=a$, entonces por el teorema de Cauchy:

$$\oint f(z)dz = \oint \frac{dz}{z-a} = 0$$

Ejemplo 2.B. Las integrales de las funciones -- $f(z)= (z-a)^{-1}$ y $g(z)= (z-a)^{n}$, n=2,3,4,...; con a dentro de C en ambos casos.



Se construye un círculo Γ de radio ϵ dentro de C, de tal manera que:

$$|z-a|=\epsilon, \quad z-a=\epsilon e^{i\theta}, \quad 0\leq\theta<2\pi$$

$$z=a+e^{i\theta}\epsilon, \quad dz=i\epsilon e^{i\theta}d\theta$$

y haciendo las sustituciones pertinentes en la integral anterior: $\displaystyle\oint\frac{dz}{z-a}=\oint_{\Gamma}\frac{dz}{z-a}=2\pi i$

siguiendo el mismo procedimiento, puede demostrarse que para la integral de $g(z)$ se verifica:

$$\oint\frac{dz}{(z-a)^m}=0, \qquad m=2,3,4,\ldots$$

Teorema 2.7: Sea la función f analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C. Si z_0 es cualquier punto interior a C, entonces

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \qquad \ldots\ldots \quad (2.31)$$

donde la integral se recorre en el sentido positivo alrededor de C.

La expresión (2.31), recibe el nombre de fórmula integral de Cauchy; la primera y segunda derivadas de ella son respectivamente:

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz \qquad \ldots\ldots \quad (2.32)$$

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz \qquad \ldots\ldots \quad (2.33)$$

por inducción matemática puede establecerse (7) la fórmula --
general:

$$f^{(m)}(z_0)=\frac{m!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{m+1}},\ m=1,2,\ldots,\ldots \qquad (2.34)$$

y el teorema que sigue:

Teorema 2.8: Si una función es analítica en un punto, entonces sus derivadas de todos los órdenes, f', f'', f''', ..., también son funciones analíticas en el punto considerado.

La importancia de estos últimos resultados radica fundamentalmente en que ponen de manifiesto que si los valores de una función se conocen sobre la frontera de una región, entonces los valores de la función y los de todas sus derivadas pueden encontrarse en todos los puntos de dicha región.

e) Singularidades. Series de Taylor y de Laurent:

Recibe el nombre de punto singular o singularidad de una función, al punto en el cual ésta no es analítica. Se distinguen varios tipos:

1.- Singularidades aisladas: z_0 es un punto singular aislado de f(z), si existe alguna vecindad de z_0 en la cual la función sea analítica, excepto en el punto mismo z_0 (2).

2.- Polos: Aparecen al considerar funciones racionales

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

dadas como el cociente de dos polinomios sin factores comunes. Los polos de la función $R(z)$ son los ceros del denominador. Se define el orden de un polo como el orden del correspondiente cero de $Q(z)$.

3.- Puntos de ramificación: Son aquellos puntos, comunes a todas las ramas de una función multívoca.

4.- Singularidades removibles: Un punto singular es removible si puede hacerse analítica la función en el punto en cuestión, asignándole el valor adecuado.

5.- Singularidad en el infinito: Una función tiene un punto singular en el infinito, si al hacer la transformación $z=\xi^{-1}$, $f(\xi^{-1})$ en $\xi=0$, no es analítica.

6.- Singularidades esenciales: Son aquellas que no pertenecen a ninguna de las anteriores.

La expansión de una función $f(z)$ por una serie de Taylor, alrededor del punto z_0, queda establecida mediante el siguiente teorema:

Teorema 2.9: Sea la función $f(z)$ analítica en todos los puntos dentro de un círculo C_0 con centro en z_0 y radio r_0. Entonces, en cada punto z dentro de C_0:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\dots$$
$$+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\dots$$

$$f(z)= f(z_o) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!} (z-z_o)^n \quad \ldots . \qquad (2.35)$$

Cuando se sabe de la analiticidad de $f(z_O)$ en todos los puntos dentro del círculo C_o, la convergencia de la serie queda asegurada. El radio máximo de C_o, es la distancia del - punto z_o al punto singular de f más próximo.

La misma forma utilizada para presentar la serie de Taylor, se emplea para introducir la llamada serie de Laurent.

Teorema 2.10: Sea f(z) una función analítica sobre- C_1 y C_2 (C_1 y C_2 son dos círculos concéntricos de radios r_1 y r_2 respectivamente, tal que $r_2 < r_1$, y centro z_o), y a través - de la región comprendida entre los dos círculos, entonces en- cada punto z entre ellos, f(z) está representada por una serie convergente de potencias positivas y negativas de $(z-z_o)$:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-z_o)^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z-z_o)^m} \quad \ldots.. \qquad (2.36)$$

donde:

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_o)^{m+1}} dz, \ m=0,1,2,\ldots \quad \ldots.. \qquad (2.37)$$

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_o)^{-m+1}} dz, \ m=1,2,3,\ldots \quad \ldots.. \qquad (2.38)$$

C_1 y C_2 se recorren en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Considerando que los integrandos de las últimas --- expresiones son funciones analíticas en la región anular, cualquier contorno cerrado C alrededor del anillo puede usarse como trayectoria de integración, en vez de C_1 y C_2; así, la serie (2.36) puede escribirse como:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_m (z-z_0)^m, \quad (r_2<|z-z_0|<r_1) \quad \ldots\ldots \quad (2.39)$$

y los coeficientes a_m:

$$a_m=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}dz, \; m=0,\pm1,\pm2,\ldots \quad \ldots\ldots \quad (2.40)$$

Las partes correspondientes a los exponentes positivos y negativos de una serie de Laurent, reciben respectiva-- mente los nombres de parte analítica y parte principal de la serie.

f) Residuos, Teorema de los Residuos, Cálculo de Integrales por Residuos:

Tomando en cuenta la expansión de una función en una serie de Laurent:

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_m(z-z_0)^m+\cdots$$

$$+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots\frac{b_m}{(z-z_0)^m}+\cdots \quad \ldots\ldots \quad (2.41)$$

y la ecuación (2.38) para b_1:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(z)\,dz \qquad \ldots\ldots \qquad (2.42)$$

al coeficiente de $(z-z_0)^{-1}$, b_1, se le llama el residuo de la-función. De acuerdo con ésto, el residuo de una función f(z), en el punto z_0, es el valor de la integral de la función con-siderada dividida entre la constante $2\pi i$, en sentido positivo alrededor de cualquier contorno cerrado C, que contenga a z_0, si C es tal que f(z) sea analítica dentro y sobre el contorno cerrado, exceptuando en z_0 (7). Cada función tiene un residuo en cada uno de sus puntos singulares aislados.

Los residuos se calculan utilizando las expresiones siguientes:

Para un polo de orden k

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left\{(z-z_0)^k f(z)\right\} \qquad \ldots\ldots \qquad (2.43)$$

para un polo simple, la expresión se reduce a:

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) \qquad \ldots\ldots \qquad (2.44)$$

Teorema de los Residuos (2.11): Sea C un contorno - cerrado, dentro y sobre el cual, una función f es analítica - excepto en un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_n$, interiores a C. Si $K_1, K_2, \ldots, K_n$, denotan los residuos de la función en esos puntos, entonces:

$$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i\,(K_1 + K_2 + \ldots + K_m) \quad \ldots\ldots \quad (2.45)$$

donde la integral se efectúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, alrededor del contorno C.

El teorema de los residuos se aplica para evaluar ciertas clases de integrales (42), dentro de las cuales aparecen las del tipo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(X)\,dX$$

con R(x) una función racional. Las integrales de esta forma, pueden escribirse como a continuación se indica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dX = \lim_{\sigma\to\infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} R(X)\,dX \quad \ldots\ldots \quad (2.46)$$

la expresión del lado derecho recibe el nombre de valor principal de Cauchy y puede existir aún en el caso de que no existan los siguientes límites:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(X)\,dX = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{0} R(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} R(x)\,dX \quad \ldots\ldots \quad (2.47)$$

si se verifica que cada una de las integrales de (2.47) convergen, se cumple la igualdad (2.46).

Transformada de Laplace.

Una transformación integral se representa mediante la expresión (8)

$$T\{F(t)\}=\int_{a}^{b} F(t)\,K(t,\lambda)\,dt = f(\lambda) \quad \ldots\ldots \quad (2.48)$$

en la cual, $K(t,\lambda)$ es una función de t y del parámetro λ y se llama el kernel de la transformación; $F(t)$ es la función objeto y la función resultante es la transformada de $F(t)$.

Además, la transformación integral (2.48) es lineal, si para cada par de funciones $F(t)$ y $G(t)$ y para cada par de constantes A y B, se cumple la siguiente relación:

$$T\{AF(t)+BG(t)\}=AT\{F(t)\}+BT\{G(t)\} \quad \ldots\ldots \quad (2.49)$$

Para el caso en el que la función objeto esté definida para todos los valores positivos de la variable independiente, el kernel de la transformación sea e^{-st} y $a=0$ y $b=\infty$, se tiene una función $f(s)$ llamada la transformada de Laplace que definida según los términos anteriores, es

$$\mathcal{L}\{F(t)\}=\int_{0}^{\infty} F(t)\,e^{-st}\,dt = f(s) \quad \ldots\ldots \quad (2.50)$$

Para que una función $F(t)$, pueda ser transformada - mediante la aplicación de (2.50), debe ser seccionalmente continua en un intervalo finito cerrado, y de orden exponencial (8,35).

a) Transformaciones de Funciones. Tablas y Propiedades:

Tomando como base la expresión de definición de la transformada de Laplace, es posible y muy útil, obtener las transformaciones de algunas funciones y construir a partir de ellas tablas en las cuales se encuentren las funciones y sus respectivas transformaciones.

Ejemplo 2.C. Las transformadas de las funciones $F(t)= 1$ y $G(t)=e^{kt}$, son:

i) $F(t)= 1$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

ii) $G(t)=e^{kt}$

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^\infty e^{kt} e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-k)t}\, dt = \frac{1}{s-k}$$

Las transformadas de Laplace de las funciones que se utilizarán en este trabajo, se muestran en la tabla número I.

Algunas propiedades de la transformada de Laplace se establecen a continuación. Para todos los casos, la función objeto reúne todas las condiciones para que su transformada exista (8):

1.- La transformada de la derivada enésima de una función F(t), tiene la expresión algebraica siguiente en términos de cada una de sus derivadas.

TABLA No. I

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

No.	F(t) t>0	f(s)
1	1	$\frac{1}{s}$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3	$\frac{1}{a}$ sen at	$\frac{1}{s^2+a^2}$
4	cos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$
5	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$ $(n=1,2,\ldots)$
6	$\frac{1}{(n-1)!}\,t^{n-1}\,e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$ $(n=1,2,\ldots)$

$$\mathcal{L}\left\{F^{(n)}(t)\right\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0)$$

$$- s^{n-3}F''(0) - \ldots - F^{(n-1)}(0) \quad \ldots\ldots \quad (2.51)$$

Esta es una de las propiedades más importantes de la transformada, porque convierte una ecuación diferencial lineal en un problema algebraico, incorporando simultáneamente las condiciones iniciales del problema.

2.- La división de la transformada de una función entre s, corresponde a la integración de la función entre los límites 0 y t:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s} f(s) \quad \ldots\ldots \quad (2.52)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^\tau F(\lambda)\,d\lambda\,d\tau\right\} = \frac{1}{s^2} f(s) \quad \ldots\ldots \quad (2.53)$$

3.- La diferenciación de la transformada de una función, corresponde a la multiplicación de la función por -t:

$$f^{(n)}(s) = \mathcal{L}\left\{(-t)^n F(t)\right\},\ n = 1, 2, \ldots \quad \ldots\ldots \quad (2.54)$$

4.- La división de la función F(t) entre t, corresponde a la integración de la transformada f(s):

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(x)\,dx \quad \ldots\ldots \quad (2.55)$$

5.- Teorema del Valor Final: Para f(s) transformada de F(t), se verifica:

$$\lim_{s \to +0} s f(s) = \lim_{t \to \infty} F(t) \quad \ldots\ldots \quad (2.56)$$

6.- Teorema del Valor Inicial: Para f(s) transformada de F(t), se cumple:

$$\lim_{s\to\infty} s f(s) = \lim_{t\to 0} F(t) \qquad \ldots\ldots \quad (2.57)$$

7.- La sustitución por $(s-a)$, de la variable s en la transformada, corresponde a la multiplicación de la función objeto — por la función e^{at}, es decir:

$$f(s-a) = \mathcal{L}\left\{ e^{at} F(t) \right\} \qquad \ldots\ldots \quad (2.58)$$

8.- Si $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, y c es una constante positiva, entonces:

$$f(cs) = \frac{1}{c}\, \mathcal{L}\left\{ F\left(\frac{t}{c}\right) \right\} \qquad \ldots\ldots \quad (2.59)$$

9.- Si $F(t)$ es una función periódica, con período b cuando — $t>0$, entonces:

$$f(s) = \frac{\int_0^b e^{-st} F(t)\, dt}{1 - e^{-bs}} \qquad \ldots\ldots \quad (2.60)$$

Las transformadas de Laplace de algunas funciones de frecuente ocurrencia son:

10.- Función escalón unitario:

$$S_k(t) = \begin{cases} 0 & 0<t<k \\ 1 & t>k \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{S_k(t)\} = \frac{e^{-ks}}{s} \qquad \ldots\ldots \quad (2.61)$$

11.-

$$F_b(t) = \begin{cases} 0 & 0<t<b \\ F(t-b) & t>b \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{F_b(t)\} = e^{-bs} f(s) \qquad \ldots\ldots \quad (2.62)$$

La gráfica de la función $F_b(t)$, se obtiene trasladando la de la función $F(t)$ una distancia b a la derecha. Esta propiedad de $F_b(t)$, en combinación con la función escalón unitario, puede usarse para describir la traslación de cualquier función $F(t)$ escribiéndola de la manera siguiente:

$$F_b(t) = S_b(t)\, F(t-b), \quad t > 0 \quad \ldots\ldots \quad (2.63)$$

cuyo significado es el de desplazar la función $F(t)$, b unidades a la derecha y hacer cero todos los valores a la izquierda de b.

12.- Función delta de Dirac o impulso unitario, δ. Con las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, dt = 1 \quad \ldots\ldots \quad (2.64)$$

$$\int_{0}^{\infty} \delta(t-t_0)\, F(t)\, dt = F(t_0) \quad \ldots\ldots \quad (2.65)$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0} \quad \ldots\ldots \quad (2.66)$$

b) La Transformada Inversa:

La correspondencia entre funciones $f(s)$ y $F(t)$, se llama transformada inversa de Laplace, se denota por

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$$

y también se verifica que sea un operador lineal, es decir:

$$\mathcal{L}^{-1}\{A f(s)+B g(s)\}=A\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}+B\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\}$$
$$= A F(t) + B G(t)$$

Para efectuar una inversión, la función f(s) debe - provenir de una función F(t), para la cual la integral de definición de la transformada converja; además, esta función debe ser continua para toda $t > 0$ para asegurar que la transformada inversa sea única (35).

Existen varias formas de invertir una transformada, de las cuales, la más directa es mediante el empleo de tablas, similares a la presentada en páginas previas. En ellas, se -- localiza la función en el espacio de la transformada y se lee la función en t adjunta a la primera.

Con frecuencia es necesario modificar o arreglar -- las funciones por invertir, mediante procedimientos algebraicos, para obtener las expresiones incluidas en las tablas. En el caso de cocientes de polinomios en los que el grado del numerador sea menor al del denominador, un método muy utilizado es el de fracciones parciales que, en general, consiste en expresar una función racional como una suma de términos, llamados fracciones parciales, cuyos denominadores están formados- por cada uno de los factores del polinomio divisor de la función original:

$$H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{(x - q_i)}$$

tal que $$Q(x) = \prod_{i=1}^{m} (X - q_i)$$

los factores de Q(x) pueden ser lineales o cuadráticos, en tal caso, la expresión anterior sufriría una ligera modificación, como se ilustrará posteriormente.

La transformada inversa de la función racional considerada será igual a la suma de las transformadas inversas de cada uno de los sumandos.

Otro método para encontrar transformadas inversas de cocientes de polinomios en s, muy similar al anterior, y haciendo las mismas consideraciones:

$$f(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad \ldots\ldots \quad (2.67)$$

$$q(s) = \prod_{i=1}^{m} (s - a_i) \quad \ldots\ldots \quad (2.68)$$

Tomando en cuenta cualquier término de (2.68), la ecuación (2.67) puede escribirse como:

$$f(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\phi(s)}{(s-a)} \quad \ldots\ldots \quad (2.69)$$

$$f(s) = \frac{c}{s-a} + h(s) \quad \ldots\ldots \quad (2.70)$$

donde $\phi(s)$ es un cociente de polinomios y h(s) representa la suma de las fracciones parciales que corresponden a los otros factores lineales de q(s).

$$\phi(s) = c + h(s)(s-a) \quad \ldots\ldots \quad (2.71)$$

$$c = \phi(a) \quad \ldots\ldots \quad (2.72)$$

Lo anterior indica que, el procedimiento para obtener las transformadas inversas de cada uno de los términos -- $c(s-a)^{-1}$, consiste en la evaluación del polinomio $\phi(a)$ en cada raíz de q(s), para calcular el valor de los coeficientes c_i y multiplicar éstos por e^{at}, que es la función inversa de -- $(s-a)^{-1}$.

De la ecuación (2.69):

$$\phi(s) = p(s) \, \frac{s-a}{q(s)} \quad \ldots\ldots \quad (2.73)$$

$$\lim_{s \to a} \phi(s) = \lim_{s \to a} p(s) \cdot \lim_{s \to a} \frac{s-a}{q(s)}$$

para obtener el segundo límite, se emplea la regla de L'Hopital

$$\lim_{s \to a} \phi(s) = p(a) \lim_{s \to a} \frac{1}{q'(a)}$$

$$\phi(a) = \frac{p(a)}{q'(a)} \quad \ldots\ldots \quad (2.74)$$

Así pues, la transformada inversa de f(s), puede escribirse en la forma conocida como expansión de Heaviside:

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p(s)}{q(s)}\right\} = \sum_{i=1}^{m} \frac{p(a_i)}{q'(a_i)} e^{a_i t} \quad \ldots\ldots \quad (2.75)$$

Existen expresiones semejantes para los casos en los que q(s) tiene factores lineales repetidos y cuadráticos (8).

Ejemplo 2.D. Utilizando la expansión de Heaviside,- obtener la inversa de la función (8):

$$f(s) = \frac{2s^2 - 4s}{(2s+1)(s^2+1)}$$

descomponiendo en factores el numerador y el denominador

$$f(s) = \frac{2s^2 - 4s}{(2s+1)(s^2+1)} = \frac{s(s-2)}{(s+\frac{1}{2})(s-i)(s+i)}$$

de la ecuación (2.67)

$$p(s) = s(s-2), \quad q(s) = (s+\tfrac{1}{2})(s-i)(s+i); \quad a_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad a_2 = i, \quad a_3 = -i$$

aplicando la ecuación (2.75)

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \left.\frac{s(s-2)e^{-\frac{1}{2}t}}{(s-i)(s+i)}\right|_{-\frac{1}{2}} + \left.\frac{s(s-2)e^{-it}}{(s+\frac{1}{2})(s-i)}\right|_{-i} + \left.\frac{s(s-2)\,e^{it}}{(s+\frac{1}{2})(s+i)}\right|_{i}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1+2i}{(i+\frac{1}{2})2i}e^{it} + \frac{-1+2i}{(-i+\frac{1}{2})(-2i)}e^{-it}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{5ie^{it} - 5ie^{-it}}{5}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = e^{-\frac{1}{2}t} + ie^{it} - ie^{-it} = e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{2i}{2i}\,i\left(e^{it} - e^{-it}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = e^{-\frac{1}{2}t} - 2\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)$$

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = e^{-\frac{1}{2}t} - 2\,\mathrm{sen}\,t$$

Un tercer método para encontrar transformadas inversas, es el que aprovecha la representación de f(s) por series infinitas de transformadas conocidas. Si f(s) es una serie infinita de potencias positivas de s^{-1}, absolutamente convergente, es decir:

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{s^{n+1}}$$

entonces, la serie de potencias en t obtenida al aplicar el operador $\mathcal{L}^{-1}$ a la serie anterior, término a término, converge a la función F(t), cuya transformada es f(s):

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$$

La operación de convolución de las funciones F(t) y G(t), proporciona directamente la transformada inversa del producto de estas funciones, en términos de las funciones originales. La convolución de dos funciones F(t) y G(t) se define como:

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(\tau)\,G(t-\tau)\,d\tau \quad \ldots\ldots \quad (2.76)$$

$$f(s)g(s) = \mathcal{L}\{F(t) * G(t)\} \quad \ldots\ldots \quad (2.77)$$

De esta forma, la transformada inversa del producto de dos funciones, está dada por:

$$F(t) * G(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(\tau)\,G(t-\tau)\,d\tau \quad \ldots\ldots \quad (2.78)$$

Cabe hacer mención, que la operación de convolución es conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la adición.

La forma más general de invertir una transformada, es mediante el empleo de una integral en el plano complejo llamada la integral de inversión; en ella, el parámetro s es complejo y la integración se efectúa a lo largo de una línea vertical a la derecha de todas las singularidades de f(s) (36).

En concordancia con el teorema (2.7), una función f(s) puede conocerse a partir de sus valores sobre la frontera de una región. Si ésta es la región limitada por la línea $x=\beta$, la integral de Cauchy es:

$$f(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{f(z)}{s-z}\,dz, \quad (R_e\, s>\beta) \qquad \ldots\ldots \quad (2.79)$$

Si $f(s)=\mathcal{L}\{F(t)\}$ y se aplica la transformada inversa intercambiando el orden de esta operación y el de la integración:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{f(z)}{s-z}\,dz\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(z)}{s-z}\right\}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-z}\right\}f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}e^{zt}\,f(z)\,dz$$

haciendo la sustitución: $z=\beta + iy$, $dz= idy$

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}e^{\beta t}e^{iyt}f(\beta+iy)i\,dy$$

finalmente

$$F(t)=\frac{e^{\beta t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyt}f(\beta+iy)dy \qquad \ldots\ldots \qquad (2.80)$$

Esta integral impropia existe si y sólo si la integral de $e^{iyt}f(\beta + iy)$, desde $-\infty$ a 0 y desde 0 a ∞ existe. Si la integral existe, su valor principal existe, ecuación (2.46), y es llamado la integral compleja de inversión para la transformada de Laplace, y es:

$$F(t)=\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda}e^{tz}f(z)dz \qquad \ldots\ldots \qquad (2.81)$$

para evaluarla, se utiliza el teorema de los residuos.

c) Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales, Integrales y en Diferencias:

Habiendo expuesto las propiedades de la transformada de Laplace y sus métodos de inversión, es posible ahora, ilustrar la resolución de problemas como los enunciados en el título de esta sección.

Ejemplo 2.E. Solución de una ecuación diferencial - lineal, no homogénea de coeficientes constantes (8):

$$Y'''(t)+Y'(t)= 10\ e^{2t},\quad Y(0)=Y'(0)=Y''(0)$$

aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la Ec.

$$\mathcal{L}\{Y'''(t)+Y'(t)\} = \mathcal{L}\{Y'''(t)\}+\mathcal{L}\{Y'(t)\} = 10\,\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

utilizando la Ec. (2.51), y la tabla No. I:

$$s^3 y(s) + s\,y(s) = \frac{10}{s-2}$$

$$y(s) = \frac{10}{s(s-2)(s^2+1)}$$

desarrollando en fracciones parciales:

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

la solución del sistema que resulta para encontrar los valores de A, B, C y D es: A= -5, B= 1, C= 4 y D= -2, entonces

$$y(s) = -\frac{5}{s} + \frac{1}{s-2} + \frac{4s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}$$

$$Y(t) = -5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

de la tabla No. I, transformadas 1, 2, 3 y 4:

$$Y(t) = -5 + e^{2t} + 4\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias con coefi-- cientes variables, también pueden resolverse con la transformada de Laplace, siempre y cuando la ecuación resultante se - simplifique. Si los coeficientes de la ecuación original son polinomios de primer grado en s, la ecuación transformada es- una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Ejemplo 2.F. Solución de una ecuación diferencial lineal, ordinaria, homogénea, con coeficientes variables (8):

$tY''(t)+(t-1)Y'(t)+Y(t)=0, \quad Y(0)=0$

$tY''(t)+tY'(t)-Y'(t)+Y(t)=0$

aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{tY''(t)\}+\mathcal{L}\{tY'(t)\}-\mathcal{L}\{Y'(t)\}+\mathcal{L}\{Y(t)\}=0$$

de las propiedades 1 y 3:

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2y(s)-sY(0)-Y'(0)\right]-\frac{d}{ds}\left[sy(s)-Y(0)\right]-\left[sy(s)-Y(0)\right]+y(s)=0$$

$$y'(s)\left[s^2+s\right]+3sy(s)=0$$

$$y'(s)+\frac{3s}{s^2+s}y(s)=0$$

la expresión anterior es una Ec. diferencial lineal de primer orden, cuya solución es:

$$y(s)=\frac{A}{(s+1)^3},$$ A es una constante de integración

$$Y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s+1)^3}\right\}$$

la transformada No. 6 de la tabla I, indica que:

$$Y(t)=A\left[\frac{1}{2!}t^2e^{-t}\right]=\frac{A}{2!}t^2e^{-t}$$

$$\therefore\ Y(t)=C\,t^2e^{-t}, \qquad C=\frac{A}{2!}$$

La transformada de Laplace, hace posible la solución de algunas ecuaciones diferenciales parciales y ecuaciones diferenciales y en diferencias. A continuación dos ejemplos de ellas.

Ejemplo 2.G. Solución de la siguiente ecuación diferencial parcial (8):

$$x\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+y(x,t)=xF(t)\ ; \quad y(x,0)=y(0,t)=0$$

aplicando la transformada de Laplace y considerando $\mathcal{L}\{y(t)\}=y(s)$

$$\mathcal{L}\left\{x\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+y(x,t)\right\}=\mathcal{L}\{xF(t)\}\ ; \quad y(s)=\mathcal{L}\{y(x,t)\}$$

$$x\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\{y(x,t)\}+\mathcal{L}\left\{\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right\}+\mathcal{L}\{y(x,t)\}=x\mathcal{L}\{F(t)\}$$

$$xy'(s)+sy(s)-y(x,0)+y(s)=xf(s)$$

$$xy'(s)+y(s)(s+1)=xf(s)$$

$$y'(s)+\frac{s+1}{x}y(s)=f(s)$$

la solución de esta ecuación diferencial ordinaria es:

$$y(s)=\frac{f(s)}{s+2}x+x^{-s-1}C$$, C es una constante de integración;

para x= 0, y= 0, C= 0, de esta manera:

$$y(s)=\frac{f(s)}{s+2}x$$

$$y(x,t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s+2}x\right\}=x\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s+2}\right\}$$

utilizando la integral de convolución y haciendo

$$f(s)=f(s)\ , \quad g(s)=\frac{1}{s+2}$$

se llega a: F(t)= F(t), G(t)= e^{-2t}.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s+2}\right\} = F(t)*G(t) = \int_0^t F(\tau)e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

finalmente, la solución de la ecuación diferencial parcial es:

$$y(x,t) = xe^{-at}\int_0^t F(\tau)e^{a\tau}d\tau$$

Ejemplo 2.H. Solución de una ecuación diferencial y en diferencias (8).

$$Y'(t) - aY(t-1) = F(t), \quad Y(t) = 0 \text{ cuando } t \leq 0$$

$$F(t)\begin{cases} b & \text{cuando } t > 0 \\ 0 & \text{cuando } t < 0 \end{cases}$$

Antes de proceder a encontrar la respuesta a este problema, se introducirá un concepto de fundamental importancia en el desarrollo de este trabajo.

Una serie geométrica con primer término igual a uno y razón x (12, 41), tiene la forma:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \ldots\ldots \quad (2.82)$$

la cual converge a $\frac{1}{1-x}$ si $|x|<1$, y diverge si $|x|\geq 1$. En resumen, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\text{Para } |z|<1: \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \ldots\ldots \quad (2.83)$$

$$\text{Para } |z^{-1}|<1: \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1} \qquad \ldots\ldots \quad (2.84)$$

$$Y'(t) - aY(t-1) = F(t)$$

aplicando la transformada de Laplace a la Ec. anterior:

$$\mathcal{L}\{Y'(t)\} - a\mathcal{L}\{Y(t-1)\} = b\mathcal{L}\{1\}\ , \quad t>0,\ F(t)=b$$

$$s\,y(s) - Y(0) - a\,e^{-s}y(s) = b\,\frac{1}{s}$$

$$y(s)\left[s - \frac{a}{e^{s}}\right] = \frac{b}{s}$$

$$y(s) = \frac{b}{s}\,\frac{1}{s - a\,e^{-s}} = b\,\frac{1}{s^{2}\left[1 - \frac{a}{s\,e^{s}}\right]} = \frac{b}{s^{2}}\,\frac{1}{1 - \left(\frac{a}{se^{s}}\right)}\ .$$

la última expresión, puede escribirse en términos de la Ec. (2.83)

$$y(s) = \frac{b}{s^{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a\,e^{-s}}{s}\right)^{m}$$

$$y(s) = \frac{b}{s^{2}}\left(1 + \frac{a}{s}e^{-s} + \frac{a^{2}}{s^{2}}e^{-2s} + \cdots + \frac{a^{m}}{s^{m}}e^{-ms} + \cdots\right)$$

$$y(s) = b\left[\frac{1}{s^{2}} + \frac{a}{s^{3}}e^{-s} + \frac{a^{2}}{s^{4}}e^{-2s} + \cdots + \frac{a^{m}}{s^{m+2}}e^{-ms} + \cdots\right]$$

para invertir $y(s)$, de la propiedad 11 y la transformada número 5 (tabla I), se tiene:

$$Y(t) = b\left[t + \frac{a(t-1)^{2}}{2!} + \frac{a^{2}(t-2)^{3}}{3!} + \frac{a^{3}(t-3)^{4}}{4!} + \cdots + \frac{a^{m}(t-m)^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots\right]$$

Una ecuación integral, es decir, una ecuación cuya función desconocida se halla dentro de una integral, si ésta-es del tipo convolución tiene la forma general:

$$Y(t) = F(t) + \int_0^t G(t-\tau)\, Y(\tau)\, d\tau \qquad \ldots\ldots \qquad (2.85)$$

Y(t) es la función incógnita y F(t) y G(t) son conocidas.

La aplicación de la transformada convierte (2.85)--en un problema algebraico con solución:

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{1-g(s)}\right\} \qquad \ldots\ldots \qquad (2.86)$$

Ejemplo 2.I. Resolución de la siguiente ecuación --integral (8):

$$Y(t) = a\,\mathrm{sen}\,t - 2\int_0^t Y(\tau)\cos(t-\tau)\, d\tau$$

la integral que aparece en el segundo sumando, es una integral de convolución, Ec. (2.76):

$$Y(t) * G(t) = \int_0^t Y(\tau)\, G(t-\tau)\, d\tau$$

$$Y(\tau) = Y(\tau), \qquad G(t-\tau) = \cos(t-\tau)$$

$$y(s)\, g(s) = \mathcal{L}\{Y(t) * G(t)\}$$

aplicando la transformada de Laplace a la Ec. integral:

$$\mathcal{L}\{Y(t)\} = \mathcal{L}\left\{a\,\mathrm{sen}\,t - 2\int_0^t Y(\tau)\cos(t-\tau)\, d\tau\right\}$$

$$\mathcal{L}\{Y(t)\} = a\,\mathcal{L}\{\mathrm{sen}\,t\} - 2\,\mathcal{L}\left\{\int_0^t Y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau\right\}$$

$$y(s) = a\,\frac{1}{s^2+1} - 2 - \frac{s}{s^2+1}\,y(s)$$

$$y(s) + 2y(s)\,\frac{s}{s^2+1} = a\,\frac{1}{s^2+1}$$

$$y(s) = a\,\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = a\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

la transformada No. 6, de la tabla I, es la que corresponde - en este caso:

$$Y(t) = a\,t\,e^{-t}$$

Siguiendo procedimientos similares, pueden resol--- verse ecuaciones integrodiferenciales (8):

$$aY(t) + bY'(t) = F(t) + \int_0^t G(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau \quad \ldots\ldots \quad (2.87)$$

y ecuaciones integrales no lineales (8):

$$aY(t) + \int_0^t Y(\tau)Y(t-\tau)\,d\tau = t + a \quad \ldots\ldots \quad (2.88)$$

Sistemas Lineales.

Al hacer referencia a la transformada de Laplace, se mencionó la condición que debe cumplir una transformación para ser lineal; a continuación se empleará este mismo concepto en el desarrollo de otro no menos importante: el de sistema lineal.

Físicamente, un sistema es un conjunto de elementos interconectados (10), que si son lineales, obedecen relaciones del tipo:

$$y(k) = H\left[x(k)\right] \qquad \ldots\ldots \qquad (2.89)$$

donde H es una transformación lineal, es decir, cumple con las propiedades de homogeneidad:

$$H\left[a\,x(k)\right] = a\,H\left[X(k)\right]$$

y superposición:

$$H\left[X_1(k) + X_2(k)\right] = H\left[X_1(k)\right] + H\left[X_2(k)\right]$$

En realidad, muchos de los sistemas físicos reales no son completamente lineales, pero pueden ser representados satisfactoriamente mediante este tipo de modelos que facilitan en gran medida su estudio.

a) Sistemas Continuos y Discretos:

La definición de sistemas lineales, permite subdi--

vidir a éstos en continuos y discretos, según sea el tipo de variable que manejen.

Si en el sistema que se considera se manejan secuencias de números f(n), reales o complejos, tal que sean transformados en otra secuencia g(n):

$$g(n) = L\{f(n)\} \quad \ldots\ldots \quad (2.90)$$

se trata de un sistema discreto o digital, al índice n se le llama tiempo discreto. En general, los intervalos discretos de tiempo pueden no ser constantes, pueden variar de un intervalo al siguiente, o pueden ser constantes entre períodos.

Los modelos que resultan del análisis de este tipo de sistemas, se forman utilizando ecuaciones en diferencias.

De forma semejante, si en el sistema se transforma una función f(t) real o compleja, definida para cada real t, en otra función g(t):

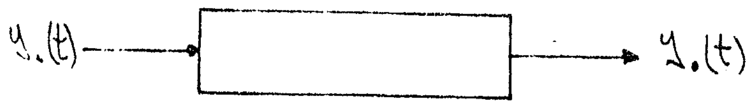
$$g(t) = L\{f(t)\} \quad \ldots\ldots \quad (2.91)$$

se trata de un sistema lineal continuo o analógico, cuyo modelo puede representarse mediante ecuaciones diferenciales.

b) Concepto de Función de Transferencia:

Un sistema lineal se simboliza esquemáticamente con un rectángulo que representa al sistema; una flecha que llega, la variable de entrada (función de entrada, función de exci--

tación); y con otra que sale, la variable de respuesta (variable o función de salida, función de respuesta).



Si la relación entre la función de excitación y la de respuesta, es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, el sistema queda representado por:

$$a_m y_o^{(m)}(t) + a_{m-1} y_o^{(m-1)}(t) + \dots + a_1 y_o'(t) + a_0 y_o(t) =$$

$$b_m y_i^{(m)}(t) + b_{m-1} y_i^{(m-1)} + \dots + b_1 y_i'(t) + b_0 y_i(t) \quad \dots\dots \quad (2.92)$$

Si se denota (d/dt) por el operador "p", tal que

$$p^m y(t) = \frac{d^m y(t)}{dt^m}$$

notación conocida como de Heaviside (40), la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\sum_{m=0}^{m} a_m p^m y_o(t) = \sum_{m=0}^{m} b_m p^m y_i(t) \quad \dots\dots \quad (2.93)$$

o de la forma:

$$A(p)\, y_o(t) = B(p)\, y_i(t) \quad \dots\dots \quad (2.94)$$

en la cual:

$$A(p) = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0 \quad \dots\dots \quad (2.98a)$$

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 \quad \dots\dots \quad (2.98b)$$

Arreglando la ecuación (2.94) en otra forma:

$$y_o(t) = \frac{B(p)}{A(p)}\, y_i(t) = G(p)\, y_i(t) \quad \ldots\ldots \quad (2.99)$$

$$G(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \quad \ldots\ldots \quad (2.100)$$

G(p) recibe el nombre de función operacional del sistema y -- actúa sobre la función de entrada para producir la función de salida.

El concepto de función operacional de un sistema, - es de particular importancia cuando se trabaja en el dominio de Laplace.

Considérese una ecuación diferencial lineal, no homogénea, con condiciones iniciales nulas, de la forma:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = X(t) \quad \ldots\ldots \quad (2.101)$$

en la que τ es una constante característica del sistema de -- interés.

Aplicando la transformada de Laplace y arreglando-- la ecuación:

$$\mathcal{L}\left\{\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t)\right\} = \mathcal{L}\{X(t)\}$$

$$\tau s y(s) + y(s) = X(s)$$

$$y(s) = \frac{X(s)}{\tau s + 1}$$

finalmente:

$$\frac{y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \qquad \ldots\ldots \qquad (2.102)$$

La expresión del lado derecho de esta ecuación, se-conoce como función de transferencia del sistema. x(s) es la-transformada de la función de excitación y $y(s)$ es la transformada de la función de respuesta.

A la función de transferencia se le simboliza por - G(s), y posee la propiedad de describir completamente las características dinámicas del sistema del que proviene (6). A - cada función de entrada que se seleccione, le corresponde -- simplemente una respuesta dada por:

$$y(s) = G(s)\,X(s) \qquad \ldots\ldots \qquad (2.103)$$

la que al ser invertida, proporcina la respuesta y(t) del -- sistema.

Es importante mencionar, que los sistemas físicos - con funciones de transferencia como la de la ecuación (2.101), se llaman sistemas de primer orden o de fase exponencial -- simple (6).

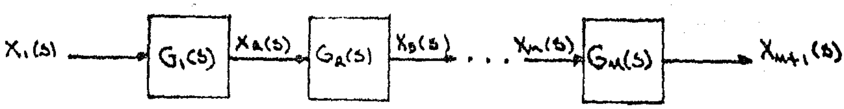
La función de transferencia asociada a un sistema de segundo orden, o sea, que se obtiene de una ecuación diferencial lineal de segundo orden es:

$$\frac{y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \qquad \ldots\ldots \qquad (2.104)$$

τ y ξ denotan características del sistema.

Cuando se presentan varios sistemas conectados en cadena o en serie, puede obtenerse una función de transferencia global que abarque las de cada uno de los sistemas tomados individualmente.

A n funciones de transferencia en serie, les corresponde la siguiente representación:



$$G_M = \frac{X_{M+1}(s)}{X_M(s)}$$

haciendo el producto $\prod_{i=1}^{M} G_i(s)$ y simplificando, se obtiene:

$$G_1(s)\,G_2(s)\cdots G_M(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)}\,\frac{X_3(s)}{X_2(s)}\;\cdots\;\frac{X_{M+1}(s)}{X_M(s)}$$

$$G_T = \prod_{i=1}^{M} G_i = \frac{X_{M+1}(s)}{X_1(s)} \qquad \ldots\ldots \qquad (2.105)$$

que significa, que la función de transferencia total (equivalente), es el producto de todas las funciones de transferencia individuales, y constituye una relación simple e importante.

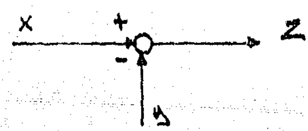
c) Diagramas de Bloques:

Ya se indicó en la sección anterior, la representación gráfica de un sistema lineal, cuya extensión y el empleo simultáneo de la notación de Heaviside, hace posible la apreciación esquemática de sistemas y ecuaciones por medio de diagramas de bloques.

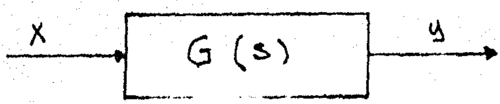
Los diagramas de bloques, facilitan en gran medida la comprensión del sistema que se analiza, análogamente al objetivo que persiguen los diagramas de flujo en programación: ayudan a determinar relaciones entre variables y facilitan la solución de las ecuaciones involucradas, porque determinan el orden y la secuencia del proceso en forma lógica y concreta (40).

Básicamente se utilizan dos símbolos en la construcción de estos diagramas. La suma algebraica, se indica mediante una pequeña circunferencia a la cual confluyen los sumandos:

$z = x - y$:



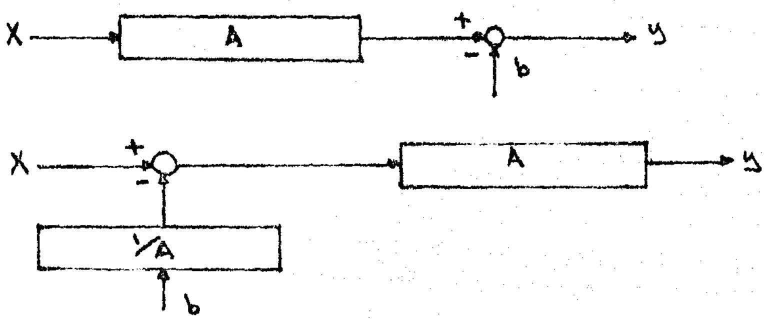
y la multiplicación, simbolizada por un rectángulo, como sigue:



$y = G(s)\,X$

Lo anterior trae como ventaja adicional que, de acuerdo a la conveniencia, pueden formarse diagramas equivalentes para un mismo sistema.

Ejemplo 2.J. Para el proceso y= Ax -b, son diagramas equivalentes (40):



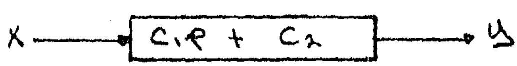
Para la multiplicación, si el término dentro del rectángulo es función del operador diferencial p, la representación en bloques indica la diferenciación o integración de la variable de entrada.

Ejemplo 2.K. Una ecuación de la forma:

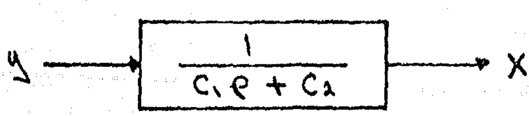
$$y(t) = C_1\left(\frac{dx}{dt}\right) + C_2 X \; ; \qquad p = \frac{d}{dt}$$

puede representarse de las siguientes dos maneras (40):

a) Derivación



b) Integración



III.- LA TRANSFORMADA Z.

La Transformada Z.

a) Sucesiones, Señales y Funciones Generadoras:

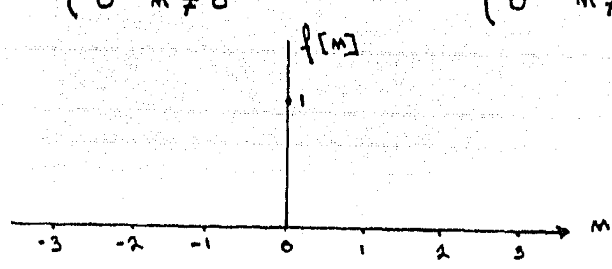
Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, y cuyo rango está formado por números reales o complejos.

Una señal discreta, es una sucesión que lleva información acerca del estado o comportamiento de un sistema físico (29).

Entre un número infinito de sucesiones que pueden formarse, existen algunas que se consideran especiales por su importancia y características particulares:

1.- Impulso unitario, δ :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \qquad \delta[n-k] = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$



es importante, porque cualquier otra, puede expresarse como -

una suma de impulsos.

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, \delta[n-k] \qquad \ldots\ldots \qquad (3.1)$$

Ejemplo 3.A. La sucesión dada por:

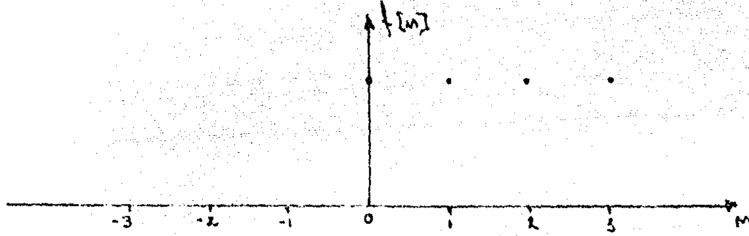
$f\,[n] = 4,3,2,0,0,\underline{1},2,3,0,-2,1$; con $f[0] = \underline{1}$

puede escribirse mediante (3.1) como:

$$f[n] = 4\,\delta(n+5) + 3\,\delta(n+4) + 2\,\delta(n+3) + \delta[n] + 2\,\delta(n-1) + 3\,\delta(n-2) - 2\,\delta(n-4) + \delta(n-5)$$

2.- Escalón unitario:

$$U[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



Además, puede haber sucesiones exponenciales, periódicas, de tipo geométrico o aritmético; pueden ser finitas -- (ejemplo anterior), o infinitas según el número de términos - que contengan, etc.

Si entre una sucesión dada y una serie de funciones, de la forma (A(s) puede ser función de varias variables):

$$A(s) = a_0 A_0(s) + a_1 A_1(s) + \ldots a_n A_n(s) + \ldots \qquad \ldots\ldots \qquad (3.2)$$

tal que los coeficientes de los términos de la serie, correspondan a los términos de la primera, existe una correspondencia

cia biunívoca, entonces a la serie anterior, en caso de que sea convergente, se le llama función generadora de la sucesión a_m.

b) Definición de la Transformada Z:

Como se estableció previamente, existe una correspondencia sucesión-función generadora, si ésta es de la forma:

$$F_p(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]\, z^{m} \quad \ldots\ldots \quad (3.3)$$

a la función $F(z)$ que resulta, se le llama **transformada Z de la sucesión considerada** y se indica por:

$$F(z) = Z\{f[m]\}$$

Dado que la ecuación (3.2) no indica ninguna forma explícita para la función $A_i(s)$, existen algunas variantes de la definición de la transformada.

Así, se tiene la transformada Z negativa:

$$F_m(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]\, z^{-m} \quad \ldots\ldots \quad (3.4)$$

y la transformada Z exponencial:

$$F_e(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f[m]\, \frac{z^{m}}{m!} \quad \ldots\ldots \quad (3.5)$$

ambas definidas solamente, para aquellos valores de z, reales o complejos para los cuales las series converjan.

Las series (3.3) y (3.4), están en forma bilateral, pero pueden aparecer como series unilaterales:

$$F_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]\, z^{n} \qquad \ldots\ldots \qquad (3.6)$$

$$F_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]\, z^{-n} \qquad \ldots\ldots \qquad (3.7)$$

En los dos casos, si $f[n] = 0$, para toda $n < 0$, entonces las series unilaterales y bilaterales son equivalentes.

De la misma forma, quedan establecidas las expresiones para las transformadas Z de funciones de dos variables (29):

$$F_p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f[m,n]\, z_1^{m} z_2^{n} \qquad \ldots\ldots \qquad (3.8)$$

$$F_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[m,n]\, z_1^{-m} z_2^{-n} \qquad \ldots\ldots \qquad (3.9)$$

Ejemplo 3.B. La sucesión finita del ejemplo 3.A, en términos de una transformada Z positiva, tomaría la forma siguiente:

$$F_p(z) = 4z^{-5} + 3z^{-4} + 2z^{-3} + z^{0} + 2z + 3z^{2} - 2z^{4} + z^{5}$$

Un problema que se presenta a menudo, es el de la existencia de varias sucesiones cuyas expresiones algebraicas en z, llamadas de forma cerrada (10), tienen la misma forma. Esta situación ambigua se corrige especificando, para cada función, la región de convergencia de la serie considerada.

Ejemplo 3.C. La sucesión escalón unitario, definida con anterioridad:

$$f[m] = U[m] = \begin{cases} 1 & m \geq 0 \\ 0 & m < 0 \end{cases}$$

su transformada Z es:

$$F_m(z) = Z\{U[m]\} = \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

la serie geométrica converge para $|z^{-1}| < 1$, su región de convergencia es el exterior del círculo unitario para el que -- $|z| > 1$, mientras que si se tratara de la sucesión definida por:

$$g[m] = -U[-m-1] = \begin{cases} -1 & m < 0 \\ 0 & m \geq 0 \end{cases}$$

con transformada Z:

$$G_m(z) = Z\{-U[-m-1]\} = -\sum_{m=-\infty}^{-1} z^{-m} = -\sum_{m=1}^{\infty} z^{m} = -\sum_{m=0}^{\infty} z^{m+1} = -z\sum_{m=0}^{\infty} z^{m} = \frac{-z}{1-z} = \frac{z}{z-1}$$

la serie converge para $|z| < 1$, la región de convergencia es -el interior $|z| < 1$ del círculo unitario.

Sin embargo, es posible prescindir de la especificación de la región de convergencia cuando se tiene conocimiento del tipo de serie que se maneja. Considérese una serie de Laurent, con a_m constantes complejas y z_0 en el origen:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m z^m \qquad \ldots\ldots \qquad (3.3)$$

que constituye la ecuación de definición de la transformada z con $a_m = f[n]$, y converge a $f(z)$ en todos los puntos de una región anular, alrededor de $z_0 = 0$ (serie bilateral).

Si la serie de Laurent está formada únicamente por su parte analítica (serie unilateral derecha), la región de convergencia es un círculo alrededor del origen. Y es el exterior de este círculo, para el caso de estar compuesta por su parte entera (serie unilateral izquierda).

La transformación $w = z^{-1}$, convierte la expresión dada por (3.3), en una transformada Z negativa, e intercambia las regiones de convergencia de sus partes analítica y entera.

c) Formas de Obtener Transformadas de Funciones:

El método más directo para obtener expresiones de transformadas Z, a partir de sucesiones, consiste en la sustitución de éstas en la ecuación de definición de la transformada.

Ejemplo 3.D. Se dan algunas sucesiones y se calculan sus transformadas:

1.- $f[n] = 1$, $n=0,1,2,3,\ldots$

$$F_p(z) = Z\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} (1) z^n = \frac{1}{1-z}$$

2.-

$$f[n] = \begin{cases} 1 & n = 0,1,2,3,4 \\ 0 & n = 5,6,\ldots \end{cases}$$

$$F_p(z) = \mathcal{Z}\left\{f[n]\right\} = \sum_{n=0}^{4} z^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n} - \sum_{n=5}^{\infty} z^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{n} - z^{5} \sum_{n=0}^{\infty} z^{n}$$

$$= \frac{1}{1-z} - z^{5}\frac{1}{1-z} = \frac{1-z^{5}}{1-z}$$

3.- $f[n] = a^{n}$, a es una constante.

$$F_n(z) = \mathcal{Z}\left\{f[n]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^{n} = \frac{z}{z-a}$$

Para otro tipo de sucesiones, puede derivarse la -- expresión de la transformada:

Ejemplo 3.E. Si $f[n]= kn$, k constante y $n=0,1,2,...$

$$F_p(z) = \mathcal{Z}\left\{f[n]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} k n z^{n} = k z \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}$$

$$= k z \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^{n} = k z \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$= -k z \frac{(-1)}{(1-z)^{2}} = \frac{k z}{(1-z)^{2}}$$

Una transformada de mucha utilidad, porque permite- obtener transformadas de funciones trigonométricas, es la pro veniente de un decaimiento exponencial:

$f[n]= e^{-kn}$, k constante.

$$F_m(z) = Z\{f[m]\} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mk} z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} (e^{-k} z^{-1})^m = \frac{1}{1 - e^{-k} z^{-1}}$$

$$Z\{e^{-km}\} = \frac{z}{z - e^{-k}} \quad \ldots\ldots \quad (3.10)$$

Otra sucesión de importancia es:

$f[n] = \cos nk$, k constante y $n = 0,1,2,3,\ldots$

que puede escribirse en términos de una suma de exponenciales:

$f[n] = \frac{1}{2}(e^{ink} + e^{-ink})$

$$F_m(z) = Z\{\cos mk\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2}(e^{imk} + e^{-imk}) z^{-m}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{m=0}^{\infty} e^{imk} z^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-imk} z^{-m}\right]$$

utilizando (3.10):

$$Z\{\cos mk\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - e^{ik} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-ik} z^{-1}}\right]$$

$$Z\{\cos mk\} = \frac{1}{2}\left[\frac{2 - (e^{ik} + e^{-ik}) z^{-1}}{1 - (e^{ik} + e^{-ik}) z^{-1} + z^{-2}}\right]$$

$$Z\{\cos mk\} = \frac{1}{2}\left[\frac{2 - 2 z^{-1} \cos k}{1 - 2 z^{-1} \cos k + z^{-2}}\right]$$

$$\therefore Z\{\cos mk\} = \frac{1 - z^{-1} \cos k}{1 - 2 z^{-1} \cos k + z^{-2}} \quad \ldots\ldots \quad (3.11)$$

Todos los procedimientos anteriormente ilustrados,- hacen posible la construcción de tablas de transformadas, similares a las obtenidas en el capítulo precedente para la -- transformada de Laplace.

A partir de este punto, se desarrollarán las propiedades de la transformada Z negativa, porque será ésta la que- se utilizará posteriormente. Las propiedades de las otras transformadas son semejantes a las que se presentarán a continuación, sin embargo, pueden consultarse las referencias números 10 y 16 de la última sección de este trabajo.

Antes de proseguir, se hará un pequeño paréntesis - para introducir un concepto muy importante y útil, cuyas im-- plicaciones son fundamentales en el análisis de problemas mediante el método que nos ocupa, y se establecerá la relación existente entre ésta transformada y la de Laplace.

d) Concepto de Muestreo:

Siempre, en todo fenómeno que se analiza, es necesario obtener datos que, al ser procesados, proporcionan información del comportamiento físico o de la naturaleza del sistema estudiado.

En algunas ocasiones, no es posible o no es conve-- niente manejar información continua, por lo que surge la necesidad de tratar señales discretas o conjuntos de datos.

TABLA No. II

TRANSFORMADAS Z.

No.	f(t)	F(z)
1	1	$\frac{1}{(1-z^{-1})}$
2	t	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
3	t^n	$\lim_{a \to 0} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left\{\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right\}$
4	$(n+1)a^{n+1}$	$\frac{a}{(1-az^{-1})^2}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
6	sen wt	$\frac{z^{-1}\text{sen } wT}{1-2z^{-1}\cos wT+z^{-2}}$
7	cos wt	$\frac{1-z^{-1}\cos wT}{1-2z^{-1}\cos wT+z^{-2}}$
8	senh at	$\frac{z^{-1}\text{senh } aT}{1-2z^{-1}\cosh aT+z^{-2}}$
9	cosh at	$\frac{1-z^{-1}\cosh aT}{1-2z^{-1}\cosh aT+z^{-2}}$
10	$e^{-at}\text{sen } wt$	$\frac{z^{-1}e^{-aT}\text{sen } wT}{1-2z^{-1}e^{-aT}\cos wT+e^{-2aT}z^{-2}}$
11	$e^{-at}\cos wt$	$\frac{1-z^{-1}e^{-aT}\cos wT}{1-2z^{-1}e^{-aT}\cos wT+e^{-2aT}z^{-2}}$

Cuando una señal continua se transforma en discreta, se dice que se llevó a cabo un proceso de muestreo o "digitalización" (22), por ejemplo, una computadora digital utiliza números, representados dentro de un circuito electrónico, por fluctuaciones en sus voltajes (31).

Al instante de tiempo durante el cual una señal es convertida en un número se le llama "punto de muestra" y al número obtenido una "muestra" (36).

Sin embargo, el muestreo debe contemplar algunas consideraciones importantes, como son: la determinación del espacio óptimo entre puntos de muestra, es decir, la frecuencia con que éstos deben ser tomados para que, ni se caiga en la redundancia, ni haya pérdida de información.

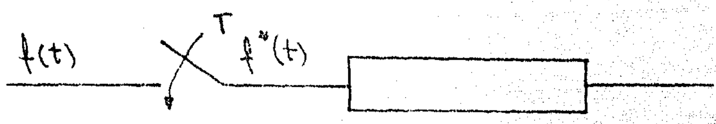
Considerando que en todo proceso de muestreo, indefectiblemente se pierde información, para garantizar la reconstrucción de la señal que se recibe, se establece el teorema de Nyquist o del Muestreo (15,22):

"Para recuperar la señal de entrada, la frecuencia de muestreo debe ser al menos, del doble de la frecuencia más alta de la señal muestreada".

En otras palabras significa que, el comportamiento de una función puede reconstruirse utilizando alguna técnica de interpolación, con tal que se conozcan los valores de la función en un gran número de muestras.

Cuando el estudio de un proceso se efectúa muestreando señales y éstas son captadas a intervalos iguales de tiempo (el período de muestreo), se dice que se trata de sistemas de datos muestreados. Los sistemas continuos pueden considerarse como un caso especial de los anteriores, en los que el período de muestreo T, se aproxima a cero.

Un sistema de datos muestreados, puede representarse mediante el siguiente diagrama:

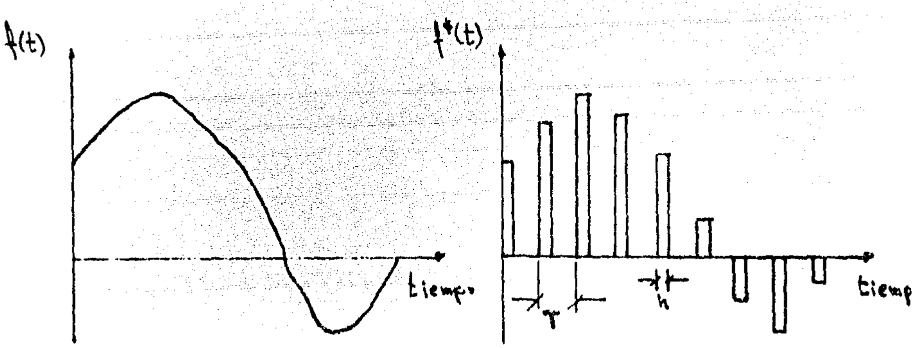


$f(t)$ es la señal continua.

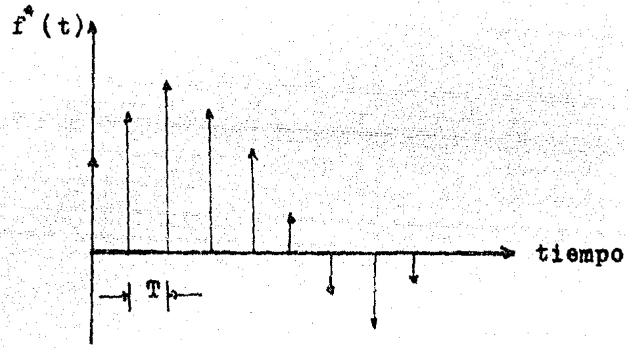
$f^*(t)$ es la señal discreta.

T es el período de muestreo.

el muestreador produce señales a lapsos regulares, sin embargo, la duración del pulso tiene un tiempo de contacto h, de modo que la salida $f^*(t)$ de un muestreador real, estaría representada por franjas:



Aquí debe recordarse que, una sucesión puede representarse por una suma de impulsos, lo cual se emplea para introducir el concepto de muestreador ideal, cuya salida está representada por segmentos de flechas, con magnitud proporcional al valor de la señal recibida:



Un muestreador ideal debe cumplir las condiciones que en seguida se enumeran (15):

1.- El muestreador hace e interrumpe el contacto instantáneamente.

2.- Su operación es periódica.

3.- La información muestreada se alimenta a un sistema lineal.

La ecuación básica que describe la salida de un muestreador ideal es:

$$f^*(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT)\, \delta_T(t) \qquad \ldots\ldots \qquad (3.12)$$

donde $\delta_T(t)$ representa a:

$$\delta_T(t) = \delta(t - mT) \quad \ldots\ldots \quad (3.13)$$

$$\delta_T(t) = \begin{cases} 1 & t = mT \\ 0 & t \neq mT \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (3.14)$$

sustituyendo (3.13) en (3.12):

$$f^*(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT)\,\delta(t - mT) \quad \ldots\ldots \quad (3.15)$$

la última relación proporciona los valores de la función muestreada en t= nT (obsérvese la similitud de esta ecuación con la No. 3.1). Para series unilaterales, que son las que se tratarán después, se tiene:

$$f^*(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT)\,\delta(t - mT) \quad \ldots\ldots \quad (3.16)$$

Ahora, aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior:

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} f(mT)\,\delta(t - mT)\right\}$$

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f(mT)\,\delta(t - mT)\, e^{-st}\, dt$$

recurriendo a la expresión (2.65) para evaluar la última integral y haciendo:

$$t_0 = mT$$

$$\delta(t - t_0) = \delta(t - mT)$$

$$F(t) = f(mT)\, e^{-st}$$

se llega al siguiente resultado:

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT)\, e^{-mTs}$$

$$F^*(s) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT)\, e^{-mTs} \quad \ldots\ldots \quad (3.17)$$

si se hace el cambio de variable: $z = e^{sT}$, con $s = a + ib$, --

y $z = e^{aT} e^{ibT}$, $|z| = e^{aT}$, entonces (3.17) se transforma en:

$$F^*(s) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT) \left(\frac{1}{z}\right)^m, \quad |z| > e^{aT} \quad \ldots\ldots \quad (3.18)$$

que constituye la ecuación de definición de la transformada Z negativa.

El resultado anterior, indica que la transformada Z es la transformada de Laplace de una función muestreada (20):

$$F(z) = F^*(s)$$

por tanto, las propiedades de ambas transformadas serán muy - semejantes.

e) Propiedades de la Transformada Z:

1.- Linealidad.- La transformada Z es una transformación -- lineal.

$$Z\{a f(t) + b g(t)\} = a Z\{f(t)\} + b Z\{g(t)\}$$

$$Z\{a f(t) + b g(t)\} = a F(z) + b G(z) \quad \ldots\ldots \quad (3.19)$$

2.- Desplazamiento hacia adelante (avance).- El desplazamiento, debe ser un número entero de períodos de muestra.

$$Z\{f(t+T)\}=\sum_{m=0}^{\infty} f[(m+1)T]z^{-m}$$

sea k= n+1, entonces:

$$Z\{f(t+T)\}=\sum_{k=1}^{\infty} f(kT)z^{-(k-1)}$$

$$Z\{f(t+T)\}= z\sum_{k=1}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

esta suma sería zF(z) si empezara en k=0, así, sumando y restando $zf(0^+)$:

$$Z\{f(t+T)\}=z\sum_{k=1}^{\infty} f(kT)z^{-k}+zf(0^+)-zf(0^+)$$

$$Z\{f(t+T)\} = z\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}-zf(0^+)$$

$$Z\{f(t+T)\} = z\left[F(z) - f(0^+)\right]$$

extendiendo este resultado para mayores desplazamientos:

$$Z\{f(t+mT)\}=z^{m}F(z)-z^{m}f(0^+)-z^{m-1}f(t) - z^{m-2}f(2T)-\ldots-zf(mT) \quad \ldots\ldots \quad (3.20)$$

3.- Teorema de Traslación Real (Retrasos).-

$$Z\{f(t-kT)\}=\sum_{m=0}^{\infty} f(mT-kT)z^{-m}$$

sea m= n-k

$$Z\{f(t-kT)\}=\sum_{m=-k}^{\infty} f[(m-k)T]z^{-m-k}$$

$$Z\{f(t-kT)\}=\sum_{m=-k}^{\infty} f(mT)z^{-m-k}$$

como se manejan series unilaterales, f(mT)=0 para toda m< 0

$$Z\{f(t-kT)\} = z^{-k}\sum_{m=0}^{\infty} f(mT)\, z^{-m}$$

$$Z\{f(t-kT)\} = z^{-k}\, F(z) \qquad \ldots\ldots \qquad (3.21)$$

4.- Multiplicación por t: tf(t)

$$Z\{t\,f(t)\} = \sum_{m=0}^{\infty} (mT)\, f(mT)\, z^{-m}$$

$$Z\{t\,f(t)\} = -Tz\sum_{m=0}^{\infty} f(mT)\left[-m\,z^{-(m+1)}\right]$$

$$Z\{t\,f(t)\} = -Tz\sum_{m=0}^{\infty} f(mT)\,\frac{dz^{-m}}{dz}$$

$$Z\{t\,f(t)\} = -Tz\,\frac{d}{dz}\left[\sum_{m=0}^{\infty} f(mT)\, z^{-m}\right]$$

$$Z\{t\,f(t)\} = -Tz\,\frac{d}{dz}\left[F(z)\right]$$

la multiplicación por t en el dominio del tiempo, corresponde a la derivación con respecto a z, en el dominio de la trans-- formada. En general:

$$Z\{t^{k} f(t)\} = -Tz\,\frac{d}{dz}\left(Z\{t^{k-1} f(t)\}\right) \qquad \ldots\ldots \qquad (3.22)$$

5.- Teorema del Valor Inicial.- Este teorema, permite calcu-- lar el valor inicial de una función, dada su transformada Z.

La expresión de la transformada Z es:

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT)\, z^{-m}$$

expandiendo la serie y tomando límites cuando $z \to \infty$:

$$F(z) = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \frac{f(3T)}{z^3} + \cdots$$

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = \lim_{z \to \infty} \left[f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \cdots \right]$$

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = f(0) \qquad \ldots\ldots \qquad (3.23)$$

6.- Teorema del Valor Final.- Considérese la siguiente transformada:

$$Z\{f(t+T) - f(t)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[f((m+1)T) - f(mT) \right] z^{-m}$$

y utilizando la propiedad número 2:

$$zF(z) - z f(0) - F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[f((m+1)T) - f(mT) \right] z^{-m}$$

tomando límites cuando $z \to 1$:

$$\lim_{z \to 1} \left[F(z)(z-1) - z f(0) \right] = \lim_{z \to 1} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left[f((m+1)T) - f(mT) \right] z^{-m} \right]$$

$$\lim_{z \to 1} F(z)(z-1) - f(0) = \lim_{k \to \infty} \sum_{m=0}^{k} \left[f((m+1)T) - f(mT) \right]$$

$$= \lim_{k \to \infty} \Big\{ f(T) - f(0) + f(2T) - f(T) + f(3T) - f(2T) + \cdots + f((k+1)T) - f(kT) \Big\}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left[-f(0) + f((k+1)T) \right]$$

$$\lim_{z \to 1} F(z)(z-1) = f(\infty) \qquad \ldots\ldots \qquad (3.24)$$

Debe observarse, que la expresión (3.24), puede escribirse de otra forma (38):

$$\lim_{z\to 1} F(z)(1-z^{-1}) = f(\infty) \quad \ldots\ldots \quad (3.25)$$

en vista de que:

$$\lim_{z\to 1} F(z)(1-z^{-1}) = \lim_{z\to 1} F(z)(z-1)z^{-1}$$

$$\lim_{z\to 1} F(z)(1-z^{-1}) = \lim_{z\to 1} F(z)(z-1) \lim_{z\to 1} z^{-1}$$

$$\lim_{z\to 1} F(z)(1-z^{-1}) = \lim_{z\to 1} F(z)(z-1)$$

7.- Teorema de Traslación Compleja.- Es muy útil para obtener transformadas de funciones que contengan términos exponenciales.

Sean $z_1 = ze^{at}$, y $F(t) = e^{-at}f(t)$:

$$Z\{e^{-at}f(t)\} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-amT} f(mT)z^{-m}$$

$$Z\{e^{-at}f(t)\} = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT)(ze^{aT})^{-m}$$

$$Z\{e^{-at}f(t)\} = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT)z_1^{-m}, \quad z_1 = ze^{aT}$$

$$Z\{e^{-at}f(t)\} = F(z_1) \quad \ldots\ldots \quad (3.26)$$

8.- Teorema de Diferenciación Parcial.-

$$Z\left\{\frac{\partial}{\partial a} f(t,a)\right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} f(mT, a) z^{-m}$$

$$Z\left\{\frac{\partial}{\partial a} f(t,a)\right\} = \frac{\partial}{\partial a} \sum_{m=0}^{\infty} f(mT, a) z^{-m}$$

$$Z\left\{\frac{\partial}{\partial a} f(t,a)\right\} = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a) \quad \ldots\ldots \quad (3.27)$$

f) Inversión de la Transformada Z:

El problema fundamental de invertir una transformada, es el de encontrar una sucesión tal, que de ésta se obtenga dicha transformada.

Si F(z) está representada por la expansión de la serie:

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f[m] z^{-m}$$

entonces f[n] es única y es igual a:

$$f[m] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\,\delta(m-k) \quad \ldots\ldots \quad (3.28)$$

de modo que los coeficientes de z^{-k}, son los valores de la sucesión f(k) y el exponente n, el valor para el cual $\delta(m-k)=1$.

Cuando F(z) está especificada por una expresión algebraica y no se indica de que tipo de sucesiones se obtuvo, ni su región de convergencia, su inversa en general no es —

única (10,30).

Por lo que respecta a la inversa de la transformada de una función muestreada, debido a que F(z) sólo contiene información en los puntos de muestra, no es posible encontrar la función continua; para una transformada Z dada en forma numérica, lo más que puede obtenerse es una función continua que coincida con la función muestreada en los puntos de muestra, aún más, es imposible determinar el período de muestra T (4).

Existen cuatro métodos para pasar del dominio de la z al dominio del tiempo, ellos son:

i) Utilizando tablas de transformadas. Esta técnica es útil cuando se tienen expresiones de funciones conocidas (reportadas), que son el resultado de arreglar o modificar formas algebraicas en z, por lo que se usa como etapa final del método siguiente.

ii) Expansión en Fracciones Parciales. Se trata de un método idéntico al desarrollado para la inversión de transformadas de Laplace. Consiste en determinar la inversa de cada uno de los términos más simples que se obtienen al hacer la expansión, en primer lugar, deben obtenerse los polos de la función y al expandirla, considerar en los términos si se trata de raíces simples o múltiples.

Ejemplo 3.F. Determinar la transformada inversa de la siguiente función muestreada, T= 1 (38):

$$F(z) = \frac{3}{(1-z^{-1})^2(1-0.5z^{-1})}$$

desarrollando en fracciones parciales:

$$F(z) = \frac{3}{(1-z^{-1})^2(1-0.5z^{-1})} = \frac{A}{(1-z^{-1})} + \frac{B}{(1-z^{-1})^2} + \frac{C}{(1-0.5z^{-1})}$$

del sistema de ecuaciones resultante: A= -6, B= 6, C= 3.

$$F(z) = \frac{-6}{(1-z^{-1})} + \frac{6}{(1-z^{-1})^2} + \frac{3}{(1-0.5z^{-1})}$$

$$F(z) = \frac{6}{(1-z^{-1})^2} - \frac{6}{(1-z^{-1})} + \frac{3}{(1-0.5z^{-1})}$$

$$f(mT) = f(m) = 6Z^{-1}\left\{\frac{1}{(1-z^{-1})^2}\right\} - 6Z^{-1}\left\{\frac{1}{(1-z^{-1})}\right\} + 3Z^{-1}\left\{\frac{1}{(1-0.5z^{-1})}\right\}$$

de la tabla II, las transformadas 4,1 y 5 respectivamente:

$$Z^{-1}\left\{\frac{a}{(1-z^{-1}a)^2}\right\} = (m+1)a^{m+1}$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{(1-z^{-1})}\right\} = 1$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{(1-0.5z^{-1})}\right\} = e^{-amT}; \qquad e^{-amT} = 0.5^m$$

$$f(m) = 6(m+1) - 6(1) + 3(0.5)^m$$

finalmente, la transformada inversa de la función es:

$$f(mT) = 3\left[2m + \left(\frac{1}{2}\right)^m\right], \quad T=1$$

Para algunos valores de n, f(n) es:

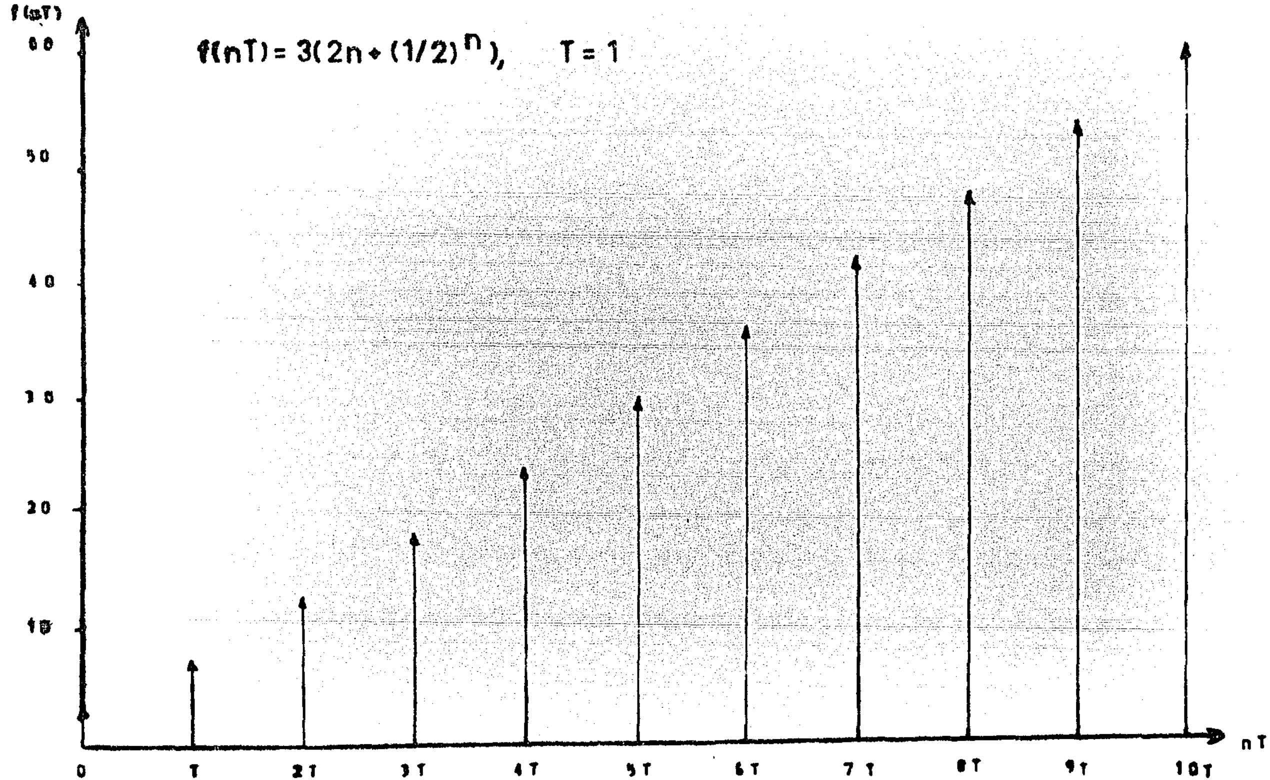
n	f(n)
0	3.0
1	7.5
2	12.75
3	18.38
4	24.19
5	30.09
6	36.05
7	42.02
8	48.01
9	54.01
10	60.00

iii) Inversión por División Directa. Basándose en el hecho de que los coeficientes de z^{-n}, corresponden directamente a los valores de la sucesión $f[n]$; si se tiene una expresión racional, dividiendo el numerador entre el denominador, se genera una serie en z de la cual, se obtienen los valores de los coeficientes que se identifican como se indicó arriba.

Sea

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-n}} \quad \ldots\ldots \quad (3.29)$$

y el cociente:



f(nT)
f(nT) = 3(2n + (1/2)^n),   T = 1
60
50
40
30
20
10
0
T
2T
3T
4T
5T
6T
7T
8T
9T
10T
nT

$$F(z) = C_0 + C_1 Z^{-1} + C_2 Z^{-2} + \ldots + C_m Z^{-m} + \ldots \qquad \ldots\ldots \qquad (3.30)$$

$$C_0 = f(0), C_1 = f(1), \ldots, C_m = f(m), \ldots \qquad \ldots\ldots \qquad (3.31)$$

y para una función muestreada:

$$C_0 = f(0), C_1 = f(T), \ldots, C_m = f(mT), \ldots \qquad \ldots\ldots \qquad (3.32)$$

iv) **La Integral de Inversión.** Partiendo de la ecuación de definición de la transformada Z, puede demostrarse que existe una integral de inversión (20). De ella, se obtienen para valores enteros de n, sucesiones f(nT), por lo que las funciones f(t) no quedan determinadas de manera única.

La expresión de la integral de inversión es la siguiente:

$$f(mT) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} F(z) z^{m-1} dz \qquad \ldots\ldots \qquad (3.33)$$

C_0 designa un contorno de integración circular que encierra todas las singularidades de F(z).

Ejemplo 3.6. Obtener la transformada inversa de:

$$F(z) = \frac{z^2 a}{(z-a)^2}$$

que corresponde a la transformada número 4 de la tabla II.

Sustituyendo F(z) en la integral de inversión:

$$f(mT) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{z^2 a}{(z-a)^2} z^{m-1} dz = \frac{a}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{z^{m+1}}{(z-a)^2} dz$$

esta integral puede evaluarse mediante el método de los residuos. Obsérvese que el integrando tiene un polo de segundo --

orden entonces, el residuo b_1 está dado por:

$$b_1 = \lim_{z \to a} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z-a)^2 \frac{Z^{m+1}}{(z-a)^2} \right\}$$

$$b_1 = \lim_{z \to a} (m+1) z^m$$

$$b_1 = (m+1) a^m$$

por tanto:

$$f(mT) = 2\pi i \left[\frac{a}{2\pi i} (m+1) a^m \right]$$

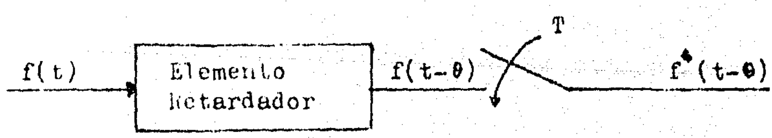
$$\therefore \; f(mT) = (m+1) a^{m+1}$$

La Transformada Z Modificada.

El método de la transformada Z modificada surge, debido al inconveniente que se presenta al manejar sistemas de-datos muestreados mediante la transformada Z, porque ésta únicamente proporciona información en los puntos de muestra.

En la deducción de la expresión de la transformada-modificada, se utiliza el artificio de incorporar en el sistema muestreador, un elemento retardador que puede retrasar una señal continua múltiplos enteros y fraccionarios de T.

Gráficamente, el sistema puede quedar representado por el siguiente diagrama (1):



en el cual:

$\theta = (N+\Delta)T$

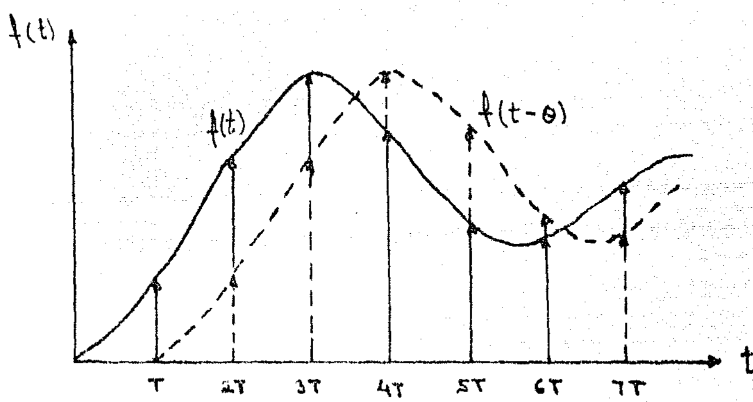
N.- número entero de muestras desplazadas.

Δ .- número fraccionario de muestras desplazadas,

$0 < \Delta < 1$

Al introducir el término θ, se presenta la dificultad adicional de que los valores muestreados de la función -- original no corresponden a los de la función retrasada; del -

mismo modo, la transformada Z de la primera no contiene la misma información que la de la segunda, pues el período de muestra permanece constante, como se ilustra en el esquema que sigue:



La transformada Z de la función retrasada es:

$$Z\{f(t-\theta)\} = \sum_{m=0}^{\infty} f[(m-\theta)T] z^{-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f[(m-N-\Delta)T] z^{-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f[mT-NT-\Delta T] z^{-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f(mT-NT-\Delta T+T-T) z^{-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f[(m-N-1)T+(1-\Delta)T] z^{-m}$$

Sea m= 1-Δ y k= n-N-1, entonces:

$$Z\{f(t-\theta)\} = \sum_{k=-N-1}^{\infty} f(kT+mT)\, z^{-k-N-1}$$

y para series unilaterales derechas:

$$Z\{f(t-\theta)\} = z^{-N-1}\sum_{k=0}^{\infty} f(kT+mT)\, z^{-k} \quad \ldots\ldots \quad (3.34)$$

En la ecuación de definición de la transformada Z modificada, no se incluye el número de muestras desplazadas N, y es (4):

$$F(z,m) = Z\{f(t)\} = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} f(nT+mT)\, z^{-n} \quad \ldots\ldots \quad (3.35)$$

Como fue indicado, la transformada Z modificada proporciona información entre señales, porque el término m toma cualquier valor entre cero y la unidad, de modo que puede recorrer completamente dicho intervalo. La relación que existe entre las transformadas modificada y ordinaria (negativa) es:

$$F(z) = \lim_{m \to 0} z\,F(z,m) \quad \ldots\ldots \quad (3.36)$$

el miembro derecho de la última igualdad, da información del sistema en los puntos de muestra, por tanto, puede afirmarse que la transformada Z es un caso especial de la transformada Z modificada, cuando se verifica la ecuación (3.36), (15).

a) Obtención de Transformadas de Funciones:

El método para obtener expresiones cerradas de trans formadas Z modificadas, consiste en la sustitución directa de las funciones en (3.35), y en la evaluación de la serie resul tante.

Ejemplo 3.H. Obtener la transformada Z modificada de la función f(t)= t.

$$Z_m\{f(t)\} = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} f(nT + mT)\, z^{-n}$$

$$Z_m\{f(t)\} = T z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} + mT z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

La transformada Z del primer sumando, se calcula siguiendo el procedimiento utilizado en el ejemplo 3.E.

$$Z\{n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = -z\sum_{n=0}^{\infty} -n z^{-n-1} = -z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

$$Z\{n\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$\therefore\ Z\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

la transformada del segundo sumando, corresponde a la de la función f(t)= 1, entonces:

$$Z_m\{f(t)\} = T z^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) + mT z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

finalmente:

$$Z_m\{t\} = \frac{T}{(z-1)^2} + \frac{mT}{(z-1)}$$

Ejemplo 3.I. Transformada Z modificada de un decaimiento exponencial.

$$f(t)=e^{-at}$$

$$Z_m\{e^{-at}\}=z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-naT-maT} z^{-n}$$

$$Z_m\{e^{-at}\}=z^{-1}\left[e^{-maT}+e^{-aT-maT}z^{-1}+e^{-2aT-maT}z^{-2}+\dots\right]$$

$$Z_m\{e^{-at}\}=z^{-1}e^{-maT}\left[1+e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}+\dots\right]$$

$$Z_m\{e^{-at}\}=z^{-1}e^{-maT}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-naT}z^{-n}$$

$$Z_m\{e^{-at}\}=z^{-1}e^{-maT}\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$Z_m\{e^{-at}\}=z^{-1}e^{-maT}\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

$$\therefore\ Z_m\{e^{-at}\}=\frac{e^{-maT}}{z-e^{-aT}}$$

b) Propiedades de la Transformada Z Modificada (15, 39):

1.- Linealidad.-

$$Z_m\{a f(t) + b g(t)\} = a F_m(z,m) + b G_m(z,m) \quad \ldots\ldots \quad (3.37)$$

2.- Teorema del Valor Inicial.-

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{\substack{m = 0 \\ z \to \infty}} z F_m(z, m) \quad \ldots\ldots \quad (3.38)$$

3.- Teorema del Valor Final.-

$$\lim_{n \to \infty} f[(n+m)]T = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z, m) \quad \ldots\ldots \quad (3.39)$$

4.- Diferenciación con Respecto a m.-

$$Z_m\left\{\frac{\partial}{\partial m} f(n, m)T\right\} = \frac{\partial}{\partial m} F_m(z, m) \quad \ldots\ldots \quad (3.40)$$

5.- Teorema de Traslación Compleja.-

$$Z_m\left\{e^{-at} f(t)\right\} = e^{aT(1-m)} F_m(z e^{aT}, m) \quad \ldots\ldots \quad (3.41)$$

6.- Multiplicación por t.-

$$Z_m\{t f(t)\} = T\left[(m-1) F_m(z,m) - z \frac{\partial F_m(z,m)}{\partial z}\right] \quad \ldots\ldots \quad (3.42)$$

c) Inversión de la Transformada Z Modificada:

El método más directo para invertir transformadas es mediante el uso de tablas. Existe también una integral de inversión, parecida a la presentada en páginas anteriores para la transformada Z negativa (15), sin embargo, como el objetivo principal al manejar la transformada modificada es el de obtener el comportamiento de la función entre puntos de muestra,

TABLA No. III

TRANSFORMADAS Z MODIFICADAS.

No.	f(t)	F(z,m)
1	1	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})}$
2	t	$\dfrac{mTz^{-1}}{1-z^{-1}} + \dfrac{Tz^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$
3	t^n	$\lim\limits_{a\to 0} (-1)^n \dfrac{\partial^n}{\partial a^n}\left\{\dfrac{e^{-amT}z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right\}$
4	e^{-at}	$\dfrac{e^{-amT}z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
5	sen wt	$z^{-1}\left\{\dfrac{\text{sen } mwT+z^{-1}\text{sen}(1-m)wT}{1-2z^{-1}\cos wT+z^{-2}}\right\}$
6	cos wT	$z^{-1}\left\{\dfrac{\cos mwT-z^{-1}\cos(1-m)wT}{1-2z^{-1}\cos wT+z^{-2}}\right\}$
7	senh at	$\dfrac{z^{-1}\text{senh } amT+z^{-2}\text{senh}(1-m)aT}{1-2z^{-1}\cosh aT+z^{-2}}$
8	cosh at	$\dfrac{z^{-1}\cosh amT-z^{-2}\cosh(1-m)aT}{1-2z^{-1}\cosh aT+z^{-2}}$
9	e^{-at} sen wt	$z^{-1}e^{-amT}\left\{\dfrac{\text{sen } mwT+z^{-1}e^{-aT}\text{sen}(1-m)wT}{1-2\cdot z^{-1}e^{-aT}\cos wT+e^{-2aT}z^{-2}}\right\}$
10	e^{-at} cos wt	$z^{-1}e^{-amT}\left\{\dfrac{\cos mwT-z^{-1}e^{-aT}\cos(1-m)wT}{1-2z^{-1}e^{-aT}\cos wT+e^{-2aT}z^{-2}}\right\}$

el procedimiento más utilizado es el de división directa, que proporciona una expresión numérica para cada intervalo

$$nT \leq t \leq (n+1)T,$$

correspondiendo cada uno de ellos a cada coeficiente de la serie.

Ejemplo 3.J. Calcular la inversa de la siguiente transformada Z modificada, por división directa (4):

$$F(z,m) = \frac{z^{-1}(1-e^{-m/4}) - z^{-2}(0.7788 - e^{-m/4})}{(1-z^{-1})(1-0.7788\,z^{-1})}$$

$$F(z,m) = \frac{z^{-1} - z^{-1}e^{-m/4} - 0.7788\,z^{-2} + z^{-2}e^{-m/4}}{1 - 1.7788\,z^{-1} + 0.7788\,z^{-2}}$$

$$F(z,m) = \frac{z^{-1} - 0.7788\,z^{-2}}{1-1.7788\,z^{-1}+0.7788\,z^{-2}} - \frac{(z^{-1} - z^{-2})\,e^{-m/4}}{1-1.7788\,z^{-1}+0.7788\,z^{-2}}$$

efectuando las dos divisiones:

$$F(z,m) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \ldots +$$
$$e^{-m/4}(z^{-1} + 0.7788\,z^{-2} + 0.6065\,z^{-3} + 0.4723\,z^{-4} + 0.3678\,z^{-5} + \ldots)$$

agrupando términos comunes:

$$F(z,m) = (1-e^{-m/4})z^{-1} + (1-0.7788\,e^{-m/4})z^{-2} + (1-0.6065\,e^{-m/4})z^{-3} +$$
$$(1-0.4723\,e^{-m/4})z^{-4} + (1-0.3678\,e^{-m/4})z^{-5} + \ldots$$

$$F(z,m) = C_1(m)z^{-1} + C_2(m)z^{-2} + \dots + C_n(m)z^{-n} + \dots$$

$C_1(m) = 1-e^{-m/4}$ $\qquad 0 \leq t \leq T$

$C_2(m) = 1-0.7788e^{-m/4}$ $\qquad T \leq t \leq 2T$

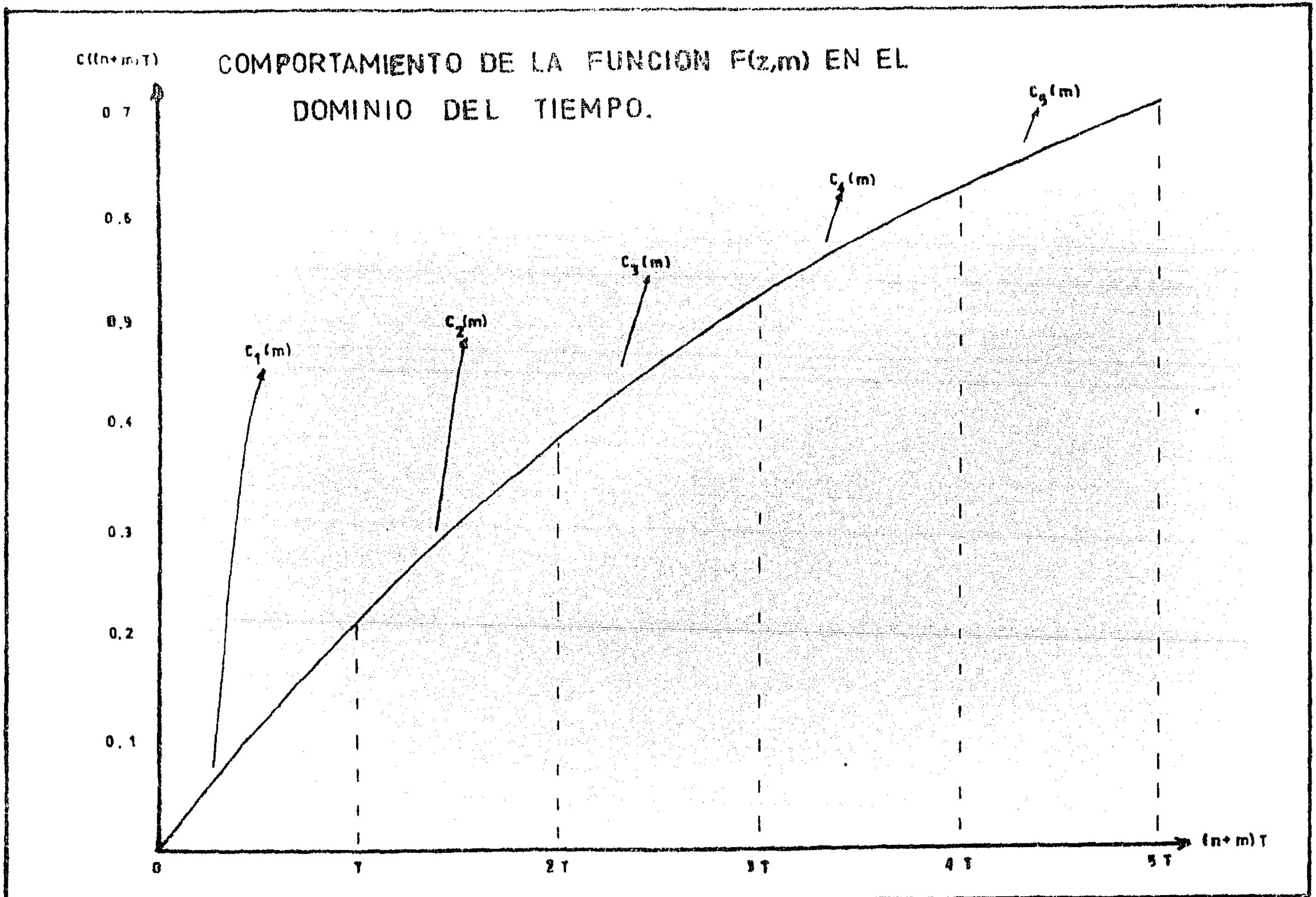
$C_3(m) = 1-0.6065e^{-m/4}$ $\qquad 2T \leq t \leq 3T$

$C_4(m) = 1-0.4723e^{-m/4}$ $\qquad 3T \leq t \leq 4T$

$C_5(m) = 1-0.3678e^{-m/4}$ $\qquad 4T \leq t \leq 5T$

Para diferentes valores de m, la inversa de $F(z,m)$, se comporta de la manera siguiente:

m	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
0.00	0.0000	0.2212	0.3935	0.5277	0.6322
0.25	0.0606	0.2684	0.4302	0.5563	0.6545
0.50	0.1175	0.3127	0.4648	0.5832	0.6754
0.75	0.1710	0.3544	0.4972	0.6084	0.6951
1.00	0.2212	0.3935	0.5277	0.6322	0.7136

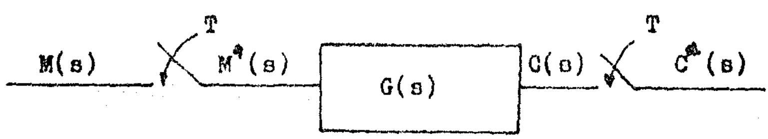


C((n+m)T)
COMPORTAMIENTO DE LA FUNCION F(z,m) EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
T
2 T
3 T
4 T
5 T
(n+ m) T
C1 (m)
C2 (m)
C3 (m)
C4 (m)
C5 (m)

Aplicación al Análisis de Diagramas de Bloques.

En esta sección se aplicará la transformada Z al análisis de diagramas de bloques, utilizando como conceptos primarios los de función de transferencia y de diagramas de bloques; a éstos últimos, se les añadirá el símbolo de un muestreador y junto con los de suma y multiplicación, constituirán los elementos básicos para la representación de sistemas.

El siguiente esquema muestra un sistema lineal:



en el que se han incluído dos muestreadores sincrónicos, el asterisco denota una función muestreada.

La salida de un tren de impulsos puede ser representada, en el dominio del tiempo (5), mediante una variante de la ecuación (3.1):

$$c(t)=\sum_{k=0}^{\infty} m(kT)g(t-kT) \quad \ldots\ldots \quad (3.43)$$

la señal de salida es la suma de las respuestas de cada pulso.

Por la ecuación (3.18), la transformada Z de la señal de salida es:

$$C(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c(nT)z^{-n} \quad \ldots\ldots \quad (3.44)$$

sustituyendo (3.43) en (3.44):

$$C(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} m(kT)g(nT-kT)z^{-n} \quad \ldots\ldots \quad (3.45)$$

y haciendo el cambio de variable i= n-k

$$C(z)=\sum_{i=-k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} m(kT)g(iT)z^{-(i+k)} \quad \ldots\ldots \quad (3.46)$$

si se manejan series unilaterales:

$$C(z)=\sum_{i=0}^{\infty} g(iT)z^{-i}\sum_{k=0}^{\infty} m(kT)z^{-k} \quad \ldots\ldots \quad (3.47)$$

cada una de las sumas de la expresión anterior, representan - las transformadas de las funciones g(t) y m(t), entonces:

$$C(z)=G(z)M(z) \quad \ldots\ldots \quad (3.48)$$

por tanto:

$$G(z)=\frac{C(z)}{M(z)} \quad \ldots\ldots \quad (3.49)$$

G(z) es la función de transferencia de un sistema de datos muestreados o la función de transferencia de impulsos; relaciona la transformada Z de la señal de salida con la transformada Z de la señal de entrada, como corresponde a una --- transformación de esta clase.

Dadas funciones de transferencia, pueden desarrollarse expresiones correspondientes a funciones de transferencia de sistemas muestreados.

Ejemplo 3.K. Si G(s)= 1/s, entonces:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$$G(z) = Z\{g(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Ejemplo 3.I. Para un sistema lineal de primer orden, la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/\tau}{s + 1/\tau}\right\} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$G(z) = Z\{g(t)\} = \frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT/\tau} z^{-n}$$

en concordancia con la ecuación (3.10)

$$G(z) = \frac{1}{\tau}\,\frac{z}{z - e^{-T/\tau}}$$

finalmente:

$$G(z) = \frac{1/\tau}{1 - e^{-T/\tau} z^{-1}}$$

Obsérvese que si se cuenta con tablas que contengan tanto transformadas de Laplace como Z, el procedimiento es directo, sin embargo, debe tenerse en mente lo que realmente se está haciendo, ésto es:

$$G(z) = Z\left[\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}\right] = Z\{g(t)\} \quad \ldots\ldots \quad (3.50)$$

Ejemplo 3.M. Obtener la transformada Z de:

$$F(s) = (1-e^{-sT})\, G(s)$$

$$Z\{F(s)\} = Z\{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\} = Z\{f(t)\}$$

$$Z\{F(s)\} = Z\{\mathcal{L}^{-1}\{G(s) - e^{-sT}G(s)\}\}$$

$$Z\{F(s)\} = Z\{g(t) - g(t-T)\}$$

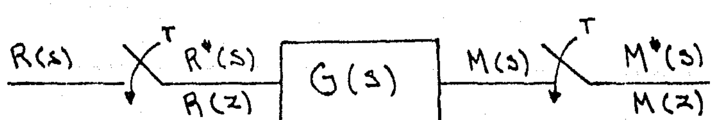
empleando las propiedades de linealidad y de traslación real·

$$Z\{F(s)\} = G(z) - z^{-1}G(z)$$

$$\therefore \quad Z\{F(s)\} = \frac{z-1}{z}\, G(z)$$

A partir de la relación (3.49), es factible encontrar las funciones de transferencia de cualquier sistema lineal -- (15). Existen ciertas configuraciones que por su frecuencia - de aparición y su representatividad, son considerados básicos, ellas son las que a continuación se presentan.

1.-

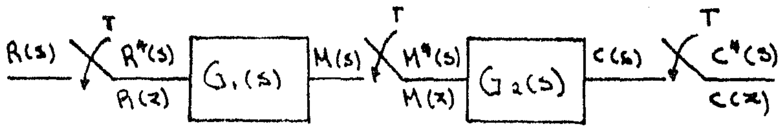


$$M(z) = G(z)R(z) \quad ..... \quad (3.51)$$

que corresponde al sistema analizado para obtener la relación

(3.49).

2.-



la función de transferencia para $M^*(s)$ es:

$$M(z) = G_1(Z)\,R(z) \qquad \ldots\ldots \qquad (3.52)$$

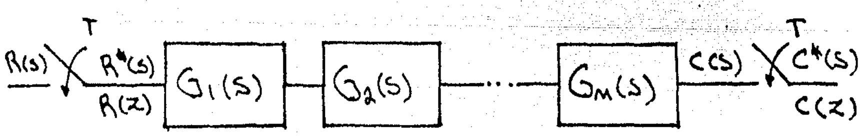
y la salida del tren de impulsos:

$$C(z) = G_2(z)\,M(Z) \qquad \ldots\ldots \qquad (3.53)$$

sustituyendo (3.52) en esta última, se llega al resultado -- deseado.

$$C(z) = G_1(Z)\,G_2(Z)\,R(z) \qquad \ldots\ldots \qquad (3.54)$$

3.-



en este caso, se trata de un sistema con n funciones de transferencia conectadas en serie, sin ningún tipo de interacción-entre ellas; ya se ha demostrado que la función de transferencia total es el producto de todas ellas, entonces la respuesta del sistema queda simbolizada por:

$$C(z) = Z\left\{\prod_{i=1}^{M} G_i(s)\right\} R(z) \qquad \ldots\ldots \qquad (3.55)$$

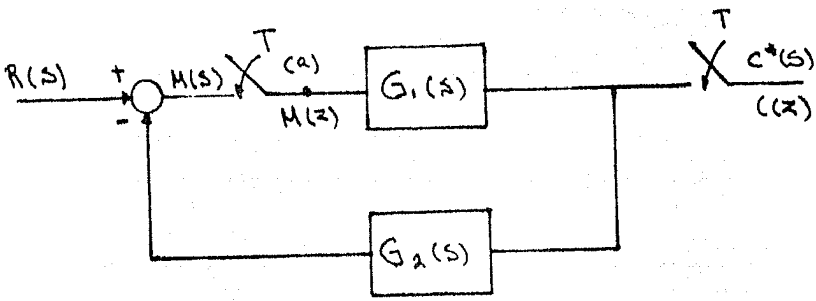
si se simboliza

$$G_T(z) = \mathcal{Z}\left\{\prod_{i=1}^{m} G_i(s)\right\}$$

la ecuación (3.55), puede escribirse como:

$$C(z) = G_T(z)\,R(z) \qquad \ldots\ldots \qquad (3.56)$$

4.-



como primera etapa, se hace un análisis en el punto (a), considerando la entrada R(s) y el circuito cerrado formado por ambas funciones de transferencia (en serie). En el punto (a), se verifica la relación:

$$M(z) = R(z) - G_T(z)\,M(z) \qquad \ldots\ldots \qquad (3.57)$$

despejando M(z)

$$M(z) = \frac{R(z)}{1 + G_T(z)} \qquad \ldots\ldots \qquad (3.58)$$

C(z) está dada por:

$$C(z) = G_1(z)\,M(z) \qquad \ldots\ldots \qquad (3.59)$$

combinando (3.58) y (3.59), se obtiene la salida del sistema:

$$C(z) = R(z)\,\frac{G_1(z)}{1 + G_T(z)} \qquad \ldots\ldots \qquad (3.60)$$

de igual manera, existen relaciones para la transformada Z --

modificada de estas configuraciones (15).

Ya se ha hablado de la necesidad de obtener señales continuas a partir de conjuntos discretos de datos; cuando no se maneja transformada Z modificada, existen otros procedimientos que permiten tal conversión. El propósito general de esta operación, es suministrar a un dispositivo analógico, por ejemplo un sistema de control, una señal reconstruída a partir de otra que ha sido previamente muestreada.

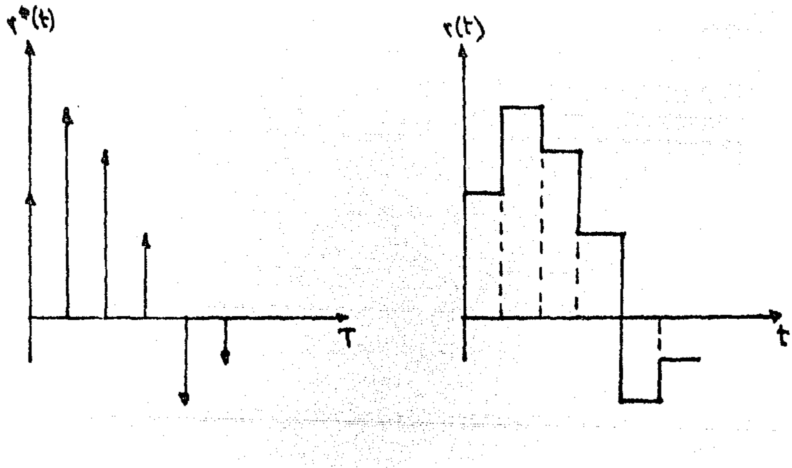
Se trata pues, de extrapolar el último valor recibido para obtener el comportamiento de una función entre éste y el consecutivo, que será recibido al siguiente período de muestreo.

Físicamente, estos extrapoladores se forman, ya sea mediante combinaciones adecuadas de elementos electrónicos en los circuitos de una computadora, conocidos como generadores de funciones (6), o simulando las características de las funciones de transferencia del extrapolador (15).

Como la salida de un extrapolador es una señal continua, se emplean funciones de transferencia dependientes de s, las que deben incluirse en el desarrollo de las funciones de transferencia de impulsos para sistemas completos.

Los dos métodos de extrapolación más utilizados, son el extrapolador de orden cero (o de escalera), y el de primer orden (o trapezoidal), (36). La clasificación por órdenes, se basa en lo complejo del procedimiento para reproducir las funciones, lo que significa que existen métodos de órdenes mayores (15,38); sin embargo, para los objetivos que se persiguen es suficiente ilustrar y manejar el referido en primer lugar.

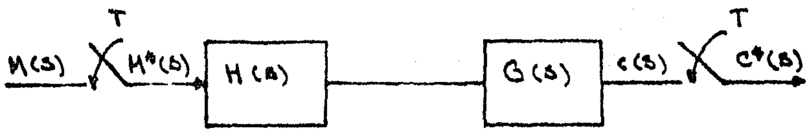
El extrapolador de orden cero, simplemente mantiene el valor de la señal de salida hasta el siguiente pulso, formando una sucesión de escalones de base igual a T.



La forma de generar escalones es mediante la diferencia de las funciones f(t)= 1 y escalón unitario $S_k(t)$. Si el período de muestreo es T, la transformada de Laplace del extrapolador de orden cero tiene la siguiente expresión:

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \quad \ldots\ldots \quad (3.61)$$

Para ilustrar la inclusión de la función de transferencia del extrapolador, en la correspondiente función de un sistema completo, se obtendrá la función de tranferencia de pulsos de un proceso, representado por un sistema de primer-- orden con un extrapolador de orden cero (5).



para el extrapolador de orden cero: $H(s) = \dfrac{1 - e^{-Ts}}{s}$

para el proceso: $G(s) = \dfrac{1}{\tau s + 1}$

la respuesta de la combinación de H(s) y G(s) (configuración- en serie), es:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G_T(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\,G(s)\right\}$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{\tau s + 1}\right\}$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(\tau s + 1)} - \frac{e^{-Ts}}{s(\tau s + 1)}\right\}$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(\tau s + 1)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-Ts}}{s(\tau s + 1)}\right\}$$

nótese que la única diferencia entre las dos funciones, está en el factor exponencial de la segunda.

Desarrollando en fracciones parciales:

$$\frac{1}{s(\tau s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau}$$

entonces:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/\tau}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-Ts}}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-Ts}}{s+1/\tau}\right\}$$

utilizando la tabla No. I y las propiedades de la transformada de Laplace.

$$c(t) = F(t) - e^{-t/\tau} - F_T(t) + e^{-\frac{(t-T)}{\tau}} \quad ; \quad F(t)=1$$

$$c(t) = F(t) - F(t-T) - e^{-t/\tau}(1 - e^{T/\tau})$$

aplicando transformada Z a la función anterior:

$$G_T(z) = Z\left\{F(t) - F(t-T) - e^{-t/\tau}(1-e^{T/\tau})\right\}$$

$$G_T(z) = Z\{F(t)\} - Z\{F(t-T)\} - Z\{e^{-t/\tau}\} + Z\{e^{-\frac{(t-T)}{\tau}}\}$$

empleando la transformada número 1 de la tabla II, y las ecuaciones (3.10) y (3.21), se tiene:

$$G_T(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T\tau}z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1-e^{-T\tau}z^{-1}}$$

$$G_T(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}\left(1-z^{-1}\right) - \frac{1}{1-e^{-T\tau}z^{-1}}\left(1-z^{-1}\right)$$

$$G_T(z) = \left(1-z^{-1}\right)\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T\tau}z^{-1}}\right]$$

$$G_T(z) = 1 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-T\tau} z^{-1}} = \frac{1 - e^{-T\tau} z^{-1} - 1 + z^{-1}}{1 - e^{-T\tau} z^{-1}}$$

finalmente:

$$G_T(z) = \frac{\left(1 - e^{-T\tau}\right) z^{-1}}{1 - e^{-T\tau} z^{-1}} \qquad \ldots\ldots \qquad (3.62)$$

Solución de Ecuaciones en Diferencias.

Los sistemas que se modelan empleando ecuaciones en diferencias, es decir, sistemas cuyas funciones de excitación y de respuesta no son continuas, pueden manejarse utilizando transformada Z, lo que permite obtener la solución en el dominio del tiempo mediante cualquiera de los métodos de inversión ya desarrollados.

Tomando una ecuación lineal en diferencias de coeficientes constantes, no homogénea, de la forma:

$$a_0 y_m + a_1 y_{m-1} + \ldots + a_k y_{m-k} = b_0 x_m + b_1 x_{m-1} + \ldots + b_j x_{m-j} \quad \ldots\ldots \qquad (3.63)$$

en la cual el término de la derecha es la parte no homogénea, y ambas variables (x,y), son funciones de un parámetro t definido solamente para t=n (n es un entero positivo), además todas las condiciones iniciales se suponen nulas.

Aplicando transformada Z a (3.63):

$$Z\{a_0 y_m + a_1 y_{m-1} + \ldots + a_k y_{m-k}\} = Z\{b_0 x_m + b_1 x_{m-1} + \ldots + b_j x_{m-j}\}$$

$$a_0 \sum_{m=0}^{\infty} y_m z^{-m} + \ldots + a_k \sum_{m=0}^{\infty} y_{m-k} z^{-m} = b_0 \sum_{m=0}^{\infty} x_m z^{-m} + \ldots + b_j \sum_{m=0}^{\infty} x_{m-j} z^{-m}$$

por el teorema de traslación real:

$$a_0 Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \ldots + a_k z^{-k} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \ldots + b_j z^{-j} X(z)$$

agrupando términos:

$$Y(z)\left[a_0+a_1z^{-1}+\dots+a_kz^{-k}\right]=X(z)\left[b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_jz^{-j}\right]$$

$$Y(z)=X(z)\,\frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_jz^{-j}}{a_0+a_1z^{-1}+\dots+a_kz^{-k}} \quad \dots\dots \quad (3.64)$$

en forma abreviada, puede escribirse como:

$$Y(z)=X(z)\,D(z) \quad \dots\dots \quad (3.65)$$

$D(z)$ es el cociente de polinomios, y por definición es una -- función de transferencia.

$$D(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \quad \dots\dots \quad (3.66)$$

De las últimas ecuaciones se derivan dos resultados importantes: el primero, que proporcionan una expresión para- la función de transferencia de un sistema discreto y la segunda, que indican la forma de resolver una ecuación en diferencias de las características descritas antes. La única aclaración adicional que debe hacerse es que, en el caso de existir condiciones iniciales diferentes de cero, deben incluirse en- el proceso de transformación, lo que modifica un poco las expresiones desarrolladas.

Ejemplo 3.N. Resolver la siguiente ecuación en diferencias:

$$f_{m+1} + 2 f_m = 1 \quad , \quad f_0 = 1, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

aplicando transformada Z, se tiene:

$$Z\{f_{m+1} + 2 f_m\} = Z\{1\}$$

$$Z\{f_{m+1}\} + 2 Z\{f_m\} = Z\{1\}$$

de la ecuación (3.20), y la tabla II:

$$z F(z) - z(1) + 2 F(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$F(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)} + \frac{z}{z+2}$$

$$F(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})} + \frac{1}{1+2z^{-1}}$$

descomponiendo en factores el primer sumando, del miembro derecho, y desarrollando en fracciones parciales:

$$F(z) = \frac{1/3}{(1-z^{-1})} - \frac{1/3}{(1+2z^{-1})} + \frac{1}{(1+2z^{-1})}$$

la transformada inversa de esta función es:

$$f_m = \frac{1}{3}(1) - \frac{1}{3}(-2)^m + (-2)^m$$

y factorizando:

$$f_m = \frac{1}{3}\left[1 + (-2)^{m+1}\right]$$

IV.- APLICACIONES.

4.a. Destilación Binaria en una Columna de Platos.

Considérese la sección enriquecedora de una columna de platos, en donde se efectúa una destilación binaria de una mezcla ideal (26).

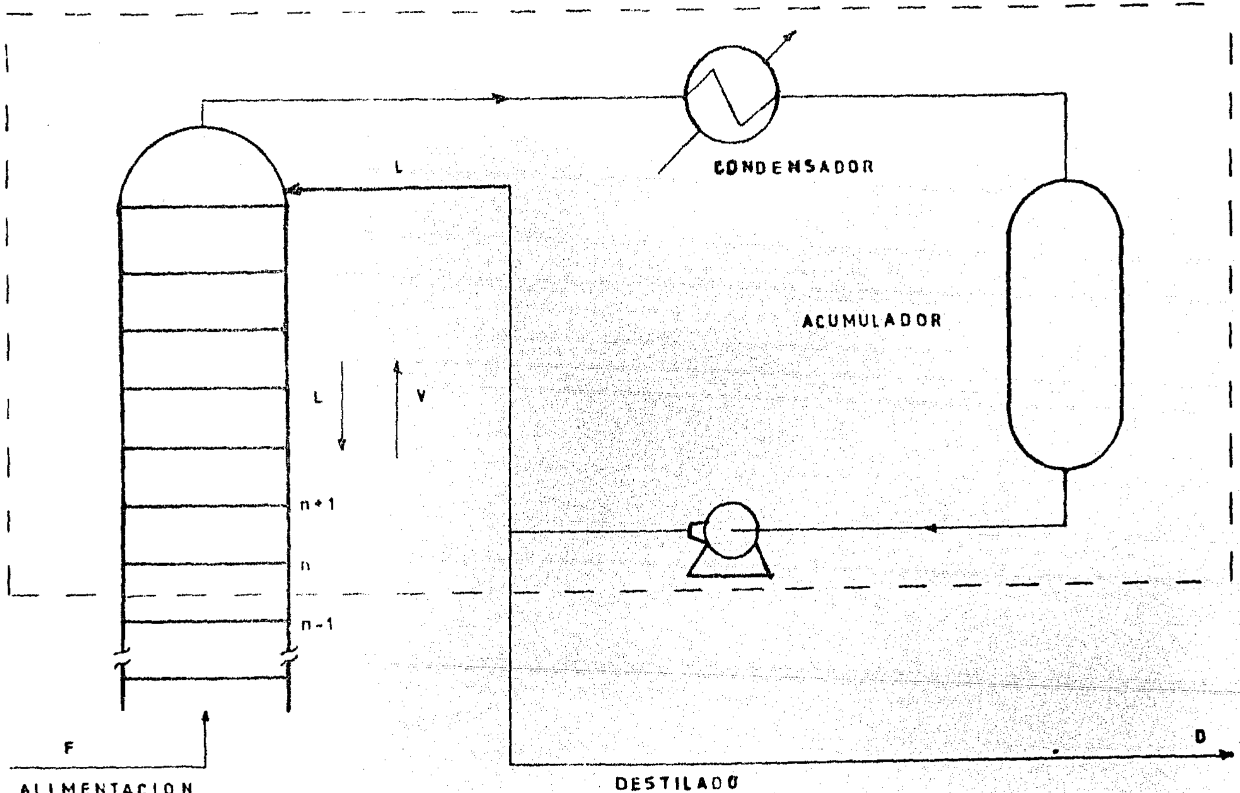
Los puntos de ebullición de los componentes puros, se encuentran en un intervalo pequeño de temperaturas, por lo que la volatilidad relativa puede suponerse constante (3). -- Además, los flujos de líquido y vapor son constantes, las pérdidas energéticas son mínimas y la eficiencia por plato es - del 100%.

Con base en todas las aclaraciones anteriores, al - hacer un balance de materia, se llegará a una ecuación en diferencias no lineal la cual, mediante una sustitución adecuada (32), puede reducirse a una forma lineal, cuya solución pro-- porciona la composición del componente más volátil en la fase líquida en función del número de plato.

Haciendo un balance para el componente más volátil, en la zona encerrada de la figura anexa:

$$V y_{M-1} = L X_M + D X_D \quad \ldots\ldots \quad (4.1)$$

$$V y_{M-1} - L X_M - D X_D = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4.2)$$



SECCION ENRIQUECEDORA. COLUMNA DE PLATOS.

La volatilidad relativa de un componente con respecto al otro es:

$$\alpha_{AB} = \frac{\bar{p}_A}{x_A} \frac{x_B}{\bar{p}_B} \qquad \ldots\ldots \qquad (4.3)$$

$\bar{p}_i$.- presión parcial del componente i.

P .- presión total del sistema.

además:

x_D.- fracción mol del componente más volátil en el destilado.

x_n.- fracción mol del componente más volátil, en la fase líquida, del plato n.

y_n.- fracción mol del componente más volátil, en la fase vapor, del enésimo plato.

Bajo la suposición de idealidad, puede utilizarse la ley de Dalton, de las presiones parciales: $\bar{p}_A = y_A P$. Entonces, la ecuación (4.3) se transforma en:

$$\alpha_{AB} = \frac{y_A P (1 - x_A)}{x_A (1 - y_A) P}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{(1 - x_A)}{x_A} \frac{y_A}{(1 - y_A)}$$

Para el componente más volátil, en el enésimo plato:

$$\alpha = \frac{1 - x_n}{x_n} \frac{y_n}{1 - y_n} \qquad \ldots\ldots \qquad (4.4)$$

despejando y_n:

$$y_n = \frac{\alpha x_n}{1 + \alpha x_n - x_n} \qquad \ldots\ldots \qquad (4.5)$$

Sustituyendo (4.5) en (4.?):

$$V\left[\frac{\alpha X_{M-1}}{1+\alpha X_{M-1}-X_{M-1}}\right]-LX_M-DX_D=0$$

$$\frac{V\alpha X_{M-1}-LX_M(1+\alpha X_{M-1}-X_{M-1})-DX_D(1+\alpha X_{M-1}-X_{M-1})}{1+\alpha X_{M-1}-X_{M-1}}=0$$

$$V\alpha X_{M-1}-LX_M-L\alpha X_M X_{M-1}+LX_M X_{M-1}-DX_D+D\alpha X_D X_{M-1}+DX_D X_{M-1}=0$$

$$(1-\alpha)LX_M X_{M-1}-LX_M+(V\alpha-D\alpha X_D+DX_D)X_{M-1}-DX_D=0$$

Dividiendo entre $(1-\alpha)L$:

$$X_M X_{M-1}-\frac{X_M}{(1-\alpha)}+\left[\frac{DX_D(1-\alpha)+\alpha V}{L(1-\alpha)}\right]X_{M-1}-\frac{DX_D}{L(1-\alpha)}=0$$

$$X_M X_{M-1}+\frac{X_M}{(\alpha-1)}+\left[\frac{DX_D(\alpha-1)-\alpha V}{L(\alpha-1)}\right]X_{M-1}+\frac{DX_D}{L(\alpha-1)}=0$$

Los coeficientes del segundo, tercer y cuarto sumandos, son constantes. Sean éstos designados por:

$$a=(\alpha-1)^{-1}$$

$$b=\frac{DX_D(\alpha-1)-\alpha V}{L(\alpha-1)}$$

$$c=\frac{DX_D}{L(\alpha-1)}$$

La ecuación (4.2) sustituída puede escribirse como sigue:

$$X_m X_{m-1} + aX_m + bX_{m-1} + c = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4.6)$$

Esta ecuación es una ecuación en diferencias no -- lineal, llamada de Riccati. Puede reducirse al tipo lineal, mediante la transformación:

$$V_m = \frac{-1}{x_i - X_m} \quad \ldots\ldots \quad (4.7)$$

siendo x_i, la abscisa del punto correspondiente a la inter-- sección de las líneas de equilibrio y operación en un diagrama y-vs-x; y raíz del polinomio:

$$h^2 + (a+b)h + c = 0$$

Arreglando (4.7):

$$X_m = \frac{1 + x_i V_m}{V_m} \quad \ldots\ldots \quad (4.8)$$

Sustituyendo (4.8) en (4.6):

$$\left(\frac{1+x_iV_m}{V_m}\right)\left(\frac{1+x_iV_{m-1}}{V_{m-1}}\right) + a\left(\frac{1+x_iV_m}{V_m}\right) + b\left(\frac{1+x_iV_{m-1}}{V_{m-1}}\right) + c = 0 \quad \ldots \quad (4.9)$$

Multiplicando por $V_n V_{n-1}$:

$$(1+x_iV_m)(1+x_iV_{m-1}) + V_{m-1}a(1+x_iV_m) + V_m b(1+x_iV_{m-1}) + V_mV_{m-1}c = 0$$

$$1 + x_i(V_m+V_{m-1}) + x_i^2V_mV_{m-1} + aV_{m-1} + ax_iV_mV_{m-1} + bV_m + x_ibV_mV_{m-1} + V_mV_{m-1}c = 0$$

$$(b+x_i)V_m + (a+x_i)V_{m-1} + 1 + x_i^2V_mV_{m-1} + x_i(a+b)V_mV_{m-1} + V_mV_{m-1}c = 0$$

pero

$$x_i^2 V_mV_{m-1} + x_i(a+b)V_mV_{m-1} + V_mV_{m-1}c = 0$$

entonces:

$$(b+x_i)V_n+(a+x_i)V_{n-1}+1=0 \quad \ldots\ldots \quad (4.10)$$

si se designan por las literales A y B los coeficientes de V_n, y V_{n-1} respectivamente, se obtiene en forma más compacta una ecuación lineal, que puede resolverse por transformada Z.

$$AV_n+BV_{n-1}+1=0 \quad \ldots\ldots \quad (4.11)$$

Aplicando transformada Z:

$$\mathcal{Z}\{AV_n+BV_{n-1}\}=\mathcal{Z}\{-1\}$$

$$A\mathcal{Z}\{V_n\}+B\mathcal{Z}\{V_{n-1}\}=-\mathcal{Z}\{1\}$$

$$AV(z)+Bz^{-1}V(z)=\frac{-1}{1-z^{-1}}$$

$$V(z)\left(A+Bz^{-1}\right)=-\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$V(z)=\frac{-1}{1-z^{-1}}\,\frac{1}{A+Bz^{-1}}=\frac{-1}{1-z^{-1}}\,\frac{A^{-1}}{1+\frac{B}{A}z^{-1}}$$

$$V(z)=\frac{-1}{A}\,\frac{1}{1-z^{-1}}\,\frac{1}{1+\left(\frac{B}{A}\right)z^{-1}} \quad \ldots\ldots \quad (4.12)$$

Desarrollando en fracciones parciales:

$$V(z)=-\frac{1}{A}F(z)$$

$$F(z)=\frac{H}{1-z^{-1}}+\frac{I}{1+\left(\frac{B}{A}\right)z^{-1}}$$

$$1 = H\left(1+\left(\frac{B}{A}\right)z^{-1}\right) + I\left(1-z^{-1}\right)$$

$$z=1: \quad 1=\left(1+\frac{B}{A}\right)H\ ; \qquad H=\frac{A}{A+B}$$

$$z=-\frac{B}{A}: \quad 1=\left(1+\frac{A}{B}\right)I; \qquad I=\frac{B}{B+A}$$

$$F(z)=\frac{A}{A+B}\,\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{B}{B+A}\,\frac{1}{1+\left(\frac{B}{A}\right)z^{-1}}$$

$$V(z)=-\frac{1}{A}\,\frac{A}{A+B}\,\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{A}\,\frac{B}{B+A}\,\frac{1}{1+\left(\frac{B}{A}\right)z^{-1}}$$

Invirtiendo:

$$V_M=-\frac{1}{A+B}Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-z^{-1}}\right\}-\frac{B}{A(B+A)}Z^{-1}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{B}{A}\right)z^{-1}}\right\}$$

de la tabla No. II y del ejemplo 3.D. inciso 3:

$$V_M=-\frac{1}{A+B}-\frac{B}{A(B+A)}\left(-\frac{B}{A}\right)^{M}$$

$$V_M=-\frac{1}{A+B}+\frac{1}{B+A}\left(-\frac{B}{A}\right)\left(-\frac{B}{A}\right)^{M}$$

$$V_M=\frac{1}{A+B}\left[\left(-\frac{B}{A}\right)^{M+1}-1\right]$$

las equivalencias de A, B y V_n son:

$$A=(b+x_i) \qquad B=(a+x_i)$$

$$V_M=\frac{1}{X_M-x_i}$$

$$\frac{1}{X_n - x_i} = \frac{1}{(a+x_i)+(b+x_i)}\left[\left(-\frac{a+x_i}{b+x_i}\right)^{m+1} - 1\right]$$

$$X_n - x_i = \frac{(a+x_i)+(b+x_i)}{\left[\left(-\frac{a+x_i}{b+x_i}\right)^{m+1} - 1\right]}$$

finalmente, se despeja X_n. a y b son constantes definidas en párrafos anteriores.

$$X_n = x_i + \frac{(a+x_i)+(b+x_i)}{\left[\left(-\frac{a+x_i}{b+x_i}\right)^{m+1} - 1\right]}$$

4.b. Destilación Multicomponente en una Columna de Platos.

Este segundo ejemplo, es una extensión directa del precedente. Se obtendrán expresiones para las composiciones de las fases líquida y vapor, en cualquier plato de la sección enriquecedora de la columna (28). Además de las consideraciones hechas en 4.a, se hacen las siguientes aclaraciones adicionales.

a) La relación de equilibrio líquido-vapor (K), es función de la temperatura y de la presión, es decir, se trata de soluciones ideales a presiones moderadas (43).

b) La composición del destilado es fija.

c) Se utiliza un condensador total.

d) Los platos se numeran de arriba hacia abajo, el plato superior se designa con el subíndice cero.

Nomenclatura:

L, V, D.- Flujos molares de líquido, vapor y destilado.

R.- Relación de reflujo. $R = L/V = 1 - D/V$

α_i.- Relación de volatilidad. $\alpha_i = K_i/K_b$

K_i.- Relación de equilibrio líquido-vapor, del componente i.

c.- Número total de componentes.

b.- Se refiere al componente patrón, en el que α y K están basados.

n.- Número de plato de la sección enriquecedora.

K_{bn}.- K del componente que tiene $\alpha = 1$, en el plato n.

Nota: Al escribir los símbolos de las composiciones (y,x), se omite el subíndice i, aunque se trate de cualquier componente.

Haciendo un balance de la sección considerada:

$$y_0 = X_D \quad \ldots\ldots \quad (4.13)$$

$$y_{m+1} = \frac{L}{V} X_m + \frac{D}{V} X_D$$

$$y_{m+1} = R X_m + (1-R) X_D \quad \ldots\ldots \quad (4.14)$$

$$K_m = \frac{y_m}{X_m} \quad \ldots\ldots \quad (4.15)$$

$$\alpha_i = \frac{K_i}{K_b} \quad \ldots\ldots \quad (4.16)$$

$$K_m = K_{im} = K_{im} \cdot \frac{K_{bm}}{K_{bm}} = \alpha_i K_{bm} \quad \ldots\ldots \quad (4.17)$$

$$K_m = \alpha_i K_{bm} \quad \ldots\ldots \quad (4.18)$$

$$\alpha_i K_{bm} = \frac{y_m}{X_m} \quad \ldots\ldots \quad (4.19)$$

en cada plato, debe cumplirse lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{a} X_i = 1 \quad \ldots\ldots \quad (4.20)$$

de la ecuación (4.15):

$$X_m = \frac{y_m}{K_m} \quad \ldots\ldots \quad (4.21)$$

sustituyendo (4.21) en (4.20) y desarrollando para un plato--determinado:

$$\sum_{i=1}^{c} \frac{y_i}{K_i} = \frac{y_1}{K_1} + \frac{y_2}{K_2} + \cdots + \frac{y_c}{K_c} = 1.0 \quad \ldots\ldots \quad (4.22)$$

multiplicando por K_b:

$$\sum_{i=1}^{c} \frac{y_i}{K_i} K_b = \frac{y_1 K_b}{K_1} + \frac{y_2 K_b}{K_2} + \cdots + \frac{y_c K_b}{K_c} = K_b$$

$$K_b = \sum_{i=1}^{c} \frac{y_i}{K_i/K_b} \quad \ldots\ldots \quad (4.23)$$

empleando (4.16), esta ecuación se cambia por la siguiente:

$$K_b = \sum_{i=1}^{c} \frac{y_i}{\alpha_i}$$

para el enésimo plato:

$$K_{bm} = \sum_{i=1}^{c} \frac{y_{im}}{\alpha_i} \quad \ldots\ldots \quad (4.24)$$

Definición:

$$\varphi_m = \prod_{i=0}^{m} K_{bi} = K_{b0} K_{b1} \cdots K_{bm} \quad \ldots\ldots \quad (4.25)$$

Definición:

$$\Theta_m = \varphi_{m-1} \frac{y_m}{\alpha_i} \quad \ldots\ldots \quad (4.26)$$

$$\sum_{i=1}^{c} \Theta_m = \sum_{i=1}^{c} \varphi_{m-1} \frac{y_m}{\alpha_i} = \varphi_{m-1} \sum \frac{y_m}{\alpha_i} = \varphi_{m-1} K_{bm} = \varphi_m$$

$$\sum^{c} \Theta_m = \rho_m \qquad \ldots\ldots \qquad (4.27)$$

Multiplicando (4.14) por K_{bn}:

$$K_{bm} y_{m+1} = K_{bm} R X_m + (1-R) K_{bm} X_D \qquad \ldots\ldots \qquad (4.28)$$

despejando x_n de la Ec. (4.19) y sustituyendo en (4.28):

$$K_{bm} y_{m+1} = K_{bm} R \frac{y_m}{\alpha_i K_{bm}} + (1-R) K_{bm} X_D \qquad \ldots\ldots \qquad (4.29)$$

multiplicando por $p_{n-1}\alpha_i^{-1}$:

$$\frac{\rho_{m-1}}{\alpha_i} K_{bm} y_{m+1} = \frac{R\, y_m}{\alpha_i} \frac{\rho_{m-1}}{\alpha_i} + (1-R) X_D \frac{\rho_{m-1}}{\alpha_i} K_{bm} \qquad \ldots\ldots \qquad (4.30)$$

de la ecuación (4.25): $\quad p_n = p_{n-1} K_{bn}$

de la ecuación (4.26): $\Theta_{n+1} = (p_n y_{n+1}) \alpha_i^{-1}$, entonces:

$$\Theta_{m+1} = \frac{R}{\alpha_i} \Theta_m + (1-R) X_D \frac{\rho_m}{\alpha_i} \qquad \ldots\ldots \qquad (4.31)$$

para el primer plato:

$$\Theta_1 = \frac{R}{\alpha_i} \Theta_0 + (1-R) X_D \frac{\rho_0}{\alpha_i} \qquad \ldots\ldots \qquad (4.32)$$

de la ecuación (4.25), para n=0:

$$\Theta_1 = \frac{R}{\alpha_i} \Theta_0 + (1-R) X_D \frac{K_{b0}}{\alpha_i} \qquad \ldots\ldots \qquad (4.33)$$

multiplicando por α_1:

$$\alpha_i \left(\frac{\rho_0 y_1}{\alpha_i} \right) = \frac{\alpha_i R \Theta_0}{\alpha_i} + \frac{(1-R) X_D K_{b0} \alpha_i}{\alpha_i} \qquad \ldots\ldots \qquad (4.34)$$

$$\rho_0 y_1 = R\,\Theta_0 + (1-R) X_D K_{b_0} \quad \ldots\ldots \quad (4.35)$$

si se hace n=0 en (4.29) y se compara con (4.35), se obtiene lo siguiente:

$$K_{b_0} y_1 = R\frac{y_0}{\alpha_i} + (1-R) X_D K_{b_0}$$

$$\Theta_0 = \frac{y_0}{\alpha_i} = \frac{X_D}{\alpha_i} \quad \ldots\ldots \quad (4.36)$$

Aplicando transformada Z a la ecuación (4.31):

$$Z\left\{\Theta_{m+1}\right\} = Z\left\{\frac{R}{\alpha_i}\Theta_m + (1-R) X_D \frac{\rho_m}{\alpha_i}\right\}$$

$$Z\left\{\Theta_{m+1}\right\} = \frac{R}{\alpha_i} Z\left\{\Theta_m\right\} + \frac{(1-R) X_D}{\alpha_i} Z\left\{\rho_m\right\}$$

$$z\,\Theta(z) - z\,\Theta_0 = \frac{R}{\alpha_i}\Theta(z) + \frac{(1-R) X_D}{\alpha_i} P(z)$$

sustituyendo (4.36) en esta última:

$$z\,\Theta(z) - z\frac{X_D}{\alpha_i} = \frac{R}{\alpha_i}\Theta(z) + \frac{(1-R) X_D}{\alpha_i} P(z)$$

$$z\,\Theta(z) - \frac{R}{\alpha_i}\Theta(z) = \frac{(1-R) X_D}{\alpha_i} P(z) + z\frac{X_D}{\alpha_i}$$

$$\Theta(z)\left\{z - \frac{R}{\alpha_i}\right\} = \left\{(1-R) P(z) + z\right\}\frac{X_D}{\alpha_i}$$

$$\Theta(z) = \left(\frac{(1-R) P(z) + z}{z - \frac{R}{\alpha_i}}\right)\frac{X_D}{\alpha_i} \quad \ldots\ldots \quad (4.37)$$

la transformada Z de la ecuación (4.27), se obtiene en seguida:

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=1}^{c} \Theta_n\right\} = \mathcal{Z}\left\{P_n\right\}$$

$$P(z) = \sum_{i=1}^{c} \Theta(z) \quad \ldots\ldots \quad (4.38)$$

sumando todos los componentes, en la ecuación (4.37):

$$\sum_{i=1}^{c} \Theta(z) = \left(Z + (1-R)P(z)\right) \sum_{i=1}^{c} \frac{(X_D/\alpha_i)}{Z - (R/\alpha_i)} \quad \ldots\ldots \quad (4.39)$$

para abreviar la notación, se hace $S_c = \sum_{i=1}^{c} \frac{(X_D/\alpha_i)}{Z - (R/\alpha_i)}$

entonces, la ecuación (4.39), se reduce a:

$$P(z) = \left(Z + (1-R)P(z)\right)S_c = ZS_c + (1-R)S_c P(z)$$

$$P(z) = \frac{Z S_c}{1 - (1-R)S_c} \quad \ldots\ldots \quad (4.40)$$

sustituyendo (4.40) en (4.37):

$$\Theta(z) = \frac{(X_D/\alpha_i)}{Z - (R/\alpha_i)} \left[Z + (1-R)\frac{Z S_c}{1-(1-R)S_c}\right]$$

$$\Theta(z) = \frac{(X_D/\alpha_i)Z}{Z - (R/\alpha_i)} \left[\frac{1-(1-R)S_c + (1-R)S_c}{1-(1-R)S_c}\right]$$

$$\Theta(z) = \frac{(X_D/\alpha_i)Z}{Z - (R/\alpha_i)} \left[\frac{1}{1-(1-R)S_c}\right] \quad \ldots\ldots \quad (4.41)$$

Nota: Obsérvese la ecuación (4.26) y nótese que $\theta_n = \theta_n(y_n)$. Por lo cual, la transformada Z de θ_n puede escribirse como — $\Theta_i(z)$, ya que se refiere a cualquier componente en el enésimo plato.

Volviendo a la definición de S_c:

$$S_c = \sum_{i=1}^{c} \frac{(X_D/\alpha_i)}{Z - (R/\alpha_i)}$$

$$S_c = \frac{(X_D/\alpha_1)}{Z-(R/\alpha_1)} + \frac{(X_D/\alpha_2)}{Z-(R/\alpha_2)} + \frac{(X_D/\alpha_3)}{Z-(R/\alpha_3)} + \cdots + \frac{(X_D/\alpha_c)}{Z-(R/\alpha_c)}$$

$$S_c = \frac{(X_D/\alpha_1)\prod_{i=2}^{c}(Z-(R/\alpha_i)) + (X_D/\alpha_2)\prod_{i\neq 2}^{c}(Z-(R/\alpha_i)) + \cdots + (X_D/\alpha_c)\prod_{i=1}^{c-1}(Z-(R/\alpha_i))}{\prod_{i=1}^{c}(Z-(R/\alpha_i))}$$

$$S_c = \frac{\sum_{i=1}^{c}\left[(X_D/\alpha_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{c}(Z-(R/\alpha_j))\right]}{\prod_{i=1}^{c}(Z-(R/\alpha_i))} \quad \ldots\ldots \quad (4.42)$$

sustituyendo en (4.40):

$$P(z) = Z\,\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{c}(X_D/\alpha_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{c}(Z-(R/\alpha_j))}{\prod_{i=1}^{c}(Z-(R/\alpha_i))}}{1 - (1-R)\,\dfrac{\sum_{i=1}^{c}(X_D/\alpha_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{c}(Z-(R/\alpha_j))}{\prod_{i=1}^{c}(Z-(R/\alpha_i))}}$$

multiplicando numerador y denominador por:

$$\prod_{i=1}^{c}\left(z-\frac{R}{\alpha_i}\right)$$

$$P(z)=Z\frac{\sum_{i=1}^{c}(X_0/\alpha_i)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{c}(Z-(R/\alpha_j))}{\prod_{i=1}^{c}\left(Z-\frac{R}{\alpha_i}\right)-(1-R)\sum_{i=1}^{c}(X_0/\alpha_i)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{c}(Z-(R/\alpha_j))} \quad (4.43)$$

En el miembro derecho de la última expresión, se distinguen dos factores, el primero formado por la z y el segundo por un cociente; para éste, su denominador está compuesto por un polinomio de grado c y el numerador por un polinomio de grado (c-1).

Para el polinomio de grado c, su forma factorizada es:

$$(Z-Z_1)(Z-Z_2)(Z-Z_3)\ldots(Z-Z_c)$$

entonces:

$$P(z)=Z\frac{\sum_{i=1}^{c}(X_0/\alpha_i)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{c}(Z-(R/\alpha_j))}{(1-R)\left[\frac{1}{(1-R)}\prod_{i=1}^{c}\left(Z-\frac{R}{\alpha_i}\right)-\sum_{i=1}^{c}(X_0/\alpha_i)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{c}(Z-(R/\alpha_j))\right]}$$

$$P(Z)=\frac{Z}{(1-R)}\;\frac{\sum_{i=1}^{c}(X_0/\alpha_i)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{c}(Z-(R/\alpha_j))}{(Z-Z_1)(Z-Z_2)(Z-Z_3)\ldots(Z-Z_c)} \quad (4.44)$$

desarrollando en fracciones parciales el segundo factor de --

(4.44):

$$\frac{\sum_{i=1}^{c}(X_D/\alpha_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{c}\left(z-(R/\alpha_j)\right)}{\prod_{i=1}^{c}(z-z_i)}=\frac{a_1}{(z-z_1)}+\frac{a_2}{(z-z_2)}+\cdots+\frac{a_c}{(z-z_c)}$$

$$\sum_{i=1}^{c}(X_D/\alpha_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{c}\left(z-(R/\alpha_j)\right)=a_1\prod_{i=2}^{c}(z-z_i)+\ldots+a_c\prod_{i=1}^{c-1}(z-z_i)$$

para $z=z_1$, desaparecen desde el segundo hasta el último suman dos, lo que permite despejar a_1:

$$a_1=\frac{\sum_{i=1}^{c}(X_D/\alpha_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{c}\left(z_1-(R/\alpha_j)\right)}{\prod_{i=2}^{c}(z_1-z_i)}$$

y para $z=z_k$, a_k es:

$$a_k=\frac{\sum_{i=1}^{c}(X_D/\alpha_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{c}\left(z_k-(R/\alpha_j)\right)}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{c}(z_k-z_i)}\quad\ldots\quad(4.45)$$

$$P(z)=\frac{z}{(1-R)}\left[\frac{a_1}{z-z_1}+\frac{a_2}{z-z_2}+\frac{a_3}{z-z_3}+\cdots+\frac{a_c}{z-z_c}\right]$$

$$P(Z)=\frac{1}{1-R}\left[a_1\frac{Z}{Z-Z_1}+a_2\frac{Z}{Z-Z_2}+\cdots+a_c\frac{Z}{Z-Z_c}\right]$$

para invertir esta expresión, se utiliza el resultado obtenido en el inciso 3 del ejemplo 3.D:

$$P_M=\frac{1}{1-R}\sum_{i=1}^{c}a_i Z_i^M \qquad \ldots\ldots \qquad (4.46)$$

Multiplicando numerador y denominador de la ecuación (4.41), por:

$$\prod_{j=1}^{c}\left(z-\frac{R}{\alpha_j}\right)$$

$$\Theta_i(Z)=\frac{(X_D/\alpha_i)Z}{Z-(R/\alpha_i)}\left[\frac{1}{1-(1-R)S_c}\right]\frac{\prod_{j=1}^{c}\left(z-\frac{R}{\alpha_j}\right)}{\prod_{j=1}^{c}\left(Z-\frac{R}{\alpha_j}\right)}$$

$$\Theta_i(Z)=\frac{(X_D/\alpha_i)Z}{Z-(R/\alpha_i)}\;\frac{\prod_{j=1}^{c}\left(Z-\frac{R}{\alpha_j}\right)}{\prod_{j=1}^{c}\left(Z-\frac{R}{\alpha_j}\right)-(1-R)S_c\prod_{j=1}^{c}\left(Z-\frac{R}{\alpha_j}\right)}$$

$$\Theta_i(Z)=(X_D/\alpha_i)Z\;\frac{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{c}\left(Z-\frac{R}{\alpha_j}\right)}{\prod_{j=1}^{c}\left(Z-\frac{R}{\alpha_j}\right)-(1-R)S_c\prod_{j=1}^{c}\left(Z-\frac{R}{\alpha_j}\right)}$$

$$\ldots\ldots \qquad (4.47)$$

lo que a continuación se escribe, es análogo a lo hecho en la deducción de la expresión de las α_k, el razonamiento es similar.

$$\frac{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{c}\left(z-\frac{R}{\alpha_j}\right)}{\prod_{i=1}^{c}\left(z-z_i^*\right)}=\frac{b_1}{(z-z_1^*)}+\frac{b_2}{(z-z_2^*)}+\cdots+\frac{b_c}{(z-z_c^*)}$$

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{c}\left(z-\frac{R}{\alpha_j}\right)=b_1\prod_{i=2}^{c}(z-z_i^*)+\cdots+b_c\prod_{i=1}^{c-1}(z-z_i^*)$$

para $z=z_k^*$:

$$b_k=\frac{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{c}\left(z_k-\frac{R}{\alpha_j}\right)}{\prod_{i=1}^{c}\left(z_k-z_i^*\right)} \qquad \ldots\ldots \qquad (4.48)$$

sustituyendo en (4.47):

$$\Theta_i(z)=(X_0/\alpha_i)\,z\left[\frac{b_1}{z-z_1^*}+\frac{b_2}{z-z_2^*}+\cdots+\frac{b_c}{z-z_c^*}\right]$$

$$\Theta_i(z)=\frac{X_0}{\alpha_i}\left[b_1\frac{z}{z-z_1^*}\quad b_2\frac{z}{z-z_2^*}+\cdots+b_c\frac{z}{z-z_c^*}\right]$$

invirtiendo esta ecuación:

$$\Theta_{mi} = \frac{x_{0i}}{\alpha_i} \sum_{i=1}^{c} b_i z_i^{*\,m} \quad \ldots\ldots \quad (4.49)$$

Despejando y_n de la ecuación (4.26):

$$y_{mi} = \frac{\alpha_i \Theta_{mi}}{\rho_{m-1}} \quad \ldots\ldots \quad (4.50)$$

sustituyendo en ésta (4.46) y (4.49):

$$y_{mi} = \frac{\alpha_i \dfrac{x_{0i}}{\alpha_i} \sum_{i=1}^{c} b_i z_i^{*\,m}}{\dfrac{1}{1-R} \sum_{i=1}^{c} a_i z_i^{m-1}}$$

$$y_{mi} = (1-R)\, x_{0i} \frac{\sum_{i=1}^{c} b_i z_i^{*\,m}}{\sum_{i=1}^{c} a_i z_i^{m-1}} \quad \ldots\ldots \quad (4.51)$$

en las ecuaciones siguientes, pueden sustituirse (4.46) y (4.51), para obtener la expresión correspondiente a x_{ni}.

$$x_{mi} = \frac{y_{mi}}{\alpha_i K_{bm}}$$

$$K_{bm} = \frac{\rho_m}{\rho_{m-1}}$$

$$X_{Mi} = \frac{y_{Mi}}{\alpha_i \dfrac{\ell_M}{\ell_{M-1}}}$$

$$X_{Mi} = \frac{(1-R)X_{Di}}{\alpha_i} \frac{\sum_{i=1}^{c} b_i Z_i^{*M}}{\sum_{i=1}^{c} a_i Z_i^{M-1}} \frac{1}{\dfrac{\frac{1}{1-R}\sum_{i=1}^{c} a_i Z_i^{M}}{\frac{1}{1-R}\sum_{i=1}^{c} a_i Z_i^{M-1}}}$$

$$X_{Mi} = \frac{(1-R)X_{Di}}{\alpha_i} \frac{\sum_{i=1}^{c} b_i Z_i^{*M}}{\sum_{i=1}^{c} a_i Z_i^{M}} \quad \ldots\ldots \quad (4.52)$$

Las ecuaciones (4.51) y (4.52), dan las fracciones mol en el líquido y en el vapor para cualquier componente en cualquier plato de la zona enriquecedora de la torre.

4.c. Reacciones de Polimerización.

La importancia de conocer la distribución de pesos-moleculares en un polímero, radica fundamentalmente en que — éstos están constituidos por mezclas de macromoléculas de igual naturaleza química pero de longitud de cadena diferente, lo — que trae como consecuencia que las propiedades físicas de una misma sustancia varíen considerablemente.

Debido a que las reacciones de polimerización son — procesos muy complejos por la presencia simultánea de diversos fenómenos como son: aumento de viscosidad del medio de reacción, problemas de disipación de energía y de mezclado, etc., se — han desarrollado algunos métodos para obtener modelos matemáticos que predicen las distribuciones de pesos moleculares de compuestos poliméricos. En general, ninguno de ellos tiene su premacía absoluta sobre los demás, sino que el empleo de cada uno depende de la información disponible, de la situación particular, o dado el caso, pueden combinarse varias técnicas — (18), que faciliten el tratamiento matemático del problema.

La utilización de la transformada Z en la solución de este tipo de problemas, proporciona soluciones directas y sencillas en algunos casos. En términos globales, el procedimiento consiste en incorporar las concentraciones de todas — las especies presentes en la reacción, en la expresión de la transformada y hecho ésto, encontrar ecuaciones que muestren como cambian éstas con el tiempo. Además, es posible obtener información respecto a los momentos de la distribución de pesos moleculares.

Asimismo, existe una variante de la transformada Z, llamada normalizada, que resulta de la normalización de la primera, puede considerarse como una función generadora de momentos (17), lo que le da ciertas propiedades muy útiles, pudiéndose obtener expresiones deducidas por razonamientos estadísticos; se le ha usado en la investigación de distribuciones de pesos moleculares en reactores continuos de tanque agitado y en reactores intermitentes, efectos de recirculaciones en reactores de flujo tapón y distribuciones de tiempos de residencia en policondensaciones irreversibles (17,18).

Si se denomina por P_N a la concentración de la especie n (de cadena lineal de N unidades de longitud), en moles por unidad de volumen, la composición de la mezcla queda determinada en cualquier instante, indicando las concentraciones individuales de cada uno de los componentes de igual longitud de cadena:

$P_1(t)$	monómero
$P_2(t)$	dímero
$\vdots$	
$P_N(t)$	polímero de longitud N

la función generadora de esta secuencia, puede escribirse en términos de una serie de Laurent unilateral alrededor del -- origen:

$$P(z,t)=P_0(t)+P_1(t)z^{-1}+\dots+P_N(t)z^{-n}+\cdots \quad \ldots\ldots \quad (4.53)$$

como no existen moléculas cuya longitud sea cero, la serie se transforma en:

$$P(z,t)=P_1(t)z^{-1}+P_2(t)z^{-2}+P_3(t)z^{-3}+\dots \quad \ldots\ldots \quad (4.54)$$

$$P(z,t)=\sum_{m=1}^{\infty} P_m(t)\,z^{-m} \quad \ldots\ldots \quad (4.55)$$

y se verifica que:

$$\lim_{z\to 1} P(z,t)=\sum_{m=1}^{\infty} P_m(t) \quad \ldots\ldots \quad (4.56)$$

es la concentración total de moléculas al tiempo t.

Del mismo modo, P(z,t) a t=0 es la concentración del monómero:

$$P(z,0)= P_1(0)\,z^{-1} \quad \ldots\ldots \quad (4.57)$$

Las derivadas de (4.55) con respecto a z, vienen a- ser los momentos de la distribución de pesos moleculares:

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\sum_{m=1}^{\infty} -m\,P_m(t)\,z^{-(m+1)}$$

$$-z\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=1}=\sum_{m=1}^{\infty} m\,P_m(t) \quad \ldots\ldots \quad (4.58)$$

que es el primer momento. Para el segundo momento:

$$-z\frac{\partial}{\partial z}\left\{-z\frac{\partial P(z,t)}{\partial z}\right\}\Bigg|_{z=1}=\sum_{m=1}^{\infty} m^2 P_m(t) \quad \ldots\ldots \qquad (4.59)$$

Las longitudes de cadena promedio en número y en peso, se obtienen en forma directa a partir de las relaciones anteriores:

$$\bar{N}_m=\frac{\sum_{m=1}^{\infty} m P_m}{\sum_{m=1}^{\infty} P_m} \quad \ldots\ldots \qquad (4.60)$$

$$\bar{N}_w=\frac{\sum_{m=1}^{\infty} m^2 P_m}{\sum_{m=1}^{\infty} m P_m} \quad \ldots\ldots \qquad (4.61)$$

A continuación se define la transformada Z normalizada:

$$C(z,t)=\frac{P(z,t)}{P(1,t)} \quad \ldots\ldots \qquad (4.62)$$

en la cual se tiene:

$$C(z,t)=\sum_{m=1}^{\infty} C_m z^{-m}$$

$$C_m=\frac{P_m(z,t)}{\sum_{m=1}^{\infty} P_m(t)}$$

A manera de ejemplo, se considerará un homopolímero lineal en un reactor intermitente isotérmico, dentro del cual hay un gran exceso de monómero R, que reacciona irreversiblemente con pequeñas cadenas presentes al iniciarse la reacción (1). Puede suponerse que todas las reacciones poseen la misma constante de rapidez (34, 44), es decir, la rapidez de reacción es independiente del grado de polimerización; para un sistema de reacciones múltiples del tipo serie paralelo (21):

$$
\begin{aligned}
R + P_1 &\longrightarrow P_2 \\
R + P_2 &\longrightarrow P_3 \\
&\vdots \\
R + P_N &\longrightarrow P_{N+1} \\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad \ldots\ldots \qquad (4.63)
$$

R.- concentración de monómero constante (moles/unidad de volumen).

Para una cinética de segundo orden, las ecuaciones de rapidez del sistema (4.63), son:

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_1}{dt} &= -kRP_1 \\
\frac{dP_2}{dt} &= kRP_1 - kRP_2 \\
&\vdots \\
\frac{dP_N}{dt} &= kRP_{N-1} - kRP_N \\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad \ldots\ldots \qquad (4.64)
$$

Derivando (4.54) con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = \frac{dP_1}{dt} z^{-1} + \frac{dP_2}{dt} z^{-2} + \cdots + \frac{dP_N}{dt} z^{-N} \qquad \ldots\ldots \qquad (4.65)$$

sustituyendo en (4.65) las ecuaciones de rapidez:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -kRP_1 z^{-1} + (kRP_1 - kRP_2) z^{-2} + \cdots \qquad \ldots\ldots \qquad (4.66)$$

agrupando términos:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -kR(P_1Z^{-1}+P_2Z^{-2}+\dots+P_NZ^{-M}+\dots)+kR(P_1Z^{-2}+P_2Z^{-3}+\dots+P_NZ^{-(M+1)}+\dots)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -kR(P_1Z^{-1}+P_2Z^{-2}+\dots+P_NZ^{-M}+\dots)+kRZ^{-1}(P_1Z^{-1}+P_2Z^{-2}+\dots+P_NZ^{-M}+\dots)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = kR(-1+Z^{-1})(P_1Z^{-1}+P_2Z^{-2}+\dots+P_NZ^{-M}+\dots)$$

que puede escribirse como:

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = kR(-1+Z^{-1})\,P(z,t) \qquad \dots\dots \qquad (4.67)$$

hasta aquí, la única variable independiente que se ha manejado ha sido el tiempo (z ha permanecido constante), entonces puede cambiarse el símbolo de la diferencial, separar variables e integrar.

$$\frac{dP}{P} = kR(-1+Z^{-1})\,dt$$

$$\int_{P(0)}^{P(t)} \frac{dP}{P} = kR(-1+Z^{-1})\int_0^t dt$$

$$\ln P\Big|_{P(0)}^{P(t)} = kR(-1+Z^{-1})\,t$$

$$P(z,t) = P(z,0)\, e^{kR(-1+z^{-1})t} \qquad \dots\dots \qquad (4.68)$$

sustituyendo la ecuación (4.57):

$$P(z,t) = P_1(0) z^{-1} e^{kR(-1+z^{-1})t} \quad \ldots\ldots \quad (4.69)$$

que puede escribirse como sigue:

$$P(z,t) = P_1(0) z^{-1} e^{-kRt} e^{kRtz^{-1}}$$

expandiendo el último factor en series de potencias:

$$P(z,t) = P_1(0) z^{-1} e^{-kRt} \left[1 + kRtz^{-1} + \frac{(kRt)^2}{2!} z^{-2} + \cdots + \frac{(kRt)^{m-1}}{(m-1)!} z^{-(m-1)} + \cdots \right] \quad \ldots\ldots \quad (4.70)$$

finalmente:

$$P(z,t) = P_1(0) e^{-kRt} \left[z^{-1} + kRtz^{-2} + \frac{(kRt)^2}{2!} z^{-3} + \cdots + \frac{(kRt)^{m-1}}{(m-1)!} z^{-m} + \cdots \right] \quad \ldots\ldots \quad (4.71)$$

comparando esta expresión con (4.53), se ha encontrado la forma funcional de cada uno de los coeficientes de la serie. Entonces, (4.71) proporciona la concentración de la especie de longitud de cadena n en función del tiempo, siendo ésta:

$$P_m(t) = P_1(0) \frac{(kRt)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-kRt} \quad \ldots\ldots \quad (4.72)$$

4.d. Sistemas de Control.

La transformada Z puede utilizarse también en el -- análisis de sistemas de control, aplicando los conceptos de-- sarrollados en los capítulos anteriores.

Antes de describir el método de análisis y proceder a presentar un caso particular, es importante introducir algunas nociones referentes a la teoría de control de procesos.

Defínese un sistema (31), como un conjunto de ele-- mentos organizados e interconectados de tal manera que forman una unidad completa para realizar una función u operación determinada. En particular, un sistema de control desempeña tres funciones básicas:

1° Medida: Se refiere a la estimación de la variable de proceso que está siendo controlada por el sistema.

2° Comparación: Indica el grado en que difieren los valores - deseado y medido de la variable.

3° Corrección: Consiste en la modificación de los valores de- operación, para que el proceso alcance el nivel de operación adecuado.

Otros términos que aparecen frecuentemente en la literatura de esta área son:

a) Variable controlada (c).- Es la variable que se desea mantener en un valor fijo, puede ser función del tiempo, de otras variables o de todas ellas.

b) Punto fijo (r).- Es el valor que la variable controlada debe poseer.

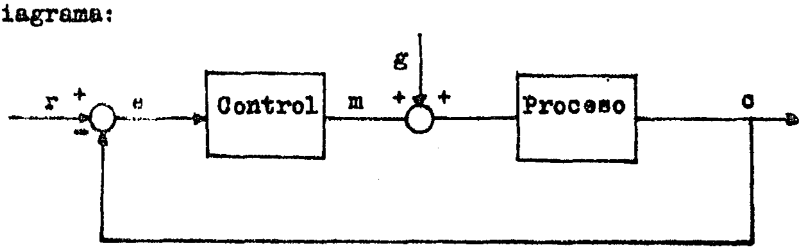
c) Error (e).- Diferencia entre la variable controlada y el punto fijo.

d) Perturbación o carga (g).- Indica algún cambio de cualquier variable que pueda producir una alteración de la variable controlada.

e) Salida del elemento de control (m).- Su magnitud y tipo dependen del error y de la clase de control que se use.

En general, los sistemas de control pueden dividirse en dos grandes grupos (31,32). El primero recibe el nombre de sistemas de circuito abierto, porque no se utiliza información de la variable controlada para ajustar las otras variables de proceso; el nombre del segundo grupo es el de sistemas de circuito cerrado porque en éstos, el valor de la variable controlada se emplea para modificar otras.

Con un diagrama de bloques, un sistema de control de la segunda clase puede representarse mediante el siguiente diagrama:



El punto fijo se compara con el valor de la variable controlada, para generar un error, el que a su vez es utiliza do para que el control produzca una respuesta que combinada con las cargas, se aplica al proceso para corregir el valor de la variable controlada.

Aunque existen varios tipos de controles, es suficiente emplear aquí el llamado control proporcional (6), que debe su nombre a que produce una señal de salida proporcional al error, impidiendo un aumento desmesurado de la variable y obligándola a permanecer en un valor fijo.

Cuando un sistema se encuentra en estado estacionario, ninguna de las variables que intervienen cambian con el tiempo (sistema balanceado) sin embargo, al analizar sistemas de control, la magnitud del error es la medida del grado de desviación con respecto a los valores que tendría el sistema si estuviera balanceado, por tanto, es conveniente trabajar relaciones que se encuentren en términos de sus desviaciones basadas en los valores del estado estacionario. Así, se definen las "variables de desviación", como la diferencia del valor real menos el valor al estado estacionario de la variable considerada:

$$x = X - x_s \qquad \ldots\ldots \qquad (4.73)$$

X.- valor real de la variable

x_s.- valor de la variable en el sistema balanceado x.- variable de desviación.

Otros términos relevantes son aquellos que aparecen en la expresión de la función de transferencia de un sistema de primer orden:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad \ldots\ldots \quad (2.102)$$

el término K se llama ganancia al estado estacionario (6), es simplemente el factor de conversión que relaciona y(t) con x(t) cuando el sistema está balanceado. Al término τ se le conoce como constante de tiempo del sistema.

El método de análisis de sistemas de control consta de las siguientes etapas:

1.- Desarrollar las ecuaciones para cada componente del circuito de control.

2.- Transformar las ecuaciones obtenidas en el punto anterior al dominio de Laplace, lo que permite manejar ecuaciones algebraicas.

3.- Combinar las ecuaciones del sistema original, para representar el proceso por medio de diagramas de bloques.

4.- A partir del diagrama, obtener las ecuaciones que describan la respuesta del sistema.

En síntesis, se representan los sistemas por diagramas de bloques en los cuales están contenidas las funciones de transferencia de cada elemento; de la combinación de éstas se obtiene una expresión global que permite hacer el análisis.

Aplicación a un Sistema de Control de Nivel.

Considérese el diagrama, en la página siguiente, de un sistema de control de nivel (39), donde la variable controlada es el nivel del líquido en el tanque (H).

Nomenclatura (todo en unidades consistentes):

Q.- flujo volumétrico

Q_o.- flujo de salida

Q_1.- flujo de entrada

H.- nivel del líquido

P_B.- presión de descarga

P_w.- presión a la entrada de la válvula V1

P_1.- presión de descarga de V1

B.- señal del indicador de nivel

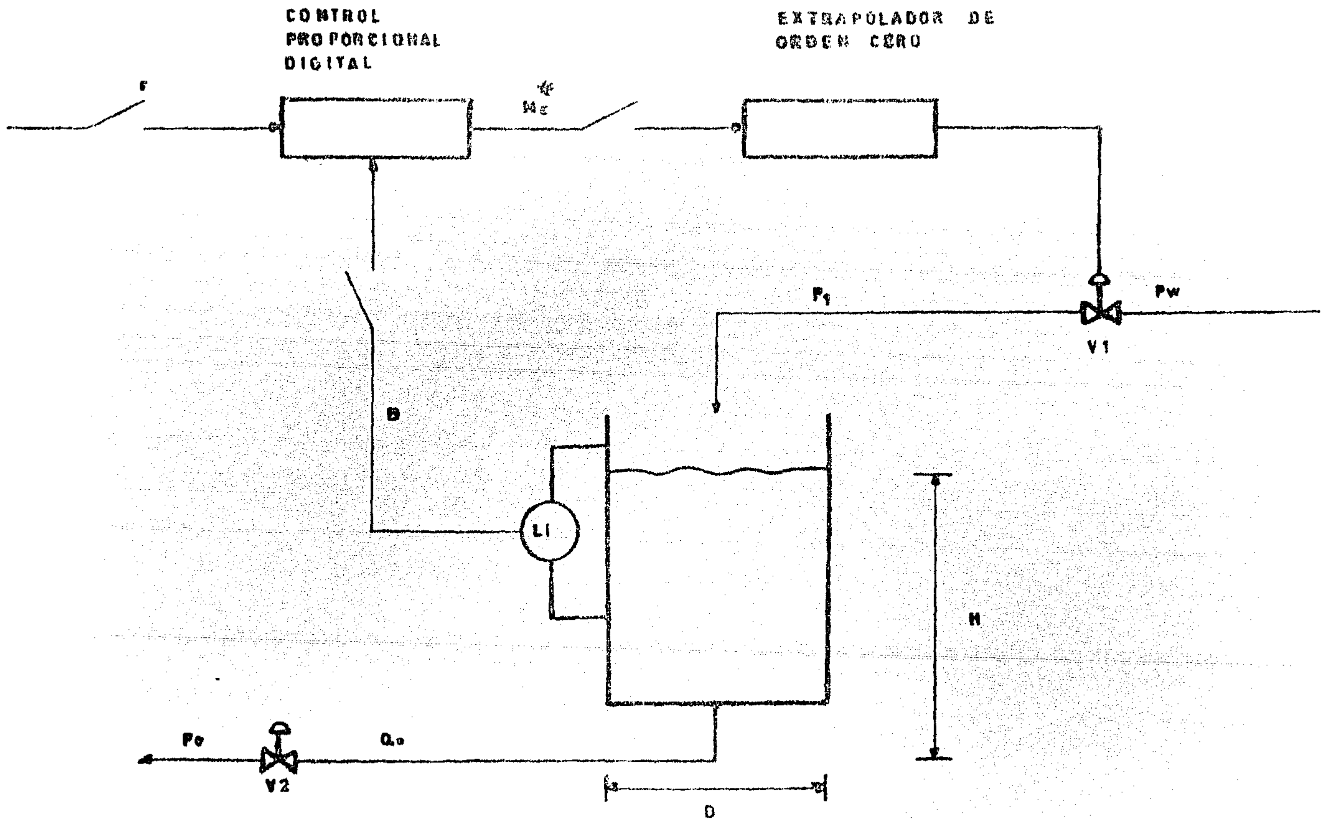
Mo .- salida del elemento de control

D.- diámetro del tanque

Cd.- coeficiente de la válvula

A.- área de la abertura de la válvula

ρ.- densidad del líquido



SISTEMA DE CONTROL DE NIVEL.

Etapa No. 1.

Desarrollo de las ecuaciones del circuito de control.

a) El flujo hacia el interior del tanque está dado por (32):

$$Q_1 = C_d A \left[\frac{2 g_c}{\rho} \left(P_w - P_1 \right) \right]^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (4.74)$$

b) Dentro del intervalo de operación, la relación entre la abertura de la válvula y la señal puede suponerse lineal (39):

$$A = K_1 M \quad \ldots\ldots \quad (4.75)$$

K_1.- constante de proporcionalidad.

Sustituyendo (4.75) en (4.74):

$$Q_1 = C_d K_1 M \left[\frac{2 g_c}{\rho} \left(P_w - P_1 \right) \right]^{1/2}$$

$$Q_1 = K_2 M \quad \ldots\ldots \quad (4.76)$$

con $$K_2 = C_d K_1 \left[\frac{2 g_c}{\rho} \left(P_w - P_1 \right) \right]^{1/2}$$

la última ecuación numerada, en términos de la variable de desviación correspondiente es:

$$q_1 = K_2\, m \quad \ldots\ldots \quad (4.77)$$

c) Flujo de salida de la válvula de descarga:

$$Q_o = C_d A \left[\frac{2 g_c}{\rho} \left(H \rho \frac{g}{g_c} - P_B \right) \right]^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (4.78)$$

esta relación entre el flujo y la altura del líquido dentro del tanque no es lineal, sin embargo, puede hacerse lineal en el punto de operación (H, Q_o), suponiendo que la variación de nivel es muy pequeña, lo que se justifica recurriendo a la naturaleza del control empleado, pues si éste es bueno, las desviaciones en el nivel del líquido deben ser pequeñas.

Desarrollando en series de Taylor $Q_o(H)$ alrededor de h_s:

$$Q_o(H) = Q_o(h_s) + Q_o'(h_s)(H - h_s) + \frac{(H-h_s)^2}{2!} Q_o''(h_s) + \ldots$$

$$Q_o(H) = Q_o(h_s) + Q_o'(h_s)(H - h_s) + \mathcal{O}(H - h_s)^2$$

cortando la serie después de los dos primeros términos (aproximación lineal):

$$Q_o(H) = Q_o(h_s) + Q_o'(h_s)(H - h_s)$$

$$Q_o(H) - Q_o(h_s) = Q_o'(h_s)(H - h_s)$$

y en términos de las variables de desviación:

$$q_o = Q_o'(h_s)\, h$$

$$q_o = \left.\frac{dQ_o}{dH}\right|_{h_s} h \qquad \ldots\ldots \qquad (4.79)$$

que puede abreviarse, si a la derivada se le simboliza del -- modo siguiente:

$$q_o = K_3\, h \qquad \ldots\ldots \qquad (4.80)$$

d) Balance de materia para el tanque completo:

$$Q_1 - Q_o = A\frac{dH}{dt}$$

$$Q_1 - Q_0 = \frac{\pi}{4} D^2 \frac{dH}{dt}$$

con variables de desviación se transforma en:

$$q_1 - q_0 = \frac{\pi}{4} D^2 \frac{dh}{dt} \qquad \ldots\ldots \qquad (4.81)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.77) y (4.80) en esta última se tiene:

$$K_2 m - K_3 h = \frac{\pi}{4} D^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{\pi D^2}{4 K_3} \frac{dh}{dt} + h = \frac{K_2}{K_3} m \qquad \ldots\ldots \qquad (4.82)$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

e) Otras relaciones:

La relación que existe entre la señal del indicador de nivel y la altura del líquido es (39):

$$b = K_t\, h \qquad \ldots\ldots \qquad (4.83)$$

Señal de salida del control proporcional M_c^* :

$$M_c^* = K_c\,(R^* - B^*)$$

Kc es la ganancia del control; para desviaciones cercanas a la condición balanceada:

$$m_c^* = K_c\,(r^* - b^*) \qquad \ldots\ldots \qquad (4.84)$$

la señal m_c^* se alimenta a un extrapolador de orden cero para obtener la salida continua de m, la variable controlada.

Etapa No. 2.

Obtención de las transformadas de Laplace de las -- ecuaciones de la sección anterior.

Ecuación (4.82):

$$\frac{\pi D^2}{4 K_3}\frac{dh}{dt} + h = \frac{K_2}{K_3} m$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\pi D^2}{4 K_3}\frac{dh}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{h\} = \mathcal{L}\left\{\frac{K_2}{K_3} m\right\}$$

$$\frac{\pi D^2}{4 K_3}\mathcal{L}\left\{\frac{dh}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{h\} = \frac{K_2}{K_3}\mathcal{L}\{m\}$$

$$\frac{\pi D^2}{4 K_3}\left[sH(s) - H(0)\right] + H(s) = \frac{K_2}{K_3} M(s)$$

al inicio, el nivel de referencia y el del líquido coinciden, lo que significa que a t=0, H=0.

$$\frac{\pi D^2}{4 K_3} sH(s) + H(s) = \frac{K_2}{K_3} M(s)$$

$$H(s)\left[\frac{\pi D^2}{4 K_3} s + 1\right] = \frac{K_2}{K_3} M(s)$$

$$H(s) = \frac{(K_2/K_3)\quad M(s)}{\frac{\pi D^2}{4 K_3} s + 1} \qquad \ldots\ldots \qquad (4.85)$$

comparando (4.85) con (2.102), se encuentra la constante de tiempo y la ganancia del estado estacionario:

$$\tau = \frac{\pi D^2}{4 K_3} \qquad K = \frac{K_2}{K_3}$$

entonces:

$$(\tau S+1)\, H(s) = \frac{K_2}{K_3}\, M(s) \quad \ldots\ldots \quad (4.86)$$

Ecuación (4.83):

$$b = K_t\, h$$

$$\mathcal{L}\{b\} = \mathcal{L}\{K_t\, h\}$$

$$B(s) = K_t\, H(s) \quad \ldots\ldots \quad (4.87)$$

Ecuación (4.84):

$$m_c^* = K_c\,(r^* - b^*)$$

$$\mathcal{L}\{m_c^*\} = K_c\,\mathcal{L}\{r^* - b^*\}$$

$$M_c^*(s) = K_c\left[R^*(s) - B^*(s)\right] \quad \ldots\ldots \quad (4.88)$$

Etapa No. 3.

A partir de (4.86), (4.87) y (4.88), se forma el diagrama de bloques que represente el sistema de control completo.

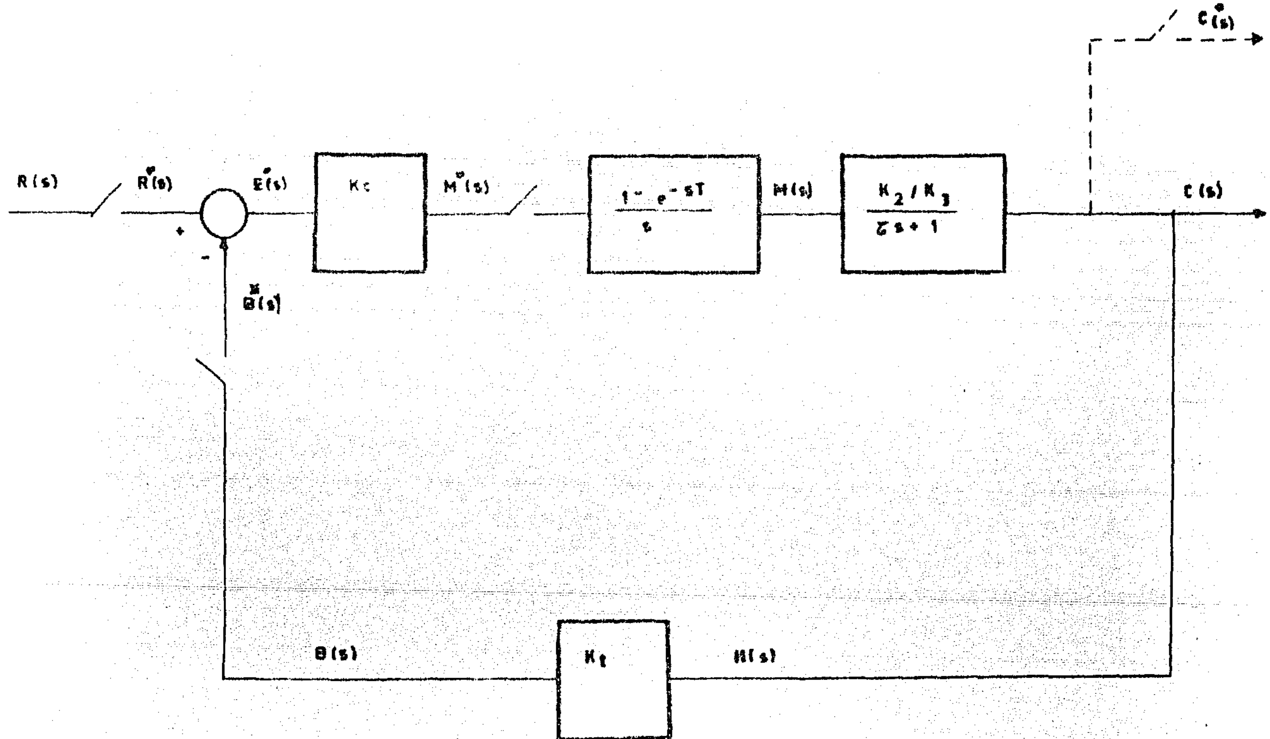


DIAGRAMA DE BLOQUES. SISTEMA DE CONTROL DE NIVEL.

Etapa No. 4.

Obtención de las ecuaciones que describen la respuesta del sistema.

a) Respuesta muestreada ($c^*(t)$).

Del diagrama de bloques:

$$C^*(s) = \left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{K_2/K_3}{\tau s+1}\right)M_c^*(s)$$

el primer factor proviene del extrapolador de orden cero, — ecuación (3.61). Sustituyendo (4.88):

$$C^*(s) = \left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{K_2/K_3}{\tau s+1}\right)K_c\left[R^*(s)-B^*(s)\right] \cdots\cdots \quad (4.89)$$

$$B^*(s) = M_c^*(s)K_t\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{K_2/K_3}{\tau s+1}\right)$$

haciendo la misma sustitución que en (4.89):

$$B^*(s) = \left[R^*(s)-B^*(s)\right]K_cK_t\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{K_2/K_3}{\tau s+1}\right) \cdots\cdot \quad (4.90)$$

Utilizando las propiedades de los diagramas de bloques y teniendo en mente que $F(z) = F^*(s)$, las transformadas Z de (4.89) y (4.90), son respectivamente:

$$C(z) = Z\left\{\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{K_2/K_3}{\tau s+1}\right)\right\}\left[R(z)-B(z)\right]K_c \cdots \quad (4.91)$$

$$B(z) = Z\left\{\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{K_2/K_3}{\tau s+1}\right)\right\}\left[R(z)-B(z)\right]K_cK_t \cdots \quad (4.92)$$

eliminando B(z) de las dos últimas ecuaciones:

$$C(z) = \frac{K_c\, G(z)\, R(z)}{1 + K_c K_t G(z)} \quad \ldots\ldots \quad (4.93)$$

en la que

$$G(z) = Z\left\{\left(1 - e^{-sT}\right) G_1(s)\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4.94)$$

$$G_1(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{K_2/K_3}{\tau s + 1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4.95)$$

del ejemplo 3.M., se tiene:

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\, G_1(z) \quad \ldots\ldots \quad (4.96)$$

en la deducción de (3.62), se demostró lo siguiente:

$$Z\left\{\frac{1}{s(\tau s + 1)}\right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T/\tau}}$$

$$G_1(z) = \frac{K_2}{K_3}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T/\tau}}\right]$$

sustituyendo en (4.96):

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\,\frac{K_2}{K_3}\, z\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-T/\tau}}\right]$$

$$G(z) = (z-1)\,\frac{K_2}{K_3}\,\frac{1}{z-1}\left[1 - \frac{z-1}{z - e^{-T/\tau}}\right]$$

$$G(z) = \frac{K_2}{K_3}\left(\frac{1 - e^{-T/\tau}}{z - e^{-T/\tau}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4.97)$$

sustituyendo (4.97) en (4.93):

$$C(z) = \frac{K_c R(z) \frac{K_2}{K_3}\left(\frac{1 - e^{-T/\tau}}{z - e^{-T/\tau}}\right)}{1 + K_c K_t \frac{K_2}{K_3}\left(\frac{1 - e^{-T/\tau}}{z - e^{-T/\tau}}\right)}$$

$$C(z) = \frac{R(z) K_c K_2 (1 - e^{-T/\tau})}{K_3(z - e^{-T/\tau}) + K_c K_t K_2 (1 - e^{-T/\tau})} \quad \ldots \quad (4.98)$$

Esta es la expresión de la respuesta del sistema. Si se supone que la constante de tiempo tiene una equivalencia de 5 (en las unidades correspondientes), que el período de muestreo vale la unidad y un valor adecuado para la ganancia del control Kc= 3.0, (37). Además, se les asigna un valor arbitrario de uno a K_t, K_2 y K_3, es factible obtener una relación numérica de la función de transferencia:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} \quad \ldots\ldots \quad (4.99)$$

sustituyendo los valores supuestos:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.5438}{z - 0.2749} \quad \ldots\ldots \quad (4.100)$$

Si se abre de manera repentina la válvula V1, mediante un cambio manual del punto fijo, se logra para R(z) un impulso tipo escalón unitario, entonces:

$$R(z) = \frac{z}{z - 1}$$

sustituyendo en (4.100):

$$C(z) = R(z)\frac{0.5438}{z-0.2749}$$

$$C(z) = \frac{z}{z-1}\,\frac{0.5438}{z-0.2749}$$

$$C(z) = 0.5438\frac{z}{(z-1)(z-0.2749)} \quad \ldots\ldots \quad (4.101)$$

debe invertirse (4.101), para conseguir la respuesta $c^*(t)$, del sistema.

$$C(z) = 0.5438\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.2749z^{-1})}$$

Desarrollando en fracciones parciales:

$$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.2749z^{-1})} = \frac{A}{(1-z^{-1})} + \frac{B}{(1-0.2749z^{-1})}$$

del sistema de ecuaciones que resulta: A= 1.3791, B= -1.3791

$$C(z) = 0.5438\left(\frac{1.3791}{(1-z^{-1})} - \frac{1.3791}{(1-0.2749z^{-1})}\right)$$

$$C(z) = 0.75\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-0.2749z^{-1}}\right)$$

la tabla No. II, es la forma más sencilla de encontrar ambas funciones inversas:

$$c^*(t) = c(mT) = 0.75\left(1 - e^{-1.2913m}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4.102)$$

T= 1

los valores para diferentes n son:

n	c(nT), T=1
0	0
1	0.5438
2	0.6933
3	0.7344
4	0.7457
5	0.7488
6	0.7497

Por simple inspección, se deduce que $c(\infty)$ es 0.75 sin embargo, por medio del teorema del valor final puede verificarse:

$$C(z) = \frac{0.5438\, z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.2749 z^{-1})}$$

$$C(\infty) = \lim_{z \to 1} (1-z^{-1}) \frac{0.5438\, z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.2749 z^{-1})}$$

$$C(\infty) = \lim_{z \to 1} \frac{0.5438\, z^{-1}}{(1-0.2749 z^{-1})}$$

$$C(\infty) = 0.75$$

es este el nuevo valor que adquiere la variable controlada, al alcanzarse la condición de sistema balanceado.

La respuesta del sistema para valores intermedios entre nT y (n+1)T, se logra con la utilización de la transformada Z modificada. Nuevamente, las relaciones necesarias se obtienen del diagrama de bloques. Remitiéndose a éste, puede verificarse lo siguiente:

$$M^*_c(s) = K_c\left[R^*(s) - B^*(s)\right] \quad \ldots\ldots \quad (4.88)$$

como la salida M^*c proviene de un dispositivo digital, ver esquema de control, se trabaja con la transformada Z ordinaria.

$$M_c(z) = K_c\left[R(z) - B(z)\right] \quad \ldots\ldots \quad (4.103)$$

La relación entre $M^*c(s)$ y $C(s)$ es:

$$C(s) = M^*_c(s)\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{K_2/K_3}{\tau s+1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4.104)$$

y su transformada Z modificada:

$$C(z,m) = M_c(z)\mathcal{Z}_m\left\{\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{K_2/K_3}{\tau s+1}\right)\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4.105)$$

además

$$B^*(s) = M^*_c(s)K_t\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{K_2/K_3}{\tau s+1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4.106)$$

tomando en cuenta que la señal del error sólo se capta en los instantes de muestreo, de la ecuación anterior se obtiene la transformada Z:

$$B(z) = M_c(z)K_t\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{K_2/K_3}{\tau s+1}\right)\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4.107)$$

sustituyendo en (4.103) la Ec. (4.107), y la resultante en (4.105), se obtiene:

$$C(z,m) = \frac{K_c R(z)\, Z_m\{G(s)\}}{1 + K_c K_t\, Z\{G(s)\}} \quad \ldots\ldots \quad (4.108)$$

con

$$G(s) = \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{K_2/K_3}{\tau s + 1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4.109)$$

la ecuación (4.97), da G(z):

$$G(z) = \frac{K_2}{K_3}\left(\frac{1 - e^{-T/\tau}}{z - e^{-T/\tau}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4.97)$$

$$Z_m\left\{\left(\frac{1 - e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{K_2/K_3}{\tau s + 1}\right)\right\} = \frac{z-1}{z}\, Z_m\left\{\frac{K_2/K_3}{s(\tau s + 1)}\right\}$$

$$Z_m\{G(s)\} = \frac{K_2}{K_3}\,\frac{z-1}{z}\, Z_m\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau}\right\}$$

Nota: En el último paso, se hizo una expansión en fracciones parciales.

$$Z_m\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\right\} = \frac{1}{z-1}$$

$$Z_m\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1/\tau}\right\}\right\} = \frac{e^{-mT/\tau}}{z - e^{-T/\tau}}$$

entonces

$$Z_m\{G(s)\} = \frac{K_2}{K_3}\,\frac{z-1}{z}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-mT/\tau}}{z - e^{-T/\tau}}\right]$$

$$Z_m\{G(s)\} = \frac{K_2}{K_3}\left[\frac{1}{z} - \frac{(z-1)\, e^{-mT/\tau}}{z(z - e^{-T/\tau})}\right]$$

$$Z_m\left\{G(s)\right\} = \frac{K_2}{K_3}\left[\frac{z(z-e^{-T/\tau}) - z(z-1)\,e^{-mT/\tau}}{z^2(z-e^{-T/\tau})}\right] \qquad (4.110)$$

sustituyendo (4.110) y (4.97) en (4.108):

$$C(z,m) = \frac{K_c R(z)\dfrac{K_2}{K_3}\left[\dfrac{z(z-e^{-T/\tau}) - z(z-1)\,e^{-mT/\tau}}{z^2(z-e^{-T/\tau})}\right]}{1 + K_c K_t \dfrac{K_2}{K_3}\left(\dfrac{1-e^{-T/\tau}}{z-e^{-T/\tau}}\right)}$$

$$C(z,m) = \frac{K_c R(z) K_2 K_3 (z-e^{-T/\tau})\left[(z-e^{-T/\tau}) - (z-1)\,e^{-mT/\tau}\right]}{\left[K_3(z-e^{-T/\tau}) + K_c K_t K_2 (1-e^{-T/\tau})\right] K_3 z (z-e^{-T/\tau})}$$

para $\qquad R(z) = \dfrac{z}{z-1}$

$$C(z,m) = \frac{K_c z K_2 K_3 (z-e^{-T/\tau})\left[(z-e^{-T/\tau}) - (z-1)\,e^{-mT/\tau}\right]}{\left[K_3(z-e^{-T/\tau}) + K_c K_t K_2 (1-e^{-T/\tau})\right] K_3 z (z-1)(z-e^{-T/\tau})}$$

$$C(z,m) = \frac{K_c K_2\left[(z-e^{-T/\tau}) - (z-1)\,e^{-mT/\tau}\right]}{\left[K_3(z-e^{-T/\tau}) + K_c K_t K_2 (1-e^{-T/\tau})\right](z-1)} \qquad (4.111)$$

sustituyendo los valores dados a T, τ y demás constantes:

$$C(z,m) = \frac{3\,(1)\left[(z-e^{-1/5}) - (z-1)\,e^{-m/5}\right]}{\left[(z-e^{-1/5}) + 3(1-e^{-1/5})\right](z-1)}$$

$$C(z,m) = \frac{3\left((z-0.8187)-(z-1)e^{-m/5}\right)}{\left((z-0.8187)+3(1-0.8187)\right)(z-1)}$$

$$C(z,m) = \frac{3\left((z-0.8187)-(z-1)e^{-m/5}\right)}{(z-0.2748)(z-1)}$$

$$C(z,m) = 3\left[\frac{z-0.8187}{z^2-1.2748z+0.2748} - \frac{(z-1)\,e^{-m/5}}{z^2-1.2748z+0.2748}\right]$$

la inversa de esta función se calcula por división directa:

$$C(z,m) = 3\left[z^{-1}+0.4561z^{-2}+0.3066z^{-3}+0.2656z^{-4}+0.2543z^{-5}+\ldots+\right.$$

$$\left.-e^{-m/5}\left(z^{-1}+0.2748z^{-2}+0.0755z^{-3}+0.0207z^{-4}+0.0057z^{-5}+\ldots\right)\right]$$

agrupando términos comunes:

$$C(z,m) = 3\left[(1-e^{-0.2m})z^{-1}+(0.4561-0.2748e^{-0.2m})z^{-2}+\right.$$

$$(0.3066-0.0755e^{-0.2m})z^{-3}+(0.2656-0.0207e^{-0.2m})z^{-4}+$$

$$\left.(0.2543-0.0057e^{-0.2m})z^{-5}+\ldots\right]$$

$$C(z,m) = C_1(m)z^{-1} + C_2(m)z^{-2} + \ldots + C_n(m)z^{-n} + \ldots$$

$C_1(m) = 3(1 - e^{-0.2m})$ $\qquad 0 \leq t \leq T$

$C_2(m) = 1.3683(1 - 0.6025e^{-0.2m})$ $\qquad T \leq t \leq 2T$

$C_3(m) = 0.9198(1 - 0.2462e^{-0.2m})$ $\qquad 2T \leq t \leq 3T$

$C_4(m) = 0.7968(1 - 0.0779e^{-0.2m})$ $\qquad 3T \leq t \leq 4T$

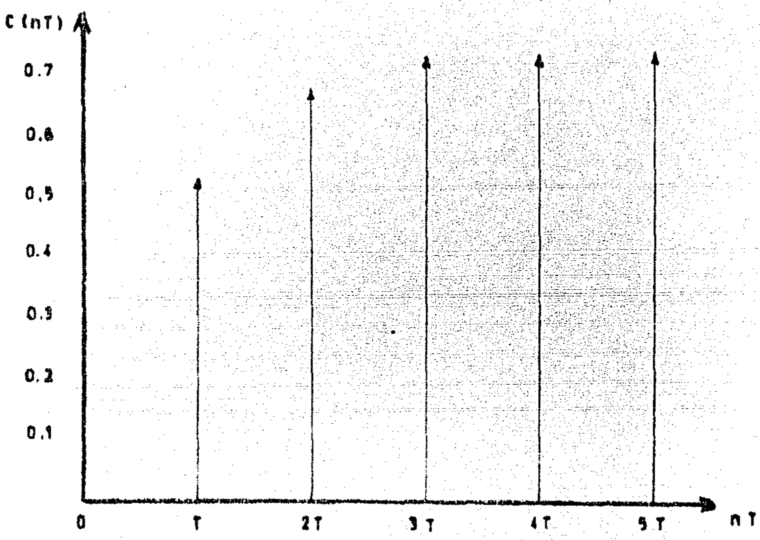
$C_5(m) = 0.7629(1 - 0.0224e^{-0.2m})$ $\qquad 4T \leq t \leq 5T$

Para diferentes valores de m, la respuesta del sistema (la inversa de C(z,m)), se comporta de la manera siguiente:

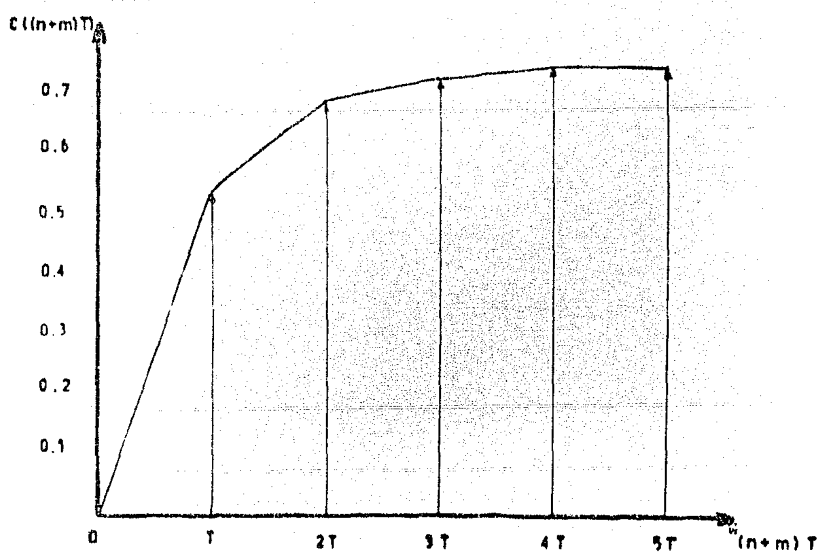
m	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
0.00	0.0000	0.5439	0.6933	0.7347	0.7458
0.25	0.1463	0.5841	0.7044	0.7378	0.7466
0.50	0.2855	0.6224	0.7149	0.7406	0.7474
0.75	0.4179	0.6587	0.7249	0.7434	0.7482
1.00	0.5438	0.6933	0.7344	0.7460	0.7489

En seguida se presentan gráficamente las respuestas del sistema de control, obtenidas con ambas transformadas.

RESPUESTA DEL SISTEMA DE CONTROL



(TRANSFORMADA Z)



(TRANSFORMADA Z MODIFICADA)

V.- CONCLUSIONES.

La mayoría de las publicaciones a las que se hace referencia a lo largo de todo el desarrollo anterior que tratan sobre la transformada Z, dan por hecho que el lector maneja términos como son: muestreador, extrapolador, tren de impulsos, etc.; y que se conocen las propiedades básicas de la transformada de Laplace. Lo que motivó la inclusión de las cuatro secciones del capítulo en el que se revisaron algunos temas de matemáticas de fundamental importancia para la comprensión de las propiedades y manejo de la transformada Z. La primera sección de éste (ecuaciones en diferencias), tuvo como objetivo informar de la forma de las ecuaciones que se iban a presentar y resolver posteriormente. En la segunda sección, se hizo un resumen de las ideas principales concernientes a la teoría de funciones de variable compleja, pues aunque los conceptos que se manejaron fueron muy pocos, fue necesario mencionar los demás para que aquellos no aparecieran aislados; por ejemplo, al evaluar una integral de inversión se requiere el método de los residuos, pero para entender éste se necesita saber sobre singularidades, las que a su vez exigen el conocimiento de otros antecedentes; lo mismo puede decirse de las series de Laurent (relacionadas directamente con la transformada Z) y de las funciones complejas.

Aquí, es oportuno hacer una aclaración: los libros-y artículos en los que se aplica directamente el método de la transformada Z, indican que la integral de inversión se utiliza raramente, sin embargo, es mi opinión que la actividad constante en una área determinada debe impulsar a las personas a ampliar sus conocimientos para aumentar su competencia y evitar deficiencias producidas por rígidas mecanizaciones; es erróneo encerrarse en formas únicas de trabajo (manejo de tablas), ya que pueden presentarse situaciones, aunque sean poco frecuentes, que obliguen a buscar otro tipo de soluciones, y la falta de información impedirá llegar a resultados concretos.

La parte correspondiente a la transformada de Laplace y el capítulo III, exhiben una clara similitud en cuanto se refiere a propiedades, formas de inversión y aplicaciones, que culminan al demostrarse la relación entre ambas transformadas.

La última sección, titulada "Sistemas Lineales", es el antecedente directo para la aplicación de la Transformada en el análisis de procesos, sirvió para introducir conceptos como los de diagramas de bloques y funciones de transferencia. Además, el análisis de sistemas lineales es importante por su utilidad, pues en muchas situaciones es posible sustituir ecuaciones no lineales por lineales que las aproximen de manera adecuada en la obtención de resultados útiles. Sin embar go, se debe tener conocimiento de las limitaciones de los métodos analíticos, para que dado el caso, optar por soluciones numéricas que en algunas ocasiones son las únicas posibles.

Finalmente, un fenómeno real se caracteriza por lo complejo de las relaciones entre los múltiples factores que influyen de manera individual y combinada en su desarrollo. Con frecuencia las variables son muchas y de difícil identificación y medición. Por fortuna, el análisis y comprensión de situaciones sencillas permite entender otras más difíciles debido a que los principios físicos son los mismos.

Lo anterior viene a consideración porque todas las suposiciones hechas en los ejemplos presentados, impiden que éstos puedan tomarse como problemas reales de ingeniería. Sin embargo, la forma de trabajar con la transformada Z en:

1.- Ecuaciones en diferencias

2.- Sistemas que involucran un número muy grande de variables discretas

3.- Análisis dinámico y control de procesos,

es general, y proporciona elementos básicos y suficientes para el planteamiento y solución de problemas más complicados.

VI.- BIBLIOGRAFIA.

1.- Abraham, W. H., I&EC Fundamentals, 2(3):221-224(1963).

2.- Ahlfors, Lars V., "Complex Analysis", Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1953.

3.- Bennett, C. O., and Myers, J. E., "Momentum, Heat, and Mass Transfer", 2nd ed., New Delhi, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1975.

4.- Corripio, Armando B. "Z-Transforms", American Institute of Chemical Engineers,[s.a.] , (Modular Instruction Series).

5.- Corripio, Armando B. "Z-Transform Block Diagram Analysis", American Institute of Chemical Engineers,[s.a.], (Modular Instruction Series).

6.- Coughanowr, D. R., and Koppel, L. B., "Process Systems Analysis and Control", Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. 1965.

7.- Churchill, R. V., "Complex Variables and Applications", 2nd ed., Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1960.

8.- Churchill, R. V., "Operational Mathematics", 3rd ed., Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1972.

9.- Feller, W., "An Introduction to Probability Theory and Its Applications", Vol. 1, 3rd ed., U.S.A., John Wiley & Sons, Inc., 1968.

10.- Gabel, R. A., Roberts, R. A., "Señales y Sistemas Lineales", México, Limusa, 1975.

11.- Gilbert, E. G., Simulation, 6(4):241-257(1966).

12.- Haaser, N. B., LaSalle, J. P., y Sullivan, J. A."Análisis Matemático 2: Curso Intermedio", México, Trillas, 1976.

13.- Hsu, Hwei P., "Análisis de Fourier", E.U.A., Fondo Educativo Interamericano, S.A., 1973.

14.- Johnson, Ernest F., "Automatic Process Control", U.S.A., McGraw-Hill Book Company, 1967.

15.- Jury, E. I., "Sampled-Data Control Systems", U.S.A., John Wiley & Sons, Inc., 1958.

16.- Kaufmann, A., "Introducción a la Combinatoria y sus Aplicaciones", España, Compañía Editorial Continental, S.A., 1971.

17.- Kilkson, H., I&EC Fundamentals, 3(4):281-293(1964).

18.- Kilkson, H., I&EC Fundamentals, 7(3):354-363(1968).

19.- Korn, G. A., and Korn, T. M., "Mathematical Handbook for Scientists and Engineers", U.S.A., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1961.

20.- LePage, W. R., "Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers", U.S.A., McGraw-Hill Book Company 1961.

21.- Levenspiel, O., "Chemical Reaction Engineering", 2nd ed., U.S.A., John Wiley & Sons, Inc., 1972.

22.- Lindseth, R. C., "Application of Signal Theory to Well Log Interpretation", Canada, EDP Engineering Data

Processors Ltd., [s.a.] .

23.- Mason, D. R., and Piret, E. L., I&EC, 42(5):817-825(1950).

24.- M[c]Lachlan, N. W., "Complex Variable Theory and Transform Calculus", 2nd ed., Great Britain, Cambridge, University Press, 1955.

25.- México, Facultad de Ingeniería., "Notas de Ecuaciones en Diferencias", Universidad Nacional Autónoma de México, [s.p.i.].

26.- Mickley, H. S., Sherwood, T. K., and Reed, C. E., "Applied Mathematics in Chemical Engineering", 2nd ed., U.S.A., McGraw-Hill Book Company, 1957.

27.- Murdoch, P. G., Chem. Eng. Progr., 44(11):855-862(1948).

28.- Murdoch, P. G., AIChE J., 7(3):526-529(1961).

29.- Oppenheim, A. V., and Schafer, R. W., "Digital Signal Processing", U.S.A., Prentice-Hall, Inc., 1975.

30.- Papoulis, A., "Signal Analysis", Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1977.

31.- Patrick, D. R., and Fardo, S. W., "Industrial Process Control Systems", U.S.A., Howard W. Sams & Co., Inc., 1979.

32.- Perry, R. H., and Chilton, C. H., "Chemical Engineers' Handbook", 5th ed., U.S.A., McGraw-Hill Book Company, 1973.

33.- Ray, W. H., "Polymer Reaction Engineering. Mathematical Modeling Techniques", Canada, McMaster University, 1976.

34.- Rodríguez, F., "Principles of Polymer Systems", U.S.A., McGraw-Hill Book Company, 1970.

35.- Ross, S. L., "Differential Equations", 2^{nd} ed., U.S.A., John Wiley & Sons, Inc., 1974.

36.- Seinfeld, J. H., and Lapidus, L., "Mathematical Methods in Chemical Engineering", vol. 3, U.S.A., Prentice-Hall, Inc., 1974.

37.- Smith, C. L., "Fundamentals of Control Theory", U.S.A., Chem. Eng. Deskbook Issue, october 15, 1979, pp.11-39.

38.- Smith, C. L., and Murrill, P. W., Hydrocarbon Process., (Dec, 1967):109-114.

39.- Smith, C. L., and Murrill, P. W., Hydrocarbon Process., 47(1):155-160(1968).

40.- Smith, C. I., and Murrill, P. W., "Process Dynamics-Try Solving This Way", Texas, Process Instrumentation Manual, Hydrocarbon Processing,[s.a.], pp.73-89.

41.- Spiegel, M. R., "Teoría y Problemas de Variable Compleja", México, Libros McGraw-Hill de México, S.A. de C.V., 1976, (Serie de Compendios Schaum).

42.- Trejo, C. A., "Funciones de Variable Compleja", México, Harper & Row Latinoamericana, 1974.

43.- Treybal, R. E., "Mass-Transfer Operations", 3^{rd} ed., Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1980.

44.- Uribe Velasco, Miguel., "Los Polímeros. Síntesis y Caracterización", México, Limusa, 1980.