

Lij.
19



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS ASPECTOS
FISICOS Y MATEMATICOS
DEL MODELAJE DE LA
DINAMICA POBLACIONAL
(APLICACION A PESQUERIAS).

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A:

MARIO DEMETRIO CRUZ TERAN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

- SECCION 1. LA FISICA Y LOS MODELOS MATEMATICOS.GENERALIDADES SOBRE EL MODELAJE Y LAS CLASES DE MODELOS.
P. 3
- SECCION 2. MODELOS DE POBLACION PARA UNA ESPECIE.EL COEFICIENTE DE EXPANSION CUBICA Y LA TASA INTRINSECA DE CRECIMIENTO. CRECIMIENTO Y DEACIMIENTO EXPONENCIAL.
P. 16
- SECCION 3. EL MODELO LOGISTICO.DETERMINACION DE LA SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL LOGISTICA SIN RECURRIR A METODOS DE INTEGRACION.
P. 25
- SECCION 4. INTERACCION ENTRE ESPECIES.MODELOS DE POBLACION PARA 2 ESPECIES.COMPETENCIA Y DEPREDACION.MODELO DE LOTKA Y VOLTERRA.MODELO DE SCHAEFER.
P. 43
- SECCION 5. ESTABILIDAD.ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.EL PENDULO SIMPLE.
P. 49
- SECCION 6. LA ENERGIA MECANICA EN EL PENDULO SIMPLE.LA ESTABILIDAD Y LA FUNCION DE LIAPUNOV.FUNCION DE LIAPUNOV PARA CASOS REDUCIBLES A UN CAMPO DE FUERZA CONSERVATIVO.
P. 67
- SECCION 7. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.ESTABILIDAD EN EL ORIGEN.CONSTRUCCION DE LA FUNCION DE LIAPUNOV PARA SISTEMAS LINEALES.MOVIMIENTO ARMONICO AMORTIGUADO.
P. 82
- SECCION 8. APROXIMACION LINEAL PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES, APROXIMACION LINEAL PARA EL PENDULO SIMPLE.ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO DEL MODELO DE LOTKA Y VOLTERRA.
P. 95

- SECCION 9. MODELOS CUADRATICOS DE POBLACION.EL TEOREMA DE NO CICLOS. INESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE LAS ECUACIONES DE LOTKA Y VOLTIERRA.
p. 104
- SECCION 10. LA EXPLOTACION PESQUERA.MODELO DE SCHAEFER PARA PESQUERIAS NO REGULADAS.ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES DEL MODELO DE SCHAEFER.APLICACION DEL TEOREMA DE NO CICLOS.
p. 114
- SECCION 11. MODELO GENERALIZADO DE PRODUCCION DE PELLA Y TOMLINSON,REDUCCION AL MODELO LOGISTICO.SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL.APLICACION A LA PESQUERIA DEL ATUN ALETA AMARILLA + BARRILETE EN CUATRO ZONAS DEL OCEANO PACIFICO ORIENTAL.
p. 125
- SECCION 12. APLICACION DE UN MODELO ESTOCASTICO SENCILLO (MODELO DE WALLIS) PARA GENERAR NUEVOS TAMAÑOS DE POBLACION, EN LAS ZONAS DE ESTUDIO, CONSIDERANDO UN AMBIENTE VARIABLE.
p. 157
- APENDICE I p. 189
- APENDICE II p. 191
- APENDICE III p. 193
- APENDICE IV p. 195
- APENDICE V p. 201
- APENDICE VI p. 207
- APENDICE VII p. 212
- APENDICE VIII
p.218
- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS
p 222

INTRODUCCION

Cuando un principiante, interesado en la dinámica poblacional, se ve obligado a leer artículos escritos por profesionales en el tema, se enfrenta con el problema de descifrar expresiones como: " los eigen-valores de la matriz de la comunidad deben tener partes reales negativas para asegurar la estabilidad" o tambien, " el sistema exhibe la neutralidad patológica del pendulo simple" y como un ultimo ejemplo " el sistema admite una aproximacion lineal mediante una matriz jacobiana".

De manera que, generalmente, los artículos resultan con muchas partes oscuras que los hacen inentendibles. Basandose en que la situacion planteada existe, este trabajo de tesis está eg estructurado desde un punto de vista docente, con las características de un curso introductorio sobre dinámica de población. Congruente con este punto de vista, el objetivo principal de esta tesis es proporcionar el herramental matematico necesario para aclarar algunos de los puntos ~~difficiles~~, tratando de mostrar, a la vez, la manera en que los conocimientos de física pueden guiar y ayudar en el tratamiento de problemas ajenos a ella, como son los de la ecología cuantitativa o de la dinamica poblacional.

Como puede verse en el contenido se abordaron temas físicos como: el'pendulo simple, el movimiento armonico amortiguado y la conservacion de la energía para sustentar el desarrollo de las ideas centrales sobre la teoría de la estabilidad, que constituye el tema medular de la parte teórica y en el que se esta-

blece el problema de encontrar, mediante un analisis matematico, las características de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales sin resolverlas por integracion.

Por último, para ilustrar el tipo de problemas que debe enfrentar un investigador cuando trata de aplicar los modelos de dinámica poblacional a una situación practica, se escogió la pesquería del atún.

Para no desviar demasiado la atención sobre los temas principales, muchas de las matematicas complementarias para la mejor comprensión del texto, se adjuntó en forma de apéndices en las hojas finales.

Dentro del objetivo principal mencionado al principio de esta introducción, existe la esperanza de que, tomando como guía la forma en que se trataron los diferentes temas, un profesor lograra hacerse entender por estudiantes cuyo unico acerbo matematico sean los conocimientos adquiridos en un curso de Calculo Diferencial e Integral, a nivel medio superior.

SECCION 1

LA FISICA Y LOS MODELOS MATEMATICOS. GENERALIDADES SOBRE EL MO-
DELAJE Y LAS CLASES DE MODELOS.

A partir de 1940, y más notoriamente después de la 2a. guerra mundial, ha ocurrido un cambio profundo en los métodos de investigación de las ciencias no físicas; la psicología, la sociología y principalmente la biología, han revolucionado su modo tradicional de investigación para dar mayor importancia al valor de las teorías y en particular al de las teorías formuladas con la ayuda de las matemáticas. Siguiendo las normas marcadas por la física, ahora se comprende que el fin de la investigación no es la acumulación de datos sino su comprensión y que ésta sólo se obtiene arriesgando y desarrollando hipótesis precisas, aunando a la observación y a la clasificación la construcción de sistemas hipotético deductivos que puedan ser contrastados con la experiencia.

Antes parecía que la naturaleza tan compleja de los seres vivos impedía su estudio con los mismos métodos rigurosos que tan buen éxito han tenido en las ciencias físicas. Este aparente abismo se ha reducido en gran parte; si a principios de este siglo se consideraba que el carácter del conocimiento en las áreas de la vida tenía que ser más primitivo y cualitativo, en la actualidad los fenómenos que atañen a los seres vivientes se han convertido en problemas susceptibles de ser estudiados

con la misma metodología que antes era privativa de la física.

Desde los tiempos de Aristóteles, los biólogos han estructurado su ciencia basándose en lo que podríamos llamar el método analítico-ordenador. Haciendo uso de este método, han comparado, entre sí y con restos fósiles, los organismos y estructuras existentes con el fin de hacer notorias las diferencias y similitudes para establecer alguna clase de orden sistemático; de manera que el trabajo de investigación se reduce a observar, describir y clasificar. Esta manera de proceder es fundamental para la taxonomía y para la fisiología comparada.

Ahora, dentro del campo de la biología, se está utilizando cada vez más el método analítico-causal de los físicos, el cual permite, a través de observaciones y experimentos, estructurar modelos conceptuales que permitan establecer conexiones causales (relaciones de causa-efecto) entre las diferentes partes de un sistema viviente que puedan ayudar en la búsqueda de un orden más profundo.

En consecuencia, la idea muy difundida de que la única rama de las matemáticas necesaria para el biólogo (o el psicólogo o el sociólogo) es la estadística, está perdiendo terreno. Antes la estadística, cuyo aparato podía encubrir la pobreza conceptual de una investigación, se usaba al final para comprimir y analizar los resultados de observaciones empíricas, que muchas veces, por la falta de un marco teórico adecuado, no pasaban de ser sólo una acumulación ciega de datos. Ahora, sin restarle utilidad al tratamiento estadístico, se le da más im-

portancia a las teorías generales y a los modelos teóricos específicos; se enfatiza la necesidad de una especulación exacta sometida al control de la lógica impuesta por modelos matemáticos.

En resumen, esta revolución en la metodología de las ciencias biológicas no es otra cosa más que la adopción del método científico monopolizado en otro tiempo por la física; la tendencia actual es hacer ciencia tal como los físicos la han hecho desde que Galileo introdujo el método experimental, o sea, planteando cuestiones claras, imaginando modelos conceptuales de las cosas, desarrollando hipótesis con base en resultados experimentales limitados, proponiendo teorías e intentando siempre justificar lo que se hace y lo que se piensa por medio de la lógica, por medio de otras teorías o por medio de experiencias sugeridas por las teorías.

La coincidencia en la metodología entre la física y la biología ha propiciado el interés de los físicos por los problemas biológicos, interés que se ha ido acentuando con la aparición de un mayor número de puntos de contacto entre las dos ciencias. Los mismos éxitos obtenidos por la física (y la química) han permitido que la biología pueda plantear ahora los problemas dominantes de la ciencia natural en su conjunto, re-tándonos a comprender mejor el mundo en que vivimos y exigiendo esfuerzos interdisciplinarios bien coordinados dentro de la actividad científica. Además, la formación académica y la larga experiencia acumulada por la física, habilitan al físico para

elaborar, discutir o aplicar modelos matemáticos destinados a describir y comprender algún fenómeno biológico.

Nadie mejor que el físico conoce la importancia de los modelos como representaciones ideales de la vasta complejidad de los fenómenos naturales. Sin ánimo de ofender, se podría decir que, al enfrentar un mismo problema, es casi inevitable una confrontación entre el físico y el biólogo, porque, mientras que éste probablemente empezará por tomar en cuenta todo el conjunto complejo de hechos observados, sin querer desechar nada, aquél estará más inclinado a tomar sólo unos cuantos hechos, relevantes de acuerdo con su criterio, para buscar un modelo idealizado susceptible de ser investigado teóricamente. Claro que la actitud del biólogo no es criticable, puesto que parece natural para un científico observacional enlistar una gran colección de datos pertinentes a cualquier formulación teórica que pretenda ser completa. Sin embargo, nadie sabe mejor que el físico que la conquista conceptual de la realidad, aunque parece paradójico, comienza por idealizaciones; sabe que para apresar la realidad se comienza por escoger sólo cierta información, agregando después elementos hipotéticos con una intención realista para contruir un modelo que permita ser insertado dentro de una teoría y así obtener resultados que puedan ser confrontados con hechos experimentales que provengan de la observación directa de la naturaleza o del laboratorio.

En el estudio del estado sólido, por ejemplo, un cuerpo cristalino (objeto real) se visualiza como una red de centros

fijos (átomos modelo) y un conjunto de esferitas rígidas (electrones modelo) de carga negativa paseándose entre los centros fijos. Si se quiere insertar este objeto modelo en una teoría es necesario atribuirle propiedades susceptibles de ser tratadas por teorías: se supone que los centros fijos forman una red rígida, que entre los electrones no existe ninguna clase de interacción y que la interacción electrones-red está descrita por un potencial periódico en el espacio y constante en el tiempo. De esta manera el objeto modelo de un cristal puede ser tratado teóricamente por medio de la mecánica cuántica. Tendremos entonces un modelo teórico o modelo matemático de un cristal.

Naturalmente que, procediendo de esta manera, siempre existe el riesgo de inventar propiedades falsas y de despreciar muchos de los rasgos del objeto real que pueden ser importantes; sin embargo, no se puede proceder de otra manera, la mayoría de las características de las cosas están ocultas a nuestros sentidos y solamente los modelos nos darán una imagen, aunque imperfecta, de lo real y si el modelo no incluye o no proporciona todos los detalles que interesan siempre existirá, en principio, la posibilidad de complicarlo. Por otro lado, sucede con mucha frecuencia que aún los modelos más simples posibles presentan espantosas complicaciones matemáticas que conducen a la imposibilidad de obtener aproximaciones más realistas.

En las cuatro últimas secciones de este trabajo de tesis se abordará un problema de suma importancia, tanto desde el punto de vista ecológico como desde el punto de vista económico,

la explotación racional de una población de peces, específicamente, la del atún aleta amarilla y la del barrilete en las aguas tropicales del oceano pacífico oriental. Ahí se verá que del objeto real (la población de peces) se desprecian casi todas sus características, tales como las edades y tamaños de los individuos, para lograr un modelo muy simple e insertarlo en la teoría de la dinámica poblacional. En lo que resta de esta sección y en las que siguen hasta la número 8, se bosquejará parte del marco teórico necesario en el cual pueda introducirse un problema particular como el mencionado arriba. Para comenzar se pondrán de manifiesto algunas características de los modelos en general.

La complejidad de los modelos puede ir desde la simple caja negra con terminales de entrada y salida, hasta la caja llena de mecanismos internos que tratan de explicar el comportamiento externo de la caja. En este último caso hablamos de una caja translúcida que solamente deja vislumbrar los mecanismos (una caja transparente dejaría ver los mecanismos con todo detalle).

Como ya se mencionó, la forma más lógica de proceder en el modelaje será empezar por el objeto modelo más simple, agregarle después una estructura sencilla y proseguir con el proceso de complicación hasta llegar a explicar todo lo que se quiere.

En los modelos de caja negra (algunas veces se les llama modelos empíricos) se tiene el propósito de describir, con

mayor o menor precisión, las características esenciales de la relación existente entre los datos colectados de dos o más variables, sin atender a los posibles mecanismos internos; son una representación global del funcionamiento del sistema, más o menos como la idea que un niño puede tener de un aparato de televisión. En esta clase de modelos, se eliminan todos los factores que influyen sobre la caja (el sistema) excepto uno, al cual se denomina "la entrada E", y se considera como importante una única propiedad influida por E y a la cual se denomina " la salida S" (fig. 1).



Fig. 1. Caja negra.

La representación más sencilla de un modelo de caja negra es una tabla que muestre las parejas de valores correspondientes de E y de S. Claro que esta manera de describir es muy primitiva y poco económica, se logra una mejora definitiva si uno es capaz de reemplazar la tabla por una fórmula general que enlace los dos conjuntos de valores $\{E\}$ y $\{S\}$. La fórmula expresará de modo compacto la manera de comportarse del modelo, sin expresar nada sobre los procesos internos que sucedieron en el sistema real. Esta es una manera muy simple de representación

que puede satisfacer temporalmente las necesidades del investigador, sobre todo si son de orden práctico.

Resulta entonces que la construcción de modelos empíricos se reduce a un problema de ajuste de curvas y, dentro del rango para el cual se dispone de datos, su precisión puede ser incrementada tanto como se quiera con sólo aumentar el número de parámetros arbitrarios que deben ajustarse. Sin embargo, esto no economiza esfuerzo y, como característica de estos modelos, los parámetros para ajustar no son interpretables, difícilmente se pueden identificar con cualesquiera de las propiedades tangibles del sistema real. Por lo tanto, debido a su arbitrariedad y a la ausencia de una estructura interna, cualquier predicción del modelo, hecha fuera del rango de valores de las variables que se utilizaron para el ajuste, resulta irreal o muy riesgosa. Esta debilidad debe tomarse muy en serio cuando se trata de modelos aplicables a problemas ecológicos, en especial cuando deban hacerse predicciones relacionadas con administración de recursos naturales o influencias ambientales ya que, con frecuencia, involucran extrapolaciones fuera del rango de la experiencia previa.

Si se piensa en la ley de radiación del cuerpo negro de Wien o en la que Planck dió a conocer inicialmente en Octubre de 1900, deberán considerarse como modelos de caja negra. Tanto la de Wien,

$$R_{\lambda} = \frac{b_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{(b_2/\lambda T)}}$$

como la de Planck,

$$R_{\lambda} = \frac{b_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{(b_2/\lambda T)} - 1}$$

(en las cuales la entrada E está representada por la temperatura absoluta T y la salida S, por la radiancia espectral R_{λ} y por la longitud de onda λ) fueron estructuradas para que los datos experimentales se ajustaran a ellas a través de los parámetros b_1 y b_2 .

La actitud de Planck con respecto a su fórmula ilustra de una manera inmejorable la manera de proceder de un verdadero investigador de la naturaleza. Aunque su fórmula resultó ser muy precisa en relación con los datos experimentales, este logro de ninguna manera lo satisfizo; sabía que, en la física, la obtención de una fórmula empírica que concuerde con los datos no constituye un fin en sí, pero que la mayoría de los problemas matemáticamente difíciles se resuelven sólo cuando se ha adivinado la solución (claro que el método de Planck para encontrar su fórmula no fue una completa adivinanza, existían modelos teóricos que, aunque fallidos, lo guiaron en su trabajo). De manera que, para Planck, el problema de la radiación del cuerpo negro aún subsistiría mientras no encontrara un mecanismo (ó mecanismos) responsable del espectro de radiación observado para todas las temperaturas, o sea, mientras no pudiera sustituir el modelo de caja negra por un modelo racional (explicativo) del cual, de una manera natural, pudiera deducirse su fórmula. De no conseguirlo, ésta no pasaría de ser una oscura curiosidad.

Como es bien sabido, Planck tuvo éxito en la empresa. Para hacer un objeto modelo de la cavidad radiante, consideró que los átomos de las paredes se comportaban como osciladores armónicos emitiendo y absorbiendo energía electromagnética. Insertó este objeto modelo en las teorías de la termodinámica, mecánica estadística y electromagnetismo clásicas y aventurando la hipótesis adicional de que los osciladores sólo podían absorber o emitir paquetes o cuantos de energía, logró deducir la siguiente expresión de la radiancia R_λ para la longitud de onda λ y cuando las paredes de la cavidad están a una temperatura T ,

$$R_\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1}$$

siendo c , la velocidad de la luz, k , la constante de Boltzman y h , la constante que desde entonces se llama constante de Planck. De esta manera los parámetros b_1 y b_2 dejan de ser simples ajustadores y su valor se deduce en forma natural de la teoría, en función de constantes universales,

$$b_1 = 2\pi h c^2 \quad ; \quad b_2 = hc/k$$

Con esto nos damos cuenta de que, en contraste con los modelos de caja negra, los modelos de caja translúcida o modelos racionales tienen mayor nivel de estructuración y resultan menos arbitrarios; están basados no solamente sobre datos experimentales u observacionales sino que, además, consideran diversos modos con los que las diferentes componenetas del sistema real pueden operar. En la caja negra se tienen variables de entrada y de salida solamente, en la caja translúcida se tendrán un tercer ti

po de variables I que especifican el estado interno del sistema. Y es así como, aventurando hipótesis razonables sobre las variables internas I de mayor significación que deben ser escogidas, se construyen modelos racionales en los que dichas variables se prestan para interpretarse o identificarse con características del sistema real.

Sin embargo, puede suceder que el funcionamiento de una caja negra pueda ser explicado por diferentes hipótesis relativas a los mecanismos internos, por ejemplo, sabemos que en la época de Newton los fenómenos de la reflexión y la refracción de la luz podían ser explicados tanto por un modelo corpuscular como por un modelo ondulatorio de la luz. Y sabemos que esta ambigüedad, que a primera vista podría considerarse como un defecto, en realidad constituye una virtud puesto que de ella se genera una mayor riqueza conceptual que a la larga puede llevar a la creación de teorías generales y al descubrimiento de leyes naturales.

Además, existen ciertas exigencias que reducen el número de modelos que puedan existir para explicar un mismo sistema real. Si surgen varios modelos explicativos cuando se trata de ir más allá de la conducta externa del sistema, basados en diferentes hipótesis sobre los mecanismos ocultos, sólo se considerará confirmado aquél que llene ciertos requisitos : en primer lugar, que de él pueda derivarse el funcionamiento observado, es decir, la conducta exterior del sistema; después, que prediga hechos nuevos, o sea, que su poder predictivo se proyecte más

allá del rango establecido por la caja negra; y, como tercer requisito, que no entre en contradicción con otras teorías y leyes bien establecidas. (Este último requisito solamente se les dispensa a los genios revolucionadores de la ciencia, por ejemplo, Einstein).

Por último, para terminar esta sección sobre las generalidades del modelaje, cabe mencionar los tipos de problemas que enfrentan los modeladores o los usuarios de los modelos. En forma simbólica, para cualquier modelo, puede escribirse

$$S = M E$$

en donde E es la entrada, S la salida y M compendia las propiedades internas o mecanismos del sistema.

En el modelo de caja negra la M se deja sin especificar; constituye solamente un operador funcional que convierte las E en S. Por otro lado, en los modelos de caja translúcida o racionales o explicativos, la M se refiere a la estructura interna y composición de la caja; representará el engranaje responsable de la conducta externa observable.

Con esta sencilla notación simbólica pueden apreciarse claramente los tipos de problema con los que puede enfrentarse un investigador:

- a) el problema de la predicción: dadas E y M encontrar S,
- b) el problema de las causas: dadas M y S encontrar E, y
- c) el problema de la explicación: dadas E y S encontrar M.

Los investigadores que unicamente son usuarios de los modelos ya estructurados o que tratan de valorarlos, se enfrentan a los problemas del tipo a) y/o b). En cambio, los modeladores, los hacedores de teorías, se enfrentan con el problema c), mucho más difícil, puesto que el mecanismo de enlace entre E y S requiere de mucha más imaginación. Ninguna tabla de datos de doble columna E-S señala, sin ambigüedades, el mecanismo simbolizado por M, está oculto a nuestros sentidos y, por consiguiente es necesario inventarlo.

En resumen, dado un sistema para su estudio, se pueden proponer varios tipos de modelo: modelos de caja negra, cajas translúcidas con diferentes mecanismos internos, cajas determinísticas o cajas estocásticas, cajas de un sólo nivel (por ejemplo, físico) o cajas de varios niveles (por ejemplo, físico y biológico) etc. Para elegir alguno de ellos, el investigador debe plantear claramente sus objetivos; para obtener provecho práctico del sistema puede bastar con un modelo de caja negra, pero si el interés recae en la comprensión del funcionamiento para tratar de dominarlo o modificarlo, entonces se tendrán que escoger modelos con mucha más profundidad teórica. Al investigador le toca decidir entre el conocimiento superficial que describe, o incluso predice la conducta del sistema, o el conocimiento explicativo con capacidad para prever efectos nuevos y, muchas veces, insospechados.

SECCION 2

MODELOS DE POBLACION PARA UNA ESPECIE. EL COEFICIENTE DE EXPANSION CUBICA Y LA TASA INTRINSECA DE CRECIMIENTO. CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO EXPONENCIAL.

El estudio de las interacciones de los organismos vivos con su ambiente natural o experimental ha logrado avances notorios durante el presente siglo. En la actualidad, el estudio de un organismo animal o vegetal ya no se limita a las descripciones morfológicas, anatómicas y fisiológicas aunadas a cierta cantidad de datos referentes a sus hábitos; ahora se ambiciona comprender aspectos más complejos y dinámicos de la vida del organismo. Se trata de encontrar y cuantificar las influencias externas emanadas de sus condiciones de vida y sus reacciones ante ellas; un problema que resulta ser sumamente difícil porque es un hecho que, además de los factores físicos del ambiente, un organismo se ve afectado por una multitud de otros organismos, en una convivencia caracterizada por una gran cantidad de relaciones mútuas de extrema complejidad.

Este estudio de las estructuras complejas de organismos interrelacionados constituye el campo de investigación de la ecología y en el que queda incluido la dinámica de poblaciones. El antiguo concepto de " la lucha por la existencia " está siendo sustituido por el de " dinámica de poblaciones " dentro de la cual se estudian las condiciones de equilibrio para especies in-

teractuantes, basándose en el hecho de que ninguna especie puede crecer, ni mucho menos desaparecer, sin afectar a todas las demás; en su medio natural, las especies alcanzan, generalmente, cierto grado de equilibrio, ya que sería de muy escaso valor para un individuo o para una especie lograr su florecimiento a costa del exterminio de los demás.

Este tipo de estudios ha contribuido significativamente a introducir, cada vez más, las matemáticas y la física en las investigaciones biológicas destinadas a la búsqueda de modelos matemáticos que sean capaces de capturar las características esenciales de la dinámica de las poblaciones animales y vegetales influenciadas por los fenómenos físicos que ocurren en su ambiente. Algunos de estos modelos describen sistemas específicos de una manera muy detallada, mientras que otros se interesan por cuestiones generales que tratan de una manera más o menos abstracta. Sin embargo, todos comparten el propósito común de ayudar a construir un amplio marco de referencia teórico que sirva para ordenar todo el cúmulo de observaciones hechas en el campo y en el laboratorio, puesto que, como se anotó en la primera sección de este trabajo de tesis, no basta con la observación y la clasificación, hay que agregar la construcción de modelos hipotéticos deductivos que puedan ser contrastados con la experiencia.

Al abordar esta empresa hay que comenzar por lo más sencillo; aunque sabemos que los individuos de una población deben interaccionar entre ellos mismos por sus fuentes de alimen-

tación, con otras poblaciones que compiten por las mismas fuentes de alimentación, y con sus depredadores, de manera que resulta difícil que existan especies aisladas en la naturaleza, el tratamiento matemático de la dinámica de poblaciones se empieza con modelos para una sólo especie.

Muchas poblaciones aisladas en el laboratorio y cuidadosamente mantenidas en condiciones ambientales controladas, se comportan de acuerdo con el tipo de modelos para una sólo especie, sin embargo, es claro que se encuentran en una situación idealizada con respecto al ambiente natural del que proceden.

El problema, planteado en términos generales, consiste en describir el comportamiento de una función del tiempo, N , que representa el número de individuos de una población o su biomasa. Para introducirnos en el problema vamos a considerar la definición de una cantidad tomada de la física.

En el estudio de las propiedades termodinámicas de la materia, uno de los parámetros importantes involucrado en el comportamiento macroscópico de las sustancias, es el llamado "coeficiente de expansión cúbica". La mayoría de los materiales sufren un aumento de volumen cuando se les aumenta la temperatura a presión constante. Para un aumento ΔT en la temperatura, el aumento ΔV del volumen será mayor mientras mayor sea el volumen V de la sustancia con el que se inicia la dilatación. Por ejemplo, para un $\Delta T = 10$ K, se obtendrá un ΔV mayor si se comienza con un $V = 1 \text{ m}^3$ que si se comienza con un $V = 1 \text{ cm}^3$. Por lo tanto, para caracterizar la expansividad de una sustancia, se busca

una cantidad que sea independiente del volumen inicial, por lo tanto, se toma la fracción $\Delta V/V$, es decir, la fracción de V que representa ΔV . Si, por ejemplo, $V = 5 \text{ m}^3$ y $\Delta V = 0.2 \text{ m}^3$, resulta $\Delta V/V = 1/25$, o sea que ΔV es $1/25$ de V . Por último, como la fracción $\Delta V/V$ corresponde a un aumento de temperatura ΔT , se define el coeficiente de expansión cúbica medio, como dicha fracción por unidad de aumento en la temperatura. En símbolos, si \bar{B} representa el coeficiente de expansión cúbica medio, entonces por definición,

$$\bar{B} = \frac{\Delta V/V}{\Delta T}$$

$$\bar{B} = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T} \quad (\text{a presión constante})$$

Y como se trata de variables continuas, se puede tomar el límite cuando T tiende a cero para definir el coeficiente de expansión cúbica "verdadero" o "instantáneo"

$$B = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \quad (\text{a presión constante})$$

(Con estricto apego a la notación matemática, la derivada $\frac{dV}{dT}$ se debe escribir $\frac{\partial V}{\partial T}$, para indicar que se trata de una derivada parcial).

Entonces, haciendo una comparación un tanto simplista se puede decir que el crecimiento de una población de organismos constituye una especie de expansión y que para caracterizar el grado de expansividad de una población se hace necesario

definir un coeficiente similar al coeficiente de expansión cúbica de los materiales.

Si N representa el número de individuos de una población en cierto instante t y si al final de cierto intervalo de tiempo Δt (iniciado en t), el número de individuos ha aumentado cierta cantidad ΔN , parece razonable suponer que mientras mayor sea aquel número N de individuos presentes al inicio del intervalo de tiempo, mayor será el aumento ΔN que se alcance al final del intervalo. Entonces, procediendo en una forma similar a como se hizo para el coeficiente de expansión cubica, se calcula la fracción $\Delta N/N$, es decir, se busca la fracción de N que representa ΔN , y se define la " tasa intrínseca de crecimiento " promedio, como dicha fracción por unidad de tiempo. En símbolos, si \bar{r} representa la tasa de crecimiento promedio, entonces, por definición,

$$\bar{r} = \frac{\Delta N/N}{\Delta t}$$

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

En situaciones en las que existe un completo traslapamiento de generaciones (en la población humana, por ejemplo), el crecimiento puede ser considerado como un proceso continuo que puede ser descrito, matemáticamente, con el uso de funciones continuas, lo cual permite la introducción de ecuaciones diferenciales. En este caso, la tasa intrínseca de crecimiento queda definida por

$$r = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \quad (\text{en ambiente constante})$$

El modelo para una especie más sencillo surge, entonces, al considerar que la tasa intrínseca de crecimiento es una constante, sin hacer ninguna consideración sobre los mecanismos internos que puedan existir en la población. Resulta así que

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (r, \text{ constante})$$

con la condición inicial de que en $t = 0$, $N = N_0$, representa, como ya se dijo, el modelo matemático más sencillo de la dinámica de población. La solución de la ecuación diferencial, o sea, la expresión para N en función de t , es muy fácil de encontrar (véase el apéndice I). La solución es

$$N = N_0 e^{rt} \dots\dots\dots (1)$$

siendo N_0 la población inicial, es decir, el número de individuos que existían en el instante en el que se comenzó a contar el tiempo ($t = 0$).

Si en una población ocurren nacimientos y muertes, con una tasa de natalidad n (constante) y una tasa de mortalidad m (constante), entonces la tasa intrínseca de crecimiento r , o mejor dicho para este caso, la tasa intrínseca de cambio de la po-

blación quedaría expresada por $r = n - m$, y se tendría que

$$r > 0 \text{ si } n > m; \quad r = 0 \text{ si } n = m; \quad r < 0 \text{ si } n < m$$

y el comportamiento de la solución (1) dependerá del signo de r . Si r es positiva, N es una función de crecimiento continuo e ilimitado en el transcurso del tiempo (en adelante a este tipo de crecimiento lo llamaremos " crecimiento exponencial puro ").

Si r es cero, N se mantiene constante en el valor N_0 en todo instante ($e^0 = 1$).

Si r es negativa se tiene una N que decrece continuamente, acepcándose asintóticamente a cero a medida que el tiempo crece (llamaremos a este proceso un " decaimiento exponencial puro ").

Los tres comportamientos señalados se muestran gráficamente en la figura 2.

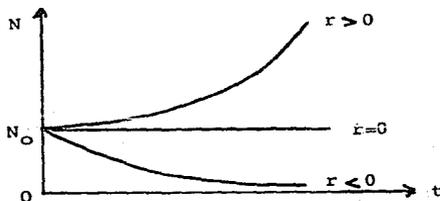


Fig.2. Comportamiento de la función

$$N = N_0 e^{rt}$$

Si se considerara constante el coeficiente de expansión cúbica de una sustancia y se empezara la dilatación con un volumen V_0 a una temperatura T_0 , entonces, a presión constante

el volumen variaría con la temperatura siguiendo una fórmula si milar a la (1), o sea,

$$v = v_0 e^{B(T-T_0)} \quad (\text{a presión constante})$$

Y tendríamos, con una B constante positiva, un volumen que aumentaría indefinidamente al incrementarse la temperatura. Este comportamiento, a todas luces irreal, es una consecuencia de la sencillez del modelo al no tomar en cuenta la estructura interna de la materia; un sólido se fundiría antes de que logre expandir se una cantidad considerable y un líquido se evaporará. Y, como se sabe, ni siquiera con los gases ideales funciona el modelo, puesto que la relación entre el volumen y la temperatura, a pre sión constante, está dada por la ecuación lineal

$$v = \frac{v_0}{T_0} T$$

Lo que sucede, a fin de cuentas, es que el coeficiente de expansión cúbica debe considerarse como una función de la presión y de la temperatura, $B=f(p,T)$, y, en principio, se podrían buscar ecuaciones de estado para diferentes materiales a presión constante proponiendo diferentes funciones para B y resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dT} = Vf(p,T) \quad (\text{con } p \text{ constante})$$

Algo similar sucede con el problema de la población N; también resulta irreal una tasa intrínseca de crecimiento constante para poblaciones en ambientes naturales. Para que se diera un crecimiento exponencial puro tendríamos que imaginar una po-

blación en la que:

- a) todos los individuos fueran idénticos en todos los aspectos,
- b) todos los individuos vivieran para siempre,
- c) los organismos no interfirieran entre sí, y
- d) en la que el ambiente fuera tal que proporcionara espacio y recursos suficientes para mantener a todos los individuos.

Las condiciones mencionadas pueden establecerse en el laboratorio para el caso de poblaciones de microorganismos reproduciéndose en cultivos adecuados, pero, parece ser que, ni aún así resultan completamente ajustables al modelo de crecimiento exponencial puro.

Sin embargo, las críticas al modelo son válidas cuando se considera que el dominio de la variable independiente va desde el instante $t=0$ hasta $t=\infty$ (y en el caso del coeficiente de expansión cúbica, desde la temperatura $T=T_0$ hasta $T=\infty$), y debe puntualizarse que, antes de condenar al modelo por inexacto e irreal, el crecimiento exponencial puro describe con buena aproximación el comportamiento de ciertas poblaciones dentro de intervalos de tiempo relativamente cortos. Por ejemplo, la población de los Estados Unidos desde el año 1790 hasta el año 1860. (Véase el apéndice II).

En forma similar, el coeficiente de expansión cúbica, dentro de rangos pequeños de temperatura, permanece prácticamente con un valor constante y, dentro de dichos rangos, el modelo describirá, con bastante buena aproximación, los aumentos de volumen del material en estudio.

SECCION 3

EL MODELO LOGISTICO.DETERMINACION DE LA SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL LOGISTICA SIN RECURRIR A METODOS DE INTEGRACION.

Entre las suposiciones, referentes a las características de la población y del ambiente, que hace el modelo de crecimiento exponencial puro, se encuentran la de no interferencia entre los individuos de la población y la de recursos ilimitados en el ambiente para sostener cualquier tamaño de población.

Como las suposiciones mencionadas no son muy realistas, un modelo mejorado debe tomar en cuenta que cada especie habita ambientes restringidos, con un espacio limitado y con una cantidad finita de recursos para sostener solamente a cierto número máximo de individuos. Es decir, un modelo mejorado debe incluir en su estructura cierta " capacidad de sostén " del medio que constituya una cota superior para el número de individuos que puedan existir o sostenerse con los recursos a su alcance.

Para lograr lo anterior, se debe considerar que la tasa intrínseca de crecimiento debe ser una función del número de individuos de la población, es decir,

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = f(N)$$

y que dicha tasa debe ir disminuyendo a medida que número N se vaya acercando a la capacidad de sostén del medio. En otras palabras debe pedirse que la función $f(N)$ sea decreciente.

Haciéndole caso a la máxima: "primero linealiza y después averigüas", el modelo que seguiría en complicación, con respecto al del crecimiento exponencial puro, será aquel en el cual se considere que $f(N)$ es la función decreciente más sencilla, o sea, una recta de pendiente negativa. Por lo tanto, se propone

$$f(N) = a - bN$$

dando lugar a la ecuacion diferencial

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = a - bN$$

que también se puede escribir

$$\frac{dN}{dt} = N(a-bN) \quad \dots\dots\dots(2)$$

La ecuacion diferencial (2) constituye lo que se llama el "modelo logístico" de crecimiento.

Para poner de manifiesto que el modelo logístico incluye en su estructura una capacidad de sosten del medio, para establecer la ecuacion (2) se puede razonar de la siguiente manera:

En un principio, como en el caso del crecimiento exponencial puro, mientras mayor sea N , mayor será el crecimiento de la población (habrá más hijos mientras mayor sea el número de padres). Sin embargo, en un ambiente restringido que solamente puede sostener un número limitado de individuos, la población crecerá más rápido cuando el número de individuos presentes esté lejos del límite permitido por el ambiente, es decir, cuando todavía exis-

ta mucho espacio vital por ocupar; pero, a medida que la población aumenta de tamaño dicho espacio se va reduciendo, propiciándose una mayor competencia entre los individuos por los recursos limitados del medio; esto hará más dura " la lucha por la existencia" y en consecuencia, la rapidez de crecimiento de la población se verá disminuida.

Por lo tanto, el modelo logístico propone que la rapidez de crecimiento ($\frac{dN}{dt}$) de la población sea proporcional tanto al número de individuos presentes, como al porcentaje de espacio vital que todavía está disponible para ser ocupado.

Si K representa el número máximo de individuos que pueden ser sostenidos por el medio y si, en cierto momento, el tamaño de la población es N , la fracción de espacio todavía por ocupar será

$$\frac{K - N}{K}$$

por ejemplo, si el ambiente solamente puede sostener 1000 individuos y, en cierto momento, existen 300, se tendrá

$$\frac{K - N}{K} = \frac{1000 - 300}{1000} = 0.7$$

lo cual significa que existe todavía el 70% de espacio vital por ocupar.

Entonces, el modelo propone que $\frac{dN}{dt}$ sea proporcional a N y a $\frac{K - N}{K}$. Llamando a a a la constante de proporcionalidad, se obtiene,

$$\frac{dN}{dt} = aN\left(\frac{K-N}{K}\right)$$

que también se puede escribir como

$$\frac{dN}{dt} = N(a - \frac{a}{K} N)$$

que es lo mismo que

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bN) \quad (\text{con } K = \frac{a}{b})$$

La ecuación diferencial logística puede ser integrada recurriendo al método de fracciones parciales, sin embargo, su solución puede ser encontrada por medio de un análisis matemático de la propia ecuación diferencial.

En primer lugar, la solución $N(t)$ la consideraremos como una función continua y, por lo que representa, univalente, o sea, que a cada instante t le debe corresponder uno y sólo uno valor de N . Aceptando estas condiciones, existirá la función inversa $t(N)$ que deberá cumplir con la ecuación

$$\frac{dt}{dN} = \frac{1}{N(a - bN)} \quad \dots\dots\dots(3)$$

que no es otra cosa que la inversa de la ecuación logística (2). Examinando la ecuación (3) en la forma

$$\frac{dt}{dN} = \frac{1}{Nb(\frac{a}{b} - N)}$$

puede verse que se cumplen los siguientes límites

$$\lim_{N \rightarrow 0^+} (dt/dN) = + \infty \quad \dots\dots\dots(i)$$

$$\lim_{N \rightarrow (a/b)^-} (dt/dN) = + \infty \quad \dots\dots\dots(ii)$$

$$\lim_{N \rightarrow (a/b)^+} (dt/dN) = -\infty \dots\dots\dots (iii)$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (dt/dN) = 0 \dots\dots\dots (iv)$$

En el límite (i), N se aproxima a cero por la derecha, es decir, con valores en los que N se mantiene siempre mayor que cero y, en consecuencia, (dt/dN) aumenta indefinidamente.....

En el límite (ii), N se aproxima al valor (a/b) por la izquierda, es decir, con valores que mantienen a $N < (a/b)$, lo cual hace que (dt/dN) crezca sin límite.....

En el límite (iii), N se acerca al valor (a/b) por la derecha, es decir, manteniéndose $N > (a/b)$. En este caso (dt/dN) disminuye sin límite; $(dt/dN) < 0$ y su valor absoluto aumenta sin límite.

En el límite (iv), N se hace, positivamente, cada vez más grande y, en consecuencia, (dt/dN) se hace cada vez más próxima a cero manteniéndose siempre negativa.

Por último, derivando la expresión para dt/dN dada por (3), con respecto a N, se obtiene la 2a. derivada

$$\frac{d^2t}{dN^2} = \frac{2bN - a}{[N(a-bN)]^2}$$

Esta segunda derivada es igual a cero, cuando el numerador es ce ro, o sea, cuando

$$N = \frac{1}{2}(a/b)$$

para este valor, y tomando en cuenta los límites (i) y (ii), la función dt/dN debe tener un mínimo en el intervalo $(0, \frac{a}{b})$, de N.

El valor de dicho mínimo es

$$\frac{dt}{dN} = \frac{4b}{a^2} \dots\dots\dots(4)$$

que se obtiene sustituyendo el valor correspondiente de N en la ecuación (3).

Con toda esta información obtenida analizando la ecuación diferencial (3), se puede hacer un bosquejo de la gráfica dt/dN contra N, que se muestra en la fig. 3.

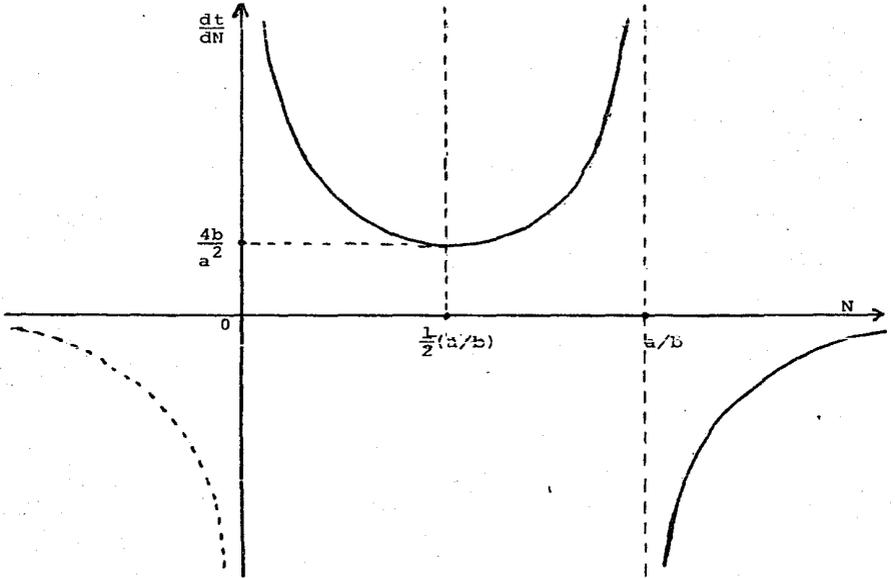


Fig. 3.- Bosquejo de la gráfica de la función

$$\frac{dt}{dN} = \frac{1}{N(a - bN)}$$

Si se toma en cuenta la parte de la gráfica correspondiente a valores negativos de N , resulta ser simétrica con respecto a la línea vertical $N = \frac{1}{2}(a/b)$.

Con la información contenida en la gráfica de la fig. 3, se puede, ahora, encontrar las características de la función $t(N)$. De acuerdo con el comportamiento de $\frac{dt}{dN}$ se ve que:

a)

$t(N)$ es creciente para valores de N en el intervalo $(0, \frac{a}{b})$ porque $\frac{dt}{dN} > 0$, en dicho intervalo. Y debe ser monótonamente creciente, ya que, en todo el intervalo $\frac{dt}{dN} \neq 0$.

b)

$t(N)$ tiene un punto de inflexión en $N = \frac{1}{2}(a/b)$, porque para ese valor $\frac{dt}{dN}$ tiene un punto crítico (un mínimo) en el que $\frac{d^2t}{dN^2} = 0$.

c)

$t(N)$ es cóncava hacia abajo para valores de N en el intervalo $(0, \frac{1}{2} \frac{a}{b})$, porque $\frac{dt}{dN}$ es decreciente en ese intervalo. Y es cóncava hacia arriba para valores de N en el intervalo $(\frac{1}{2} \frac{a}{b}, \frac{a}{b})$, porque $\frac{dt}{dN}$ es creciente en dicho intervalo.

d)

$t(N)$ es monótonamente decreciente para N en el intervalo $(\frac{a}{b}, \infty)$, porque $\frac{dt}{dN} < 0$ en ese intervalo.

e)

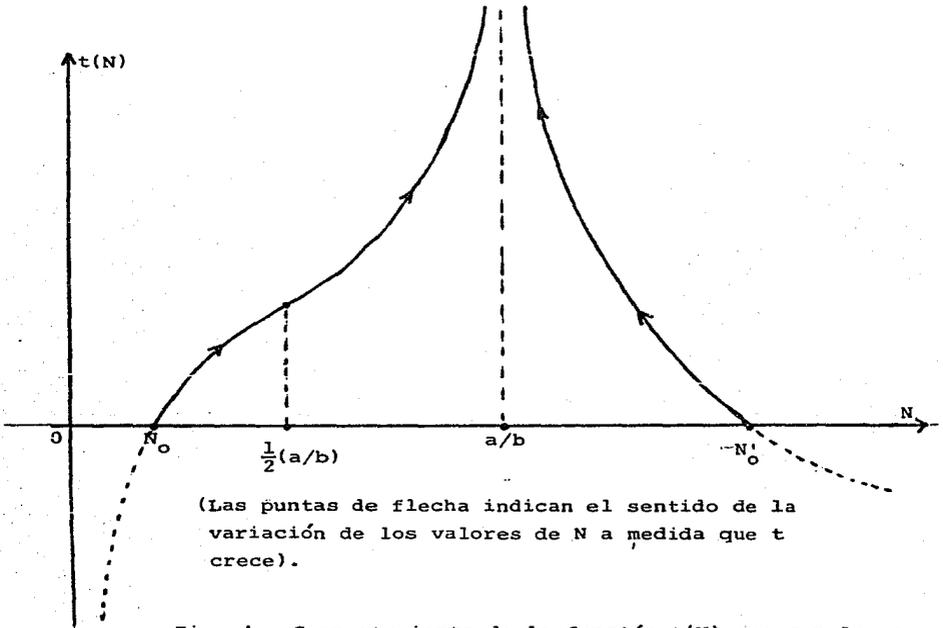
$t(N)$ debe tender hacia una tangente vertical, a medida que N se acerque al valor $\frac{a}{b}$, tanto por la derecha como por la

izquierda, ya que, en ambos casos, el valor absoluto de $\frac{dt}{dN}$ crece sin límite.

f)

Por su significado físico, el tiempo, $t(N)$ siempre es positiva.

Tomando en cuenta toda esta información, la gráfica $t(N)$ contra N debe ser del tipo mostrado en la fig. 4.



(Las puntas de flecha indican el sentido de la variación de los valores de N a medida que t crece).

Fig. 4.- Comportamiento de la función $t(N)$ que cumple con la ecuación diferencial $\frac{dt}{dN} = \frac{1}{N(a - bN)}$

Para valores de N en el intervalo $(0, \frac{1}{2} \frac{a}{b})$, la forma de $t(N)$ sugiere el uso de la función

$$T(N) = \text{Ln}(N/N_0)$$

que siempre es concava hacia abajo ($\frac{d^2 T}{dN^2} = -\frac{1}{N^2}$). (Ver fig. 5).

Para valores de N comprendidos en $(\frac{1}{2} \frac{a}{b}, \frac{a}{b})$, la forma de $t(N)$ sugiere el uso de la función

$$T'(N) = \text{Ln} \frac{1}{(a - bN)}$$

que siempre es concava hacia arriba porque su segunda derivada

$$\frac{d^2 T'}{dN^2} = \frac{b^2}{(a - bN)^2}$$

siempre es positiva. Además,

$$\lim_{N \rightarrow (a/b)^+} \text{Ln} \frac{1}{(a - bN)} = \infty \quad (\text{Ver fig. 6}).$$

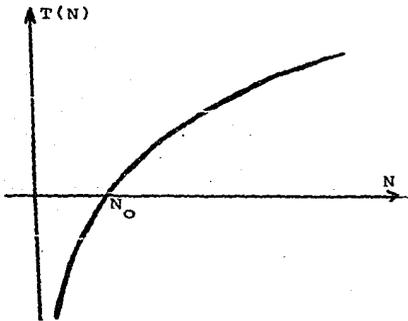


Fig.5.- Gráfica de la función
 $T(N) = \text{Ln}(N/N_0)$

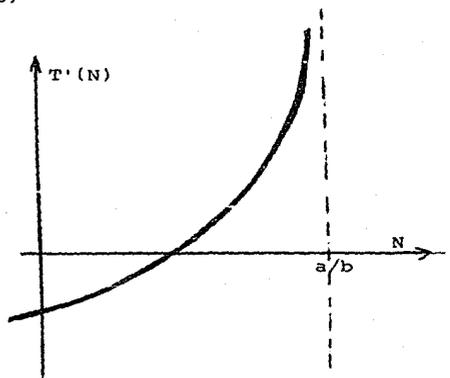


Fig.6.- Gráfica de la función
 $T'(N) = \text{Ln} \frac{1}{(a - bN)}$

Para formar una curva suave con T y T', se deben unir en un punto en donde ambas funciones tengan tangentes de igual pendiente, es decir una N en la cual,

$$\frac{dT}{dN} = \frac{dT'}{dN}$$

igualdad que es equivalente a,

$$\frac{1}{N} = \frac{b}{(a-bN)}$$

y que, resolviendo para N, da como resultado,

$$N = \frac{1}{2}(a/b) \quad (\text{punto de inflexión})$$

Como para este valor de N, T y T' no son iguales, habrá que agregar una constante C, a cualquiera de las dos funciones, cuyo valor haga que T y T' coincidan en $N = \frac{1}{2}(a/b)$. Escogiendo a T' para agregar la constante, se tendrá,

$$T(N) = \text{Ln}(N/N_0) \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$T'(N) = \text{Ln} \frac{1}{(a-bN)} + C \quad \dots\dots(6)$$

Por lo tanto, la unión de T y T' tendrá todas las características cualitativas de t(N) mostradas en la gráfica de la fig.4.

Por último, para encontrar la expresión algebraica para t(N), se tomará en cuenta una propiedad de las funciones componentes: T y T'. Si se iguala a cero la suma de las segundas derivadas de T y T' con respecto a N, se obtiene la misma relación que cuando se igualan las primeras derivadas, es decir,

$$\frac{d^2}{dN^2} (T+T') = 0$$

y la igualdad,

$$\frac{dT}{dN} = \frac{dT'}{dN}$$

son equivalentes para valores positivos de N. Lo cual se puede comprobar derivando las expresiones (5) y (6):

$$\frac{dT}{dN} = \frac{1}{N} \quad \text{y} \quad \frac{dT'}{dN} = \frac{b}{(a - bN)}$$

igualándolas se obtiene

$$\frac{1}{N} = \frac{b}{(a - bN)}$$

que se satisface para $N = \frac{1}{2}(a/b)$. Por otro lado, se tiene que

$$\frac{d^2}{dN^2}(T+T') = -\frac{1}{N^2} + \frac{b^2}{(a - bN)^2} = 0$$

relación que es equivalente también a,

$$\frac{1}{N} = \frac{b}{(a - bN)}$$

Lo anterior tiene como consecuencia que la función

$$F(N) = T + T'$$

tiene un punto de inflexión en el sitio exacto en donde se necesita, además de que conserva todas las demás características cualitativas que debe tener $t(N)$.

Ahora sólo falta un último ajuste para identificar $t(N)$ con $F(N)$. En la fig. 3 se observa que, en $N = \frac{1}{2}(a/b)$, el valor de $\frac{dT}{dN}$ es igual a $4b/a^2$, mientras que

$$\frac{dF}{dN} = \frac{dT}{dN} + \frac{dT'}{dN} = \frac{1}{N} + \frac{b}{(a - bN)}$$

tiene el valor,

$$\frac{dF}{dN} = \frac{4b}{a} \quad \text{cuando } N = \frac{1}{2}(a/b)$$

Entonces, para que las derivadas sean iguales, lo único que hay que hacer es multiplicar $F(N)$ por la constante $1/a$.

En conclusión, la función $t(N)$ buscada como solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dt}{dN} = \frac{1}{N(a - bN)}$$

debe ser la función,

$$t(N) = \frac{1}{a} (T + T')$$

$$t(N) = \frac{1}{a} \left[\text{Ln}(N/N_0) + \text{Ln} \frac{1}{(a - bN)} + C \right]$$

lo cual se puede comprobar haciendo la derivada

$$\frac{dt}{dN} = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{N} + \frac{b}{(a - bN)} \right] = \frac{1}{a} \frac{a - bN + bN}{N(a - bN)}$$

$$\frac{dt}{dN} = \frac{1}{N(a - bN)}$$

Escribiendo la constante C como $\text{Ln } C$, y usando la propiedad de que la suma de logaritmos es igual al producto de los números correspondientes, resulta

$$t(N) = \frac{1}{a} \left(\text{Ln} \frac{CN}{N_0(a - bN)} \right)$$

y para que $t(N_0) = 0$, la constante C de la expresión anterior debe ser, $C = (a - bN_0)$.

La expresión final para la función buscada $t(N)$ será entonces:

$$t(N) = \frac{1}{a} \left(\text{Ln} \frac{N(a - bN_0)}{N_0(a - bN)} \right)$$

La solución $N(t)$ de la ecuación logística será, entonces

$$N(t) = \frac{a/b}{1 + (\frac{a}{bN_0} - 1)e^{-at}} \dots\dots\dots (7)$$

que se obtiene despejando la N de la expresión para $t(N)$.

La gráfica de la función $N(t)$ se obtiene de la gráfica mostrada en la fig. 4, haciendo que el eje t sea horizontal y el eje N vertical, (fig. 7).

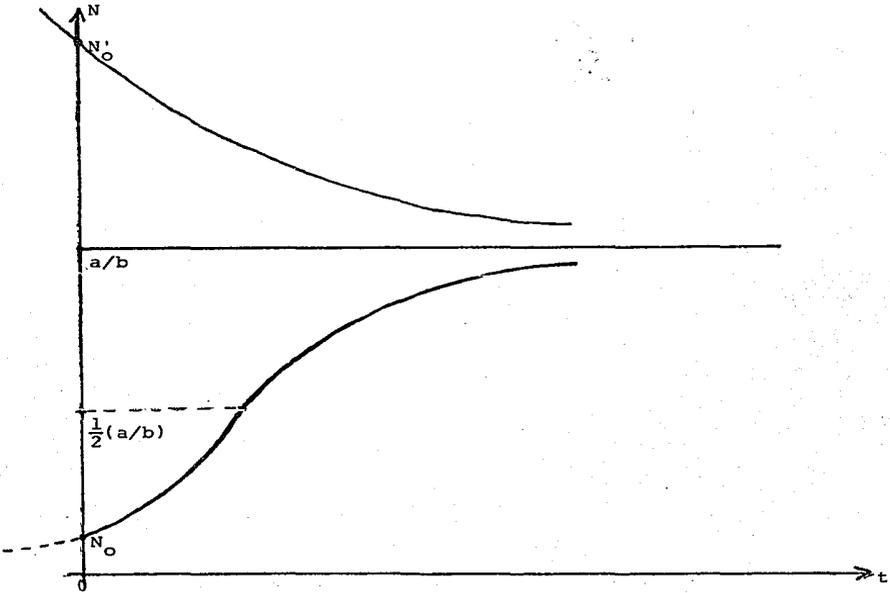


Fig. 7.- Gráfica de la solución de la ecuación logística dada por la ecuación (7).

En la gráfica de la fig. 7 se observa que la solución dada por la ecuación (7) incluye 3 casos. Para una población inicial $N_0 > a/b$, la solución es monotonamente decreciente, concava hacia arriba (no hay puntos de inflexión) y que se aproxima asintóticamente al valor $N = a/b$, a medida que t aumenta.... Para una población inicial $N_0 = a/b$, la solución es la recta horizontal $N = a/b$. La población se mantiene constante todo el tiempo..... Para una población inicial $N_0 < a/b$, la solución es la curva en forma de S, con un punto de inflexión en $N = \frac{1}{2}(a/b)$, que se acerca asintóticamente al valor $N = a/b$. Si la población inicial estuviera entre $\frac{1}{2}(a/b)$ y a/b , no habría punto de inflexión; la solución sería la parte concava hacia abajo de la curva en forma de S.

En conclusión, el modelo logístico resulta ser el modelo de población más sencillo que toma en cuenta efectos de competencia, postulando una población denso-dependiente. Su estructura básica es una tasa intrínseca de crecimiento con una retroalimentación dependiente de la densidad que representa la competencia por una cantidad fija de recursos del medio.

Algunas especies de microorganismos, estudiadas bajo las condiciones controladas de un laboratorio, colocadas en un medio limitado se ajustan bastante bien a un crecimiento poblacional logístico. También la población humana de los Estados Unidos, entre los años de 1790 a 1950, siguió un crecimiento que se ajusta a una curva logística en forma de S. (Vease el apéndice III).

Los principales defectos (suposiciones irreales) del modelo logístico y que dan lugar a las críticas que se le hacen son, principalmente :

a) El efecto de añadir un individuo más a la población es el mismo, independientemente de la densidad, es decir, sin importar si son pocos o muchos los individuos ya presentes. Cada individuo añadido hace decrecer la tasa intrínseca de crecimiento en la misma cantidad. Si la ecuación diferencial logística se escribe

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = a - bN$$

se nota que $a - bN$ es una recta de pendiente negativa $-b$, por lo tanto, por cada individuo añadido a la N , la tasa de crecimiento $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ decrece b unidades, como se muestra en la siguiente figura, (fig. 8)

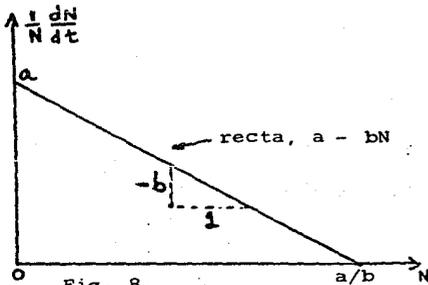


Fig. 8.

En términos de la capacidad de sosten $K = a/b$, la recta tiene como ecuación $(a - \frac{a}{K} N)$, con pendiente negativa $-\frac{a}{K}$. de manera que por cada individuo añadido, la disminución es $-\frac{a}{K}$

b) La tasa de crecimiento máximo, representada por la letra a , y la capacidad de sostén del medio $K = a/b$, son constantes..... Esta consideración falla sobre todo con la K . La capacidad de sostén es un parámetro extremadamente complicado en la realidad;

es una cantidad que incluye recursos del medio, renovables y no renovables, así como efectos atribuibles a otras especies competidoras y/o depredadoras. Todos estos factores inducen una gran variabilidad en la K , tanto de lugar en lugar, como de tiempo en tiempo.....

c) La tasa de crecimiento responde instantáneamente a las variaciones de la población, es decir, no hay retrasos. En la realidad los retrasos entre causa y efecto son inevitables. Por ejemplo, si una especie se reproduce sólo en intervalos de tiempo discretos, los efectos de la competencia se dejarán sentir sobre la natalidad hasta la siguiente época de apareamiento; si una población explota un recurso que se va agotando, en subsecuentes poblaciones aparecerá un retraso de acuerdo con el lapso de recuperación del recurso. Estos retrasos afectan la estabilidad de las poblaciones y deben ser incluidos en los modelos.

d) El aumento en la densidad de la población afecta por igual a todos los individuos sin importar edades. En la mayoría de los casos se ha observado que las variaciones en la densidad producen diferentes respuestas en los grupos de diferente edad. Por ejemplo, en algunas especies, una mayor densidad poblacional puede afectar más a las larvas que a los adultos o viceversa. Existen casos en los que un incremento en la densidad inhibe el desarrollo de las larvas y existen otros en los que afecta la capacidad reproductiva de los adultos.

Todas estas fallas pueden ser subsanadas en modelos más realistas; un modelo que las corrigiera todas se volvería

matemáticamente muy complicado y quizá, hasta inmanejable. Por esto, algunos modelos corrigen algunas de las fallas y otras, de acuerdo con los intereses del modelador. Por ejemplo, para incluir implícitamente los retrasos, los modelos pueden estructurarse con base en ecuaciones de diferencias finitas dejando de lado las ecuaciones diferenciales. Un modelo de este tipo es el representado por la ecuación,

$$N_{t+1} = \frac{rN_t}{(1 + bN_t)^a}$$

que supone generaciones discretas, es decir, el tiempo (variable independiente) varía a saltos y no en forma continua. De esta manera, lo que pasa en la generación al tiempo t , se manifiesta sólo hasta la generación al tiempo $t+1$.

También hay modelos estocásticos que toman en cuenta la variabilidad de la capacidad de sosten causada por los cambios aleatorios de las condiciones ambientales y modelos que incluyen la competencia y la depredación entre especies, los cuales son descritos por sistemas de ecuaciones diferenciales o de diferencias finitas.

SECCION 4

INTERACCION ENTRE ESPECIES.MODELOS DE POBLACION PARA 2 ESPECIES.
COMPETENCIA Y DEPREDACION.MODELO DE LOTKA Y VOLTERRA.MODELO DE
SCHAEFER.

En la naturaleza no existen poblaciones aisladas de organismos; es un hecho que cada población sufre interacciones internas con los individuos de la misma especie e interacciones externas con individuos de otras especies.

Los modelos matemáticos más simples que involucran la interacción entre especies, son aquellos que se restringen a sólo 2 poblaciones.

Los ecólogos han clasificado los diferentes tipos de interacción basandose en los efectos que acusan cada una de las 2 especies. El efecto puede ser: benéfico o positivo (+), adverso o negativo (-), o nulo (0). Los nombres que los ecólogos han dado a las interacciones de acuerdo con sus efectos son:

	Efecto en la especie:		
	A	B	
COMPETENCIA	-	-	A y B compiten por el mismo recurso y se inhiben mutuamente.
MUTUALISMO	+	+	A y B se benefician mutuamente y no pueden vivir una sin la otra.
COOPERACION	+	+	Interacción no obligatoria que beneficia a ambas especies.

DEPREDACION	+	-	A caza a B para alimentarse. A es el depredador y B la presa.
PARASITISMO	+	-	En esencia, es lo mismo que la depredación, sólo que la presa no muere violentamente.
COMENSALISMO	+	0	A, el comensal, se beneficia de B sin afectarlo.

Las dos interacciones que más interesan a la dinámica de las poblaciones son: la competencia y la depredación.

En la competencia existen 2 poblaciones interactuantes que tienen una fuente de alimentación común. Cada una afectará negativamente a la otra al disminuir la cantidad disponible del recurso que, de otra manera, estimularía el crecimiento de cada una de ellas.

El modelo más sencillo para 2 especies A y B en competencia, se basa en las siguientes suposiciones:

- a) La ausencia de A permite a B un crecimiento proporcional a su tamaño, o sea, un crecimiento exponencial puro y, recíprocamente, la ausencia de B propicia un crecimiento exponencial puro para A.
- b) La cantidad del recurso por el que compiten es suficiente para mantener cualquier tamaño de población de A o de B.
- c) El efecto de la competencia es proporcional al producto de los tamaños de población de A y de B.

Utilizando las mismas letras A y B para distinguir los tamaños de población de las dos especies, respectivamente, las poblaciones tienen que cumplir con las dos ecuaciones diferen-

ciales siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= r_1 A - pAB && \dots\dots\dots(8) \\ \frac{dB}{dt} &= r_2 B - qAB\end{aligned}$$

siendo t el tiempo y r_1, r_2, p, q , constantes positivas. Se ve claramente que, si $B = 0$, la ecuación resultante para A es del tipo de crecimiento exponencial puro. Lo mismo sucede para B en el caso de que $A = 0$. Los términos negativos, proporcionales al producto AB , son los que inhiben el crecimiento.

En estas circunstancias cabe la pregunta, ¿llegará un momento en el que las dos poblaciones se hayan extinguido? O también, ¿alcanzarán las poblaciones algún punto de equilibrio?

Naturalmente que las dos preguntas anteriores podrán ser contestadas si uno es capaz de resolver el sistema (8), es decir, encontrar expresiones para A y B que muestren su dependencia con el tiempo. Sin embargo, en el caso de que el sistema fuera difícil o imposible de resolver ¿se podría, sin resolver el sistema, encontrar respuesta a las preguntas? Este problema será tratado en las siguientes secciones en las que se hará un esbozo de la teoría de la estabilidad.

Continuando con el tema de la interacción de poblaciones, para el caso de la depredación las suposiciones para el modelaje son similares a las de la competencia. Llamando D a la población de depredadores y P a la de las presas, se tiene que:

a) En ausencia de D , la población P experimentaría un crecimiento

to exponencial puro y, en ausencia de P, la población D sufriría un decaimiento exponencial puro.

- b) El ambiente es capaz de suministrar recursos suficientes para sostener cualquier nivel de la población P de presas: el único recurso para el mantenimiento de la población D de depredadores, es la población P de presas.
- c) El efecto de la depredación, muertes de P debidas a D, es proporcional al producto de las poblaciones.

Con las suposiciones anteriores, las ecuaciones diferenciales que deben satisfacer las poblaciones P y D son:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= aP - fDP \\ & \dots\dots\dots(9) \\ \frac{dD}{dt} &= -bD + cDP\end{aligned}$$

en donde a,b,c y f son constantes positivas y t es el tiempo.

El sistema (9) es conocido como el modelo de Lotka y Volterra, por ser estos investigadores, el primero austriaco de padres estadounidenses, y el segundo italiano, los que por primera vez estudiaron las interacciones depredador-presa, por el año de 1920.y plantearon el sistema de ecuaciones (9).

Es evidente que, de acuerdo con el sistema (9), en el caso en el que D = 0, la población P se regiría por una ecuación diferencial de crecimiento exponencial puro, en cambio, si P = 0, la población D seguiría un decaimiento exponencial puro debido al signo negativo de la constante b.

Tambien en este caso depredador-presa pueden plantearse preguntas sobre la extinción o equilibrio de las especies.

Un ejemplo de importancia practica del tipo depredador-presa y en el que interviene el hombre como depredador, lo constituyen las pesquerías. En este caso interviene la población de alguna especie de pez de importancia comercial y la población de pescadores. Por regla general, la población de presas se restringe a la existente en cierta zona de explotación, por ejemplo, el golfo de Guayaquil en aguas ecuatorianas del oceano pacífico y la población de depredadores se representa por el esfuerzo pesquero que realizan los pescadores en la zona en cuestión.

En este caso, los modelos más simples son los llamados "modelos de producción", los cuales ignoran toda estructura interna de la población de peces y solamente se interesan por la biomasa o tonelaje total de los individuos capturados y en la de aquellos susceptibles de capturarse.

Un ejemplo de este tipo de modelo, que se discutirá con mayor detalle en la sección 10, es el modelo de producción de Schaefer (1954). El sistema de ecuaciones diferenciales de este modelo son:

$$\frac{dP}{dt} = k_1 P(L - P) - k_2 PF$$

$$\frac{dF}{dt} = k_3 F(P - N)$$

en donde P es la biomasa de la población de peces susceptible de ser capturada, F es el esfuerzo pesquero medido en alguna unidad adecuada, t es el tiempo y k_1, k_2, k_3, L, N , son constantes positivas.

Todos los ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales que representan la interacción entre dos especies, pueden considerarse como casos particulares de sistemas del tipo,

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

A este tipo de sistemas en los que las funciones f y g no dependen explícitamente del tiempo, se les llama sistemas "autónomos".

Los sistemas autónomos (y también los no autónomos) han sido estudiados con mucho detalle para encontrar métodos que saquen a la luz las propiedades cualitativas de las soluciones, sin tener que encontrarlas explícitamente resolviendo las ecuaciones, puesto que solamente existen unos cuantos tipos de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales cuya solución general pueda encontrarse por integración.

SECCION 5

ESTABILIDAD. ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES. EL PENDULO SIMPLE.

En las secciones anteriores se ha empezado el esbozo de un marco teórico necesario para comprender, aunque sea en una forma elemental, los problemas de la dinamica de poblaciones. Continuando con ese objetivo en mente, en esta seccion se comenzará a desarrollar algunos tópicos sobre la teoría de la estabilidad encaminados a contestar preguntas sobre la existencia de puntos de equilibrio en los que puedan coexistir dos poblaciones interactuantes sin peligro de extinción.

A grandes rasgos, la teoría de la estabilidad se enfrenta con el siguiente tipo de problemas:

Si $Y = Y(x)$ es la solución única de la ecuacion diferencial

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y)$$

y si dicha solución cumple con la condición $Y(x_0) = Y_0$, surge la pregunta, ¿qué sucede cuando se hacen cambios pequeños en Y_0 ? ¿se producirán cambios pequeños en $Y(x)$ en una vecindad de x_0 ? ¿cuál es el comportamiento, a largo plazo, de las soluciones perturbadas cuando la variable independiente x representa el tiempo?

Lo que interesa saber, en relación con la última pregunta, es lo siguiente:

Suponiendo que $Y'(x)$ es una solución perturbada cuyo valor en

en x_0 está cerca de Y_0 , es decir $Y'(x_0) \approx Y_0$, entonces, ¿permanecerán los valores de $Y'(x)$ cercanos a los valores de $Y(x)$, o se alejarán sin importar lo cerca de Y_0 que estuvieron en algún momento?

Para ilustrar el problema y sus posibles respuestas a las preguntas formuladas, se puede escoger como ejemplo la ecuación diferencial del crecimiento exponencial puro, es decir,

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (r > 0)$$

cuya solución única es la función,

$$N = N_0 e^{rt}$$

que cumple con la condición de que en $t_0 = 0$, $N = N_0$, o sea,

$$N(t_0) = N(0) = N_0$$

Si una perturbación, por ejemplo, un error de medición, hace que el valor de N_0 cambie una pequeña cantidad w , se tendrá la solución perturbada,

$$N'(t) = (N_0 \pm w) e^{rt}$$

que cumple la condición $N'(t_0) = N(0) = N_0 \pm w$, lo cual indica que

$$N'(t_0) \approx N(t_0)$$

para w pequeña. Para valores de $t \neq t_0$, la cercanía de la solución perturbada N' con respecto a la no perturbada N , estará dada por

$$\Delta N = N' - N$$

$$\Delta N = (N_0 \pm w) e^{rt} - N_0 e^{rt}$$

$$\Delta N = \pm w e^{rt}$$

De manera que, como se puede observar de la expresión para ΔN , a medida que el tiempo aumenta de valor, el factor e^{rt} crece y, como consecuencia, N' se aleja de N independientemente de la pe queñez de w .

Por otro lado, si en lugar de tener una perturbación en N_0 se la tuviera en r , sucedería que

$$N''(t) = N_0 e^{(r \pm w)t}$$

sería la solución perturbada y, en este caso, N'' no sólo está cerca de N en el instante $t_0 = 0$, sino que coincide con ella.

La diferencia entre N'' y N , para valores de $t \neq 0$, sería ahora

$$\Delta N = N_0 e^{rt} e^{\pm wt} - N_0 e^{rt}$$

$$\Delta N = N_0 e^{rt} (e^{\pm wt} - 1)$$

en el caso de que $w > 0$, tanto e^{rt} como e^{wt} , aumentan a medida que el valor de t aumenta y ΔN crece sin límite, y en el caso en que $w < 0$, la diferencia ΔN se puede escribir,

$$\Delta N = - N_0 e^{rt} \left(1 - \frac{1}{e^{wt}}\right)$$

y se ve que, a medida que t aumenta, los términos entre parentesis se acercan a 1, y debido al factor e^{rt} , la diferencia ΔN decrece sin limite, es decir, se hace infinita negativamente.

En conclusión, cualquier perturbación en N_0 o en r , tiene como consecuencia un alejamiento de la solución perturbada con respecto a la no perturbada. Se dice, por ello, que la solución

$$N = N_0 e^{rt}$$

es inestable.

Considerando, ahora, el decaimiento exponencial puro,

$$\frac{dN}{dt} = -rN \quad (r > 0)$$

cuya solución única es

$$N = N_0 e^{-rt}$$

se encuentra que, para una perturbación en N_0 y una perturbación en r , las diferencias respectivas entre las soluciones perturbadas y la no perturbada son,

$$N = \pm w e^{-rt}$$

$$N = N_0 e^{-rt} (e^{\pm wt} - 1)$$

las cuales se acercan asintóticamente a cero a medida que el tiempo crece. Por lo tanto, se dice que la solución

$$N = N_0 e^{-rt}$$

es asintóticamente estable.

Se entiende entonces, de acuerdo con lo que se acaba de discutir, que determinar el carácter estable o inestable de las soluciones de un modelo matemático reviste mucha importancia porque, si pequeños errores no tienen un efecto pequeño en las soluciones correspondientes del modelo, éste será incapaz de predecir correctamente el futuro del sistema físico que representa. Además, como se verá a continuación para ecuaciones diferenciales simultáneas, es importante determinar la naturaleza estable o inestable de los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones para saber, en el caso poblacional, si tras una perturbación que las saque del punto de equilibrio, las poblacio-

nes tienen la tendencia a regresar o a alejarse del punto de equilibrio.

De aquí en adelante, para tratar sistemas físicos cuyo modelaje da lugar a sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas, se utilizará algo de la notación y algunos elementos pertenecientes al análisis vectorial.

Un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden, del tipo que aparecen en los problemas de dinámica poblacional, puede representarse por la siguiente ecuación vectorial,

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}(\vec{R}) \quad \dots\dots\dots(10)$$

en donde $\vec{R} = \vec{R}(t)$ es un vector de n dimensiones cuyas componentes dependen de la variable t, es decir, \vec{R} es una función vectorial de variable real; y \vec{V} es una función, también de n dimensiones, cuyas componentes dependen de \vec{R} , es decir, \vec{V} es una función vectorial de variable vectorial. (Véase el apéndice IV, inciso (a)). Puesto que se supone que $\vec{V}(\vec{R})$ no depende explícitamente del tiempo, el sistema (10) resulta ser "autónomo" (o estacionario, como se diría en física).

Desde el punto de vista físico, un sistema de esta clase representa un campo vectorial $\vec{V}(\vec{R})$ en un espacio de n dimensiones, tal como el campo de velocidades asociado con el flujo de un fluido, de manera que una solución $\vec{R}(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales, describe el camino o trayectoria de una partícula que se mueve en el espacio n-dimensional bajo la influencia del campo y bajo ciertas condiciones iniciales (por

ejemplo, que en $t = 0$, la partícula se encontraba en el punto \bar{R}_0 del espacio n -dimensional).

En particular, los puntos en donde la \bar{V} se anula son de importancia especial porque representan puntos de equilibrio del proceso físico representado por el sistema (10). Volviendo a pensar en el campo de velocidades de un fluido, y tomando n igual a 3 (espacio común tridimensional), si $\bar{R}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto en el que \bar{V} se anula, es decir,

$$\bar{V}(\bar{R}_0) = \bar{0}$$

lo que significará que una partícula en reposo en \bar{R}_0 , permanecerá en reposo en el transcurso del tiempo y la función constante

$$\bar{R}(t) = \bar{R}_0$$

será una solución del sistema de ecuaciones diferenciales, para la cual, la trayectoria asociada se reduce a un punto. Se dice, entonces, que \bar{R}_0 es un punto crítico o de equilibrio para el sistema autónomo dado por la ecuación (10).

Al llegar a este punto del trabajo, resulta conveniente ilustrar la aparición de puntos de equilibrio en un sistema mediante un ejemplo sencillo tomado de la física: el péndulo simple. Como se sabe, se trata de una partícula de masa m sujeta a un extremo de una varilla, rígida y sin peso, que puede oscilar al rededor del otro extremo que permanece fijo, sin ningún tipo de fricción.

La fuerza neta resultante a la que está sometida la partícula resulta ser de magnitud:

$$F = mg \text{sen } \theta$$

en donde g es la intensidad del campo gravitacional terrestre y θ , el ángulo que la varilla forma con respecto a la vertical, (fig. 9)

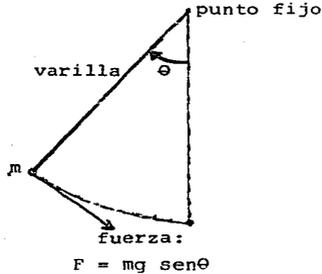


Fig. 9.- El péndulo simple.

Aplicando la 2a. ley de Newton se obtiene, para el péndulo simple, la siguiente ecuación diferencial (véase el apéndice V (a)).

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = - mg \text{sen } \theta \dots\dots\dots(11)$$

dividiendo (11) entre mL , haciendo $\frac{g}{L} = k^2$ e igualando a cero, se obtiene,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2 \text{sen } \theta = 0 \dots\dots\dots(12)$$

La ecuación diferencial (12) puede ser escrita como un sistema de 2 ecuaciones simultáneas, en términos de la velo-

ciudad angular w y del ángulo Θ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= w && \dots\dots\dots (13) \\ \frac{dw}{dt} &= -k^2 \text{sen}\Theta \end{aligned}$$

Usando la notación vectorial, se tiene un espacio de fase de 2 dimensiones, en el que la "posición" de la partícula está dada por el vector

$$\vec{R} = (\Theta, w) \dots\dots\dots (13a)$$

y el campo de "velocidades" por el vector,

$$\vec{V} = (w, -k^2 \text{sen}\Theta) \dots\dots\dots (13b)$$

Se sabe muy bien que la ecuación diferencial (12) no tiene solución exacta y, por lo tanto, tampoco la tendrá el sistema (13), sin embargo, sin resolverlo, se pueden encontrar ciertas características del sistema físico que representa (el péndulo simple) atendiendo a los puntos de equilibrio del sistema.

Por consideraciones puramente físicas, se puede establecer que los puntos de equilibrio serán aquellos en los que la fuerza neta valga cero, es decir, en donde

$$F = mg \text{sen}\Theta = 0$$

De manera que si la partícula está en reposo en esos puntos, o sea, si su $w=0$, permanecerá en reposo en todo instante. Resulta entonces que los puntos de equilibrio serán aquellos en los que

$$\begin{aligned} \text{sen}\Theta &= 0 && (\text{para que } F = 0) \\ w &= 0 \end{aligned}$$

condiciones que coinciden con la anulacion del campo de velocidades en el espacio de fase:

$$\vec{v} = (w, -k^2 \text{sen}\theta)$$

se anula precisamente cuando $w = 0$ y $\text{sen}\theta = 0$.

De acuerdo con lo anterior, los puntos de equilibrio estarán localizados en el espacio de fase en los puntos determinados por el conjunto de vectores

$$\vec{R}_n = (n\pi, 0)$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, etc. O sea que, desde el punto de vista matemático, el sistema tiene una infinidad de puntos de equilibrio.

Desde el punto de vista físico, la infinidad de puntos de equilibrio corresponden a solamente 2 posiciones del péndulo: la partícula de masa m colocada verticalmente debajo, o en cima, del punto de suspensión, (fig.10)

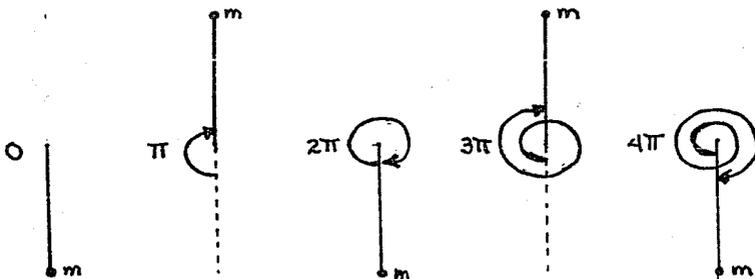


Fig. 10.- Puntos de equilibrio del péndulo simple.

Resulta obvio, entonces, que existirán puntos de equilibrio estable e inestable. Los primeros serán aquellos para los cuales

$$\Theta = 2n\pi$$

y los últimos aquellos en los que,

$$\Theta = (2n+1)\pi$$

con n en el conjunto de los números enteros.

Lo que resulta evidente desde el punto de vista físico debe poder demostrarse desde el punto de vista matemático. Para lograr esto último, se pueden utilizar las trayectorias en el plano de fase $\Theta - w$, obtenidas a partir del sistema (13).

Utilizando la relación, dada por la regla de la cadena,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{d\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = \left(\frac{dw}{d\Theta}\right)(w)$$

la ecuación diferencial

$$\frac{dw}{dt} = -k^2 \operatorname{sen}\Theta$$

se puede escribir,

$$w \frac{dw}{d\Theta} = -k^2 \operatorname{sen}\Theta$$

de la cual se obtiene,

$$w dw = -k^2 \operatorname{sen}\Theta d\Theta$$

e integrando,

$$w^2 = 2k^2 \cos\Theta + C \dots\dots\dots (14)$$

Esta relación (14) no cambia cuando se sustituye la w por -w, tampoco cambia si se sustituye la Θ por $-\Theta$, y tampoco cambia si, simultáneamente, se sustituye la w por -w y la Θ por $-\Theta$. Esto

significa que las trayectorias definidas por (14) deben ser simétricas con respecto al eje w , al eje θ y al origen, en el plano de fase θ - w .

Para analizar la naturaleza de los puntos de equilibrio, con respecto a su estabilidad o inestabilidad, se deben considerar 2 casos: (a) cuando la constante de integración, en la relación (14), es $C = -2k^2$, y (b), cuando dicha constante es $C = 2k^2$.

Caso (a).

En este caso, la ecuación de la trayectoria queda

$$\begin{aligned}w^2 &= 2k^2 \cos\theta - 2k^2 \\w^2 &= 2k^2 (\cos\theta - 1) \quad \dots\dots\dots(15)\end{aligned}$$

Los únicos valores que satisfacen (15), en el conjunto de los números reales, son $(\theta=0, w=0)$, $(\theta=2\pi, w=0)$, $(\theta=4\pi, w=0)$, $(\theta=6\pi, w=0)$, etc. Es decir, parejas de valores de la forma $(2n\pi, 0)$ del plano θ - w . Cualquier otro valor de θ que no sea de la forma $2n\pi$, causa que $\cos\theta < 1$ y que w no tenga valor real. Por lo tanto, la trayectoria dada por (15) se reduce a los puntos aislados de equilibrio de la forma $(2n\pi, 0)$, para n en el conjunto de los enteros.

Ahora vamos a considerar trayectorias cercanas a dichos puntos de equilibrio. Para ello, se puede modificar la relación (15), agregando a la constante de integración una pequeña cantidad e^2 . Es decir, hacemos $C = -2k^2 + e^2$, en la fórmula general (14). Resulta

$$w^2 = 2k^2 (\cos\theta - 1) + e^2$$

$$w^2 = -2k^2(1 - \cos\theta) + e^2$$

$$w^2 + 2k^2(1 - \cos\theta) = e^2$$

$$\frac{w^2}{e^2} + \frac{(1 - \cos\theta)}{e^2/2k^2} = 1$$

y usando la identidad trigonométrica $1 - \cos\theta = 2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)$ queda

$$\frac{w^2}{e^2} + \frac{\operatorname{sen}^2(\theta/2)}{(e/2k)^2} = 1 \quad \dots\dots\dots(16)$$

La ecuación (16) representa trayectorias elipsoidales, centradas en los puntos de equilibrio de la forma $(2n\pi, 0)$, con sus ejes paralelos a los ejes coordenados θ y w , y que se extienden desde $\theta_0 = -2 \operatorname{ang} \operatorname{sen}(e/2k)$ hasta $\theta_0 = 2 \operatorname{ang} \operatorname{sen}(e/2k)$ en el eje horizontal y desde $w = -e$ hasta $w = e$, en el eje vertical, (fig.11)

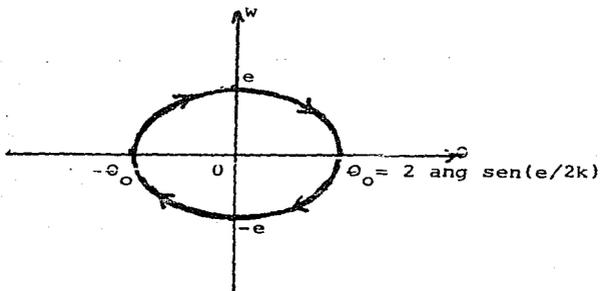


Fig. 11.- Trayectoria en el plano de fase θ - w , para el péndulo simple, centrada en punto de equilibrio $(0,0)$. $e^2 < 4k^2$.

En la fig. 11, se hace patente la manera en la que el valor de e determina la cercanía de la trayectoria con respecto al punto de equilibrio; si una trayectoria se inicia en un punto cercano al punto de equilibrio, permanecerá siempre cerca de éste. Dicho comportamiento tiene lugar en todos los puntos de equilibrio de la forma $(2n\pi, 0)$.

Las puntas de flecha sobre la trayectoria dibujada en la fig. 11 indican su desarrollo en el transcurso del tiempo. Cada cuarto de elipse corresponde a un cuarto de oscilación del péndulo:

Comenzando en el cuadrante IV con $\theta = \theta_0$ y $w = 0$

1er. cuarto de oscilación, $\theta_0 \geq \theta > 0$; $-e < w \leq 0$

Se pasa al cuadrante III,

2o. cuarto de oscilación, $-\theta_0 \leq \theta < 0$; $0 > w \geq -e$

Se pasa al cuadrante II,

3er. cuarto de oscilación, $0 > \theta \geq -\theta_0$; $0 \leq w < e$

Se pasa al cuadrante I ,

4o. cuarto de oscilación , $0 \leq \theta < \theta_0$; $e \geq w > 0$

Este tipo de trayectoria está restringido por el valor de e ; ya que para que exista $\theta_0 = 2 \arcsin(e/2k)$, se tiene que cumplir

$$e \leq 2k$$

esta condición se expresa mejor con la siguiente desigualdad

$$e^2 \leq 4k^2$$

recordando que empezamos esta discusión haciendo que la constante de integración de la ecuación (14) fuera

$$c = -2k^2 + e^2$$

Caso (b).

Para este caso hacemos $C = 2k^2$ en la ecuación (14). Resulta

$$w^2 = 2k^2 \cos\theta + 2k^2$$

$$w^2 = 2k^2(\cos\theta + 1) \dots\dots\dots (17)$$

En este caso para valores de θ de la forma $\theta = (2n+1)\pi$ obtenemos $w = 0$. Sólo que ahora las trayectorias no se reducen a un punto porque para $\theta \neq (2n+1)\pi$ existen valores reales de w .

La forma de la trayectoria se vislumbra mejor, si la ecuación (17) se pasa a la forma elipsoidal. Esto se logra quitando y añadiendo $2k^2$, es decir,

$$w^2 = 2k^2(\cos\theta + 1) - 2k^2 + 2k^2$$

$$w^2 = -2k^2(1 - \cos\theta) + 4k^2$$

$$w^2 + 2k^2(1 - \cos\theta) = 4k^2$$

$$\frac{w^2}{4k^2} + \frac{1 - \cos\theta}{2} = 1$$

y usando la misma identidad trigonométrica para $1 - \cos\theta$ que se utilizó en el caso (a), resulta

$$\frac{w^2}{4k^2} + \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{1} = 1 \dots\dots\dots (18)$$

La ecuación (18) no es otra cosa más que la ecuación (17) para el caso $e^2 = 4k^2$, o sea, $e = \pm 2k$.

Para la trayectoria dada por (18), la w varía desde $-2k^2$ hasta $2k^2$ y el ángulo θ desde $-\infty$ hasta $+\infty$, en forma continua.

En la fig. 12 se muestra parte de la trayectoria para el intervalo de valores de θ comprendido entre $-\pi$ y π . Se puede notar que la pendiente de la tangente en los puntos de equilibrio no

es infinita, es decir, la tangente no es vertical en esos puntos en los que $w = 0$. (Véase el apéndice V (B)).

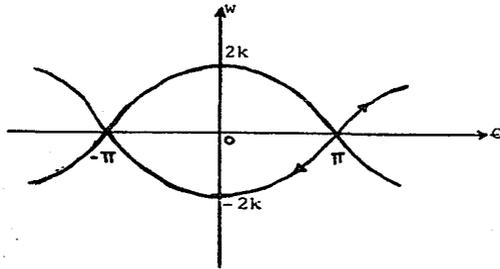


Fig. 12. Trayectoria en el plano de fase Θ - w , para el péndulo simple, en el caso $e^2 = 4k^2$.

Se observa en la fig. 12 que la trayectoria se aleja del punto de equilibrio $(\pi, 0)$ del plano de fase. Si el péndulo se encuentra en reposo en dicho punto, cualquier perturbación lo aleja girando en el mismo sentido de las manecillas del reloj (trayectoria que se aleja de π por encima del eje Θ) o en sentido contrario (trayectoria que se aleja de π por debajo del eje Θ)

En resumen, como consecuencia del análisis de las trayectorias que acaba de hacerse, se ha demostrado matemáticamente que los puntos de equilibrio de la forma $(2n\pi, 0)$ son de equilibrio estable, mientras que los de la forma $((2n+1)\pi, 0)$ son de equilibrio inestable.

Para terminar de analizar el caso del péndulo simple hay que considerar la situación en la que w nunca se anula.

Si la constante de integración en la ecuación (14) se hace

$$C = 2k^2 + d^2$$

resulta la trayectoria

$$w^2 = 2k^2 \cos \theta + 2k^2 + d^2 \dots\dots\dots(19)$$

Procediendo en forma similar a lo que se hizo para pasar de la ecuación (17) a la (18), la ecuación (19) se puede escribir,

$$\frac{w^2 - d^2}{4k^2} + \frac{\cos^2(\theta/2)}{1} = 1 \dots\dots\dots(20)$$

La ecuación (20) representa trayectorias abiertas (fig.13) que corresponden al caso físico en el cual el péndulo tiene suficiente energía para girar continuamente en un sólo sentido.

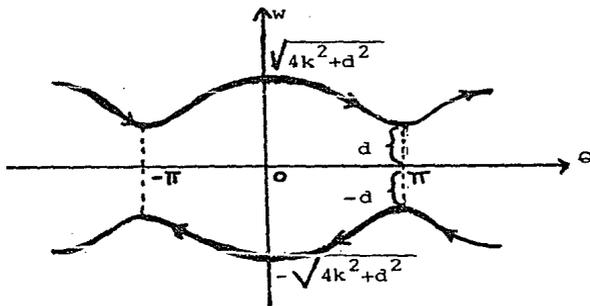


Fig. 13.- Trayectorias en el plano de fase θ - w , para el péndulo simple en movimiento circular.

En este caso, la d mide la cercanía de la trayectoria a los puntos de equilibrio inestable $((2n+1)\pi, 0)$. La figura 14 se muestran todos los tipos de trayectorias discutidos. En esta figura se ob-

serva como, alrededor de cada punto de la forma $(2n\pi, 0)$ existe una región (área sombreada) con la propiedad de que cualquier trayectoria que empiece dentro de ella, permanece dentro de

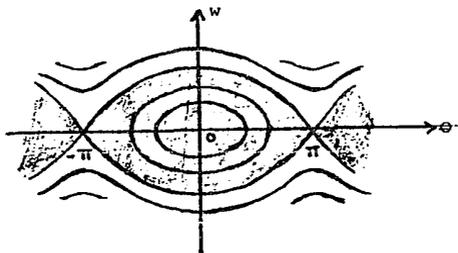


Fig. 14.- Características de los puntos de equilibrio estable e inestables con relación a las trayectorias en el espacio de fase θ - w .

ella. Esta propiedad es la que califica a los puntos de la forma $(2n\pi, 0)$ como puntos de equilibrio estable. Físicamente significa que el péndulo oscila a uno y otro lado en esos puntos. Por otro lado, alrededor de los puntos de equilibrio de la forma $((2n+1)\pi, 0)$ no existe ninguna región que cumpla con la propiedad mencionada; cualquier región alrededor de ellos contendrá trayectorias que irremediablemente se saldrán de ella. En consecuencia, los puntos de la forma $((2n+1)\pi, 0)$, son puntos de equilibrio inestable.

Además, es fácil darse cuenta que, la presencia de fuerzas de amortiguamiento, no alteran en nada la localización de los puntos de equilibrio, ni su estabilidad o inestabilidad,

y que, aunque las matemáticas involucradas sean más complicadas, se puede asegurar que las trayectorias cercanas a los puntos de equilibrio estable deberán ser espirales que reflejen el amortiguamiento de las oscilaciones, (fig. 15).

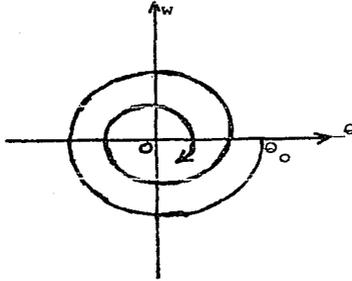


Fig. 15.- Trayectoria en el plano de fase θ - w , de un péndulo amortiguado.

En este caso se dice que el punto, por ejemplo, el origen, es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

En las siguientes secciones se estudiarán otros métodos para discriminar entre puntos de equilibrio de estabilidad neutra, asintóticamente estables e inestables.

SECCION 6

LA ENERGIA MECANICA EN EL PENDULO SIMPLE. LA ESTABILIDAD Y LA FUNCION DE LIAPUNOV. FUNCION DE LIAPUNOV PARA CASOS REDUCIBLES A UN CAMPO DE FUERZA CONSERVATIVO.

Muchas de las características del movimiento del pendulo simple, así como para muchos otros sistemas físicos, se pueden estudiar a través de la energía mecánica.

Resulta importante mencionar lo anterior, porque, como se verá más adelante, sugiere un método para determinar el comportamiento de las trayectorias del sistema autónomo,

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{V}(\bar{R})$$

en una vecindad del origen, cuando éste es un punto de equilibrio, es decir, cuando se cumple: $\bar{V}(\bar{0}) = \bar{0}$.

La energía mecánica del péndulo simple esta dada por

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + mgL(1 - \cos\theta)$$

(Véase apéndice V (C)). O también por

$$E = \frac{1}{2}mw^2L^2 + mgL(1 - \cos\theta) \dots\dots(21)$$

En donde, como se dijo en la seccion anterior, L es la longitud de la varilla; θ , el ángulo que la varilla forma con la vertical; w, la velocidad angular; m, la masa de la partícula que oscila sujeta al extremo de la varilla; y g, la intensidad del campo

gravitacional terrestre.

La energía E , llamada la energía total del sistema, es esta compuesta por la energía cinética,

$$E_c = \frac{mw^2L^2}{2}$$

y por la energía potencial gravitacional,

$$U = mgL(1 - \cos\theta)$$

de manera que

$$E = E_c + U$$

y se sabe que E es una constante del movimiento.

Atendiendo a la grafica de U vs. θ , se pueden hacer algunas consideraciones sobre la naturaleza del movimiento del del péndulo, (fig. 16).

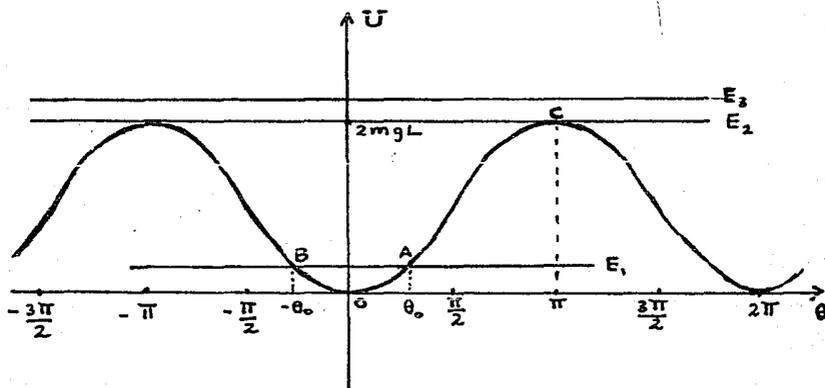


Fig. 16.- Energía potencial del pendulo simple.

En la fig. 16 se puede ver que los puntos de equilibrio estable son aquellos para los cuales la energía potencial U tiene un mínimo. La energía total del péndulo, siendo constante, se puede representar en la misma gráfica mediante líneas horizontales.

En los puntos en donde la línea horizontal de la energía total corta a la línea ondulada de la energía potencial, es decir, los puntos en donde $E = U$, la energía cinética de la partícula es cero y debe quedar en reposo (instantáneamente). Dichos puntos son puntos de retorno. Por ejemplo, si la energía total del sistema pendular es E_1 ($E_1 < 2mgL$), los puntos A y B mostrados en la fig. 16, son puntos de retorno; con esa energía total el péndulo estará oscilando a uno y otro lado del punto de equilibrio, en este caso el origen, con el ángulo θ variando desde θ_0 hasta $-\theta_0$.

De acuerdo con lo anterior, si la partícula se encontrara en reposo en el origen y una pequeña perturbación lo alejara de él, quedaría oscilando en el fondo del valle de potencial centrado en el origen, o sea, que habrá tendencia a regresar al punto de equilibrio. Es evidente que lo mismo sucederá en los otros puntos que corresponden a los valles de la curva de energía potencial. Son puntos de equilibrio estable.

Por otro lado, si la partícula quedara en reposo en una cresta de energía potencial, por ejemplo en el punto C (ver fig. 16), es decir si la energía total de la partícula fuera E_2 ($E_2 = 2mgL$), cualquier pequeña perturbación la haría caer cuesta abajo, ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda del punto de equilibrio en el que $\theta = \pi$, alejándose de él.

Por último, si la energía total de la partícula de ma sa m es mayor que $2mgL$, como la E_3 en la fig. 16, no existen puntos en los que la energía cinética pueda ser cero. Esto significa que el péndulo girará en un sólo sentido con movimiento circular.

De manera que, haciendo el análisis energético anterior, se pudo obtener la misma información que en la última sección con relación a los puntos de equilibrio del péndulo. Haciendo un poco de trabajo matemático se puede ver la relación entre las órbitas encontradas en el espacio de fase $\theta-w$ y la energía mecánica E .

Considerando a la energía E como una función de θ y de w , es decir,

$$E = E(\theta, w)$$

su diferencial se escribe, (véase el apéndice IV(B)),

$$dE = \frac{\partial E}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial E}{\partial w} dw$$

y si θ y w son funciones de la variable t , entonces

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial E}{\partial w} \frac{dw}{dt}$$

Utilizando notación vectorial la derivada $\frac{dE}{dt}$ se puede expresar como

$$\frac{dE}{dt} = \nabla E \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}, \frac{dw}{dt} \right)$$

$$\frac{dE}{dt} = \nabla E \cdot \frac{d}{dt}(\theta, w)$$

$$\frac{dE}{dt} = \nabla E \cdot \frac{d\bar{R}}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = \nabla E \cdot \bar{V}$$

de acuerdo con las expresiones (13), (13a) y (13b) de la sección 5 de este trabajo.

Para la función $E(\theta, w) = \frac{mw^2 L^2}{2} + mgL(1 - \cos\theta)$, resulta

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = mgL \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial E}{\partial w} = mwL^2$$

por lo que,

$$\nabla E = (mgL \operatorname{sen}\theta, mwL^2)$$

y, de acuerdo con la expresión (13b),

$$\bar{V} = (w, -k^2 \operatorname{sen}\theta)$$

$$\bar{V} = (w, -\frac{g}{L} \operatorname{sen}\theta)$$

de lo cual se obtiene que,

$$\frac{dE}{dt} = \nabla E \cdot \bar{V} = (mgL \operatorname{sen}\theta, mwL^2) \cdot (w, -\frac{g}{L} \operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{dE}{dt} = mgLw \operatorname{sen}\theta - mgLw \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

(Este es un resultado esperado puesto que, como se sabe, la E es una constante).

El resultado obtenido nos dice que los vectores ∇E y \bar{V} son perpendiculares entre sí. (Véase apéndice IV(C)).

Por otro lado, la expresión para la energía se puede escribir,

$$\frac{2E}{mgL^2} = w^2 + \frac{2g}{L} (1 - \cos\theta)$$

$$w^2 = 2k^2 \cos \theta + \frac{2E}{mgL^2} - \frac{2g}{L}$$

$$w^2 = 2k^2 \cos \theta + C$$

en donde $k^2 = g/L$ y $C = (2E/mgL^2) - (2g/L)$, resultando ser la misma ecuación que la (14) encontrada en la sección 5.

De manera que la función $E(\theta, w)$ para el péndulo define las mismas trayectorias cuando

$$E(\theta, w) = \text{constante}$$

y representan curvas de nivel en la superficie tridimensional

$$E = E(\theta, w)$$

Además, puesto que el vector $\bar{v} = \frac{d\bar{R}}{dt}$ es tangente a las trayectorias (si se piensa en el espacio real físico, con \bar{R} representando la posición de una partícula, entonces \bar{v} , la velocidad, siempre es tangente a la trayectoria de la partícula) el resultado

$$\nabla E \cdot \bar{v} = 0$$

indica que ∇E es perpendicular a las trayectorias. (Fig. 17)

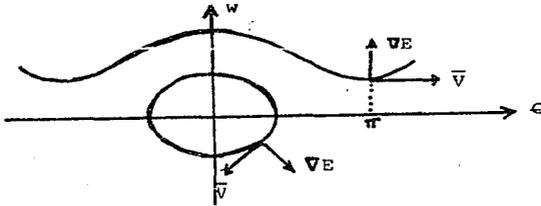


Fig. 17.- Dirección de los vectores ∇E y \bar{v} con respecto a las trayectorias del péndulo simple en el plano de fase θ - w .

En la fig. 17, los vectores ∇E y \bar{V} están bosquejados de acuerdo con el signo que sus componentes tienen en el cuadrante en donde se dibujaron, sin embargo, su magnitud o longitud de la flecha no está a escala.

Supongamos, ahora, que un sistema autónomo plano

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{V}(\bar{R}) ; \bar{R} = (x, y)$$

(diferente al péndulo), que satisface la condición,

$$\bar{V}(\bar{0}) = \bar{0}$$

o sea, que el origen es un punto de equilibrio, tiene trayectorias definidas por una función,

$$f(\bar{R}) = f(x, y) = C \text{ (constante)}$$

y que, además existe para este sistema otra función $E(\bar{R})$, que define trayectorias

$$E(\bar{R}) = k \text{ (constante)}$$

alrededor del origen, diferentes a las definidas por $f(\bar{R})$; entonces, si los vectores ∇E y V , forman un ángulo obtuso en los lugares en donde se cruzan los dos tipos de trayectorias, se tendrá que

$$\frac{dE}{dt} = \nabla E \cdot \bar{V} < 0$$

Y si pensamos en E como una función de energía, físicamente significará, que cuando una partícula moviéndose a lo largo de la trayectoria $f(\bar{R}) = C$, penetra en la región interior de la curva $E(\bar{R}) = k$, está disipando energía ($\frac{dE}{dt} < 0$) y no podrá escapar de dicha región y, en consecuencia, el origen será un punto de equilibrio estable.

Con un ejemplo matematico sencillo se pueden ilustrar las ideas anteriores. Considerando el sistema autonomo lineal en el que $\bar{V}(\bar{R}) = - (ax, by)$, o sea,

$$\frac{d}{dt}(x, y) = -(ax, by) \quad (a > 0, b > 0)$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = -ax, \quad \frac{dy}{dt} = -by$$

vemos que las trayectorias estan definidas por la condición

$$\frac{dy}{dx} = (dy/dt)/(dx/dt) = \frac{by}{ax}$$
$$a \frac{dy}{y} = b \frac{dx}{x}$$

integrando se obtiene

$$a \ln y = b \ln x + C'$$

$$\ln y^a - \ln x^b = C'$$

$$\ln \frac{y^a}{x^b} = C'$$

$$\frac{y^a}{x^b} = e^{C'} = c$$

Tenemos, en este ejemplo, que las trayectorias del sistema estan definidas por la funcion

$$f(\bar{R}) = c$$

siendo la funcion

$$f(\bar{R}) = \frac{y^a}{x^b}$$

Por otro lado consideremos la función "energía"

$$E(\bar{R}) = (x^2/a) + (y^2/b)$$

De manera que la ecuacion,

$$\overline{E}(\overline{R}) = k$$

define las trayectorias,

$$\frac{x^2}{b} + \frac{y^2}{a} = k$$

que son elipses centradas en el origen (punto de equilibrio).

Definidas así las funciones involucradas en el problema, resulta que,

$$\nabla E = \left(\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial y} \right) = \left(\frac{2x}{a}, \frac{2y}{b} \right)$$

$$\nabla E \cdot \overline{V} = \left(\frac{2x}{a}, \frac{2y}{b} \right) \cdot (-ax, -ay)$$

$$= -2(x^2 + y^2)$$

cantidad que siempre es negativa (cuando $x \neq 0$, $y \neq 0$) y, por lo tanto

$$\frac{dE}{dt} < 0$$

y se concluye que el origen es un punto de equilibrio estable.

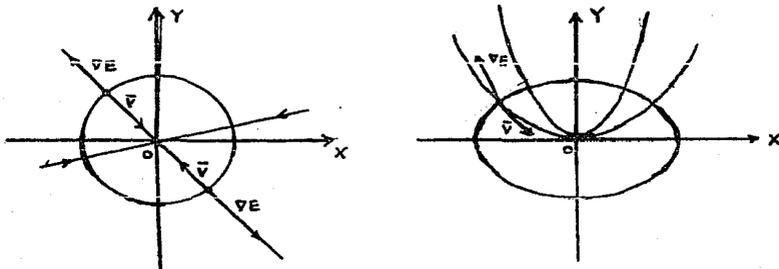


Fig. 18.- Trayectorias $(y^a/x^b)=C$; $((x^2/b)+(y^2/a))=k$ para $a = b = 1$ (rectas y circunferencia) y para $a = 1, b = 2$ (parabolas y elipse), respectivamente.

En la figura 18 se muestran las trayectorias correspondientes a los casos en los que $a = b = 1$ y $a = 1, b = 2$ en las ecuaciones

$$\frac{y^a}{x^b} = C, \text{ y } \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = k \quad (k > 0)$$

En el primer caso resultan las ecuaciones

$$y = Cx, \text{ y } x^2 + y^2 = k$$

que representan una familia de rectas y una familia de circunferencias, respectivamente. En el segundo caso, resultan,

$$y = Cx^2, \text{ y } \frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{(2/k)} = 1$$

que representan una familia de parábolas y una familia de elipses ($C > 0, k > 0$, en la fig. 18), respectivamente).

En el caso de las rectas y circunferencias, los vectores ∇E y \bar{V} , forman un ángulo de 180° y en el caso de las parábolas y las elipses puede verse que el ángulo es obtuso.

La existencia de funciones $E(\bar{R})$ para determinar la estabilidad o inestabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo constituye el tema central de la teoría de la estabilidad desarrollada por el matemático ruso A.A. Liapunov. En el ejemplo discutido, se dice que la función

$$E(\bar{R}) = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$$

es una función de Liapunov para para el sistema autónomo,

$$\frac{d}{dt} (x, y) = - (ax, by)$$

En general, para un sistema autónomo, de cualquier número de dimensiones,

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{V}(\bar{R}) ; \bar{V}(\bar{0}) = \bar{0}$$

se busca una función, positivamente definida, $E(\bar{R})$, es decir que cumpla con

$$E(\bar{R}) \geq 0$$

en una región D del espacio definido por \bar{V} que contenga al origen, y que

$$E(\bar{R}) = 0$$

sólo si $\bar{R} = \bar{0}$, entonces, si

$$\nabla E \cdot \bar{V} = \frac{dE}{dt} \leq 0$$

en todos los puntos de la región D, se dice que $E(\bar{R})$ es una función de Liapunov para el sistema autónomo. (Se requiere también que \bar{E} y \bar{V} tengan primeras derivadas parciales continuas en D).

Como consecuencia de lo anterior, se tiene el importante,

TEOREMA: El origen es un punto de equilibrio estable para el sistema autónomo,

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{V}(\bar{R}) ; \bar{V}(\bar{0}) = \bar{0}$$

si existe una función de Liapunov para el sistema.

En la siguiente sección se verá la manera de construir una función de Liapunov para un sistema lineal dado para después aplicarla a sistemas no lineales, sin embargo, resulta conveniente saber que si el sistema autónomo se puede reducir a un sistema físico conservativo, la función de Liapunov es mucho más fácil de construir.

Interpretando la \bar{R} como el vector de posición de una partícula y \bar{V} como la velocidad en un espacio de 2 dimensiones el sistema,

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{V}$$

se puede completar, derivando otra vez con respecto al tiempo, para que aparezca un campo de fuerza, es decir,

$$m \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} = m \frac{d\bar{V}}{dt} = m \bar{A} = \bar{F}$$

siendo m, la masa de la partícula, \bar{A} , la aceleración y \bar{F} , la fuerza, o mejor dicho, el campo de fuerza.

Si la función $\bar{V}(\bar{R})$ tiene como funciones componentes ($f_1(\bar{R}), f_2(\bar{R})$) las componentes del campo de fuerza serán

$$\begin{aligned} F_x &= m A_x = \left(\frac{df_1}{dt}\right)m & \dots\dots\dots(22) \\ F_y &= m A_y = \left(\frac{df_2}{dt}\right)m \end{aligned}$$

Para que el campo sea conservativo, el trabajo para desplazar a la partícula debe ser independiente de la trayectoria, es decir

$$W = \int_{\bar{R}_1}^{\bar{R}_2} \bar{F} \cdot d\bar{R} = \int dU = U_2 - U_1 \dots\dots(23)$$

debe existir una función $U(\bar{R})$, tal que, al desplazar a la partícula desde la posición \bar{R}_1 hasta la posición \bar{R}_2 , el trabajo realizado solamente dependa del valor de U en \bar{R}_1 y del valor de U en \bar{R}_2 , de manera que

$$W = U(\bar{R}_2) - U(\bar{R}_1) = U_2 - U_1$$

En la expresión (23) se observa que para que esto suceda debe cumplirse que

$$\bar{F} \cdot d\bar{R} = dU \dots\dots\dots(24)$$

y, tomando en cuenta (22),

$$m(A_x, A_y) \cdot (dx, dy) = m\left(\frac{df_1}{dt}, \frac{df_2}{dt}\right) \cdot (dx, dy) = du$$

$$\frac{df_1}{dt} dx + \frac{df_2}{dt} dy = du \quad \dots\dots\dots(25)$$

en donde $(dx, dy) = d\bar{R}$ y $u = U/m$.

Por otra lado, para una función $u(\bar{R}) = u(x, y)$ la diferencial es

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du \quad \dots\dots\dots(26)$$

de donde resulta, comparando (25) con (26),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df_1}{dt} ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df_2}{dt} \quad \dots\dots\dots(27)$$

puesto que (x, y) son variables independientes.

La pareja de ecuaciones (27), da lugar a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) f_1 dt = f_1 df_1 ; \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) f_2 dt = f_2 df_2 \quad \dots\dots\dots(28)$$

pero, de acuerdo con el sistema del cual se partió,

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{V}$$

$$\frac{d(x, y)}{dt} = (f_1, f_2)$$

de donde

$$\frac{dx}{dt} = f_1 ; dx = f_1 dt \quad \dots\dots\dots(29)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2 ; dy = f_2 dt$$

la pareja (28) puede escribirse, (tomando en cuenta (29)),

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx = f_1 df_1 ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} dy = f_2 df_2 \quad \dots\dots\dots(30)$$

Entonces, sumando las expresiones dadas por (30), resulta

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = f_1 df_1 + f_2 df_2$$

de donde, de acuerdo con (26),

$$\begin{aligned} du &= f_1 df_1 + f_2 df_2 \\ \int du &= \int f_1 df_1 + \int f_2 df_2 \\ u &= \frac{1}{2} (f_1^2 + f_2^2) \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

Habiendo encontrado la expresión (31), se pueden reescribir las ecuaciones de la pareja (27) como,

$$f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) f_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) f_2$$

$$f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) f_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right) f_2$$

respectivamente, y de donde se encuentra la igualdad

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} \dots\dots\dots(32)$$

Esta es la condición que debe cumplir el campo de velocidades

$\vec{v} = (f_1, f_2)$ para que exista la función U.

Por último, realizando el producto escalar

$$\nabla U \cdot \vec{v}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla U \cdot \vec{v} &= \left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \cdot (f_1, f_2) \\ &= f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1 f_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) + f_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{aligned}$$

expresión que, de acuerdo con (32), queda

$$\nabla u \cdot \bar{V} = f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial x} + 2f_1 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + f_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

de aquí resulta que, si se cumple.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \leq 0 ; f_1 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \leq 0 ; \frac{\partial f_2}{\partial y} \leq 0 \dots\dots(33)$$

el producto escalar

$$\nabla u \cdot V = \frac{du}{dt} \leq 0$$

y la función u es una función de Liapunov para el sistema autónomo.

El sistema autónomo del último ejemplo

$$\frac{d}{dt}(x, y) = -(ax, by)$$

para el que

$$f_1 = -ax ; f_2 = -by$$

cumple con las condiciones (32) y (33) y, por lo tanto, la función

$$u = \frac{1}{2}(a^2 x^2 + b^2 y^2)$$

es una función de Liapunov para dicho sistema.

SECCION 7

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES. ESTABILIDAD EN EL ORIGEN. CONSTRUCCION DE LA FUNCION DE LIAPUNOV PARA SISTEMAS LINEALES. MOVIMIENTO ARMONICO AMORTIGUADO.

Un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, con n variables, se escribe en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \dots (34)$$

en donde $x_1', x_2', x_3', \dots, x_n'$ son las derivadas con respecto al tiempo de las variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, respectivamente.

Si se denota por \bar{R} el vector de n dimensiones cuyas componentes son las x , y por \bar{R}' , el vector cuyas componentes son las derivadas x' , se puede escribir en forma compacta,

$$\bar{R}' = A\bar{R}$$

Se nota que \bar{R}' y \bar{R} son vectores cuyas componentes se escribieron en forma de columna y no en forma de renglón como usualmente se hace, y que A es el arreglo de coeficientes a_{ij} , siendo i el número de renglón y j , el número de columna. La expresión (34) explícitamente quiere decir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{d}{dt} x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ \frac{d}{dt} x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

La solución general de este sistema de ecuaciones diferenciales lineales en el que las a_{ij} son coeficientes constantes, es de la forma

$$\bar{R}(t) = c_1 \bar{X}_1 + c_2 \bar{X}_2 + c_3 \bar{X}_3 + \dots + c_n \bar{X}_n \quad (35)$$

en donde las funciones vectoriales \bar{X} son soluciones particulares que cumplen con la igualdad

$$\bar{X}'_{r(n)} = \bar{E}_{r(n)} e^{r(n)t} \dots \dots \dots (36)$$

y que se obtienen buscando los valores propios $r(n)$ de la matriz A de los coeficientes y los vectores propios $\bar{E}_{r(n)}$ correspondientes y que, por su parte, deben cumplir con

$$A \bar{E}_{r(n)} = r(n) \bar{E}_{r(n)} \dots \dots \dots (37)$$

(VEASE EL APENDICE VI). El número n , en $r(n)$ indica el orden en el que, arbitrariamente se colocan los valores r , es decir, $r(1)$ es la primera raíz encontrada, $r(2)$ la segunda, etc. Y $\bar{E}_{r(1)}$ significa el vector propio correspondiente a $r(1)$, $\bar{E}_{r(2)}$ es el vector propio correspondiente a $r(2)$, etc.

Si un valor propio o raíz característica tiene una multiplicidad

m, es decir, que se considera repetida m veces, entonces, suponiendo que se trata de la raíz número k, la expresión correspondiente a (36) será

$$\bar{X}_{r(k)} = \bar{E}_{r(k)} (c'_k + c'_{k+1}t + c'_{k+2}t^2 + \dots + c'_{k+m-1}t^{m-1}) e^{r(k)t}$$

por lo que cuenta por m términos en la solución general (35).

Escrita en una forma más explícita, la solución general (35) queda

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ x_{3n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

Y si $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \dots, \hat{u}_n$ son los vectores unitarios ortogonales del espacio vectorial n-dimensional, también se puede escribir

$$\bar{R}(t) = (c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \dots + c_n x_{1n}) \hat{u}_1 + (c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \dots + c_n x_{2n}) \hat{u}_2 + \dots + (c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \dots + c_n x_{nn}) \hat{u}_n$$

La parte temporal de cada x_{ij} de la última expresión es de la forma

$$e^{r(j)t}$$

o si la raíz tiene multiplicidad diferente de 1, de la forma

$$t^m e^{r(j)t}$$

de manera que en el instante $t = 0$, dicha parte temporal es igual a 1 ó a 0, resultando que

$$\bar{R}(0) = (b_{11}c_1 + b_{12}c_2 + \dots + b_{1n}c_n)\hat{u}_1 + (b_{21}c_1 + b_{22}c_2 + \dots + b_{2n}c_n)\hat{u}_2 + \dots + (b_{n1}c_1 + b_{n2}c_2 + \dots + b_{nn}c_n)\hat{u}_n \quad \dots(38)$$

en donde los números representados por las b, estan determinados por las componentes de los vectores propios y las c, son constantes por determinar.

Por lo tanto, de (38) se pueden construir soluciones $\bar{R}(t; \hat{u}_i)$ que satisfagan la condición inicial

$$\bar{R}(0; \hat{u}_i) = \hat{u}_i \quad \dots\dots\dots (39)$$

con sólo obligar al coeficiente de la \hat{u}_i correspondiente a que tome el valor 1 y a todos los demás coeficientes de los restantes vectores unitarios a que tomen el valor cero, lo que dará lugar a un sistema de ecuaciones simultáneas que servirán para determinar el valor de las constantes c_1, c_2, \dots, c_n , que hagan que se cumpla (39). Es decir, para construir la solución $\bar{R}(t; \hat{u}_2)$ se debe determinar el valor de las constantes c, de manera que el coeficiente de \hat{u}_2 en (38) sea igual a 1,

$$b_{21}c_1 + b_{22}c_2 + \dots + b_{2n}c_n = 1$$

y todos los demas sean cero,

$$b_{11}c_1 + b_{12}c_2 + \dots + b_{1n}c_n = 0$$

$$b_{31}c_1 + b_{32}c_2 + \dots + b_{3n}c_n = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$b_{j1}c_1 + b_{j2}c_2 + \dots + b_{jn}c_n = 0$$

para toda $j \neq 2$, siendo j un número natural menor o igual que n.

Luego se repite este proceso para cada uno de los vectores unitarios y se van contruyendo las funciones: $\bar{R}(t; \hat{u}_1), \bar{R}(t; \hat{u}_2), \dots, \bar{R}(t; \hat{u}_n)$ sustituyendo en la ecuacion general (35), los valores correspondientes de las constantes c, determinadas para cada caso.

Una vez que se tienen contruidas las funciones $\bar{R}(t; \hat{u}_1)$, para cualquier vector n-dimensional $\bar{H} = h_1 \hat{u}_1 + h_2 \hat{u}_2 + \dots + h_n \hat{u}_n$, la función

$$\bar{R}(t; \bar{H}) = h_1 \bar{R}(t; \hat{u}_1) + h_2 \bar{R}(t; \hat{u}_2) + \dots + h_n \bar{R}(t; \hat{u}_n) \quad (40)$$

cumplirá con la condicion inicial

$$\bar{R}(0; \bar{H}) = \bar{H}$$

Ahora se puede dar una receta para contruir una función de Liapunov para un sistema lineal de ecuaciones diferenciales. La receta es el contenido del siguiente,

TEOREMA.

Dada la solución

$$\bar{R}(t; \bar{H}) = h_1 \bar{R}(t; u_1) + h_2 \bar{R}(t; u_2) + \dots + h_n \bar{R}(t; u_n),$$

del sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\bar{R}' = A\bar{R}$$

que cumple con la condicion inicial

$$\bar{R}(0; \bar{H}) = \bar{H}$$

para cualquier vector $\bar{H} = h_1 u_1 + h_2 u_2 + \dots + h_n u_n$, contrúyase la función

$$E(\bar{H}) = \int_0^{\infty} |\bar{R}(t; \bar{H})|^2 dt \quad \dots \dots \dots (41)$$

La función $E(\bar{H})$ resulta ser una función de Liapunov del sistema de ecuaciones diferenciales lineales, en una región alrededor del origen ($\bar{R} = \bar{0}$) y su existencia asegura la estabilidad de dicho punto de equilibrio, siempre y cuando los valores propios de la matriz de los coeficientes, tengan partes reales negativas. (Ver el final del apéndice VI).

Con un ejemplo se podrá comprender mejor el procedimiento para construir una función de Liapunov para un sistema lineal. Considérese el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x - 3y$$

que también se puede escribir

$$\frac{dx}{dt} = 0x + 1y$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x - 3y$$

donde se puede ver inmediatamente que la matriz de los coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

y que las raíces características o valores propios del sistema se obtienen resolviendo el determinante,

$$\begin{vmatrix} 0-r & 1 \\ -2 & -3-r \end{vmatrix} = 0$$

obteniéndose la ecuación característica,

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

cuyas raíces son:

$$r(1) = -1 \quad \text{y} \quad r(2) = -2$$

a las que deben corresponder los vectores propios $\bar{E}_{r(1)}$ y $\bar{E}_{r(2)}$ que se determinan por las condiciones,

$$A\bar{E}_{r(1)} = r(1)\bar{E}_{r(1)} \quad \text{y} \quad A\bar{E}_{r(2)} = r(2)\bar{E}_{r(2)}$$

o sea,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene,

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = -a_1 \\ -2a_1 - 3a_2 = -a_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = -1 \end{array} \quad \text{y} \quad \left. \begin{array}{l} a'_2 = -2a'_1 \\ -2a'_1 - 3a'_2 = -2a'_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a'_1 = 1 \\ a'_2 = -2 \end{array}$$

Por lo tanto, los vectores propios son:

$$\bar{E}_{r(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{E}_{r(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

entonces las funciones

$$\bar{X}_1 = \bar{X}_{r(1)} = \bar{E}_{r(1)} e^{r(1)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\bar{X}_2 = \bar{X}_{r(2)} = \bar{E}_{r(2)} e^{r(2)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

son soluciones del sistema, y la solución general será

$$\bar{R}(t) = c_1 \bar{X}_1 + c_2 \bar{X}_2$$

o sea,

$$\bar{R}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$\bar{R}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \\ -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

que, en términos de los vectores unitarios ortogonales del espacio de dos dimensiones

$$\hat{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

puede escribirse,

$$R(t) = (c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t})\hat{u}_1 + (-c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t})\hat{u}_2 \dots (42)$$

de donde $R(0) = (c_1 + c_2)\hat{u}_1 + (-c_1 - 2c_2)\hat{u}_2$

y para que el vector $\bar{R}(0; \hat{u}_1) = \hat{u}_1$, debe cumplirse que el coeficiente de \hat{u}_1 en $\bar{R}(0)$ sea igual a 1, y el coeficiente de \hat{u}_2 sea igual a cero, es decir,

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 - 2c_2 = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{array}$$

Sustituyendo, los valores de c_1 y de c_2 encontrados, en la ecuación (42), se obtiene,

$$\bar{R}(t; \hat{u}_1) = (2e^{-t} - e^{-2t})\hat{u}_1 + (-2e^{-t} + 2e^{-2t})\hat{u}_2 \dots (43)$$

Procediendo en forma similar, haciendo que en $R(0)$, el coeficiente de \hat{u}_1 sea cero y el de \hat{u}_2 igual a 1, se obtiene

$$\bar{R}(t; \hat{u}_2) = (e^{-t} - e^{-2t})\hat{u}_1 + (-e^{-t} + 2e^{-2t})\hat{u}_2 \dots (44)$$

Las soluciones (43) y (44) evidentemente cumplen con las condiciones iniciales,

$$\bar{R}(0; \hat{u}_1) = \hat{u}_1$$

$$\bar{R}(0; \hat{u}_2) = \hat{u}_2$$

Ahora, dado cualquier vector $\bar{H} = (h_1, h_2)$, la solución

$$\bar{R}(t; \bar{H}) = h_1 \bar{R}(t; \hat{u}_1) + h_2 \bar{R}(t; \hat{u}_2) \quad \dots\dots\dots (45)$$

satisfará, obviamente, la condición inicial

$$\bar{R}(0, \bar{H}) = \bar{H}$$

En particular si $\bar{H} = \bar{R}_0 = (x_0, y_0)$, (en realidad tanto \bar{H} como \bar{R}_0 deben escribirse como vectores columna para ser consistente con la notación seguida), se tendrá, de acuerdo con (45), (44) y (43),

$$\begin{aligned} \bar{R}(t; \bar{R}_0) &= x_0 (2e^{-t} - e^{-2t}) \hat{u}_1 + x_0 (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) \hat{u}_2 \\ &+ y_0 (e^{-t} - e^{-2t}) \hat{u}_1 + y_0 (-e^{-t} + 2e^{-2t}) \hat{u}_2 \end{aligned}$$

Reagrupando términos se puede escribir

$$\begin{aligned} \bar{R}(t; \bar{R}_0) &= (2x_0 + y_0) e^{-t} (\hat{u}_1 - \hat{u}_2) \\ &- (x_0 + y_0) e^{-2t} (\hat{u}_1 - 2\hat{u}_2) \end{aligned}$$

realizando las restas de vectores indicadas, queda

$$\bar{R}(t; \bar{R}_0) = (2x_0 + y_0) e^{-t} (1, -1) - (x_0 + y_0) e^{-2t} (1, -2) \dots (46)$$

Ahora se tiene que encontrar la magnitud de la función vectorial $\bar{R}(t; \bar{R}_0)$. Para esto, se puede recurrir al producto escalar. Considerando que la función $\bar{R}(t; \bar{R}_0)$ está expresada como la diferencia de la función

$$\bar{P} = (2x_0 + y_0) e^{-t} (1, -1)$$

y la función

$$\bar{Q} = (x_0 + y_0) e^{-2t} (1, -2)$$

es decir,

$$\bar{R}(t; \bar{R}_0) = \bar{P} - \bar{Q}$$

Entonces se tendría,

$$\begin{aligned} \left| \bar{R}(t; \bar{R}_0) \right|^2 &= \bar{R}(t; \bar{R}_0) \cdot \bar{R}(t; \bar{R}_0) = (\bar{P} - \bar{Q}) \cdot (\bar{P} - \bar{Q}) \\ &= \bar{P} \cdot \bar{P} - 2\bar{P} \cdot \bar{Q} + \bar{Q} \cdot \bar{Q} \end{aligned}$$

Y resulta,

$$\bar{P} \cdot \bar{P} = (2x_0 + y_0)^2 e^{-2t} (1, -1) \cdot (1, -1) = 2(2x_0 + y_0)^2 e^{-2t}$$

$$2\bar{P} \cdot \bar{Q} = 2(2x_0 + y_0)(x_0 + y_0) e^{-3t} (1, -1) \cdot (1, -2) = 6(2x_0 + y_0)(x_0 + y_0) e^{-3t}$$

$$\bar{Q} \cdot \bar{Q} = (x_0 + y_0)^2 e^{-4t} (1, -2) \cdot (1, -2) = 5(x_0 + y_0)^2 e^{-4t}$$

$$\left| \bar{R}(t; \bar{R}_0 \right|^2 = 2(2x_0 + y_0)^2 e^{-2t} - 6(2x_0 + y_0)(x_0 + y_0) e^{-3t} + 5(x_0 + y_0)^2 e^{-4t}$$

Por lo tanto, la función de Liapunov buscada es, de acuerdo con (41),

$$E(\bar{R}_0) = 2(2x_0 + y_0)^2 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt - 6(2x_0 + y_0)(x_0 + y_0) \int_0^{\infty} e^{-3t} dt + 5(x_0 + y_0)^2 \int_0^{\infty} e^{-4t} dt \dots\dots\dots (47)$$

El valor de las integrales es

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-3t} dt = -\frac{1}{3} e^{-3t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{3} (0 - 1) = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-4t} dt = -\frac{1}{4} e^{-4t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{4} (0 - 1) = \frac{1}{4}$$

sustituyéndolos en (47), finalmente se obtiene,

$$\begin{aligned} E(\bar{R}_0) &= 2(2x_0 + y_0)^2 \left(\frac{1}{2}\right) - 6(2x_0 + y_0)(x_0 + y_0) \left(\frac{1}{3}\right) + 5(x_0 + y_0)^2 \left(\frac{1}{4}\right) \\ &= (2x_0 + y_0)^2 - 2(2x_0 + y_0)(x_0 + y_0) + \frac{5}{4}(x_0 + y_0)^2 \\ &= (2x_0 + y_0)^2 - 2(2x_0 + y_0)(x_0 + y_0) + (x_0 + y_0)^2 + \frac{1}{4}(x_0 + y_0)^2 \\ &= \left[(2x_0 + y_0) - (x_0 + y_0) \right]^2 + \frac{1}{4}(x_0 + y_0)^2 \\ &= (2x_0 + y_0 - x_0 - y_0)^2 + \frac{1}{4}(x_0 + y_0)^2 \end{aligned}$$

$$E(\bar{R}_0) = x_0^2 + \frac{1}{4}(x_0 + y_0)^2$$

Como x_0 y y_0 pueden tomar cualquier valor real, la función encontrada es válida para cualquier pareja (x, y) , por lo tanto, la función de Liapunov se escribe,

$$E(\bar{R}) = x^2 + \frac{1}{4}(x + y)^2 \dots\dots\dots(47)$$

que cumple con el requisito de ser positivamente definida.

Falta probar que, para el sistema dado y la función de Liapunov dada por (47), se cumple

$$\nabla E \cdot \bar{V} = \frac{dE}{dt} \leq 0$$

El sistema tomado como ejemplo para ilustrar la construcción de una función de Liapunov, se puede escribir

$$\frac{d(x, y)}{dt} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{V}(\bar{R}) = (y, -2x - 3y) \dots\dots\dots(48)$$

Por otro lado,

$$\nabla E = \left(\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial y} \right) = \left(\frac{5x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right)$$

Resultado, entonces,

$$\begin{aligned} \nabla E \cdot \bar{V} &= \left(\frac{5x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right) \cdot (y, -2x-3y) = \left(\frac{5x+y}{2} \right) (y) + \left(\frac{x+y}{2} \right) (-2x-3y) \\ &= \frac{5xy + y^2 - 2x^2 - 2xy - 3xy - 3y^2}{2} = \frac{-2x^2 - 2y^2}{2} \\ &= - (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\nabla E \cdot \bar{V} \leq 0$$

y se comprueba que (47) es una función de Liapunov para el sis-

tema dado por la ecuación (48).

En realidad, cuando se trata de sistemas lineales, la función de Liapunov no aporta nada nuevo, puesto que, desde que se encontraron las raíces de la ecuación característica

$$r(1) = -1 \quad \text{y} \quad r(2) = -2$$

por tener parte real negativa (aunque es este caso la parte imaginaria es cero), se supo que el origen es un punto de equilibrio estable, característica que se comprueba con la solución general (42) encontrada. Se ve que a medida que el tiempo aumenta, $\vec{R}(t)$ se va acercando a $(0,0)$. La importancia de la función de Liapunov radica en el hecho de que se puede aplicar a sistemas de ecuaciones diferenciales que no son lineales. Esto se ve en la próxima sección.

Para terminar ésta, vamos a poner de manifiesto que el sistema escogido como ejemplo para la construcción de la función de Liapunov es un caso particular del movimiento armónico amortiguado, en el que una partícula de masa m esta sujeta a una fuerza elástica restauradora $-kx$ y a una fuerza de rozamiento proporcional a la rapidez de la partícula, $-cv$. La ecuación diferencial para este caso es, de acuerdo con la 2a. ley de Newton,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - cv$$

siendo x , el desplazamiento de la partícula con respecto al origen. Si hacemos $v = y$, $\frac{k}{m} = 2$ y $\frac{c}{m} = 3$, resulta

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x - 3y$$

En este caso es interesante hacer notar que la energía mecánica total

$$E = E_C + U = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

es también una función de Liapunov para el sistema. En efecto, haciendo $v = y$, se tiene

$$E(x, y) = E(\bar{R}) = \frac{my^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

dividiendo entre m y multiplicando por 2,

$$\frac{2E(\bar{R})}{m} = y^2 + \frac{k}{m} x^2$$

y recordando que para el sistema escogido de ejemplo $\frac{k}{m} = 2$, y

llamando $E'(\bar{R})$ a $\frac{2E(\bar{R})}{m}$, se obtiene,

$$E'(\bar{R}) = 2x^2 + y^2$$

de donde

$$\frac{dE'}{dt} = \nabla E' \cdot \bar{V} = (4x, 2y) \cdot (y, -2x-3y) = -6y^2$$

y como $y = v$ (rapidez), el sistema físico disipa energía con una rapidez proporcional al cuadrado de la rapidez de la partícula.

Con esto se comprueba que la función de Liapunov para un sistema no es única, y que la idea que guió al matemático Liapunov en la construcción de su función fue la de la energía en un sistema físico.

SECCION 8

APROXIMACION LINEAL PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES. APROXIMACION LINEAL PARA EL PENDULO SIMPLE. ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA DE LOTKA Y VOLTE-
RRA.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales, expresado en forma compacta por

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{V}(\bar{R})$$

(VEASE EL APENDICE IV (A)), en el que $\bar{V}(\bar{R})$ es no lineal, se puede investigar la naturaleza estable o inestable de los puntos de equilibrio del sistema mediante lo que se llama "una aproximacion lineal".

Supongamos que $\bar{V}(\bar{R})$ es una función diferenciable en una vecindad de uno de los puntos de equilibrio del sistema, por ejemplo, en una vecindad del punto \bar{a} que cumple la condición

$$\bar{V}(\bar{a}) = \bar{0} \quad \dots\dots\dots(49)$$

en ese caso, se puede escribir

$$\bar{V}(\bar{a} + \bar{h}) - \bar{V}(\bar{a}) = J(\bar{a})\bar{h} + Q(\bar{a};\bar{h})\bar{h}$$

(VEASE EL APENDICE VII, ecuacion (xviii)).

Y por la condición dada en (49),

$$\bar{V}(\bar{a} + \bar{h}) = J(\bar{a})\bar{h} + Q(\bar{a};\bar{h})\bar{h}$$

y para \bar{h} suficientemente pequeño, de manera que $Q(\bar{a};\bar{h}) \approx 0$ (ma-

triz), resulta

$$\bar{V}(\bar{a} + \bar{h}) = J(\bar{a})\bar{h} \dots\dots\dots(50)$$

de manera que , en el caso de que $\bar{R} = \bar{a}$ sea un punto de equilibrio, el valor de la función se puede aproximar por su diferencial en una cercanía de \bar{a} .

Dentro del rango de valores de \bar{R} en el que $\bar{V}(\bar{R})$ es diferenciable, se puede escribir,

$$\bar{R} = \bar{a} + \bar{h}$$

de donde

$$\bar{h} = \bar{R} - \bar{a}$$

y la expresion (50) se puede escribir

$$\bar{V}(\bar{R}) = J(\bar{a})(\bar{R} - \bar{a}) \dots\dots\dots(51)$$

y a esto es a lo que se llama la aproximacion lineal de $\bar{V}(\bar{R})$

en una vecindad del punto de equilibrio $\bar{R} = \bar{a}$. Y de esta manera el sistema original no lineal

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{V}(\bar{R})$$

se sustituye por el sistema lineal

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = J(\bar{a})(\bar{R} - \bar{a}) \dots\dots\dots(52)$$

en el cual es relativamente facil investigar la naturaleza estable o inestable del punto de equilibrio $\bar{R} = \bar{a}$.

Para ilustrar la forma de hacer una aproximación lineal escogeremos otra vez el ejemplo del péndulo simple, cuyo sistema de ecuaciones es, como ya se vió,

$$\frac{d\theta}{dt} = w \quad ; \quad \frac{dw}{dt} = -k^2 \text{sene}\theta$$

Si $R = (\theta, w)$ y $\bar{V}(\bar{R}) = (w, -k^2 \text{sen}\theta)$, resulta de la for-

ma

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{V}(\bar{R})$$

con $\bar{V}(\bar{R}) = (f_1, f_2)$ se tiene,

$$f_1(\bar{R}) = w$$

$$f_2(\bar{R}) = -k^2 \text{sen}\theta$$

y la matriz jacobiana de aproximación será, entonces

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\theta}(w) & \frac{d}{dw}(w) \\ \frac{d}{d\theta}(-k^2 \text{sen}\theta) & \frac{d}{dw}(-k^2 \text{sen}\theta) \end{pmatrix}$$
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 \text{cos}\theta & 0 \end{pmatrix}$$

En el punto de equilibrio $\bar{R} = \bar{a} = \bar{0}$, la matriz $J(\bar{a})$ es

$$J(\bar{a}) = J(\bar{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (53)$$

y la aproximación lineal dada por (52) queda,

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = J(\bar{0})(\bar{R} - \bar{0})$$

poniendo en evidencia las componentes

$$\begin{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ w \end{pmatrix}$$

El sistema lineal de ecuaciones que resulta es,

$$\frac{d\theta}{dt} = w$$

$$\frac{dw}{dt} = -k^2\theta$$

Este sistema es equivalente a la ecuación diferencial de 2o. orden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -k^2\theta$$

que, como es bien sabido en física, da lugar a un movimiento armónico simple para oscilaciones pequeñas del péndulo.

Aunque ya se sabe que el origen es un punto de equilibrio estable, es interesante mostrar que dicha información está contenida en la matriz jacobiana de aproximación dada por (53). Las raíces características del sistema se obtienen del determinante

$$\begin{vmatrix} 0 - r & 1 \\ -k^2 & 0 - r \end{vmatrix} = 0$$

que da lugar a la ecuación característica

$$r^2 + k^2 = 0$$

cuyas raíces son

$$\begin{aligned} r(1) &= ik \\ r(2) &= -ik \end{aligned} \quad (i = \sqrt{-1})$$

Puesto que estas raíces son imaginarias puras, el origen tiene estabilidad neutra. No es asintóticamente estable. La consecuencia física de esto es que, si al péndulo simple sin fricción, que se encuentra ya oscilando, se le perturba dándole un impulso, por ejemplo, no regresa a la oscilación original (órbita original) sino que queda oscilando con una nueva amplitud (nueva ór-

bita. Esto ya se discutió en la sección 5, en donde se determinaron las orbitas cerradas alrededor del origen.

Con todo el conocimiento previo, se puede pasar ahora a los problemas de la dinámica poblacional y, como ejemplo, se discutirá la estabilidad del sistema depredador-presa de Lotka y Volterra, cuyas ecuaciones son no lineales,

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= -bD + cDP \\ \frac{dP}{dt} &= aP - fDP \end{aligned} \dots\dots\dots(9)$$

tal como se estableció en la sección 4.

El sistema (9) tiene 2 puntos de equilibrio ($D = 0, P = 0$), el cual es evidente y que desde el punto de vista ecologico no tiene ningún interés, y aquél para el cual

$$\begin{aligned} -bD + cDP &= 0 \\ aP - fDP &= 0 \end{aligned}$$

o sea, ($D = a/f, P = b/c$). En este caso tenemos $\bar{R} = (D, P)$ y $\bar{V}(\bar{R}) = (f_1, f_2) = (-bD+cDP, aP-fDP)$ y la matriz jacobiana para hacer una aproximación lineal es,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial D}(-bD+cDP) & \frac{\partial}{\partial P}(-bD+cDP) \\ \frac{\partial}{\partial D}(aP-fDP) & \frac{\partial}{\partial P}(aP-fDP) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b+cP & cD \\ -fP & a-fD \end{pmatrix}$$

calculada en el punto de equilibrio $\bar{R}_0 = (a/f, b/c)$, resulta

$$J(\bar{R}_0) = \begin{pmatrix} -b+c(b/c) & c(a/f) \\ -f(b/c) & a-f(a/f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac/f \\ -fB/c & 0 \end{pmatrix}$$

Y la aproximación lineal en la vecindad del punto \bar{R}_0 es

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = J(\bar{R}_0)(\bar{R} - \bar{R}_0)$$

con componentes,

$$\begin{pmatrix} \frac{dD}{dt} \\ \frac{dP}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac/f \\ -fb/c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D - a/f \\ P - b/c \end{pmatrix} \dots\dots\dots(54)$$

La ecuación característica del sistema se obtiene de

$$\begin{vmatrix} 0 - r & ac/f \\ -fb/c & 0 - r \end{vmatrix} = 0$$

y resulta ser

$$r^2 + ab = 0$$

cuyas raíces son

$$r(1) = i\sqrt{ab}$$

$$r(2) = -i\sqrt{ab}$$

Por lo tanto, el punto de equilibrio $R_0 = (a/f, b/c)$ es de estabilidad neutra, porque las raíces son imaginarias puras.

Las ecuaciones de las órbitas en el plano de fase D-P son relativamente fáciles de encontrar a partir del sistema de ecuaciones original, que se puede escribir,

$$\frac{dD}{dt} = ((-b/P) + c)DP$$

$$\frac{dP}{dt} = ((a/D) - f)DP$$

de donde

$$\frac{dD}{-(b/P)+c} = DPdt$$

$$\frac{dP}{(a/D)-f} = DPdt$$

Igualando los lados izquierdos, se obtiene

$$\frac{dD}{-(b/P)+c} = \frac{dP}{(a/D)-f}$$

$$\left(\frac{a}{D} - f\right)dD = \left(-\frac{b}{P} + c\right)dP$$

$$a \frac{dD}{D} + b \frac{dP}{P} - fdD - cdP = 0$$

Integrando se obtiene

$$a \ln D + b \ln P - fD - cP = K \text{ (constante)}$$

$$\ln D^a + \ln P^b + \ln e^{-fD} + \ln e^{-cP} = K'$$

$$\ln(D^a e^{-fD})(P^b e^{-cP}) = K'$$

$$(D^a e^{-fD})(P^b e^{-cP}) = e^{K'}$$

La familia de órbitas está dada, entonces, por la ecuación

$$(D^a e^{-fP})(P^b e^{-cP}) = K \text{ (constante)...(55)}$$

Las órbitas dadas por (55) son difíciles de graficar, sin embargo, cerca del punto de equilibrio $R_0 = (a/f, b/c)$, se puede usar el sistema lineal aproximado dado por (54),

$$\frac{dD}{dt} = \frac{ac}{f} \left(P - \frac{b}{c}\right)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{fb}{c} \left(D - \frac{a}{f}\right)$$

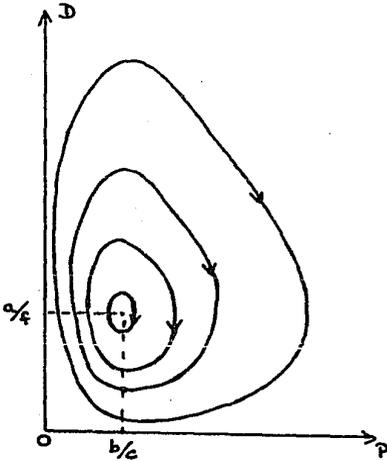
Eliminando al tiempo, este sistema de ecuaciones diferenciales se convierte en la ecuación

$$\frac{fb}{c} \left(D - \frac{a}{f}\right) dD + \frac{ac}{f} \left(P - \frac{b}{c}\right) dP = 0$$

Integrando se obtiene

$$\frac{fb}{c} \left(D - \frac{a}{f}\right)^2 + \frac{ac}{f} \left(P - \frac{b}{c}\right)^2 = C \text{ (constante)}$$

E inmediatamente se ve que se trata de elipses centradas en el



punto de equilibrio $\bar{R}_0 = (a/f, b/c)$. Volterra ideó una técnica de mapeo para dibujar las orbitas dadas por la ecuación (55). El tipo de órbitas se muestra en la fig. 19. En ella se nota que cerca del punto de equilibrio, las orbitas se aproximan a elipses. Se nota, también, que el comportamiento del sistema de Lotka y terra, comparte con el péndulo simple sin fricción la característica de tener puntos de equilibrio con estabilidad neutra.

Fig. 19.-Orbitas del sistema de Lotka y Volterra.

Si una perturbación sacara a las poblaciones de una de las órbitas no regresarían a ella sino que

quedarían oscilando en una nueva.

Debido a que para muchos ecólogos la estabilidad neutra es difícil que se dé en la naturaleza, se han propuesto algunas variantes del modelo de Lotka y Volterra con el fin de proporcionar una descripción más realista de la interacción entre poblaciones, por ejemplo,

$$\frac{dD}{dt} = mDP - nD$$

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2 - cDP$$

en donde el término en P^2 incluye la competencia interespecie de las presas.

Otro ejemplo en el que, además de la competencia interespecie de las dos poblaciones, se toma en cuenta que el depredador puede tener otras fuentes de alimentación, de manera que la ausencia de sus presas naturales no afecta negativamente su crecimiento poblacional, es el siguiente,

$$\frac{dD}{dt} = mDP + nD - qD^2$$

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2 - cDP$$

MODELOS CUADRATICOS DE POBLACION. EL TEOREMA DE NO CICLOS. INESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE LAS ECUACIONES DE LOTKA Y VOLTERRA.

Los dos últimos sistemas de ecuaciones diferenciales puestos como ejemplos de interacciones depredador- presa, así como el modelo de Lotka y Volterra y el de competencia dado por la ecuación (8) de la sección 4, pertenecen a la clase de los llamados modelos cuadráticos de población.

La expresión mas general de los modelos cuadráticos para 2 especies A y B interactuantes entre sí, es

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= (a_0 + a_1A + a_2B)A \\ & \dots\dots\dots (56) \\ \frac{dB}{dt} &= (b_0 + b_1A + b_2B)B\end{aligned}$$

A cada coeficiente se le puede dar una interpretación ecológica: a_0 y b_0 son las tasas intrínsecas de crecimiento de A en ausencia de B y de B en ausencia de A, respectivamente.

a_1 y b_2 , representan, entre miembros de la misma especie, la competencia, en el caso de ser negativos, o la autosimbiosis, si son positivos.

a_2 y b_1 , representan simbiosis de una especie con la otra, si ambos son positivos; depredación, en el caso de que tengan signos contrarios; y depredación mutua o competencia, si ambos son negativos.

El único punto de equilibrio para el que $A \neq 0$ y $B \neq 0$

es aquél para el cual se cumple

$$a_0 + a_1A + a_2B = 0$$

$$b_0 + b_1A + b_2B = 0$$

resolviendo para A y para B, resulta

$$A_e = \frac{a_2b_0 - a_0b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \dots\dots\dots(57)$$

$$B_e = \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Para descubrir la naturaleza estable o inestable de este punto de equilibrio se podrían aplicar las técnicas aprendidas en las secciones anteriores, sin embargo, hay otro aspecto más interesante que puede tratarse con una técnica matemática diferente: demostrar que, excepto en casos muy especiales, un modelo cuadrático de población no puede tener órbitas cerradas o ciclos.

La demostración se basa en teorema de Green para el plano. Se definen $f_1(A,B)$, $f_2(A,B)$ y $H(A,B)$, de la siguiente manera,

$$f_1(A,B) = (a_0 + a_1A + a_2B)A \dots\dots\dots(58)$$

$$f_2(A,B) = (b_0 + b_1A + b_2B)B$$

$$H(A,B) = A^m B^n \dots\dots\dots(59)$$

siendo, en la definición de la función H,

$$m = \frac{b_2(b_1 - a_1)}{a_1b_2 - a_2b_1} - 1 \dots\dots\dots(60)$$
$$n = \frac{a_1(a_2 - b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1} - 1$$

En el apéndice VIII, se demuestra que se cumple la condición

$$\frac{\partial Hf_1}{\partial A} + \frac{\partial Hf_2}{\partial B} = H \frac{C_1}{C_2} \dots\dots(61)$$

siendo,

$$\begin{aligned} C_1 &= a_1 b_0 (a_2 - b_2) - a_0 b_2 (a_1 - b_1) \\ C_2 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned} \dots\dots\dots (62)$$

Definidas así las diferentes funciones y constantes que van a intervenir, se tiene el

TEOREMA DE NO CICLOS para modelos cuadráticos de población:

Si el modelo cuadrático de población

$$\frac{dA}{dt} = f_1(A, B)$$

$$\frac{dB}{dt} = f_2(A, B)$$

con f_1 y f_2 dadas por (58), satisface las condiciones

$$C_1 \neq 0 \quad \text{y} \quad C_2 \neq 0$$

en donde C_1 y C_2 son los de la expresión (62), entonces, el sistema no tiene órbitas cerradas (o ciclos) en el cuadrante de población $A > 0, B > 0$.

La demostración del teorema es como sigue:

Supongamos que el sistema tiene un ciclo o una órbita cerrada alrededor de un punto de equilibrio; llamaremos D a la región del primer cuadrante del plano A-B encerrada por el ciclo, incluyendo los puntos de éste.

Utilizando la relación (61) resulta

$$\iint_D \left(\frac{\partial Hf_1}{\partial A} + \frac{\partial Hf_2}{\partial B} \right) dA \, dB = \iint_D \left(\frac{C_1}{C_2} H \right) dA \, dB \dots\dots\dots(63)$$

De acuerdo con la definición de la función H(A,B) dada por (59) para el cuadrante de población $A > 0, B > 0$, la función H siempre es una cantidad positiva y como, de acuerdo con las condiciones del teorema de no ciclos, C_1 y C_2 son constantes que no se anulan, la función

$$\frac{C_1}{C_2} H(A,B)$$

tiene signo fijo en el cuadrante considerado y que estará determinado por el signo del cociente C_1/C_2 . Vamos a suponer que

$$\frac{C_1}{C_2} H(A,B) > 0 \dots\dots\dots (64)$$

(el caso $\frac{C_1}{C_2} H < 0$, puede ser tratado en forma similar)

Tomando en cuenta (64), la expresión (63) da lugar a

$$\iint_D \left(\frac{\partial Hf_1}{\partial A} + \frac{\partial Hf_2}{\partial B} \right) dA dB > 0 \dots\dots\dots (65)$$

Por otro lado, el teorema de Green para el plano asegura que, para dos funciones $Q(x,y)$ y $P(x,y)$ con primeras derivadas parciales continuas en una región D, se cumple

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (Q dy + P dx) \dots\dots\dots (66)$$

en donde C es la curva (órbita o ciclo) que encierra a la región D, es decir, la integral doble de superficie puede sustituirse por una integral de línea.

Aplicándole (66), la expresión (65) queda

$$\oint_C \left(\frac{\partial Hf_1}{\partial A} + \frac{\partial Hf_2}{\partial B} \right) dA dB = \oint_C (Hf_1 dB - Hf_2 dA) > 0 \dots (67)$$

Pero, de acuerdo con el sistema de ecuaciones definido en (56) y las definiciones de f_1 y f_2 dadas en (58), resulta que,

$$\begin{aligned} dA &= f_1 dt \\ dB &= f_2 dt \end{aligned} \dots\dots\dots(68)$$

y, por lo tanto, la integral de linea

$$\oint_C (Hf_1 dB - Hf_2 dA) = \oint_C (Hf_1(f_2 dt) - Hf_2(f_1 dt)) = 0 \dots\dots(69)$$

Entonces, bajo la hipótesis de que existía una órbita cerrada para el sistema cuadrático de población, se llega a una contradicción puesto que las expresiones (67) y (69) no pueden cumplirse simultáneamente. Esta contradicción indica que la hipótesis de partida es equivocada y el teorema queda demostrado.

Una consecuencia del teorema de no ciclos es que, cuando se cumplen las condiciones

$$\begin{aligned} C_1 &= a_1 b_0 (a_2 - b_2) - a_0 b_2 (a_1 - b_1) \neq 0 \\ C_2 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0, \end{aligned}$$

el único posible estado de equilibrio del modelo cuadrático

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= (a_0 + a_1 A + a_2 B)A \\ \frac{dB}{dt} &= (b_0 + b_1 A + b_2 B)B \end{aligned}$$

es aquel en el que las poblaciones permanecen constantes con valores iguales a las coordenadas del punto de equilibrio

$$A_e = \frac{a_2 b_0 - a_0 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad ; \quad B_e = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Dado que las expresiones del punto de equilibrio contienen a C_2 en el denominador, es claro que debe cumplirse $C \neq 0$. Además, el cociente C_1/C_2 , puede escribirse

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{C_2} &= \frac{a_1(a_2b_0 - a_0b_2) + b_2(a_0b_1 - a_1b_0)}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ &= a_1 \frac{a_2b_0 - a_0b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} + b_2 \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ &= a_1A_e + b_2B_e \end{aligned}$$

De aquí que, $C_1 = 0$, sólo se daría en el caso de que

$$a_1 = 0 \quad \text{y} \quad b_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (70 \text{ a})$$

o en el caso de que

$$\frac{A_e}{B_e} = - \frac{b_2}{a_1} \quad \dots\dots\dots (70 \text{ b})$$

La condición (70 b) exige una relación muy improbable entre los coeficientes a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 y b_2 , sobre todo si se piensa que dichas constantes, en una situación real, se deben estimar experimentalmente haciendo investigación de campo. Entonces pedir que $C_1 = 0$, atendiendo a esta condición es casi imposible.

La condición (70 a) pide que no haya competencia entre los miembros de la misma población. También, en los casos reales, constituye una situación idealizada pedir su cumplimiento.

En conclusión, dado que las condiciones (70 a) y (70 b) son muy improbables, se tendrá $C_1 \neq 0$, y el teorema de no ciclos será válido para los modelos cuadráticos de población.

En el caso del sistema de Lotka y Volterra para interacciones depredador-presa, que es un sistema cuadrático,

se puede escribir

$$\frac{dD}{dt} = (-b + 0D + cP)D$$

$$\frac{dP}{dt} = (a - fD + 0P)P$$

haciendo patente que los términos de competencia entre individuos de la misma especie, D^2 y P^2 , tienen coeficiente cero. Por lo tanto, para este sistema $C_1 = 0$, debido a que se llena la condición (70 a), y en consecuencia el sistema tiene orbitas cerradas, como ya se ha visto.

Los sistemas que presentan estabilidad neutra en sus puntos de equilibrio, como en el caso de Lotka y Volterra, y que se caracterizan por poseer una familia continua de ciclos en el cuadrante de población, se dice que no son ecológicamente estables. Los sistemas ecológicamente estables son aquellos que presentan ciclos aislados, es decir, un sistema es ecológicamente estable si presenta un sólo ciclo con la propiedad de que, si una perturbación aleja a las poblaciones del ciclo hasta un punto cercano a medida que el tiempo transcurre, las poblaciones siguen una órbita que regresa hacia el ciclo inicial. Se comprende entonces, que dicho ciclo debe estar aislado, o sea que no deben existir otros ciclos cercanos para que las poblaciones no puedan caer en ellos y regresar al ciclo original.

Parece probable, según los ecólogos, que los únicos ciclos que pueden tener los modelos matemáticos que pretendan representar sistemas reales, son los ecológicamente estables.

Otra exigencia que se hace a los modelos matemáticos

de la dinámica poblacional es que sean estructuralmente estables. En una forma no muy rigurosa, se puede decir que un modelo es estructuralmente estable si al introducir "pequeños cambios" en la estructura del modelo, el único efecto que se obtiene es un ligero desplazamiento en la localización de los puntos de equilibrio sin cambiar ni el número de ellos ni su naturaleza estable o inestable.

Para poner un ejemplo de la estabilidad estructural se puede analizar bajo ese punto de vista el modelo de Lotka y Volterra.

Se pueden introducir pequeños cambios en el modelo mediante números e^* y f^* tales que sus valores absolutos se puedan hacer arbitrariamente pequeños y que su efecto sea hacer desaparecer los ciclos del cuadrante de población. Es decir, el modelo "ligeramente alterado"

$$\frac{dD}{dt} = (-b + cP + e^*D)D$$

$$\frac{dP}{dt} = (a + d^*P - fD)P$$

debe cumplir las condiciones

$$C_1 = -d^*b(-f-e^*) - ae^*(d^* - c) \neq 0$$

$$C_2 = d^*e^* + fc \neq 0$$

como lo exige el teorema de no ciclos.

Ya se vio que el modelo original tiene su punto de equilibrio, además del origen, en

$$D = a/f \quad ; \quad P = b/c$$

Con la alteración introducida al sistema, el punto de equilibrio

se mueve a

$$D^* = \frac{ac + d^*b}{fc + d^*e^*} \quad ; \quad P^* = \frac{fb - ae^*}{fc + d^*e^*}$$

Este nuevo punto se puede escribir

$$D^* = \frac{ac + d^*b}{fc} \left(1 + \frac{d^*e^*}{fc}\right)^{-1} \dots\dots\dots(71)$$

$$P^* = \frac{fb - ae^*}{fc} \left(1 + \frac{d^*e^*}{fc}\right)^{-1}$$

Como ya se dijo, los números d^* y e^* pueden hacerse tan pequeños como se quiera, de manera que puede lograrse la condición

$$\left| \frac{d^*e^*}{fc} \right| < 1$$

con la cual

$$\left(1 + \frac{d^*e^*}{fc}\right)^{-1} = 1 - \frac{d^*e^*}{fc} + \left(\frac{d^*e^*}{fc}\right)^2 - \left(\frac{d^*e^*}{fc}\right)^3 + \dots\dots\dots$$

Los términos del desarrollo, excepto el primer 1, son de 2o. orden o de orden superior, por lo tanto, reteniendo solo el 1 del factor entre paréntesis que aparece en (71), resulta

$$D^* \approx \frac{ac + d^*b}{fc} = \frac{a}{f} + \frac{d^*b}{fc}$$

$$P^* = \frac{fb - ae^*}{fc} = \frac{b}{c} - \frac{ae^*}{fc}$$

Por otro lado, los términos e^*D^2 y d^*P^2 de perturbación pueden hacerse tan pequeños como se quiera. Dado que las poblaciones son finitas, deben estar acotadas, es decir, deben existir números M y N , tales que $D < M$ y $P < N$ para cualquier instante. Entonces si, por ejemplo, se requiere que

$$\left| e^*D^2 \right| < 10^{-10} \quad \text{y} \quad \left| d^*P^2 \right| < 10^{-10}$$

lo único que hay que hacer es escoger e^* y d^* tales que

$$|e^*| < 10^{-10} M^{-2} \quad \text{y} \quad |d^*| < 10^{-10} N^{-2}$$

En resumen, el sistema perturbado tiene el mismo número de puntos de equilibrio, el origen (0,0) y el punto (D*,P*)

$$D^* = \frac{a}{f} + \frac{bd^*}{fc} ; \quad P^* = \frac{b}{c} - \frac{ae^*}{fc}$$

ligeramente desplazado con respecto al punto de equilibrio

$$D = \frac{a}{f} ; \quad P = \frac{b}{c}$$

del sistema original, sin embargo, el sistema perturbado carece completamente de ciclos; de manera que el sistema "ligeramente alterado" se comporta de una manera completamente diferente con respecto al original. Es por esto que se dice que el modelo de Lotka y Volterra es "estructuralmente inestable".

SECCION 10

LA EXPLOTACION PESQUERA. MODELO DE SCHAEFER PARA PESQUERIAS NO REGULADAS . ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES DEL MODELO DE SCHAEFER. APLICACION DEL TEOREMA DE NO CICLOS.

Todo lo escrito hasta este momento no debe considerarse como una mera reseña de problemas matemáticos mas o menos interesantes, sino como una pequeña parte de los múltiples esfuerzos realizados durante muchos años por biólogos, matemáticos y, ultimamente, por físicos, para estructurar una sólida base teórica que sustente la comprensión de diversos procesos ecológicos de vital importancia para preservar nuestro ambiente y aprovechar sus recursos de manera racional.

La explotación y el dominio del ambiente vivo siempre ha sido una de las tareas fundamentales del hombre, desde las primeras epocas en que se llevaba a cabo mediante prácticas tradicionales, cada una con su lenguaje y reglas propias esencialmente cualitativas, hasta nuestros días en los que se realiza por métodos científicos cuantitativos tanto en la teoría como en la práctica y con un fuerte trasfondo económico.

Sabemos que desde los tiempos paleolíticos, el hombre se las ha arreglado para matar presas tan poderosas como el bisonte y el mamut y que su capacidad para inventar dispositivos de caza, como armas y trampas, ha sido el factor de mayor impacto sobre las poblaciones de las demás especies animales, a tal grado que muchas de ellas desaparecieron desde aquellos remotos

tiempos. Sin embargo, esa misma habilidad pronto se volvió contraproducente para la propia "especie" de cazadores porque, como diríamos ahora, su imperfecta comprensión de los fenómenos ecológicos, los condujo a quedarse sin presas que cazar para alimentarse y, como consecuencia, su cultura desapareció dando lugar al surgimiento de otros pueblos que dependieron más de la agricultura que de la caza y que fueron capaces de aprovechar las presas que aún quedaban sin llevarlas a la extinción. Desgraciadamente en los siglos recientes, el avance tecnológico en las artes de caza y pesca, aunado al problema de la explosión demográfica de la especie humana, han hecho renacer el peligro; más especies han desaparecido y otras se encuentran en vías de ser exterminadas.

Bajo este peligro se encuentran las especies marinas, peces, crustáceos, moluscos, de los cuales procede gran parte de la alimentación mundial, sobre todo de los peces por el gran volumen de captura al que están sometidos.

Aunque la exterminación de peces debida a la pesca puede considerarse como un suceso raro, muchas de las poblaciones de varias especies se han visto reducidas en grado sumo de manera que algunas se consideran extintas desde el punto de vista comercial.

Afortunadamente, hay signos alentadores que indican que, cuando menos a este respecto, el hombre ha adquirido niveles superiores de conocimiento y responsabilidad social en comparación con los del hombre de la edad de piedra. En los últimos años han aparecido instituciones nacionales e internacionales que regla-

mentan el funcionamiento de las pesquerías. Y es en estas reglamentaciones, que pretenden una administración inteligente de los recursos pesqueros, en donde se hacen necesarios todo el cúmulo de conocimientos teóricos y prácticos sobre la dinámica de las poblaciones en general y de las poblaciones de peces de importancia comercial, en particular, para comprender los mecanismos mediante los cuales se generan los recursos aprovechables y la manera de regular el número de individuos en ellos, así como el impacto que la intensidad de pesca ejerce sobre las poblaciones y la forma de optimizar las capturas sin peligro para las especies.

Los modelos matemáticos que abordan los problemas de la dinámica de las poblaciones de peces pueden ser clasificados en dos grandes categorías: los modelos de producción y los modelos analíticos.

En los modelos de producción se considera a la población de peces como formando un todo, sin características internas, tales como la distribución de edades o de tamaños, de manera que puede ser descrita por un sólo parámetro: el número de individuos o su biomasa. Se trata de modelos sencillos que no presentan dificultades para entenderlos y que funcionan a través de una demanda moderada de datos; generalmente, datos estadísticos sobre las capturas y la intensidad del esfuerzo pesquero.

Por otro lado, los modelos analíticos son mucho más estructurados; son modelos que tratan de ser racionales con mecanismos internos. Esto trae como consecuencia que su demanda de datos sea mayor que en los modelos de producción. Los modelos a-

analíticos consideran a la población como la suma de sus individuos y explican su dinámica a través del análisis de los eventos que conforman la existencia de dichos individuos. En las formas más detallistas se involucra varios parámetros como el crecimiento, la distribución de edades, la mortalidad, etc., como funciones de la densidad poblacional.

En la práctica, los dos tipos de modelos no son mutuamente excluyentes. Al principio de una investigación, cuando los datos a la mano son pocos, los modelos de producción son generalmente empleados para analizar los eventos de la pesquería, pero, a medida que la investigación avanza, van siendo sustituidos por modelos analíticos conforme los datos adicionales necesarios se van obteniendo.

Entre las poblaciones de peces, el grupo de los atunes comprende varias especies de importancia comercial entre las que se encuentran: el atún aleta amarilla (*Thunus albacares*) y el barrilete (*Katsuwonus pelamis*), que están incluidas entre las cinco especies cuya captura representa el 80% de la captura mundial de túnidos.

Para llevar a cabo investigaciones sobre diversos aspectos ecológicos de las dos especies mencionadas en el párrafo anterior, se creó el organismo internacional llamado: "COMISION INTERAMERICANA DEL ATUN TROPICAL". Una de las principales tareas que intenta llevar a cabo esta asociación es la de recoger e interpretar la información pertinente para mantener las poblaciones de los atunes tropicales y de los barcos pesqueros, en los niveles adecuados que permitan las máximas capturas año tras año.

La mayoría de los estudios básicos sobre la dinámica de la población de los túnidos se ha realizado a través de modelos de producción debido, en parte, dado que la edad de estas especies es difícil de determinar, a que este tipo de modelos no depende de la distribución de edades. Entre los principales modelos de este tipo se encuentran el de Schaefer y el de Pella y Tomlinson. En esta sección se discutirá el primero de ellos.

La línea de razonamientos que sigue Schaefer(1954) al proponer su modelo es la que sigue:

Si P es la población de peces susceptible de ser capturada (el stock), los cambios de la población en el tiempo estarán regulados por una ecuación del tipo

$$\frac{dP}{dt} = f(P) - P\phi(F) \dots\dots\dots(72)$$

en donde la función f(P) representa la razón de crecimiento de la población en condiciones naturales, es decir, sin pesca, y Pφ(F) representa la "tasa de captura" considerada proporcional tanto al tamaño de la población P, como a una función φ del esfuerzo pesquero F. Ambas funciones, f(P) y φ(F) se consideran continuas y univalentes.

Es evidente en (72) que mientras la tasa de captura permanezca en un valor menor a la razón de crecimiento natural de la población (Pφ(F) < f(P)), ésta aumentará y, viceversa, cuando la tasa de captura sobrepase al crecimiento natural (Pφ(F) > f(P)) la población disminuirá. Por último cuando la tasa de captura permanezca igual a la razón de crecimiento natural (Pφ(F)=f(P)), entonces $\frac{dP}{dt} = 0$ y la población se mantendrá estable. Si este es el

se dice que la pesquería está en equilibrio, para ese valor de la población y para esa intensidad de pesca. La captura anual realizada bajo esta condición la llama Schaefer "captura de equilibrio".

Por otro lado, tomando en cuenta el sistema económico en el que vivimos, una pesquería debe constituir un negocio rentable; de manera que si en determinado momento el costo por unidad de esfuerzo pesquero resulta mayor que el beneficio en dinero obtenido por los peces capturados por unidad de esfuerzo pesquero, la inversión económica en la pesquería se verá desalentada. Suponiendo estable el precio del producto, la rentabilidad de la pesquería dependerá solamente del volumen de captura por unidad de esfuerzo; entonces, mientras la pesquería deje beneficios será un negocio rentable que atraerá más barcos y el esfuerzo pesquero irá en aumento, esto se indica matemáticamente con la expresión $\frac{dF}{dt} > 0$. Sin embargo, esto traerá como consecuencia lógica un decremento en la población de peces ($\frac{dP}{dt} < 0$) lo cual, a su vez, causará una baja en las capturas por unidad de esfuerzo y la pesquería irá, paulatinamente, perdiendo su carácter de buena inversión. Debido a esto cabe suponer la existencia de un tamaño de población límite N debajo del cual el beneficio económico obtenido por unidad de esfuerzo será tan bajo que el costo de la siguiente unidad de esfuerzo excederá al beneficio correspondiente; la inversión se verá desalentada y el esfuerzo pesquero se verá obligado a disminuir, es decir, $\frac{dF}{dt} < 0$.

Matemáticamente, lo anterior puede formularse de la si-

guiente manera,

$$\frac{dF}{dt} = G(F, P - N) \dots\dots\dots(72)$$

exigiendo que

$$G > 0 \quad \text{si} \quad P > N$$

$$G < 0 \quad \text{si} \quad P < N$$

En resumen , un modelo muy general para una pesquería estará representado, segun Schaefer, por la pareja de ecuaciones formada por (71) y (72),

$$\frac{dP}{dt} = f(P) - P\phi(F)$$

$$\frac{dF}{dt} = G(F, P - N)$$

faltando por determinar la forma de las funciones involucradas.

Como lo más indicado en el modelaje es empezar por lo más sencillo , Schaefer escoge un crecimiento natural logístico para la población de peces, una función $\phi(F)$ directamente proporcional a F y una función G(F,P-N) directamente proporcional a F y a la diferencia P-N. Resulta entonces,

$$f(P) = k_1 P(L - P)$$

siendo L la capacidad de carga del medio y k_1 una contante positiva,

$$\phi(F) = k_2 F$$

Y
$$G(F, P - N) = k_3 F(P - N)$$

siendo k_2 y k_3 constantes positivas.

Escogidas de esta manera las funciones, la interaccion peces-pescadores, queda descrita por la pareja de ecuaciones,

$$\frac{dP}{dt} = k_1 P(L - P) - k_2 PF \quad \text{y} \quad \frac{dF}{dt} = k_3 F(P - N) \dots\dots\dots(73)$$

La naturaleza cuadrática del sistema dado por (73) se puede poner de manifiesto escribiéndolo en la forma,

$$\frac{dP}{dt} = (k_1L - k_1P - k_2F)P$$

$$\frac{dF}{dt} = (-k_3N + k_3P + 0F)F$$

Comparando con el sistema cuadrático general dado en las ecuaciones (56), resulta

$$a_0 = k_1L \quad b_0 = -k_3N$$

$$a_1 = -k_1 \quad b_1 = k_3$$

$$a_2 = -k_2 \quad b_2 = 0$$

Y el sistema, además del origen del plano de fase P-F, tendrá como punto de equilibrio

$$P = N ; F = \frac{k_1}{k_2}(L - N) \dots\dots\dots(74)$$

que se obtiene aplicando las fórmulas dadas en (57). Además, de forma casi inmediata, podemos ver que el sistema (73) no puede tener ciclos en el cuadrante $P > 0, F > 0$, porque, de acuerdo con el teorema de no ciclos, al ser

$$C_1 = a_1b_0(a_2 - b_2) - a_0b_2(a_1 - b_1) = -k_1k_2k_3 \neq 0$$

$$C_2 = a_1b_2 - a_2b_1 = k_2k_3 \neq 0$$

se cumplen las condiciones requeridas y el sistema no puede tener ciclos ni ecológicamente estables ni de estabilidad neutra (como los del modelo de Lotka y Volterra).

Por otro lado, utilizando la aproximación lineal discutida en la sección 8, se puede demostrar la estabilidad del punto de equilibrio dado por (74).

Llamando \bar{R} al vector $\bar{R} = (P, F)$ y $\bar{V}(\bar{R})$ al vector $\bar{V}(\bar{R}) = ((k_1L - k_1P - k_2F)P, (-k_3N + k_3P)F)$

de manera que las funciones componentes de $\bar{V}(\bar{R})$ son

$$f_1(P, F) = (k_1 L - k_1 P - k_2 F) P$$

$$f_2(P, F) = (-k_3 N + k_3 P) F$$

de manera que la matriz jacobiana de aproximacion será

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial P} & \frac{\partial f_1}{\partial F} \\ \frac{\partial f_2}{\partial P} & \frac{\partial f_2}{\partial F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 L - 2k_1 P - k_2 F & -k_2 P \\ k_3 F & -k_3 N + k_3 P \end{pmatrix}$$

en el punto de equilibrio $\bar{R}_0 = (N, (k_1/k_2)(L - N))$ dado en (74)

la matriz queda

$$J(\bar{R}_0) = \begin{pmatrix} -k_1 N & -k_2 N \\ \frac{k_3 k_1}{k_2} (L - N) & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuacion caracteristica del sistema lineal aproximado será obtenida de

$$\begin{vmatrix} -k_1 N - r & -k_2 N \\ \frac{k_3 k_1}{k_2} (L - N) & -r \end{vmatrix} = 0$$

quedando

$$r^2 + k_1 N r + k_3 k_1 (L - N) N = 0$$

cuyas raices seran los valores propios o raices caracteristicas del sistema . Estas raices son

$$r = -\frac{k_1 N}{2} \pm \frac{\sqrt{(k_1 N)^2 - 4k_1 k_3 (L - N) N}}{2}$$

para $L > N$.

Lo primero que se nota es que las partes reales de las raíces características son negativas. Esto implica que el punto de equilibrio \bar{R}_0 es asintóticamente estable. Para que hubiera ciclos (órbitas cerradas) sería necesario que la parte real fuera nula, es decir, $k_1 N = 0$. Como no es este el caso, se corrobora lo que ya se sabía aplicando el teorema de no ciclos. El sistema no tiene ciclos.

Por otro lado, si el radical es igual a cero o es positivo, las trayectorias se acercan al punto equilibrio sin oscilar. Y si el radical es imaginario, entonces habrá oscilaciones y las trayectorias serán espirales alrededor del punto de equilibrio y acercándose a él. Por lo tanto, el punto de equilibrio es asintóticamente estable,

sin oscilaciones si $(k_1 N)^2 - 4k_1 k_3 (L - N) N > 0$

con oscilaciones si $(k_1 N)^2 - 4k_1 k_3 (L - N) N < 0$

La primera desigualdad es equivalente a

$$k_1 > 4k_3 \frac{L - N}{N} \quad (\text{sin oscilaciones})$$

y la segunda es equivalente a

$$k_1 < 4k_3 \frac{L - N}{N} \quad (\text{con oscilaciones})$$

Schaefer en su artículo llega a las mismas conclusiones sólo que de una manera un tanto diferente y algo más complicada, por no usar la matriz de aproximación. También aplica su modelo a la pesquería del mero de Pacífico y a la de la sardina de California y sus resultados no parecen alentadores. Lo predicho por el modelo no concuerda con lo observado. La causa principal de que

esto suceda lo atribuye el autor a la pobreza de datos sobre las tasas de mortalidad por pesca, el esfuerzo pesquero y el tamaño de la población en el periodo temprano de desarrollo de la pesquería. Además aclara que para que lo observado concordara con el modelo, las pesquerías deben funcionar de acuerdo con las suposiciones hechas en él; la más fundamental de todas es la que considera que el crecimiento de la población de peces depende solamente del tamaño de dicha población sin estar sujeta a variaciones importantes debidas a otras causas. De manera que, si existen otras causas influyentes en el crecimiento de la población tales como variaciones en las condiciones ambientales, es natural esperar que el modelo falle.

SECCION 11

MODELO GENERALIZADO DE PRODUCCION DE PELLA Y TOMLINSON. REDUCCION AL MODELO LOGISTICO. SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL. APLICACION A LA PESQUERIA DEL ATUN ALETA AMARILLA + BARRILETE EN CUATRO ZONAS DEL PACIFICO ORIENTAL.

Se vió en la seccion anterior que el modelo de Schaefer propone un crecimiento natural logistico para la poblacion de peces, o sea,

$$f(P) = k_1 P(L - P)$$

que, como se ve en la fig. 20, su representacion es una parábola con maximo en $L/2$.

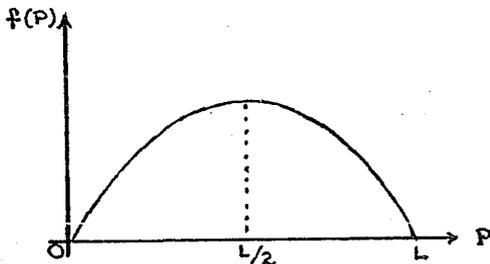


Fig. 20.- Grafica de la función
 $f(P) = k_1 P(L - P)$

Sin embargo, el propio Schaefer (19) aclara que hay razones para creer que en algunas poblaciones de peces, la curva, en realidad, es asimétrica sesgada hacia la izquierda, es decir, con el valor maximo en $P < L/2$.

Esta forma parabolica se refleja en la grafica de la captura de equilibrio contra la poblacion. De acuerdo con el modelo

$$\frac{dP}{dt} = k_1 P(L - P) - k_2 P F \dots\dots\dots(73-1)$$

en donde $k_2 P F$, como se vió, es la tasa de captura.

En condiciones de equilibrio entre el crecimiento natural y la mortalidad por pesca, es decir, cuando $(dP/dt) = 0$, la tasa de captura (dC/dt) resulta ser una constante

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{eq.} = k_2 P_{eq.} F_{eq.}$$

en donde $F_{eq.}$ es el esfuerzo (esfuerzo de equilibrio) pesquero constante que mantiene a la poblacion en el valor constante $P_{eq.}$. Sucederá entonces que el incremento de la captura C en un intervalo de tiempo Δt , será, en condiciones de equilibrio,

$$\Delta C_{eq.} = k_2 P_{eq.} F_{eq.} \Delta t$$

Comenzando con una C_i (captura inicial) igual a cero al principio de cada año, la captura de equilibrio al final del año (captura anual) será, (con $\Delta t = 1$ año),

$$C_{eq.}(\text{anual}) = k_2 P_{eq.} F_{eq.}$$

pero, de acuerdo con (73-1) escrita arriba, cuando $(dP/dt) = 0$, resulta

$$k_2 F_{eq.} F_{eq.} = k_1 P_{eq.} (L - P_{eq.})$$

o sea

$$C_{eq.}(\text{anual}) = k_1 P_{eq.} (L - P_{eq.}) \dots\dots(74)$$

y como hay muchos valores de $P_{eq.}$ correspondientes a diferentes valores de $F_{eq.}$, se puede considerar que $C_{eq.}$ es una funcion de $P_{eq.}$ al graficar $C_{eq.}$ contra $P_{eq.}$ de acuerdo con (74), se obtiene una parabola, con maximo en el valor $P_{eq.} = L/2$.

Es necesario aclarar que bajo condiciones de equilibrio, la segunda de las ecuaciones (73) escritas en la seccion 10, ya no es válida. Es decir

$$\frac{dF}{dt} = k_3 F(P - N) \dots\dots\dots(73-2)$$

sólo es valida en pesquerías no reguladas. Para que se dé la condición de equilibrio (dP/dt) = 0, el esfuerzo pesquero debe mantenerse constante y para esto es necesario que los barcos pesqueros acepten tal condición, lo cual significa regular o regularizar la pesquería. De manera que (73-2) funciona cuando el esfuerzo pesquero es dejado al libre albedrío de los pescadores y la única razón para aumentarlo o disminuirlo es la rentabilidad de la pesquería.

Continuando con la relación entre la captura de equilibrio y la población de equilibrio, Pella y Tomlinson (19), para permitir que la curva que relaciona dichas cantidades sea sesgada, tanto a la izquierda como a la derecha, proponen una función de crecimiento natural dada por

$$f(P) = HP^m - KP \quad ; \quad (m > 0)$$

que da lugar a la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = HP^m - KP - qfP \quad ; \quad (m > 0) \quad \dots\dots\dots(75)$$

bajo esfuerzo de pesca.

Se puede notar que con $m = 2$, la ecuación (75) reproduce el modelo de Schaefer (ecuación 73-1), si $H = -k_1$, $K = -k_1L$ y $q = k_2$.

(El esfuerzo F de las ecuaciones de Schaefer ahora se denota por la letra f y a la constante q se le llama el coeficiente de captura).

La ecuación diferencial (75) se puede reducir a la forma de la ecuación logística dada en (2) de la sección 3. Para ello sólo es necesario hacer el cambio de variable

$$Z = p^{m-1} \dots\dots\dots(76)$$

Derivando (76) con respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= (m-1)p^{m-2} \frac{dp}{dt} \\ \frac{dZ}{dt} &= (m-1) \frac{p^{m-1}}{p} \frac{dp}{dt} \\ \frac{dZ}{dt} &= (m-1)Z \left(\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \right) \dots\dots\dots(77) \end{aligned}$$

Por otro lado, la ecuación (75) puede escribirse

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = H p^{m-1} - (K + qf) \dots\dots\dots(78)$$

sustituyendo (78) en (77) resulta

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= (m-1)Z(H p^{m-1} - (K + qf)) \\ \frac{dZ}{dt} &= (m-1)Z(HZ - (K + qf)) \end{aligned}$$

rearrreglando terminos, se tiene, finalmente

$$\frac{dZ}{dt} = Z [(1-m)(K + qf) - (1-m)HZ] \dots\dots(79)$$

Si en (79) se hace $(1-m)(K + qf) = a$, cuando f es constante
 $(1-m)H = b$

resulta

$$\frac{dZ}{dt} = Z(a - bZ) \dots\dots\dots(80)$$

que es de la forma de la ecuación diferencial logística dada por (2).

Para que la población tienda hacia la capacidad de sosten del

medio , dada por

$$\frac{a}{b} = \frac{(1-m)(K+qf)}{(1-m)H} = \frac{K+qf}{H} \dots\dots(81)$$

las constantes a y b deben ser positivas. Es decir,

$$a = (1-m)(K+qf) > 0$$

$$b = (1-m)H > 0$$

Las desigualdades anteriores se cumplen si,

$$(K+qf) > 0 \text{ y } H > 0 \text{ cuando } m < 1$$

$$(K+qf) < 0 \text{ y } H < 0 \text{ cuando } m > 1$$

La solución de la ecuación diferencial (80) será, de acuerdo con la fórmula (7) de la sección 3,

$$z(t) = \frac{a/b}{1 + (\frac{a}{bz_0} - 1)e^{-at}} \dots\dots\dots(82)$$

Regresando a la variable P original, resulta,

$$p^{m-1} = \frac{(K+qf)/H}{1 + (\frac{K+qf}{HP_0^{m-1}} - 1)e^{-(1-m)(K+qf)t}} \dots(83)$$

tomando recíprocos en (83),

$$p^{1-m} = \frac{1 + (\frac{K+qf}{HP_0^{m-1}} - 1)e^{-(1-m)(K+qf)t}}{(K+qf)/H}$$

multiplicando el numerador y el denominador de la última expresión por $H/(K+qf)$, resulta

$$p^{1-m} = \frac{H}{K+qf} + (\frac{1}{p_0^{m-1}} - \frac{H}{K+qf})e^{-(1-m)(K+qf)t}$$

Por último, extrayendo raíz $(1-m)$ y reorganizando algunos términos

nos se obtiene, para f constante,

$$P = \left[\frac{H}{K+qf} - \left(\frac{H}{K+qf} - P_0^{1-m} \right) e^{-(1-m)(K+qf)t} \right]^{\frac{1}{1-m}} \dots (84)$$

que es la solución que Pella y Tomlinson (19) proporcionan en su artículo.

Se puede ver en (84) que si

$$P_0 = \left(\frac{H}{K+qf} \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

la población se mantiene constante en ese valor, es decir,

$$P = P_0 = (H/(K+qf))^{1/(1-m)}$$

en todo instante. También, si

$$P_0 \neq (H/(K+qf))^{1/(1-m)}$$

la población se extingue, teóricamente cuando menos, si el coeficiente de la variable t en el exponente del número e , resulta negativo, es decir, si

$$(1-m)(K+qf) < 0$$

En el caso de que $m > 1$, la desigualdad anterior se cumple cuando

$$f > - \frac{K}{q} \dots \dots \dots (85)$$

Que la población tiende a cero a medida que el tiempo crece, se puede ver mejor en la ecuación (83). Si el coeficiente de la t en el exponente del número e , es negativo, este número queda elevado a una potencia positiva que aumenta de valor a medida que el tiempo crece, y dado que está en el denominador de (83), la fracción se va haciendo cada vez más pequeña.

Utilizando la expresión (84) el modelo es capaz de predecir capturas. Ya se había mencionado que la tasa de cap-

tura será .

$$\frac{dC}{dt} = qfP \dots\dots\dots(86)$$

y si se tienen como datos una serie de esfuerzos anuales $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ para n años, esfuerzos que se consideran constantes dentro del intervalo anual correspondiente, se tendrá que la captura para el i-ésimo año, será, usando (86),

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_i = qfP_i \dots\dots\dots(87)$$

en donde las P_i estaran dadas por

$$P_i(t) = \left[\frac{H}{K+qf_i} - \left(\frac{H}{K+qf_i} - P_{i-1}^{1-m} \right) e^{-(1-m)(K+qf_i)t} \right]^{\frac{1}{1-m}} \dots\dots(88)$$

para $0 \leq t \leq 1$, y en donde P_{i-1}^{1-m} significa $P_{i-1}^{1-m}(t)$ calculada en el instante $t = 1$ (año), mediante la fórmula correspondiente dada por (88). De la misma manera, para calcular valores de $P_{i+1}(t)$ se necesitara $P_i(1)$ que se calculará con (88) para $t = 1$.

La formula (88), obtenida de (84), sirve para calcular valores de la poblacion de peces para instantes comprendidos dentro del año i a lo largo del cual, el esfuerzo pesquero se mantuvo constante en el valor f_i , es decir, con $t = 0.5$, dará el valor de la poblacion a la mitad del año i; con $t = 1$, dará la poblacion al final del año i, que será al dato necesario para poder aplicar la formula para el año i+1, usando el esfuerzo f_{i+1} .

Regresando con (87), se tiene

$$\begin{aligned} (dC)_i &= qf_i P_i dt \\ C_i &= \int_0^1 qf_i P_i dt \\ C_i &= qf_i \int_0^1 P_i dt \dots\dots\dots(89) \end{aligned}$$

Como la integral en (89) es difícil, las capturas se calculan mediante integración numérica

Las capturas serán iguales al área bajo la curva $\frac{dC}{dt}$ contra t , o sea, el área bajo $qf_i P_i$ contra t . Aunque la curva de la función $P_i(t)$ es continua, la curva de capturas $C_i = qf_i P_i$ es escalonada debido al factor cambiante f_i , (fig. 21)

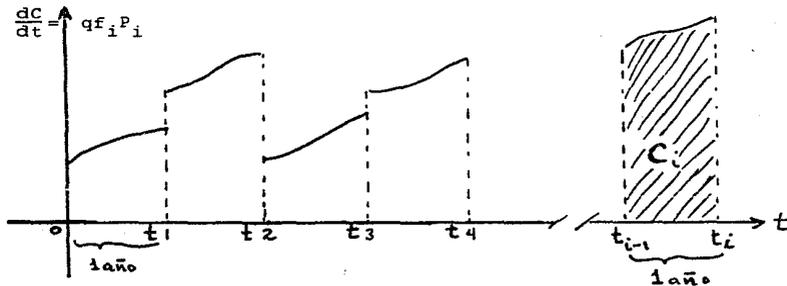


Fig. 21.- Gráfica de la tasa de captura. El área de cada barra representa la captura correspondiente al intervalo de tiempo considerado.

Para utilizar la fórmula (89) cada t_{i-1} sería cero y cada t_i sería 1, en la fig. 21.

Para realizar la integración numérica cada intervalo Δt_i de un año se subdivide en cierto número de partes iguales para que el área que da la captura pueda considerarse como una serie de trapecios. Subdividiendo en N partes iguales, la altura geométrica (distancia entre las bases) de cada trapecio sería $\Delta t_i/N$ y las bases serían $qf_i P_{ij-1}$ y $qf_i P_{ij}$, para j variando desde 1 hasta N ($j=1,2,3,\dots,N$). De manera que cada uno de los N trapecios tendría un área dada por:

$$A_j = \frac{1}{2}(qf_i P_{ij} + qf_i P_{ij-1}) \frac{\Delta t_i}{N} \dots\dots\dots (90)$$

como se muestra en la fig.22

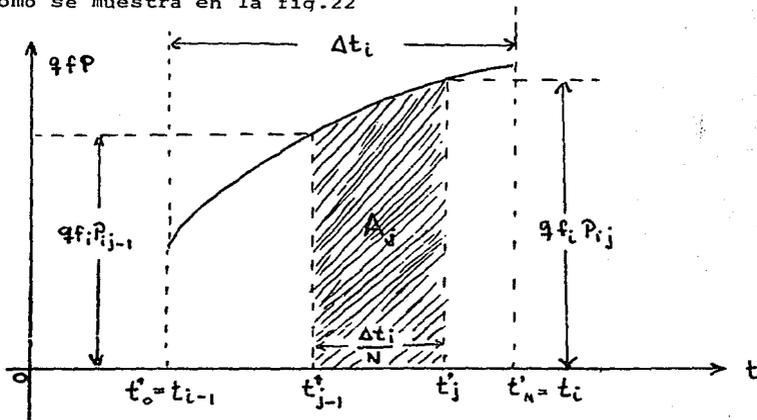


Fig. 22.- Area del j-ésimo trapecio dentro del intervalo Δt_i (desde t_{i-1} hasta t_i) para la integracion numerica de las capturas.

Entonces, la captura para el i-ésimo año estará dada por la suma de las áreas de los N trapecios formados dentro del intervalo Δt_i , es decir,

$$C_i = \sum_{j=1}^{j=N} A_j$$

sustituyendo la expresión (90) en la sumatoria anterior, se tiene

$$C_i = \sum_{j=1}^{j=N} \frac{1}{2}(qf_i P_{ij} + qf_i P_{ij-1}) \frac{\Delta t_i}{N}$$

Como la q y $\frac{1}{2}$ son constantes y la Δt_i y la f_i no dependen de j

pueden colocarse como factores antes del signo de suma,

$$C_i = \frac{qf_i \Delta t_i}{2N} \sum_{j=1}^{j=N} (P_{ij} + P_{ij-1})$$

Aunque los intervalos t_i no tienen que ser, forzosamente, de un año, los tomaremos así ($t_i = 1$) y dividiendo entre el esfuerzo f_i , obtenemos la captura por unidad de esfuerzo que denotaremos por U_i ,

$$U_i = \frac{q}{2N} \sum_{j=1}^{j=N} (P_{ij} + P_{ij-1}) \dots\dots\dots (91)$$

Por último, al dividir el intervalo Δt_i en N partes iguales cada una de una anchura $\Delta t_i/N$, los instantes correspondientes a la subdivisión serán

$t'_0 = t_{i-1}, t'_1 = \Delta t_i/N, t'_2 = 2 \Delta t_i/N, t'_3 = 3 \Delta t_i/N, \dots, t'_j = j \Delta t_i/N, \dots, t'_N = t_i$
 en resumen, el j-ésimo instante esta dado por

$$t'_j = j \Delta t_i/N \dots\dots\dots (92)$$

Como puede verse en (89) cada captura anual se integra desde $t = 0$ hasta $t = 1$, de manera que la j en la expresión (92) debe variar desde $j = 0$ hasta $j = N$, y como estamos tomando cada Δt_i igual a 1 (años), los límites de integración son los mismos en la integración numérica. Entonces

$$P_{ij} = \left[\frac{H}{K+qf_i} - \left(\frac{H}{K+qf_i} - \frac{P(1)}{i-1} \right) e^{-(1-m)(K+qf_i)t'_j} \right]^{\frac{1}{1-m}}$$

y substituyendo la expresión (92) con $\Delta t_i = 1$, resulta

$$P_{ij} = \left[\frac{H}{K+qf_i} - \left(\frac{H}{K+qf_i} - \frac{P(1)}{i-1} \right) e^{-(1-m)(K+qf_i)(j/N)} \right]^{\frac{1}{1-m}} \dots\dots\dots (93)$$

En resumen el modelo de Pella y Tomlinson predice capturas por unidad de esfuerzo mediante la fórmula (91) con las poblaciones dadas por la fórmula (93), sin embargo, para poder usar esta última fórmula es necesario conocer los valores de los parámetros H, K, q, P_0 y m . Para valorarlos, los autores proponen la técnica de ajuste de mínimos cuadrados entre las capturas por unidad de esfuerzo observadas (datos de las pesquerías) y las capturas por unidad de esfuerzo esperadas (predichas por el modelo). Si las $U_{(o)}i$ observadas se denotan como $U_{(o)}i$ y las esperadas por $U_{(e)}i$, se define la función

$$S(H, K, q, P_0, m) = \sum_{i=1}^{i=n} [U_{(o)}i - U_{(e)}i]^2 \quad \dots(94)$$

y, por definición, la mejor estimación del valor de los parámetros será aquella para la cual la función S sea mínima. En todo el desarrollo del modelo se ha supuesto siempre que los esfuerzos anuales se mantienen constantes, lo que a su vez significa que se está tratando con pesquerías reguladas y siendo este caso puede pensarse en obtener, mediante esfuerzo regulado, una situación de equilibrio en la que dP/dt sea nula. Bajo esta condición, la ecuación diferencial del modelo dada por (75), da lugar a

$$HP_{eq}^m - KP_{eq} - qf_{eq}P_{eq} = 0$$

y llamando a $qf_{eq}P_{eq}$ la captura anual C_{eq} de equilibrio, resulta

$$C_{eq} = HP_{eq}^m - KP_{eq} \quad \dots\dots\dots (95)$$

y cabe la pregunta, ¿que tamaño de población de peces haría que la captura anual fuera máxima?

La respuesta, para condiciones de equilibrio, se obtiene derivando (95) con respecto a P_{eq} ,

$$\frac{dC_{eq}}{dP_{eq}} = mHP_{eq}^{m-1} - K$$

igualando a cero la derivada anterior y resolviendo para P_{eq} , se obtiene

$$P_{opt} = \left(\frac{K}{mH}\right)^{\frac{1}{m-1}} \dots\dots\dots(96)$$

Entonces, la expresión (96) da la población optima P_{opt} con la cual se logra la máxima captura anual C_{max} en condiciones de equilibrio. El valor de C_{max} se obtiene sustituyendo la expresión para P_{opt} en (95), resulta

$$\begin{aligned} C_{max} &= (HP_{opt}^{m-1} - K)P_{opt} \\ C_{max} &= \left(H\frac{K}{mH} - K\right)\left(\frac{K}{mH}\right)^{\frac{1}{m-1}} \\ C_{max} &= \left(\frac{K}{m} - K\right)\left(\frac{K}{mH}\right)^{\frac{1}{m-1}} \dots\dots\dots(97) \end{aligned}$$

Por otro lado, también debe cumplirse que,

$$C_{max} = qf_{opt}P_{opt} \dots\dots\dots(98)$$

siendo f_{opt} el esfuerzo para mantener la población en el nivel P_{opt} . Igualando (98) con (97) y usando (96), se obtiene

$$qf_{opt}\left(\frac{K}{mH}\right)^{\frac{1}{m-1}} = \left(\frac{K}{m} - K\right)\left(\frac{K}{mH}\right)^{\frac{1}{m-1}}$$

de donde

$$f_{opt} = \left(\frac{K}{m} - K\right)/q$$

$$f_{opt} = \frac{K(1-m)}{mq} \dots\dots\dots(99)$$

Además, sin pesca, la capacidad de sostén del medio permite una población máxima tal que, en la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = HP^m - KP$$

la derivada se anula, y resulta

$$HP_{\max}^m - KP_{\max} = 0$$

$$P_{\max} = (K/H)^{1/(m-1)} \dots\dots\dots(100)$$

Ahora, si r se define como la razón entre el tamaño de la población cuando la pesquería se observa por primera vez (P_0) y el tamaño máximo de dicha población (P_{\max}), se tiene que

$$r = \frac{P_0}{P_{\max}}$$

$$r = P_0 (K/H)^{1/(m-1)} \dots\dots\dots(101)$$

Por último, si U_{\max} es la captura por unidad de esfuerzo correspondiente a la P_{\max} , es decir, si se dejara que la población alcanzara la P_{\max} dada por la capacidad de sostén del medio y luego se empezara la pesca con un esfuerzo f que permitiera que la población se mantuviera en equilibrio en P_{\max} , se tendría,

$$U_{\max} = \frac{qfP_{\max}}{f}$$

$$U_{\max} = q(K/H)^{1/(m-1)} \dots\dots\dots(102)$$

y con esto se tendrían 3 cantidades, F_{opt} , r y U_{\max} que dependen del valor de los parámetros del modelo H, K, q, m y P_0 , dadas por las expresiones (99), (101) y (102). De dichas expresiones se

obtiene

$$H = (m/(1-m))(q/U_{\max})^{m-1} (qf_{\text{opt}}) ; \quad K = (m/(1-m))(qf_{\text{opt}})$$

$$P_0 = (rU_{\max})/q \quad \dots\dots\dots(103)$$

De manera que el tamaño de la población dado por la ecuación (93) puede ponerse en función de f_{opt}, q, r y U_{\max} , utilizando el conjunto de ecuaciones (103).

Resulta entonces que la función $S(H, K, q, m, P_0)$ puede cambiarse a una función $S(f_{\text{opt}}, q, r, m, U_{\max})$, y como ya se dijo, la mejor estimación del valor de los parámetros f_{opt}, q, r, m y U_{\max} , será aquella para la cual S sea mínima.

La búsqueda del mínimo se realiza mediante métodos numéricos y a través de un programa de computación que los mismo autores, Pella y Tomlinson, (1964), proporcionan en su artículo y al cual llaman GENPROD. Como dicho programa requiere de una estimación inicial de los parámetros del modelo, es mucho más fácil para un investigador de pesquerías estimar f_{opt}, r y U_{\max} que H, K y P_0 . Esta es la razón para el cambio de parámetros dado por las ecuaciones (103).

A grandes rasgos el programa GENPROD trabaja de la siguiente manera: Dada una m que se mantiene fija, se le debe proporcionar una estimación inicial de los valores de f_{opt}, q, r y U_{\max} . Luego, dejando fijos 3 de los valores iniciales, por ejemplo q, r y U_{\max} , empieza a explorar la cuarta variable f_{opt} , dando valores un poco mayores o un poco menores al inicial, y calculando cada vez el valor de la función S ; estos ensayos conti -

núan hasta lograr un valor de S tal que, cualquier nueva variación del valor de f_{opt} produzca un aumento en S . Logrado lo anterior, la exploración continúa con cada una de las 3 variables restantes. Así se llega a una cuarteta de valores f_{opt}^*, q^*, r^* y U_{max}^* , tales que cualquier ulterior variación en el valor de alguno de ellos produce un aumento en el valor de S . De esta manera se sabe que la S es mínima y que los valores f_{opt}^*, q^*, r^* y U_{max}^* proporcionan la mejor estimación de los parámetros del modelo. Luego con el conjunto de expresiones (103) se encuentran los valores correspondientes de H, K y P_0 , es decir, H^*, K^*, P_0^* . Cabe hacer notar que los únicos datos de campo que necesita el modelo son los esfuerzos f_i y las capturas por unidad de esfuerzo $U_{(0)i}$ observadas. Y también que, para este modelo no se analizó el carácter estable de las soluciones mediante las técnicas matemáticas reseñadas en las secciones anteriores, porque desde un principio se demostró que podía reducirse al caso logístico ya estudiado en la sección 3.

Para hacer una aplicación práctica del modelo de Pella y Tomlinson que se ha discutido, se obtuvieron datos de capturas y esfuerzos anuales para 4 zonas del Pacífico oriental que históricamente se caracterizan por una gran producción de atun amarilla y de barrilete. Los límites geográficos de las zonas son los siguientes (figs. 23 y 24):

ZONA A.- Corresponde a la península de Baja California; limitada al norte por el paralelo 30° , al sur por el paralelo 20° , al oeste por el meridiano 115° y al este por la costa

de la República Mexicana.

ZONA B.- Corresponde la golfo de Tehuantepec incluyendo aguas centroamericanas; limitada al norte por el paralelo 15°, al sur por el paralelo 10°, al oeste por el meridiano 95° y al este por la costa de Mexico, Guatemala el Salvador, Honduras, Nicaragua y parte de Costa Rica.

ZONA C.- Corresponde a Costa Rica, golfo de Panamá y aguas de Colombia; limitada al norte y al este por la costa de Costa Rica, Panamá y Colombia, al sur por el ecuador y al oeste por el meridiano 85°.

ZONA D.- Corresponde al golfo de Guayaquil; limitada al norte por el ecuador, al sur por el paralelo 5° latitud sur, al oeste por el meridiano 85° y al este por la costa del Ecuador y parte del Perú.

Los datos fueron recabados de los boletines de la Comision Interamericana del atún tropical desde el año 1963 hasta el año de 1978.

En realidad, los datos vienen dados por cada trimestre y para zonas cuyas áreas son mucho más pequeñas que las de las zonas arriba descritas. La Comisión del atún proporciona datos de esfuerzos y capturas para areas de 1° de latitud por 1° de longitud y para areas de 5° de latitud por 5° de longitud. Lo que se hizo para esta aplicación del modelo de Pella y Tomlinson fue sumar los datos de todas la pequeñas áreas que quedaran incluidas dentro de las zonas de estudio.

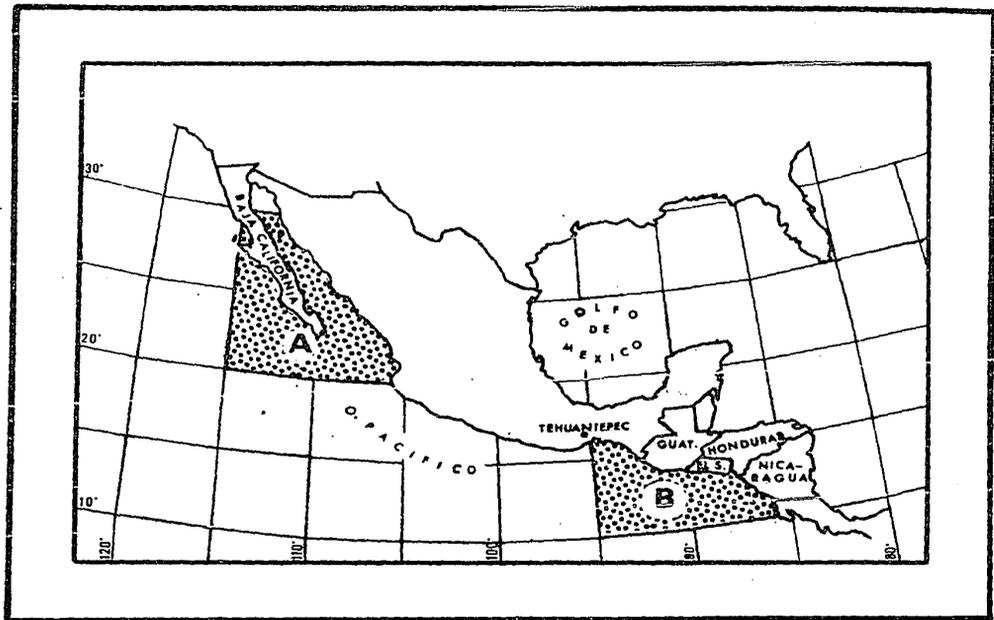


Fig. 23. Localización geográfica de las zonas de estudio
A y B.

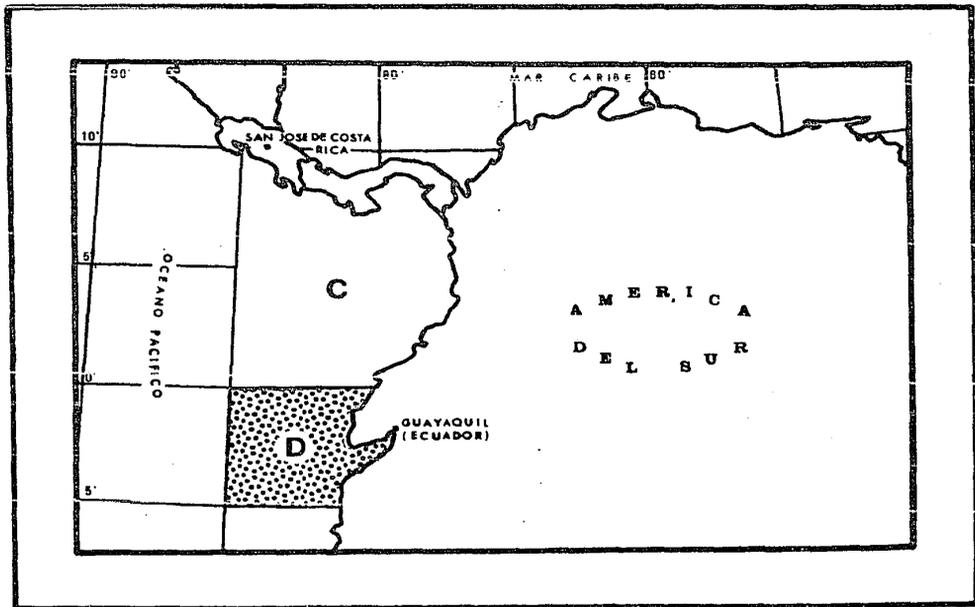


Fig. 24. Localización geográfica de las áreas de estudio
C y D

En la tabla I se muestran los datos de esfuerzos E, capturas C y capturas por unidad de esfuerzo U; todos estos datos estan dados por trimestres, numerados 1,2,3, 4, en orden cronológico dentro de cada periodo anual. Se indica tambien la zona y el año a los que pertenecen los datos, por ejemplo C-66, significa datos de la zona C para el año de 1966.

La unidad de esfuerzo es el "día de barco". Se trata de una unidad estandarizada que se basa en el costo de operacion diario de un barco pesquero, en este caso para barcos con red de cerco. La capturas estan medidas en toneladas y por consiguiente, la U estara medida en toneladas por día de barco.

En el reglon que dice ANUAL se encuentran : el esfuerzo anual, o sea, la suma de los 4 esfuerzos trimestrales; la captura anual, tambien igual a la suma de las 4 capturas trimestrales; y la captura por unidad de esfuerzo anual, es este caso no es la suma de los trimestres, sino el cociente de dividir la captura anual entre el esfuerzo anual. Estos datos anuales fueron los utilizados para aplicar el modelo.

La tabla I comprende 4 paginas, de la pag. 179 hasta la pag. 182.

El modelo de producción generalizado fue aplicado a las 4 zonas A,B,C y D fijada la m en el valor 2 ($m = 2$) con lo cual, en realidad se aplico el modelo de Schaefer. El programa GENPROD se corrio para intervalos de tiempo de un año para el periodo, 1963,1978 .

En la tabla II y III, se muestran los valores de la mejor estimacion de los parametros del modelo, (pag. 183).

La tabla IV, muestra la captura máxima definida en la fórmula (97), la población óptima definida en (96) y la población máxima definida en (100).

Con los valores encontrados para los parámetros se puede escribir la fórmula para calcular los tamaños de la población en cada una de las zonas consideradas. Para la Zona A (BAJA CALIFORNIA), la ecuación

$$P_n = \frac{(K+qf_n)/H}{1 + \frac{K+qf_n}{HP} e^{-(K+qf_n)}} \dots\dots(104)$$

que se obtiene de la ecuación (83) para $m = 2$ y $t = 1$, queda

$$P_n = \frac{(-1 \times 10^{-3} + 1.4782 \times 10^{-6} f_n) / (-1.311 \times 10^{-10})}{1 + \frac{(-1 \times 10^{-3} + 1.4782 \times 10^{-6} f_n - 1) e^{(-1 \times 10^{-3} + 1.4782 \times 10^{-6} f_n)}}{-1.311 \times 10^{-10} P_{n-1}}}$$

para $n = 1, 2, 3, \dots, 15, 16$.

Usando los esfuerzos anuales $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{16}$, se pueden calcular las poblaciones anuales comenzando con el dato de la población inicial P_0 para calcular P_1 , luego con P_1 se calcula P_2 , con P_2 se calcula P_3 y así sucesivamente.

En la tabla V, de la pag. 184, se muestran los tamaños de población calculadas con la fórmula (104) y el valor de los parámetros correspondientes a cada una de las zonas dados en la tabla III. Las gráficas de las poblaciones están contenidas en las figuras 25, 26, 27 y 28.

En esta misma sección, en la pag. 130, se dijo que en el caso de que

$$m > 1 \text{ y } f > -\frac{K}{q}$$

(desigualdades dadas en (85)), la población tiende a la extinción. Y precisamente este es el caso que se presenta en las zonas A y D (CALIFORNIA Y GUAYAQUIL). Para dichas zonas, el modelo suministra los valores: (ver tablas II y III):

$$\text{ZONA A .- } K = -1.00 \times 10^{-3} \text{ y } q = 1.48 \times 10^{-6}$$

de donde $-\frac{K}{q} = 675.7$ días de barco/año

y puede verse en la tabla I que los esfuerzos anuales siempre son mayores que 675.7; es por esto que en la gráfica de la fig. 25, cada segmento de línea quebrada es un pedazo de curva que asintóticamente debe tender a $P = 0$.

$$\text{ZONA D.- } K = -1.00 \times 10^{-3} \text{ y } q = 1.40 \times 10^{-6}$$

de donde $-\frac{K}{q} = 714.3$ días de barco/año

y tal como sucede para la zona A, los valores de los esfuerzos anuales siempre son mayores que 714.3 y puede verse en la fig 28, que la gráfica de la zona D es similar a la de la zona A.

En ambas zonas los esfuerzo y capturas son mayores que los valores C_{\max} y f_{opt} , de manera que, de acuerdo con el modelo, parece que existe una sobreexplotación del recurso. Sin embargo, como puede verse en las figs. 25 y 28, hasta 1978, las poblaciones son mayores que la P_{opt} correspondiente, (3814831.9 toneladas para

la zona A y 5744823.9 toneladas para la zona D, valores que aparecen en la tabla IV), lo que significa que las zonas en cuestión soportan la sobreexplotación. Por otro lado, con las rectas de ajuste (ver figs. 25 y 28) puede predecirse el momento, si la sobreexplotación persiste, en el que las zonas alcanzarán el nivel de población dado por las respectivas P_{opt} .

En la zona A, el descenso de población se ajusta muy bien a la recta

$$P_n = 4347967 - 18896 n$$

y si los esfuerzos y las capturas siguieran haciendo descender la población al ritmo marcado por la recta, se puede calcular el valor de n para el cual P_n alcanza el valor de la P_{opt} de la zona; entonces, sustituyendo P_n por el valor 3814831.9 y despejando n , resulta

$$n = \frac{4347967 - 3814832}{18896} = 28 \text{ años}$$

Como el valor $n=1$ corresponde a 1963, entonces para el año

$$1963 + 27 = 1990$$

el nivel de la población de la zona A (BAJA CALIFORNIA) alcanzaría el valor P_{opt} .

Procediendo en forma similar para la zona D (GUAYAQUIL) se encuentra que la P_{opt} se alcanzaría en dicha zona para el año de 1999.

Se podría, entonces, recomendar a las pesquerías que llegado el momento, se ajustaran a los valores de C_{max} y de f_{opt} de la zona correspondiente para no poner en peligro al recurso pesquero.

En general, la forma de las gráficas de la población mostradas en las figs. 25, 26, 27 y 28 se puede explicar analizando la ecuación logística,

$$P_n = \frac{\frac{K+qf_n}{H}}{1 + \left(\frac{K+qf_n}{HP} - 1\right)e^{(K+qf_n)t'}}$$

que genera el tamaño de la población dentro de los intervalos de tiempo de 1 año, para lo cual el valor de t' debe cumplir

$$0 \leq t' \leq 1$$

En las zonas A y D se pasa de la población P_{n-1} para $t'= 0$, a la población P_n para $t'= 1$, por medio de una función estrictamente decreciente puesto que, para todos los valores de los esfuerzos observados f_n , el exponente del número e es positivo. De manera que las gráficas de las figs. 25 y 28 se componen de pedacitos de funciones decrecientes. Si en cada uno de estos pedacitos se dejara que $t' \rightarrow \infty$, cada uno se convertiría en una curva que asintóticamente se acercaría a $P = 0$.

Por otro lado, en las zonas B y C, el exponente del número e, o sea $K+qf_n$, siempre es negativo para cualquier valor de los esfuerzos observados f_n , de manera que, manteniendo el esfuerzo constante, la población tendería al valor límite

$$\frac{K+qf_n}{H} \dots\dots\dots(105)$$

cuando $t' \rightarrow \infty$. Debido a que el esfuerzo anual tiene valores diferentes en diferentes años, dentro de cada uno de estos intervalos de un año, la población tendrá la tendencia a alcanzar el

valor límite correspondiente dada por (105). Esto trae como consecuencia que

$$\begin{aligned} \text{si } P_{n-1} > \frac{K+qf_n}{H} & \text{ resulta } P_n < P_{n-1} \\ \text{si } P_{n-1} < \frac{K+qf_n}{H} & \text{ resulta } P_n > P_{n-1} \end{aligned} \dots\dots(106)$$

por lo tanto, las gráficas de las figs. 26 y 27, tienen partes crecientes y decrecientes de acuerdo con el cumplimiento de una o de otra de las condiciones dadas en (106). Las partes crecientes serán cóncavas hacia arriba si

$$P_{n-1} < \frac{K+qf_n}{2H} \text{ (poblacion en el punto de inflexión)}$$

y cóncavas hacia abajo si

$$P_{n-1} \geq \frac{K+qf_n}{2H}$$

Las partes decrecientes siempre son cóncavas hacia arriba.

Todo lo anterior se basa en las características de la curva logística discutida en la sección 3. (Ver fig. 7).

En la tabla VI se muestran los valores de las poblaciones límites, en cada uno de los años involucrados en este estudio, para las zonas B y C. Y en las gráficas correspondientes (figs. 26 y 27) están representadas por líneas rectas horizontales. Solamente que, en la zona C, únicamente dos valores de las poblaciones límite cayeron dentro del rango de valores usados en la escala del eje vertical, [4.46, 4.67] millones de toneladas.

Por último, en las figs. 29, 30, 31 y 32, se puede observar el ajuste logrado entre las capturas observadas y las capturas esperadas generadas por el modelo.

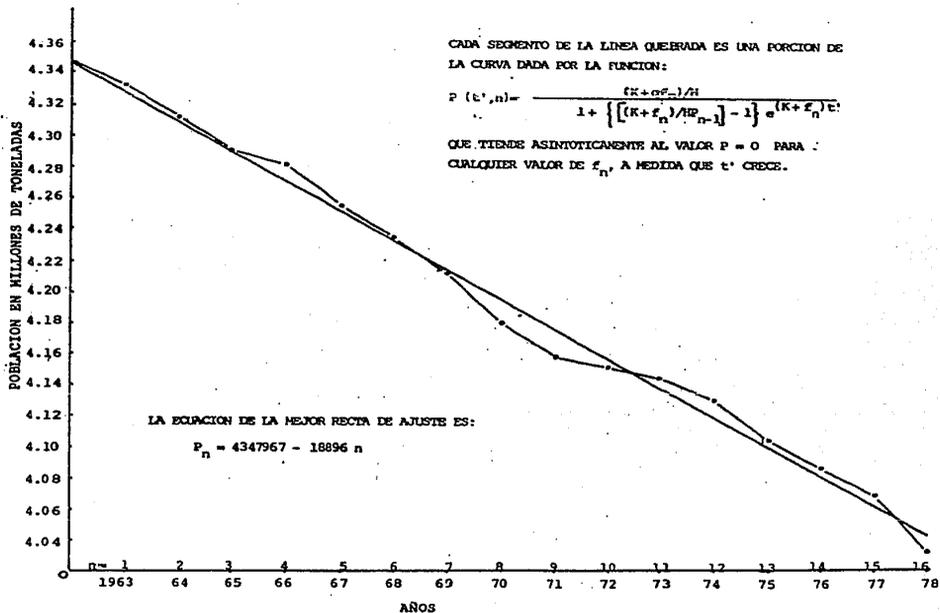


Fig. 25. Tamaño de la población de peces (atún sleta amarilla + barrilete) predicha por el modelo de Pella y Tomlinson, para la Zona A.

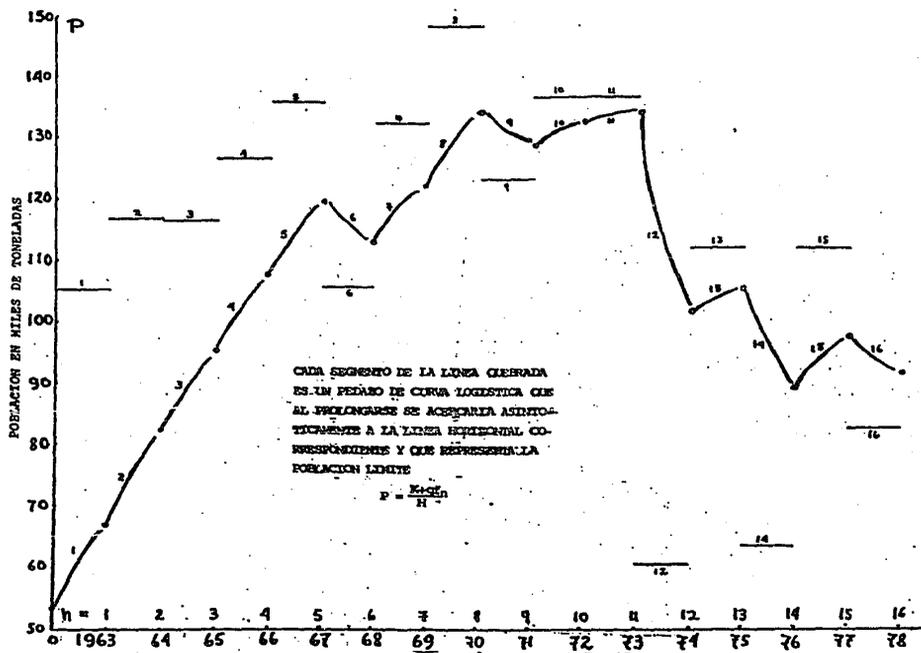


Fig. 26. Tamaño de la población de pecas (atún aleta amarilla + barrilete) predicha por el modelo de Pella y Tomlinson, para la Zona B

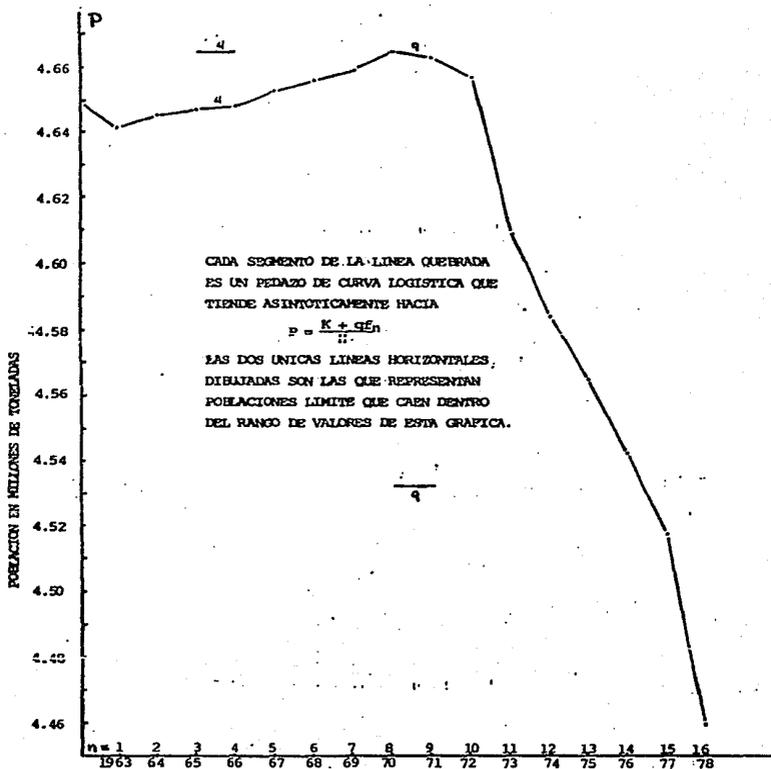


Fig. 27. Tamaño de la población de peces (atún aleta amarilla + barrilete), predicha por el modelo de Pella y Tomlinson, para la Zona C.

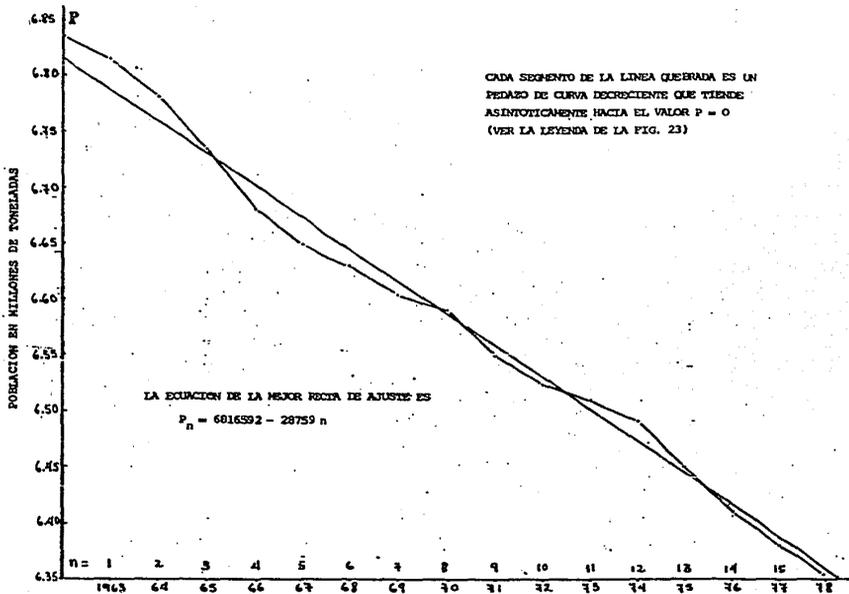


Fig. 28. Tamaño de la población de peces(atún aleta amarilla + barrileto) predicha por el modelo de Fella y Tomlinson, para la Zona D.

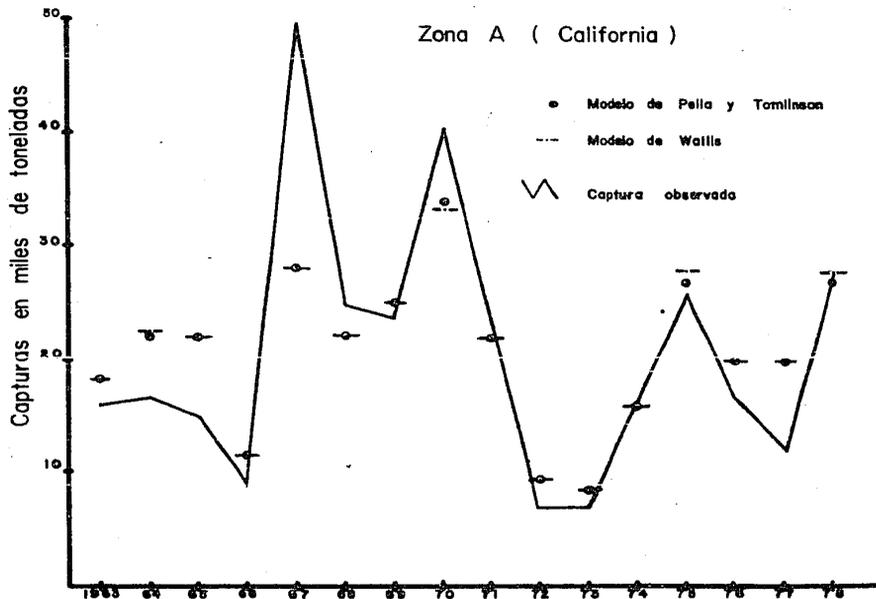


Fig.29. Comparación entre las capturas observadas y las generadas por el modelo de Pella y Tomlinson y por el de Wallis, para la Zona A.

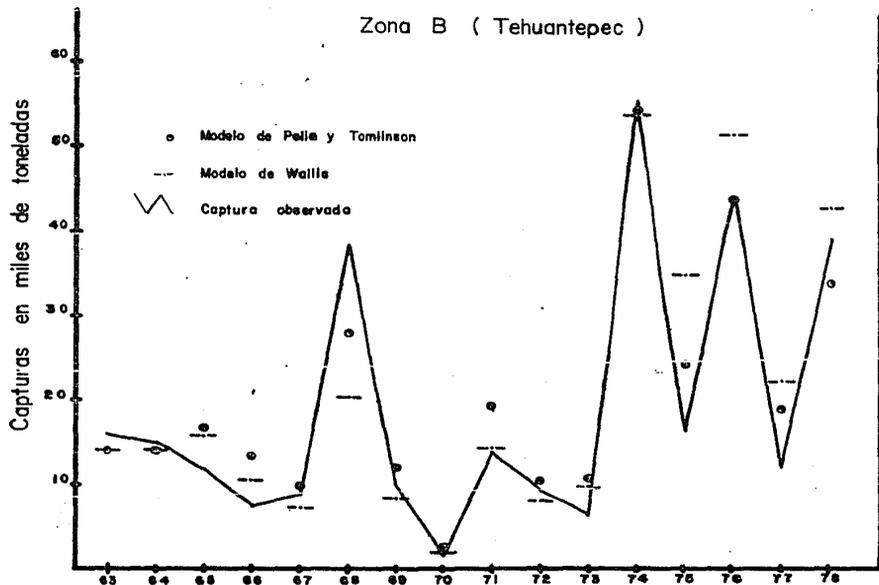


Fig. 30. Comparación entre las capturas observadas y las generadas por el modelo de Pella y Tomlinson y por el de Wallis para la zona B.

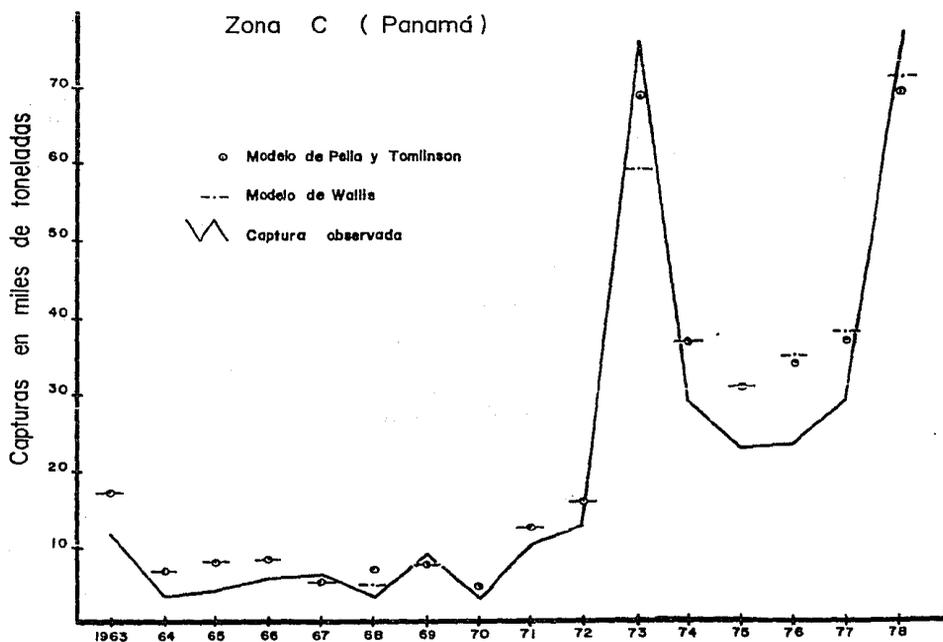


Fig. 31. Comparación entre las capturas observadas y las generadas por el modelo de Pella y Tomlinson y por el de Wallis para la zona C.

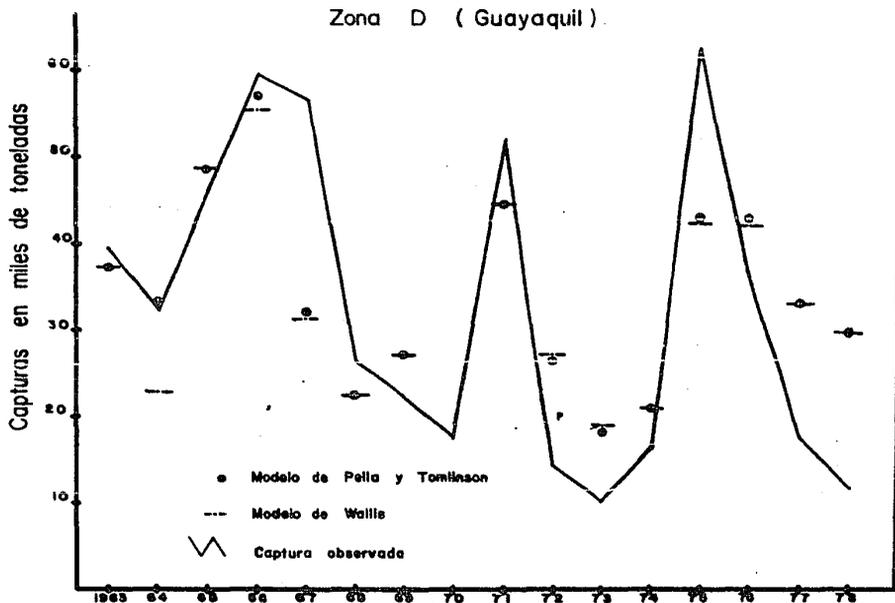


Fig. 32. Comparación entre las capturas observadas y las generadas por el modelo de Pella y Tomlinson y por el de Wallis para la zona D.

SECCION 12

APLICACION DE UN MODELO ESTOCASTICO SENCILLO (MODELO DE WALLIS) PARA GENERAR NUEVOS TAMAÑOS DE POBLACION EN LAS ZONAS DE ESTUDIO CONSIDERANDO UN AMBIENTE VARIABLE.

En esta última parte del trabajo de tesis se aplicará un modelo estocástico sencillo para tratar de encontrar efecto que un ambiente aleatorio puede tener sobre la población de peces. El modelo de Pella y Tomlinson, aplicado en la sección anterior, es un modelo determinista que considera un ambiente estable.

La suposición básica del modelo estocástico que se va a aplicar, con respecto a la población, es la existencia de un valor de equilibrio, es decir, se supone que la población varía con respecto a un nivel de equilibrio sin apartarse mucho de él. Parece ser que muchas especies de peces siguen tal comportamiento y en consecuencia, tenemos que suponer que las especies de los túnidos lo siguen.

El autor del modelo, Wallis (1975), lo utiliza para de terminar el efecto que la descarga de desechos en sistemas acuá ticos produce en las poblaciones de peces; empieza por proponer que el cambio anual de la población puede ser representado por un proceso markoviano de primer orden, es decir, un proceso estocástico en el que la posibilidad de la ocurrencia de un resultado en un experimento, depende solamente del resultado de un experimento inmediato anterior.

Wallis, basado en lo anterior, escribe:

$$P_{n+1} = f(P_n, b, E, G_n, G_w)$$

siendo P_n el tamaño de la población en el año n ; P_{n+1} , el tamaño de la población en el año $n+1$; b , un parámetro relacionado con la estabilidad de la población; E , es el valor de equilibrio de la población; G_n es una función que representa la distribución de las variaciones de las condiciones ambientales por causas naturales; y G_w es otra función relacionada con la distribución de las variaciones del ambiente debidas a las descargas de desechos.

Considerando que las zonas de estudio A, B, C y D no sufren contaminación, puede ignorarse la función G_w y en ese caso,

$$P_{n+1} = f(P_n, b, E, G_n)$$

Para determinar la forma de la función f , el autor del modelo considera que al cambio total anual, está compuesto por un cambio determinístico y un cambio estocástico, es decir

$$P_{n+1} - P_n = \Delta P_d + \Delta P_e \dots\dots\dots(107)$$

Después, suponiendo que la población E de equilibrio existe, considera lógico que

$$\text{si } P_n > E \text{ resultará } P_{n+1} < P_n \dots\dots\dots(108)$$

o sea, en una situación de sobrepoblación habrá mayor competencia entre los individuos jóvenes y los de mayor edad, se estimulará la depredación y el parasitismo, se incrementará la probabilidad de aparición de epidemias y se presentará una disminución de recursos alimenticios. En consecuencia la población dis-

minuirá de tamaño, tendiendo a regresar al valor de equilibrio, en un ambiente estable. En forma similar,

$$\text{si } P_n < E \text{ resultará } P_{n+1} > P_n \text{(109)}$$

apareciendo, otra vez, la tendencia a regresar al valor E.

La forma más simple de cumplir con (108) y (109) es proponiendo que el cambio determinístico (ambiente estable) sea directamente proporcional a la diferencia entre el valor actual de la población y el valor de equilibrio. o sea,

$$\Delta P_d = b(E - P_n)$$

de manera que, en ambiente estable, el cambio anual de la población estaría regido por

$$P_{n+1} - P_n = b(E - P_n) \text{(110)}$$

Ahora, una vez más, se presenta el problema de la estabilidad del modelo dado en (110). El análisis que se hará a continuación, no lo considera Wallis; él, sin dar razones, restringe el valor de el parámetro b al intervalo [0,1]

Como se trata de establecer la estabilidad de las soluciones del modelo determinista (110), se deberá buscar primero dichas soluciones.

De (110) se obtiene

$$P_{n+1} = bE + P_n(1 - b) \text{(111)}$$

y de aquí

$$P_1 = bE + P_0(1 - b) \text{(111a)}$$

$$P_2 = bE + P_1(1 - b) \text{(111b)}$$

sustituyendo (111a) en (111b), resulta

$$P_2 = bE + bE(1 - b) + P_0(1 - b)^2 \text{(111c)}$$

Aplicando otra vez (111) para obtener P_3 , se tiene

$$P_3 = bE + P_2(1 - b) \quad \dots\dots(111d)$$

sustituyendo (111c) en (111d), resulta

$$P_3 = bE + bE(1 - b) + bE(1 - b)^2 + P_0(1 - b)^3$$

Procediendo en forma similar se obtiene

$$P_4 = bE + bE(1 - b) + bE(1 - b)^2 + bE(1 - b)^3 + P_0(1 - b)^4$$

Por lo tanto, es fácil generalizar y escribir

$$P_n = bE + bE(1 - b) + bE(1 - b)^2 + \dots\dots\dots + bE(1 - b)^{n-1} + P_0(1 - b)^n$$

$$P_n = bE [1 + (1 - b) + (1 - b)^2 + (1 - b)^3 + \dots\dots + (1 - b)^{n-1}] + P_0(1 - b)^n$$

Los términos dentro del paréntesis cuadrado constituyen una progresión geométrica y pueden compactarse en una sumatoria

$$P_n = \left[bE \sum_{j=1}^n (1 - b)^{j-1} \right] + P_0(1 - b)^n \quad \dots\dots(112)$$

y en cualquier libro de álgebra elemental se puede encontrar el valor de la suma de términos que forman una progresión geométrica. La fórmula es

$$\sum_{j=1}^n a^{j-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Aplicando esta última fórmula en la ecuación (112), resulta,

$$P_n = bE \frac{1 - (1 - b)^n}{b} + P_0(1 - b)^n$$

y finalmente

$$P_n = E - (E - P_0)(1 - b)^n \quad \dots\dots\dots(113)$$

Entonces, en ambiente estable, la población varía de acuerdo con la solución dada por (113).

Analizando la solución (113) se puede ver lo siguiente :

- a) si $b = 0$, la solución es $P_n = P_0$ para toda n . La población permanece constante.
- b) si $0 < b < 1$, entonces, $0 < (1-b)^n < 1$ y, en consecuencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-b)^n = 0$$

resultando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = E$$

manteniéndose $P_n < E$ si $P_0 < E$; lo que significa que P_n se acerca asintóticamente a E por debajo. En cambio, si $P_0 > E$, se mantiene $P_n > E$, acercándose a E por arriba. (Fig. 33)

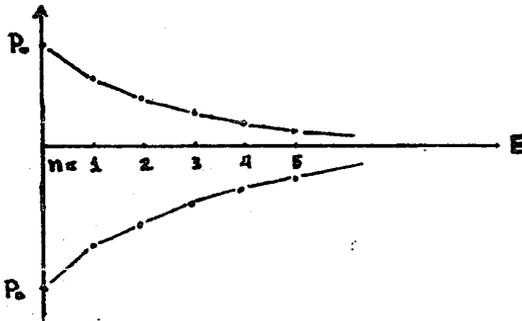


Fig. 33. Comportamiento de la solución de la parte determinística del modelo de Wallis para $0 < b < 1$.

- c) si $b = 1$, $P_n = E$ para cualquier P_0 , es decir, la población da un brinco, en un año, del valor P_0 al valor E y ahí se mantiene.
- d) si $1 < b < 2$ entonces $|1-b|^n < 1$, y se puede escribir,

$$(1-b)^n = (-1)^n (b-1)$$

En este caso la solución se puede dividir en 2 partes, una para n par y otra para n impar, $n = 2j$ y $n = 2j-1$, respectivamente, con $j = 1, 2, 3, \dots, \infty$, entonces,

$$P_{2j-1} = E + (E - P_0)(b-1)^{2j-1}$$

$$P_{2j} = E - (E - P_0)(b-1)^{2j}$$

En ambos casos puede verse que,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_{2j-1} = \lim_{j \rightarrow \infty} P_{2j} = E$$

En el caso de que $P_0 < E$, las poblaciones impares ($n = 2j-1$) serán mayores que E y las poblaciones pares ($n = 2j$) serán menores que E . El resultado es que la población oscila arriba y abajo del valor E , acercándose asintóticamente a él. (Fig. 34)

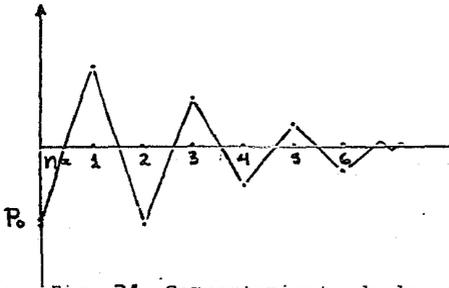


Fig. 34. Comportamiento de la solución de la parte determinística del modelo de Wallis para $0 < b < 2$.

El caso en que $P_0 > E$ es similar, con las P pares arriba de E y

las impares debajo.

e) si $b = 2$, las fórmulas para n impar y n par, se convierten en,

$$P_{2j-1} = E + (E - P_0) = 2E$$

$$P_{2j} = E - (E - P_0) = P_0$$

Es decir, la población oscila entre 2 niveles constantes.

f) si $b > 2$, entonces $(b-1)^n > 1$ y tanto las poblaciones pares como las impares irán tomando valores absolutos cada vez mayores a medida que el tiempo crece, alejándose cada vez más del valor de equilibrio E . En este caso

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |P_{2j-1}| = \lim_{j \rightarrow \infty} |P_{2j}| = \infty$$

En resumen, con respecto a la estabilidad de las soluciones de la parte determinística del modelo de Wallis, resulta que:

- 1) solo en el caso (f) la solución resulta inestable.
- 2) en los casos (b) y (d) la solución resulta asintóticamente estable; sin oscilaciones en el caso (b) y con oscilaciones en el caso (d).
- 3) el caso (e) hay estabilidad neutral, la población oscila sin amortiguarse; tenemos otra vez un caso similar al del péndulo simple sin fricción. A este tipo de oscilación no amortiguada y por lo tanto, mantenida para siempre, Robert M. May (1973) los bautiza como "patológicamente estables". Que es el mismo caso de el modelo depredador-presa de Lotka y Volterra.

4) los casos restantes son de población cosntante.

Wallis, al restringir el valor de b al intervalo entre 0 y 1, impide que la población oscile en ambiente estable y por consiguiente, cualquier oscilación resultante en una población va a ser causada únicamente por la parte estocástica del modelo. Con respecto es esta parte, propone, que el cambio estocástico sea

$$\Delta P_e = G_n P_n$$

con una función G_n dada por,

$$G_n = e^k - 1$$

que resulta ser una distribución sesgada con una variable aleatoria k, normalmente distribuída con media igual a cero y sin ninguna correlación entre el número k_n y el número k_{n+m} para $m \geq 1$. Se tiene entonces el modelo completo

$$P_{n+1} - P_n = P_d + P_e$$

$$P_{n+1} - P_n = bE(P - P_n) + (e^k - 1)P_n$$

el cual, rearregalndo términos puede esscribirse

$$P_{n+1} = bE + (e^k - b)P_n \dots\dots\dots(114)$$

Debe quedar claro que en (114) hay una k para cada n, es decir, estrictamente se debió escribir

$$(e^{k_n} - b)P_n$$

y para no hacer la notación engorrosa llamaremos B_n a dicho término y A al término bE. Entonces

$$P_{n+1} = A + B_n P_n \dots\dots\dots(115)$$

Aplicando (115), se obtiene,

$$P_1 = A + B_0 P_0$$

$$P_2 = A + B_1 P_1 = A + B_1 (A + B_0 P_0)$$

$$P_2 = A + AB_1 + P_0 (B_0 B_1) \dots \dots \dots (115a)$$

$$P_3 = A + B_2 P_2 = A + B_2 (A + AB_1 + P_0 B_0 B_1)$$

$$P_3 = A + AB_2 + AB_1 B_2 + P_0 B_0 B_1 B_2$$

Procediendo en forma similar se encuentra que, por ejemplo,

$$P_7 = A + AB_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 + AB_2 B_3 B_4 B_5 B_6 + AB_3 B_4 B_5 B_6 + AB_4 B_5 B_6 + AB_5 B_6 + AB_6 + P_0 B_0 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6$$

Lo anterior se puede generalizar, escribiendo

$$P_n = A + A \sum_{j=0}^{n-2} \prod_{i=j+1}^{n-1} B_i + P_0 \prod_{i=0}^{n-1} B_i \dots \dots (116)$$

De manera que (116) es la solución de la ecuación (115). Wallis en su artículo demuestra la estabilidad de esta solución (Wallis, 1975).

Tomando como valor de P_0 el encontrado por el modelo de Pella y Tomlinson y usando

$$\frac{P_{n+1}}{E} = b + (e^{k_n} - b) \frac{P_n}{E}$$

$$P_{n+1} = b + (e^{k_n} - b) p_n \dots \dots \dots (117)$$

se generarán los tamaños de población para cada zona de estudio haciendo que el valor de equilibrio E sea igual a la media aritmética de las poblaciones generadas por el modelo de Pella y Tomlinson, mostradas en la tabla V. Como se usará (117) en la que las poblaciones están normalizadas (divididas entre E) y E va ser igual a la media aritmética, entonces la media aritmética

tica normalizada sera E/E , es decir, igual a 1, y por consiguiente el valor de la población de equilibrio normalizada también será igual a 1.

Para general ños valores de la variable aleatoria k se utilizará el método propuesto por Marsaglia y Bray (1964).

La receta es como sigue:

Cada conjunto de 100 valores de k debe ser generado utilizando

$$k=2(U_1+ U_2+ U_3 -1.5) \quad 86 \text{ veces, y}$$

$$k=1.5(U_1+ U_2-1) \quad 14 \text{ veces,}$$

siendo U_1, U_2 y U_3 números al azar uniformemente distribuidos entre 0 y 1, tales como los que genera una computadora. De esta manera k resulta ser una variable normalmente distribuida con media igual a cero y varianza igual a 1. Si queremos una variable con media igual a cero pero con una varianza o desviación estandar diferente, multiplicamos cada k por la desviación estándar d^* requerida, y (117) resulta,

$$p_{n+1} = b + (e^{d^*kn} - b)p_n \quad \dots\dots\dots(118)$$

Entonces, se le va pedir a una computadora que aplique (118), dándole como datos la población inicial p_0 (normalizada) y los valores de b y d^* , procediendo de la siguiente manera:

Va a calcular los valores de p_1, p_2, p_3 , etc. variando el valor de b de 0.1 en 0.1 comenzando en $b=0.1$, es decir, b tomará los valores 0.1, 0.2, 0.3,, hasta 1. Además, para cada uno de los valores que tome b , la d^* debe cambiar también desde $d^*=.1$ hasta $d^*=1$, en saltos de 0.1 cada vez. Y se le pedirá calcular 30 poblaciones, para cada pareja de b y d^* .

Por ejemplo, con $b = 0.1$ y $d^* = 0.1$, para valores de $n = 1, 2, 3, 4, \dots, 30$ y usando la fórmula

$$P_n = 0.1 + (e^{0.1k_n} - 0.1)P_{n-1}$$

calculará, $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{30}$, escogiendo al azar 30 números k generados de acuerdo con la pareja de fórmulas (117 a). Luego se obtendrá la media aritmética de las primeras 16 poblaciones (para compararla después con la media de las 16 poblaciones dadas por el modelo de Pella y Tomlinson) y la desviación estándar correspondiente. Luego calculará la media de todo el conjunto de las 31 poblaciones y la desviación estándar correspondiente (con propósitos de predicción), (31 poblaciones incluyendo P_0)

El siguiente paso será cambiar el valor de la d^* a 0.2 dejando el mismo valor de 0.1 para la b y repetir los cálculos de medias y desviaciones estándar y así sucesivamente hasta que d^* alcance el valor 1. Luego se cambiará el valor de b a 0.2 y se repetirá todo el procedimiento empezando, otra vez, con $d^* = 0.1$ hasta que se alcance el valor $d^* = 1$. El proceso se seguirá repitiendo hasta que b tenga el valor 1.

Por recomendaciones de Wallis, este procedimiento se so correrá en la computadora por lo menos 20 veces. Esto equivale a calcular para el conjunto de poblaciones (31 incluyendo P_0) 2000 medias y 2000 desviaciones estándar a 16 años y 2000 medias y 2000 desviaciones estándar a 31 años, para cada una de las 4 zo nas de estudio A, B, C y D. Y el proceso se alarga todavía más si se incluye el modelo que Wallis en su artículo (1975) llama el modelo II, dado por

$$P_{n+1} = \frac{EP_n}{E - b(E - P_n)} + (e^{kn} - 1)P_n \dots(119)$$

para el cual, si $P_n = 0$ resulta $P_{n+1} = 0$; que es una característica lógica que no tiene el modelo original, (al cual, de ahora en adelante llamaremos: modelo I).

El programa de computación para realizar los cálculos utiliza el lenguaje BASIC y se muestra en la **pag 178** y en él se incluyen tanto el modelo I como el II.

Una vez terminado el cálculo de las 2000 medias y 2000 desviaciones estándar para cada zona de pesca, se deben seleccionar los valores de b y de d^* que proporcionan la media y la desviación estándar de las poblaciones cuyos valores se ajustan mejor a la media y a la desviación estándar de las poblaciones que constituyen los datos de comparación, es decir, en este caso, las generadas por el modelo de Pella y Tomlinson.

Como ya se advirtió, las poblaciones están normalizadas con respecto al valor de la población de equilibrio E y como ésta se tomo igual a la media en cada una de las zonas, la media normalizada sera igual a 1. Tomando como población inicial P_0 , al valor correspondiente a 1963, la población inicial normalizada p_0 será, en la zona A,

$$p_0 = \frac{P_0}{\bar{P}} = \frac{4332371}{4187351} = 1.034633$$

y la desviación estándar normalizada para la misma zona será

$$d.e. = \frac{D.E.}{\bar{P}} = 90314.193/4187351.077$$

$$d.e. = 0.021568$$

y la media normalizada será

$$\frac{\bar{P}}{P} = 1$$

(Ver los datos en la tabla V).

De manera que, después de correr el programa para la zona A, se debe buscar, entre las 2000 medias y las 2000 desviaciones estándar aquellos valores de b y de d^* que hayan producido los valores de \bar{P} , la media, y de $d.e.$, la desviación estándar, que más se acerquen a los valores 1 y 0,021568, respectivamente.

Después de correr el programa tal como se ha mencionado se encontró que la d^* tiene mucha influencia sobre la $d.e.$ de las poblaciones y se tuvo que modificar el rango de variación de la d^* para que cambiara desde 0.01 hasta 0.1 con saltos de 0.01 cada vez para que los valores de la $d.e.$ fueran del orden adecuado. Esta modificación solamente se hizo para las zonas A, C y D.

Poniendo como niveles de referencia una media poblacional normalizada igual a 1 y una $d.e.$ poblacional igual al valor de d^* de la variable aleatoria k , los resultados de las 20 corridas del programa, para la d^* y la b fijas, fluctúan arriba y abajo de los niveles de referencia, es decir, las 20 medias poblacionales a veces son mayores que 1 y a veces menores, y las $d.e.$ a veces son mayores que el valor de d^* y a veces menores. (Fig. 35). De manera que para escoger los mejores valores de la d^* y de la b , debemos basarnos en el tamaño de las fluctuaciones. Los mejores valores serán aquellos para los cuales, los re-

sultados de las 20 corridas queden lo más cerca posible de los niveles de referencia.

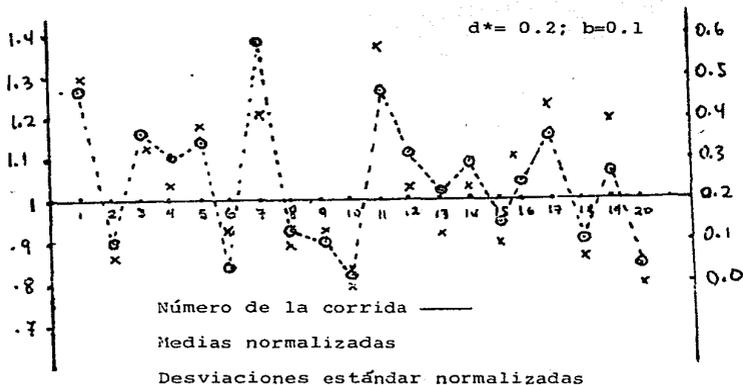


Fig. 35. Fluctuaciones de los valores de las medias y las desviaciones estándar poblacionales con respecto a los niveles $\bar{P} = 1$ y $d^* = 0.2$, en 20 corridas de computadora.

Procediendo como se indicó en los párrafos anteriores los valores de d^* y de b que se estimaron como los mejores en cada una de las zonas de estudio fueron los siguientes:

	d^*	b
ZONA A	0.02	0.6
ZONA B	0.12	0.3
ZONA C	0.01	0.2
ZONA D	0.02	0.1

En la Tabla VII se muestran los tamaños de población generados por el modelo I de Wallis en una de las corridas de la computa-

dora. Con estas poblaciones y utilizando la fórmula

$$C = qfP$$

del modelo de Pella y Tomlinson, se calcularon las capturas correspondientes.

En la Tabla VIII se comparan las capturas observadas C con las generadas por el modelo de Pella y Tomlinson, $\bar{C}(PyT)$, y por el modelo de Wallis, $\bar{C}(W-I)$. En las figs. 29, 30, 31 y 32 se muestran las gráficas de comparación de las capturas observadas con las esperadas.

Por último, en las figs. 36, 37, 38 y 39, se comparan los comportamientos de las poblaciones de acuerdo con el modelo de Pella y Tomlinson y de acuerdo con el modelo I de Wallis.

En la sección 11 y en esta sección 12, se han tratado de ilustrar los problemas que se afrontan cuando se le da aplicación práctica a los modelos de dinámica de población. Se puede ver que una cosa es estudiar teóricamente las propiedades de un modelo, por ejemplo, la localización de sus puntos de equilibrio, el carácter estable o inestable de ellos, la existencia de valores propios con partes reales negativas, etc. y otra muy diferente es la aplicación práctica. Un investigador puede tener la habilidad suficiente para discutir matemáticamente un modelo y no tenerla para su aplicación práctica, o viceversa.

Con respecto a los resultados obtenidos, puede verse en las gráficas correspondientes. (figs. 29, 30, 31 y 32) que el modelo de Wallis, que supuestamente responde a las variaciones ambientales, no mejoró los valores esperados; sus predicciones son

parecidas a las de Pella y Tomlinson. En todas las zonas y en la mayoría de los años graficados, los valores predichos por los 2 modelos casi coinciden; las mayores discrepancias se notan en la zona B.

Por otro lado, puesto que las desviaciones estándar d^* de la variable aleatoria k , resultaron tan pequeñas, pareciera que las fluctuaciones ambientales son mínimas y por lo tanto, no tienen mayor efecto.

Además hay que tomar en cuenta que los datos poblacionales dados por el modelo de Pella y Tomlinson, son los que se tomaron como datos para alimentar al modelo de Wallis, de manera que, si dichos datos no son confiables, tampoco lo serán las predicciones del modelo de Wallis.

Sin embargo, hay varias opciones que se pueden ensayar para obtener mayor provecho práctico de los modelos utilizados. Una de ellas es la aplicación de mejores métodos numéricos para el ajuste de las capturas observadas con las capturas esperadas del modelo de Pella y Tomlinson para lograr una mejor estimación de los parámetros del modelo. Otra sería la utilización de los datos trimestrales de capturas y esfuerzos existentes en lugar de los anuales, para que la integración numérica realizada para calcular las capturas teóricas sea mucho más exacta. También se podría intentar combinar el modelo de Pella y Tomlinson, como parte determinística, con la parte estocástica del modelo de Wallis. Otra opción, y quizá la que rendiría mejores resultados es, olvidarse de las poblaciones y trabajar con el

modelo de Wallis pero considerando a las capturas observadas como si fueran los tamaños de la población, y luego utilizar el modelo de Pella y Tomlinson para predecirlos.

En conclusión, lo presentado en las dos últimas secciones debe considerarse como una ilustración de la manera en que se hace la aplicación de los modelos a un problema práctico para, como se dijo antes, familiarizarse con el tipo de dificultades con las que se topa el investigador en su trabajo, y como un remate lógico para la teoría desarrollada en las otras partes de esta tesis.

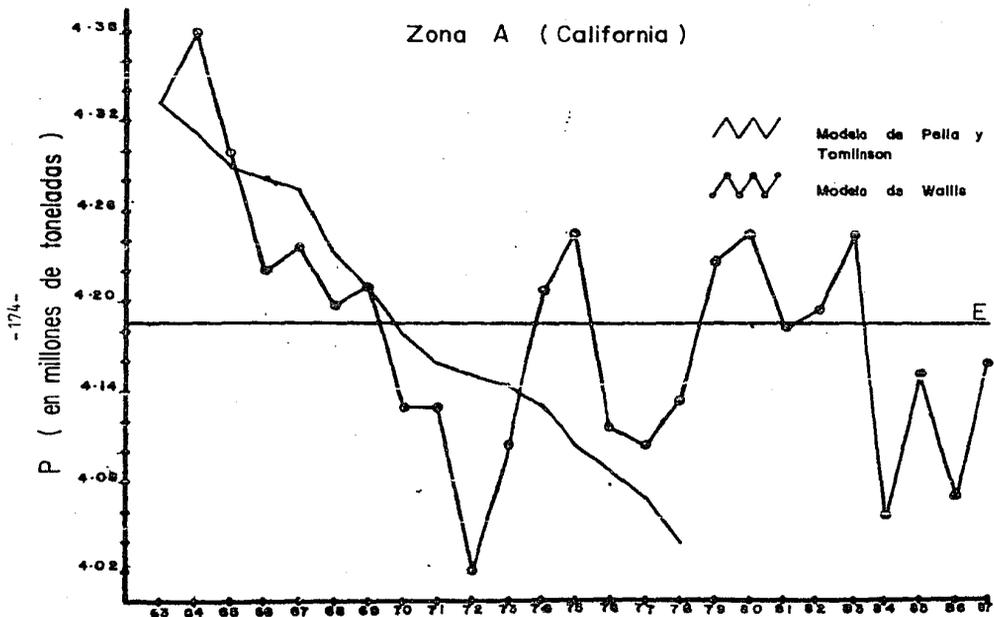


Fig. 36. Comportamiento de la población de peces de acuerdo con el modelo de Pella y Tomlinson y con el modelo I de Wallis.

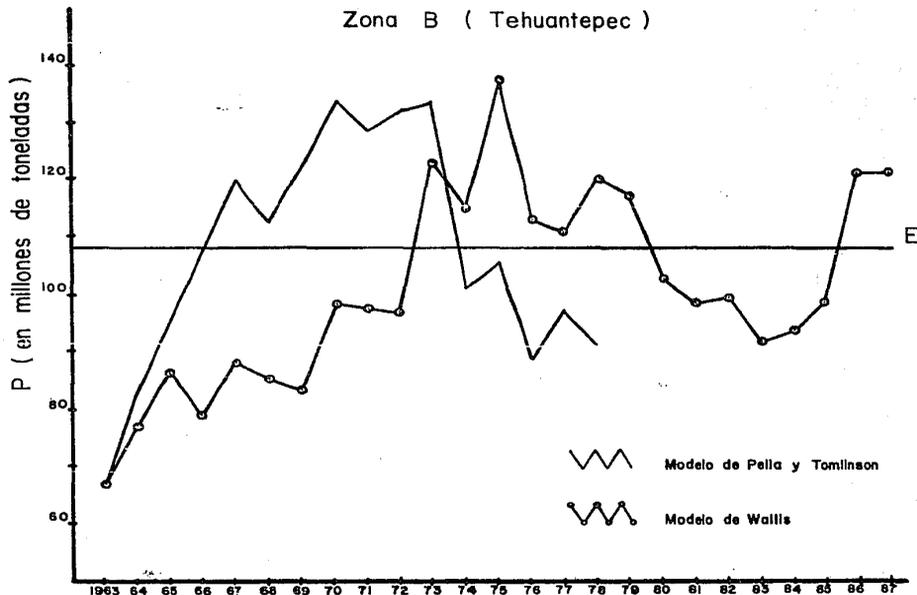


Fig. 37. Comportamiento de la población de peces (atún aleta amarilla + barrilete) de acuerdo con el modelo I de Wallis y con el de Pella y Tomlinson.

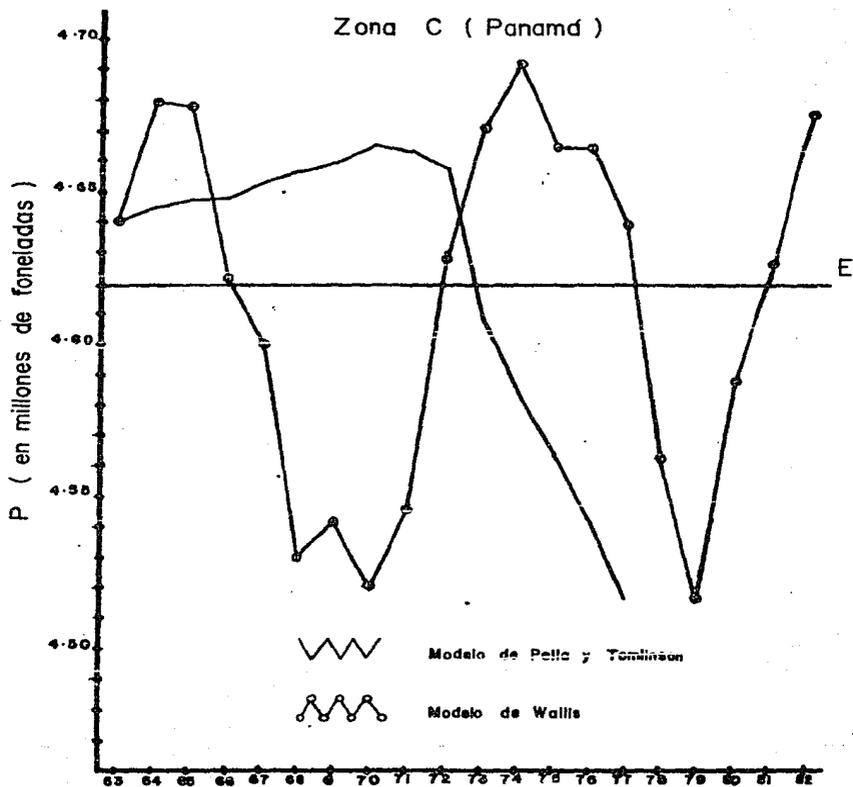


Fig. 38. Comportamiento de la población de peces (atún aleta amarilla + barrilete) de acuerdo con el modelo I de Wallis y con el de Pella y Tomlinson.

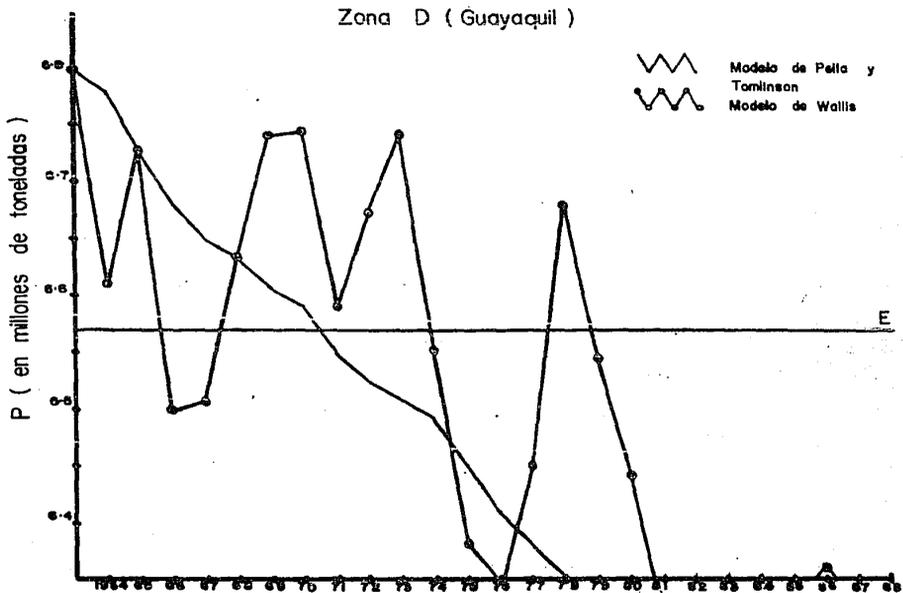


Fig. 39. Comportamiento de la población de peces (atún aleta amarilla + barrileto) de acuerdo con el modelo I de Wallis y con el de Pella y Tomlinson.

```

30 C=90:DE=0:DIM F(31),G(31),K(31),X(2),Y(2):GO SUB 400
40 C=C+10:IF INT(C/100)=C/100 THEN B=C/100
42 DE=DE+.1
45 IF DE>1.1 THEN DE=0:IF DE=0 THEN 42
50 IF C=1100 THEN END
60 FOR T=1 TO 31:GO SUB 300
70 F(T)=B+((EXP(K(T)))-B)*F(T-1)
80 G(T)=((1/(1-B*(1-G(T-1))))+(EXP(K(T))-1))*G(T-1)
90 IF T<17 THEN X=X+F(T-1):IF T<17 THEN Y=Y+G(T-1)
100 X1=X1+F(T-1):Y1=Y1+G(T-1):NEXT
110 X(1)=X/16:X(2)=X1/31:Y(1)=Y/16:Y(2)=Y1/31
120 X=0:Y=0:X1=0:Y1=0:GO SUB 200
130 LPRINT:LPRINTAB(25), "MODELO I";:LPRINTTAB(43), "MODELO II"
140 LPRINTTAB(1), "F(0)=";F(0); " B=";B; " DE=";DE
150 LPRINTTAB(1), "P16=";:LPRINTTAB(3), X(1);:LPRINTTAB(25), Y(1)
160 LPRINTTAB(1), "D16=";:LPRINTTAB(3), A1;:LPRINTTAB(25), D1
170 LPRINTTAB(1), "P31=";:LPRINTTAB(3), X(2);:LPRINTTAB(25), Y(2)
180 LPRINTTAB(1), "D31=";:LPRINTTAB(3), A2;:LPRINTTAB(25), D2
185 LPRINTTAB(1), "-----"
190 GO TO 40
200 ' DESVIACION ESTANDAR
210 FOR P=1 TO 16
220 M=M+((F(P-1)-X(1))^2):N=N+((G(P-1)-Y(1))^2):NEXT
230 A1=SQR(M/15):D1=SQR(N/15)
240 M=0:N=0:FOR P=1 TO 31
250 M=M+((F(P-1)-X(2))^2):N=N+((G(P-1)-Y(2))^2):NEXT
260 A2=SQR(M/30):D2=SQR(N/30):M=0:N=0:RETURN
300 ' VARIABLE ALEATORIA
310 C1=RND(100):U1=RND(0):U2=RND(0):U3=RND(0)
320 IF C1>86 THEN 340
330 K(T)= 2*(U1+U2+U3-1.5):GO TO 350
340 K(T)=1.5*(U1+U2-1)
350 K(T)=K(T)*DE:RETURN
400 PRINT:INPUT "POBLACION INICIAL=";F(0):F(0)=G(0)
410 RETURN

```

* MULTIPLICACION

↑2 ELEVACION AL CUADRADO

LA DESVIACION ESTANDAR DE LOS NÚMEROS ALEATORIOS K ES "DE". PARA QUE CAMBIE DE .01 EN .01 COMENZANDO EN .01 Y TERMINANDO EN .1, LA LINEA 42 Y LA LINEA 45 DEBEN DECIR

42 DE= DE + .01

45 IF DE>0.11 THEN DE= 0: IF DE=0 THEN 42

Tabla I .- DATOS DE LA PESQUERIA DE ATUN-ALETA MARILLA + BARRILETE.

Zona-año	Esfuerzo E	Captura C	$U = \frac{E}{C}$		A-65	E	C	$U = \frac{E}{C}$
A-63								
1	677.2	3204.00	4.73		1	121.7	470.0	3.86
2	670.2	3363.00	5.01		2	1353.1	4653.7	3.44
3	674.7	5600.30	8.30		3	1187.3	6272.1	5.28
4	847.3	4088.30	4.82		4	822.0	3583.5	4.36
ANUAL	2869.4	16255.60	5.66		ANUAL	3484.1	14979.3	4.30
B-63					B-65			
1	1323.2	8543.0	6.45		1	317.4	1020.5	3.22
2	663.5	5274.0	7.94		2	1189.9	8180.0	6.87
3	49.5	10.0	0.20		3	113.3	316.5	2.79
4	632.8	2011.3	3.17		4	420.2	2673.3	6.36
ANUAL	2669.0	15838.3	5.93		ANUAL	2040.8	12190.3	5.97
C-63					C-65			
1	1027.1	5284.0	5.14		1	386.2	1815.5	4.70
2	762.4	8664.0	11.36		2	234.2	1494.5	6.38
3	71.0	58.0	0.81		3	116.1	90.0	0.78
4	459.6	1866.5	4.06		4	382.3	1023.8	2.68
ANUAL	2320.1	15872.5	6.84		ANUAL	1118.8	4423.8	3.95
D-63					D-65			
1	667.7	7162.0	10.73		1	1012.1	9715.0	9.60
2	806.5	14222.0	17.63		2	1054.7	11911.0	11.29
3	815.3	10178.0	12.48		3	1662.0	18012.0	10.84
4	1615.7	7887.0	4.88		4	1402.1	6998.0	4.99
ANUAL	3905.2	39449.0	10.10		ANUAL	5130.9	46636.0	9.09
A-64					A-66			
1	639.1	2948.0	4.61		1	392.5	2170.8	5.53
2	1263.9	7005.1	5.54		2	507.0	3253.3	6.42
3	1224.5	5625.0	4.59		3	429.9	1457.0	3.39
4	331.1	1311.0	3.96		4	499.6	1990.8	3.98
ANUAL	3458.6	16889.1	4.88		ANUAL	1829.0	8871.9	4.85
B-64					B-66			
1	308.6	1969.8	6.38		1	411.6	1345.8	3.27
2	513.4	4893.3	9.53		2	442.8	2622.8	5.92
3	663.4	4840.0	7.30		3	377.9	2336.5	6.18
4	545.4	3584.5	6.57		4	221.4	1112.0	5.02
ANUAL	2030.8	15287.6	7.53		ANUAL	1453.7	7417.1	5.10
C-64					C-66			
1	178.8	218.0	1.22		1	708.4	2927.0	4.13
2	487.3	3150.5	6.47		2	262.9	2016.8	7.67
3	193.2	502.2	2.60		3	187.0	321.0	1.72
4	77.0	7.0	0.90		4	230.5	857.0	3.72
ANUAL	936.3	3877.7	4.14		ANUAL	1388.8	6121.8	4.41
D-64					D-66			
1	461.8	13119.0	28.41		1	1296.4	12613.0	9.73
2	600.6	5660.0	9.42		2	1680.1	22931.0	13.65
3	667.7	7141.0	10.69		3	1620.8	15118.0	8.33
4	722.2	8809.0	12.20		4	1477.0	8992.1	6.09
ANUAL	2452.2	34729.0	14.16		ANUAL	6074.3	59654.1	9.82

A-67	E	C	U= $\frac{E}{C}$	A-69	E	C	U= $\frac{E}{C}$
1	510.6	3554.1	6.96	1	772.2	3592.5	4.65
2	1508.0	22131.1	14.68	2	1005.6	11089.6	11.03
3	1704.0	16634.5	9.76	3	968.8	5668.0	5.85
4	763.6	7336.6	9.61	4	1248.8	3841.6	3.08
ANUAL	4486.2	49656.3	11.07	ANUAL	3995.4	24191.7	6.05
B-67				B-69			
1	322.8	4096.5	12.69	1	865.2	8919.4	10.31
2	571.8	5253.0	9.19	2	173.1	920.0	5.31
3	43.4	6.0	0.14	3	106.8	2.0	0.02
4	8.0	0.0	0.00	4	3.3	0.0	0.00
ANUAL	946.0	9355.5	9.89	ANUAL	1148.4	9841.4	8.57
C-67				C-69			
1	222.2	2222.0	10.00	1	415.6	3420.2	8.23
2	192.2	2540.8	13.22	2	454.6	5299.3	11.66
3	208.7	1097.0	5.26	3	165.1	171.0	1.04
4	127.1	512.0	4.03	4	1.7	0.0	0.00
ANUAL	750.2	6371.8	8.49	ANUAL	1037.0	8890.5	8.57
D-67				C-69			
1	1276.0	23554.0	18.46	1	819.1	6451.0	7.88
2	832.9	18730.7	22.49	2	1400.6	12564.7	8.97
3	916.1	10785.1	11.77	3	576.1	1881.0	3.27
4	418.0	3641.0	8.71	4	144.4	1635.0	11.32
ANUAL	3443.0	56710.8	16.47	ANUAL	1940.2	22531.7	7.66
A-68				A-70			
1	1100.1	8989.7	8.17	1	1839.4	16399.4	8.92
2	1719.2	12129.5	7.06	2	1469.8	10723.3	7.30
3	510.9	1954.7	3.83	3	1413.3	8073.6	5.71
4	179.7	1718.4	9.56	4	753.1	5341.0	7.09
ANUAL	3509.9	24792.3	7.06	ANUAL	5475.6	40537.3	7.40
B-68				B-70			
1	365.2	6048.5	16.56	1	142.4	770.5	5.41
2	1524.2	27043.9	17.74	2	50.1	274.0	5.47
3	446.5	4156.5	9.31	3	2.2	0.0	0.00
4	311.5	1287.3	4.13	4	38.9	448.1	11.44
ANUAL	2647.4	18536.2	14.56	ANUAL	232.6	1489.6	6.40
C-68				C-70			
1	107.9	360.1	3.34	1	175.3	356.5	2.08
2	119.3	394.2	3.30	2	357.3	2631.8	7.37
3	485.1	2007.1	4.14	3	47.1	8.0	0.17
4	225.6	854.0	3.79	4	34.2	90.4	2.64
ANUAL	937.9	3615.4	3.85	ANUAL	613.9	3086.7	5.03
D-68				D-70			
1	606.5	13891.8	22.90	1	1042.5	11352.5	10.89
2	665.3	7638.0	11.48	2	502.2	5278.9	10.51
3	889.6	4440.2	4.99	3	299.3	1025.0	3.42
4	288.1	850.0	2.95	4	70.2	121.0	1.72
ANUAL	2449.5	26820.0	10.95	ANUAL	1914.2	17777.4	9.29

A-71	E	C	U = $\frac{E}{C}$	A-73	E	C	U = $\frac{E}{C}$
1	1658.9	11882.1	7.16	1	368.1	1077.2	2.93
2	1170.4	9050.2	7.73	2	592.7	4334.8	7.31
3	467.7	1927.6	4.12	3	321.2	1468.8	4.57
4	332.4	302.9	0.91	4	116.2	152.2	1.31
ANUAL	3629.4	23162.8	6.38	ANUAL	1398.2	7033.0	5.03
B-71				B-73			
1	338.8	2022.0	5.97	1	478.4	3551.0	7.42
2	1093.1	11558.4	10.57	2	223.2	2656.2	11.90
3	179.7	283.8	1.58	3	70.5	357.5	5.07
4	45.3	201.0	4.44	4	110.5	222.8	2.02
ANUAL	1656.9	14065.2	8.49	ANUAL	892.6	6787.5	7.60
C-71				C-73			
1	574.3	5148.4	8.96	1	1829.9	14379.7	7.86
2	643.9	4647.6	7.22	2	4890.2	58400.9	11.94
3	206.1	331.8	1.61	3	573.6	1696.0	2.96
4	246.0	167.0	9.68	4	525.2	1508.1	2.87
ANUAL	1670.3	10294.8	6.16	ANUAL	7818.9	75986.7	9.72
D-71				D-73			
1	3166.8	44193.2	13.96	1	1172.9	7060.2	6.02
2	464.7	1889.1	4.07	2	275.1	1523.4	5.54
3	203.9	889.0	4.36	3	448.5	1615.0	3.60
4	1001.6	5623.0	5.61	4	108.4	46.0	0.42
ANUAL	4837.0	52574.3	10.87	ANUAL	1004.9	10244.6	5.11
A-72				A-74			
1	576.6	1620.2	2.81	1	790.4	7808.3	9.88
2	494.8	2979.2	6.02	2	1029.1	6291.8	6.11
3	239.6	1781.0	7.43	3	566.9	2086.2	2.68
4	245.2	833.2	3.40	4	262.1	697.2	2.66
ANUAL	1566.2	7213.6	4.61	ANUAL	2648.5	16883.5	6.37
B-72				B-74			
1	388.7	4564.1	11.74	1	1209.7	13481.3	11.14
2	462.8	5194.3	11.22	2	3508.7	38677.5	11.02
3	7.0	0.0	0.00	3	304.8	1790.3	5.87
4	40.6	18.1	0.45	4	159.7	881.8	5.52
ANUAL	899.1	9776.5	10.87	ANUAL	5182.9	54830.9	10.58
C-72				C-74			
1	776.2	5774.4	7.44	1	1683.6	10681.9	6.34
2	1114.1	6588.2	5.91	2	2216.1	16463.9	7.43
3	75.7	1.7	0.02	3	530.1	703.4	1.33
4	159.7	285.1	1.79	4	486.0	1467.8	3.02
ANUAL	2125.7	12649.4	6.42	ANUAL	4915.8	29317.2	5.96
D-72				D-74			
1	1230.4	6632.8	5.39	1	948.3	5685.1	6.00
2	367.9	627.1	1.70	2	242.3	371.1	1.53
3	367.1	1490.0	4.06	3	150.1	153.9	1.03
4	957.9	5679.0	5.93	4	962.5	10552.0	10.96
ANUAL	2923.3	14428.9	4.94	ANUAL	2303.2	16762.1	7.24

A-75	E	C	U = $\frac{E}{C}$	A-77	E	C	U = $\frac{E}{C}$
1	1667.0	8118.8	4.87	1	1302.7	4741.8	3.64
2	1840.0	12019.3	6.53	2	1225.8	7472.0	6.10
3	750.9	5938.5	7.91	3	372.9	1507.0	4.04
4	230.8	167.9	0.73	4	471.9	1044.0	2.21
ANUAL	4488.7	26244.5	5.85	ANUAL	3373.3	14764.8	4.38
B-75				B-77			
1	1033.0	9890.4	9.57	1	835.2	4414.0	5.28
2	742.5	3857.3	5.20	2	166.6	652.0	3.91
3	91.1	402.2	4.41	3	566.5	4922.0	8.69
4	412.0	2473.1	6.00	4	683.6	2213.0	3.24
ANUAL	2278.6	16623.0	7.30	ANUAL	2251.9	12201.0	5.42
C-75				C-77			
1	1274.6	9916.6	7.78	1	1426.6	8258.0	5.79
2	2133.8	9874.4	4.63	2	2023.1	16723.0	8.27
3	390.8	1166.7	2.99	3	1062.0	3097.0	2.92
4	372.3	1769.7	4.75	4	538.0	1109.0	2.06
ANUAL	4171.5	22727.4	5.45	ANUAL	5049.7	29187.0	5.78
D-75				D-77			
1	1645.4	24332.5	14.79	1	1557.3	8770.0	5.63
2	806.6	6510.2	9.07	2	715.9	3166.0	4.42
3	250.4	1650.9	6.41	3	441.9	924.0	2.09
4	2071.1	30432.0	14.69	4	1031.4	5226.0	5.07
ANUAL	4773.5	62880.6	13.71	ANUAL	3746.5	18086.0	4.83
A-76				A-78			
1	496.7	391.5	0.79	1	619.5	3255.0	5.25
2	1295.3	9472.4	7.31	2	1783.2	12589.5	7.06
3	727.6	3853.6	5.30	3	1414.3	9068.0	6.41
4	822.6	3467.2	4.21	4	752.0	3406.0	4.53
ANUAL	3342.2	17184.7	5.14	ANUAL	4569.0	28318.5	6.20
B-76				B-78			
1	1928.4	21364.6	11.08	1	2558.0	26877.0	10.51
2	2526.3	20798.4	8.23	2	799.8	8285.0	10.36
3	105.7	1021.7	5.47	3	444.6	3492.0	7.85
4	378.2	1381.2	3.65	4	125.6	264.0	2.10
ANUAL	5019.6	44565.9	8.88	ANUAL	3928.0	38918.0	9.91
C-76				C-78			
1	837.8	3726.0	4.45	1	1517.3	9232.0	6.08
2	1782.2	11633.4	6.53	2	5222.2	48340.0	9.26
3	817.2	2688.2	3.29	3	1749.9	9979.9	5.70
4	1190.3	5363.2	4.51	4	1161.6	8914.0	7.67
ANUAL	4627.5	23410.8	5.06	ANUAL	9651.0	76465.9	7.92
D-76				D-78			
1	2662.8	29217.7	10.79	1	1108.0	4122.0	3.72
2	509.4	1961.7	3.85	2	420.2	1903.0	4.53
3	361.4	1541.0	4.26	3	278.8	156.0	0.56
4	1104.4	4488.0	4.06	4	1448.5	6026.0	4.16
ANUAL	4638.0	37208.4	8.02	ANUAL	3255.5	12207.0	3.75

TABLA II..- VALORES DE LA MEJOR ESTIMACION DE
LOS PARAMETROS f_{opt}, q, r, U_{max} .

$m = 2$	f_{opt}^*	q^*	r^*	U_{max}^*
ZONA A	338.2	1.48×10^{-6}	0.570	11.28
ZONA B	4300.6	9.07×10^{-5}	0.350	13.82
ZONA C	5680.8	1.63×10^{-6}	0.875	8.65
ZONA D	355.9	1.40×10^{-6}	0.595	16.14

TABLA III..- VALORES DE LA MEJOR ESTIMACION DE
LOS PARAMETROS H, K y P_o .

$m = 2$	H*	K*	P_o^*
ZONA A	-1.31×10^{-10}	-1.00×10^{-3}	4348908.3
ZONA B	-5.11×10^{-6}	-0.78×10^0	53360.0
ZONA C	-3.48×10^{-9}	-1.85×10^{-2}	4648535.5
ZONA D	-8.70×10^{-2}	-1.00×10^{-3}	6836340.5

TABLA IV..- VALORES DE C_{max}, P_{opt} y P_{max} .

$m = 2$	C_{max}	P_{opt}	P_{max}
ZONA A	1907.41	3814831.9	7629663.7
ZONA B	29729.17	76228.6	152457.3
ZONA C	24570.80	2656306.0	5312612.0
ZONA D	2872.41	5744823.9	11489648.0

En todas las tablas, las capturas y las poblaciones están en toneladas y los esfuerzos en días de barco.

Tabla.- V		TAMAÑO DE LAS POBLACIONES EN CADA UNA DE LAS ZONAS DE ESTUDIO, PREDICHAS POR EL MODELO (PELLA Y TOMLINSON)			
n	ZONA A	ZONA B	ZONA C	ZONA D	
0	4348908.3	53360.0	4648535.5	6836340.5	
1963- 1	4332371.107	67107.872	4641784.716	6801692.532	
1964- 2	4312144.759	82877.918	4645524.816	6781064.825	
1965- 3	4291865.624	95138.004	4647841.363	6735131.561	
1966- 4	4282147.044	107915.973	4648086.896	6680682.009	
1967- 5	4255687.973	120234.040	4653128.442	6651236.597	
1968- 6	4235542.861	113624.881	4656680.096	6631179.800	
1969- 7	4212483.927	122011.987	4659424.649	6606646.682	
1970- 8	4180410.047	134723.078	4665327.913	6591710.351	
1971- 9	4159930.601	129023.585	4663175.717	6549862.090	
1972-10	4152257.289	132687.042	4657627.564	6525831.720	
1973-11	4145576.264	134649.445	4609600.770	6510291.689	
1974-12	4131271.087	101553.107	4584261.628	6492079.633	
1975-13	4105837.321	105885.902	4564942.839	6451508.588	
1976-14	4087490.242	89341.875	4542668.037	6411078.577	
1977-15	4069048.492	98195.873	4517760.682	6380255.031	
1978-16	4043552.590	92276.871	4460098.335	6353968.074	
MEDIA \bar{P} =	4187351.077	107952.965	4619245.904	6572138.735	
D.E. =	90314.193	20099.066	61438.781	137548.642	

TABLA VI. VALOR DE LA POBLACION LIMITE			
$\frac{K + qf_n}{H}$			
EN LAS ZONAS B Y C.			
AÑO	n	ZONA B	ZONA C
1963	- 1	105121.18	4227455.5 tons.
	64 - 2	116477.71	4873635.8 "
	65 - 3	116301.80	4790350.3 "
	66 - 4	126583.27	4663986.2 "
	67 - 5	135691.94	4962665.1 "
	68 - 6	105551.21	4873635.8 "
	69 - 7	132114.93	4827685.2 "
	70 - 8	148319.00	5025847.2 "
	71 - 9	123084.44	4531878.2 "
	72 - 10	136512.90	4319356.7 "
	73 - 11	136649.72	1657093.6 "
	74 - 12	60574.66	3012636.4 "
	75 - 13	112060.20	3363009.7 "
	76 - 14	63487.09	3147616.3 "
	77 - 15	112509.77	2952326.2 "
	78 - 16	82818.60	801263.6 "

Tabla.- VII

TAMARO DE LAS POBLACIONES GENERADAS EN COMPUTADORA
EN UNA DE LA CORRIDAS DEL MODELO I DE WALLIS.

	ZONA A	ZONA B	ZONA C	ZONA D
	$\delta=0.02; b=0.6$	$\delta=.1; b=.3$	$\delta=.01; b=.2$	$\delta=.02; b=.1$
1963---	4332371.107	67107.872	4641784.716	6801692.532
1964---	4381811.661	77033.425	4680774.259	6617749.378
1965---	4298064.639	86728.576	4678372.252	6729278.572
1966---	4219216.819	79054.413	4622386.991	6500029.229
1967---	4237431.796	88671.946	4599221.473	6508533.576
1968---	4196856.364	85811.839	4530676.483	6635691.317
1969---	4311177.105	83257.132	4542520.230	6741371.307
1970---	4130746.465	99298.084	4520158.460	6745774.640
1971---	4130181.173	98028.555	4546381.919	6592183.758
1972---	4022834.241	97822.906	4628299.626	6675321.313
1973---	4104064.664	123365.450	4671073.843	6743474.392
1974---	4208790.315	115157.763	4693061.454	6552290.876
1975---	4247523.312	138818.921	4665946.480	6388316.015
1966---	4117610.745	113728.485	4665207.401	6332150.517
1977---	4104458.275	111300.622	4640679.205	6453945.392
1978---	4145582.250	121510.817	4563339.171	6687282.606
1979---	4227507.774	118365.067	4517386.913	6548761.638
1980---	4242163.503	103414.332	4588712.690	6444580.094
1981---	4183431.716	99475.990	4627191.007	6201272.946
1982---	4194762.688	100259.297	4676478.361	6156746.706
1983---	4247104.577	92620.003	4669641.877	6231958.262
1984---	4058514.659	94210.151	4723178.937	6314464.892
1985---	4152328.073	99485.498	4761795.833	6297613.928
1986---	4070431.364	122361.487	4697126.390	6367863.519
1987---	4153052.484	122488.871	4646776.610	6291199.520
1988---	4150146.463	118638.187	4569755.303	6316890.001

TABLA VIII. COMPARACION DE LAS CAPTURAS
 ESPERADAS: \bar{C} (W-I) DEL MODELO I DE WALLIS Y
 \bar{C} (PyT) DE PELLA Y TOMLINSON CON LAS C OBSERVADAS.

	\bar{C} (W-I)	\bar{C} (P y T)	\bar{C} (OBSERVADA)
63--	18373.394	18373.394	16255.6
64--	22404.614	22100.014	16889.1
65--	22135.242	22155.440	14979.3
66--	11413.428	11596.774	8871.9
67--	28130.598	28339.455	49656.3
68--	21775.313	22028.202	24792.3
69--	24868.723	24944.401	24191.7
70--	33430.730	33962.199	40537.3
71--	22155.893	22370.309	23162.8
72--	9258.784	9565.466	7213.6
73--	8481.146	8573.812	7033.0
74--	16474.356	16198.867	16883.5
75--	28185.034	27329.085	26244.5
76--	20347.678	20244.082	17184.7
77--	20470.767	20340.066	14764.8
78--	27998.830	27395.671	28318.5

ZONA A

	\bar{C} (W-I)	\bar{C} (P y T)	\bar{C} (OBSERVADA)
63--	14606.349	14606.349	15838.3
64--	14181.125	13847.383	15287.6
65--	16044.561	16526.314	12190.3
66--	10466.812	13497.677	7417.1
67--	7606.989	9828.116	9355.5
68--	20606.329	27992.867	38536.2
69--	8667.598	12304.226	9841.4
70--	2098.129	2724.810	1489.6
71--	14730.650	19765.212	14065.2
72--	7975.092	10683.953	9766.5
73--	9979.157	10821.346	6787.5
74--	54136.945	54395.432	54830.9
75--	34984.258	24472.190	16623.0
76--	51763.294	44013.579	44565.9

-188-

77--	22740.197	19216.281	12201.0
78--	43294.469	33836.901	38918.0

ZONA B

	\bar{C} (W-I)	\bar{C} (p y T)	\bar{C} (OBSERVADA)
63--	17647.4	17647.4	15872.5
64--	7133.9	7077.2	2877.7
65--	8516.7	8458.8	4423.8
66--	10454.5	10612.1	6121.8
67--	5616.7	5679.3	6371.8
68--	5532.9	7109.5	3615.4
69--	7677.6	7872.7	8890.5
70--	4511.8	4653.6	3086.7
71--	12362.8	12683.0	10294.8
72--	16022.1	16132.8	12649.4
73--	59463.0	68983.5	75986.7
74--	37566.6	36796.0	29317.2
75--	31697.0	31075.6	22727.4
76--	35148.4	34308.0	23410.8
77--	38159.9	37250.4	29187.0
78--	71711.9	70538.7	76475.9

ZONA C

	\bar{C} (W-I)	\bar{C} (Py T)	\bar{C} (OBSERVADA)
63--	37419.9	37419.9	39449.0
64--	22807.84	33404.8	34729.0
65--	48511.7	48716.3	46636.0
66--	55471.0	57241.2	59654.1
67--	31484.4	32243.9	56710.8
68--	22841.7	22859.3	26820.0
69--	27846.6	27339.0	22531.7
70--	18140.5	17745.2	17777.4
71--	44809.6	44651.3	52574.3
72--	27414.3	26848.0	14428.9
73--	18996.5	18360.4	10244.6
74--	21201.3	21034.6	16762.1
75--	42840.4	43397.4	62880.6
76--	42597.2	43261.4	37208.4
77--	33967.9	33659.1	18086.0
78--	30592.1	29126.6	12207.0

ZONA D

APENDICE I

La ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

es de variables separables y es equivalente a

$$\frac{dN}{N} = r dt$$

por lo tanto,

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \int_{t_0}^t r dt$$

En cualquier libro de Cálculo Diferencial e Integral de nivel elemental (el de Grandville, por ejemplo) se encuentra que

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \text{Ln } N - \text{Ln } N_0$$

y que

$$\int_{t_0}^t r dt = r(t - t_0) \quad , \text{ para } r \text{ constante.}$$

de donde, puesto que las dos integrales deben ser iguales, se obtiene

$$\text{Ln } N - \text{Ln } N_0 = r(t - t_0)$$

$$\text{Ln } \frac{N}{N_0} = r(t - t_0)$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{r(t-t_0)}$$

en donde se ha hecho uso de la regla,

" para cualquier pareja A,B de números reales positivos

$$\log_c A - \log_c B = \log_c \frac{A}{B}$$

siendo c, la base de los logaritmos ".

Ademas, usando la definición elemental de los logaritmos,

$$\log_c A = N$$

significa

$$A = c^N$$

Finalmente, la expresión

$$\frac{N}{N_0} = e^{r(t-t_0)}$$

para $t_0 = 0$, se puede escribir

$$\underline{N = N_0 e^{rt}}$$

APENDICE II

De acuerdo con los datos proporcionados por los censos, la población de los Estados Unidos experimentó un crecimiento exponencial puro entre los años de 1790 a 1860.

Para trazar la curva teórica correspondiente, dada por

$$N = N_0 e^{rt}$$

se debe calcular el valor de la tasa intrínseca de crecimiento, o sea, el valor de la r .

Usando logaritmos naturales, el despeje de r queda

$$r = \frac{\ln N - \ln N_0}{t}$$

Colocando el origen del tiempo ($t=0$) en el año 1790 y sabiendo que la población correspondiente a ese año fue de 3.929 millones de habitantes, tenemos que $N_0 = 3.929$ millones. Luego, tomando el dato de la población para el año de 1830 ($t = 40$ años) que fue de 12.866 millones de habitantes según el censo, la r queda expresada por

$$r = \frac{\ln(12.866 \times 10^6) - \ln(3.929 \times 10^6)}{40}$$

lo que da una

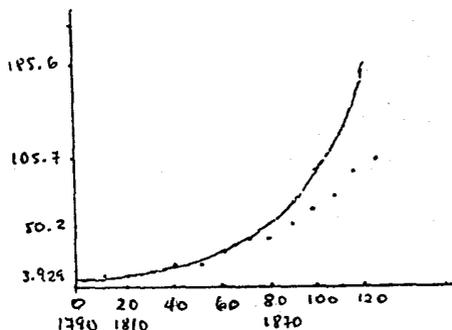
$$r = 0.029655$$

y la población queda expresada por

$$N = 3.929e^{0.029655 t} \quad \text{millones de habitantes.}$$

El ajuste entre los datos observados (proporcionados por los cen-

sos) y las poblaciones esperadas (predichas por la fórmula) se puede ver en la siguiente figura.



La línea continua es la predicción teórica y los puntos aislados son los datos censales.

Como puede observarse, el ajuste es bueno dentro del intervalo comprendido entre $t = 0$ (1790) y $t = 70$ (1860). Puesto que los datos censales estuvieron sujetos a muchos errores en aquellos años, este buen ajuste debe tomarse con reserva. Y dado que el mo delo no toma en cuenta factores importantes, tales como guerras, inmigración, variación en las tasas de nacimientos y muertes, y cambios en la distribución de edades de la población, sus predicciones a largo plazo fallan.

APENDICE III

La solución de la ecuación logística dada por la ecuación (7), puede escribirse en forma más compacta, si el factor $\frac{a}{bN_0} - 1$, se hace igual a e^d , es decir si $d = \ln\left(\frac{a}{bN_0} - 1\right)$. Con este cambio, la solución queda

$$N = \frac{a/b}{1 + e^{d-at}}$$

En cualquiera de sus formas, la solución de la ecuación logística involucra 3 parámetros por determinar; a, b y d, en la forma escrita arriba. Usando como datos tres poblaciones, N_0 , N_1 y N_2 para los instantes (años) t_0 , t_1 y t_2 , respectivamente, se encuentra que la población de los Estados Unidos creció de acuerdo con una curva logística en la que

$$a/b = 197.274 ; d = 3.896 ; a = 0.031$$

es decir,

$$N = \frac{197.274}{1 + e^{(3.896 - 0.031 t)}} \text{ millones}$$

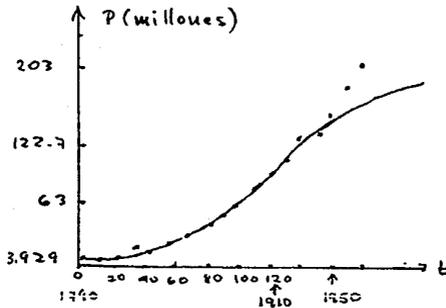
La comparación entre las predicciones de este modelo y las poblaciones reales dadas por los censos, se puede ver en la gráfica de la página siguiente, en la que $t = 0$, corresponde al año de 1790. Se nota que el ajuste es bueno para el intervalo comprendido entre 1790 y 1950 y que falla para los años de la segunda mitad del siglo XX, en donde la población creció más rápidamente que lo previsto por el modelo.

Como se vio, el punto de inflexión de la curva está situado en $N = \frac{1}{2}(a/b)$. Como a/b es el numerador de la solución dada en la página anterior, para que quede dividido entre 2, sólo se necesita que la exponencial sea igual a 1, o sea, que su exponente sea igual a cero. Por lo tanto, el punto de inflexión estará colocado en aquella t para la cual,

$$3.896 - 0.031 t = 0$$

De la ecuación anterior se obtiene,

$$t = 125.67 \text{ años}$$



Por lo tanto, para el año de $1790 + 125 = 1915$, debió haber cesado el crecimiento rápido (parte cóncava hacia arriba de la curva) para haber dado lugar a una disminución paulatina de la tasa de crecimiento. Así sucedió, aproximadamente, sólo que la disminución se mantuvo hasta 1950, de ahí en adelante el crecimiento fué mucho más rápido que el previsto por el modelo.

APENDICE IV

(a)

Si llamamos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, a las componentes del vector $\bar{R}(t)$ y $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$, a las componentes del vector $\bar{V}(\bar{R})$, podremos escribir,

$$\bar{R}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))$$

$$\bar{V}(\bar{R}) = (v_1(\bar{R}), v_2(\bar{R}), v_3(\bar{R}), \dots, v_n(\bar{R}))$$

y resulta que cada una de las x's es una función real de la variable t, y cada una de las v's es una función real de la variable vectorial \bar{R} . Esto último significa:

$$v_1(\bar{R}) = v_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$v_2(\bar{R}) = v_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$v_3(\bar{R}) = v_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

⋮

⋮

$$v_n(\bar{R}) = v_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Luego, la derivada $\frac{d\bar{R}}{dt}$ será una función vectorial cuyas componentes serán cada una de las derivadas de las x's con respecto a la variable t, es decir,

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \left(\frac{d}{dt} x_1, \frac{d}{dt} x_2, \frac{d}{dt} x_3, \dots, \frac{d}{dt} x_n \right)$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{V}(\bar{R}) \dots \dots \dots (10)$$

quedará expresada, escribiendo explícitamente las componentes de los vectores involucrados, como:

$$\left(\frac{d}{dt} x_1, \frac{d}{dt} x_2, \frac{d}{dt} x_3, \dots, \frac{d}{dt} x_n\right) = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

y puesto que una igualdad vectorial implica que las componentes respectivas deben ser iguales, resulta el sistema,

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = v_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = v_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))$$

$$\frac{d}{dt} x_3(t) = v_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))$$

⋮

⋮

$$\frac{d}{dt} x_n(t) = v_n(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))$$

Vemos, entonces, como el sistema (10) se expresa en forma explícita.

(B)

Si $\bar{R} = (x, y)$ es un vector de 2 dimensiones, la función

$$E = x^2 - 8xy + 3y^2$$

por ejemplo, puede considerarse como una función del vector \bar{R} ,

$$E = E(\bar{R})$$

y resulta una función real de variable vectorial, cuando la x y la y son números reales.

Vamos a suponer que queremos saber cuánto cambia el valor de E cuando el valor de la x, y de la \bar{y} se incrementan a $x + dx, y + dy$

En términos vectoriales, queremos saber cuánto se incrementa $E(\bar{R})$ cuando el vector \bar{R} se incrementa a $\bar{R} + d\bar{R}$, siendo

$$d\bar{R} = (dx, dy)$$

El incremento de la función E buscado será,

$$E(\bar{R} + d\bar{R}) - E(\bar{R})$$

Tenemos entonces que, de acuerdo con la regla de correspondencia entre E y \bar{R} ,

$$E(\bar{R} + d\bar{R}) = (x+dx)^2 - 8(x+dx)(y+dy) + 3(y+dy)^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado y reorganizando términos resulta,

$$\begin{aligned} E(\bar{R} + d\bar{R}) &= (x^2 - 8xy + 3y^2) \\ &\quad + (2x - 8y)dx + (-8x + 6y)dy \\ &\quad + (dx)^2 - 8dxdy + 3(dy)^2 \end{aligned}$$

Es evidente que el primer renglón del desarrollo de $E(\bar{R} + d\bar{R})$ es, por definición, la función $E(\bar{R})$. En el 2o. renglón, los términos en paréntesis multiplicados por dx , representan la derivada de la función E con respecto a x , considerando a la y como constante es decir, es la derivada parcial de E con respecto a x ,

$$\frac{\partial E}{\partial x}$$

Similarmente, los términos en paréntesis multiplicados por dy representan la derivada parcial de E con respecto a y ,

$$\frac{\partial E}{\partial y}$$

Por último si llamamos \emptyset a todos los términos restantes del 3er. renglón, la expresión para $E(\bar{R} + d\bar{R})$ se puede escribir,

$$E(\bar{R} + d\bar{R}) = E(\bar{R}) + \frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy + \emptyset$$

Entonces cuando sucede, como en este ejemplo, que

$$\begin{aligned} \text{Lim } \delta &= 0 \\ d\vec{R} &\rightarrow \vec{0} \end{aligned}$$

se dice que la suma de términos que contienen a las derivadas parciales representan a la diferencial dE de la función. De manera que, por definición,

$$dE = \frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy$$

es, en 2 dimensiones, la diferencial de una función real de variable vectorial.

Como el producto escalar de 2 vectores cualesquiera $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$ de dos dimensiones, se define

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

la diferencial dE se puede considerar como el producto escalar de los vectores,

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial y} \right) \text{ y } (dx, dy)$$

es decir,

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial y} \right) \cdot (dx, dy)$$

$$dE = \nabla E \cdot d\vec{R}$$

en donde

$$\nabla E = \left(\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial y} \right)$$

es el "gradiente" de E y viene a representar la derivada de una función real de variable vectorial en 2 dimensiones.

Finalmente, el incremento de la función sería:

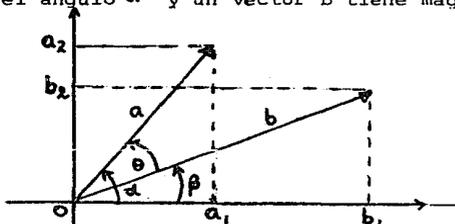
$$E(\vec{R} + d\vec{R}) - E(\vec{R}) = \nabla E \cdot d\vec{R} + \delta$$

(C)

Si un vector \vec{a} tiene una magnitud a , y una dirección dada por el ángulo α y un vector \vec{b} tiene magnitud b y una dirección da-

da por el ángulo β , sus com
ponentes rectangulares son:

$$\begin{aligned} a_1 &= a \cos \alpha \\ a_2 &= a \sin \alpha, \text{ y} \\ b_1 &= b \cos \beta \\ b_2 &= b \sin \beta \end{aligned}$$



respectivamente, rela-

ciones que pueden encontrarse en los triángulos rectángulos que se forman en la figura de arriba. Uno de ellos tiene hipotenusa igual a la magnitud del vector \vec{a} , cateto adyacente a α igual a a_1 y cateto opuesto a α igual a a_2 . El otro tiene hipotenusa b , cateto adyacente a β igual a b_1 y cateto opuesto a β igual a b_2 .

De acuerdo con la definición del producto escalar, tenemos,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 = ab \cos \alpha \cos \beta + ab \sin \alpha \sin \beta \\ &= ab(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= ab \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

y en la figura de arriba podemos ver que $(\alpha - \beta)$ es el ángulo θ que los vectores forman entre sí. Por lo tanto,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \theta$$

de donde,

$$\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{ab}$$

Entonces, de acuerdo con este resultado, si

$$\bar{a} \cdot \bar{b} > 0 \quad ; \quad 0 < \theta < 90^\circ \quad (\text{ángulo agudo})$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \quad ; \quad \theta = 90^\circ \quad (\text{ángulo recto})$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} < 0 \quad ; \quad 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad (\text{ángulo obtuso})$$

APENDICE V

(A)

Para encontrar la ecuación diferencial del movimiento del péndulo simple, tomaremos como origen del sistema de coordenadas el punto fijo de la barra rígida. El vector de posición, de la partícula de masa m , tendrá así una magnitud constante e igual a la longitud L de la barra. Utilizando coordenadas polares, definiremos un vector unitario \hat{u}_r en la misma dirección y sentido que el vector de posición \bar{R} y un vector unitario \hat{u}_θ perpendicular al anterior, y que apunte en el sentido en el que el ángulo θ crece, como se muestra en la figura (a). Resulta, entonces,

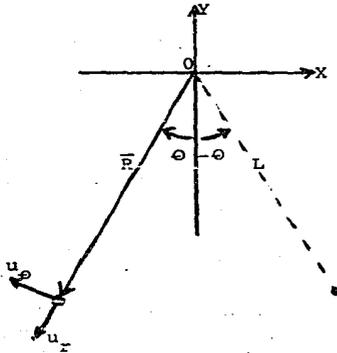


Fig. (a)

$$\bar{R} = L \hat{u}_r \dots\dots (a)$$

Derivando la expresión anterior con respecto al tiempo, obtenemos

$$\bar{v} = \frac{d\bar{R}}{dt} = L \frac{d}{dt} \hat{u}_r \quad (b)$$

Y como $\hat{u}_r = (-\text{sen}\theta, -\text{cos}\theta)$

$\hat{u}_\theta = (-\text{cos}\theta, \text{sen}\theta)$

(véase la fig. (b)) resulta que

$$\frac{d}{dt} \hat{u}_r = (-\text{cos}\theta, \text{sen}\theta) \frac{d\theta}{dt}$$

De manera que la expresión (b) de la velocidad de la partícula puede escribirse

$$\bar{v} = L \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta$$

y llamando w a la velocidad angular $\frac{d\theta}{dt}$, escribimos,

$$\bar{v} = Lw \hat{u}_\theta \dots\dots\dots(c)$$

Derivando (c) con respecto al tiempo, obtenemos la aceleración de la partícula,

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = L \left(w \frac{d}{dt} \hat{u}_\theta + \hat{u}_\theta \frac{dw}{dt} \right)$$

en donde la derivada de \hat{u}_θ con respecto al tiempo se puede sustituir por $-\frac{d\theta}{dt} \hat{u}_r = -w\hat{u}_r$, obteniéndose finalmente

$$\bar{a} = -Lw^2 \hat{u}_r + L \frac{dw}{dt} \hat{u}_\theta \dots\dots\dots(d)$$

Por otro lado, la partícula esta sujeta a la fuerza de tensión T de la varilla o barra y a la fuerza de gravedad, o sea, a su propio peso. La fuerza neta resultante, solamente tiene componente en la dirección del vector unitario u_θ , como puede verse en la fig.(c). La fuerza neta es

$$F = mg \text{ sen}\theta (-\hat{u}_\theta)$$

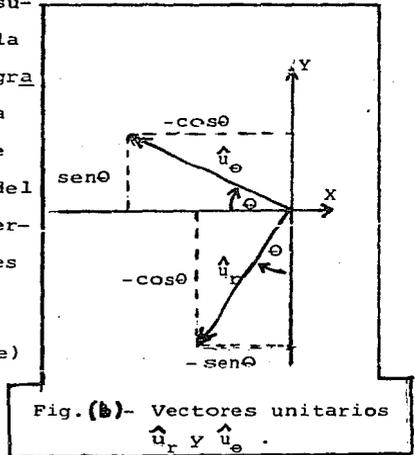
$$F = -mg \text{ sen}\theta \hat{u}_\theta \dots(e)$$

Aplicando la 2a. ley de Newton,

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

y sustituyendo (d) en el lado izquierdo y (e) en el derecho, se obtiene, después de igualar componentes,

$$mL \frac{dw}{dt} = -mg \text{ sen}\theta$$



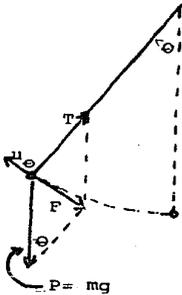


Fig. (c).-La F neta en el péndulo simple.

Dividiendo entre mL y llamando k^2 al cociente g/L , resulta

$$\frac{dw}{dt} = -k^2 \text{sen}\theta$$

Finalmente, puesto que $w = \frac{d\theta}{dt}$, la ecuación diferencial del movimiento del péndulo simple es,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -k^2 \text{sen}\theta$$

o también,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2 \text{sen}\theta = 0 \dots\dots(12)$$

(B)

La ecuación (14) se obtuvo integrando la expresión,

$$w dw = -k^2 \text{sen}\theta d\theta$$

de la que se obtiene

$$\frac{dw}{d\theta} = - \frac{k^2 \text{sen}\theta}{w} \dots\dots\dots(e)$$

ecuación que representa las pendientes de las tangentes a las trayectorias definidas por (14).

Para el caso de las trayectorias cerradas dadas por la ecuación

$$\frac{w^2}{e^2} + \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{(e/2k)^2} = 1 \dots\dots\dots(16)$$

cuando $e^2 < 4k^2$, resulta que en los puntos en donde $w = 0$, el valor de $\text{sen}\theta \neq 0$, lo que hace que la pendiente de la tangente

tangente a la trayectoria sea infinita en dichos puntos.

Sin embargo, en la trayectoria definida por la ecuación

$$\frac{w^2}{4k^2} + \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{1} = 1 \dots\dots\dots(18)$$

en los puntos en los que $w = 0$, o sea, cuando $\theta = (2n+1)\pi$ la derivada, dada por la expresión (e) de este apéndice, no está definida quedando la indeterminación $0/0$. Puesto que el comportamiento es el mismo en todos los puntos en cuestión, el valor de la derivada se puede definir como,

$$\frac{dw}{d\theta} = \lim_{w \rightarrow \pi} \left(- \frac{k^2 \text{sen}\theta}{w} \right)$$

Para encontrar el valor del límite, la w del denominador puede sustituirse por la expresión

$$\pm k\sqrt{2(1 + \cos\theta)}$$

de acuerdo con la ecuación (17). Entonces,

$$- \frac{k^2 \text{sen}\theta}{w} = - \frac{k^2 \text{sen}\theta}{\pm k\sqrt{2(1 + \cos\theta)}}$$

multiplicando numerador y denominador del lado derecho por

$$\sqrt{1 - \cos\theta}$$

resulta,

$$\begin{aligned} - \frac{k^2 \text{sen}\theta}{w} &= \pm \frac{k^2 \text{sen}\theta \sqrt{1 - \cos\theta}}{k\sqrt{2(1 - \cos^2\theta)}} \\ &= \pm \frac{k^2 \text{sen}\theta \sqrt{1 - \cos\theta}}{k\sqrt{2\text{sen}^2\theta}} \end{aligned}$$

simplificando se obtiene,

$$-\frac{k^2 \operatorname{sen} \theta}{w} = \pm k \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad (\theta \neq \pi)$$

Por lo tanto, el valor buscado para la derivada $dw/d\theta$ en $\theta = \pi$, podrá definirse como,

$$\frac{dw}{dt} = \pm k \operatorname{Lim}_{w \rightarrow \pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\frac{dw}{dt} = \pm k$$

En general, lo anterior será cierto en todos los puntos en los que $w = 0$ y $\theta = (2n+1)\pi$.

(C)

Se puede ver en la fig. (d) que cuando la masa pendular m se aparta de la vertical un ángulo θ , sube cierta distancia a la que se denotado con la letra y . En el triángulo rectángulo que

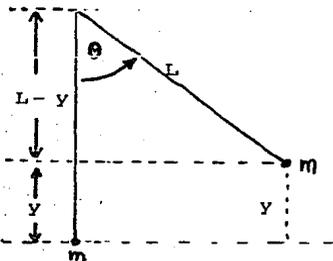


Fig. (d).

se forma, cuya hipotenusa es L , cuyo cateto adyacente a θ es $L - y$, se tiene que,

$$\frac{L - y}{L} = \cos \theta$$

de donde,

$$y = L - L \cos \theta$$

$$y = L(1 - \cos \theta)$$

Y puesto que la energía potencial gravitacional es $U = mgy$, resulta, para el péndulo,

$$U = mgL(1 - \cos\theta)$$

La energía mecánica total para el péndulo será, entonces

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + mgL(1 - \cos\theta)$$

Utilizando la ecuación (c) de este mismo apéndice,

$$\bar{v} = \omega L \hat{u}_\theta$$

resulta que el cuadrado de la magnitud de la velocidad es

$$v^2 = \omega^2 L^2$$

puesto que la magnitud del vector \hat{u}_θ es igual a uno.

Por lo tanto, la energía total del péndulo se puede escribir,

$$E = \frac{m\omega^2 L^2}{2} + mgL(1 - \cos\theta)$$

APENDICE VI

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes;

$$\begin{pmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ dx_3/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Los valores propios o raíces características de la matriz de los coeficientes se obtiene resolviendo el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - r & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0$$

que da lugar a una ecuación algebraica de grado n en r . A esta ecuación resultante se le llama " la ecuación característica" y a los valores de r que son solución de dicha ecuación, se les llama las raíces características o los valores propios del sistema.

Si las n raíces características son $r(1), r(2), r(3), \dots, r(n)$, todas reales y distintas, a cada una de ella le corresponde un vector $\bar{E}_{r(k)}$ que debe cumplir con la condición,

$$A\bar{E}_{r(k)} = r(k)\bar{E}_{r(k)} \dots\dots\dots(a)$$

siendo A, la matriz de los coeficientes.

Resulta entonces que, para cada valor real distinto $r(k)$, la función vectorial

$$\bar{X}_{r(k)} = \bar{E}_{r(k)} e^{r(k)t} \dots\dots\dots(b)$$

es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales. En efecto, derivando (b) con respecto al tiempo se obtiene

$$\bar{X}'_{r(k)} = r(k)\bar{E}_{r(k)} e^{r(k)t}$$

pero, de acuerdo con (a), lo anterior se puede escribir,

$$\bar{X}'_{r(k)} = A\bar{E}_{r(k)} e^{r(k)t}$$

y, de acuerdo con (b), resulta

$$\bar{X}'_{r(k)} = A\bar{X}_{r(k)}$$

lo cual indica que la función dada por (b), satisface la ecuación

$$\bar{R}' = A\bar{R} \quad ; \quad \bar{R} = (\overset{\text{columna}}{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n})$$

que representa al sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Entonces volviendo a recordar que las $r(k)$ son todas reales y distintas, la solución general del sistema es

$$\bar{R}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \bar{X}_{r(k)}$$

en forma desarrollada

$$\bar{R}(t) = c_1 \bar{E}_{r(1)} e^{r(1)t} + c_2 \bar{E}_{r(2)} e^{r(2)t} + \dots + c_n \bar{E}_{r(n)} e^{r(n)t}$$

en donde las constantes c se determinan de acuerdo a las condi-

ciones iniciales que deba cumplir el sistema.

En el caso de que existan raíces repetidas, por ejemplo si $r(k)$ es una raíz de la ecuación característica que tiene multiplicidad m , o sea que $(r - r(k))^m$ es un factor de dicha ecuación, entonces a esta raíz le corresponderán m soluciones linealmente independientes,

$$\bar{E}_{r(k)} e^{r(k)t}, \bar{E}_{r(k)} t e^{r(k)t}, \dots, \bar{E}_{r(k)} t^{m-1} e^{r(k)t}$$

Por ejemplo, supongamos que en un sistema de 5 ecuaciones lineales, la ecuación característica es

$$(r-r(1))(r-r(2))(r-r(3))(r-r(3))(r-r(3)) = 0$$

de manera que la raíz, que arbitrariamente se le asigno el tercer lugar, resultó con multiplicidad 3, entonces la solución general del sistema sería

$$\bar{R}(t) = c_1 \bar{E}_{r(1)} e^{r(1)t} + c_2 \bar{E}_{r(2)} e^{r(2)t} + c_3 \bar{E}_{r(3)} e^{r(3)t} + c_4 \bar{E}_{r(3)} t e^{r(3)t} + c_5 \bar{E}_{r(3)} t^2 e^{r(3)t}$$

En el caso de que existan raíces complejas de la ecuación característica, éstas aparecen por parejas, de manera que, si

$$r(k) = a + ib \quad (i = \sqrt{-1}, a \text{ y } b, \text{ reales})$$

es una raíz, también su complejo conjugado lo es

$$r^*(k) = a - ib$$

y existirán dos vectores propios correspondientes

$$\bar{E}_{r(k)} \quad \text{y} \quad \bar{E}_{r^*(k)}$$

siendo uno de ellos el conjugado del otro. En este caso

$$\bar{E}_{r(k)} e^{r(k)t} \quad \text{y} \quad \bar{E}_{r^*(k)} e^{r^*(k)t}$$

serán soluciones del sistema.

Usando la fórmula de Euler

$$e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

las dos soluciones complejas anteriores, se pueden sustituir por las soluciones reales

$$\frac{1}{2}(\bar{E}_{r(k)} e^{r(k)t} + \bar{E}_{r(k)}^* e^{r^*(k)t})$$

$$\frac{i}{2}(\bar{E}_{r(k)} e^{r(k)t} - \bar{E}_{r(k)}^* e^{r^*(k)t})$$

quedando en la forma

$$\bar{X}_{r(k)} = e^{at} (\bar{G}_{r(k)} \cos bt + \bar{H}_{r(k)} \operatorname{sen} bt) \quad \dots (c)$$

$$\bar{X}'_{r(k)} = e^{at} (\bar{H}_{r(k)} \cos bt - \bar{G}_{r(k)} \operatorname{sen} bt)$$

en donde,

$$\bar{G}_{r(k)} = \frac{\bar{E}_{r(k)} + \bar{E}_{r(k)}^*}{2} \quad \text{y} \quad \bar{H}_{r(k)} = \frac{i(\bar{E}_{r(k)} - \bar{E}_{r(k)}^*)}{2}$$

Si existen raíces características complejas que se repitan, las soluciones linealmente independientes correspondientes a cada raíz compleja repetida, son análogas a las mencionadas para valores reales repetidos.

Como puede verse, el caso complejo incluye al caso real, es decir si en las soluciones (c) de arriba, se hace $b = 0$ (parte imaginaria) resulta $r(k) = a$ (parte real) y $\bar{X}_{r(k)}$ y $\bar{X}'_{r(k)}$ son la misma solución.

Ahora es el momento de observar una cosa importante:

Para que las soluciones tiendan a cero a medida que la t crece, la parte real de las raíces características debe ser negativa

para que la exponencial e^{at} , cuando la a es la parte real de la raíz compleja o $e^{r(k)t}$, cuando la $r(k)$ es real, decrezca con el aumento del tiempo. En este caso resulta que el origen es asintóticamente estable. (Con oscilaciones amortiguadas si $b \neq 0$).

Si la parte real es cero, las soluciones dadas por (c) constan solamente de la combinación de senos y cosenos que dan lugar a oscilaciones no amortiguadas. En este caso, el origen resulta tener estabilidad neutra.

Y, evidentemente, si la parte real de las raíces características es positiva, el origen es inestable.

APENDICE VII

Para una función $f(t)$ real de variable real, la derivada y la diferencial se pueden definir de la siguiente manera:

$$\text{Si } f(t + h) = f(t) + f'(t)h + \varnothing(t,h)h \dots\dots\dots(i)$$

y se cumple la condición,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varnothing(t,h) = 0 \dots\dots\dots(ii)$$

entonces, la función $f'(t)$ es la derivada de $f(t)$ con respecto a t , y $f'(t)h$ es la diferencial df de $f(t)$,

$$df = f'(t)h$$

como h es el incremento de la variable independiente t , se acostumbra llamarlo dt , y se escribe

$$df = f'(t)dt \dots\dots\dots(iii)$$

El incremento de la función $f(t)$ cuando el valor de t aumenta de $t = a$ hasta $t = a+h$, resulta ser, de acuerdo con (i)

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \varnothing(a,h)h \dots\dots(iv)$$

y considerando la condición (ii), habrá valores de h pequeños para los cuales el incremento de la función pueda aproximarse por su diferencial, es decir,

$$f(a+h) - f(a) \approx f'(a)h \dots\dots\dots(v)$$

cuando h es suficientemente pequeño para que $\varnothing(a,h)h \approx 0$.

Para una función vectorial de variable real $\vec{f}(t)$, la derivada y la diferencial se encuentran aplicando (i) y (ii) a cada una de

de las funciones componentes, por ejemplo, en dos dimensiones,

$$\bar{F}(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

de manera que,

$$\bar{F}(t+h) = (f_1(t+h), f_2(t+h))$$

y si cada una de las funciones componentes, reales de variable real, cumplen con (i) y (ii),

$$\begin{aligned} \bar{F}(t+h) &= (f_1(t)+f_1'(t)h+\phi_1(t,h)h, f_2(t)+f_2'(t)h+\phi_2(t,h)h) \\ &= (f_1(t), f_2(t)) + (f_1'(t), f_2'(t))h + (\phi_1(t,h), \phi_2(t,h))h \\ &= \bar{F}(t) + \bar{F}'(t)h + \bar{\phi}(t,h)h \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{\phi} = \lim_{h \rightarrow 0} (\phi_1, \phi_2) = \bar{0}$$

y la función $\bar{F}'(t) = (f_1', f_2')$ será la derivada de $f(t)$ y el término $\bar{F}'(t)h$ será la diferencial. O sea que para derivar una función vectorial de variable real hay que derivar a cada una de sus componentes. Y se tendrá también

$$\bar{F}(a+h) - \bar{F}(a) \approx \bar{F}'(a)h \dots\dots\dots(vi)$$

para h suficientemente pequeño para que

$$\bar{\phi}(t,h) \approx \bar{0}$$

Para una función real de variable vectorial $f(\bar{R})$, la derivada y la diferencial se pueden definir de la siguiente manera:

$$\text{Si } f(\bar{R} + \bar{h}) = f(\bar{R}) + \bar{F}'(\bar{R}) \cdot \bar{h} + \bar{\phi}(\bar{R}; \bar{h}) \cdot \bar{h} \dots\dots\dots(vii)$$

en donde, para 2 dimensiones, por ejemplo, $\bar{R} = (x, y)$ y $\bar{h} = (h_1, h_2)$, la función vectorial de variable vectorial

$$\bar{f}'(\bar{R}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

es la derivada de la función $f(\bar{R})$ con respecto a \bar{R} , y el término

$$\bar{f}'(\bar{R}) \cdot \bar{h} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (h_1, h_2) \dots\dots\dots(viii)$$

es la diferencial df , siempre y cuando se cumpla que,

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow \bar{0}} \bar{\phi}(\bar{R}; \bar{h}) = \bar{0} \dots\dots\dots(ix)$$

Al vector \bar{h} que es el incremento de la variable vectorial independiente, se le acostumbra llamar $d\bar{R} = (dx, dy)$, o sea, $h_1=dx$ y $h_2=dy$, de manera que la diferencial queda

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (dx, dy) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \dots\dots\dots(x) \end{aligned}$$

(VEASE EL APENDICE IV B).

Por costumbre a la función $\bar{f}'(\bar{R}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ no se le llama la derivada de f sino "el gradiente de f ". Y se escribe

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

en dos dimensiones. Por lo que la expresión para la diferencial queda

$$df = \nabla f \cdot d\bar{R} \dots\dots\dots(xi)$$

En resumen, $f(\bar{R})$ es derivable en cierto dominio de valores de \bar{R} , si se puede escribir:

$$f(\bar{R} + d\bar{R}) = f(\bar{R}) + \nabla f \cdot d\bar{R} + \bar{\phi}(\bar{R}; d\bar{R}) \cdot d\bar{R}$$

y se cumple la condición

$$\begin{aligned} \lim_{d\bar{R} \rightarrow \bar{0}} \bar{\phi}(\bar{R}; d\bar{R}) &= \bar{0} \\ d\bar{R} &\rightarrow \bar{0} \end{aligned}$$

Entonces, el incremento de la función $f(\bar{R})$ cuando \bar{R} se incrementa desde $\bar{R} = \bar{a}$ hasta $\bar{R} = \bar{a} + \bar{h}$, será

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{h} + \bar{\theta}(\bar{a}; \bar{h}) \cdot \bar{h} \dots\dots\dots(\text{xi})$$

y para \bar{h} suficientemente pequeño,

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) \approx \nabla f \cdot \bar{h} \dots\dots\dots(\text{xi})$$

Por último, para una función vectorial de variable vectorial $\bar{f}(\bar{R})$ que en dos dimensiones sería $\bar{f}(\bar{R}) = (f_1(\bar{R}), f_2(\bar{R}))$, cuyas componentes son funciones reales de variable vectorial, la derivada y la diferencial se definen aplicando (vii) y (ix) a cada una de las funciones componentes, es decir,

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{R} + \bar{h}) &= (f_1(\bar{R} + \bar{h}), f_2(\bar{R} + \bar{h})) \\ &= (f_1(\bar{R}) + \bar{f}'_1(\bar{R}) \cdot \bar{h} + \bar{\theta}_1(\bar{R}; \bar{h}) \cdot \bar{h}, f_2(\bar{R}) + \bar{f}'_2(\bar{R}) \cdot \bar{h} + \bar{\theta}_2(\bar{R}; \bar{h}) \cdot \bar{h}) \\ &= (f_1(\bar{R}), f_2(\bar{R})) + (\bar{f}'_1(\bar{R}) \cdot \bar{h}, \bar{f}'_2(\bar{R}) \cdot \bar{h}) + (\bar{\theta}_1(\bar{R}; \bar{h}) \cdot \bar{h}, \bar{\theta}_2(\bar{R}; \bar{h}) \cdot \bar{h}) \end{aligned}$$

Escribiendo explícitamente el 2o. término del lado derecho, se tiene,

$$(\bar{f}'_1(\bar{R}) \cdot \bar{h}, \bar{f}'_2(\bar{R}) \cdot \bar{h}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y} h_2, \frac{\partial f_2}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y} h_2 \right)$$

pasando a vectores columna, queda

$$\begin{pmatrix} \bar{f}'_1(\bar{R}) \cdot \bar{h} \\ \bar{f}'_2(\bar{R}) \cdot \bar{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y} h_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y} h_2 \end{pmatrix}$$

el vector de la derecha puede ponerse como un producto de una matriz por un vector columna, de la siguiente manera,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y} h_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y} h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= J\bar{h} \dots\dots\dots(xiv)$$

De la misma forma, el tercer término de la derecha de la expresión para $\bar{f}(\bar{R}+\bar{h})$, usando vectores columna se puede escribir,

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1(\bar{R};\bar{h}) \cdot \bar{h} \\ \bar{\phi}_2(\bar{R};\bar{h}) \cdot \bar{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}(\bar{R};\bar{h})h_1 + \phi_{12}(\bar{R};\bar{h})h_2 \\ \phi_{21}(\bar{R};\bar{h})h_1 + \phi_{22}(\bar{R};\bar{h})h_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= Q\bar{h} \dots\dots\dots(xv)$$

Con esta nueva notación de matrices y usando vectores columna, la expresión para $\bar{f}(\bar{R} + \bar{h})$ queda,

$$\bar{f}(\bar{R} + \bar{h}) = \bar{f}(\bar{R}) + J\bar{h} + Q(\bar{R};\bar{h})\bar{h} \dots(xvi)$$

en donde J es la matriz que aparece en (xiv),

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(xvii)$$

y Q es la matriz que aparece en (xv) y que tiene ϕ 's como elementos.

Y si se cumple que

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} Q &= 0 \text{ (matriz)} \\ \vec{h} &\rightarrow \vec{0} \end{aligned}$$

la matriz J es la derivada de la función $\vec{F}(\vec{R})$ y el término $J\vec{h}$ es la diferencial $d\vec{F}$. A la matriz J se le acostumbra llamar la matriz "jacobiana".

Si la función $\vec{F}(\vec{R})$ se incrementa cuando \vec{R} se incrementa desde $\vec{R} = \vec{a}$ hasta $\vec{R} = \vec{a} + \vec{h}$, dicho incremento de la función será

$$\vec{F}(\vec{a} + \vec{h}) - \vec{F}(\vec{a}) = J(\vec{a})\vec{h} + Q(\vec{a};\vec{h})\vec{h} \dots \text{(xviii)}$$

y para \vec{h} suficientemente pequeño tendremos la aproximación,

$$\vec{F}(\vec{a} + \vec{h}) - \vec{F}(\vec{a}) \approx J(\vec{a})\vec{h} \dots \text{(xix)}$$

$J(\vec{a})$ significa que los elementos de la matriz, o sea, las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_1(\vec{R})}{\partial x}, \frac{\partial f_1(\vec{R})}{\partial y}, \frac{\partial f_2(\vec{R})}{\partial x}, \frac{\partial f_2(\vec{R})}{\partial y}$$

se tienen que calcular en $\vec{R}=\vec{a}$.

Generalizado a un espacio de n dimensiones, es decir, si

$$\vec{R} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

y $\vec{F}(\vec{R}) = (f_1(\vec{R}), f_2(\vec{R}), f_3(\vec{R}), \dots, f_n(\vec{R}))$, entonces,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

APENDICE VIII

Con relación al sistema cuadrático dado por (56), haremos

$$F_1(A, B) = a_0 + a_1A + a_2B \dots\dots\dots(I)$$

$$F_2(A, B) = b_0 + b_1A + b_2B$$

con lo cual, las funciones f_1 y f_2 definidas por (58) quedan

$$f_1(A, B) = AF_1(A, B) \dots\dots\dots(II)$$

$$f_2(A, B) = BF_2(A, B)$$

y resulta que

$$\frac{\partial f_1}{\partial A} = A \frac{\partial F_1}{\partial A} + F_1 \dots\dots\dots(III)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial B} = B \frac{\partial F_2}{\partial B} + F_2$$

pero, de acuerdo con (I),

$$\frac{\partial F_1}{\partial A} = a_1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_2}{\partial B} = b_2$$

entonces (III) se puede escribir

$$\frac{\partial f_1}{\partial A} - F_1 = a_1A$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial B} - F_2 = b_2B$$

de esto último se obtiene,

$$a_1A + b_2B = \frac{\partial f_1}{\partial A} + \frac{\partial f_2}{\partial B} - F_1 - F_2$$

o también, utilizando (II)

$$a_1A + b_2B = \frac{\partial f_1}{\partial A} + \frac{\partial f_2}{\partial B} - \frac{f_1}{A} - \frac{f_2}{B} \dots\dots(IV)$$

Por otro lado, de las ecuaciones (I), resulta

$$a_1A + a_2B = F_1 - a_0$$

$$b_1A + b_2B = F_2 - b_0$$

considerándolo como un sistema algebraico de ecuaciones simultáneas con incógnitas A y B, resolviéndolo se obtiene,

$$A = \frac{b_2(F_1 - a_0) - a_2(F_2 - b_0)}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$B = \frac{a_1(F_2 - b_0) - b_1(F_1 - a_0)}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

de donde

$$\begin{aligned} a_1A + b_2B &= \frac{a_1b_2F_1 - a_1b_2a_0 - a_1a_2F_2 + a_1a_2b_0 + b_2a_1F_2 - b_2a_1b_0 - b_2b_1F_1 + b_2b_1a_0}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ &= \frac{a_1b_0(a_2 - b_2) - a_0b_2(a_1 - b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1} - \frac{b_2(b_1 - a_1)F_1 + a_1(a_2 - b_2)F_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ &= \frac{C_1}{C_2} - m'F_1 - n'F_2 \quad \dots\dots\dots(V) \end{aligned}$$

en donde

$$C_1 = a_1b_0(a_2 - b_2) - a_0b_2(a_1 - b_1) \quad \dots\dots\dots(VI)$$

$$C_2 = a_1b_1 - a_2b_2 \quad \dots\dots\dots(VII)$$

$$m' = \frac{b_2(b_1 - a_1)}{C_2} \quad \dots\dots\dots(IX)$$

$$n' = \frac{a_1(a_2 - b_2)}{C_2}$$

Hemos obtenido, entonces, dos expresiones para $a_1A + b_2B$, la (IV) y la (V), y de acuerdo con ellas, (junto con (II)),

$$\frac{\partial f_1}{\partial A} + \frac{\partial f_2}{\partial B} - \frac{f_1}{A} - \frac{f_2}{B} = \frac{C_1}{C_2} - m' \frac{f_1}{A} - n' \frac{f_2}{B}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial A} + \frac{\partial f_2}{\partial B} + \frac{f_1}{A} (m'-1) + \frac{f_2}{B} (n'-1) = \frac{C_1}{C_2}$$

y haciendo $m'-1 = m$ y $n'-1 = n$, queda

$$\frac{\partial f_1}{\partial A} + \frac{\partial f_2}{\partial B} + m \frac{f_1}{A} + n \frac{f_2}{B} = \frac{C_1}{C_2} \dots\dots\dots (X)$$

Ahora introducimos la función $H(A,B)$ exigiendo que cumpla las condiciones

$$\frac{\partial H}{\partial A} = m \frac{H}{A} \text{ y } \frac{\partial H}{\partial B} = n \frac{H}{B} \dots\dots (XI)$$

Multiplicando por H , la ecuación (X) se obtiene

$$H \frac{\partial f_1}{\partial A} + H \frac{\partial f_2}{\partial B} + f_1 \left(m \frac{H}{A}\right) + f_2 \left(n \frac{H}{B}\right) = H \frac{C_1}{C_2}$$

ahora, usando las condiciones dadas en (XI) y reordenando términos, resulta

$$\left(H \frac{\partial f_1}{\partial A} + f_1 \frac{\partial H}{\partial A}\right) + \left(H \frac{\partial f_2}{\partial B} + f_2 \frac{\partial H}{\partial B}\right) = H \frac{C_1}{C_2}$$

y como los términos entre paréntesis son las derivadas del producto Hf_1 y Hf_2 con respecto a A y con respecto a B , respectivamente, se puede escribir, finalmente

$$\frac{\partial Hf_1}{\partial A} + \frac{\partial Hf_2}{\partial B} = H \frac{C_1}{C_2} \dots\dots\dots (XII)$$

con esto queda demostrada la ecuación (61) del trabajo.

Para completar la demostración vamos a encontrar la expresión de la función $H(A,B)$ dada por (59).

Partiendo de las condiciones impuestas sobre H y que están dadas en (XI), tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial A} = m \frac{H}{A} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial B} = n \frac{H}{B}$$

Tendremos, entonces, la integrales parciales

$$\int_A \frac{dH}{H} = m \int_A \frac{dA}{A} \quad \text{Y} \quad \int_B \frac{dH}{H} = n \int_B \frac{dB}{B}$$

que dan como resultado

$$\text{Ln } H = \text{Ln } A^m + \text{Ln } g(B)$$

$$\text{Ln } H = \text{Ln } B^n + \text{Ln } h(A)$$

respectivamente, en donde $g(B)$ y $h(A)$ son funciones por determinar.

Prosiguiendo, podemos escribir,

$$H = A^m g(B)$$

$$H = B^n h(A)$$

y es fácil ver que si $g(B) = B^n$ y $h(A) = A^m$, la función buscada queda

$$H(A, B) = A^m B^n \dots\dots\dots(\text{XIII})$$

Este resultado demuestra la ecuación (59) y la definición de m y de n dada por (60).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

SECCION 2

- May R.M. (1976). Models for a single populations, in:
Theoretical Ecology. Robert May (ed)
W.B.Saunders Co. 4-6 pp.
- Olinick M.(1978) An introduction to mathematical models
in the social and life sciences.Addison
Wesley Co. 55-58 pp.
- Poole R.W.(1974) An introduction to quantitative ecology.
McGraw-Hill Ltd. 9-11 pp.
- Ravinovich J.E.
(1980) Introducción a la ecología de poblaciones
animales.C.E.C.S.A. 247-250 pp.

SECCION 3

- May R.M. (1976) op. cit. 4-6 pp.
- Maynard-Smith J.
(1968) Mathematical ideas in biology. Cambridge
University Press.40-44 pp.
- Olinick M.(1978) op. cit. 59-65 pp.
- Pianka E.R(1974) Principles of population ecology. Harper
& Row Publishers. 82-82 pp.

SECCION 4

- Hassell M.P.
(1976) The dynamics of competition an predation.
Edward Arnold(Publishers)Ltd. 17-18 pp.
- Olinick M.(1978) op. cit. 84-86 pp.

SECCION 5

- Goldstein H. (1969) Classical Mechanics. Addison Wesley.
289-290 pp.
- Kreider D.L.
Kuller R.G y
Ostberg D.R. (1968) Ecuaciones diferenciales. Fondo edu-
cativo panamericano. 395-398 pp.
- May R.M. (1973) Stability and complexity in model
ecosystem. Princeton University Press.
13-18 pp.

SECCION 6

- Fowler D. (1970) An introduction to analytical dynamics.
Addison Wesley . 63-66 pp.
- Kreider et al. (1968) op. cit. 399-408 pp.

SECCION 7

- Kreider et al. (1968) op. cit. 410-416 pp.

SECCION 8

- Kreider et al. (1968) op. cit. 417-421 pp.
- Lotka A.J. (sin año de edicion) Elements of mathematical biology. Dover
Publications Inc. 59-61 pp.
- May R. M. (1973) On relationships among various types
of population models. The american
naturalist. 107: 46-51

SECCION 9

- Coleman C.S. (1981) Modelos cuadraticos de poblacion. Comu-
nicacion interna No. 8. Departamento de
matematicas de la Facultad de Ciencias.

SECCION 10

- Gulland J.A. (1973) Manual of methods for fish stock assessment. FAO. 121-123 pp.
- Gulland J.A. The analysis of data an development of models, en, Fish population dynamics J.A. Gulland (ed) 72-76 pp.
- Schaefer M.B. (1954) Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial fisheries. Interamerican tropical tuna commission. Bulletin Vol. I No. 2.

SECCION 11

- Pella J.J. y Tomlinson P.K. (1969) A generalized stock production model. Interamerican tropical tuna commission. Bulletin Vol. 13, No. 3.
- Rothschild B.J. y Suda A. Population dynamics of tuna, en, Fish population dynamics. J.A. Gulland (ed) 316-319 pp.

SECCION 12

- Marsaglia G. y Bray T.A. (1964) A convenient method for generating normal variables. SIAM Review. 6 :260-264.
- Wallis G.I. (1975) Modelling the impact of waste on a stable fish population. Water Research 9 :1025-1036.