



# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE QUIMICA

## TESIS

TEOREMA DE GAUSS Y ALGUNAS DE SUS  
APLICACIONES EN EL MODELADO DE  
BALANCES DE MATERIA Y ENERGIA

MARGARITA MARIA CRISTINA LEON MACHORRO

INGENIERO QUIMICO

1982



EXAMENES PROFESIONALES  
FAC. DE QUIMICA



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

## INDICE

- 1.- Introducción
  - 2.- Fundamentos
    - 2.1 Producto interior
    - 2.2 Longitud o norma de un vector
    - 2.3 Ortogonalidad entre vectores
    - 2.4 Proyección
    - 2.5 Producto cruz
    - 2.6 Divergencia
    - 2.7 Integral doble sobre regiones generales
    - 2.8 La integral triple
  - 3.- Teorema de Gauss
    - 3.1 Definición
    - 3.2 Demostración
  - 4.- Aplicaciones
    - 4.1 Transferencia de energía
    - 4.2 Transferencia de momentum
    - 4.3 Transferencia de masa
  - 5.- Conclusiones
- °Bibliografía

## 1. INTRODUCCION

Una conquista por la que estamos dispuestos a luchar todos es la del bienestar, su consecución progresiva para todos es una aspiración noble y digna en la que no podemos ser neutrales los que queremos hacer honor a nuestra civilización.

Quiero con esto dar a conocer otro punto de vista de un enfoque un poco diferente respecto a los ideales en la vida de cada uno de nosotros, como también lo que podríamos hacer para mejorar la industrialización actual y darnos cuenta de que existe gente que necesita algo de lo que nosotros podemos hacer.

Como parte integrante de una sociedad en la cual se lucha por la superación del hombre en el saber, siempre deseo con toda la fuerza de mi voluntad contribuir modestamente en el logro de una educación verdadera, plena de actividades, las que han de obtenerse en un ambiente de sana comprensión, para que de este modo adquiera principios que fundamentalmente lleven al triunfo y a la confianza en la vida.

Por lo que una de las principales razones que me llevaron a la realización de este trabajo ha sido el darme cuenta que una gran parte de la ingeniería química descansa en principios matemáticos y su relación es tan estrecha que sin la ayuda de las matemáticas sería casi imposible abordar una gran cantidad de aspectos de la ingeniería química así como el hecho que se presenta en algunas ramas de la ingeniería química en las que sus fundamentos son matemáticos, específicamente, fenómenos de transporte.

## 2.- Fundamentos

- 2.1 Producto Interior
- 2.2 Longitud o norma de un vector
- 2.3 Ortogonalidad entre vectores
- 2.4 Proyección
- 2.5 Producto cruz
- 2.6 Divergencia
- 2.7 Integral doble sobre regiones generales
- 2.8 La integral triple

## 2.1 PRODUCTO INTERIOR

Definición: Si  $A=(a_1, \dots, a_n)$  y  $B=(b_1, \dots, b_n)$  son dos vectores en  $V_n$ , su producto interior, denotado por  $A \cdot B$ , está definido por la ecuación

$$A \cdot B = \sum_1^n a_k b_k$$

Para calcular  $A \cdot B$ , multiplicamos las componentes correspondientes de  $A$  y  $B$ , y sumamos todos los productos. Esta multiplicación tiene las siguientes propiedades algebraicas.

Si  $A, B, C$  son vectores en  $V_n$  y  $c$  es cualquier escalar, se tienen:

- a)  $A \cdot B = B \cdot A$  (ley conmutativa)
- b)  $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$  (ley distributiva)
- c)  $c(A \cdot B) = (cA) \cdot B = A \cdot (cB)$  (homogeneidad)
- d)  $A \cdot A \geq 0$  si  $A \neq 0$  (positividad)
- e)  $A \cdot A = 0$  si  $A=0$

## 2.2 LONGITUD O NORMA DE UN VECTOR

Definición: Si  $A$  es un vector en  $V_n$ , su longitud o norma, denotada por  $|A|$  está definida por la ecuación

$$|A| = (A \cdot A)^{1/2}$$

Propiedades de la norma de un vector

- a)  $|A| \geq 0$  si  $A \neq 0$  (positividad)
- b)  $|A| = 0$  si  $A=0$
- c)  $|cA| = |c| |A|$  (homogeneidad)
- d)  $|A+B| \leq |A| + |B|$  (desigualdad del triángulo)

### 2.3 Ortogonalidad entre vectores

Definición: Dos vectores  $A$  y  $B$  en  $V_n$  son ortogonales si  $A \cdot B = 0$ . Adoptaremos la convención de que el vector cero es ortogonal a todos los vectores. Por consiguiente, el producto interno nos provee de un método conveniente para determinar si dos vectores son ortogonales. Por ejemplo, los vectores  $i_\theta = (\cos\theta)i + (\sin\theta)j$  y  $j_\theta = -(\sin\theta)i + (\cos\theta)j$  son ortogonales, ya que:

$$i_\theta \cdot j_\theta = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$$

### 2.4 Proyección

Definición: Sean  $A$  y  $B$  dos vectores en  $V_n$  con  $B \neq 0$ . El vector  $tB$ , donde

$$t = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}$$

es llamado la proyección de  $A$  a lo largo de  $B$ .

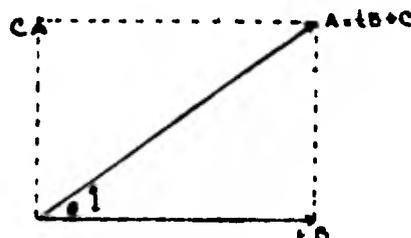
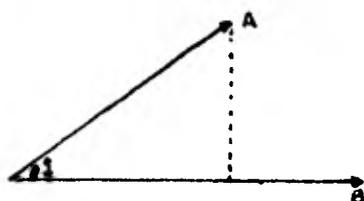
Si ambos,  $A$  y  $B$  son diferentes de cero, el ángulo  $\theta$  entre  $A$  y  $B$  está definido por la ecuación

$$\theta = \arccos \frac{A \cdot B}{|A| |B|}$$

Notar que la función arc coseno restringe a  $\theta$  al intervalo,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , notar también que  $\theta = \frac{1}{2} \pi$  cuando  $A \cdot B = 0$ .

El producto interior entre dos vectores en  $V_2$  tiene una interpretación geométrica interesante. En la figura se muestran dos vectores  $A$  y  $B$  diferentes de cero haciendo un ángulo  $\theta$  entre ellos. En este ejemplo, tenemos  $0 < \theta < \frac{1}{2} \pi$ . En la siguiente figura vemos el mismo vector  $A$  y dos vectores perpendiculares cuya suma es  $A$ . Uno de estos,  $tB$ , es un múltiplo escalar de

B el cual es llamado la proyección de A a lo largo de B. En éste ejemplo, t es positivo ya que  $0 < \theta < \pi/2$ ,



usando el producto interior para expresar t en terminos de A y B primero escribiendo  $tB + C = A$  y aplicando el producto interior a cada miembro con B obtenemos

$$tB \cdot B + C \cdot B = A \cdot B$$

pero  $C \cdot B = 0$ , ya que C es perpendicular a B. Por tanto  $tB \cdot B = A \cdot B$  de donde

$$t = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} = \frac{A \cdot B}{|B|^2}$$

por otra parte, el escalar t presenta una relación simple con el ángulo  $\theta$ . De la figura observamos que

$$\cos \theta = \frac{|tB|}{|A|} = \frac{|t| |B|}{|A|} = t \frac{|B|}{|A|} \quad \text{como } \theta \in (0, \pi/2) \quad \text{entonces } |t| = t$$

de lo cual tenemos que

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A| |B|}$$

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta$$

## 2.5 Producto cruz

Definición: Sean  $A = a_1i + a_2j + a_3k$  y  $B = b_1i + b_2j + b_3k$  dos vectores en  $\mathbb{R}^3$ . El producto cruz de A y B, que se denota por  $A \times B$ , se define como el vector

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

o, simbólicamente

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Notese que el producto cruz de dos vectores es otro vector.

Propiedades básicas del producto cruz. Para todo vector A, B, C en  $V_3$  y para todo real c, tenemos:

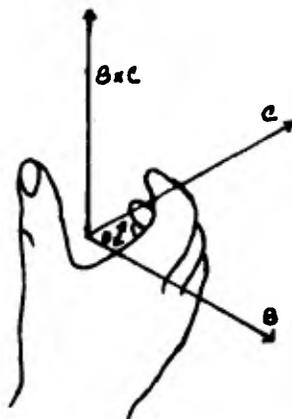
- a)  $A \times B = -(B \times A)$
  - b)  $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$  (ley distributiva)
  - c)  $c(A \times B) = (cA) \times B$
  - d)  $A \cdot (A \times B) = 0$  (ortogonalidad a A)
  - e)  $B \cdot (A \times B) = 0$  (ortogonalidad a B)
  - f)  $A \times B = 0$  si y solo si A y B son linealmente dependientes.
- notese que:

$$i \times j = k \quad j \times k = i \quad k \times i = j$$

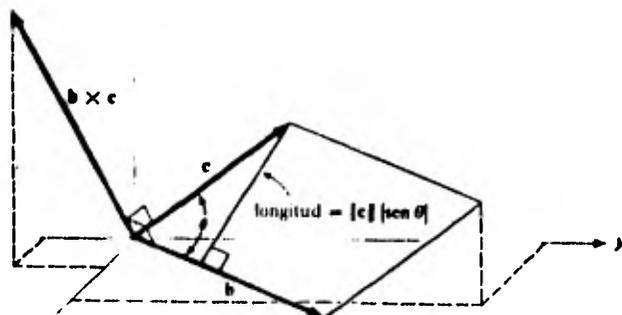
### 2.5.1 Interpretación geométrica

El vector  $B \times C$  es ortogonal a cualquier vector en el plano generado por  $B$  y  $C$ , en particular es ortogonal a  $B$  y  $C$  sin embargo, hay dos vectores posibles que satisfacen esta condición, ya que hay dos elecciones para la dirección, cada una de ellas perpendicular (o normal) al plano generado por  $B$  y  $C$ . La regla de la mano derecha determina la dirección de  $B \times C$ .

Tome la palma de su mano derecha y colóquela de tal modo que sus dedos se curven desde  $B$  hacia  $C$  como se muestra en la figura. Entonces el pulgar apuntará en la dirección de  $B \times C$ .



Si  $B$  y  $C$  son colineales,  $\sin \theta = 0$  y, por tanto,  $B \times C = 0$ , si  $B$  y  $C$  no son colineales, entonces generan un plano y  $B \times C$  es un vector perpendicular a este plano. La longitud de  $B \times C$ ,  $|B| |C| |\sin \theta|$ , es justamente el área del paralelogramo que tiene como lados adyacentes a los vectores  $B$  y  $C$ .



## 2.6 Divergencia.

Operador diferencial Nabla.

Se representa por  $\nabla$  y se define por

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

$\nabla$  es un operador; esto es, tiene sentido cuando actúa u opera en funciones con valores reales, esta notación formal es muy útil en la aplicación de tres magnitudes muy importantes en la práctica denominadas gradiente, divergencia y rotacional.

Divergencia es una operación básica, definida por

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

es un campo escalar, se lee ((divergencia de F)).

El significado físico de divergencia es que en un punto P  $\text{div } F(P)$  es la razón de flujo neto que sale por P, por unidad de volumen. Así, si  $\text{div } F(P) > 0$ , consideramos a P, por unidad de volumen, como una fuente, para la cual hay, cerca de P, un flujo neto exterior. Si  $\text{div } F(P) < 0$  P es un pozo, sumidero, de F.

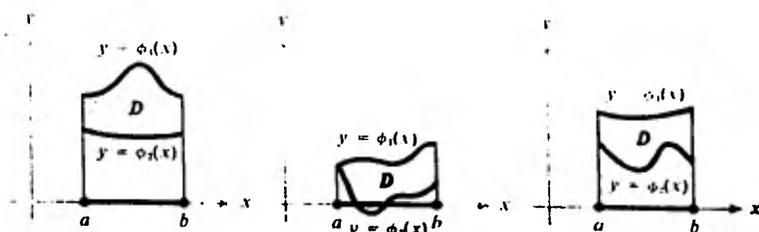
## 2.7 Integral doble sobre regiones generales.

En primer lugar definiremos la integral  $\int_D f(x,y) \, dA$  en regiones D mas generales que rectangulos y en segundo lugar desarrollaremos una técnica para evaluar este tipo de integrales. Para lograr esto, definiremos tres tipos especiales de subconjunto del plano xy y extenderemos a ellos el concepto de integral doble.

Supongase que tenemos dos funciones continuas con valores reales  $\phi_1 : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi_2 : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfacen  $\phi_2(t) \leq \phi_1(t)$  para toda  $t \in (a,b)$ . sea D el conjunto de todos los puntos (x,y) tales que

$$x \in (a,b), \quad \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x)$$

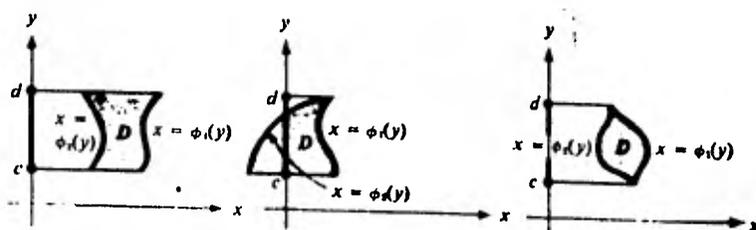
Diremos que esta región  $D$  es del tipo 1. La figura muestra varios ejemplos de regiones del tipo 1. Las curvas y segmentos de recta que acotan la región, considerados en conjunto, constituyen la frontera de  $D$ , que denotamos como  $\partial D$ .



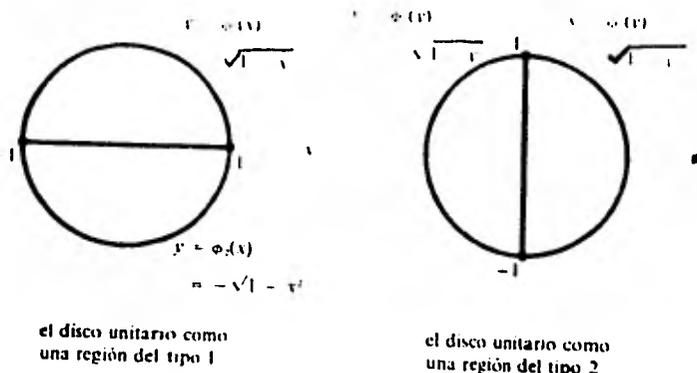
Diremos que una región es del tipo 2 si existen funciones continuas  $\phi_1, \phi_2 : (c,d) \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $D$  es el conjunto de puntos  $(x,y)$  que satisfacen

$$y \in (c,d), \quad \phi_2(y) \leq x \leq \phi_1(y)$$

donde  $\phi_2(t) \leq \phi_1(t)$ ,  $t \in (c,d)$ . Nuevamente, las curvas que acotan la región  $D$  constituyen su frontera  $\partial D$ : En la figura se muestran algunos ejemplos de regiones del tipo 2.



Finalmente, una región del tipo 3 es aquella que es del tipo 1 y del tipo 2; un ejemplo de una región del tipo 3 es el disco unitario.



Frecuentemente nos referimos a las regiones del tipo 1, 2 y 3 como regiones elementales. Notese que la frontera  $\partial D$  de una región elemental tiene área cero.

**Definición:** Si  $D$  es una región elemental en el plano, podemos encontrar un rectángulo  $R$  que contenga  $D$ , siendo  $D$  cerrado. Suponiendo que se ha escogido dicha  $R$ . Dado  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $f$  es continua (y por tanto acotada) para definir  $\int_D f(x,y) dA$ , la integral de  $f$  sobre el conjunto  $D$ . Para ello, (extenderemos)  $f$  a una función  $f^*$  definida en todo  $R$  mediante

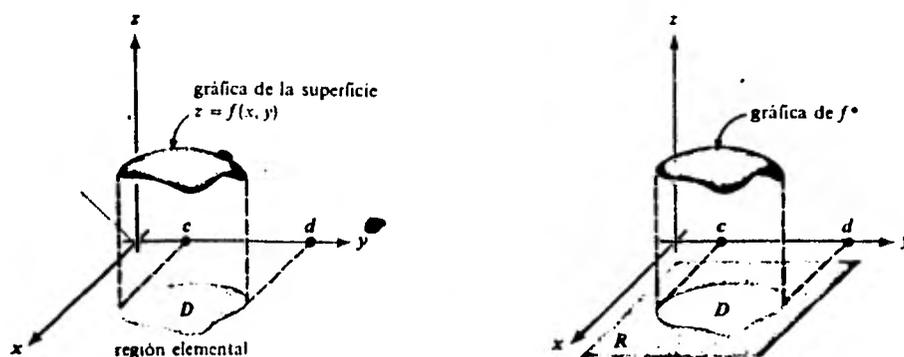
$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \text{ y } (x,y) \in R \end{cases}$$

Ahora bien,  $f^*$  es acotada (porque  $f$  lo es) y es continua excepto, quizás, en la frontera de  $D$ . La frontera de  $D$  tiene área cero; así,

$f^*$  es integrable sobre  $R$ . Por tanto podemos definir

$$\int_D f(x,y) \, dA = \int_R f^*(x,y) \, dA$$

cuando  $f(x,y) \geq 0$  en  $D$ , podemos interpretar la integral  $\int_D f(x,y) \, dA$  como el volúmen de la región tridimensional entre la gráfica de  $f$  y  $D$ , ver la figura.



Si  $R = (a,b) \times (c,d)$  es un rectángulo que contiene a  $D$ , entonces tenemos:

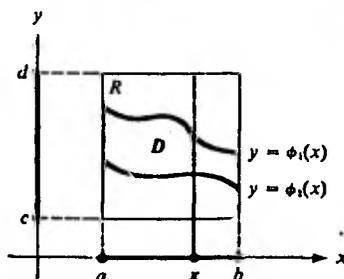
$$\begin{aligned} \int_D f(x,y) \, dA &= \int_R f^*(x,y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f^*(x,y) \, dy \, dx \\ &= \int_c^d \int_a^b f^*(x,y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

donde  $f^*$  es igual a  $f$  en  $D$  y es cero fuera de  $D$ . Suponiendo que  $D$  es una región del tipo 1 determinada por las funciones  $\phi_1: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\phi_2: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Considerando la integral

$$\int_a^b \int_c^d f^*(x,y) \, dy \, dx$$

y, en particular, la integral interior  $\int_c^d f^*(x,y) \, dy$  para alguna  $x$  fija (figura) como por definición,  $f^*(x,y) = 0$  si  $y > \phi_1(x)$  o  $y < \phi_2(x)$  obtenemos

$$\int_C^d f^*(x,y) dy = \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f^*(x,y) dy = \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f(x,y) dy$$



Así si D es una región del tipo 1

$$\int_D f(x,y) dA = \int_a^b \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f(x,y) dy dx \quad 2.7.1.$$

en el caso  $f(x,y)=1$  para toda  $(x,y) \in D$ ,  $\int_D f(x,y) dA$  es el área de D.

Los métodos para tratar regiones del tipo 2 son enteramente análogas. Específicamente, si D es el conjunto de puntos  $(x,y)$  tales que  $y \in (c,d)$ ,  $\phi_2(y) \leq x \leq \phi_1(y)$  entonces para f continua tenemos

$$\int_D f(x,y) dA = \int_c^d \left( \int_{\phi_2(y)}^{\phi_1(y)} f(x,y) dx \right) dy \quad 2.7.2$$

para encontrar el área de D sustituimos  $f=1$ ; esto da

$$\int_D dA = \int_c^d (\phi_1(y) - \phi_2(y)) dy$$

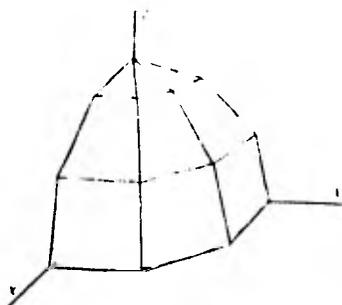
Para integrales sobre regiones del tipo 3 se puede utilizar cualquiera de los dos métodos, para regiones del tipo 1 o del tipo 2.

De las formulas 2.7.1 y 2.7.2 también se sigue que  $\int_D f$  es independiente de la elección del rectángulo R que contenga a D, utilizado en la definición de  $\int_D f$ .

Ahora definiremos la integral de superficie de la componente normal de una función vectorial  $F(x,y,z)$ . Esta cantidad es denotada por,

$$\iint_S F \cdot n \, dS$$

y como puede notarse, la ley de Gauss está expresada en estos terminos, Siendo  $z=f(x,y)$  la ecuación de alguna superficie. Consideremos una porción limitada de esta superficie la cual designaremos  $S$ . Primeramente aproximaremos  $S$  por un poliedro consistente de  $N$  caras planas cada una de las cuales es tangente a  $S$  en algún punto. La figura muestra como ésta aproximación poliédrica puede verse como una concha esférica.



Concentraremos nuestra atención en una de estas caras planas. Denotando  $\Delta S_1$  su área y siendo  $(x_1, y_1, z_1)$  las coordenadas del punto en el cual la cara  $l$ -ésima es tangente a la superficie  $S$ . Evaluando la función  $F$  en éste punto y entonces efectuando el producto interior con  $n_1$ , el vector unitario normal de la  $l$ -ésima cara. La cantidad resultante  $F(x_1, y_1, z_1) \cdot n_1$  es multiplicada por el área de la cara  $\Delta S_1$  para dar

$$F(x_1, y_1, z_1) \cdot n_1 \Delta S_1$$

Si efectuamos el mismo procedimiento para cada una de las  $N$  caras realizando la suma sobre las  $N$  caras:

$$\sum_{l=1}^N F(x_1, y_1, z_1) \cdot n_1 \Delta S_1$$

la integral de superficie es definida como el límite de ésta suma con N. número de caras. aproximadamente infinito y el área de cada cara aproximadamente cero. Por tanto.

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\text{Cada } \Delta S_1 \rightarrow 0)}} \sum_1^n F(x_1, y_1, z_1) \cdot n_1 \Delta S_1$$

estrictamente hablando esta integral a través de toda la superficie es,

$$\iint_S F(x, y, z) \cdot n(x, y, z) \, dS$$

ya que ambos F y n son generalmente funciones de posición. Sin embargo, la integral de superficie no está bien definida hasta que especificamos cual de las dos direcciones posibles de la normal usaremos.

Una integral del tipo

$$\iint_S F(x, y, z) \cdot n \, dS$$

es frecuentemente llamada el flux de F, por tanto la ley de Gauss es una medida de flux.

## 2.8 La integral triple.

Dada una función continua  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $C$  es algún paralelepípedo rectangular en  $\mathbb{R}^3$ , podemos definir la integral de  $f$  sobre  $C$  como un límite de sumas. Brevemente, partimos los tres lados de  $C$  en  $n$  partes iguales y formamos la suma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta V$$

donde  $c_{ijk}$  es el  $ijk$ -ésimo paralelepípedo rectangular en la partición de  $C$  y  $\Delta V$  es el volumen de  $c_{ijk}$ .

Definición: Sea  $f$  una función de tres variables, acotada, definida en  $C$ . Si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  y el límite es independiente de los puntos  $c_{ijk}$ , al límite de  $S_n$  lo llamamos integral triple de  $f$  sobre  $C$  y lo denotamos por

$$\int_C f, \int_C f(x,y,z) dV, \int_C f(x,y,z) dx dy dz, \text{ o } \iiint_C f(x,y,z) dx dy dz.$$

Por analogía con la integral doble, consideremos el problema de calcular integrales triples sobre regiones generales. Para conjuntos acotados  $W \subset \mathbb{R}^3$ , cuya frontera  $\partial W$  tiene <volumen cero>, toda función  $f: W \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable extendiendo  $f$  a una función  $f^*$  que coincida con  $f$  en  $W$  y sea cero fuera de  $W$ . Si  $B$  es una caja que contiene a  $W$ . Definimos

$$\int_W f(x,y,z) dV = \int_B f^*(x,y,z) dV$$

como en el caso bidimensional, esta integral es independiente de la elección de  $B$ .

Como en el caso de dos variables, restringiremos nuestra atención a regiones de tipo especial. Una región  $W$  es de tipo 1 si podemos describirla como el conjunto de todos los  $(x,y,z)$  tal que

$$a \leq x \leq b, \quad \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x) \quad \text{y} \quad \gamma_2(x,y) \leq z \leq \gamma_1(x,y) \quad 2.8.1$$

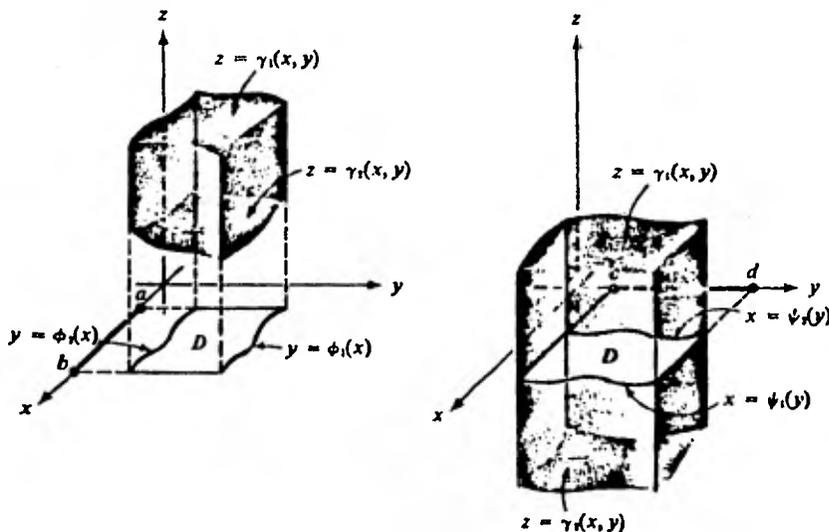
en esta definición:  $\gamma_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1,2$ , son funciones continuas,  $D$  es una región del tipo 1, y  $\gamma_1 = \gamma_2$  en la frontera (por el momento)

la última condición significa que las superficies  $z=\gamma_1(x,y)$  y  $z=\gamma_2(x,y)$ , si se intersectan, lo hacen solo en  $(x,y) \in \partial D$ .

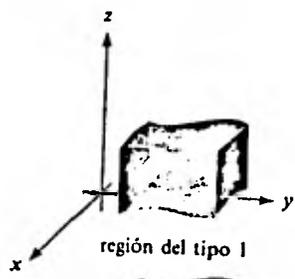
También una región es del tipo 1 si puede expresarse como el conjunto de todos los  $(x,y,z)$  tales que

$$c \leq y \leq d, \quad \psi_2(y) \leq x \leq \psi_1(y) \quad \text{y} \quad \gamma_2(x,y) \leq z \leq \gamma_1(x,y) \quad 2.8.2.$$

donde los  $\gamma_i: D \rightarrow \mathbb{R}$  son como antes y  $D$  es una región bidimensional del tipo 2

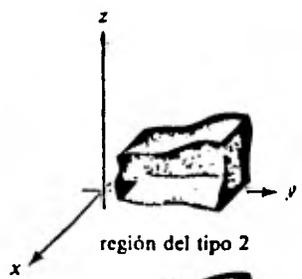


Una región  $W$  es del tipo 2 si puede expresarse en la forma 1 o 2 intercambiando los papeles de  $x$  y  $z$ , y  $W$  es del tipo 3 si puede expresarse en la forma 1 o 2 intercambiando  $y$  y  $z$ . Un ejemplo de una región del tipo 4 es la bola de radio  $r$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ .



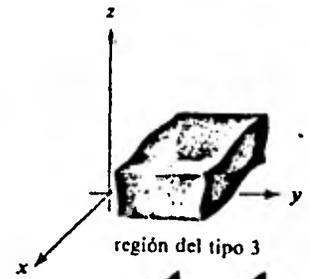
región del tipo 1

la parte superior e inferior son superficies  $z = f(x, y)$



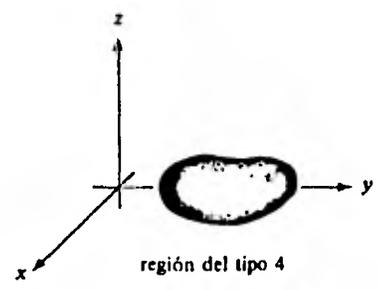
región del tipo 2

el frente y la parte posterior son superficies  $x = f(z, y)$



región del tipo 3

la parte izquierda y derecha son superficies  $y = f(x, z)$



región del tipo 4



como una región del tipo 1



como una región del tipo 2



como una región del tipo 3

Suponiendo que  $W$  es del tipo 1. Entonces

$$\begin{aligned} \int_W f(x,y,z) dV &= \int_a^b \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} \int_{\gamma_2(x,y)}^{\gamma_1(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx \\ &= \int_D \left| \int_{\gamma_2(x,y)}^{\gamma_1(x,y)} f(x,y,z) dz \right| dy dx \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \int_W f(x,y,z) dV &= \int_c^d \int_{\psi_2(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x,y,z) dz dx dy \\ &= \int_D \left| \int_{\gamma_2(x,y)}^{\gamma_1(x,y)} f(x,y,z) dz \right| dx dy \end{aligned}$$

según como se defina  $W$ , por 1 o por 2.

3. Teorema de la divergencia

3.1 Definición

3.2 Demostración

### 3.1 DEFINICION. Teorema de la divergencia

Sea  $\Omega$  una región del tipo 4 en el espacio. Denotando por  $\partial\Omega$  la superficie cerrada orientada que acota  $\Omega$ . Sea  $F$  un campo vectorial suave definido en  $\Omega$ , entonces,

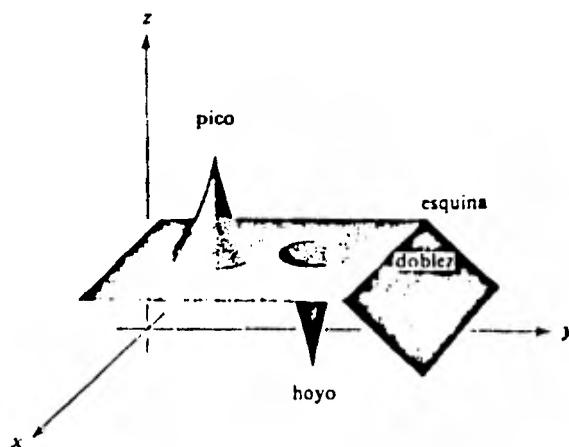
$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F = \int_{\partial\Omega} F$$

o alternamente

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV = \int_{\partial\Omega} (F \cdot n) \, dS$$

Definiciones:

Una función diferenciable de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}$  debe ser tal que además de no tener ((grietas)) en su gráfica, esté bien definido el plano tangente en cada punto de la gráfica. Así, no debe haber dobleces, cortantes, esquinas o picos en la gráfica. En otras palabras, la gráfica debe ser suave.



Esta gráfica no es suave.

Una superficie orientada, es una superficie con dos lados: uno de ellos se llama lado exterior o positivo y el otro se llama lado interior o negativo. En cada punto  $(x, y, z) \in S$  hay dos vectores normales unitarios  $n_1$  y  $n_2$ , donde  $n_1 = -n_2$  cada uno de éstos dos vectores puede asociarse con un lado de la superficie  $S$ , elegimos en cada punto un vector normal unitario  $n$  que señale alejándose del lado positivo de  $S$  en ese punto. Esta definición supone que nuestra superficie tiene dos lados.

### 3.2 DEMOSTRACION

Si  $F = P_i + Q_j + R_k$ , entonces por definición

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

usando la aditividad de la integral de volumen, tenemos,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dV = \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dV + \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dV + \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

Por otro lado la integral de superficie en cuestión es

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n dS &= \int_{\partial\Omega} (P_i + Q_j + R_k) \cdot n dS \\ &= \int_{\partial\Omega} P_i \cdot n dS + \int_{\partial\Omega} Q_j \cdot n dS + \int_{\partial\Omega} R_k \cdot n dS \end{aligned}$$

El teorema quedará demostrado si se establecen las tres siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} P_i \cdot n dS &= \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dV \\ \int_{\partial\Omega} Q_j \cdot n dS &= \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dV \\ \int_{\partial\Omega} R_k \cdot n dS &= \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV \end{aligned}$$

Probando la tercera; las otras dos igualdades se prueban exactamente de manera analoga.

Como  $\Omega$  es una región del tipo 1 (asi como de tipos 2 y 3) existe un par de funciones

$$z = f_1(x, y) \quad z = f_2(x, y)$$

cuyo dominio común es una región elemental  $D$  en el plano  $xy$ , tal que  $\Omega$  es el conjunto de todos los puntos  $(x, y, z)$  que satisfacen

$$f_2(x, y) \leq z \leq f_1(x, y), \quad (x, y) \in D$$

tenemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \int_D \left( \int_{z=f_2(x,y)}^{z=f_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy$$

y así

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \int_D |R(x, y, f_1(x, y)) - R(x, y, f_2(x, y))| dx dy$$

La frontera de  $\Omega$  es una superficie cerrada cuya parte superior  $S_1$  es la gráfica de  $z=f_1(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  y cuya parte inferior  $S_2$  es la gráfica de  $z=f_2(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ . los cuatro lados de  $\partial\Omega$  constan de las superficies  $S_3, S_4, S_5$  y  $S_6$  cuyas normales siempre son perpendiculares al eje  $z$ . Po definición,

$$\int_{\partial\Omega} Rk \cdot n dS = \int_{S_1} Rk \cdot n_1 dS + \int_{S_2} Rk \cdot n_2 dS + \sum_{i=3}^6 \int_{S_i} Rk \cdot n_i dS$$

como la normal  $n_i$  es perpendicular a  $k$  en cada  $S_3, S_4, S_5$  y  $S_6$  tenemos  $k \cdot n_i = 0$  a lo largo de estas caras y así la integral se reduce a

$$\int_{\partial\Omega} Rk \cdot n dS = \int_{S_1} Rk \cdot n_1 dS + \int_{S_2} Rk \cdot n_2 dS$$

la superficie  $S_2$  está definida por  $z = f_2(x, y)$ , así

$$n_2 = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x} i + \frac{\partial f_2}{\partial y} j - k}{\left| \frac{\partial f_2}{\partial x} i + \frac{\partial f_2}{\partial y} j - k \right|} = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x} i + \frac{\partial f_2}{\partial y} j - k}{\left| \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|^2 + 1}^{1/2}$$

Así

$$n_2 \cdot k = \frac{-1}{\left| \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|^2 + 1}^{1/2}$$

y

$$\int_{S_2} R(k \cdot n_2) dS =$$

$$\int_D R(x, y, f_2(x, y)) \left| \frac{-1}{\left| \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|^2 + 1} \right| \left| \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|^2 + 1 \right|^{1/2} dA$$

$$= -\int_D R(x, y, f_2(x, y)) dx dy$$

Análogamente, en la cara superior  $S_1$  tenemos

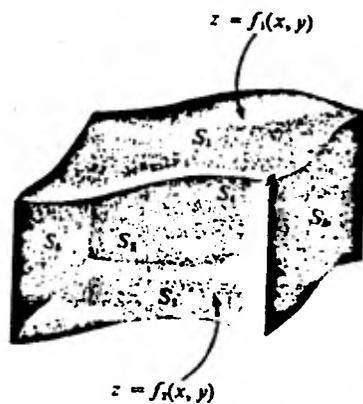
$$k \cdot n_1 = \frac{1}{\left| \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|^2 + 1}^{1/2}$$

y así

$$\int_{S_1} R(k \cdot n) dS = \int_D R(x, y, f_1(x, y)) dA$$

substituyendo y comprobando

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \int_{\partial \Omega} R(k \cdot n) dS$$



Las igualdades restantes se pueden establecer exactamente de la misma manera.

#### 4. APLICACIONES

- 4.1 Transferencia de energia
- 4.2 Transferencia de momentum
- 4.3 Transferencia de masa

#### 4.1 TRANSFERENCIA DE ENERGIA

La ley fenomenológica que gobierna la transferencia de energía por difusión molecular es la ley de Fourier. La ecuación de energía es desarrollada en forma vectorial para un sistema sólido estacionario y entonces extendido a un sistema de flujo a regimen laminar.

##### LEY DE FOURIER

Iniciaremos definiendo algunas formas de energía y examinando las unidades de algunas de las cantidades que encontraremos en el desarrollo.

Algunas de las formas más importantes de energía son:

- a) Interna
- b) Cinética
- c) Potencial

nosotros representamos la energía interna por unidad de masa (Btu/Lb) con la notación E.I. . La relación entre la temperatura y la energía interna para un fluido de un solo componente y en solo una fase es:

$$E.I. = C_v (T - T_0)$$

donde

$C_v$  = capacidad calorífica a volúmen constante (Btu/Lb°F)

$T$  = Temperatura de la masa (°F)

$T_0$  = Temperatura base, arbitraria (°F)

Para sólidos y líquidos

$$C_p \sim C_v$$

la ecuación puede entonces ser escrita como

$$E.I. = C_p (T - T_0)$$

La notación E.K. se usa para representar la energía cinética por unidad de masa ( $\text{ft-Lb}_f / \text{Lb}$ ) esta relación viene dada por

$$E.K. = \frac{v^2}{2gc}$$

donde

$v$  = masa velocidad (ft / seg)

$gc$  = conversión gravitacional constante ( $32.2 \frac{\text{Lb-ft}}{\text{Lb}_f\text{-seg}^2}$ )

La relación entre la energía potencial E.P. y la posición relativa, a cero como punto de referencia en  $z$  es:

$$E.P. = \frac{g}{gc} z$$

donde

$g$  = aceleración debida a la gravedad ( $\text{ft/seg}^2$ )

$z$  = coordenada de posición vertical (ft)

la conversión constante  $J$  se incluye con unidades  $\text{ft-Lb}_f$ .  $J$  viene dada por

$$J = 778 \frac{\text{ft-Lb}_f}{\text{Btu}}$$

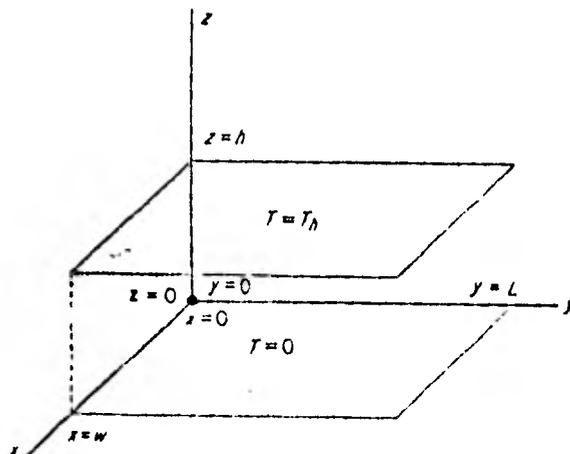
donde  $J$  representa el equivalente mecánico del calor.

Las unidades de la rapidez de cambio de la energía son la energía dividida por el tiempo

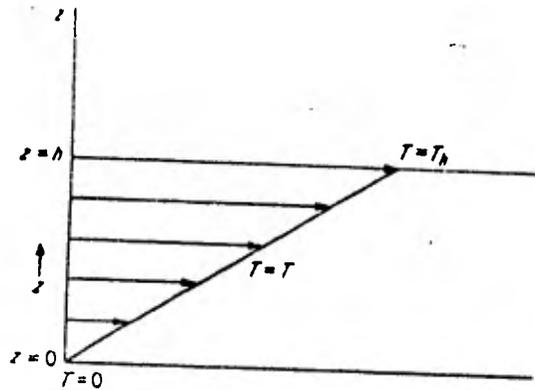
$$\text{rapidez de energía} = \frac{\text{Btu}}{\text{seg}}$$

finalmente, el cambio de temperatura con respecto a la posición esta definido como el gradiente de temperatura cuyas unidades son  $^{\circ}\text{F}/\text{ft}$ .

Ahora procederemos con la ley de Fourier de conductividad térmica. Considerando un fluido estacionario ( gas líquido o sólido ) contenido en una región limitada por dos platos horizontales, paralelos infinitos separados por una distancia  $h$ .



El plato superior se mantiene a una temperatura  $T = T_h > 0$  mientras el plato inferior se mantiene a  $T = 0$ . El gradiente de temperatura en una representación de dos dimensiones es,



que resultará después de un largo período de tiempo ( $t \rightarrow \infty$ ).

Experimentalmente se ha demostrado que la energía en forma de calor es transferida desde el plato superior al inferior y que la rapidez de transferencia de energía  $Q$  por unidad de área  $A$  es proporcional al gradiente de temperatura

$$\frac{Q}{A} \propto \frac{Th}{h}$$

en forma más general

$$\frac{Q}{A} \propto \frac{\Delta T}{\Delta z}$$

cuando  $\Delta z \rightarrow 0$ ,  $\frac{\Delta T}{\Delta z} \rightarrow \frac{dT}{dz}$ , por tanto

$$\frac{Q}{A} \propto \frac{dT}{dz}$$

escribiendo la expresión en forma de ecuación mediante el reemplazo de una constante de proporcionalidad,  $-K$

$$\frac{Q}{A} = -K \frac{dT}{dz}$$

el término  $K$  se define como conductividad térmica. Es una propiedad del fluido y generalmente se evalúa en forma experimental, sin embargo depende de la temperatura y de la presión.

sión del fluido. Nosotros lo asumiremos constante.

El termino  $\frac{Q}{A}$  es un término conocido como flux de calor y es designado como  $q_z$ , por tanto

$$q_z = -K \frac{dT}{dz}$$

un fluido cuyo flux de calor se puede describir por esta ecuación se define como un fluido que obedece la ley de Fourier.

La temperatura aplicada en  $z=0$  y  $z=h$  tiene como resultado una transferencia de energía en forma de calor en la dirección negativa del eje  $z$ . El signo negativo de esta ecuación se introduce debido a que la transferencia de energía se presenta en la dirección negativa del eje  $z$  en presencia de un gradiente de temperatura positivo.

El analisis anterior fue hecho para un sistema simple, generalmente un fluido posee tres gradientes de temperatura con sus correspondientes componentes de flux de calor que son  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ , los cuales vienen dados por

$$q_x = -K \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_y = -K \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_z = -K \frac{\partial T}{\partial z}$$

representando estas tres componentes escalares en un vector, flux de calor  $q$

$$\begin{aligned}
 q &= \delta_1 q_x + \delta_2 q_y + \delta_3 q_z \\
 &= -(\delta_1 K \frac{\partial T}{\partial x} + \delta_2 K \frac{\partial T}{\partial y} + \delta_3 K \frac{\partial T}{\partial z}) \\
 &= -K \nabla T
 \end{aligned}$$

### TRANSFERENCIA DE ENERGIA EN SOLIDOS

La ecuación que describe la transferencia de energía para un sólido en reposo sirve como un excelente punto de apoyo para el desarrollo de la ecuación general de transferencia de energía. La ecuación de transferencia de energía se desarrolla a partir de la ley de la conservación de la energía con una base de tiempo y por unidad de volumen fijo.

Considerando un elemento de volumen fijo  $\tau$  con una superficie  $f$  las cuales contienen un sólido homogéneo. La temperatura, densidad, capacidad calorífica y flux de calor están definidos en cada punto del sistema incluyendo en la superficie, la ley de la conservación de la energía dice:

$$\left| \begin{array}{l} \text{cantidad de} \\ \text{energía que} \\ \text{entra} \end{array} \right|_{(1)} - \left| \begin{array}{l} \text{cantidad de} \\ \text{energía que} \\ \text{sale} \end{array} \right|_{(2)} + \left| \begin{array}{l} \text{cantidad de} \\ \text{energía} \\ \text{generada} \end{array} \right|_{(3)} =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{acumulacion} \\ \text{de energía} \\ \text{interna} \end{array} \right|_{(4)}$$

4.1.1

ya que el elemento de volumen es sólido y en reposo, no sur-

como el término (1) - (2) es la evaluación neta de energía dentro del sistema entonces, tenemos:

$$- \int_f \int q \cdot df \quad 4.1.2$$

los efectos de convección no se presentan debido a que es un sólido en reposo

Término (3)

Este término representa la energía generada en  $\tau$  debido a reacciones químicas y nucleares. Los efectos eléctricos y de radiación pueden incluirse en éste término. Definimos el término " fuente " A como la cantidad de energía generada por unidad de tiempo y por unidad de volúmen

$$A = \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^3\text{-seg}}$$

la energía generada viene dada por

$$A \, d\tau$$

integrando a través de  $\tau$  para obtener la cantidad neta de energía generada en el elemento de volúmen tenemos

$$\int_V A \, d\tau \quad 4.1.3$$

Término (4)

Es una medida de la evaluación del cambio de la energía interna dentro del sistema. Si  $d\tau$  ( $\text{ft}^3$ ) es un elemento diferencial de volúmen, dentro de  $d\tau$

$$(E.I.)d\tau \quad \text{o} \quad \rho C_p (T - T_o) d\tau$$

representa la energía contenida en  $d\tau$ . La evaluación del cambio de esta energía con respecto al tiempo en un punto fijo del espacio viene dado por

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_p (T - T_0) d\tau)$$

notese que hemos considerado el cambio de energía interna solamente producido por el cambio de calor sensible dentro del sistema.

La temperatura de referencia es constante y no contribuye. Si  $\rho$  y  $C_p$  son constantes, la ecuación anterior se convierte en:

$$\rho C_p \left| \frac{\partial T}{\partial t} \right| d\tau \quad 4.1.4$$

por lo que el cambio neto es

$$\rho C_p \int_V \left| \frac{\partial T}{\partial t} \right| d\tau \quad 4.1.4'$$

substituyendo las ecuaciones 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4' en la ecuación 4.1.1 tenemos:

$$-\int_V \mathbf{q} \cdot d\mathbf{f} + \int_V A d\tau = \rho C_p \int_V \left| \frac{\partial T}{\partial t} \right| d\tau$$

esta ecuación no es geoméricamente consistente. El primer término del lado izquierdo puede ser convertido en una integral de volúmen por aplicación del teorema de Gauss

$$-\int_V \mathbf{q} \cdot d\mathbf{f} = -\int_V (\nabla \cdot \mathbf{q}) d\tau$$

por lo que la ecuación se convierte en

$$-\int_V (\nabla \cdot \mathbf{q}) d\tau + \int_V A d\tau = \rho C_p \int_V \left| \frac{\partial T}{\partial t} \right| d\tau \quad 4.1.5$$

rearrreglando

$$\iiint_V (-\nabla \cdot \mathbf{q} + A - \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}) d\tau = 0$$

si  $\mathbf{q}$ ,  $A$  y  $T$  y sus derivadas son continuas en  $\tau$ , los integrandos de la ecuación anterior son también igual - esto es,

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + A \quad 4.1.6$$

esta ecuación describe la variación de la temperatura en un sólido debida a la transferencia de energía. Si el sólido cumple las hipótesis de la ley de Fourier, el vector flux de calor puede reemplazarse por:

$$\mathbf{q} = -K \nabla T$$

por lo que la ecuación 4.1.6 se convierte en:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -K \nabla^2 T + A$$

dividiendo entre  $\rho C_p$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{-K}{\rho C_p} \nabla^2 T + \frac{A}{\rho C_p}$$

o

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \nabla^2 T + \frac{A}{\rho C_p} \quad 4.1.6'$$

$$a^2 = \frac{K}{\rho C_p} = \text{difusividad térmica}$$

## ECUACION DE TRANSFERENCIA DE ENERGIA

Obtendremos esta ecuacion en forma vectorial. Esta ecuación diferencial describe la distribución de temperatura en un fluido en movimiento a régimen laminar. Será desarrollada a partir de un balance de energía y la ley de Fourier en un elemento de volúmen.

Primeramente consideraremos un elemento de volumen finito con una superficie  $f$  a través de la cual un fluido en movimiento esta fluyendo. Este elemento de volúmen esta fijo en el espacio. La velocidad, densidad, capacidad calorífica, presión, esfuerzo cortante (1), flux de calor, término fuente y fuerzas estan definidos en el elemento - incluyendo la superficie. La ley general de la conservación de la energía es:

rapidez de energía en forma de calor que entra, por conducción. (1)	-	rapidez de energía en forma de calor que sale, por conducción (2)	+	rapidez de energía interna que entra, por convección (3)
rapidez de energía interna que sale por convección (4)	+	rapidez de energía cinética que entra por convección (5)	-	rapidez de energía cinética que sale por convección (6)
rapidez de energía que entra en forma de trabajo hecho por los alrededores sobre el sistema (7)	+	rapidez de energía generada dentro del sistema (8)	=	

$$\begin{aligned}
 & \text{rapidez de acumulacion} \\
 & \text{de energia cinética} \\
 = & \text{e interna} \qquad \qquad \qquad 4.1.7
 \end{aligned}$$

Cada término de energía en la ecuación anterior será expresado en unidades de Btu para mantener una consistencia dimensional. Ahora procederemos a evaluar cada término:

Término (1) - (2)

Este término representa la rapidez neta de energía dentro del sistema debido a la presencia de gradientes de temperatura, este término ya fué evaluado anteriormente

$$-\int_f \int q \cdot df$$

Término (3) - (4)

Este término de energía surge debido al movimiento del fluido, entonces;

$$- v \cdot df \qquad \qquad \qquad 4.1.9$$

representa el flujo volumétrico ( ft<sup>3</sup>/seg ) de un fluido que entra por una df. La energía interna de un fluido por unidad de volumen (Btu/ft<sup>3</sup>) viene dado por

$$\rho(E.I.)$$

o

$$\rho C_v (T - T_o) \qquad \qquad \qquad 4.1.10$$

si  $T_0 = 0$ , el producto de la ecuación 4.1.9 y 4.1.10 nos dá la rapidez de energía interna (Btu/seg) que esta pasando por  $df$

$$- \rho C_v T (v \cdot df)$$

la rapidez neta de energía interna dentro (entrada-salida) del sistema se obtiene por la integración de la expresión anterior

$$-\int_f \rho C_v T (v \cdot df) \quad 4.1.11$$

Término (5) - (6)

La energía cinética por unidad de masa de un fluido en movimiento viene dado por

$$\frac{\rho v^2}{2gc} , \quad \text{ft-lb}_f/\text{Lb}$$

o

$$\frac{\rho v^2}{2gcJ} , \quad \text{Btu/Lb}$$

la energía cinética por unidad de volúmen es simplemente

$$\frac{\rho v^2}{2gcJ}$$

si  $(v \cdot df)$  es la rapidez de volúmen de flujo que pasa por  $df$

$$- \frac{\rho v^2}{2gcJ} (v \cdot df) \quad 4.1.12$$

es la energía cinética dentro de  $df$ . El efecto total se obtiene por la integración de la ecuación 4.1.12

$$\int_f \int \frac{\rho v^2}{2gcJ} (v \cdot df)$$

Término (7)

El trabajo es una forma de energía que puede ser transferido dentro y fuera de un sistema. Esto surge si hay movimiento del fluido dentro del sistema y debe ser considerado por un total y completo análisis de energía.

El trabajo se define como el producto interior de la fuerza aplicada y el vector desplazamiento. La rapidez de transferencia de trabajo es el producto interior de la fuerza aplicada y la velocidad (desplazamiento por unidad de tiempo). Consideraremos tres efectos de trabajo:

Gravedad, Presión y Viscosidad

a) Fuerza de gravedad. Si

$$\rho d\tau$$

es la masa en  $d\tau$ , y

$$g/gc$$

es la fuerza de gravedad por unidad de masa.

$$\rho g/gc d\tau$$

es la fuerza de gravedad que actúa sobre  $d\tau$ . El producto interior de este vector con el vector velocidad del fluido

$$\rho \left( v \cdot \frac{g}{gc} \right) d\tau$$

o

$$\rho \left( v \cdot \frac{g}{gcJ} \right) d\tau$$

es la rapidez de trabajo hecho sobre el fluido en  $d\tau$ . la integral

$$\iiint_V \rho \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{g}}{gcJ} \right) d\tau \quad 4.1.14$$

representa el trabajo neto de gravedad

b) Fuerza de presión

Si el vector  $df$  está dirigido hacia afuera desde el elemento de volúmen

$$- p \, df$$

es la fuerza ejercida sobre el fluido por los alrededores en  $df$  debido a la presión  $p$ , entonces:

$$- p \, v \cdot df$$

o

$$- \frac{pv}{J} \cdot df$$

representa el trabajo hecho sobre el fluido por los alrededores en  $df$ . Integrando el término anterior obtenemos el trabajo total que surge debido a la fuerza de presión

$$- \int_V \frac{pv}{J} \cdot df \quad 4.1.15$$

c) fuerza debida a la viscosidad

Este término surge debido a la presencia de efectos viscosos en el sistema, éste se presentará siempre, si el fluido esta en movimiento. El trabajo sobre  $df$  viene dado por

$$-(\tau \cdot v) \cdot df$$

o

$$- \frac{\tau \cdot v}{J} \cdot df$$

nota:  $(\tau v)^T = \tau \cdot v$

si  $\tau$  es una matriz de  $3 \times 3$ ,  $v$  es un vector columna de tres componentes.

El trabajo total es entonces:

$$- \int_f \frac{(\tau \cdot v)}{J} \cdot df \quad 4.1.16$$

Término (8)

Este término fuente ya ha sido desarrollado anteriormente y viene dado por

$$\int \int \int A \, d\tau \quad 4.1.17$$

Término (9)

Las energías cinética e interna contenida en  $d\tau$  es

$$\left| \rho C_v \, T \right|$$

y

$$\frac{\rho v^2}{2gcJ}$$

respectivamente. La energía cinética e interna contenida en  $d\tau$  es entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \rho C_v \, T + \frac{\rho v^2}{2gcJ} \right| d\tau$$

la rapidez de cambio de la energía cinética e interna en  $\tau$  se obtiene por la integración de la ecuación anterior a través de  $\tau$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho C_v T + \frac{\rho v^2}{2gc_J} \right] d\tau \quad 4.1.18$$

substituyendo las ecuaciones 4.1.8, 4.1.11, 4.1.13, 4.1.14, 4.1.15, 4.1.16, 4.1.17 y 4.1.18 en la ecuación 4.1.7 tenemos:

$$\begin{aligned} -\int_V q \cdot df - \int_V \rho C_v T (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}) - \int_V \frac{\rho v^2}{2gc_J} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}) + \int_V \rho \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{g}}{gc_J} \right) d\tau \\ - \int_V \frac{\rho (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f})}{J} - \int_V \left| \frac{(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v})}{J} \cdot d\mathbf{f} \right| + \int_V A d = \\ = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho C_v T + \frac{\rho v^2}{2gc_J} \right] d\tau \quad 4.1.19 \end{aligned}$$

esta ecuación no es geoméricamente consistente. Las cinco integrales de superficie del lado izquierdo de la ecuación serán convertidas en integrales de volúmen aplicando el teorema de Gauss

$$\begin{aligned} -\int_V q \cdot df &= -\int_V (\nabla \cdot \mathbf{q}) d\tau \\ -\int_V \rho C_v T (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}) &= -\int_V (\nabla \cdot \rho C_v T \mathbf{v}) d\tau \\ -\int_V \frac{\rho v^2}{2gc_J} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}) &= -\int_V \nabla \cdot \left( \frac{v^2}{2gc_J} \mathbf{v} \right) d\tau \\ -\int_V \frac{\rho (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f})}{J} &= -\int_V \nabla \cdot \left( \frac{\rho \mathbf{v}}{J} \right) d\tau \\ -\int_V \left| \frac{(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v})}{J} \cdot d\mathbf{f} \right| &= -\int_V \left| \frac{\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v})}{J} \right| d\tau \end{aligned}$$

la ecuación ahora se convierte en:

$$\begin{aligned}
& - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{q}) \, d\tau - \int_V (\nabla \cdot \rho C_v T \mathbf{v}) \, d\tau - \int_V \nabla \cdot \left( \frac{\rho v^2}{2gcJ} \mathbf{v} \right) \, d\tau + \\
& + \int_V \rho \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{g}}{gcJ} \right) \, d\tau - \int_V \nabla \cdot \left( \frac{p\mathbf{v}}{J} \right) \, d\tau - \int_V \frac{\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v})}{J} \, d\tau + \int_V A \, d\tau = \\
& = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho C_v T + \frac{\rho v^2}{2gcJ} \right) \, d\tau \qquad 4.1.20
\end{aligned}$$

por continuidad a traves de  $\tau$  tenemos:

$$\begin{aligned}
& - \nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot (\rho C_v T \mathbf{v}) - \nabla \cdot \left( \frac{\rho v^2}{2gcJ} \mathbf{v} \right) + \rho \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{g}}{gcJ} \right) - \nabla \cdot \left( \frac{p\mathbf{v}}{J} \right) - \\
& - \frac{\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v})}{J} + A = \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho C_v T + \frac{\rho v^2}{2gcJ} \right) \qquad 4.1.21
\end{aligned}$$

Esta es la ecuación general que describe la transferencia de energía y puede ser aplicada a fluidos a régimen laminar.

## 4.2 TRANSFERENCIA DE MOMENTUM

La ley fenomenológica que gobierna la transferencia de momentum por difusión molecular, es la segunda ley de Newton. La difusión molecular, momentum y energía pueden ser transferidos por movimientos de masa. Por tanto este movimiento involucra la transferencia de masa de un punto dentro del sistema a otro por lo que se hace necesario desarrollar la ecuación de continuidad (ecuación de transferencia de masa), además esta ecuación de continuidad sirve como un excelente punto de apoyo para desarrollar la ecuación de movimiento. Estas ecuaciones pueden ser usadas para describir el comportamiento de cualquier fluido isotérmico a régimen laminar con propiedades físicas constantes.

### LEY DE NEWTON

Primeramente examinaremos las unidades de algunas de las cantidades que usaremos posteriormente.

El momentum esta definido como el producto de la masa y la velocidad del sistema

$$\text{momentum} = \text{masa} \times \text{velocidad} \quad (\text{Lb-ft/seg})$$

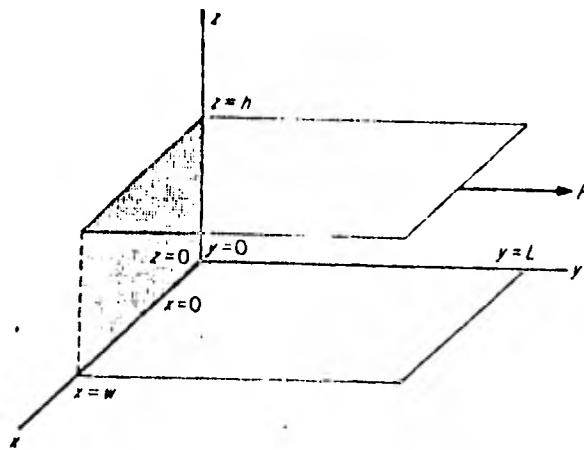
las unidades de la rapidez de cambio de momentum son las unidades de momentum divididas entre el tiempo

$$\text{Rapidez de momentum} = \frac{\text{Lb-ft}}{\text{seg}^2}$$

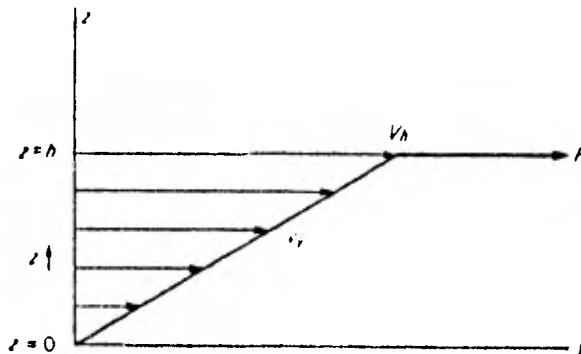
por comodidad podemos cambiar las unidades más conveniente si dividimos entre gc para obtener unidades de Lbf

$$\text{Rapidez de momentum} = \left( \frac{\text{Lb-ft}}{\text{seg}^2} \right) \left( \frac{\text{Lbf-sec}^2}{\text{Lb-ft}} \right) = \text{Lbf}$$

Ahora procederemos a desarrollar la ley de Newton. Considerando un fluido que fluye entre una region limitada por dos platos paralelos horizontales, infinitos, separados por una distancia  $h$ . El fluido se mueve paralelo a la direcci3n del eje  $y$ . Si aplicamos una fuerza suficiente en el plato superior a  $z=h$  para mantener el plato superior en movimiento con una velocidad  $v_y = v_h$ .



si la densidad del fluido es constante y el fluido es isotérmico y a régimen laminar en cualquier parte del sistema, el gradiente de velocidad en dos dimensiones quedará representado como:



Experimentalmente se ha visto que la fuerza por unidad de área  $F/A$  requerida para mantener el plato superior en movimiento a una velocidad  $v_h$  es proporcional al gradiente de velocidad, entonces

$$\frac{F}{A} \propto \frac{v_h}{h} \quad 4.2.1$$

en forma más general introduciremos gradientes por lo que

$$\frac{F}{A} \propto \frac{\Delta v_y}{\Delta z} \quad 4.2.2$$

cuando  $\Delta z \rightarrow 0$ ,  $\frac{\Delta v_y}{\Delta z} \rightarrow \frac{dv_y}{dz}$ , por tanto

$$\frac{F}{A} \propto \frac{dv_y}{dz} \quad 4.2.3$$

para eliminar el signo de proporcionalidad por el de igualdad introducimos una constante de proporcionalidad ( $-\mu$ ) por lo que obtenemos:

$$\frac{F}{A} = -\mu \frac{dv_y}{dz}$$

se define como coeficiente de viscosidad. El término  $F/A$ , representa un esfuerzo cortante desde donde  $F$  es aplicado paralelo al movimiento del fluido, por lo que la fuerza aplicada por unidad de área puede ser designada por  $\tau_{zy}$ , por tanto

$$\tau_{zy} = -\mu \frac{dv_y}{dz} \quad 4.2.4$$

un fluido cuyo esfuerzo cortante se describe por esta ecuación se define como un fluido newtoniano.

El análisis anteriormente hecho es un sistema simple , pues generalmente un fluido en movimiento posee tres componentes de velocidad con sus tres correspondientes gradientes de velocidad. Cuando este es el caso surgen nueve términos de esfuerzo cortante. Estas nueve componentes escalares pueden ser representadas por una matriz de 3x3 de la siguiente manera:

$$\tau = \begin{matrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{matrix} \quad * \quad 4.2.5$$

\* para mayor información consultar bibliografía (9)

el término  $\tau(F/A)$  es equivalente a la cantidad de momentum por unidad de área, por tanto la matriz esfuerzo cortante y sus componentes son también definidas como flux de momentum. Si nos referimos al término esfuerzo cortante  $\tau_{zy}$ , y dividimos la ecuación entre  $gc$  tenemos:

$$\tau_{zy} = - \frac{\mu}{gc} \frac{dv_y}{dz} \quad 4.2.6$$

donde  $\tau_{zy} = \left( \frac{Lbf}{ft^2} \right)$  y  $\mu = \left( \frac{Lb}{ft\text{-seg}} \right)$

#### Fluidos no-newtonianos

Estos fluidos no obedecen la ley de newton de la viscosidad, la ecuación equivalente de esfuerzo cortante para no-newtonianos viene dada por

$$\tau_{zy} = - \frac{K}{gc} \left( \frac{dv_y}{dz} \right)^n \quad 4.2.7$$

K se define como un número de consistencia y en casos especiales puede ser igual a  $\mu$ . El exponente n se define como

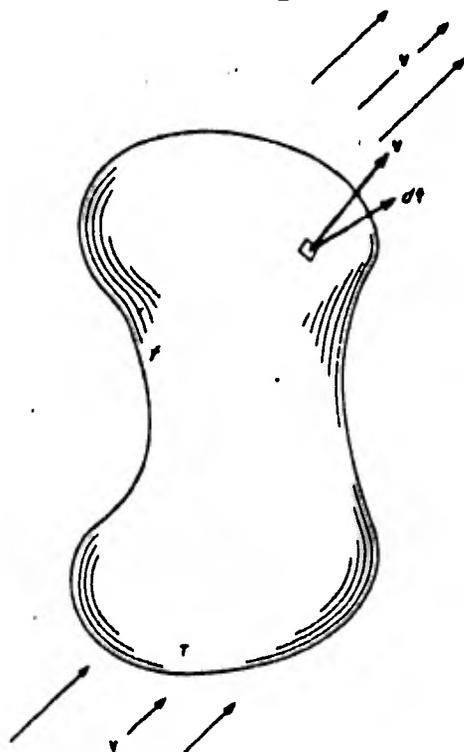
índice del comportamiento del fluido y es un número real que generalmente es diferente a la unidad. Para evitar problemas que pueden surgir cuando el gradiente de velocidad es negativo podemos reescribir la ecuación como sigue:

$$\tau_{zy} = - \frac{K}{gc} \left. \frac{dv_y}{dz} \right| \left| \frac{dv_y}{dz} \right|^{n-1} \quad 4.2.9$$

#### ECUACION DE CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad describe la variación de la densidad con respecto a la posición y el tiempo, de un fluido en reposo o en movimiento. La ecuación de continuidad será desarrollada aplicando la ley de la conservación de la masa, en un elemento de volumen fijo para un fluido en movimiento de un solo componente y en una sola fase.

Considerando un elemento de volumen finito  $\tau$  con su superficie  $f$  a través del cual se mueve un fluido. Este elemento de volumen se encuentra fijo en el espacio y no ofrece resistencia al paso del fluido a través de su superficie. El vector de velocidad  $v$  y su densidad  $\rho$  están definidos en cada punto del sistema, incluyendo en la superficie.



La ley de la conservación de la masa dice:

cantidad de masa que entra (1)	-	cantidad de masa que sale (2)	+	cantidad de masa generada (3)	=	cantidad de masa acumulada (4)
---	---	--	---	--	---	---

evaluando por términos

Término (1) - (2)

Representa la cantidad neta de flujo de masa dentro del sistema. La cantidad de volumen de flujo que sale por la diferencial de área  $df$  es igual a

$$v \cdot df \quad 4.2.10$$

donde  $v$  es el vector velocidad en este punto y  $df$  es el vector diferencial de área perpendicular y dirigido hacia afuera de la superficie, sus unidades son  $\text{ft}^3/\text{seg}$ . Multiplicando esta ecuación por la densidad ( $\text{Lb}/\text{ft}^3$ ) obtenemos la cantidad de flujo de masa que sale por  $df$

$$\rho v \cdot df \quad \left( \frac{\text{Lb}}{\text{seg}} \right) \quad 4.2.11$$

integrando la ecuación a través de toda el área, obtenemos el flujo neto que sale del sistema

$$\int_{\text{f}} \rho v \cdot df$$

por tanto el flujo neto dentro del sistema es

$$- \int_{\text{f}} \rho v \cdot df \quad 4.2.12$$

## Término (3)

Este término representa la cantidad de masa generada en debido a reacciones químicas y nucleares. En nuestro caso este término es cero

## Término (4)

Este término es una medida de la cantidad del cambio de masa dentro del sistema. Si  $d\tau$  ( $\text{ft}^3$ ) es un elemento diferencial de volumen fijo dentro de  $\tau$

$$\rho d\tau$$

representa la cantidad de masa contenida en  $d\tau$ . El cambio de esta cantidad con respecto al tiempo viene dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t} d\tau \quad 4.2.13$$

y el cambio de masa en  $\tau$  se obtiene por la integración de esta ecuación

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t} d\tau \quad 4.2.14$$

substituyendo estos resultados en la ley de la conservación de masa tenemos:

$$- \int_{\text{f}} \rho v \cdot df = \frac{\partial}{\partial t} d\tau \quad 4.2.15$$

esta ecuación no es geoméricamente consistente por lo que aplicando el teorema de Gauss

$$- \int_{\text{f}} v \cdot df = - \iiint (\nabla \cdot \rho v) d\tau$$

por tanto

$$\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iiint (\nabla \cdot \rho v) d\tau = 0$$

rearrreglando

$$\iiint \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v \right) d\tau = 0 \quad 4.2.16$$

se puede demostrar matematicamente que la suma de los integrandos debe ser igual a cero si la densidad, la velocidad y sus derivadas son continuas en  $\tau$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho v) = 0 \quad 4.2.17$$

esta es una forma de la ecuación de continuidad. Esta mide la cantidad del cambio de la densidad con respecto al tiempo en un punto fijo dentro del sistema.

## ECUACION DE TRANSFERENCIA DE MOMENTUM

En esta sección desarrollaremos la ecuación de transferencia de momentum, mas comunmente conocida como ecuación de movimiento - en forma vectorial. Esta ecuación diferencial describe la distribución de velocidad y la caída de presión en un fluido en movimiento.

Consideraremos un elemento de volumen finito  $\tau$  con superficie  $f$  a través del cual un fluido en movimiento esta fluyendo. Este elemento de volumen permanece fijo en el espacio. La velocidad, densidad, presión y esfuerzo cortante estan definidos en cada punto del sistema- incluyendo en la superficie. La ley general de la conservación de momentum dice:

cantidad de momentum que entra por convección	-	cantidad de momentum que sale por convección	+	cantidad de momentum que entra por difusión molecular	-
(1)		(2)		(3)	

cantidad de momentum que entra por difusión molecular	+	fuerzas externas ejercidas sobre el fluido	=	cantidad de momentum acumulado	
(4)		(5)		(6)	4.2.18

Cada cantidad de momentum o término de fuerza de la ecuación anterior será expresado en unidades de  $Lb_f$  para mantener una consistencia dimensional. Ahora procederemos a evaluar los términos de la ecuación 4.2.18

Término (1) - (2)

Representa la cantidad neta de momentum del fluido dentro del sistema, esta cantidad de momentum puede ser descrita en terminos de convección. En la sección anterior habíamos visto que

$$- v\rho \cdot df$$

representa la cantidad neta de fluido dentro del sistema en  $df$ . El momentum de un fluido en movimiento se define como el producto de la velocidad y la masa del fluido. La cantidad de momentum por unidad de tiempo, por tanto:

$$- v(\rho v \cdot df)$$

o simplemente

$$- \rho v v \cdot df \quad 4.2.19$$

es la cantidad de momentum por unidad de tiempo que entra al sistema por  $df$ . Integrando esta ecuación a través de toda la superficie  $f$  obtenemos la cantidad neta de momentum por unidad de tiempo del fluido dentro del sistema

$$- \int_f \int \rho v v \cdot df$$

para obtener unidades de libra fuerza, dividimos la ecuación entre  $gc$

$$- \frac{1}{gc} \int_f \int \rho v v \cdot df \quad 4.2.20$$

### Término (3) - (4)

El momentum puede también entrar al sistema por difusión molecular. Este mecanismo de transporte surge debido a la presencia de gradientes de velocidad en los límites o superficie del elemento de volumen.

Esta cantidad de momentum será descrita en términos de fuerza de corte y será representada mediante una matriz de esfuerzo cortante que describe esta fuerza alrededor del sistema, entonces

$$- \tau \cdot df$$

es la fuerza que actúa sobre el sistema en  $df$  debida a . esta fuerza es equivalente al término de momentum por unidad de tiempo. Integrando este término obtenemos la fuerza neta que actúa sobre el elemento debido a la difusión molecular.

$$- \int_f \int \tau \cdot df \quad 4.2.21$$

### Término (5)

Este términos se presenta por las fuerza externas que actuan sobre el sistema. Hay dos tipos de fuerzas externas que pueden actuar sobre un sistema - superficiales e internas.

a) Superficiales. Una fuerza superficial se presenta siempre debido a la presión externa que actúa sobre la superficie del elemento de volumen. Esta presión es una cantidad escalar. La fuerza (un vector) ejercida en  $df$  esta dada por:

$$- p \, df$$

y la fuerza total que actúa sobre toda la superficie es,

$$- \int_V p \, df \quad 4.2.22$$

el signo negativo esta presente ya que la fuerza ejercida por los alrededores sobre el fluido es en dirección opuesta a  $df$ .

b) Interna. Si  $\zeta$  es la fuerza ejercida por unidad de masa,  $\rho \zeta$  es la fuerza por unidad de volumen. La fuerza interna que actúa sobre el elemento diferencial de volumen  $d\tau$  esta dado por

$$\rho \zeta \, d\tau \quad 4.2.23$$

integrando a través de todo el volumen obtenemos la fuerza interna total

$$\int_V \rho \zeta \, d\tau \quad 4.2.24$$

Término (6)

El término (6) mide la rapidez de acumulación del momentum dentro del sistema debido a (1), (2), (3), (4) y (5). Si el producto de la masa con la velocidad se definen como el momentum de un fluido, el producto de la densidad (masa por unidad de volumen) con la velocidad  $v$ , es el momentum por unidad de volumen.

El momentum contenido en un elemento de diferencial de volumen es entonces

$$\rho v \, d\tau \quad 4.2.25$$

la rapidez de acumulación del momentum en  $d$  es la derivada de la ecuación 4.2.25 con respecto al tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) \, d\tau \quad 4.2.26$$

dividiendo entre  $gc$  e integrando obtenemos la rapidez de acumulación total de momentum en

$$\frac{1}{gc} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) d\tau \quad 4.2.27$$

Substituyendo los términos 4.2.20, 4.2.21, 4.2.22, 4.2.24, 4.2.27, en 4.2.18 tenemos:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{gc} \int_V \rho v v \cdot df - \int_V \tau \cdot df + \int_V \rho z d\tau - \int_V p df = \\ = \frac{1}{gc} \int_V \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} d\tau \end{aligned} \quad 4.2.28$$

esta ecuación no es geoméricamente consistente, las tres integrales de superficie del lado izquierdo de la ecuación, serán convertidos en integrales de volúmen mediante el teorema de Gauss

$$\frac{1}{gc} \int_V \rho v v \cdot df = \frac{1}{gc} \int_V (\nabla \cdot \rho v v) d\tau$$

$$\int_V \tau \cdot df = \int_V (\nabla \cdot \tau) d\tau$$

$$\int_V p df = \int_V \nabla p d\tau$$

la ecuación 4.2.28 ahora se convierte en:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{gc} \int_V (\nabla \cdot \rho v v) d\tau - \int_V (\nabla \cdot \tau) d\tau - \int_V \nabla p d\tau + \int_V \rho z d\tau \\ = \frac{1}{gc} \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} d\tau \end{aligned} \quad 4.2.29$$

por continuidad a través de la ecuación 4.2.29 puede escribirse como

$$- \frac{1}{gc} (\nabla \cdot \rho v v) - (\nabla \cdot \tau) - \nabla p + \rho z = \frac{1}{gc} \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} \quad 4.2.30$$

note que esta ecuación es una ecuación vectorial a pesar de la presencia de matrices, y cada término tiene unidades de libra-fuerza por unidad de volumen de fluido. Esta ecuación es una forma de la ecuación de transferencia de momentum.

#### 4.3 TRANSFERENCIA DE MASA

Desarrollaremos la ecuación de transferencia de masa para un sistema binario, iniciaremos definiendo la concentración, en base mol y en base masa, la densidad y la velocidad.

La ecuación de transferencia de masa difiere de la ecuación de continuidad en que esta toma en cuenta los efectos de difusión molecular y de reacción química.

La ley fenomenológica que gobierna la transferencia de masa por difusión molecular es la ley de Fick.

La ecuación de transferencia de masa se desarrolla en forma vectorial considerando la ausencia de los siguientes efectos:

- 1.- fuerza difusional: transferencia de masa que surge debido a gradientes de fuerza
- 2.- Presión difusional: transferencia de masa que surge debido a gradientes de presión
- 3.- Difusión térmica: transferencia de masa que surge debido a gradientes de temperatura.

#### LEY DE FICK

El proceso de transferencia de masa generalmente involucra la transferencia de masa de un componente. Muchas aplicaciones en ingeniería son preferentemente abordados en ba

se mol que en base masa.

Para una mezcla de multicomponentes, denotamos  $v_i$  como el vector velocidad del  $i$ -ésimo componente relativo en un sistema coordenado fijo. Definimos el vector velocidad de mezcla promedio en base masa ( $v$ ) como

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{\eta} \rho_i v_i}{\sum_{i=1}^{\eta} \rho_i}$$

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{\eta} \rho_i v_i}{\rho}$$

$$v = \sum w_i v_i$$

donde:  $\rho_i$  = concentración masa del componente  $i$  Lb/ft<sup>3</sup>

$\rho$  = densidad masa promedio de la mezcla Lb/ft<sup>3</sup>

$w_i$  = fracción masa del componente  $i$  Lb/Lb

$\eta$  = número de componentes en la mezcla

el vector velocidad de mezcla promedio en base molar ( $v^*$ ) se definirá como:

$$v^* = \frac{\sum_{i=1}^{\eta} c_i v_i}{\sum_{i=1}^{\eta} c_i}$$

$$v^* = \frac{\sum c_i v_i}{C}$$

$$v^* = \sum x_i v_i$$

donde  $c_i$  = concentración molar del componente  $i$   $\text{Lb}_m/\text{ft}^3$

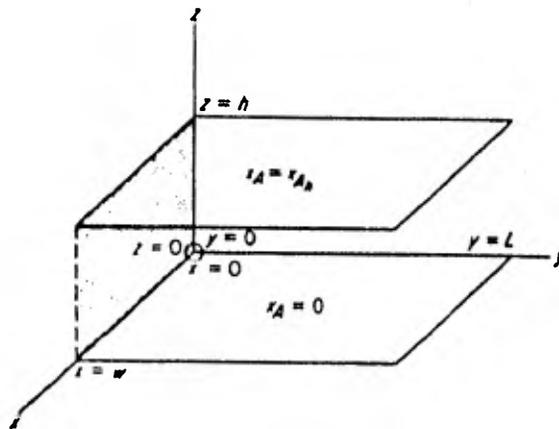
$c$  = densidad molar promedio  $\text{Lb}_m/\text{ft}^3$

$x_i$  = fracción mol del componente  $i$   $\text{Lb}_m/\text{Lb}_m$

Esta velocidad molar promedio no puede ser medida experimentalmente pero es muy usada en procesos de transferencia de masa en fase gas.

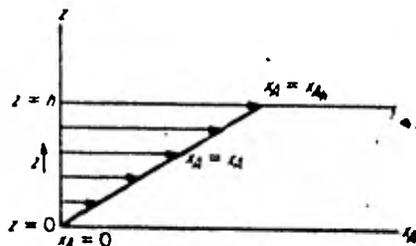
Ahora procederemos con la ley de Fick de la difusión.

Considerando un fluido en reposo (B) contenido en una región limitada por dos platos paralelos, infinitos, separados por una distancia  $h$ . El plato superior a  $z=h$  se mantiene a  $x_A = x_{Ah} > 0$ , mientras el plato inferior se mantiene a  $x_A = 0$  parte del sistema se representa a continuación:



El gradiente de concentraciones, en fracción mol, puede representarse en dos dimensiones y después de un largo pe-

riodo de tiempo ( $t \rightarrow \infty$ ) como



Se ha mostrado experimentalmente que las moles de A son transferidas desde el plato superior al inferior y la cantidad de transferencia molar por unidad de área (A) es proporcional al gradiente de concentración (fracción mol)

$$\frac{M}{A} \propto \frac{x_{Ah}}{h} \quad 4.3.1$$

en forma más general

$$\frac{M}{A} \propto \frac{\Delta x_A}{\Delta z} \quad 4.3.2$$

cuando  $\Delta z \rightarrow 0$ ,  $\frac{\Delta x_A}{\Delta z} \rightarrow \frac{dx_A}{dz}$ , por tanto

$$\frac{M}{A} \propto \frac{dx_A}{dz} \quad 4.3.3$$

Para cambiar el signo de proporcionalidad por el de igualdad introduciremos una constante de proporcionalidad,  $-cD_{AB}$ , se conoce como difusividad de masa y es una propiedad del fluido que generalmente se evalúa experimentalmente, nosotros la consideraremos constante,  $c$  es la concentración promedio molar. Si  $c$  es constante la ecuación 4.3.3 puede escribirse como:

$$\frac{M}{A} = -cD_{AB} \frac{dx_A}{dz} = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz}$$

donde  $c_A = c x_A$

el término  $M/A$  es conocido como flux molar y se representa por

$$J_{Az} = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz}$$

Un fluido binario cuyo flux molar se puede describir por esta ecuación se define como un fluido que obedece la ley de Fick.

El análisis que he presentado es para un sistema simple de dos componentes, generalmente un fluido posee tres gradientes de concentración con sus correspondientes componentes de flux molar. Cuando este es el caso los tres términos de flux molar  $J_{Ax}$ ,  $J_{Ay}$ ,  $J_{Az}$  en coordenadas rectangulares quedan expresados como

$$J_{Ax} = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial x}$$

$$J_{Ay} = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial y}$$

$$J_{Az} = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial z}$$

representando estas tres componentes escalares en un vector flux molar  $J_A$  tenemos

$$J_A = i J_{Ax} + j J_{Ay} + k J_{Az}$$

$$J_A = - \left( i D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial x} + j D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial y} + k D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z} \right)$$

$$J_A = -D_{AB} \nabla C_A \quad 4.3.4$$

notar que las unidades de la difusividad de masa (algunas veces referido como coeficiente de difusividad) son ft<sup>2</sup>/seg.

La ecuación anterior para la ley de Fick puede desarrollarse en base masa como

$$J_A = -D_{AB} \nabla \rho_A \quad 4.3.5$$

donde  $J_A$  es el vector flux de masa

#### TRANSFERENCIA DE MASA EN SOLIDOS

Muchas operaciones en ingeniería involucran más de dos componentes pero el sistema puede quedar descrito en términos de dos.

En estos sistemas el componente bajo estudio es tratado como el primer componente y los componentes restantes son "eslabonados" y definidos como el segundo componente.

La ecuación que describe la transferencia de masa en sólidos en reposo sirve como un buen punto de apoyo para desarrollar la ecuación general de transferencia de masa.

La ecuación es desarrollada a partir de la ley de la conservación de masa o mol en un intervalo de tiempo en un elemento de volumen fijo. Por el momento manejaremos moles.

Considerando un elemento de volumen finito que contiene un sólido homogéneo. La concentración molar y densidad, coeficiente de difusividad y flux molar están definidos en cada

punto del sistema - incluyendo la superficie. Como se trata de un sólido en reposo, los efectos de convección no aparecen y el efecto de transferencia de masa por considerar es la difusión molecular. Basandonos en una cantidad de moles de A tenemos

$$\begin{array}{rcccl} \text{cantidad de} & & \text{cantidad de} & & \text{cantidad de} \\ \text{moles de A} & - & \text{moles de A} & + & \text{moles de A} & = \\ \text{que entran} & & \text{que salen} & & \text{que se generan} & \\ (1) & & (2) & & (3) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{acumulación} \\ = \text{de moles} \\ \text{de A} \\ (4) \end{array} \qquad 4.3.6$$

evaluando por términos tenemos:

Término (1) - (2)

La única forma por la cual las moles de A pueden ser transferidas a los alrededores es la difusión molecular. Surge debido a la presencia del gradiente de concentración. La cantidad de moles de A que salen de  $df$  en el elemento de volumen dado es:

$$J_A \cdot df$$

con  $J_A$  definido como el vector flux molar del componente A y  $df$  el vector diferencial de área, positivo, perpendicular y dirigido hacia afuera de la superficie. Las unidades de esta ecuación son mole/seg si las unidades de  $J$  y  $df$  son  $\frac{\text{moles}}{\text{ft}^2\text{seg}}$  y  $\text{ft}^2$  respectivamente. Integrando a través de toda el área obtenemos la cantidad neta de moles de A fuera del sistema,

$$\int_V \int_V J_A \cdot dV$$

por tanto, fuera del sistema es

$$- \int_V \int_V J_A \cdot dV \quad 4.3.7$$

### Término (3)

Este término es la evaluación de las moles de A generadas en el elemento de volumen  $\tau$  debido a reacciones químicas y nucleares.

Definimos el término fuente  $R_A$  como la cantidad de A generada por unidad de tiempo y de volumen en un elemento diferencial de volumen  $d\tau$

$$R_A d\tau$$

integrando a través de obtenemos la cantidad total de moles de A generadas en el elemento

$$\int_V \int_V R_A d\tau \quad 4.3.8$$

### Término (4)

Este término es una medida de la rapidez de cambio del número de moles de A dentro del sistema.  $d\tau$  ( $\text{ft}^3$ ) es un elemento diferencial de volumen fijo dentro de  $\tau$  y  $c_A$  es la concentración molar de A

$$c_A d\tau$$

representa las moles de A contenidas en  $d\tau$ . La evaluación

del cambio de moles de A con respecto al tiempo en un punto fijo del espacio es

$$\frac{\partial}{\partial t} c_A d\tau$$

o

$$\left( \frac{\partial c_A}{\partial t} \right) d\tau$$

la evaluación de A en  $\tau$  se obtiene por la integración a través del volumen

$$\iiint_V \left( \frac{\partial c_A}{\partial t} \right) d\tau \quad 4.3.9$$

substituyendo estos resultados en la ecuación 4.3.6 tenemos

$$- \iint_F J_A \cdot df + \iiint_V R_A d\tau = \iiint_V \left( \frac{\partial c_A}{\partial t} \right) d\tau \quad 4.3.10$$

aplicando el teorema de Gauss a la integral de superficie, la ecuación 4.3.10 quedará

$$- \iiint_V (\nabla \cdot J_A) d\tau + \iiint_V R_A d\tau = \iiint_V \left( \frac{\partial c_A}{\partial t} \right) d\tau$$

rearrreglando

$$\iiint_V \left( -\nabla \cdot J_A + R_A - \frac{\partial c_A}{\partial t} \right) d\tau = 0 \quad 4.3.11$$

si  $J_A$ ,  $R_A$ ,  $c_A$  y sus derivadas son continuas en entonces

$$-\nabla \cdot J_A + R_A = \frac{\partial c_A}{\partial t} \quad 4.3.12$$

esta ecuación describe la variación de la concentración en sólidos debido a la transferencia molar

Si el término fuente no existe esta ecuación se reduce a

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 c_A \quad 4.3.13$$

y si la superficie exterior del sistema se aísla y es impermeable a la transferencia molar se puede mostrar que la ecuación inicial se convierte en

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = R_A \quad 4.3.14$$

las ecuaciones correspondientes en base masa pueden obtenerse de un análisis semejante, obteniéndose:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = -\nabla \cdot J_A + r_A$$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 \rho_A + r_A$$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 \rho_A$$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = r_a$$

donde  $\rho_A$  = concentración masa de A,  $Lb_A / ft^3$

$J_A$  = vector flux de masa,  $Lb_A / ft^2\text{-seg}$

$r_A$  = término fuente de masa,  $Lb_A / ft^3\text{-seg}$

## ECUACION DE TRANSFERENCIA DE MASA

En el análisis son incluidos la difusión molecular, los efectos de convección y los efectos de reacción química. Desarrollaré la ecuación en forma vectorial. Esta ecuación diferencial describe la distribución de concentraciones en un fluido binario en movimiento a régimen laminar. Se desarrolla aplicando un balance de moles conjuntamente con la ley de Fick en un elemento de volumen fijo en el espacio.

Iniciaremos considerando un elemento de volumen  $\tau$  con superficie  $f$  a través del cual fluye un fluido de dos componentes.

La velocidad molar promedio, la densidad, el coeficiente de difusión y el flux molar están definidos en cada punto del elemento, incluyendo en la superficie. La ley general de la conservación de moles de A en el elemento de volumen es:

moles de A que entran por difusión molecular (1)	- moles de A que salen por difusión molecular (2)	+ moles de A que entran por convección (3)	
- moles de A que salen por convección (4)	+ cantidad de moles de A generadas (5)	= acumulación de moles de A (6)	4.3.15

evaluando por términos tenemos

Término (1) - (2)

Este término representa la rapidez total a la cual mo-

les de A entran al sistema debido a la presencia de gradientes de concentración, este término ya fue evaluado anteriormente, y es:

$$- \int_{\mathcal{V}} J_A \cdot d\mathbf{f} \quad 4.3.16$$

Término (3) - (4)

Este es un término de convección y surge debido al movimiento del fluido, si

$$- v \cdot d\mathbf{f}$$

representa el flujo volumétrico que entra por  $d\mathbf{f}$ , siendo  $v$  la velocidad másica promedio del fluido, entonces el flujo volumétrico molar promedio que entra por  $d\mathbf{f}$  viene dado por:

$$- v^* \cdot d\mathbf{f}$$

donde  $v^*$  es la velocidad molar promedio.

La rapidez a la cual las moles de A pasan a través de  $d\mathbf{f}$  es,

$$- c_A v^* \cdot d\mathbf{f} \quad \text{moles de A/seg}$$

las unidades de  $c_A$  y de  $(v^* \cdot d\mathbf{f})$  son moles de A/ft<sup>3</sup> y ft<sup>3</sup>/seg respectivamente. La evaluación total de este término es:

$$- \int_{\mathcal{V}} c_A v^* \cdot d\mathbf{f} \quad 4.3.17$$

Término (5)

Este término fuente ya fue evaluado en el capítulo 2.

$$\int_{\mathcal{V}} R_A \, dV \quad 4.3.18$$

Término (6)

El término de acumulación ya ha sido analizado anteriormente y es:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial c_A}{\partial t} \right) d\tau \quad 4.3.19$$

substituyendo en 4.3.15 tenemos:

$$\iiint_V \frac{\partial c_A}{\partial t} d\tau = - \int_V J_A \cdot df - \int_V c_A v^* \cdot df + \iiint_V R_A d\tau \quad 4.3.20$$

como esta ecuación no es geoméricamente consistente, aplicamos el teorema de Gauss en las integrales de superficie para obtener

$$\iiint_V \frac{\partial c_A}{\partial t} d\tau = - \iiint_V (\nabla \cdot J_A) d\tau - \iiint_V (\nabla \cdot c_A v^*) d\tau + \iiint_V R_A d\tau \quad 4.3.21$$

y por continuidad finalmente obtenemos:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = - \nabla \cdot J_A - \nabla \cdot c_A v^* + R_A \quad 4.3.22$$

desarrollando en base masa obtenemos

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = - \nabla \cdot J_A - \nabla \cdot \rho_A v + r_A$$

## 5. CONCLUSIONES

Como podemos ver el teorema de la divergencia es de gran apoyo para el desarrollo de ecuaciones sumamente importantes para la ingeniería química como son las ecuaciones generales de transferencia de masa, energía y momentum. Además juega un importante papel en la teoría de electromagnetismo, y es básica también para hidrodinámica.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- CALCULO VECTORIAL  
Marsden/Tromba  
Fondo Educativo Interamericano
- 2.- Div, Grad, Curl, and all that  
H. M. Schey  
W. W. Norton & Company
- 3.- Vector Analysis  
J. G. Coffin  
John Wiley and Sons, Inc.
- 4.- An Introduction to Linear Algebra & Tensors  
M. A. Akiwis - V. V. Goldberg  
Dover
- 5.- CALCULUS. Volume I  
Tom M. Apostol  
Wiley International Edition
- 6.- CALCULUS. Volume II  
Tom M. Apostol  
Wiley International Edition
- 7.- Analisis vectorial  
Murray R. Spiegel  
Mc. Graw Hill
- 8.- Transport phenomena for Engineers  
Louis Theodore  
International Textbook Company
- 9.- Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer  
J. R. Welty - Charles E. Wicks  
John Wiley and Sons, Inc.