

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO

24  
20

FACULTAD DE CIENCIAS.

INTRODUCCION AL CALCULO  
DE VARIAS VARIABLES CON  
EJEMPLOS DE BIOLOGIA.

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

JOSE ROBERTO MANDUJANO



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INDICE

Introducción . . . . .	I
1. Geometría Analítica en el Espacio	0
1.1. SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULAR EN TRES DIMENSIONES . . . . .	2
1.2. SUMA EN $\mathbb{R}^3$ . . . . .	22
1.3. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VEC- TOR Y RESTA DE VECTORES . . . . .	30
1.4. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS Y NORMA DE UN VECTOR . . . . .	43
1.5. PRODUCTO ESCALAR . . . . .	52
1.6. PRODUCTO VECTORIAL . . . . .	67
1.7. RECTAS . . . . .	100
1.8. PLANOS . . . . .	116

1.9. SUPERFICIES DE REVOLUCION . . . . .	139
1.10. MATRICES . . . . .	155
2. Curvas . . . . .	184
2.1. CONCEPTO DE CURVA . . . . .	186
2.2. LIMITES Y CONTINUIDAD . . . . .	197
2.3. DERIVADA . . . . .	207
3. Campos Escalares . . . . .	223
3.1. CONCEPTO DE CAMPO ESCALAR . . . . .	224
3.2. GRAFICA DE UN CAMPO ESCALAR . . . . .	233
3.3. LIMITES Y CONTINUIDAD . . . . .	254
3.4. DERIVADAS PARCIALES . . . . .	276
3.5. DERIVADAS DIRECCIONALES . . . . .	302
3.6. GRADIENTE . . . . .	310
3.7. REGLA DE LA CADENA . . . . .	318



3.8. PLANO TANGENTE . . . . .	336
3.9. MAXIMOS Y MINIMOS . . . . .	345
4. Campos Vectoriales . . . . .	370
4.1. CONCEPTO DE CAMPO VECTORIAL . . . . .	371
4.2. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LOS CAMPOS VECTORIALES . . . . .	378
4.3. TRANSFORMACIONES LINEALES . . . . .	380
4.4. MATRIZ JACOBIANA . . . . .	393
4.5. COORDENADAS CILINDRICAS Y ESFERICAS . . . . .	396
5. Integración . . . . .	410
5.1. CONCEPTO DE INTEGRAL DOBLE . . . . .	411
5.2. INTEGRALES ITERADAS . . . . .	426
5.3. TEOREMA FUNDAMENTAL PARA INTEGRALES DOBLES . . . . .	440
Bibliografía . . . . .	445

# INTRODUCCION

Este trabajo tubo su origen cuando impartí de cursos de Matemáticas **D** en el área de Ciencias Biológicas y de la Salud (**CBS**) en la Universidad Autónoma Metropolitana

Surgio la idea de hacer unas notas para el curso, pero dándoles un cariz que las distinguiera de los textos usuales. Por ello traté que las notas tubieran las siguientes características:

(\*) Incluir únicamente los temas del programa.

(\*\*) Motivar los conceptos matemáticos por medio de fenómenos biológicos, químicos o físicos.

(\*\*\*) Dar justificaciones de los resultados, pero sin llegar a caer en

demonstraciones aburridas y molestas para alumnos de Ingeniería. En este punto más bien se prefirió manejar la intuición e imaginación del alumno.

(•v) Evitar el molesto método clásico de enseñar los conceptos en la forma:

DEFINICION ...  
 TEOREMA ...  
 COROLARIO ...  
 LEMA ... etc, etc.

Quizá el ejemplo más representativo sobre lo que estamos hablando, lo da la sección 1.6. del capítulo uno. En ella se "hace" la teoría del producto vectorial.

Cabe también señalar las deficiencias del trabajo. Una es que el material es demasiado como para que él sirva como notas de clase. Mas bien se les podría llamar material de apoyo. Otra cosa importante es que muchos ejemplos no están estudiados a fondo. También se podría señalar la falta de problemas acordes con la forma de presentar la teoría.

Debo mencionar también que la presentación del trabajo, así como la mayor parte de los ejemplos son originales. De hecho los dos únicos libros de consulta [1] y [2] sirvieron para obtener los ejemplos 11 y 12 del capítulo cuatro, así como las fórmulas que aparecen en la página 72.



GEOMETRIA  
ANALITICA  
EN EL  
ESPACIO

Una tarea fundamental en el trabajo que se desarrolla en las áreas de Física, Química y Biología, es el de encontrar modelos matemáticos para los fenómenos que allí se estudian. Cuando esta tarea se ha realizado, el contenido de estas ciencias se enriquece, pues es posible cuantificarlas, comprenderlas mejor y proponer nuevas teorías; además, en los casos en los que esto es posible, hacer predicciones.

Teniendo en mente el comentario anterior, desarrollaremos el capítulo uno a partir del planteamiento de una serie de fenómenos, los cuales nos conducirán al planteamiento de algunos conceptos matemáticos.

## 1.1. SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULARES EN TRES DIMENSIONES.

Para empezar plantearemos una serie de fenómenos que nos conducirán al concepto de terna ordenada.

**EJEMPLO 1** A ciertos animales de laboratorio se les administra una dieta diaria de 500 gr. de pescado, 200 gr. de pan y 750 ml. de leche. Podemos abreviar la forma de describir la dieta, escribiendo

$$\alpha = (500, 200, 750)$$

sobreentendiendo que el primer número denota gramos de pescado, el segundo gramos de pan y el tercero mililitros de leche. Con esta convención, no da lo mismo escribir  $\alpha = (500, 200, 750)$  que  $\alpha = (200, 500, 750)$  (esto último diría que la dieta está constituida por 200 gr. de pescado en lugar de los 500 gr. que indica el

primer arreglo y con esto basta para que las dietas sean diferentes).

Como es importante, el orden en que se acomodan los números, a los arreglos de la forma:

$$\alpha = (f, p, l)$$

les llamaremos ternas ordenadas. A  $f$  se le llama primer componente de la terna, a  $p$  y  $l$  se les llama segunda y tercera componente de la terna respectivamente.

Conforme las cantidades  $f$ ,  $p$  y  $l$  cambian, se van obteniendo diferentes dietas. Por ejemplo, la dieta en que no se consume pescado, pan y leche, viene representada por la terna:

$$0 = (0, 0, 0)$$

Debe señalarse que dos dietas:

$$\alpha_1 = (f_1, p_1, l_1) \text{ y } \alpha_2 = (f_2, p_2, l_2)$$



son iguales únicamente cuando  $f_1 = f_2$ ,  $p_1 = p_2$  y  $h_1 = h_2$ .

**EJEMPLO 2** Consideremos un ecosistema el cual contiene a animales como chapulines, sapos y víboras. La cantidad que hay de cada uno de estos animales, las podemos representar por la terna ordenada:

$$\underline{E} = (cH, s, v)$$

donde  $cH$  indica la cantidad de chapulines,  $s$  la cantidad de sapos y  $v$  la cantidad de víboras. Por ejemplo la terna:

$$\underline{E} = (10\ 000, 50\ 000, 5\ 000)$$

indica que hay 10 000 chapulines, 50 000 sapos y 5 000 víboras.

**EJEMPLO 3** Consideremos un gas contenido en el interior de un tanque. El estado termodinámico en que se encuentra el gas,

que da determinado por las tres variables termodinámicas, volumen ( $V$ ), presión ( $P$ ) y temperatura ( $T$ ). Formemos una terna ordenada para indicar el estado termodinámico en que se encuentra el gas:

$$\xi = (V, P, T)$$

**EJEMPLO 4** Las cantidades de hidróxido de sodio e hidrógeno producidas al tiempo  $t$  en la reacción química:



se pueden representar por la terna ordenada:

$$\mathcal{R} = (t, \text{NaOH}, \text{H}_2)$$

Por ejemplo la terna ordenada

$$(5 \text{ min.}, 500 \text{ moles/l.}, 700 \text{ moles/l.})$$

indica que a los cinco minutos se han producido 500 moles por litro de hidróxi-

do de sodio y 700 moles por litro de hidrógeno

## EJERCICIOS.

1.- En el ejemplo uno ¿ cómo se calcula el doble ( $2\alpha$ ) de la dieta

$$\alpha = (f, p, l)$$

¿ cómo se calcula el triple y la mitad de la dieta  $\alpha$ ? En general ¿ cómo se podrían definir las ternas  $2\alpha$ ,  $3\alpha$ ,  $\frac{1}{2}\alpha$ ,  $n\alpha$ ?

2.- Encontrar un ejemplo como los que se dieron en el texto en el cual cualquiera de las tres componentes sean negativas.

Dejaremos por un momento los ejemplos, y empezaremos a desa-

rollar la teoría matemática que estos ejemplos nos sugieren.

Como el lector habrá observado, es del todo natural hablar de ternas ordenadas en fenómenos físicos, químicos y biológicos. Por esta razón merece una mayor atención el conjunto de las ternas ordenadas, este conjunto lo denotaremos por  $\mathbb{R}^3$ , es decir

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Como ya se mencionó antes, entenderemos que dos ternas ordenadas  $(x, y, z)$  y  $(u, v, w)$  son iguales solo cuando  $x = u$ ,  $y = v$  y  $z = w$ .

Para empezar nuestro estudio de  $\mathbb{R}^3$ , daremos una interpretación geométrica de él.

Para explicar la representación geométrica de  $\mathbb{R}^3$ , haremos referencia al ejemplo tres (el lector puede realizar una construcción parecida para los otros ejemplos).

Tomemos una terna ordenada que indique el estado en que se encuentra un gas:

$$\mathcal{E} = (V, P, T)$$

Para empezar nuestra construcción, se trazan tres rectas ortogonales entre sí, estas rectas reciben el nombre de ejes de coordenadas (Fig 1). A continuación

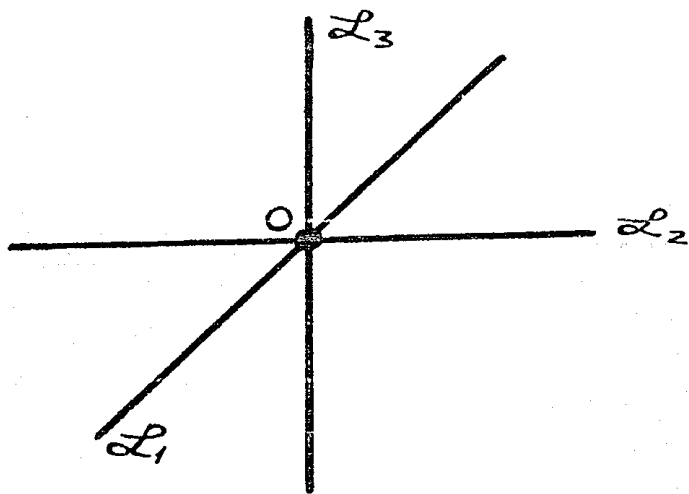


Fig. 1

nombramos "origen de coordenadas" u origen del sistema de coordenadas" al punto

O en el que se intersectan las rectas  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ . Después se identifica cada recta con una y solo una de las variables de estado, aunque la identificación entre las variables de estado y las rectas es arbitraria, por tradición se le asigna a  $L_1$  la primer componente de la terna, a  $L_2$  la segunda y a  $L_3$  la tercera. A continuación se marcan los ejes de coordenadas con una unidad de medida, para este ejemplo  $L_1$  se marca con unidades de volumen,  $L_2$  con unidades de presión y  $L_3$  con unidades de temperatura (Fig 2). Cabe señalar que

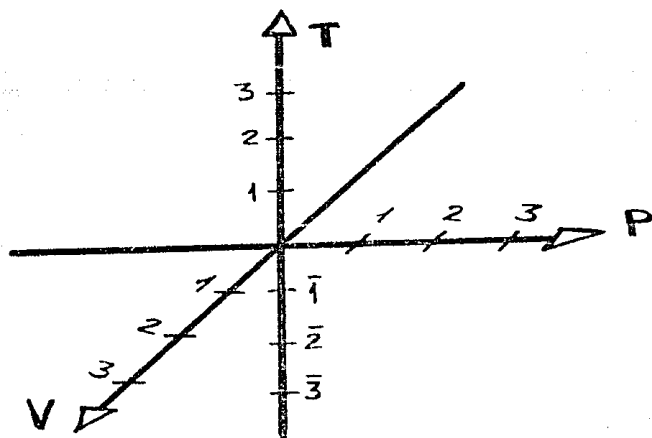


Fig 2

en este ejemplo si conviene hablar de unidades negativas de temperatura, pero no así para el volumen y presión. Aunque esto es una restricción, de todas maneras se marcan con unidades negativas los otros dos ejes, para dar cabida a aquellos fenómenos en los cuales si se tenga significado de hablar de los ejes  $L_1$  y  $L_2$  con unidades negativas. La representación geométrica de  $\mathbb{R}^3$  es tal y como lo muestra la Fig. 2 y además a tal representación la llamaremos **SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULAR EN TRES DIMENSIONES.**

Como los elementos de  $\mathbb{R}^3$  son ternas ordenadas, veremos como se representan en un sistema de coordenadas rectangular en tres dimensiones.

Supongamos que se quiere graficar la terna  $(V, P, T)$ . Los valores que toman las variables de estado se identifican con los puntos sobre la recta correspondiente, es decir identificamos a un número real con un y solo un punto de la recta correspondiente. A continuación se toma el eje  $V$  y ca-

minamos sobre él, empezando desde el origen de coordenadas  $O$ , tantas unidades como volumen tenga el gas, es decir, tanto como nos lo indique la primer componente de la terna  $(V, P, T)$  (Fig. 3). Realizado el paso anterior, llegamos al punto  $V$ , a continuación caminamos paralelamente al eje  $P$ , tanto como presión tenga el gas, esto lo indica la segunda componente. Así llega-

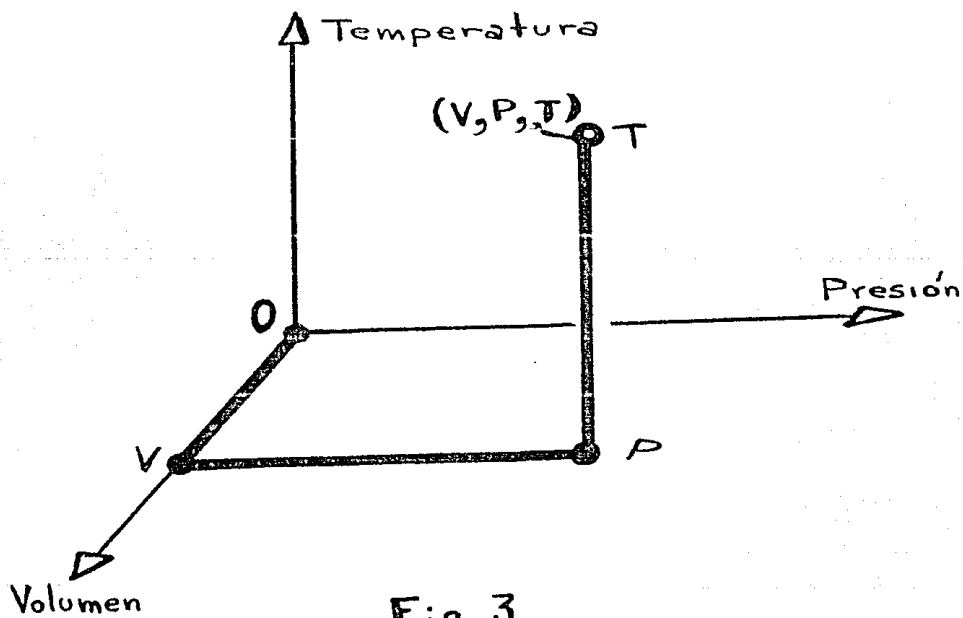


Fig. 3

mos al punto  $P$ . Finalmente estando en



en  $P$  caminamos paralelamente al eje  $T$  tanto como temperatura tenga el gas. Hecho todo lo anterior llegamos al punto  $T$ , el cual es la representación geométrica de la terna ordenada. Con esto llegamos a la conclusión de que una terna ordenada la podemos mirar o interpretar como un punto en el espacio, ya que  $\mathbb{R}^3$  lo podemos ver como el espacio físico.

## EJERCICIO.

1.- Mostrar que se obtiene el mismo punto si en lugar de comenzar caminando por el eje  $V$  se empieza en cualquiera de los otros dos. Por ejemplo se podría empezar marcando  $P$  sobre el eje de la presión, después caminar paralelamente al eje volumen una cantidad  $V$  y, finalmente, caminar paralelamente al eje de la temperatura una cantidad  $T$ . ¿Cuántos caminos, de este tipo, podrían seguirse para construir la terna  $(V, P, T)$ ? ¿Por qué da lo

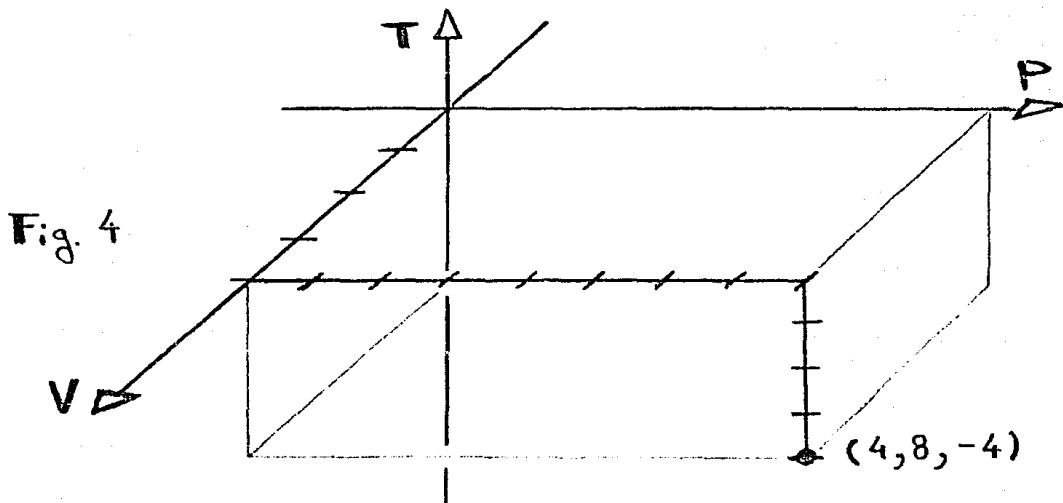
mismo seguir cualquiera de ellos?

**EJEMPLO 5** Supongamos que el estado en que se encuentra un gas viene dado por la terna ordenada:

$$\underline{E} = (4 \text{ l.}, 8 \text{ atm.}, -4^\circ \text{C})$$

¿Cuál es la representación geométrica de la terna ordenada en un sistema de coordenadas rectangular?

En este caso  $V = 4 \text{ l.}$ ,  $P = 8 \text{ atm.}$  y  $T = -4^\circ \text{C}$ , entonces la representación geométrica es como lo indica la Fig. 4.



**EJEMPLO 6** La temperatura de tres ciudades Nueva York, Paris y Londres, vienen dadas por la ternera ordenada:

$$\mathcal{T} = (-4^\circ\text{C}, -8^\circ\text{C}, -6^\circ\text{C})$$

La representación geométrica de  $\mathcal{T}$  se ilustra en la Fig. 5.

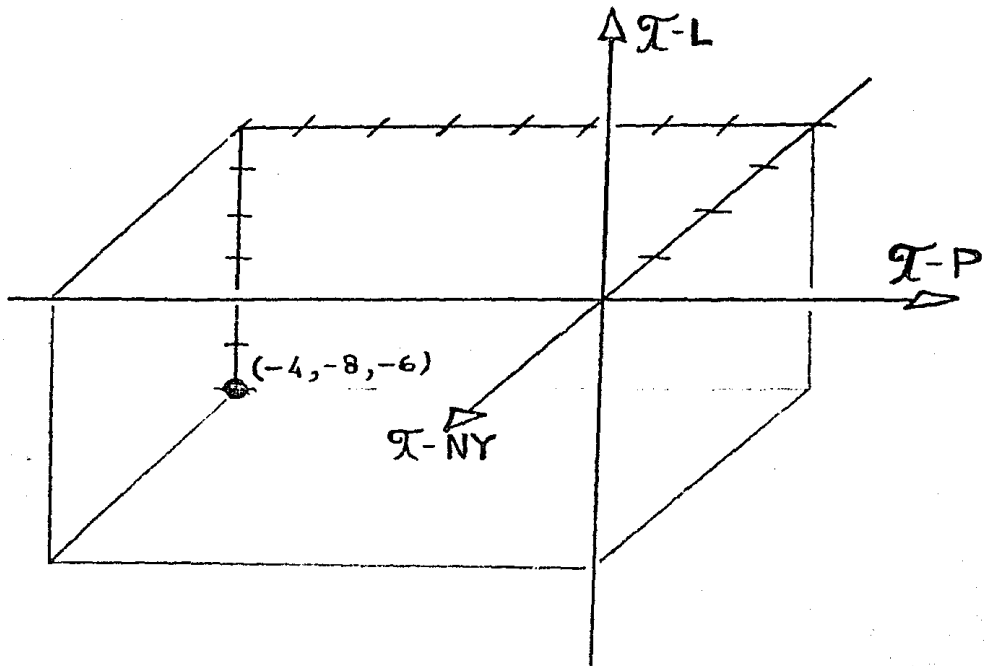


Fig. 5

Antes de pasar a otra cosa,

conviene aclarar que los ejes de coordenadas son comúnmente llamados eje  $X$ , eje  $Y$  y eje  $Z$  y se colocan tal y como lo ilustra la Fig. 6.

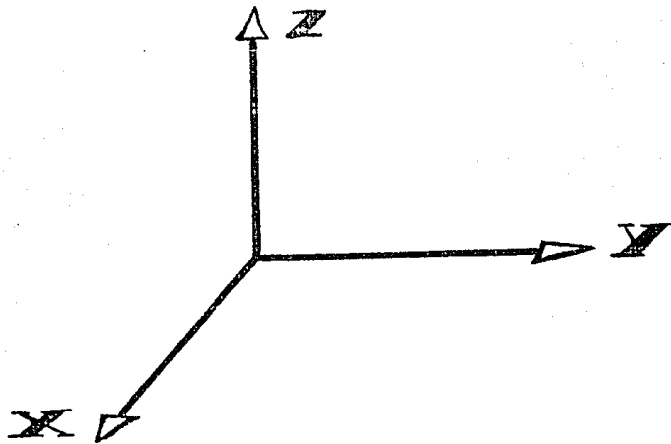


Fig. 6

Podemos darnos cuenta también que los ejes  $X$  e  $Y$  determinan un plano, el cual recibe el nombre de plano  $XY$ . De la misma manera los ejes  $Y$  y  $Z$  determinan al plano  $YZ$ , y finalmente los ejes  $X$  y  $Z$  determinan al plano  $XZ$ . (Fig. 7). Los planos  $XY$ ,  $XZ$  y  $YZ$  dividen al espacio en ocho regiones, las cuales reciben el nombre

de octantes.

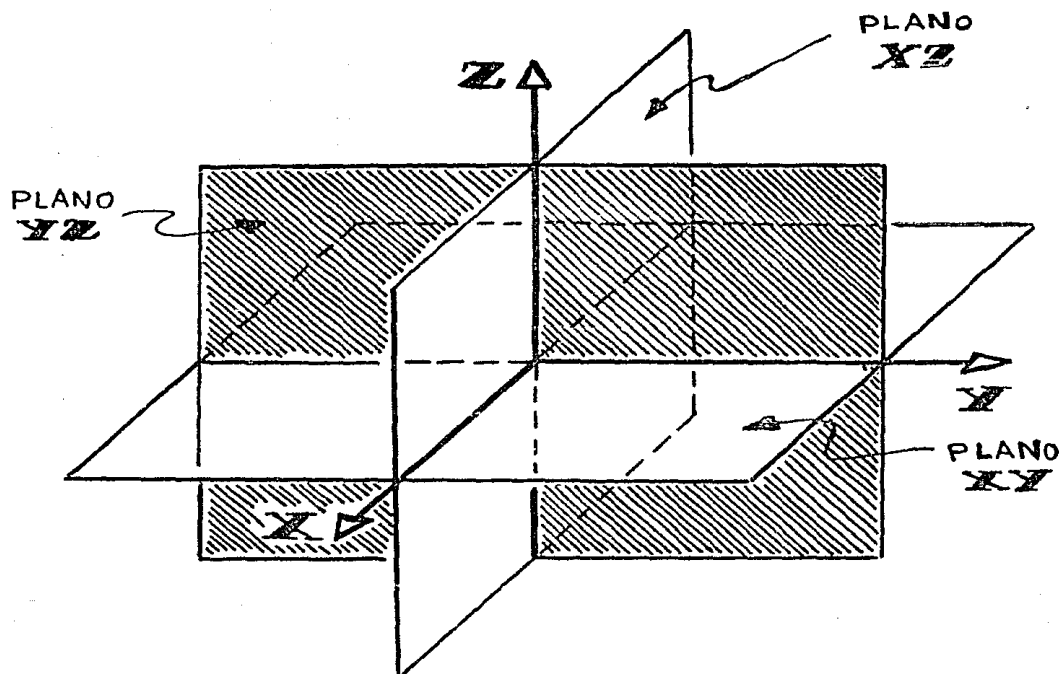


Fig. 7

Como hemos visto, la representación geométrica de una terna ordenada  $(x, y, z)$  viene dada por un punto en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Por esta razón a la terna ordenada  $(x, y, z)$  se le acostumbra nombrar por "el punto  $(x, y, z)$ ".

Existe otra forma de representar a las ternas ordenadas  $(x, y, z)$ . Para ilustrar este aspecto, pongamos por caso el ejemplo en que tenemos un cultivo de bacterias con dos tipos de bacterias: cocos y espirilas. Supongamos que la pareja  $(C, E)$  indica el número de bacterias del tipo cocos y espirilas que hay en el cultivo para un cierto tiempo. Es claro que el cultivo va cambiando conforme pasa el tiempo y por ello podemos pensar en formar un ente geométrico que nos vaya describiendo dichos cambios. Este ente geométrico es lo que podemos llamar **FLECHA** o **VECTOR**. (Fig. 8)

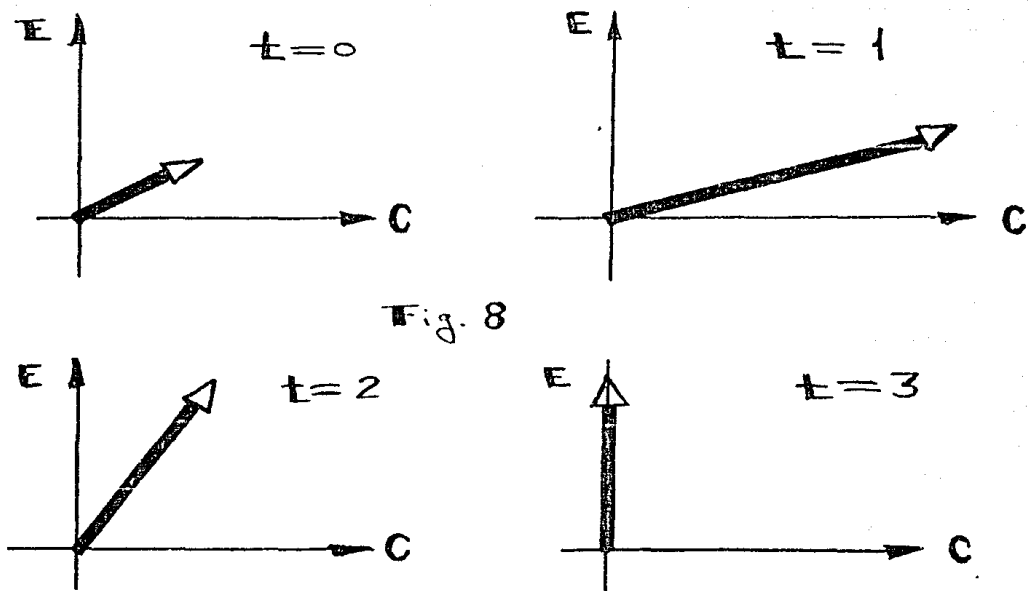


Fig. 8

La Fig. 8 muestra que en el lapso de tiempo  $[0,1]$  las bacterias cocos tienden a aumentar en mayor proporción que las espirilas. En el lapso de tiempo  $[1,2]$  los cocos tienden a disminuir y las espirilas a aumentar. Finalmente en el lapso de tiempo  $[2,3]$  los cocos siguen disminuyendo.

Lo que acabamos de hacer es la interpretación equivalente que se hace en mecánica cuando a un cuerpo le aplicamos una fuerza variable. Más adelante veremos que las interpretaciones mecánicas tienen una contraparte en nuestros ejemplos.

Una flecha o vector se representa geométricamente tal y como lo indica la Fig. 9. Los elementos de una flecha son el punto inicial, la dirección, el tamaño, el sentido y el punto final.

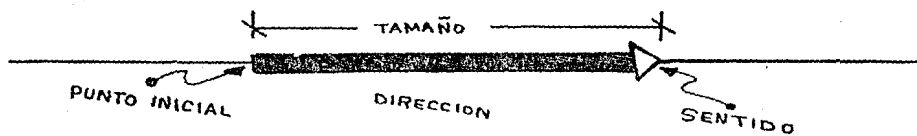


Fig. 9

La dirección de una flecha viene dada por la recta sobre la que descansa el vector (Fig. 10). Existen muchas direcciones para colocar una flecha.

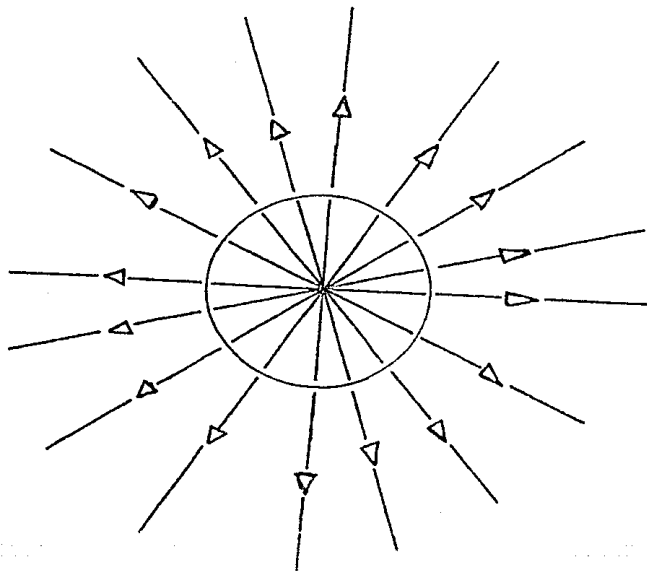


Fig. 10

El tamaño de una flecha es relativo y su definición depende del fenómeno al cual se esta aplicando. Por ejemplo, veremos que en fenómenos de tipo físico el tamaño de un vector conviene definirlo como la longitud de la flecha. Pero en fenómenos biológicos convendrá definirlo de



otra manera.

Los conceptos de punto inicial y final se explican por si mismos.

Para representar a la terna ordenada  $(x, y, z)$  como un vector, construimos una flecha que tenga como punto inicial a  $(0, 0, 0)$  y como punto final al punto que representa a la terna ordenada (Fig. 11)

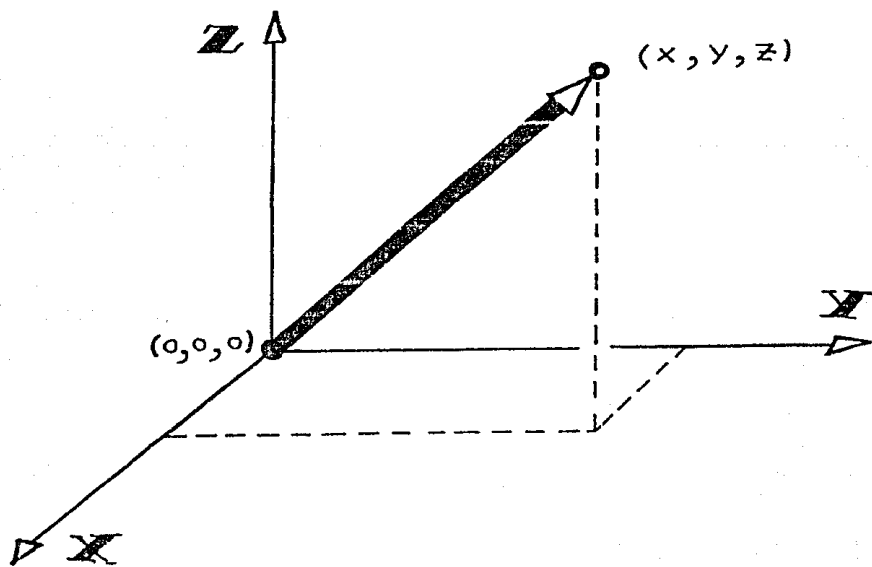


Fig. 11

Con lo visto hasta este momento, tenemos dos formas de representar una terna ordenada, a saber, como un punto en el espacio o como un vector. El lector debe estar atento para entender los dos tipos de representación, pues en algunos casos conviene ver a la terna como un punto, pero en otras como un vector.

## EJERCICIOS.

1.- Sitúese un sistema de coordenadas  $\underline{XYZ}$ , con el plano  $\underline{XY}$  sobre la superficie de un lago. Un pez se encuentra en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  y avanza, paralelamente al eje  $\underline{Y}$  hacia la dirección negativa,  $\alpha$  unidades para quedar abajo de una rama de árbol que esta sobre la superficie. ¿Cuáles son las coordenadas de la rama?

2.- Localizar geoméricamente los siguientes puntos de  $\mathbb{R}^3$   $(1, 2, 3)$ ,  $(-1, -2, -3)$ ,  $(2(1), 2(+2), 2(+3))$  y  $(2(-1), 2(-2), 2(-3))$

3.- ¿Cuáles son los puntos de la forma  $(x, y, 0)$ ? ¿y los de la forma  $(x, 0, z)$ ? ¿y los de la forma  $(0, y, z)$ ?

4.- ¿De qué forma son los puntos que están en el eje ~~X~~? ¿de cuál los del eje ~~Y~~? ¿y los del eje ~~Z~~?

5.- En el ejemplo uno de este capítulo, ¿qué quiere decir que el punto  $(7, 4, 1)$  esté en el plano ~~XY~~?

## 1.2. SUMA EN $\mathbb{R}^3$

Para introducir la suma de vectores en  $\mathbb{R}^3$ , consideremos dos ecosistemas los cuales contienen árboles como pinos, cedros y robles. Supongamos que el número de árboles de cada especie vienen dados por los vectores

$$\mathcal{E}_1 = (P_1, C_1, R_1) \quad \mathcal{E}_2 = (P_2, C_2, R_2)$$

Si vemos a los dos ecosistemas como uno solo, ¿cuál será la cantidad de árboles de cada especie en el nuevo ecosistema? Si denotamos por  $E_1 + E_2$  al proceso de juntar a los ecosistemas  $E_1$  y  $E_2$  tendremos que:

$$E_1 + E_2 = (P_1 + P_2, C_1 + C_2, R_1 + R_2)$$

Teniendo en cuenta el comentario anterior, damos la siguiente ...

**DEFINICION 1** Sean  $v, w \in \mathbb{R}^3$  con  $v = (\alpha, \beta, \gamma)$  y  $w = (a, b, c)$ . Se define la suma de  $v$  y  $w$  y se le denota por  $v + w$  como:

$$v + w = (\alpha + a, \beta + b, \gamma + c)$$

**EJEMPLO 7** Se tienen dos cultivos de bacterias  $E_1$  y  $E_2$  con bacilos, cocos y espirilas. El número de bacterias de cada especie en los dos cultivos viene dado por los vectores:

$$E_1 = (800 \text{ bacilos}, 700 \text{ cocos}, 600 \text{ espirilas})$$

$$\mathcal{C}_2 = (600 \text{ bacilos}, 400 \text{ cocos}, 300 \text{ espirilas})$$

Si se juntan los dos cultivos, ¿cuál es el vector que describe al nuevo cultivo? La respuesta viene dada por el vector:

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 = (1400 \text{ bacilos}, 1100 \text{ cocos}, 900 \text{ espirilas})$$

Por medio de este tipo de interpretaciones que le hemos dado a la suma de ternos, podemos comprobar varias leyes matemáticas válidas para la suma de ternos.

**EJEMPLO 8** Se tienen tres cultivos de bacterias con tres especies cada uno: bacilos, cocos y espirilas. La situación en los tres cultivos, en cuanto al número de bacterias, viene dada por los vectores:

$$\mathcal{C}_1 = (B_1, C_1, E_1), \mathcal{C}_2 = (B_2, C_2, E_2) \text{ y } \mathcal{C}_3 = (B_3, C_3, E_3)$$

Es claro que si se juntan los cultivos  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  primero, y después se añade  $\mathcal{C}_3$ , obtendremos el mismo resultado si se jun-

tan primero  $e_2$  y  $e_3$  y al último  $e_1$ . Lo anterior no quiere decir otra cosa que:

$$(e_1 + e_2) + e_3 = e_1 + (e_2 + e_3)$$

Es decir la suma de ternas ordenadas es asociativa.

**EJEMPLO 9** La producción de maíz, trigo y cebada en el estado de Puebla viene especificada por el vector:

$$p = (M, T, C)$$

Si el estado de Tlaxcala no produjo ninguno de estos tres productos, ¿cuál es la producción conjunta de los dos estados?

Como el estado de Tlaxcala no produjo ninguno de estos tres productos, es claro que el vector que describe su producción es:

$$0 = (0, 0, 0)$$

y la producción conjunta es igual a la

producción del estado de Puebla, es decir

$$0 + 0 = 0$$

La última ecuación nos indica que la suma tiene un elemento neutro.

Antes de terminar esta sección daremos una interpretación geométrica de la suma de ternas ordenadas.

Sean  $v$  y  $w$  vectores que van a ser sumados. Llevemos al vector  $v$ , conservando todas sus características menos su punto inicial, de tal manera que su punto inicial coincida con el punto final del vector  $w$  (Fig. 12). Si de

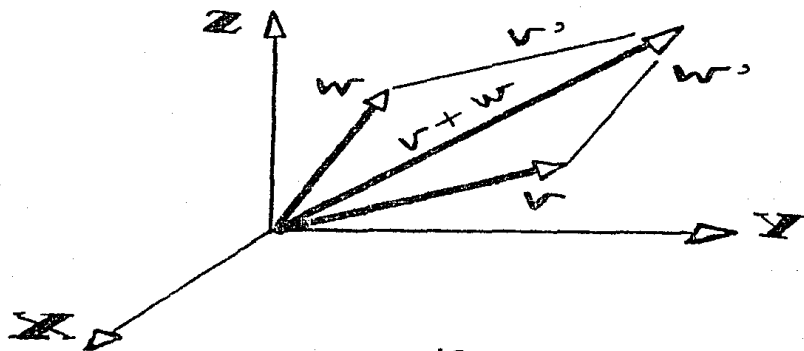


Fig 12

notamos por  $v'$  al vector que resultó de trasladar a  $v$ , tendremos que  $v'$  es paralelo y tiene el mismo tamaño de  $v$ . También el vector que va de la punta de  $v$  a la punta de  $v'$ , el cual lo denotaremos por  $w'$ , es paralelo y tiene el mismo tamaño que  $w$ . Estos cuatro vectores  $v, w, v'$  y  $w'$  forman un paralelogramo. Comprobaremos, para el caso de vectores en  $\mathbb{R}^2$ , que el vector que va del punto  $(0,0,0)$  a la punta de  $v'$  y  $w'$  corresponde al vector que representa a  $v+w$ .

Sean  $v = (\alpha, \beta)$  y  $w = (a, b)$ , vectores, que vamos de mostrar (geométricamente) que:

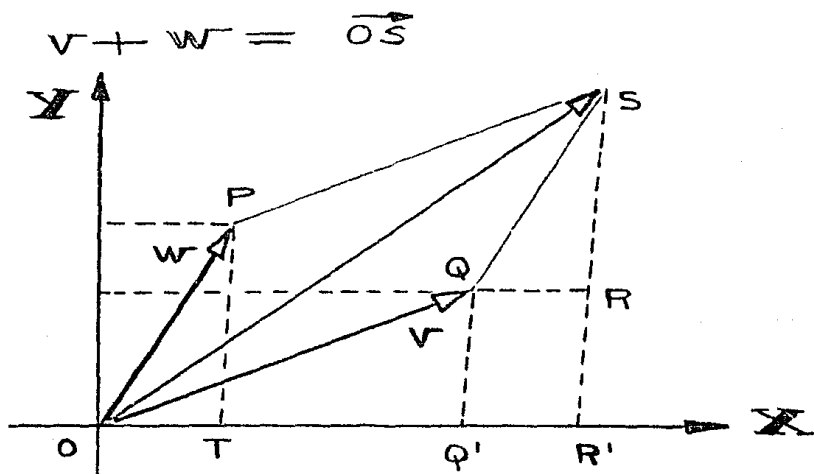


Fig. 13



Es decir que el vector  $\vec{OS}$  tiene como componentes a  $(\alpha + a, \beta + b)$ . De la Fig. 13 se observa que la primera componente de  $\vec{OS}$  es:

$$OR'$$

y como

$$\begin{aligned} OR' &= OQ' + Q'R' \\ &= OQ' + QR \\ &= OQ' + OT \end{aligned}$$

donde

$$OQ' = \alpha \quad \text{y} \quad OT = a$$

entonces

$$OR' = \alpha + a$$

De la misma forma la segunda componente de  $\vec{OS}$  es  $R'S$  y como

$$\begin{aligned} R'S &= R'R + RS \\ &= Q'Q + TP \\ &= \beta + b \end{aligned}$$

entonces

$$R'S = \beta + b$$

Con esto podemos concluir

que el vector  $\vec{OS}$  tiene como componentes a  $(\alpha + a, \beta + b)$ , esto a su vez nos ayuda a concluir que:

$$\vec{OS} = v + w$$

## EJERCICIOS.

1.- Comprobar matemáticamente que la suma de ternas ordenadas es asociativa.

2.- Comprobar que el vector  $0 = (0, 0, 0)$  es un elemento neutro para la suma, es decir

$$(\alpha, \beta, \gamma) + (0, 0, 0) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

3.- Mostrar que si  $v$  y  $w$  están en el plano  $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ , entonces  $v+w$  está en el plano  $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ .

4.- Mostrar que si  $v$  y  $w$  están en el eje  $\mathbb{Z}$ , entonces  $v+w$  está en el eje  $\mathbb{Z}$ .

5.- Si  $v$  y  $w$  están en una línea  $\mathcal{L}$ , entonces  $v+w$  está en  $\mathcal{L}$ ?  
 ¿Qué se necesita pedir a  $\mathcal{L}$  para que la afirmación anterior sea cierta?

6.- Si  $v = (a, b, c)$  y  $w = (-a, -b, -c)$ , ver que  $v+w = 0$ .  
 ¿Cómo se interpreta esto geométricamente?

### 1.3. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR Y RESTA DE VECTORES.

Para introducir la primera operación, consideremos una dieta:

$$\mathcal{d} = (A_1, A_2, A_3)$$

¿Qué significará triplicar o reducir a la mitad la dieta? Si denotamos por  $3\mathcal{d}$  y  $\frac{1}{2}\mathcal{d}$  a estos procesos, es claro que la primera querrá decir

triplicar el consumo de cada alimento, es decir

$$3\alpha = (3A_1, 3A_2, 3A_3)$$

y de la misma manera:

$$\frac{1}{2}\alpha = \left(\frac{1}{2}A_1, \frac{1}{2}A_2, \frac{1}{2}A_3\right)$$

Inspirados en las observaciones anteriores damos la siguiente:

**DEFINICION 2** Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $v \in \mathbb{R}^3$  con  $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ . Definimos el producto de  $\lambda$  por  $v$  y lo denotamos por  $\lambda v$  como

$$\lambda v = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$$

**EJEMPLO 10** En un rancho ganadero se tienen vacas, borregos y cerdos. El número de animales de cada especie viene dado por el vector:

$$A = (10\,000 \text{ vacas}, 5\,000 \text{ borregos}, 4\,000 \text{ cerdos})$$

Al año se reduce a la mitad la población animal como consecuencia de una enfermedad. ¿Cuál es la población actual de animales?

Claramente, la respuesta viene dada por la operación:

$$\frac{1}{2} A = \frac{1}{2} (10\,000, 5\,000, 4\,000) \\ = (5\,000, 2\,500, 2\,000)$$

**EJEMPLO 11** El número de animales que hay de tres especies en un ecosistema, viene dado por el vector

$$E = (100, 200, 150)$$

En el primer año las especies se redujeron en un  $\frac{1}{10}$ , pero al siguiente se incrementó la primera en 200, la segunda en 200 y la tercera en 100. Dar el vector que describa el número de animales que hay al final del segundo año.

La respuesta viene dada por el vector:

$$\frac{1}{10} \mathcal{E} + (200, 500, 100)$$

o lo que es lo mismo

$$(210, 520, 115)$$

**EJEMPLO 12** Una dieta esta formada de pollo, pescado y queso

$$\mathcal{d} = (x, y, z)$$

Se consumio' el doble de la dieta  $\mathcal{d}$ , además de 50 grs. de pollo, 40 grs. de pescado y 20 grs. de queso. Si en total se consumieron 100 grs. de pollo, 80 grs. de pescado y 80 grs. de queso, ¿cuál es el valor de las cantidades  $x, y, z$ ?

Claramente debemos considerar la ecuación vectorial:

$$2\mathcal{d} + (50, 40, 20) = (100, 80, 80)$$

la cual se resuelve como sigue:

$$2(x, y, z) + (50, 40, 20) = (100, 80, 80)$$

entonces

$$(2x + 50, 2y + 40, 2z + 20) = (100, 80, 80)$$

entonces

$$2x + 50 = 100$$

$$2y + 40 = 80$$

$$2z + 20 = 80$$

entonces  $x = 25$  gr. de pollo,  $y = 20$  gr. de pescado y  $z = 30$  gr. de queso.

### EJEMPLO 13

Se tienen tres dietas  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  formadas con tres alimentos pescado, pollo y queso. Las tres dietas vienen dadas por los vectores:

$$d_1 = (20 \text{ gr. de pescado, } 50 \text{ gr. de pollo, } 10 \text{ gr. de queso})$$

$$d_2 = (10 \text{ gr. de pescado, } 10 \text{ gr. de pollo, } 10 \text{ gr. de queso})$$

$$\alpha_3 = (10 \text{ gr. de pescado}, 20 \text{ gr. de pollo}, 10 \text{ gr. de queso})$$

¿Cuánto hay que tomar de cada dieta, para producir una con 1100 grs. de pescado, 1700 grs. de pollo y 1000 grs. de queso?

Si denotamos por  $x$ ,  $y$  y  $z$  las cantidades que se deben tomar de cada dieta, entonces el problema se reduce a resolver la ecuación vectorial:

$$x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 = (1100, 1700, 1000)$$

o lo que es lo mismo

$$x(20, 50, 10) + y(10, 10, 10) + z(10, 20, 10) = (1100, 1700, 1000)$$

o también

$$(20x + 10y + 10z, 50x + 10y + 20z, 10x + 10y + 10z) = (1100, 1700, 1000)$$

y esta ecuación es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$20x + 10y + 10z = 1100$$

$$50x + 10y + 20z = 1700$$

$$10x + 10y + 10z = 1000$$



Al resolver el sistema llegamos a la solución  $x=10$ ,  $y=60$  y  $z=30$ . Lo cual indica que hay que tomar 10 veces la dieta uno, 60 veces la dieta dos y 30 veces la dieta tres.

**EJEMPLO 14** Se tiene un bosque con tres tipos de árboles pinos, robles y fresnos. El vector que describe al bosque, en cuanto al número de árboles de cada especie, viene dado por:

$$\mathbf{A} = (500 \text{ pinos}, 800 \text{ robles}, 700 \text{ fresnos})$$

Después de un incendio desaparecieron 300 pinos, 200 robles y 500 fresnos. ¿Qué vector describe la situación del bosque después del incendio?

Para la respuesta debemos considerar al vector:

$$(500 - 300, 800 - 200, 700 - 500)$$

el cual es igual a:

$$\begin{aligned}(500-300, 800-200, 700-500) &= (500, 800, 700) + (-300, -200, -500) \\ &= (500, 800, 700) + (-1)(300, 200, 500)\end{aligned}$$

Por la forma que hemos planteado el problema, el vector

$$(500, 800, 700) + (-1)(300, 200, 500)$$

lo podemos llamar la resta de  $(500, 800, 700)$  con  $(300, 200, 500)$ , y lo podemos denotar por el símbolo:

$$(500, 800, 700) - (300, 200, 500)$$

**DEFINICION 3** Sean  $v, w \in \mathbb{R}^3$ .

Definimos la diferencia, sustracción o resta de  $v$  con  $w$  y la denotamos por  $v - w$  como:

$$v - w = v + (-1)w$$

Ahora mostraremos como interpretar geométicamente el producto de un escalar por un vector.

La conclusión a que llegaremos es que  $\lambda \mathbf{v}$  es un vector que tiene la misma dirección que  $\mathbf{v}$ , su tamaño es  $|\lambda|$ -veces el tamaño de  $\mathbf{v}$  y su sentido es el mismo que  $\mathbf{v}$  si  $\lambda > 0$  y opuesto si  $\lambda < 0$ . Si  $\lambda = 0$ ,  $\lambda \mathbf{v}$  es el vector cero.

Consideremos el caso en que  $\lambda > 0$  y dejemos como ejercicio el caso  $\lambda < 0$ .

Considere la Fig. 14 en la que

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

y

$$\overrightarrow{OQ} = (x, y, z)$$

donde  $\overrightarrow{OQ}$  es el vector que tiene la misma dirección que  $\mathbf{v}$ , su tamaño es  $\lambda$ -veces el tamaño de  $\mathbf{v}$  (en este caso  $|\lambda| = \lambda$ , pues  $\lambda > 0$ ) y tiene el mismo sentido que  $\mathbf{v}$ .

Como  $P'$  y  $Q'$  son las proyecciones de  $P$  y  $Q$  sobre el plano  $XY$  y como la proyección de una recta sobre un plano es de nuevo una rec

ta (una excepción es cuando la recta es perpendicular al plano), entonces los puntos  $O$ ,  $P'$  y  $Q'$  son colineales.

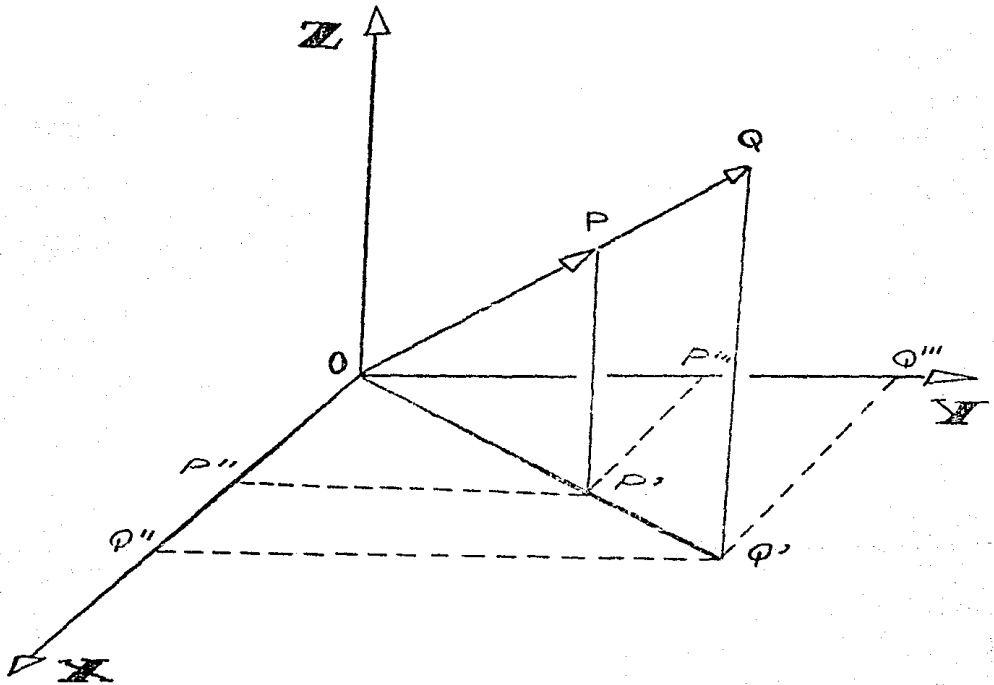


Fig. 14

Con esto podemos concluir que  $\triangle OPP' \sim \triangle OQQ'$  (donde  $\sim$  significa semejanza de triángulos, además dichos triángulos son semejantes por tener sus tres ángulos iguales). Por lo tanto podemos concluir que:

$$\frac{l(\overline{OP})}{l(\overline{OQ})} = \frac{l(\overline{OP'})}{l(\overline{OQ'})} = \frac{l(\overline{PP'})}{l(\overline{QQ'})}$$

como  $l(OQ) = \lambda l(\overline{OP})$ ,  $l(PP') = |\gamma|$   
 y  $l(QQ') = |z|$  entonces

$$\frac{l(\overline{OP})}{\lambda l(\overline{OP})} = \frac{|\gamma|}{|z|}$$

entonces  $|z| = \lambda |\gamma|$ , y como las  
 cantidades  $z$  y  $\gamma$  no pueden tener  
 signo contrario entonces

$$z = \lambda \gamma$$

Observando de nuevo la  
 Fig 14, se puede concluir que:

$$\Delta OP''P' \sim \Delta OQ''Q'$$

entonces

$$\frac{l(OP'')}{l(OQ'')} = \frac{l(OP''')}{l(OQ''')} = \frac{l(OP')}{l(OQ')} = \frac{1}{\lambda}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{|\alpha|}{|\chi|} = \frac{|\beta|}{|\gamma|} = \frac{1}{\lambda}$$

entonces

$$|x| = \lambda |\alpha|$$

$$|y| = \lambda |\beta|$$

Como  $x$  y  $\alpha$  y  $y$  y  $\beta$  tienen el mismo signo (pues  $\vec{OQ}$  tiene el mismo sentido que  $\vec{OP}$  y ello hace a que  $\vec{OQ}$  se sitúe en el mismo octante en que está  $\vec{OP}$ ) entonces

$$x = \lambda \alpha \quad \text{y} \quad y = \lambda \beta$$

Juntando los resultados  $x = \lambda \alpha$ ,  $y = \lambda \beta$  y  $z = \lambda \gamma$ , podemos concluir que el vector  $\vec{OQ} = (x, y, z)$  es el vector  $(\lambda \alpha, \lambda \beta, \lambda \gamma)$ , y por lo tanto

$$\vec{OQ} = \lambda \vec{v}$$

## EJERCICIOS.

1.- En una granja hay vacas de tres razas distintas A, B y C.

Con la leche que da cada vaca de la raza A se obtienen 5 l. de leche, 800 gr. de queso y 500 gr. de crema. Para las vacas de la raza B, la producción es de 4 l. de leche, 900 gr. de queso y 600 gr. de crema, y para las de la raza C, la producción es de 6 l. de leche, 800 gr. de queso y 400 gr. de crema. La producción total de la granja es de 380 l. de leche, 62 Kg. de queso y 37 Kg. de crema. Si se venden 5 vacas de la raza A y 8 de la raza B. ¿Cuál será entonces la producción de la granja?

2.- Resuélvase:

$$a) 3[(x, y, z) - (8, -3, -2)] = 6(7, 0, -5)$$

$$b) -3(1, -3, 5) + 2(x, y, z) = 5(0, -2, -1) + 3(x, y, z)$$

$$c) 2(0, 3) + 8(x, y) = (1, -7)$$

3.- Encuentre todos los números reales  $r$  y  $s$  que satisfacen:

$$(11, 14, -2) = r(3, 0, -5) + s(1, -2, -4)$$

#### 1.4. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS Y NORMA DE UN VECTOR.

Supongamos que tenemos dos ecosistemas de los cuales forman parte animales como leopardos, rinocerontes e hipopótamos, supongamos además que el número de animales de cada especie viene dado por los vectores:

$$\mathbf{E}_1 = (L_1, R_1, H_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_2 = (L_2, R_2, H_2)$$

La cantidad  $|L_1 - L_2|$  mide la diferencia que hay en leopardos en los dos ecosistemas, se toma el valor absoluto para no considerar diferencias negativas, de la misma forma  $|R_1 - R_2|$  mide la diferencia que hay en rinocerontes y finalmente  $|H_1 - H_2|$  mide la diferencia en hipopótamos. Luego entonces la diferencia que hay en leopardos, rinocerontes e hipopótamos viene dada por la fórmula:

$$|L_1 - L_2| + |R_1 - R_2| + |H_1 - H_2|$$



La fórmula anterior la podemos interpretar como una fórmula que nos mide la "distancia" que hay entre los ecosistemas, en cuanto al número de animales de las tres especies,  $E_1$  y  $E_2$ . Pues el resultado nos indica por cuantos animales difieren.

**EJEMPLO 15** Supongamos que el número de animales que hay en dos ecosistemas vienen dados por los vectores:

$$E_1 = (1000 \text{ leopardos}, 500 \text{ rinocerontes}, 100 \text{ hipopótamos})$$

$$E_2 = (500 \text{ leopardos}, 100 \text{ rinocerontes}, 200 \text{ hipopótamos})$$

d Por cuántos animales difieren  $E_1$  y  $E_2$ ?

Si denotamos por  $p(E_1, E_2)$  al valor de la fórmula dada en esta sección, entonces

$$\begin{aligned} p(E_1, E_2) &= |1000 - 500| + |500 - 100| + |100 - 200| \\ &= |500| + |400| + |-100| \\ &= 500 + 400 + 100 = 1000 \end{aligned}$$

El número 1000 indica que los vectores  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  distan en 1000 animales, esto es así, pues  $\vec{E}_1$  tiene 500 leopardos más que  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{E}_1$  tiene 400 rinocerontes más que  $\vec{E}_2$  y  $\vec{E}_2$  tiene 100 hipopótamos más que  $\vec{E}_1$ .

## EJERCICIO.

¿Existen dos vectores  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  que tengan el mismo número de animales (en total), pero que su diferencia sea 100? ¿No es esto absurdo? ¿Por qué?

La discusión anterior nos permite definir:

**DEFINICION 4** Sean  $\vec{E}_1, \vec{E}_2 \in \mathbb{R}^3$  con  $\vec{E}_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$  y  $\vec{E}_2 = (a, b, c)$ . La distancia entre los puntos  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$ , denotada por  $\rho(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$ , se define

por la fórmula:

$$p(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = |\alpha - a| + |\beta - b| + |\gamma - c|$$

La definición que se dió en la definición 4 es muy útil en Matemáticas, pero no es la más usual para calcular la distancia entre dos puntos, quizás el lector más bien conozca la siguiente:

$$d(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2}$$

Haciendo referencia a los ecosistemas, podemos interpretar la fórmula anterior como sigue:

$(\alpha - a)^2$  mide aproximadamente la diferencia en leopardos.

$(\beta - b)^2$  mide aproximadamente la diferencia en rinocerontes.

$(\gamma - c)^2$  mide aproximadamente la diferencia en hipopótamos.

Donde hemos escrito la palabra "aproximadamente", pues el ele-

var al cuadrado se alteran las diferencias reales que existen. Si sumas cada una de estas expresiones, obtendremos la diferencia aproximada que hay en animales en los dos vectores  $E_1$  y  $E_2$ . Para amortiguar el error que se comete en la fórmula:

$$(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2$$

extraemos la raíz cuadrada a tal expresión. Podemos concluir entonces que la "distancia aproximada" que hay entre los vectores  $E_1$  y  $E_2$  es:

$$\sqrt{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2}$$

Esta fórmula podría parecer artificial, pero interpretada como distancia geométrica esta fórmula es más exacta que la dada inicialmente como veremos a continuación.

**RESULTADO 1** La distancia que hay entre los puntos  $E_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$

y  $\vec{E}_2 = (a, b, c)$  viene dada por la fórmula:

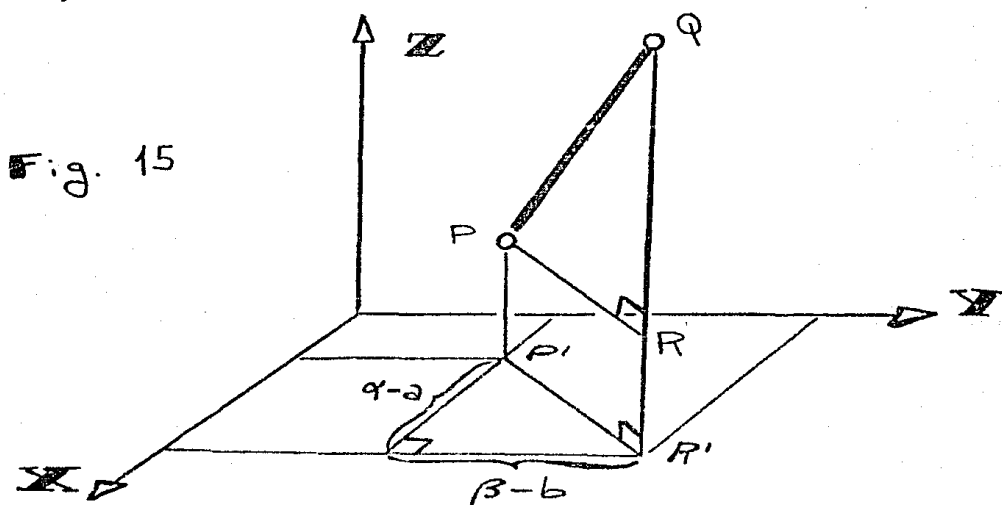
$$d(\vec{E}_1, \vec{E}_2) = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2}$$

### Convencimiento

Considere la Fig. 15, por el teorema de Pitágoras se observa que:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2$$

y como  $\overline{RQ} = \gamma - c$  y  $\overline{PR} = \overline{P'R'}$ , donde (otra vez por el teorema de Pitágoras)



$$\overline{P'R'} = \sqrt{(d-a)^2 + (\beta-b)^2}$$

entonces

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \left[ \sqrt{(d-a)^2 + (\beta-b)^2} \right]^2 + (\gamma-c)^2 \\ &= (d-a)^2 + (\beta-b)^2 + (\gamma-c)^2\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(d-a)^2 + (\beta-b)^2 + (\gamma-c)^2}$$

**EJEMPLO 16** Supongamos que el número de animales que hay de tres especies en dos ecosistemas vienen dados por los vectores:

$$\mathcal{E}_1 = (20, 40, 80) \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_2 = (15, 10, 10)$$

Obtener  $\rho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$  y  $\delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ .

Aplicando las fórmulas correspondientes:

$$\begin{aligned}\rho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) &= \|20-15\| + \|40-10\| + \|80-10\| \\ &= 5 + 30 + 70 = 105\end{aligned}$$

mientras que:

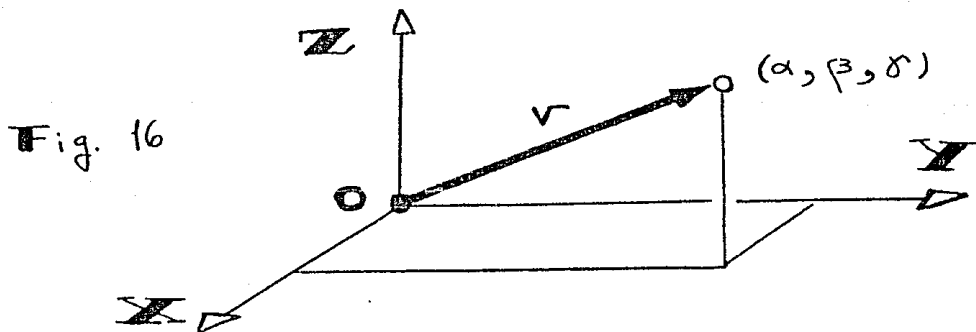
$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) &= \sqrt{(20-15)^2 + (40-10)^2 + (80-10)^2} \\ &= \sqrt{5825} \approx 76 \end{aligned}$$

Terminamos esta sección dando una fórmula para el tamaño de un vector. Sea  $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$  un vector Fig. 16. Se observó que el tamaño o longitud del vector  $\mathbf{v}$  es igual a la distancia que hay del punto  $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$  al punto  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , es decir:

$$\sqrt{(\alpha-0)^2 + (\beta-0)^2 + (\gamma-0)^2}$$

ó lo que es lo mismo:

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$



**DEFINICION 5** Se define la norma  $\|v\|$  del vector  $v = (\alpha, \beta, \gamma)$  como :

$$\|v\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

También le llamaremos longitud de  $v$ .

## EJERCICIOS.

1.- Decir quienes son los siguientes conjuntos de  $\mathbb{R}^3$

a)  $A = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1\}$

b)  $B = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| \leq 1\}$

c)  $C = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| < 1\}$

d)  $D = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v - (1, 1, 1)\| = 1/2\}$

e)  $E = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v - (1, 1, 1)\| > 1/2\}$

2.- Interpretar geoméricamente



la siguiente desigualdad:

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

3.- Probar que la distancia del punto P al punto Q es igual a  $\|v - w\|$  donde  $v$  es el vector que representa al punto P y  $w$  es el vector que representa al punto Q.

### 1.5. PRODUCTO ESCALAR.

Consideremos un gas contenido en un tanque y encerrado por medio de un pistón (Fig. 17). Suponga que se quiere empujar el pistón en una distancia  $s$  (Fig. 17). Como el gas opone resistencia al movimiento del pistón, es claro que nos cuesta "trabajo" poder hacer tal operación. Además los experimentos muestran que el trabajo realizado es directamente proporcional a:

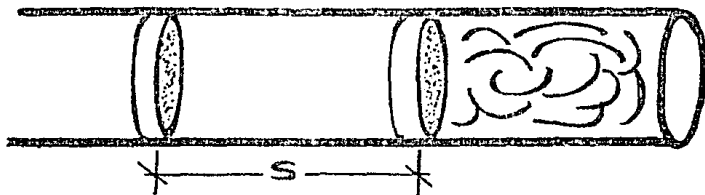
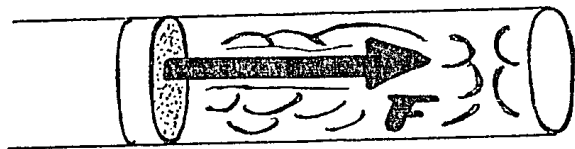


Fig. 17

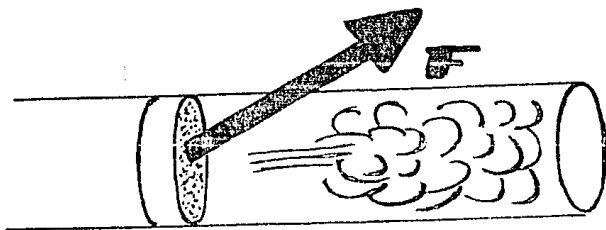
(●) La magnitud de la fuerza que se use para mover el pistón. Mientras más grande sea la fuerza, más grande será el trabajo realizado.

(●●) La distancia que va a recorrer el pistón. Mientras más grande sea la distancia a recorrer, más grande será el trabajo realizado.

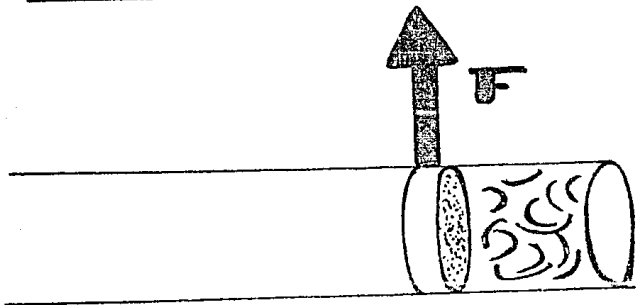
Hay además otra cosa. El trabajo depende de la forma en que apliquemos la fuerza (Fig. 18). Si vamos dando diferentes inclinaciones al vector fuerza, seguramente en el caso (c) no podremos mover el pistón y en el caso (d) se moverá más fácilmente que en el caso (b).



(a)



(b)



(c)

Fig 18.

Para entender mejor lo que se esta diciendo, descompongamos la fuerza  $F$  en sus dos componentes  $F_x$  y  $F_y$  (Fig 19). De las dos componentes, la única que ayuda a mover el pistón es  $F_x$ , ya que  $F_y$  solamente jala al pistón hacia arriba.

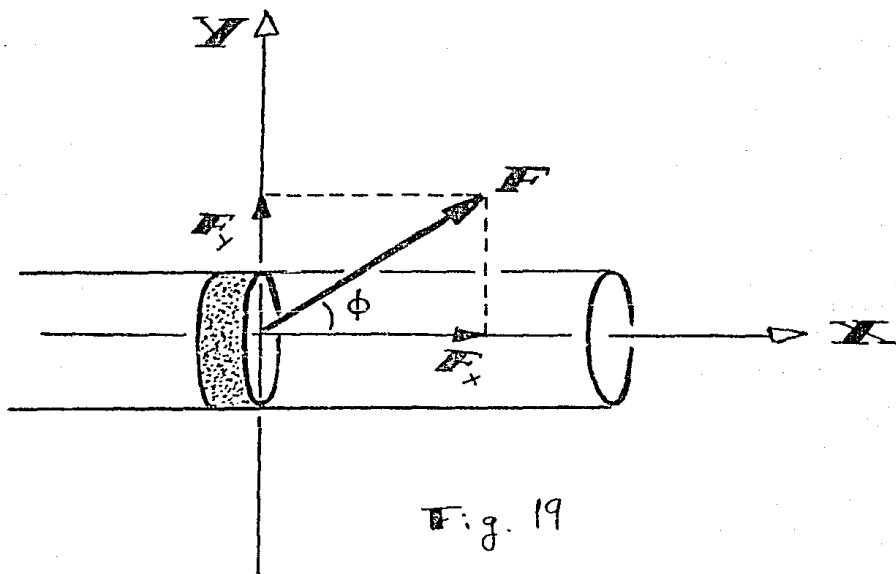
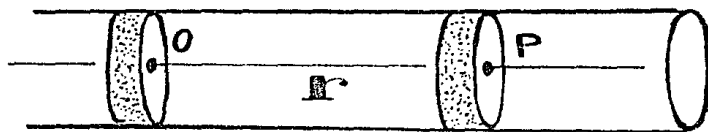


Fig. 19

Cabe señalar, también, que la distancia  $S$  que va a recorrer el pistón, se puede ver como la norma de un vector. Si denotamos por  $\mathbf{r}$  al vector que va del punto  $O$  al punto  $P$  (punto al que debe llegar el pistón después de recorrer la distancia  $S$ ) entonces

$$\|\mathbf{r}\| = S$$

Fig. 20



Podemos resumir lo visto anteriormente como sigue. Si denotamos por  $W$  el trabajo realizado en mover el pistón, se cumple:

$$W = F_x \cdot \|r\|$$

y como  $F_x = \|F\| \cos \phi$  (Fig. 19), entonces

$$W = \|F\| \|r\| \cos \phi$$

donde  $\phi$  es el ángulo, entre 0 y  $\pi$ , que forman  $F$  y  $r$  (Fig. 21)

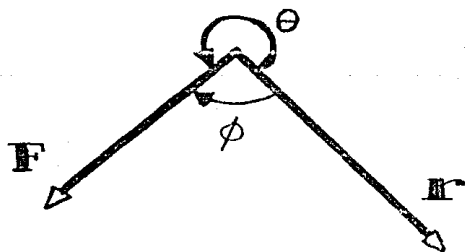


Fig 21.

Como se observa  $F$  y  $r$  son vectores y el resultado de operarlos, según la fórmula  $\|F\| \|r\| \cos \phi$ , nos produce el escalar  $W$ . A la expresión

$$\|F\| \|r\| \cos \phi$$

se le llama el PRODUCTO ESCALAR de los vectores  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{R}$ . En la siguiente definición generalizamos este concepto para cualesquiera pareja de vectores.

**DEFINICION 6** Sean  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$   
 Definimos el producto escalar de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  y lo denotamos por  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$  como:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \phi$$

donde  $\phi$  es el ángulo, entre 0 y  $\pi$ , que forman los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ .

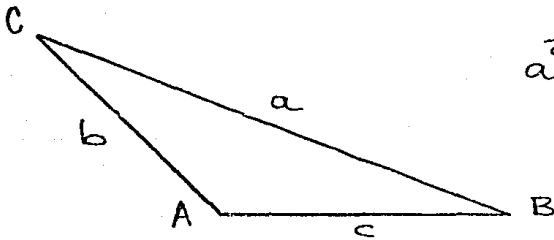
Cabe apuntar que la fórmula que se dio para el producto escalar tiene un inconveniente, a saber, ¿cómo medir el ángulo  $\phi$ ? Si de por sí es difícil visualizar a los vectores, mucho más difícil será medir el ángulo que forman  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ . Esta pequeña anomalía se resuelve por medio del siguiente resultado.

**RESULTADO 2** Si:  $v = (\alpha, \beta, \gamma)$   
 y  $w = (a, b, c)$ , entonces el producto  
 escalar de  $v$  y  $w$  viene dado por la fór-  
 mula:

$$v \cdot w = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

Convencimiento.

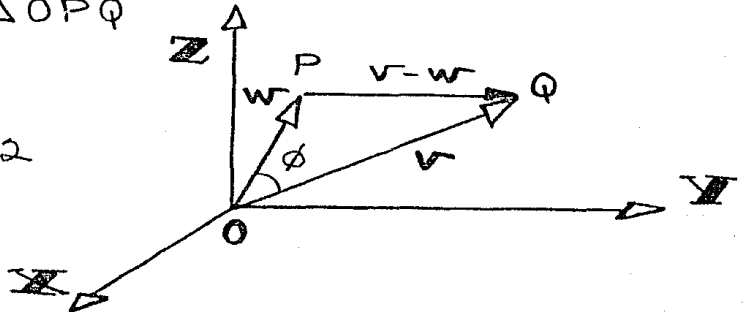
Para convencernos, haremos  
 uso de la siguiente fórmula conocida en  
 geometría elemental como ley de los co-  
 senos: "En un triángulo  $\Delta ABC$  se cum-  
 ple:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Ahora consideremos la Fig. 22  
 y apliquemos la ley de los cosenos al  
 triángulo  $\Delta OPQ$

Fig. 22



Entonces

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|\cos\phi$$

De aquí que

$$\|v\|\|w\|\cos\phi = \frac{\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2}{2}$$

y como  $v \cdot w = \|v\|\|w\|\cos\phi$ , entonces

$$\begin{aligned} v \cdot w &= \frac{\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2}{2} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + a^2 + b^2 + c^2 - [(\alpha-a)^2 + (\beta-b)^2 + (\gamma-c)^2]}{2} \\ &= \alpha a + \beta b + \gamma c \end{aligned}$$

$$\therefore v \cdot w = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

**EJEMPLO 17** Un pistón se mueve del punto  $(2, 0, 0)$  al  $(8, 0, 0)$ , por medio de una fuerza  $\mathbf{F} = (5, 2, 1)$  ¿Cuál es el trabajo realizado?

Como el pistón se va a mover



del punto  $(2, 0, 0)$  al  $(8, 0, 0)$ , entonces el vector que mide el desplazamiento es:

$$\mathbf{r} = (8, 0, 0) - (2, 0, 0) = (6, 0, 0)$$

Por lo tanto el trabajo realizado es:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = (5, 2, 1) \cdot (6, 0, 0) = 30$$

Daremos, ahora, una lista de resultados que más adelante nos serán útiles.

**RESULTADO 3** Sea  $v \in \mathbb{R}^3$ . Se cumple:

$$\|v\|^2 = v \cdot v$$

Convencimiento.

Suponga que  $v = (\alpha, \beta, \gamma)$  entonces

$$\|v\|^2 = \left[ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \right]^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

mientras que:

$$v \cdot v = (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

Por lo tanto

$$\|v\|^2 = v \bullet v$$

**RESULTADO 4** Sean  $v, w, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se cumplen las siguientes igualdades:

- (i)  $(\lambda v) \bullet w = v \bullet (\lambda w) = \lambda (v \bullet w)$
- (ii)  $v \bullet (w_1 + w_2) = v \bullet w_1 + v \bullet w_2$
- (iii)  $v \bullet w = w \bullet v$
- (iv)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

Convencimiento

Supongamos que  $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ ,  
 $w = (a, b, c)$ ,  $w_1 = (a_1, b_1, c_1)$  y  $w_2 = (a_2, b_2, c_2)$

(i)

$$\begin{aligned} (\lambda v) \bullet w &= [\lambda(\alpha, \beta, \gamma)] \bullet (a, b, c) \\ &= (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma) \bullet (a, b, c) \\ &= (\lambda\alpha)a + (\lambda\beta)b + (\lambda\gamma)c \\ &= \lambda(\alpha a) + \lambda(\beta b) + \lambda(\gamma c) \\ &= \lambda[\alpha a + \beta b + \gamma c] \\ &= \lambda(v \bullet w) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 v \cdot (w_1 + w_2) &= (\alpha, \beta, \gamma) \cdot [(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)] \\
 &= (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \\
 &= \alpha(a_1 + a_2) + \beta(b_1 + b_2) + \gamma(c_1 + c_2) \\
 &= \alpha a_1 + \alpha a_2 + \beta b_1 + \beta b_2 + \gamma c_1 + \gamma c_2 \\
 &= (\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2) \\
 &= v \cdot w_1 + v \cdot w_2
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 v \cdot w &= (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (a, b, c) \\
 &= \alpha a + \beta b + \gamma c \\
 &= a\alpha + b\beta + c\gamma \\
 &= w \cdot v
 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 \|\lambda v\| &= \|\lambda(\alpha, \beta, \gamma)\| = \|(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)\| \\
 &= \sqrt{(\lambda\alpha)^2 + (\lambda\beta)^2 + (\lambda\gamma)^2} \\
 &= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \\
 &= |\lambda| \|v\|
 \end{aligned}$$

## EJERCICIO.

1- ¿Cómo interpretaría, en términos del trabajo, las fórmulas (o) y (oo) del resultado 4.?

Pasaremos a estudiar el concepto de ortogonalidad entre vectores, empezamos con la definición siguiente.

**DEFINICION 7** Diremos que dos vectores  $v$  y  $w$  son ortogonales, si el ángulo que forman es de  $\pi/2$ .

El siguiente resultado es útil para saber cuando dos vectores son ortogonales.

**RESULTADO 5** Dos vectores  $v$  y  $w$  son ortogonales si, y solo si,  $v \cdot w = 0$

Convencimiento

Si  $v$  y  $w$  son ortogonales, entonces el ángulo que forman  $v$  y  $w$  es de  $\pi/2$ . Por lo tanto

$$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Si  $v \cdot w = 0$  entonces  $\|v\| \|w\| \cos \phi = 0$ , y si suponemos que  $\|v\| \neq 0$  y  $\|w\| \neq 0$ , entonces  $\cos \phi = 0$ . Como además  $0 \leq \phi \leq \pi$ , entonces  $\phi = \pi/2$ . Y esto nos indica que  $v$  y  $w$  son ortogonales.

**EJEMPLO 18** Comprobar que los vectores:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

son ortogonales entre sí, después hacer una representación geométrica de ellos.

Claramente  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$ ,  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$  y  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$ , lo cual nos indica que son ortogonales entre sí.

La representación geométrica

de ellos se ilustra en la Fig. 23.

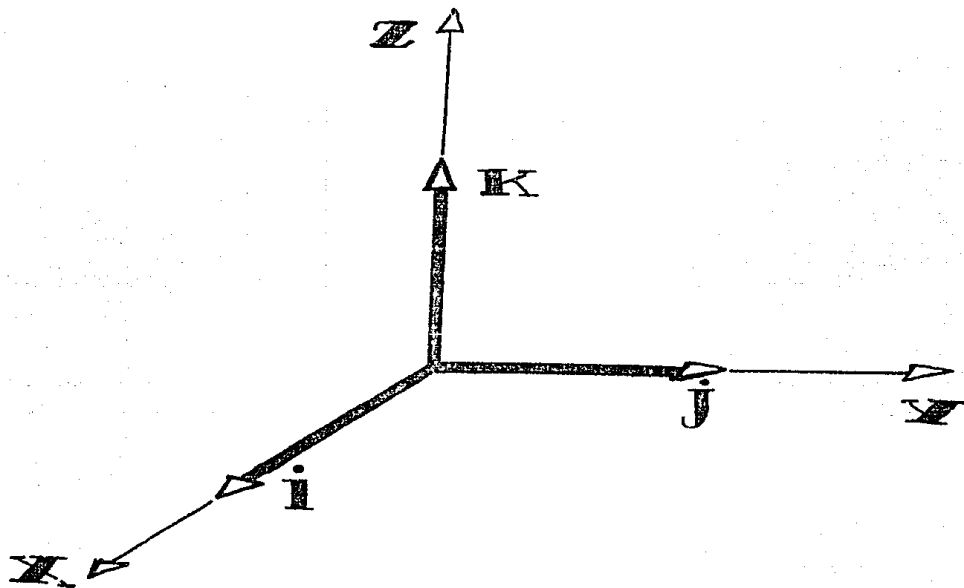


Fig. 23

**EJEMPLO 19** Comprobar que cualquier vector  $v = (\alpha, \beta, \gamma)$  se puede representar en la forma:

$$\alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}$$

Basta realizar las operaciones para darnos cuenta

$$\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

## EJERCICIOS

1.- (a) Describir analíticamente el conjunto de todos los vectores ortogonales a  $\mathbf{i}$ , también describirlo geométricamente. (b) En general si  $\mathbf{v}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Describir analítica y geométricamente al conjunto de vectores ortogonales a  $\mathbf{v}_0$ . (c) Ahora tomemos dos vectores fijos  $\mathbf{v}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  y  $\mathbf{w}_0 = (p_0, q_0, r_0)$ . Describir analítica y geométricamente al conjunto de vectores que son ortogonales a ambos. d En general que clase de conjunto esperaríamos que fuera? ¿Qué excepciones hay?

2.- Probar que si  $\mathbf{v}$  es un vector que es ortogonal a todos los vectores de  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

3.- Comprobar el teorema de Pitágoras, es decir,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son ortogonales si, y solo si,  $\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2$

4.- Mostrar que  $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$

5.- ¿Cuándo se cumple la igualdad en la desigualdad del problema cuatro?

## 1.6. PRODUCTO VECTORIAL.

Para introducir esta operación analizaremos un problema de Biomecánica.

Consideremos un brazo humano, que se encuentre en posición horizontal (Fig. 24). Es claro que los músculos hacen

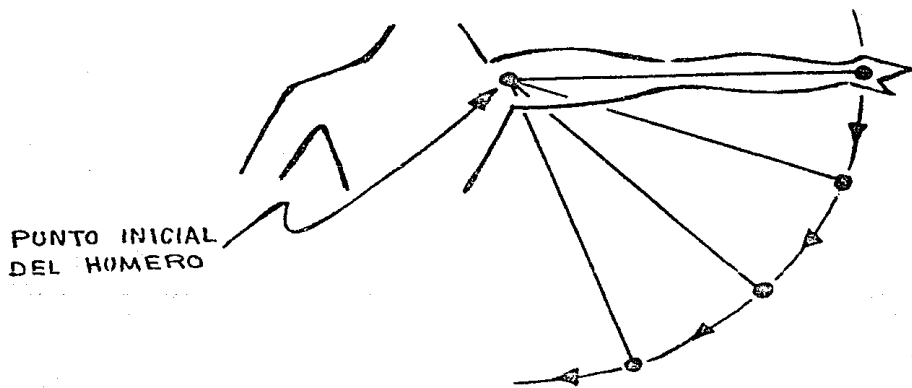


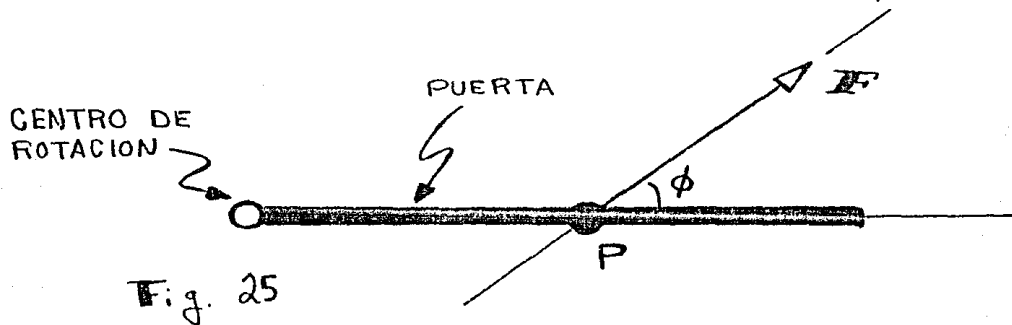
Fig 24

esfuerzo para poder mantener esa posición, pues de lo contrario el brazo tomaría un movimiento de rotación con centro en el punto inicial del humero.



Antes de continuar, cambiaremos del movimiento de rotación del brazo al movimiento de rotación de una puerta. La razón de tal cambio se debe a que en el movimiento del brazo hay varias fuerzas que se oponen al movimiento de rotación, por ejemplo, la fuerza de rozamiento entre el humero y el omóplato. En el caso del movimiento de una puerta estas fuerzas, ajenas al movimiento de rotación, se pueden disminuir, y por lo tanto se pueden "observar" mucho mejor las causas que originan el movimiento de rotación.

Si se aplica una fuerza constante a la puerta en el punto P (Fig. 25), se observa que mientras más pequeño es el ángulo que forman la dirección de la puerta y la dirección del vector fuerza, más difícil resulta poner en movimiento de rotación a la puerta.



Dándole a la fuerza  $F$  diferentes inclinaciones, se observa que la única componente que se usa para poner en movimiento de rotación a la puerta es la componente  $F_y$  (Fig 26). Como  $F_y = \|F\| \text{Sen } \phi$ , concluimos que una de las causas del movimiento es

$$\|F\| \text{Sen } \phi$$

Si se nombra por "momento de rotación" a una de las causas que produce el movimiento de rotación, y lo denotamos por  $M$ , entonces  $M$  depende de  $F_y$ .

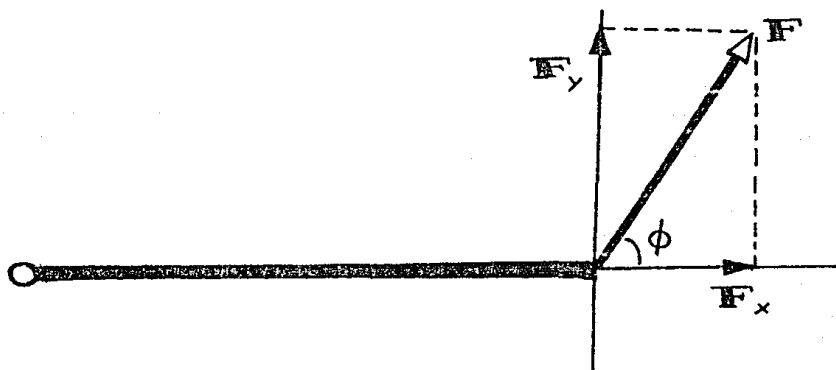


Fig. 26

Para continuar estudiando las causas del movimiento de rotación, apliquemos una fuerza constante en dife-

rentes puntos de la puerta (Fig 27). Se observa que en P cuesta trabajo poner en rotación a la puerta, en Q hay un poco más de facilidad y en R es todavía más fácil. Se concluye entonces que el momento de rotación también depende directamente de la distancia que hay del centro de rotación al punto en que se aplica la fuerza.

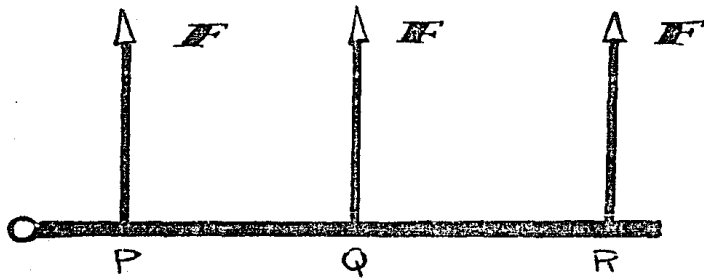


Fig. 27

Si denotamos por  $\mathbf{r}$  al vector que va del centro de rotación al punto en que se aplica la fuerza, entonces esperamos que la discusión anterior haga creíble para el lector la siguiente igualdad:

$$M = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{F}\| \text{Sen } \phi$$

donde  $\phi$  es el ángulo que forman  $F$  y  $R$

La fórmula anterior es uno de los resultados fundamentales para explicar las causas del movimiento de rotación. Se aplicará dicha fórmula para estudiar las fuerzas que intervienen en el músculo bíceps para que el brazo permanezca en posición horizontal.

En este problema de Biomecánica intervienen dos fuerzas. La primera se debe al peso del brazo, el vector que representa esta fuerza, actúa en forma vertical y hacia abajo en el punto llamado centro de gravedad (Fig. 28). La segunda fuerza actúa en el músculo bíceps y es la que ayuda a contrarrestar el peso del brazo. Como el bíceps

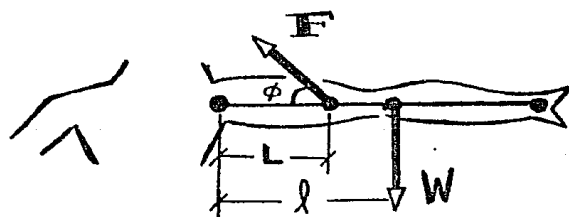


Fig. 28

forma un ángulo  $\phi$  con el húmero, entonces el momento generado por  $\mathbf{F}$  es:

$$M_1 = L \|\mathbf{F}\| \text{Sen} \phi$$

mientras que el momento generado por el peso del brazo es:

$$M_2 = l \|\mathbf{W}\| \text{Sen} \frac{\pi}{2}$$

$$= l \|\mathbf{W}\|$$

Como  $M_1$  y  $M_2$  se contrarrestan mutuamente para que el brazo quede en equilibrio, entonces

$$L \|\mathbf{F}\| \text{Sen} \phi = l \|\mathbf{W}\|$$

Esta última fórmula puede usarse para calcular alguno de sus elementos, cuando conocemos los restantes. Supongamos, por ejemplo, que  $\|\mathbf{W}\|$ ,  $L$  y  $l$  son conocidos, entonces podemos calcular el esfuerzo que hace el bíceps por medio de la fórmula:

$$\|\mathbf{F}\| = \left( \frac{l}{L} \right) \frac{\|\mathbf{W}\|}{\text{Sen} \phi}$$

Dejemos el problema del brazo y concentremos en los movimientos de rotación.

Una observación importante es que las fórmulas para el trabajo y el momento de rotación son muy parecidas:

$$W = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{F}\| \cos \phi$$

$$M = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{F}\| \sin \phi$$

Vimos también que  $W$  se puede expresar como el producto escalar de los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{F}$ . Quisiéramos pensar a  $M$  como un producto de los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{F}$ . Claramente  $M$  no puede ser un producto escalar, pues en la fórmula para el momento de rotación aparece  $\sin \phi$  en lugar de  $\cos \phi$ . Además hay una diferencia en cuanto al tipo de movimiento en que se aplican las fórmulas para  $W$  y  $M$ . En el caso de  $W$  el movimiento es de traslación, mientras que para  $M$  es de rotación. Al producto de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{F}$  que nos expresa el momento de rotación, lo llamaremos **PRODUCTO VECTORIAL** y lo denotaremos por  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ .

Realmente podríamos definir  $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{F}\| \sin \phi$  lo cual nos da

la magnitud que tiene el movimiento de rotación, pero se puede hacer mucho más que eso, se puede definir  $\vec{\omega}$  como un vector que nos da una información más completa de este movimiento.

Las siguientes propiedades del movimiento de rotación nos serán útiles para determinar como debe ser definido  $\vec{\omega}$ : se realiza en un plano, tiene un centro de rotación, la rotación tiene dos tipos de giros, en el sentido en que marchan las manecillas de un reloj o en contra y tiene además una magnitud. (Fig. 29)

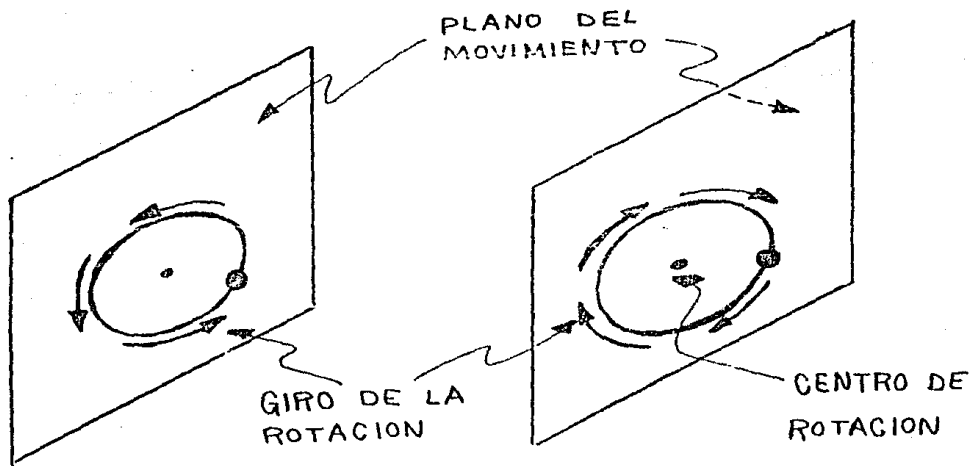
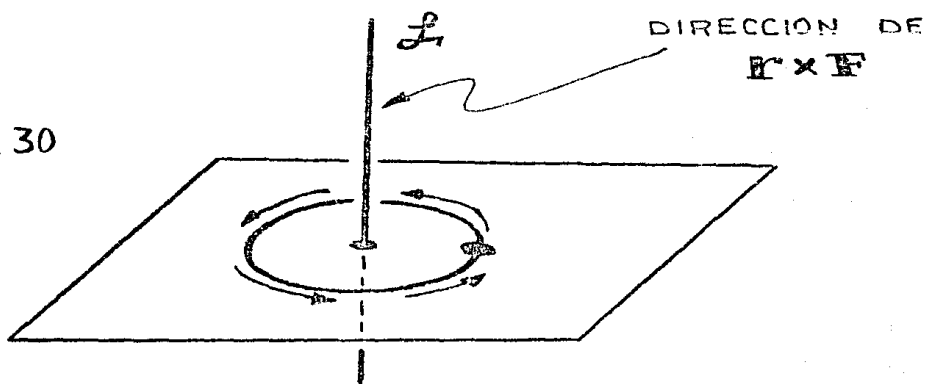


Fig 29

El lector recordará que un vector queda determinado por cuatro propiedades: su punto inicial, su dirección, su tamaño y su sentido. Como tenemos a nuestra disposición cuatro propiedades del movimiento de rotación, tenemos que escoger de una manera adecuada cual va a representar el punto inicial, cual la dirección, cual el tamaño y cual el sentido. La manera más adecuada de hacer la elección es como sigue. El punto inicial de  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  es el centro de rotación (por comodidad suponemos que es el origen), la dirección es ortogonal al plano en que se realizó el movimiento (Fig 30), el sentido se lo damos de acuerdo al tipo de giro que tenga la rotación y finalmente el tamaño viene dado por la magnitud que tiene el momento de rotación, es decir, por el número  $\|\mathbf{r}\|\|\mathbf{F}\|\text{Sen } \phi$ .

Fig. 30





Nótese que la recta  $L$  determina completamente al plano en que se realiza el movimiento y viceversa.

Antes de determinar cual es la representación de  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  como un vector, analizaremos con más detalle como se le asigna a  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  sentido.

El sentido de  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  lo podemos definir así: Llamemos  $\rho$  al plano en el que se realizará la rotación. Una mosca se puede parar en cualquiera de los dos lados del plano, desde cualquiera de esos dos lados la mosca puede ver dos movimientos de rotación posible. Uno en el sentido en que marchan las manecillas del reloj y uno en el sentido contrario. Diremos que la mosca está parada en el sentido correcto (o en el lado correcto del plano), si el movimiento lo ve en el sentido contrario en que marchan las manecillas del reloj. (Fig. 31)

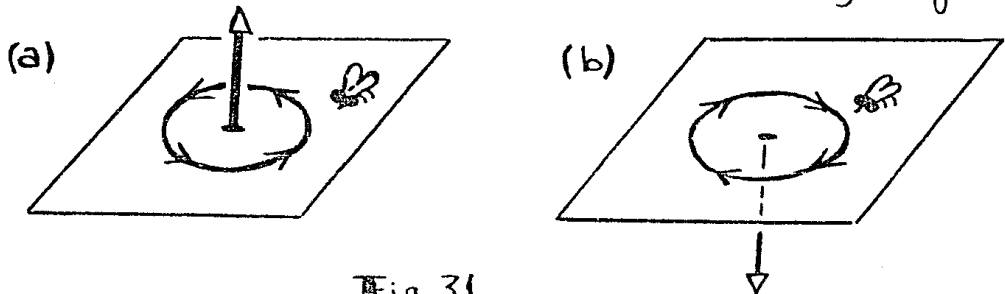


Fig 31

El sentido de  $\vec{r} \times \vec{F}$  coincide con el sentido del vector que apunta de las patas a la cabeza de la mosca cuando está parada en el sentido correcto (Fig. 31). En el dibujo (a) de la Fig. 31 la mosca está parada en el sentido (el lado) correcto, mientras que en el caso (b) está parada en el sentido (el lado) incorrecto.

Otra manera de saber cual es el sentido que se le da a  $\vec{r} \times \vec{F}$  es la llamada "regla de la mano derecha". Esta regla se puede definir así. Juntamos los dedos de la mano derecha menos el pulgar y pongamos el dedo pulgar hacia arriba, entonces podemos girar la mano haciendo un movimiento hacia adentro de nuestro cuerpo o hacia afuera, el primer movimiento lo llamaremos bueno y el segundo malo.

Volviendo al movimiento de rotación. Supongamos que éste se da sobre el plano  $P$ . Podemos poner nuestro puño sobre cualquiera de los dos lados del plano y seguir en ambos casos el movimiento de rotación con nuestra mano (Fig. 32). En uno de los lados el movimiento de la mano es bueno y en el otro es malo. Ele-

gimos, para  $R \times F$ , el sentido en que apunta el pulgar cuando el movimiento es bueno (Fig. 32)

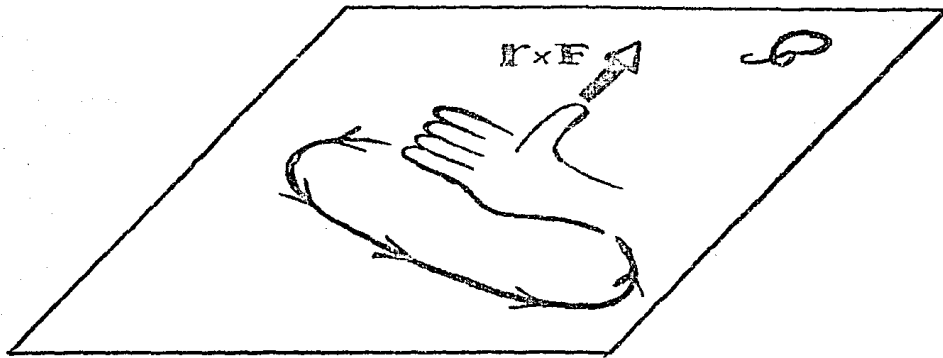


Fig. 32-A MOVIMIENTO BUENO SI SE PONE LA MANO "ARRIBA" DEL PLANO.

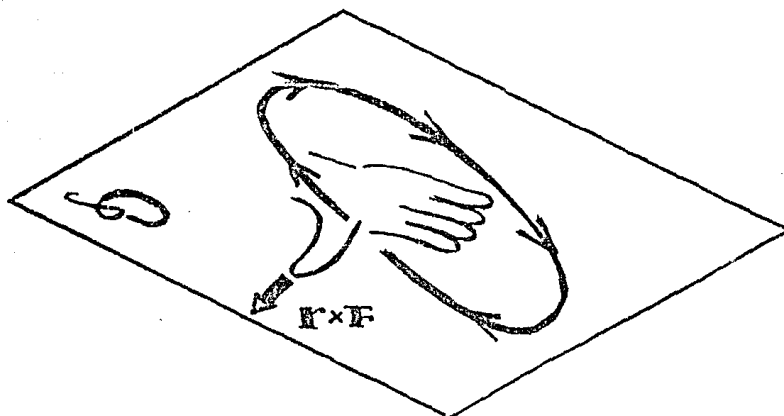


Fig. 32-B MOVIMIENTO BUENO SI SE PONE LA MANO "ABAJO" DEL PLANO,

Para dar otra forma de determinar el sentido de  $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$ , podemos usar un tornillo. Si giramos un tornillo en el sentido en que lo indica la rotación, tendremos el sentido de  $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$  si observamos la dirección en que avanzará el tornillo (Fig. 33)

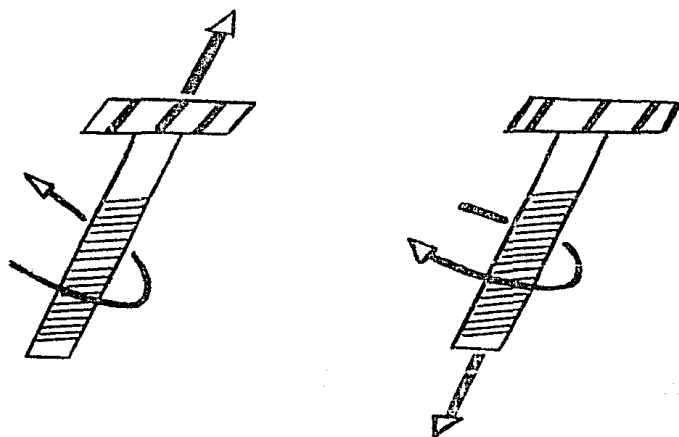


Fig 33

## EJERCICIOS.

1. (a) Cuando avanzamos sobre una bicicleta, ¿ $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$  apunta hacia nuestra derecha o hacia nuestra izquierda? (b) ¿Qué ocurre en (a) si en lugar

de avanzar retrocedemos?

2.- ¿Cuándo observamos de frente el movimiento de las manecillas de un reloj, el  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  apunta hacia nosotros o hacia el lado contrario?

3.- Tomemos un punto sobre el eje terrestre, éste describe un movimiento de rotación ¿Hacia que polo apunta  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ?

Como el lector habrá observado, le hemos dado el sentido al vector  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  a partir del movimiento de rotación que tiene el cuerpo. Podemos prescindir del movimiento y aún así asignarle a  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  su sentido. Para hacer esto tomemos un movimiento de rotación y coloquemos el vector fuerza  $\mathbf{F}$  con su punto inicial en el centro de rotación (Fig. 34) y apliquemos la regla de la mano derecha girando los dedos del vector  $\mathbf{r}$  hacia el vector  $\mathbf{F}$ .

Con lo que hemos explicado

hasta el momento, se observa que no es necesario conocer el movimiento del cuerpo para conocer el sentido de  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ .

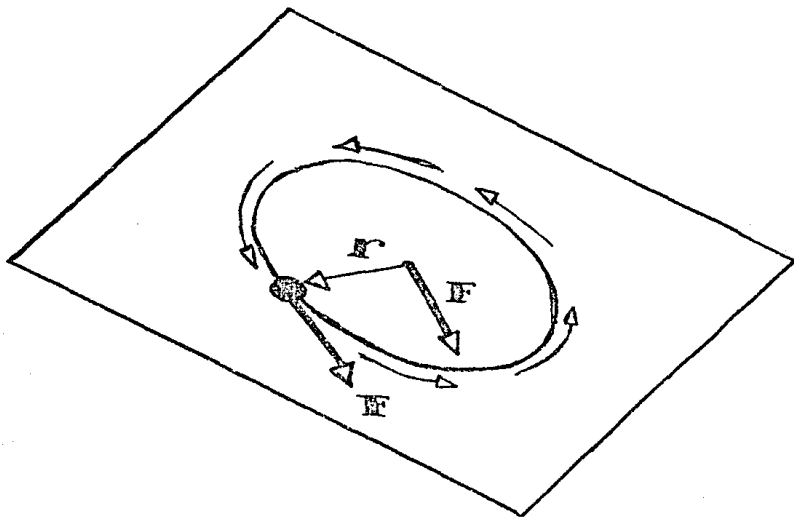


Fig. 34

Finalmente haremos una última observación sobre el producto vectorial. Para explicar el sentido de  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  hemos aplicado la regla de la mano derecha girando los dedos del vector  $\mathbf{r}$  hacia el vector  $\mathbf{F}$ . Pero, ¿por qué no lo hicimos de  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{r}$ ? Si aplicamos la regla de la mano derecha de  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{r}$ , se observa que el pulgar apunta en sentido opuesto al que se obtiene si lo aplicamos de  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{F}$  (Fig. 35)

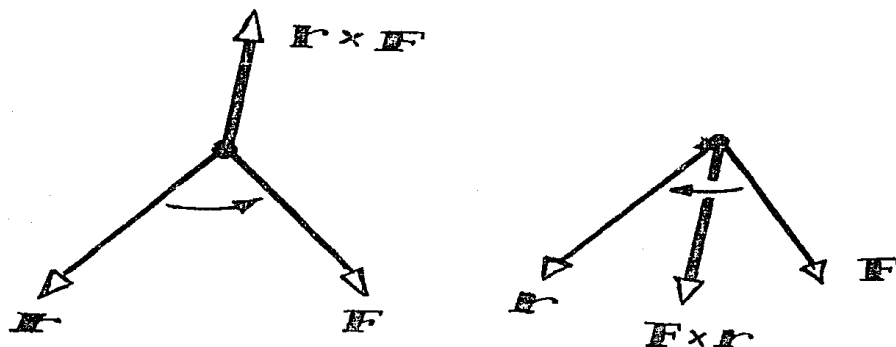


Fig 35

Estas dos situaciones nos hacen pensar en el orden en que se opera con los vectores. Si el primer factor es  $\mathbf{r}$ , entonces aplicamos la regla de la mano derecha de  $\mathbf{r}$  hacia  $\mathbf{F}$ , mientras que si el primer factor es  $\mathbf{F}$ , entonces la aplicamos de  $\mathbf{F}$  hacia  $\mathbf{r}$ .

Para definir el momento de rotación debemos escoger entre  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  y  $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$ , para ir de acuerdo con los libros de texto escogeremos a  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ .

**DEFINICION 8** Si un cuerpo se encuentra en movimiento de rotación con un

vector de posición  $\mathbf{r}$  y una fuerza  $\mathbf{F}$ ,  
 de finimos el momento de rotación como:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

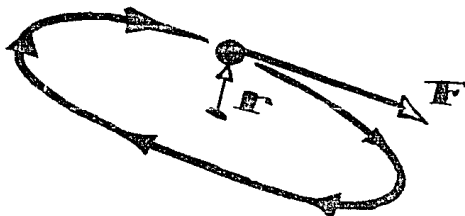


Fig. 36

Generalizaremos el concepto de momento de rotación para dos vectores cualesquiera, esta es una de las razones por la cual quisimos encontrar el sentido de  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  independientemente del movimiento de rotación.

**DEFINICION 9** Sean  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ .  
 Definimos el producto vectorial de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ ,  
 en este orden, como el vector:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w}$$

, es decir, como aquel vector que tiene



las siguientes características:

- El tamaño de  $v \times w$  es igual a  $\|v\| \|w\| \text{Sen } \phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo que forman  $v$  y  $w$ .
- La dirección de  $v \times w$  es ortogonal al plano que contiene a  $v$  y  $w$ .
- El sentido de  $v \times w$  se determina por la regla de la mano derecha aplicada de  $v$  a  $w$ .

Cabe señalar que en la definición de  $w \times v$  se tienen las mismas propiedades que para  $v \times w$ , salvo que tienen sentidos opuestos.

Las características del vector  $v \times w$  se pueden escribir en el lenguaje matemático como sigue:

$$(P.V.1) \quad \|v \times w\| = \|w \times v\| = \|v\| \|w\| \text{Sen } \phi$$

$$(P.V.2) \quad v \cdot (v \times w) = w \cdot (v \times w) = 0$$

$$(P.V.3) \quad v \times w = -w \times v$$

La propiedad P.V.1. indica que los vectores  $v \times w$  y  $w \times v$  tienen el mismo tamaño, la propiedad P.V.2. indica que el vector  $v \times w$  es ortogonal a  $v$  y  $w$  y finalmente la propiedad P.V.3. nos dice que  $v \times w$  y  $w \times v$  tienen sentidos opuestos.

A continuación daremos unos ejemplos de como calcular  $v \times w$  a partir de las propiedades P.V.1, P.V.2 y P.V.3.

**EJEMPLO 20** Mostrar que  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$ ,  
 $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ .

Por la propiedad P.V.3. con  $v = \mathbf{i}$  y  $w = \mathbf{i}$ , se tiene:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{i}$$

entonces

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} + \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

entonces

$$2(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) = \mathbf{0}$$

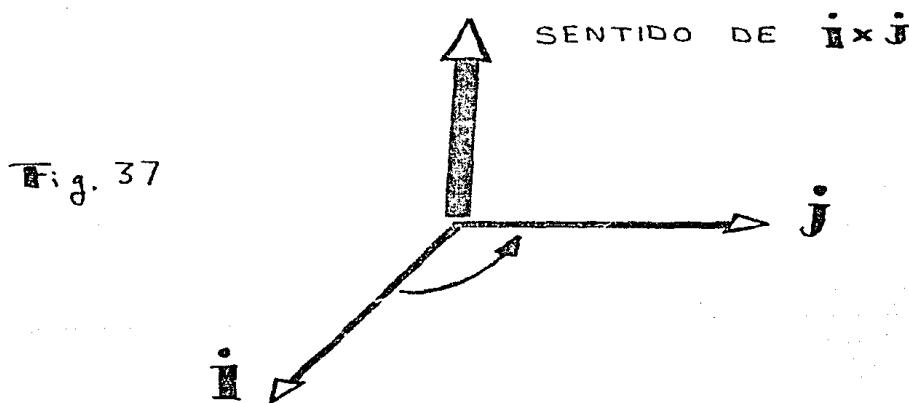
entonces

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

Los dos productos que restan se calculan en forma parecida.

**EJEMPLO 21** Mostrar que  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$   
 y  $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ .

Como  $\|\mathbf{i} \times \mathbf{j}\| = 1$  e  $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$  está en la dirección del eje  $\mathbf{z}$  entonces  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$  ó  $-\mathbf{k}$ . Para determinar cual de los dos vectores es, aplicamos la regla de la mano derecha al producto  $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$  (Fig. 37)



En base al desarrollo anterior concluimos que  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ . Para obtener la segunda fórmula aplicamos la propiedad P.V.3.

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = -\mathbf{k}$$

## EJERCICIO.

1.- Se deja para el lector comprobar las siguientes fórmulas:

$$\dot{\mathbf{i}} \times \mathbf{k} = -\dot{\mathbf{j}} \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{j}}$$

$$\dot{\mathbf{j}} \times \mathbf{k} = \dot{\mathbf{i}} \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{j}} = -\dot{\mathbf{i}}$$

Motivaremos dos propiedades más que satisface el producto vectorial, y para esto usaremos el concepto de momento de rotación.

Considerando las expresiones  $\mathbf{r} \times (2\mathbf{F})$  y  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , nos preguntamos por la relación que guardan entre sí. Claramente en la expresión  $\mathbf{r} \times (2\mathbf{F})$  duplicamos la fuerza y por ello creemos que  $\mathbf{r} \times (2\mathbf{F})$  es el doble del momento de rotación del que produce  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . En base a la discusión anterior podemos dar la siguiente fórmula:

$$\mathbf{r} \times (2\mathbf{F}) = 2(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

Si ahora triplicamos el vector posición, entonces  $(3\mathbf{r}) \times \mathbf{F}$  es el triple del momento de rotación  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . Por lo tanto deducimos la siguiente fórmula:

$$(3\mathbf{r}) \times \mathbf{F} = 3 (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

Podemos conjuntar las dos fórmulas anteriores para tener la siguiente:

$$(3\mathbf{r}) \times (2\mathbf{F}) = 3 \cdot 2 (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

Como la última fórmula se cumple para el momento de rotación, esperamos que también se cumpla para el producto vectorial en su forma general, es decir:

$$(\alpha\mathbf{v}) \times (\beta\mathbf{w}) = \alpha \cdot \beta (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

La siguiente fórmula que satisface el producto vectorial tiene que ver con el hecho de aplicar dos fuerzas  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  al cuerpo en rotación. (Fig. 38)

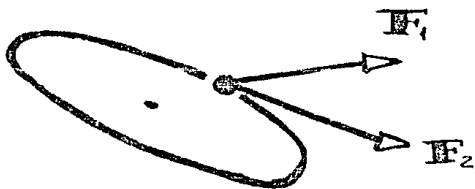


Fig. 38

En este caso nos imaginamos que el momento producido por la fuerza  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$  es igual a sumar los momentos que producen individualmente las fuerzas  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$ , esto no quiere decir otra cosa que:

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

Generalizamos la fórmula anterior como sigue:

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{v} \times \mathbf{w}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{w}_2$$

es decir, el producto vectorial es distributivo.

Con la ayuda de P.V.3. y de la última fórmula deducida, podemos dar una fórmula más el producto vectorial.

**RESULTADO 6** Para el producto vectorial se cumple:

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{w}$$

Convenimiento

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times \mathbf{w} = -(\mathbf{w} \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)) \quad \text{por}$$

P.V.3. Ahora usando la propiedad distributiva ya vista tenemos:

$$\begin{aligned} -(w \times (v_1 + v_2)) &= -(w \times v_1 + w \times v_2) \\ &= (-w \times v_1) + (-w \times v_2) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} -w \times v_1 &= -(-v_1 \times w) \\ -w \times v_2 &= -(-v_2 \times w) \end{aligned}$$

luego entonces

$$(v_1 + v_2) \times w = -(-v_1 \times w) + (-(-v_2 \times w))$$

Por lo tanto

$$(v_1 + v_2) \times w = v_1 \times w + v_2 \times w$$

Como hemos presentado una serie de fórmulas y resultados, damos a continuación una lista de las más importantes.

(P.V.1.)  $\|v \times w\| = \|w \times v\| = \|v\| \|w\| \text{Sen } \phi$

(P.V.2)  $v \cdot (v \times w) = w \cdot (v \times w) = 0$

(P.V.3)  $v \times w = -w \times v$

$$(P.V.4.) \quad \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$(P.V.5.) \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

$$(P.V.6.) \quad \mathbf{v} \times (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{v} \times \mathbf{w}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{w}_2$$

$$(P.V.7.) \quad (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{w}$$

$$(P.V.8.) \quad (\alpha \mathbf{v}) \times (\beta \mathbf{w}) = (\alpha \beta) (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

## EJERCICIO

1.- Dejamos para el lector comprobar la siguiente fórmula:

$$(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2) \times (\mathbf{a} \mathbf{w}_1 + \mathbf{b} \mathbf{w}_2) = (\alpha \mathbf{a}) (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{w}_1) + (\alpha \mathbf{b}) (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{w}_2) \\ + (\beta \mathbf{a}) (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{w}_1) + (\beta \mathbf{b}) (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{w}_2)$$

La definición que hemos dado para el producto vectorial adolece de varios inconvenientes: ¿cómo medir el ángulo  $\phi$  que forman los vectores? , la determinación del sentido de  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  es un poco



problemático de obtener y además no hay una forma explícita de dar la dirección de  $v \times w$ . Podemos resumir el comentario anterior diciendo que la definición que dimos para el producto vectorial es totalmente empírica.

Nos gustaría presentar una definición más matemática de este producto. Teniendo en mente el comentario anterior damos el siguiente resultado.

**RESULTADO 7**

Si  $v, w \in \mathbb{R}^3$  con  $v = (\alpha, \beta, \gamma)$  y  $w = (a, b, c)$  entonces

$$v \times w = (\beta c - \gamma b, -(\alpha c - \gamma a), \alpha b - \beta a)$$

Convencimiento.

Como sabemos  $v = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}$   
y  $w = a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k}$ , entonces

$$\begin{aligned} v \times w &= (\alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}) \times (a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k}) \\ &= (\alpha a)(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + (\alpha b)(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + (\alpha c)(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + (\beta a)(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \\ &\quad + (\beta b)(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + (\beta c)(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + (\gamma a)(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + \\ &\quad + (\gamma b)(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + (\gamma c)(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Este último paso es por que el producto vectorial es distributivo. Aplicando ahora las propiedades P.V.4. y P.V.5. , simplificamos el último paso como sigue :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= (\alpha b) \mathbf{k} - (\alpha c) \mathbf{j} - (\beta a) \mathbf{k} + (\beta c) \mathbf{i} + (\gamma a) \mathbf{j} \\ &\quad - (\gamma b) \mathbf{i} = (\beta c - \gamma b) \mathbf{i} + (\gamma a - \alpha c) \mathbf{j} + (\alpha b - \beta a) \mathbf{k} \\ &= (\beta c - \gamma b, \gamma a - \alpha c, \alpha b - \beta a) \end{aligned}$$

Con lo cual terminamos la demostración.

La fórmula que aparece en el resultado 7 es nuestra fórmula fundamental para calcular productos vectoriales.

Como la fórmula que dimos para el producto vectorial es difícil de recordar, daremos una fórmula mnemotécnica para que el lector la recuerde fácilmente. Para esto usaremos determinantes de orden tres :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

El desarrollo de este determinante es:

$$\Delta = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

Como se observó, se toma el elemento  $\alpha_{11}$  y quitamos la columna y el renglón en que se encuentra, quedando el determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Se multiplican ambas expresiones para dar

$$\alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Proseguimos por el primer renglón y ahora tomamos a  $\alpha_{12}$ , y de nuevo quitamos el renglón y la columna en que se encuentra. Se hace con el siguiente elemento del primer renglón lo mismo:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Para aplicar estos resultados a nuestra fórmula del producto vectorial, observemos que la fórmula se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= (\beta c - \gamma b) \mathbf{i} - (\alpha c - \gamma a) \mathbf{j} + (\alpha b - \beta a) \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ b & c \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ a & c \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{vmatrix} \mathbf{k} \end{aligned}$$

lo cual no es otra cosa que el desarrollo del "determinante"

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

entonces podemos concluir que:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

## EJERCICIOS.

1.- Ahora que ya dimos la fórmula matemática para  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ , comprobar

que son ciertas las propiedades P.V.1 a P.V.8.

2.- De entre todas las fuerzas con la misma magnitud, ¿cuál de ellas hace a que  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  tenga la mayor magnitud? Explicar la respuesta Física y analíticamente.

3.- Hacer lo mismo que en 2 pero ahora buscando que  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  tenga menor magnitud.

Continuamos con algunas aplicaciones geométricas del producto vectorial.

Si el lector recuerda el producto escalar nos describía el concepto de ortogonalidad de vectores. El producto vectorial nos describe otro concepto geométrico que es el de paralelismo (Fig. 40)

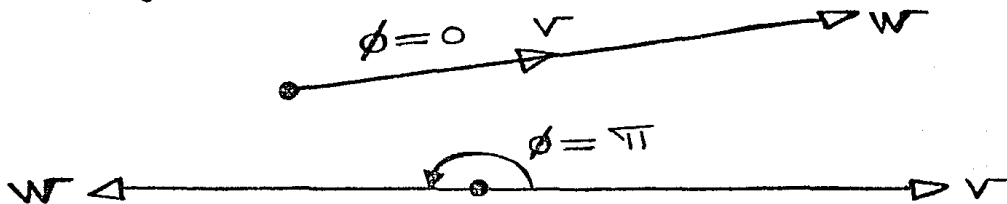


Fig. 40

**DEFINICION 10** Dos vectores  $v$  y  $w$  en  $\mathbb{R}^3$  son paralelos si, el ángulo que forman es de  $0$  ó  $\pi$ .

**RESULTADO 8** Dos vectores  $v$  y  $w$  son paralelos si, y solo si,  $v \times w = 0$

Convencimiento.

Si  $v$  y  $w$  son paralelos entonces el ángulo que forman es de  $0$  ó  $\pi$ . Por lo tanto

$$\|v \times w\| = \|v\| \|w\| \text{Sen}(0 \text{ ó } \pi) = 0$$

y si  $\|v \times w\| = 0$ , entonces  $v \times w = 0$

Si  $v \times w = 0$ , entonces  $\|v \times w\| = 0$  y esto obliga a que:

$$\|v\| \|w\| \text{Sen } \phi = 0$$

entonces  $\text{Sen } \phi = 0$ . Y por lo tanto  $\phi = 0$  ó  $\pi$ , lo cual nos indica que  $v$  y  $w$  son paralelos.

Con el siguiente resultado podemos calcular el área de un paralelogramo (Fig. 41).

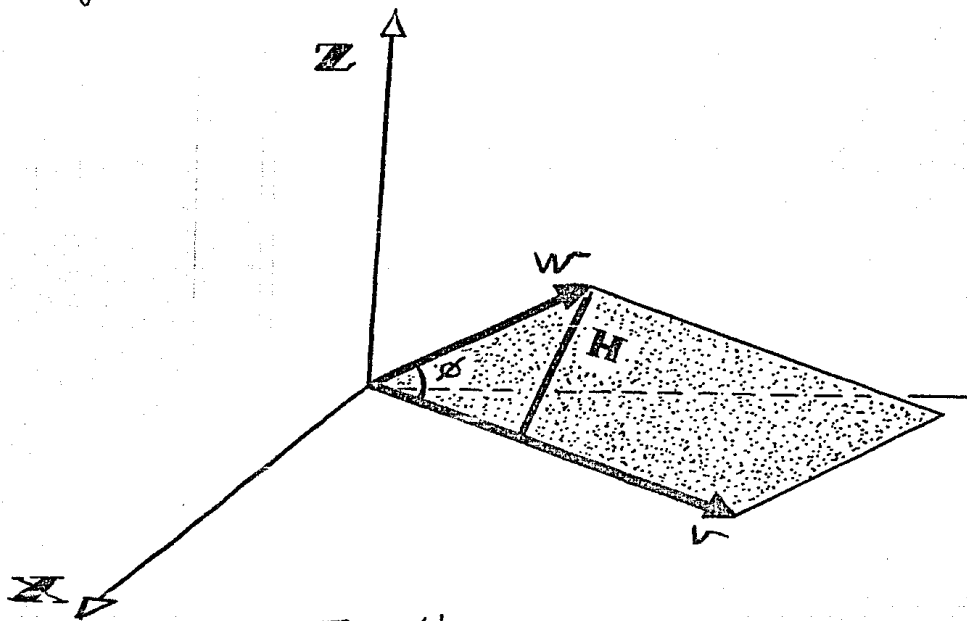


Fig 41.

**RESULTADO 9** El área de un paralelogramo generado por los vectores  $v$  y  $w$  es igual a:

$$A = \|v \times w\| = \|w \times v\|$$

Convenimiento

Como el área de un parale-

logramo. es igual a :

$$A = (\text{base})(\text{altura})$$

donde (Fig. 41)  $\text{base} = \|v\|$  y  $\text{altura} = H = \|w\| \text{Sen } \phi$ , entonces

$$A = \|v\| \|w\| \text{Sen } \phi = \|v \times w\|$$

### EJERCICIOS.

1.- ¿Por qué el área de un paralelogramo es igual a multiplicar la base por la altura.

2.- Si podemos calcular el área de un paralelogramo, podremos calcular el área de un triángulo. Calcular el área de un triángulo de lados  $v$ ,  $w$  y  $v-w$ .

3.- ¿Qué pasa, con la fórmula para el área de un triángulo, si ninguno de los vértices está en el origen de coordenadas?



4.- ¿Cómo interpretaría el resultado  $\delta$  en términos del área del paralelogramo que generan  $v$  y  $w$ ?

### 1.7. RECTAS.

Supongamos que se tiene algún alimento, por ejemplo pescado, y tomamos una cantidad  $t$  de él. El contenido de carbohidratos, proteínas y grasas que contiene el pescado por gramo, viene dado por la tabla siguiente:

#### PESCADO.

CARBOHIDRATOS  
150

PROTEINAS  
400

GRASAS \*  
10

Hagamos la siguiente pregunta, ¿cuál es la cantidad de carbohidratos, proteínas y grasas consumidas en la cantidad de

\* Estos datos son ficticios

pescado ~~?~~? Si; hacemos

$$\begin{aligned} x &= \text{cantidad de carbohidratos consumidos} \\ y &= \text{" " " proteínas " "} \\ z &= \text{" " " grasas " "} \end{aligned}$$

entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} x &= 150 \del{?} \\ y &= 400 \del{?} \\ z &= 10 \del{?} \end{aligned}$$

Si suponemos además que la persona previamente había consumido 50 unidades de carbohidratos, 10 unidades de proteínas y 40 unidades de grasas, entonces las ecuaciones anteriores adoptan la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= 50 + 150 \del{?} \\ y &= 10 + 400 \del{?} \\ z &= 40 + 10 \del{?} \end{aligned}$$

Conforme variamos la cantidad de pescado consumido ~~?~~, las cantidades  $x$ ,  $y$  y  $z$  nos van dando las cantidades de carbohidratos, proteínas y grasas que se consumen.

## EJERCICIOS.

1- Si se sigue consumiendo pescado  $\textcircled{a}$  ¿Habrá algún momento en que la cantidad de carbohidratos, proteínas y grasas consumidas sea de 230, 60/0 y 190 respectivamente?  $\textcircled{b}$  ¿Habrá un momento en que sea 230, 60/0 y 200?  $\textcircled{c}$  ¿Habrá un momento en que las tres cantidades sean las mismas? ¿y las dos primeras? ¿y las últimas cantidades? ¿y la primera y la tercera?

En esta sección estudiaremos las ecuaciones del tipo de la dieta:

$$x = x_0 + \alpha \pm$$

$$y = y_0 + \beta \pm$$

$$z = z_0 + \gamma \pm$$

Para empezar se reescribirá la ecuación anterior como:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \pm (\alpha, \beta, \gamma)$$

Dándole a  $\pm$  diferentes valores, se ob-

tienen diferentes ternas  $(x, y, z)$ . Explicaremos como es el comportamiento de tales ternas cuando las miramos como puntos en el espacio.

Ya vimos antes que, cuando tenemos un vector fijo  $\mathbf{p} = (\alpha, \beta, \gamma)$ , los vectores de la forma  $\pm \mathbf{p}$  son los vectores que están en la misma dirección que  $\mathbf{p}$ , es decir, los vectores de la forma  $\pm \mathbf{p}$  representan a los puntos de la recta  $\mathcal{L}$  que vive al vector  $\mathbf{p}$  con el origen. Ahora si tomamos un punto de la forma  $\mathbf{q} = (x_0, y_0, z_0) + \pm \mathbf{p}$ , entonces estamos sumando al punto  $(x_0, y_0, z_0)$  un punto de la recta  $\mathcal{L}$ , que por la ley del paralelogramo nos da un punto en la recta que pasa por  $(x_0, y_0, z_0)$  y que es paralela a  $\mathcal{L}$  (Fig. 42)

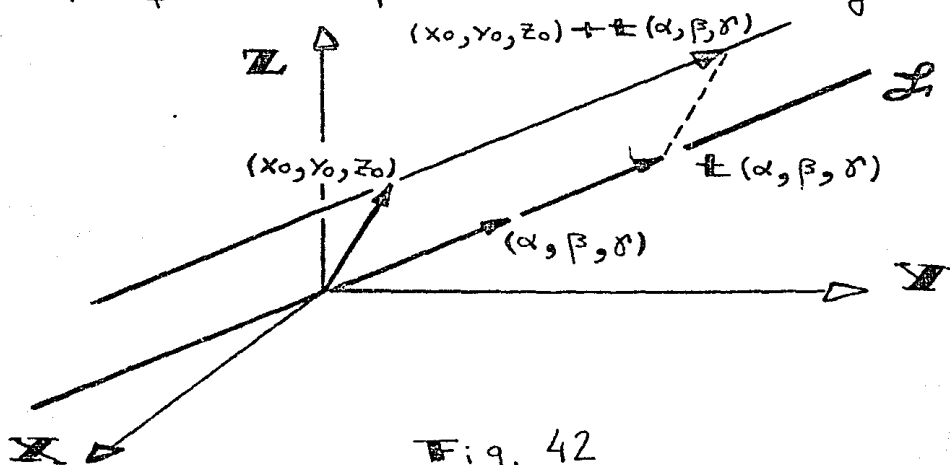


Fig. 42

Esperamos que esta discusión sea suficiente para convencer al lector que los puntos  $(x, y, z)$  de la forma:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \alpha t \\y &= y_0 + \beta t \\z &= z_0 + \gamma t\end{aligned}$$

son exactamente los puntos de la recta que pasa por el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  y que va en la dirección del vector  $(\alpha, \beta, \gamma)$

En base a la discusión anterior damos la siguiente definición.

**DEFINICION 11** La ecuación de la recta que pasa por el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  y que va en la dirección del vector  $(\alpha, \beta, \gamma)$  es:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \alpha t \\y &= y_0 + \beta t \\z &= z_0 + \gamma t\end{aligned}$$

**EJEMPLO 22** El consumo de carbohidratos, proteínas y grasas que

consume una persona al tomar un vaso de leche en dos días vienen dados por las ternas:

$$\alpha_1 = (100, 200, 300) \quad \alpha_2 = (50, 100, 150)$$

¿sobre qué recta se encuentran los puntos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ ?

Para resolver este problema necesitamos dar un punto por el que pasa la recta, podemos escoger entre  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . También es necesario un vector que le de dirección a la recta, este es  $\alpha_1 - \alpha_2 = (50, 100, 150)$ . La ecuación de la recta buscada es:

$$\begin{aligned} x &= 50 + 50t \\ y &= 100 + 100t \\ z &= 150 + 150t \end{aligned}$$

### EJERCICIOS.

1.- En el ejemplo 22 también se puede tomar como vector que le da dirección a la recta al vector  $\alpha_2 - \alpha_1$

Probar que se obtiene la misma recta.

2.- En la ecuación de la recta  
¿Qué lugar geométrico se obtiene si;  
 $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ ?

3.- Se supone que, en el ejemplo 22, los puntos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  están sobre la recta que obtuvimos. ¿Cómo se puede verificar esto?

### EJEMPLO 23

En algunas plantas las ramificaciones que se dan sobre el tallo, es decir las ramas, guardan una relación notable con éstas (Fig. 43). El ángulo que forman estas partes de la planta es de  $\pi/2$ .



Fig. 43

Este hecho importante lo podemos interpretar en el sentido de que esta colocación ayuda a una mejor distribución de la savia. Esto es así, pues el camino más corto para unir un punto y una recta es mediante un segmento de recta perpendicular a la recta dada (Fig. 44)

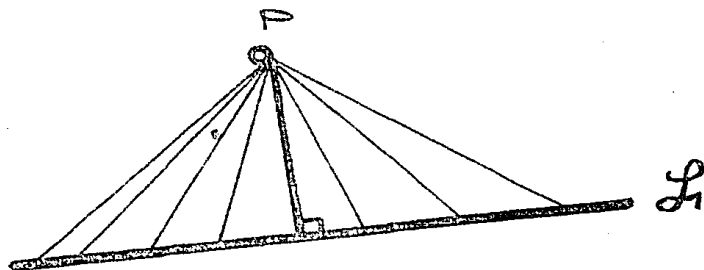


Fig. 44

Deduciremos una fórmula para la distancia más corta que hay de un punto a una recta.

**RESULTADO 10** La distancia del punto  $X_0 = (a, b, c)$  a la recta:

$$X = Y_0 + tV$$

donde  $X = (x, y, z)$ ,  $Y_0 = (x_0, y_0, z_0)$  y  $V = (\alpha, \beta, \gamma)$  viene dada por la fórmula:



$$D = \frac{\|(X_0 - Y_0) \times V\|}{\|V\|}$$

Convencimiento.

Considera la Fig 45, se cumple que:

$$\text{Sen } \phi = \frac{D}{\|X_0 - Y_0\|}$$

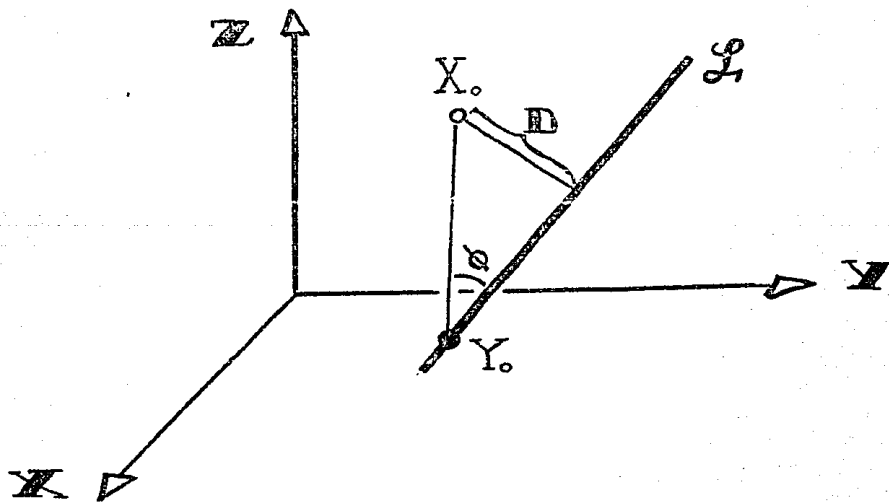


Fig. 45

entonces

$$D = \|X_0 - Y_0\| \text{Sen } \phi$$

Pero también

$$\text{Sen } \phi = \frac{\| (X_0 - Y_0) \times V \|}{\| X_0 - Y_0 \| \| V \|}$$

Sustituyendo este valor de  $\text{Sen } \phi$  en la fórmula para la distancia, tendremos

$$D = \frac{\| X_0 - Y_0 \| \| (X_0 - Y_0) \times V \|}{\| X_0 - Y_0 \| \| V \|}$$

Por lo tanto

$$D = \frac{\| (X_0 - Y_0) \times V \|}{\| V \|}$$

**EJEMPLO 24** Una persona consume  $t$  unidades de pan y 5 unidades de leche. El consumo de carbohidratos, proteínas y grasas, en el sentido del problema con se inicio la sección, vienen dadas por:

$$x = 10 + 30t$$

$$y = 20 + 30t$$

$$z = 30 + 30t$$

$$x = 30 + 10s$$

$$y = 35 + 15s$$

$$z = 40 + 20s$$

¿Cuánto debe consumir, la persona, de pan y leche para que el consumo de carbohidratos, proteínas y grasas en los dos alimentos sea igual? ¿Cuál es esta cantidad de carbohidratos, proteínas y grasas?

Como queremos que la cantidad de carbohidratos, proteínas y grasas sean iguales, entonces

$$\begin{aligned} 10 + 30t &= 30 + 10s \\ 20 + 30t &= 35 + 15s \\ 30 + 30t &= 40 + 20s \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 30t - 10s &= 20 \\ 30t - 15s &= 15 \\ 30t - 20s &= 10 \end{aligned}$$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones tenemos que  $t=1$  y  $s=1$ . Por lo tanto debemos de consumir una unidad de pan y una unidad de leche. Las cantidades de carbohidratos, proteínas y grasas que se consumen en estas canti-

dades de pan y leche son:

$$D = (40, 50, 60) \quad L = (40, 50, 60)$$

### EJERCICIO.

A. - Con respecto al ejemplo 24, podemos observar que resolvimos las dos primeras ecuaciones para  $s$  y  $t$  y la solución que obtuvimos ( $s=1, t=1$ ) también satisface la tercera ecuación. ¿Qué hubiera pasado si esta solución no hubiera satisfecho la tercera ecuación? Diseñar un ejemplo en el que ocurra esto último que se dijo en la pregunta.

Podemos interpretar geométricamente el ejemplo 24 como sigue. Sabemos que las ecuaciones:

$$x = 10 + 30t$$

$$y = 20 + 30t$$

$$z = 30 + 30t$$

$$x = 30 + 10s$$

$$y = 35 + 15s$$

$$z = 40 + 20s$$

representan rectas en el espacio, por

ello la terna solución  $(40, 50, 60)$  corresponde al punto en que se intersectan las dos rectas.

Las diferentes disposiciones de dos rectas en el espacio son:

- (1) Las rectas se intersectan en un punto
- (2) Las rectas se cruzan
- (3) Las rectas son paralelas

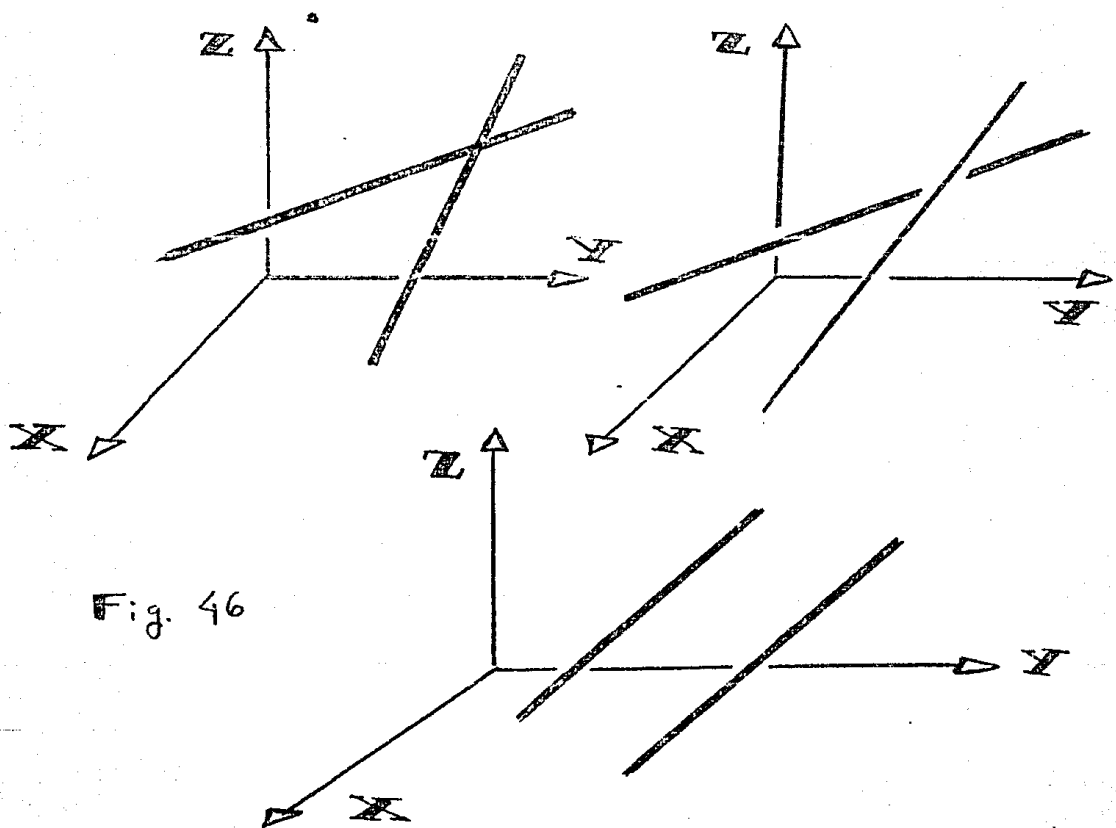


Fig. 46

**DEFINICION 12** Dos rectas son paralelas si sus vectores dirección son paralelos.

**EJEMPLO 25** Mostrar que las rectas :

$$(x, y, z) = (1, 3, -2) + t(3, -6, 9)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, 7) + s(-2, 4, -6)$$

son paralelas

Los vectores dirección de las rectas son  $v_1 = (3, -6, 9)$  y  $v_2 = (-2, 4, -6)$   
Como

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

entonces  $v_1$  y  $v_2$  son paralelos. Por lo tanto las rectas dadas son paralelas.

**EJEMPLO 26** Encontrar el punto de intersección entre la recta

$$x = x_0 + \alpha t$$

$$y = y_0 + \beta t$$

$$z = z_0 + \gamma t$$

y el plano ~~XZ~~

Para que la recta intersecte al plano ~~XZ~~ es necesario que  $y=0$ , es decir,

$$y_0 + \beta t = 0$$

Esta ecuación se cumple para  $t = -\frac{y_0}{\beta}$   
Por lo tanto el punto de intersección es

$$x = x_0 + \alpha \left(-\frac{y_0}{\beta}\right) = x_0 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) y_0$$

$$y = 0$$

$$z = z_0 + \gamma \left(-\frac{y_0}{\beta}\right) = z_0 - \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) y_0$$

### EJERCICIOS.

1.- ¿Cómo podríamos verificar que dos rectas que pasan por el mismo punto  $(x_0, y_0, z_0)$  y que están dadas por las ecuaciones

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(\epsilon, \delta, \eta)$$

son ortogonales?

2.- Con respecto al problema 1, ¿cómo podríamos contestar la pregunta si la segunda recta tiene como ecuación

$$(x, y, z) = (u_0, v_0, w_0) + t(\epsilon, \delta, \eta)$$

3.- Decir si la recta que pasa por los puntos  $(1, -1, 1)$  y  $(3, 2, 4)$  y la recta que pasa por el punto  $(1, 1, 1)$  y tiene como vector de dirección  $(3, 4, 5)$  son ortogonales.

4.- Dada una recta  $L$  por

$$x = x_0 + \alpha t$$

$$y = y_0 + \beta t$$

$$z = z_0 + \gamma t$$

y un punto  $(u_0, v_0, w_0)$ , desarrollar un método para encontrar el punto  $Q$  de  $L$  más cercano a  $(u_0, v_0, w_0)$

5.- Suponiendo que  $x = 5 - 3t$ ,  $y = -2 + t$  y  $z = 1 + 9t$  son ecuaciones paramétricas de una recta  $\ell$ , encuentre unas ecuaciones para la recta que pasa por  $(-6, 4, -3)$  y es paralela a  $\ell$ .



### 7.8. PLANOS.

Una dieta debe contener carbohidratos, proteínas y grasas. Se dispone de tres alimentos: leche, pan y huevo. La tabla siguiente da el contenido de las tres sustancias en los tres alimentos por gramo, o por mililitro.

	CARBOHIDRATOS	PROTEINAS	GRASAS
LECHE	100	200	300
PAN	400	100	100
HUEVO	300	500	200

¿Cómo se pueden combinar los tres alimentos para que el contenido de carbohidratos sea de 500 unidades?

Supongamos que se toman  $x$  mililitros de leche,  $y$  gramos de pan y  $z$  gramos de huevo. Entonces

$100x =$  cantidad de carbohidratos consumidos en los  $x$  mililitros de leche.

$400y$  = cantidad de carbohidratos consumidos en los  $y$  gramos de pan

$300z$  = cantidad de carbohidratos consumidos en los  $z$  gramos de huevo.

Luego entonces la cantidad de carbohidratos consumidos en los tres alimentos es:

$$100x + 400y + 300z$$

y como queremos que la cantidad de carbohidratos consumidos sea igual a 500, llegamos a la ecuación

$$100x + 400y + 300z = 500$$

Una posible dieta que satisfice los requerimientos de carbohidratos consiste en tomar dos mililitros de leche, 0 gramos de pan y un gramo de huevo. El que estas cantidades cumplan con los requerimientos, se debe a que si hacemos  $x=2$ ,  $y=0$  y  $z=1$  en la última ecuación, se verifica la igualdad

## EJERCICIOS.

1.- Dar otras posibles dietas que satisfagan los requerimientos:

$$100x + 400y + 300z = 500$$

2.- ¿Hay alguna dieta que satisfaga los requerimientos y en la que únicamente se tome leche? ¿Cuántas de estas hay?

3.- ¿Hay diferentes dietas que satisfagan los requerimientos de carbohidratos, pero en las cuales se consuma únicamente pan y leche? ¿Cuántas hay?

En esta sección estudiaremos ecuaciones del tipo de la dieta:

$$100x + 400y + 300z = 500$$

o en forma más general, ecuaciones del tipo:

$$ax + by + cz = k$$

Antes de empezar con el análisis de la ecuación ya mencionada, plantearemos otro problema que está íntimamente relacionado con lo anterior.

Considerando los vectores  $v = (100, 200, 300)$  y  $w = (400, 100, 100)$ , se observa de la tabla dada al inicio de la sección, que ellos nos indican el contenido de carbohidratos, proteínas y grasas en la leche y el pan respectivamente. Si se ingieren  $t$  mililitros de leche y  $s$  gramos de pan, ¿cuál es la cantidad de carbohidratos, proteínas y grasas consumidas? Si denotamos por  $(x, y, z)$  a la cantidad de carbohidratos, proteínas y grasas que se han consumido, entonces

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= t(100, 200, 300) + s(400, 100, 100) \\ &= tV + sW\end{aligned}$$

Si suponemos además que previamente ya se habían consumido 300 unidades de carbohidratos, 600 unidades de proteínas y 400 unidades de grasas.

Entonces la última ecuación adopta la forma:

$$(x, y, z) = (300, 400, 600) + t(100, 200, 300) + s(400, 100, 100)$$

Si hacemos  $\vec{X} = (x, y, z)$ ,  $\vec{X}_0 = (300, 400, 600)$ ,  $\vec{V}$  entonces la ecuación se puede escribir como:

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + t\vec{V} + s\vec{W}$$

Conforme vamos variando las cantidades de leche y pan consumidas, iremos obteniendo las cantidades de carbohidratos, proteínas y grasas consumidas por medio del vector  $\vec{X}$ .

Esta sección está dedicada al estudio de las ecuaciones:

$$ax + by + cz = k$$

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + t\vec{V} + s\vec{W}$$

Empezaremos dando una interpretación geométrica de la ecuación

$$100x + 400y + 300z = 500$$

Escribamos tal ecuación como sigue:

$$100x + 400y + 300z = 100 + 400$$

o lo que es lo mismo:

$$100x - 100 + 400y - 400 + 300z = 0$$

$$100(x-1) + 400(y-1) + 300(z-0) = 0$$

$$(100, 400, 300) \cdot (x-1, y-1, z-0) = 0$$

$$(100, 400, 300) \cdot ((x, y, z) - (1, 1, 0)) = 0$$

Como las ecuaciones:

$$100x + 400y + 300z = 500$$

$$(100, 400, 300) \cdot ((x, y, z) - (1, 1, 0)) = 0$$

son equivalentes, llegamos a la conclusión de que las ternas que satisfacen a una también satisfacen a la otra. Pero las ternas que satisfacen a la última ecuación son aquellas tales que al restarles  $(1, 1, 0)$  son ortogonales al vector  $(100, 400, 300)$ . Podemos ver la colocación de tales ter-

nas en el espacio por medio de la  
Fig. 47

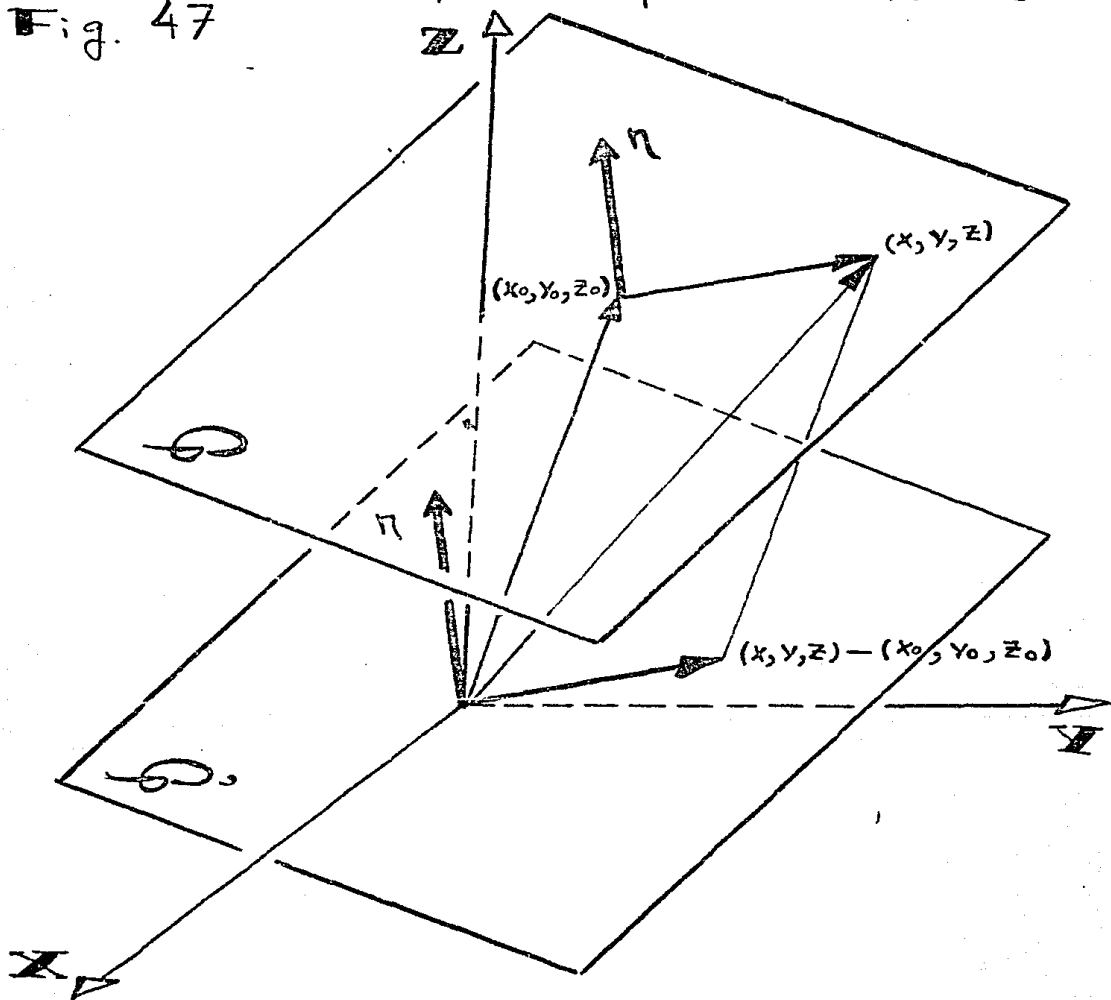


Fig. 47.

Hagamos  $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \eta \circ ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0\}$ . Además

los vectores de  $\mathcal{P}$  son aquellos que son ortogonales a  $\eta$  por lo que  $\mathcal{P}$  es un plano. Los vectores de  $\mathcal{P}$  son aquellos puntos tales que el segmento que va de  $(x_0, y_0, z_0)$  a  $(x, y, z)$  es paralelo a un elemento de  $\mathcal{P}$ . De modo que  $\mathcal{P}$  también es un plano. Como  $\eta$  es ortogonal a  $(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)$  para todos los puntos  $(x, y, z) \in \mathcal{P}$ , a  $\eta$  se le llama vector normal al plano  $\mathcal{P}$ .

**DEFINICION 13** La ecuación del plano que pasa por el punto  $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$  y tiene como vector normal a  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  es:

$$\eta \cdot (X - X_0) = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = \eta_1 x_0 + \eta_2 y_0 + \eta_3 z_0$$

ahora interpretaremos geométricamente la ecuación

$$X = X_0 + tV + sW$$

Primero veamos quien es el conjunto:



$$\{tV + sW : t, s \in \mathbb{R}\}$$

Ya hemos dicho que los vectores de la forma  $tV$  están en la recta que une el punto  $V$  con el origen (la recta que contiene al vector  $V$ ). Y los de la forma  $sW$  están en la recta que contiene al vector  $W$ . Por la ley del paralelogramo los puntos de la forma  $tV + sW$  deben de estar en un paralelogramo en el que dos de sus lados son los vectores  $tV$  y  $sW$  de manera que  $tV + sW$ ,  $tV$  y  $sW$  están en un mismo plano, y como  $tV$  y  $sW$  están en el plano  $\mathcal{O}$ , que contiene a los puntos  $\bar{O}$ ,  $V$  y  $W$ , tenemos que  $tV + sW$  está en  $\mathcal{O}$ . De manera que el conjunto

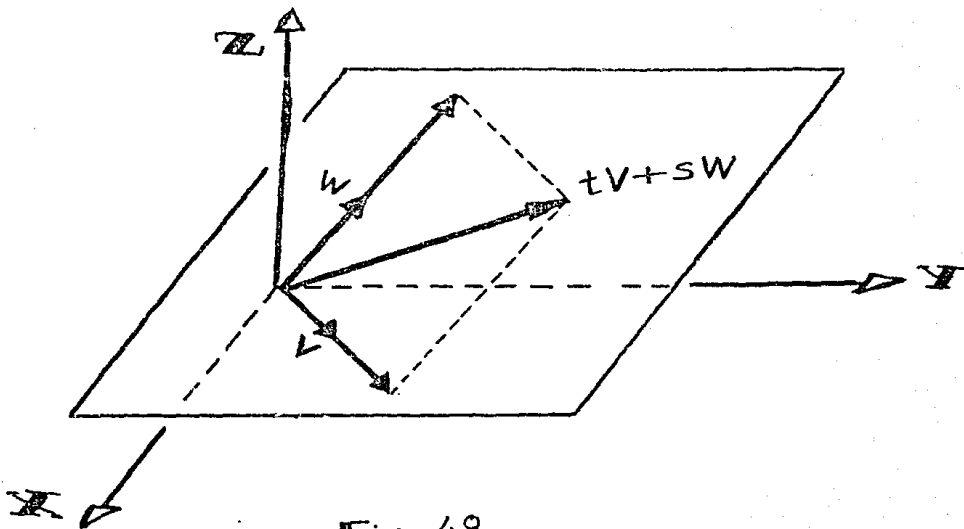


Fig. 48

$$\{tV + sW : t, s \in \mathbb{R}\}$$

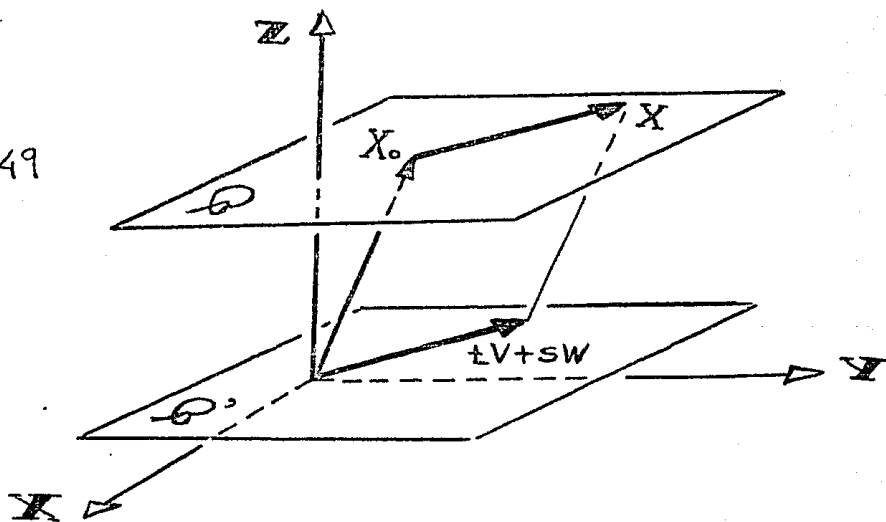
es exactamente el plano que contiene a  $\bar{0}$ ,  $v$  y  $w$ .

Ahora volvamos a los puntos de la forma:

$$X = X_0 + tV + sW$$

Como  $X - X_0 = tV + sW$ , tenemos que los puntos de la forma  $X = X_0 + tV + sW$  son aquellos tales que el segmento que los une con  $X_0$  es paralelo a un segmento contenido en  $\mathcal{P}'$ . De modo que estos puntos constituyen un plano paralelo a  $\mathcal{P}'$  que pasa por  $X_0$  (Fig. 49)

Fig. 49



**DEFINICION 14** La ecuación del plano, en forma paramétrica, que pasa por el punto  $X_0$  y que tiene las direcciones de  $V$  y  $W$  es:

$$X = X_0 + tV + sW$$

Podemos resumir todo lo que hemos visto, diciendo que un plano se puede representar en dos formas: en la forma vectorial

$$n \cdot (X - X_0) = 0$$

o en la forma paramétrica

$$X = X_0 + tV + sW$$

Para resolver un problema sobre planos, es necesario ver cual de las dos ecuaciones es mas adecuada para resolver el problema. Si escogemos la forma vectorial, debemos determinar a  $n$  y  $X_0$ . Los siguientes ejemplos son una muestra de como se puede proceder.

**EJEMPLO 27** El consumo de car-

bohidratos, proteínas y grasas que se consumen en el desayuno, comida y cena vienen dadas por los vectores:

$$\mathbf{C}_1 = (200, 300, 150), \mathbf{C}_2 = (400, 500, 600) \text{ y } \mathbf{C}_3 = (50, 100, 20)$$

¿sobre qué plano se encuentran las ternas  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  y  $\mathbf{C}_3$ ?

Daremos primero la ecuación paramétrica del plano. Considerando la Fig. 50, se observa que

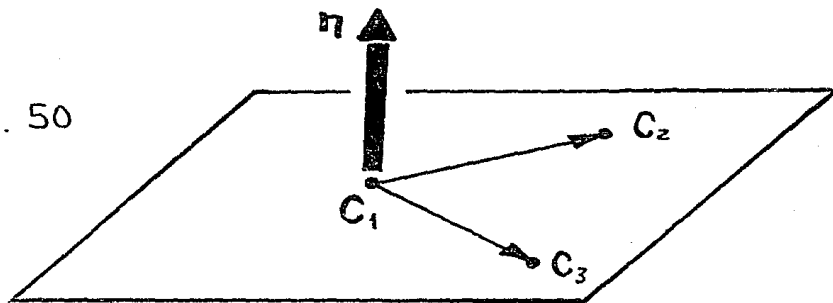
$$\mathbf{V} = \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1 = (200, 200, 450)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1 = (-150, -200, -130)$$

y además  $\mathbf{X}_0 = (200, 300, 150)$ . Luego entonces la ecuación del plano en forma paramétrica es:

$$\mathbf{X} = (200, 300, 150) + t(200, 200, 450) + s(-150, -200, -130)$$

Fig. 50



o lo que es lo mismo:

$$x = 200 + 200t - 150s$$

$$y = 300 + 200t - 200s$$

$$z = 150 + 450t - 130s$$

Para obtener la ecuación del plano en forma vectorial, nos falta determinar el vector normal al plano. De la Fig. 50 se observa que  $\mathbf{n}$  es ortogonal a  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  entonces

$$\mathbf{n} = \mathbf{V} \times \mathbf{W}$$

es decir

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 200 & 200 & 450 \\ -150 & -200 & -130 \end{vmatrix}$$

Entonces  $\mathbf{n} = (64\,000, -41\,500, -10\,000)$ . Por lo tanto la ecuación del plano es:

$$(64\,000, -41\,500, -10\,000) \cdot [(x, y, z) - (200, 300, 150)] = 0$$

o también

$$64\,000x - 41\,500y - 10\,000z = -1\,150\,000$$

## EJERCICIOS.

1.- La distancia del punto  $P=(4,2,\sqrt{5})$  al punto  $O=(0,0,0)$  es de 5 y entonces  $P$  es un punto en la esfera de radio 5 y centro en  $O$ . Dar las ecuaciones vectorial y paramétrica del plano tangente a la esfera que pasa por  $P$ .

2.- Consideremos la recta  $L$  representada por la fórmula

$$x = 2 + t$$

$$y = 3 + 4t$$

$$z = 5 - 2t$$

y sea  $P$  el punto  $(1,1,1)$ . Encontrar las ecuaciones vectorial y paramétrica del plano que contiene a  $L$  y a  $P$ .

3.- Sean  $L$  y  $P$  como en (2), encontrar las ecuaciones vectorial y paramétrica del plano ortogonal a  $L$  y que pasa por  $P$ .

**EJEMPLO 28** Una ballena se

encuentra sumergida en el mar (Fig. 51)  
 ¿Qué camino tiene que seguir la ballena,  
 para llegar a la superficie del mar lo  
 más pronto posible?

En la Fig. 51 se muestran varios  
 caminos que puede seguir la ballena. De to-  
 dos estos, el que tiene la distancia más pe-  
 queña a la superficie, es el dado por el se-  
 gmento  $\overline{PQ}$ , el cual es perpendicular a la su-  
 perficie del mar.

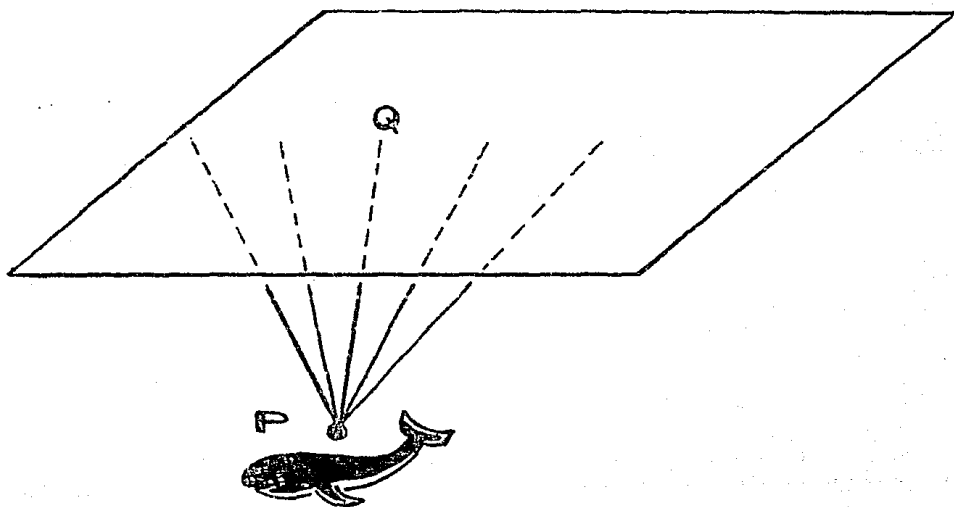


Fig. 51.

En el siguiente resultado damos

una fórmula para calcular la distancia más corta que debe recorrer la ballena para llegar a la superficie del mar.

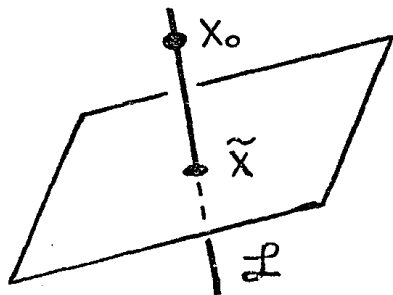
**RESULTADO 11** La distancia del punto  $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$  al plano  $Ax + By + Cz + D = 0$  es:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Convenimiento.

Consideremos la recta  $\mathcal{L}$  que pasa por  $(x_0, y_0, z_0)$  y que va en la dirección  $(A, B, C)$  (Fig. 52). Como el vector  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  es ortogonal al plano, entonces la distancia que hay de  $\tilde{X}$  (punto de intersección entre la recta  $\mathcal{L}$  y el plano) a  $X_0$  nos da el resultado deseado. Calcularemos primero las coordenadas de  $\tilde{X}$ , para después calcular la distancia entre  $X_0$  y  $\tilde{X}$ .

Fig. 52





Como la ecuación de la recta  $\mathcal{L}$  está dada por:

$$x = x_0 + A t$$

$$y = y_0 + B t$$

$$z = z_0 + C t$$

entonces el punto de intersección  $\tilde{X}$  lo obtenemos al resolver la ecuación:

$$A[x_0 + A t] + B[y_0 + B t] + C[z_0 + C t] + D = 0$$

Como la raíz de tal ecuación es:

$$t = - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

entonces las coordenadas de  $\tilde{X}$  son:

$$\tilde{x} = x_0 - \left[ \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} \right] A$$

$$\tilde{y} = y_0 - \left[ \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} \right] B$$

$$\tilde{z} = z_0 - \left[ \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} \right] C$$

Podemos calcular la distancia de

$X_0$  a  $\tilde{X}$  usando la fórmula que ya conocemos

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{X}, X_0) &= \sqrt{(\tilde{x} - x_0)^2 + (\tilde{y} - y_0)^2 + (\tilde{z} - z_0)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}\right)^2 (A^2 + B^2 + C^2)} \\ &= \frac{\sqrt{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\delta(\tilde{X}, X_0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

### EJERCICIOS.

1.- ¿Qué deben cumplir  $A$ ,  $B$  y  $C$  y  $D$  para que el plano  $Ax + By + Cz + D = 0$  sea tangente a la esfera de radio 5 y centro en  $O = (0, 0, 0)$ ?

2.- Encontrar los planos tangentes a la esfera del problema 1, pero

que sean paralelos al plano:  $2x + y - z + 5 = 0$

3.- Encontrar los planos tangentes a la esfera de  $\textcircled{1}$  que pasen por los puntos  $(0, 0, 16)$ ,  $(0, 16, 0)$ .

4.- Las caras de un tetraedro  $T$  están contenidas en los planos:

$x + y + z = 0$ ,  $x + 10y + z = 0$ ,  $x + y + 10z = 0$   
y  $x + y + z = 10$ . El punto  $(3, 3, 3)$  está en el interior de  $T$ , decir cual punto de la pared de  $T$  está mas cerca del punto  $(3, 3, 3)$  y cual es la distancia entre ellos.

Teniendo en cuenta los valores de la tabla con que se inicio la sección, consideremos el siguiente problema: cómo se pueden combinar la leche y el pan y el huevo para que el consumo de carbohidratos y proteínas sean de 6000 y 2000 unidades respectivamente? Por lo que ya hemos visto, las posibles dietas

$d = (x \text{ mls. de leche, } y \text{ grs. de pan, } z \text{ grs. huevo})$

deben satisfacer las ecuaciones:

$$100x + 400y + 300z = 6000$$

$$200x + 100y + 500z = 2000$$

Según el planteamiento del problema debemos encontrar las ternas  $(x, y, z)$  que cumplan con estas últimas ecuaciones. Como tales ecuaciones son planos, se observa que encontrar las ternas que cumplen con las dos ecuaciones, equivale a encontrar la intersección de los planos que representan tales ecuaciones.

Ahora bien, dos planos en el espacio pueden estar dispuestos en las siguientes formas:

(1) Los planos se interseccionan en una recta

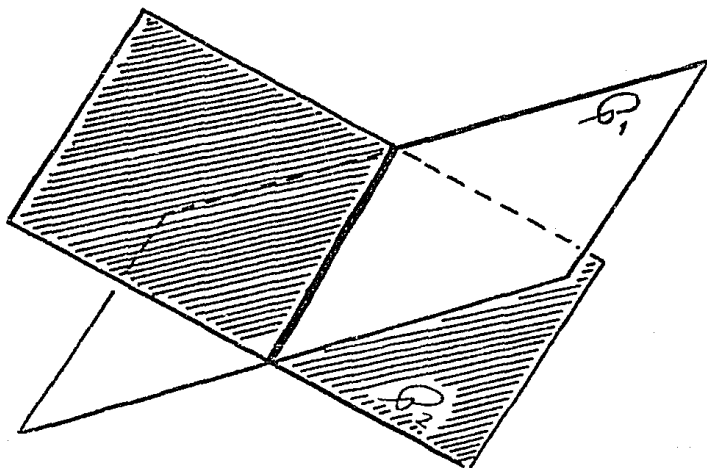


Fig. 53

(2) Los planos no se intersectan porque son paralelos.

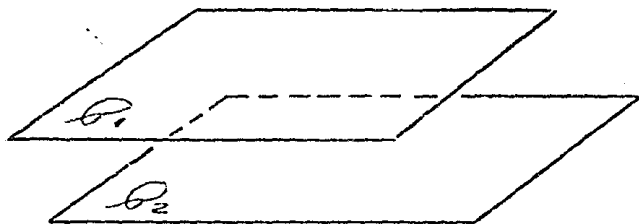


Fig. 54

(3) Los planos son iguales y cada punto de un plano es también del otro.

A continuación daremos un criterio para saber cuando dos planos se intersectan. Por la Fig. 54 se observa que dos planos son paralelos si sus vectores normales lo son.

**DEFINICION 15** Dos planos con ecuaciones:

$$n_1 \cdot (X - X_0) = 0$$

$$n_2 \cdot (X - Y_0) = 0$$

son paralelos si, y solo si,  $n_1 \times n_2 = 0$

**EJEMPLO 29** Probaremos que los planos del problema de la dieta:

$$\begin{aligned} 100x + 400y + 300z &= 6000 \\ 200x + 100y + 500z &= 2000 \end{aligned}$$

no son paralelos y por lo tanto se intersecan en una recta.

Los vectores normales de dichos planos son:  $n_1 = (100, 400, 300)$  y  $n_2 = (200, 100, 500)$ , y como  $n_1 \times n_2 \neq 0$  entonces los planos no son paralelos. Para encontrar la recta en que se interseccionan hacemos  $z = t$  y resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} 100x + 400y &= 6000 - 300t \\ 200x + 100y &= 2000 - 500t \end{aligned}$$

Al resolver dicho sistema, obtendremos ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha t \\ y &= y_0 + \beta t \\ z &= 0 + 1t \end{aligned}$$

Podemos hablar de inter-

sección de tres planos si además de pedir que el consumo de carbohidratos y proteínas sea de 6000 y 2000, pedimos que el consumo de grasas sea de 3000. Lo que acabamos de decir se puede escribir como:

$$\begin{aligned} 100x + 400y + 300z &= 6000 \\ 200x + 100y + 500z &= 2000 \\ 300x + 100y + 200z &= 3000 \end{aligned}$$

### EJERCICIOS.

1.- Dibujar el tetraedro T que aparece en el problema 4 de la página 134.

2.- Suponiendo que no se permite consumir cantidades negativas de alimentos. ¿Hay dietas de las cuales se pueda obtener lo siguiente?

A: 1000 carbohidratos 100 000 proteínas 5000 grasas

B: 80 000 carbohidratos 500 proteínas 10 000 grasas

## 1.9. SUPERFICIES DE REVOLUCION.

Para iniciar este tema consideremos la forma geométrica que tienen algunos frutos como melón, sandía, uva y aguacate. Todos estos frutos tienen dos características sobresalientes:

(\*) Poseen un eje imaginario con respecto al cual el fruto es simétrico.

(\*\*) Si efectuamos cortes del fruto tomando el cuchillo perpendicular al eje de simetría, obtendremos rebanadas de forma circular (Fig. 55)

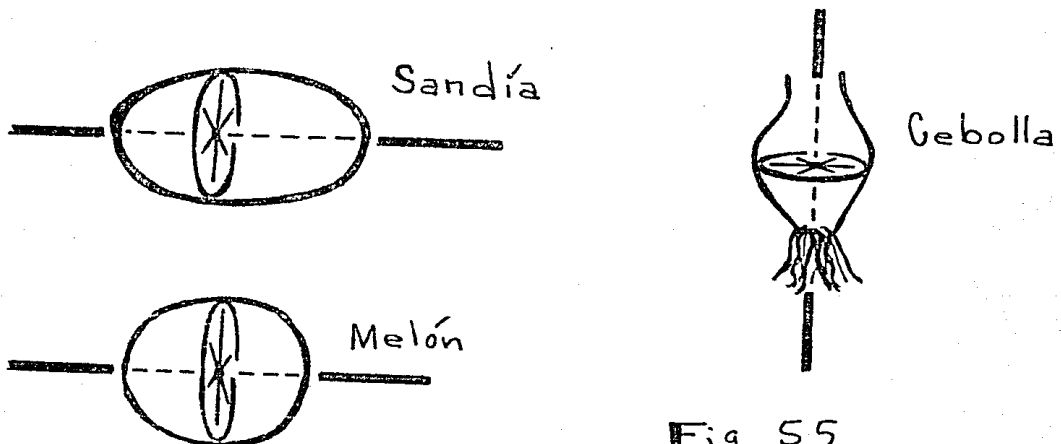


Fig. 55





Fig. 55

Los frutos que poseen las características (\*) y (\*\*\*) son ejemplos de lo que es una superficie de revolución.

**DEFINICION 16** Sea  $L$  una recta y  $S$  una curva, contenidas ambas en un mismo plano. La superficie de revolución generada por la curva  $S$  con respecto al eje  $L$ , es la superficie que se obtiene de hacer girar cada punto de la curva  $S$  alrededor de la recta  $L$ .

### EJERCICIO

1.- ¿Qué forma tiene la curva

qué genera a la manzana?

**EJEMPLO 30** Algunos frutos, como el plátano, tienen como eje de rotación a una curva y no a una recta (Fig. 56)

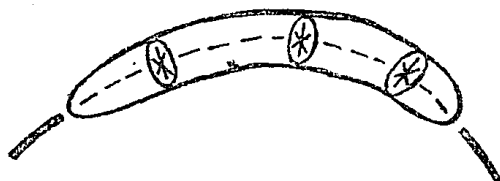


Fig. 56

Aquí únicamente consideraremos superficies de revolución cuyo eje sea una recta.

**EJEMPLO 31** El melón se obtiene de rotar una circunferencia con centro en  $(0,0,0)$  y radio  $R$ , y tomando como eje de rotación a cualquiera de los ejes de coordenadas. La Fig. 57 muestra este hecho

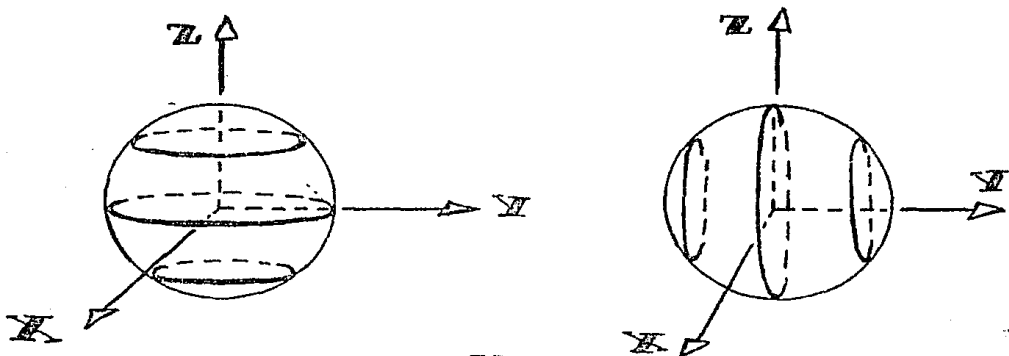


Fig. 57.

A la superficie de revolución generada por una circunferencia y la cual tiene como eje de rotación a un diámetro se le llama esfera. La condición de que el eje de rotación sea un diámetro es necesaria, el siguiente ejemplo muestra este hecho.

**EJEMPLO 32** Si se rota, con respecto al eje  $z$ , la circunferencia:

$$(y - \alpha)^2 + z^2 = R^2$$

con  $|\alpha| > R$ , obtendremos una superficie llamada "toro", la cual es parecida a una "dona" (Fig. 58)

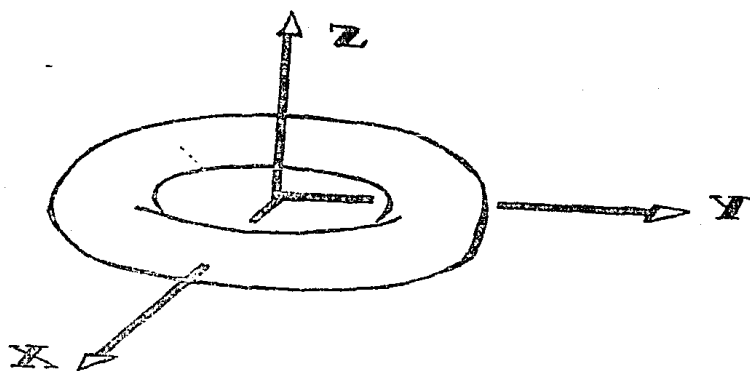


Fig. 58

Nuestro trabajo a realizar en esta sección será la de estudiar las superficies de revolución.

Consideremos la superficie que aparece en el ejemplo del fruto pera. Como tal superficie es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , podemos escribir:

$$\text{PERA} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \text{ está sobre la} \right. \\ \left. \text{superficie de la pera} \right\}$$

Quisieramos expresar el conjunto **PERA** por medio de ecuaciones matemáticas. Para facilitar este trabajo supondremos que el eje de rotación es uno de los ejes de coordenadas.

Supongamos que la curva que genera a la perla es de la forma

$$f(y, z) = 0$$

y que esta curva la hacemos girar con respecto al eje  $Z$  (Fig. 59)

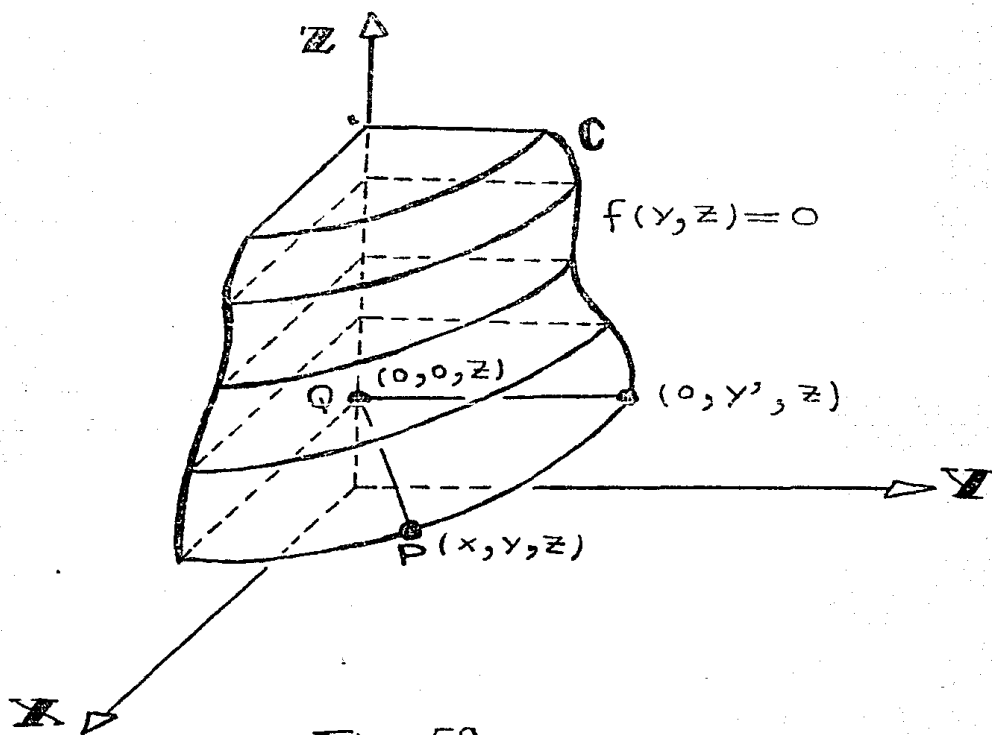


Fig. 59

De la Fig. 59 se observa que un punto  $(x, y, z)$  pertenece a la super-

ficie de revolución si, y sólo si, este punto es generado por un punto de la curva  $C$ , en este caso el punto que lo genera es  $(0, y^0, z)$ . Pero es claro que  $y^0$  es radio de la circunferencia  $S$ , cuyo radio es

$$d(P, \varphi) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

entonces  $y^0 = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Y como  $f(y^0, z) = 0$  concluimos que:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

representa la ecuación de la superficie de revolución.

**RESULTADO 12** Si se rota la curva  $f(y, z) = 0$  con respecto al eje  $Z$ , entonces la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene es:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

**EJEMPLO 33** ¿Cuál es la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene cuando giramos la circunferencia:

$$(y-\alpha)^2 + z^2 = R^2, \quad |\alpha| > R$$

con respecto al eje  $Z$ ?

Aplicando el resultado 12 con

$$f(y,z) = (y-\alpha)^2 + z^2 - R^2 = 0$$

tenemos que la ecuación de la superficie de revolución es:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - \alpha)^2 + z^2 = R^2$$

o también

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha\sqrt{x^2 + y^2} = R^2 - \alpha^2$$

Como sabemos la superficie de revolución que se ha obtenido se llama toro.

**EJEMPLO 34** Encontrar la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al girar la recta

$$z = my$$

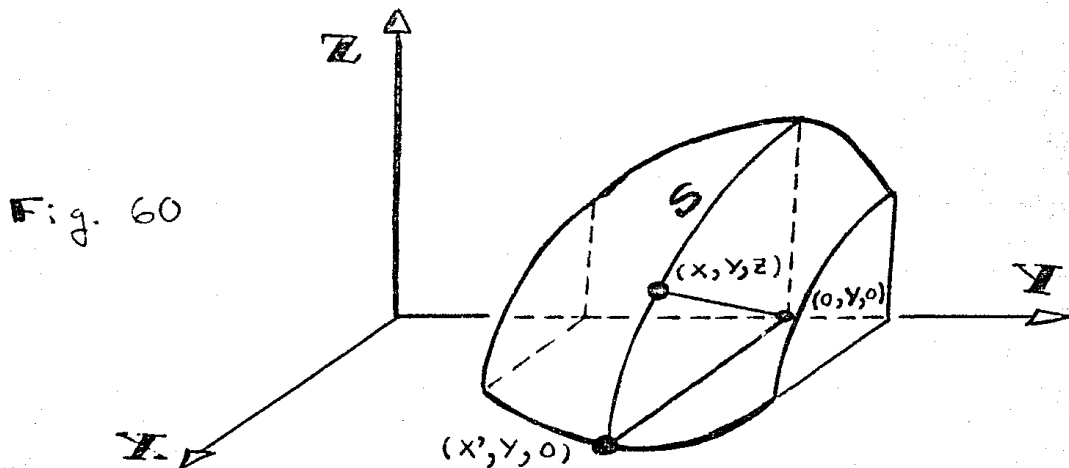
con respecto al eje  $Z$

**RESULTADO 13** Si se rota la curva  $f(x, y) = 0$  con respecto al eje  $Y$ , entonces la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene es:

$$f(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$$

Convencimiento.

Un punto  $(x, y, z)$  pertenece a la superficie de revolución si, y solo si, el punto es generado por un punto de la curva  $C$  (Fig 60), en este caso es  $(x', y, 0)$ . Pero como  $x'$  es radio de





la circunferencia  $S$  cuyo radio es  $\sqrt{x^2+z^2}$   
 entonces  $x^2 = \sqrt{x^2+z^2}$ , y como  $f(x,y) = 0$   
 entonces  $f(\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0$

**EJEMPLO 35** Obtener la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al girar la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con respecto al eje  $Y$ .

Aplicando el resultado 13 tomando

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

tenemos que la ecuación de la superficie es:

$$\left[ \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{a} \right]^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

o también

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

A la superficie del ejemplo 35 se le llama ELIPSOIDE DE REVOLUCION y su gráfica se muestra en la Fig. 61

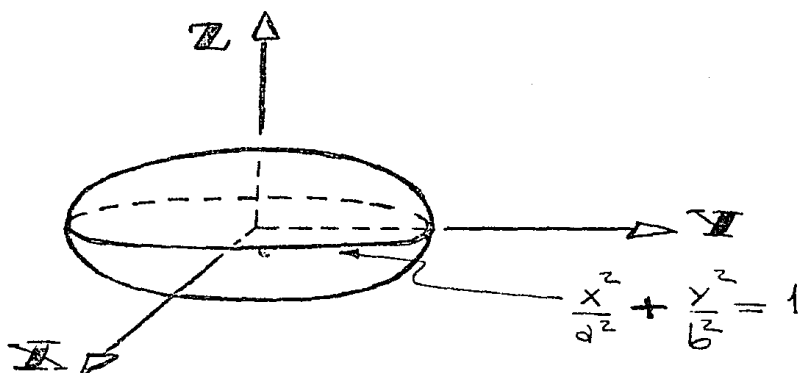


Fig. 61

En una forma parecida a como probamos los resultados 34 y 35, se pueden probar los resultados de la tabla siguiente:

SI LA CURVA GENERATRIZ ES:	Y LA ROTAMOS CON RESPECTO AL EJE	ENTONCES LA ECUACION DE LA SUPERFICIE ES:
$f(x, y) = 0$	<b>X</b>	$f(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
$f(x, y) = 0$	<b>Y</b>	$f(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$
$f(x, z) = 0$	<b>X</b>	$f(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
$f(x, z) = 0$	<b>Z</b>	$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$f(y, z) = 0$	<b>Y</b>	$f(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$
$f(y, z) = 0$	<b>Z</b>	$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

## EJERCICIOS.

1.- Dar ecuaciones para las superficies de revolución que se obtienen al girar la curva dada sobre el eje dado:

- (a)  $z = my$  ; eje  $Z$   
 (b)  $y = k$  ; eje  $X$   
 (c)  $z = y^2$  ; eje  $Z$   
 (d)  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$  ; ejes  $X$  y  $Y$

2.- Dar ejemplos de círculos en el plano  $YZ$  que al girarlos con respecto al eje  $Z$  den cuatro figuras diferentes

3.- Obtener la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva  $z = 2 + 5 \sin y$  con respecto al eje  $Y$ .

Para terminar con esta sección analizaremos cuando una ecuación del tipo:

$$F(x, y, z) = 0$$

representa una superficie de revolución.

Si el lector recuerda, nosotros nos dimos cuenta que algunos frutos eran superficies de revolución, porque al hacer cortes perpendiculares al eje de simetría, obteníamos circunferencias.

En el caso de que tengamos una superficie dada matemáticamente como:

$$F(x, y, z) = 0$$

entonces para saber si es superficie de revolución, tendremos que hacer cortes perpendiculares a los ejes de coordenadas, para así ver en que casos obtenemos circunferencias.

Ahora bien, cortar a la superficie  $F(x, y, z) = 0$  perpendicularmente a los ejes de coordenadas significa intersectar a la superficie con planos de la forma:

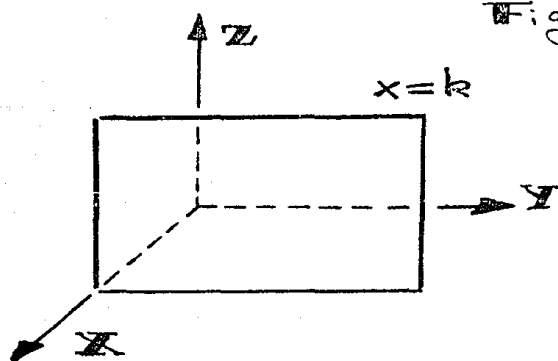
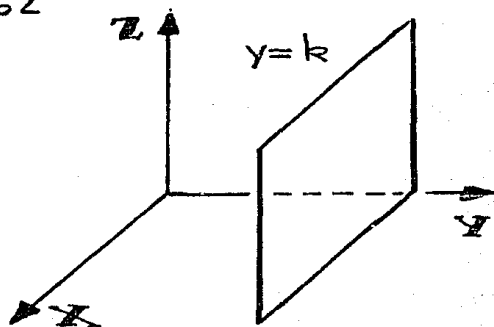


Fig. 62



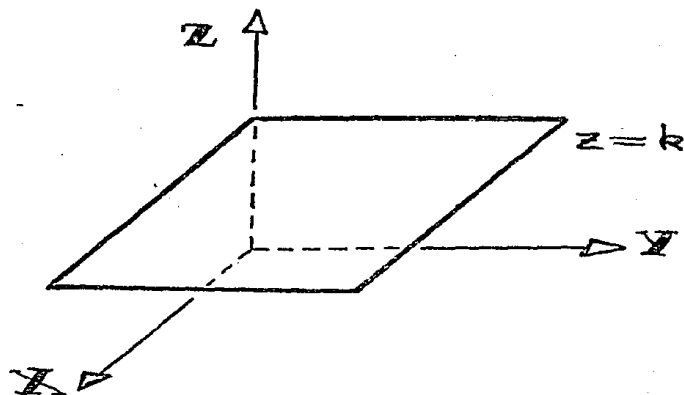


Fig. 62

Si el plano de corte es de la forma  $x = k$ , entonces estaremos cortando a la superficie perpendicularmente al eje  $X$  y una distancia  $|k|$  del origen (Fig. 63) Lo mismo se cumple para los otros tipos de planos.

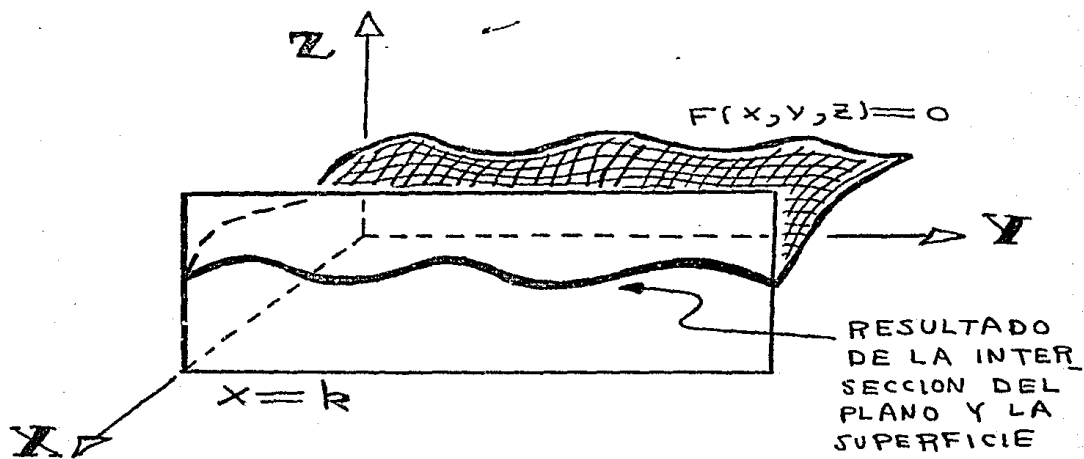


Fig. 63

Por otro lado para encontrar la intersección de la superficie con el plano  $x=k$ , basta con sustituir  $x$  por  $k$  en la ecuación  $F(x, y, z) = 0$

**EJEMPLO 36** Mostrar que la superficie

$$9x^2 - 16y^2 - 16z^2 = 144$$

es una superficie de revolución.

Al hacer  $x=k$  obtenemos la ecuación

$$y^2 + z^2 = \frac{9k^2 - 144}{16}$$

Cuando  $9k^2 - 144/16 \geq 0$ , obtendremos circunferencias con centro en  $(0, 0)$  y radio

$$R = \frac{\sqrt{9k^2 - 144}}{4}$$

Podemos concluir que la superficie:  $F(x, y, z) = 9x^2 - 16y^2 - 16z^2 - 144$  es una superficie de revolución, con eje de rotación el eje  $X$ . Una curva

que genera a la superficie se obtiene de intersectar a la superficie con un plano que contenga al eje de rotación.

Para este ejemplo un plano que contenga al eje  $X$  es el plano  $XY$ , cuya ecuación es  $z=0$ . Sustituyendo el valor  $z=0$  en la ecuación de la superficie, obtendremos la ecuación de la curva generatriz, es decir  $9x^2 - 16y^2 = 144$ .

## EJERCICIOS.

1.- Decir si las siguientes ecuaciones representan superficies de revolución, y si es así dibujarlas.

(a)  $x^2 + y^2 - z = 0$       (c)  $xyz = 0$

(b)  $x(y^2 + z^2) = 8$       (d)  $(x^2 + y^2)(x^2 + z^2) = 0$

2.- ¿Puede un plano ser una superficie de revolución?

3.- Dar un ejemplo de una superficie de revolución  $\mathcal{S}$ , tal que los tres ejes son ejes de rotación, pero que  $\mathcal{S}$  no sea una esfera.

4.- d Es cierto que si una superficie  $\mathcal{S}$  es simétrica respecto al eje  $Z$ , entonces  $\mathcal{S}$  es una superficie de revolución?

## 1.10. MATRICES

Para motivar este tema volveremos a considerar los ejemplos que se dieron en la sección uno de este capítulo.

Si el lector recuerda, expresábamos la situación de especies animales en un ecosistema, una dieta o una reacción química mediante ternas ordenadas. Ahora bien, es claro que por medio de ternas ordenadas no podemos más que contemplar a tres especies animales, a tres alimentos o ver la reacción química en un solo tiempo.

Nuestro trabajo a realizar en esta sección, será la de dar un concepto matemático por medio del



cual se puedan contemplar en una forma más real los fenómenos ya mencionados.

Consideremos el ejemplo de un ecosistema. Los organismos vivos que forman parte del ecosistema, se pueden dividir en tres categorías:

$E_1$	está formada por los organismos	vegetales
$E_2$	" " " " "	hervívoros
$E_3$	" " " " "	carneívoros

Supondremos además que  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  son conjuntos dados por:

$$E_1 = \{ V_1, \dots, V_n \}$$

$$E_2 = \{ H_1, \dots, H_n \}$$

$$E_3 = \{ C_1, \dots, C_n \}$$

donde  $V_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ , indica la  $i$ -ésima especie vegetal y el número que hay de ella. De la misma manera se entienden los conjuntos  $E_2$  y  $E_3$ .

NOTA: Para las especies vegetales la medición de ellas se puede hacer por el área que ocupan (por ejemplo el pasto) ó por el número de ellos (por ejemplo los árboles)

Para poder describir todas las especies  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$ , podemos usar un arreglo del siguiente tipo:

$$E = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_{n-1} & V_n \\ H_1 & H_2 & \dots & H_{n-1} & H_n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_{n-1} & C_n \end{pmatrix}$$

**EJEMPLO 37** El número de pinos, cedros, abetos, conejos, ardillas, venados, coyotes, lobos y pumas que hay en un ecosistema  $E$  viene dado por el siguiente arreglo:

$$E = \begin{pmatrix} 500 \text{ pinos} & 600 \text{ cedros} & 700 \text{ abetos} \\ 300 \text{ conejos} & 200 \text{ ardillas} & 700 \text{ venados} \\ 100 \text{ coyotes} & 200 \text{ lobos} & 400 \text{ pumas} \end{pmatrix}$$

Cabe observar que esta forma de arreglar las especies de un ecosistema nos lleva a hablar de renglones y columnas. En el ejemplo 37 se observa que el segundo renglón es:

$$R_2 = (300 \quad 200 \quad 700)$$

mientras que la tercera columna es:

$$C_3 = \begin{pmatrix} 700 \\ 700 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Continuando con el mismo ejemplo se observa que  $E$  consta de tres renglones y tres columnas, para indicar este hecho se dice que la matriz es de orden tres por tres.

También se observa que cada elemento del arreglo  $E$  se puede escribir o describir en términos del renglón y columna en que se encuentra. Por ejemplo, el elemento que se encuentra en el segundo renglón y tercera columna es 700. Teniendo en cuenta la discusión ante-

rior, podemos escribir el arreglo  $E$  como sigue:

$$E = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

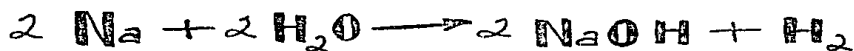
donde el primer sub-índice indica el renglón en que se encuentra el elemento y el segundo sub-índice indica la columna. Así por ejemplo  $\alpha_{32}$  se encuentra en el tercer renglón y segunda columna.

### EJEMPLO 38

Supongamos que una dieta esta formada por pescado, pan, leche, huevos y manzanas. Como sabemos estos alimentos tienen un contenido en carbohidratos, proteínas y grasas. El siguiente arreglo indica el contenido de estas tres sustancias por cada alimento

	PESCADO	PAN	LECHE	HUEVOS	MANZANAS
CARBOHIDRATOS	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$	$\alpha_{14}$	$\alpha_{15}$
PROTEINAS	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{23}$	$\alpha_{24}$	$\alpha_{25}$
GRASAS	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$	$\alpha_{34}$	$\alpha_{35}$

**EJEMPLO 39** Consideremos la reacción química:



podemos formar un arreglo como sigue:

$$RQ = \begin{array}{cc} \text{NaOH} & \text{H} \\ \left( \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} \end{array} \right) & \begin{array}{l} \text{TIEMPO 1} \\ \text{TIEMPO 2} \\ \text{TIEMPO 3} \\ \text{TIEMPO 4} \end{array} \end{array}$$

en donde la primera columna indica las cantidades de hidróxido de sodio producido en los tiempos indicados. De la misma manera la segunda columna indica las cantidades de hidrógeno producido en los tiempos dados.

**EJEMPLO 40** Suponga que deseamos conocer la cantidad de fruto que se aprovecha en las siguientes frutas: plátano, mango, mandarina y tuna. Para

hacer esto medimos la cantidad de cáscara que contiene el fruto, la cantidad de semillas y la cantidad de fruto si aprovechable. Podemos registrar los datos mencionados por medio del siguiente arreglo:

	PLATANO	MANZO	MANDARINA	TUNA
SEMILLA	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$
CASCARA	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$
FRUTO	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$

Todos los ejemplos que se han dado son casos particulares de un concepto matemático muy importante.

**DEFINICION 17** Una matriz de orden  $n \times m$  es un arreglo del tipo:

$$a_m = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,m-1} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,m-1} & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,m-1} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

donde  $n$  indica el número de renglones y  $m$  el de columnas. En algunas ocasiones la matriz  $a_m$  se escribe en forma abreviada como sigue:

$$a_m = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

#### EJEMPLO 41

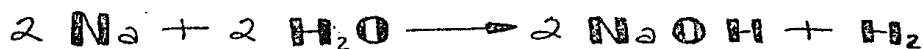
Consideremos un ecosistema que no tenga individuos de las especies pinos, cedros, abetos, conejos, ardillas, venados, coyotes, lobos y pumas. La situación del ecosistema en cuanto a estas especies viene dada por la matriz:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La cual se va a llamar la matriz cero.

Consideremos el ejemplo 39 y supongamos que tenemos dos reaccio-

nes con las mismas condiciones, es decir, con los mismos reaccionantes y productos:



Si pongamos además que el estado de las dos reacciones en cuatro tiempos viene dado por las matrices:

$$\mathcal{R}_1 = \begin{array}{c} \text{NaOH} \quad \text{H}_2 \\ \left( \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} \end{array} \right) \end{array}$$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{array}{c} \text{NaOH} \quad \text{H}_2 \\ \left( \begin{array}{cc} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \\ \beta_{41} & \beta_{42} \end{array} \right) \end{array}$$

¿Cuáles serán las cantidades de los compuestos **NaOH** y **H<sub>2</sub>** que se producen conjuntamente en las dos reacciones a cada tiempo? Claramente la respuesta viene dada por:

$$\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \begin{array}{c} \text{NaOH} \quad \text{H}_2 \\ \left( \begin{array}{cc} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} \\ \alpha_{31} + \beta_{31} & \alpha_{32} + \beta_{32} \\ \alpha_{41} + \beta_{41} & \alpha_{42} + \beta_{42} \end{array} \right) \end{array}$$



De la misma manera podemos considerar dos ecosistemas  $E_1$  y  $E_2$  cuyo estado en cuanto a algunas especies viene dado por:

$$E_1 = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} V_1' & V_2' & V_3' \\ H_1' & H_2' & H_3' \\ C_1' & C_2' & C_3' \end{pmatrix}$$

¿Cuál será la cantidad que hay de cada especie si se juntan ambos ecosistemas? La respuesta viene dada por la matriz:

$$E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} V_1 + V_1' & V_2 + V_2' & V_3 + V_3' \\ H_1 + H_1' & H_2 + H_2' & H_3 + H_3' \\ C_1 + C_1' & C_2 + C_2' & C_3 + C_3' \end{pmatrix}$$

Los ejemplos que hemos dado nos motivan a definir la suma de matrices.

**DEFINICION 18** Sean  $A = (\alpha_{ij})$  y  $B = (\beta_{ij})$  matrices con el mismo orden. Se define la suma de  $A$  y  $B$  como la matriz:

$$A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$$

## EJERCICIOS.

1.- Se le pide para el lector interpretar y probar las siguientes igualdades:

$$(a) \quad A + B = B + A$$

$$(b) \quad (A+B) + C = A + (B+C)$$

$$(c) \quad A + \mathbf{0} = A$$

## EJEMPLO 42

Supongamos que la dieta de una persona está dada por la matriz:

$$d = \begin{array}{cccc|l} \text{PESCADO} & \text{PAN} & \text{LECHE} & \text{POLLO} & \\ \hline \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & C \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & P \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & G \end{array}$$

en donde las columnas indican el alimento y los renglones la cantidad de carbohidratos, proteínas y grasas que contienen los alimentos. ¿Qué pasa si la persona consume el triple de cada alimento, es decir, si triplica su dieta?

¿cómo se ven afectadas las cantidades de carbohidratos, proteínas y grasas? Pensando un poco las cosas, nos podemos dar cuenta que la nueva dieta  $3a$  es dada por la matriz:

$$3a = \begin{pmatrix} 3\alpha_{11} & 3\alpha_{12} & 3\alpha_{13} & 3\alpha_{14} \\ 3\alpha_{21} & 3\alpha_{22} & 3\alpha_{23} & 3\alpha_{24} \\ 3\alpha_{31} & 3\alpha_{32} & 3\alpha_{33} & 3\alpha_{34} \end{pmatrix}$$

Es decir al triplicar el consumo de cada alimento, se provoca una triplicación en el consumo de carbohidratos, proteínas y grasas.

La siguiente definición está motivada por el ejemplo.

**DEFINICION 19** Sea  $A = (\alpha_{ij})$  una matriz y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se define el producto del número real  $\lambda$  por la matriz  $A$  como:

$$\lambda A = (\lambda \alpha_{ij})$$

## EJERCICIOS

1.- Comprobar e interpretar, de acuerdo al ejemplo 42, las siguientes igualdades:

$$(a) \quad 0A = \mathbf{0}$$

$$(b) \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$(c) \quad \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(d) \quad A + (-1)A = \mathbf{0}$$

$$(e) \quad A + A = 2A, \quad A + A + A = 3A$$

$$\underbrace{A + A + A + \dots + A + A}_{n\text{-sumandos}} = nA$$

## EJEMPLO 43

La situación en que se encuentran varias especies en un ecosistema, está dado por la matriz

$$E = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Después de un año se observó que hubo una pérdida en cada especie, la matriz de pérdidas es:

$$a = \begin{pmatrix} -V_1' & -V_2' & -V_3' \\ -H_1' & -H_2' & -H_3' \\ -C_1' & -C_2' & -C_3' \end{pmatrix}$$

Si quisieramos saber cual es la cantidad de organismos vivos de cada especie despues del dño, debemos considerar la matriz:

$$\begin{pmatrix} V_1 - V_1' & V_2 - V_2' & V_3 - V_3' \\ H_1 - H_1' & H_2 - H_2' & H_3 - H_3' \\ C_1 - C_1' & C_2 - C_2' & C_3 - C_3' \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} V_1' & V_2' & V_3' \\ H_1' & H_2' & H_3' \\ C_1' & C_2' & C_3' \end{pmatrix}$$

La matriz  $E + (-1)a$  nos indica el hecho de que a  $E$  le estamos restando la matriz  $a$ . La siguiente definición es para introducir la resta de matrices.

**DEFINICION 20** Sean  $A$  y  $B$  matrices del mismo orden. La diferencia  $A-B$  se define como:

$$A-B = A + (-1)B$$

**EJEMPLO 44** Consideraremos a continuación una ecuación matricial.

Supongamos que a principios de año la situación en un ecosistema está dada por la matriz desconocida:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$$

Después de un año cada especie se redujo tanto como lo indica la matriz de mortandad:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}$$

Si al final del año la situación del

ecosistema es dado por la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el valor de la matriz  $X$ , es decir, cuál es la cantidad de organismos vivos que había a principios de año?

De acuerdo al enunciado del problema, debemos considerar la ecuación:

$$X - A = B$$

para resolver tal ecuación sumamos  $A$  en cada miembro de la ecuación y usamos el hecho de que  $A + (-1)A = 0$

$$X - A = B \Leftrightarrow (X - A) + A = B + A$$

lo cual implica que  $X = B + A$

Pasaremos a ver la última operación entre matrices, esta es la multiplicación.

Supongamos que tenemos tres dietas  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  formadas con pollo, pescado, pan y leche. Las cantidades, en gramos, que hay de estos tres alimentos en cada dieta se da por medio de la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{POLLO} \\ \text{PESCADO} \\ \text{PAN} \\ \text{LECHE} \end{matrix}$$

Además el contenido de carbohidratos, proteínas y grasas que contiene cada alimento por gramo, viene dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{C} \\ \text{P} \\ \text{G} \end{matrix}$$

¿Cuáles serán las cantidades de carbohidratos, proteínas y grasas que se consumen



en cada dieta?

En la dieta  $d_1$  se consumen  $\alpha_{11}$  gramos de pollo y como cada gramo de pollo proporciona  $\beta_{11}$  carbohidratos, la dieta  $d_1$  recibe del pollo una cantidad  $\alpha_{11} \beta_{11}$  de carbohidratos. Por la misma razón, la dieta  $d_1$  recibe del pescado  $\alpha_{21} \beta_{12}$  carbohidratos; del pan recibe  $\alpha_{31} \beta_{13}$  carbohidratos y de la leche recibe  $\alpha_{41} \beta_{14}$  carbohidratos. Entonces en total, en la dieta  $d_1$  hay

$$\beta_{11} \alpha_{11} + \beta_{12} \alpha_{21} + \beta_{13} \alpha_{31} + \beta_{14} \alpha_{41}$$

carbohidratos. Razonando en forma similar se obtiene que la cantidad de carbohidratos consumidos en la dieta  $d_2$  es:

$$C_2: \beta_{11} \alpha_{12} + \beta_{12} \alpha_{22} + \beta_{13} \alpha_{32} + \beta_{14} \alpha_{42}$$

Finalmente la cantidad de carbohidratos consumidos en  $d_3$  es:

$$C_3: \beta_{11} \alpha_{13} + \beta_{12} \alpha_{23} + \beta_{13} \alpha_{33} + \beta_{14} \alpha_{43}$$

Cabe señalar que las cantidades  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  se pueden obtener en forma mecánica estudiando el siguiente procedimiento:

disponemos las matrices **A** y **B** como sigue:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{pmatrix}$$

Para obtener  $C_1$ , multiplicamos escalarmente el primer renglón de **A** por la primera columna de **B**

$$\begin{aligned} C_1 &= (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}) \bullet (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{41}) \\ &= \beta_{11} \alpha_{11} + \beta_{12} \alpha_{21} + \beta_{13} \alpha_{31} + \beta_{14} \alpha_{41} \end{aligned}$$

Para obtener  $C_2$  multiplicamos escalarmente el primer renglón de **A** por la segunda columna de **B**

$$C_2 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}) \bullet (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}, \alpha_{42})$$

Para obtener  $C_3$  multiplicamos escalarmente el primer renglón de **A** por la tercera columna de **B**.

La razón de haber procedido así se entiende pues el primer renglón de **A** nos da el contenido de carbohidratos de cada alimento, mientras que cada columna de **B** nos indica las cantidades consumidas de cada alimento por cada dieta.

Para ir registrando las cantidades  $C_1, C_2$  y  $C_3$  y las que se vayan obteniendo para las proteínas y grasas, se hace la siguiente construcción:

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{pmatrix}$$

donde  $C_i$  indica la cantidad de carbohidratos consumidos en la  $i$ -ésima dieta,  $P_i$  indica la cantidad de proteínas consumidas en la  $i$ -ésima dieta y  $G_i$  la cantidad de grasas consumidas en la  $i$ -ésima dieta.

Para volver la explicación un poco más agil, denotaremos por  $A_1, A_2$  y  $A_3$  los renglones de la matriz **A** y por

$A^1, A^2, A^3$  las columnas de la matriz  $A$ . Esta notación se usará para cualquier otra matriz.

Para obtener las cantidades de proteínas consumidas en cada dieta, es decir, para obtener  $P_1, P_2$  y  $P_3$  hacemos lo siguiente:

$$P_1 = A_2 \circ B^1, \quad P_2 = A_2 \circ B^2, \quad P_3 = A_2 \circ B^3$$

De la misma manera la cantidad de grasas  $G_1, G_2$  y  $G_3$  se obtienen como sigue:

$$G_1 = A_3 \circ B^1, \quad G_2 = A_3 \circ B^2, \quad G_3 = A_3 \circ B^3$$

Con base en las observaciones anteriores podemos escribir nuestro resultado como:

$$\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \end{pmatrix} \begin{matrix} B^1 & B^2 & B^3 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{matrix} = \begin{pmatrix} A_1 B^1 & A_1 B^2 & A_1 B^3 \\ A_2 B^1 & A_2 B^2 & A_2 B^3 \\ A_3 B^1 & A_3 B^2 & A_3 B^3 \end{pmatrix}$$

La fórmula anterior es nuestra fuente de inspiración para definir el producto de matrices. Cabe observar que el producto de  $A$  y  $B$  se puede hacer sólo si el número de columnas de  $A$  (que no es otra cosa que el número de componentes de los  $A_i$ ) es igual al número de renglones de  $B$  (que no es otra cosa que el número de componentes de los  $B_j$ ), pues si no fuera así no podríamos realizar los productos escalares  $A_i \cdot B_j$ .

Antes de dar la definición de producto de matrices, daremos un ejemplo más.

Supongamos que tenemos dos ecosistemas y supongamos también que la siguiente matriz nos da la cantidad de hembras de cada especie indicada:

	LEOPARDOS	HIPOPOTAMOS	RINOCERONTES	
$A =$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$	$E_1$
	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{23}$	$E_2$

Ahora supongamos que la matriz  $B$  nos indica la cantidad de críos que puede te

ner una hembra durante un período de cinco años:

$$B = \begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ n_{31} \end{pmatrix}$$

nº DE CRIOS EN UN PERIODO DE CINCO AÑOS POR CADA HEMBRA LEOPARDO.

nº DE CRIOS EN UN PERIODO DE CINCO AÑOS POR CADA HEMBRA HIPOPO TAMO.

nº DE CRIOS EN UN PERIODO DE CINCO AÑOS POR CADA HEMBRA RINOCERONTE.

Para este ejemplo el producto  $AB$  nos da la cantidad de críos que hay en los dos ecosistemas después de cinco años.

$$A_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} \begin{matrix} B' \\ \begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ n_{31} \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} A_1 B' \\ A_2 B' \end{pmatrix} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix}$$

ahora damos la definición de producto de matrices

**DEFINICION 21** Sean  $A$  y  $B$  matrices de orden  $n \times p$  y  $p \times m$  respectivamente. Si  $A$  y  $B$  tienen la forma:

$$\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{matrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{matrix} B^1 & B^2 & \cdots & B^m \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{p1} & \beta_{p2} & \cdots & \beta_{pm} \end{pmatrix}$$

entonces el producto de  $A$  y  $B$  se define como:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B^1 & A_1 B^2 & \cdots & A_1 B^m \\ A_2 B^1 & A_2 B^2 & \cdots & A_2 B^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_n B^1 & A_n B^2 & \cdots & A_n B^m \end{pmatrix}$$

#### EJEMPLO 45

Supongamos que el contenido en jugo, semillas y gábaso y cáscara en los frutos manzana, naranja y limón vienen dados por la matriz:

	MANZANA	NARANJA	LIMON	
$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$				JUGO
				SEMILLAS Y GABASO
				CASCARA

donde las cantidades son dadas por unidad de fruto. ¿Cuánto hay que tomar de manzanas, naranjas y limones para que la cantidad total de jugo producido sea  $\beta_1$ , la cantidad total de semillas y gabaso sea  $\beta_2$  y la cantidad total de cáscara sea  $\beta_3$ ?

Si hacemos

$x =$  cantidad de manzanas necesarias  
 $y =$  " " " naranjas " "  
 $z =$  " " " limones " "

entonces se observa que la cantidad de jugo producido por todos estos frutos es:

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z$$

y como tal cantidad tiene que ser igual a  $\beta_1$ , entonces resulta la ecuación:

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z = \beta_1$$

De la misma manera las cantidades de semilla - gabaso y cáscara que satisfacen los requerimientos son:

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z = \beta_2$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z = \beta_3$$



Para resolver nuestro problema es necesario resolver el sistema de ecuaciones:

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z = \beta_1$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z = \beta_2$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z = \beta_3$$

Tal sistema de ecuaciones es equivalente al siguiente producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

y si hacemos:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

entonces el sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$AX = B$$

## EJERCICIOS.

1.- Comprobar las siguientes fórmulas:

(a) La multiplicación de matrices no es conmutativa.

(b)  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

(c)  $A \cdot I = A$  para  $A$  una matriz de orden  $n \times n$  e  $I$  es la matriz

$$I = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

con

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

2.- Dar dos matrices  $A$  y  $B$  de  $3 \times 3$  tales que  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$  y  $AB = 0$

3.- Supongamos que después de observar como crece la población en una comunidad, se llega a la conclusión de que si en un determinado momento hay  $x$  hombres y  $y$  mujeres, entonces al año siguiente habrá (aproximadamente)

$$\begin{array}{ll} (.8)x + (.75)y & \text{hombres} \\ (.7)x + (.90)y & \text{mujeres} \end{array} \quad y$$

En notación matricial se podría escribir

$$v_1 = Av_0$$

donde  $v_0 = (x \ y)$  denota el número de hombres y mujeres que hay en el tiempo  $t_0$ .

$$A = \begin{pmatrix} .8 & .75 \\ .7 & .90 \end{pmatrix}$$

y  $v_1$  indica cuántos hombres y mujeres habrá un año después del tiempo  $t_0$ .

(a) Si en el tiempo  $t_0$  hay 1000 hombres y 1100 mujeres, ¿cuántos hombres y mujeres habrá dentro de 5 años?

(b) Si en el tiempo  $t_0$  hay  $x$  hombres y  $y$  mujeres, ¿cuántos hombres y mujeres habrá dentro de 5 años?

(c) Usando (b) hallar una forma rápida de saber cuántos hombres y mujeres habrá dentro de 10, 20 y 40 años.

(d) Si actualmente hay 25 565 hombres y 26 750 mujeres, ¿cuántas personas había hace dos años?

2

CURVAS.

Comenzamos recordando el concepto de función. Sabemos que una función  $f$  del conjunto  $A$  al conjunto  $B$ , es una regla mediante la cual asignamos a cada elemento de  $A$  un y sólo un elemento de  $B$ . Lo anterior se acostumbra denotar por:

$$f: A \rightarrow B$$

con

$$b = f(a)$$

donde  $b$  es el elemento de  $B$  que se le asigna a el elemento  $a$  de  $A$ .

Cuando se toma  $A \subseteq \mathbb{R}$  y  $B \subseteq \mathbb{R}^3$ , en la discusión anterior, tenemos el tipo de funciones que estudiaremos en este capítulo.

## 2.1. CONCEPTO DE CURVA

Diremos unos ejemplos en los cuales aparecen estas funciones.

**EJEMPLO 1** El cuerpo humano está formado por diferentes órganos, aparatos y sistemas. Cada uno ellos ayuda a mantener vivo al ser humano, asimilando ó desechando aquellas substancias que le son útiles o perjudiciales. Tomemos, por ejemplo, el aparato digestivo. Este aparato se encuentra formado por varias estructuras como:

- Estomago
- Intestino Delgado

El funcionamiento del aparato digestivo tiene que ver con la alimentación del ser vivo. Es claro que los alimentos que se ingieren siguen un proceso a través del estomago e intestino delgado. Durante un cierto lapso de tiempo los alimentos están en el estomago, después gradualmente pasan al intestino delgado.

Es también claro que la cantidad de alimento (masa del alimento) va variando con el tiempo en el estomago e intestino delgado. Para explicar como es el cambio en la masa de los alimentos en el estomago e intestino delgado, definamos dos funciones:

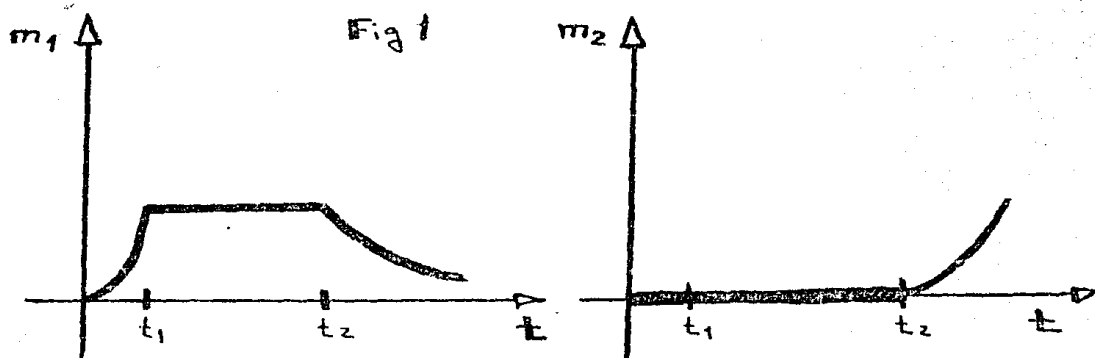
$$m_1, m_2 : \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que:

$m_1(t)$  = Cantidad de alimento en el estomago al tiempo  $t$ .

$m_2(t)$  = Cantidad de alimento en el intestino delgado al tiempo  $t$ .

Unas posibles gráficas para las funciones  $m_1$  y  $m_2$  son dadas en la Fig. 1.





Las gráficas de la Fig. 1 se deben de interpretar como sigue. En el lapso de tiempo  $[0, t_1]$  se ingiere alimento y por ello  $m_1$  tiende a aumentar, mientras que  $m_2$  vale cero. Para el lapso de tiempo  $[t_1, t_2]$  el alimento ingerido permanece en el estomago, para que las masas sólidas de alimento en combinación con los jugos gástricos formen un semifluido homogéneo llamado quimo. Cuando el quimo está formado, este empieza a pasar al intestino delgado y por ello en el lapso de tiempo  $[t_2, t]$   $m_2$  aumenta mientras que  $m_1$  disminuye.

Por otra parte, es claro que las funciones  $m_1$  y  $m_2$  están íntimamente relacionadas. Podemos conjuntarlas definiendo una función  $\nabla: \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$\nabla(t) = (m_1(t), m_2(t))$$

Con esta función podemos estudiar a las funciones  $m_1$  y  $m_2$  simultáneamente. Por ejemplo si  $h > 0$  entonces

$\nabla(t+h) =$  Cantidad de alimento en el estomago e intestino delgado al tiempo  $t+h$

$\nabla(t) =$  Cantidad de alimento en el estomago e intestino delgado al tiempo  $t$

Y de aquí se desprende que:

$v(t+h) - v(t) =$  Incremento o decremento en alimento que hubo en el estomago y intestino delgado en el lapso de tiempo  $h$ .

Podemos ir más lejos y decir que:

$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} =$  Velocidad promedio con que cambio la cantidad de alimento en el estomago e intestino delgado en el lapso de tiempo  $h$

### EJEMPLO 2

Supongamos que se tiene algún alimento, por ejemplo pescado, y tomamos una cantidad  $\#$  de él. El contenido de carbohidratos, proteínas y grasas que contiene el pescado por gramo, viene dado por  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  respectivamente. Hagamos la siguiente pregunta, ¿cuál es la cantidad de carbohidratos, proteínas y grasas consumidas en la cantidad de pescado  $\#$ ?

Si hacemos

$x =$  cantidad de carbohidratos consumidos  
 $y =$  " " proteínas " "  
 $z =$  " " grasas "

entonces se cumple que:

$$x = \alpha t$$

$$y = \beta t$$

$$z = \gamma t$$

Estas ecuaciones se pueden conjuntar en una sola si definimos una función:

$$p: \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

con

$$p(t) = (\alpha t, \beta t, \gamma t)$$

Debe hacer notar que a las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  se les llama funciones componentes.

**EJEMPLO 3** Supongamos que en un ecosistema hay animales como chapulines, sapos y víboras. Como sabemos el número de tales animales cambian o dependen del tiempo. Si denotamos por:

$x(t) =$	número de	chapulines	al tiempo	$t$
$y(t) =$	"	"	sapos	"
$z(t) =$	"	"	víboras	"

entonces podemos contemplar a las tres

cantidades  $x, y$  y  $z$  si definimos una función:

$$\rho: \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

con

$$\rho(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Se deja para el lector interpretar el cociente:

$$\frac{\rho(t+h) - \rho(t)}{h}$$

**EJEMPLO 4** Muchas de las plantas trepadoras (como la enredadera) adoptan formas peculiares al ir trepando.



La forma en que se va enrollan-  
do el follo se puede describir matemáticamente  
por medio del tipo de funciones que este-  
mos viendo.

Sea la función  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de-  
finida por:

$$\sigma(t) = (R \cos 2\pi t, R \sin 2\pi t, t)$$

Como  $x(t) = R \cos 2\pi t$  y  $y(t) = R \sin 2\pi t$   
entonces

$$x^2 + y^2 = R^2$$

lo cual indica que las dos primeras compo-  
nentes de  $\sigma$  están siempre sobre una cir-  
cunferencia con centro en  $(0,0)$  y radio  $R$ .  
Además lo que hay que levantar cada pun-  
to  $(x(t), y(t))$  viene dado por la terce-  
ra función componente  $z(t) = t$ . Es claro  
que el punto  $(x(t), y(t))$  da una vuelta  
a la circunferencia cuando  $0 \leq t \leq 1$  (Fig. 3)

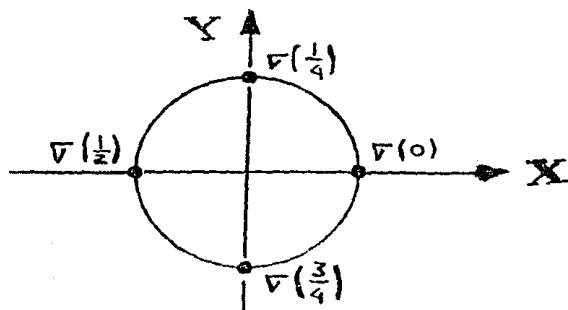


Fig. 3

y da una segunda vuelta cuando  $1 \leq t \leq 2$ . Puede uno convencerse de esto si observamos que  $(x(0), y(0)) = (x(1), y(1)) = (x(2), y(2)) = \dots$ .  
 La Fig. 4 muestra a las ternas  $(x(t), y(t), z(t))$  conforme  $t$  va variando.

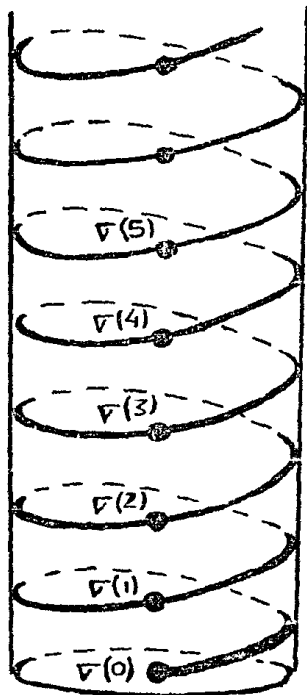


Fig. 4

La curva que aparece en la Fig. 4 se llama hélice y una propiedad sorpren-

dente de ella, que no vamos a comprobar aquí, es que el pedazo de la curva que va del punto  $\sigma(0)$  al  $\sigma(1)$  se transforma en un segmento de recta, cuando el cilindro se corta sobre una línea que pasa por los puntos  $\sigma(0)$ ,  $\sigma(1)$ ,  $\sigma(2)$ . Ese resultado se puede interpretar, en términos de plantas trepadoras, diciendo que el tallo se va enrollando entre  $\sigma(0)$  y  $\sigma(1)$  usando la menor cantidad de tallo.

Como el lector habrá notado, las funciones de la forma  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  o  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tienen la característica de que su imagen:

$$\text{Im}[\rho] = \rho(\mathbb{R}) = \{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Im}[\sigma] = \sigma(\mathbb{R}) = \{(x(t), y(t), z(t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

es una curva en el plano o en el espacio.

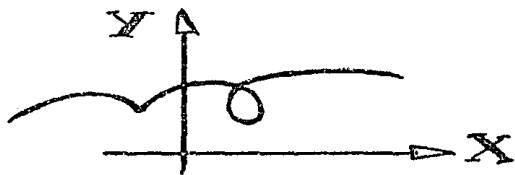
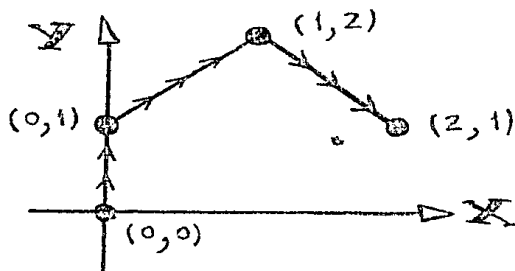


Fig. 5

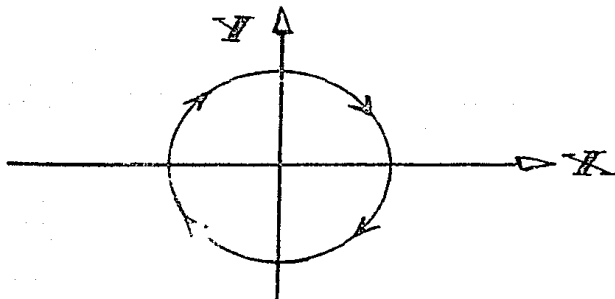
## EJERCICIOS.

1.- Dar la ecuación de una curva  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  ó  $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$  que tenga la siguiente gráfica:

a)

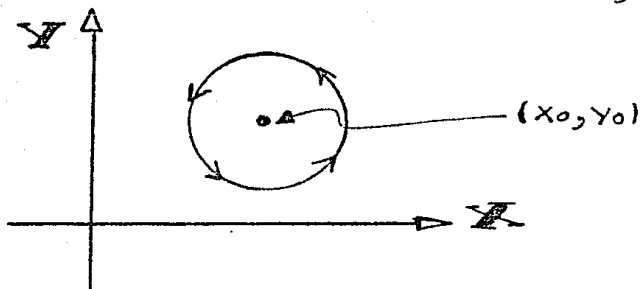


b)



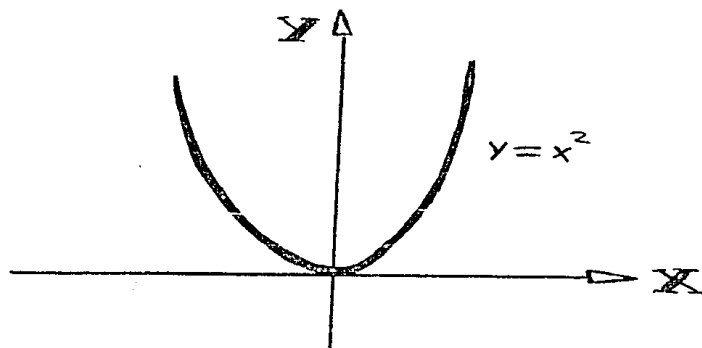
Ayuda: La función  $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$  recorre a la circunferencia en el sentido contrario en que marchan las manecillas de un reloj.

c)



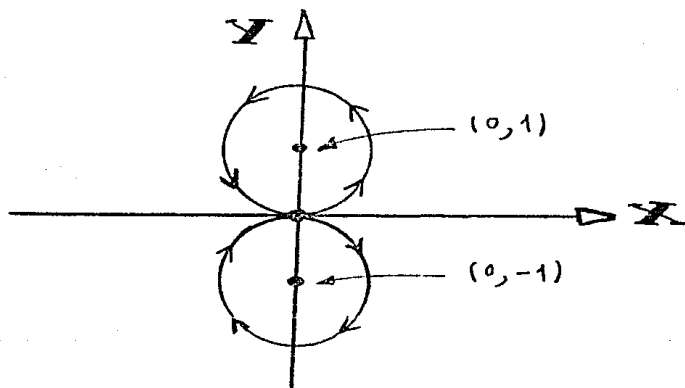


d

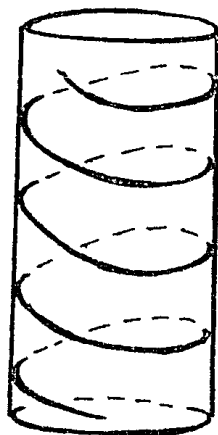


Ayuda: Hacer  
 $x(t) = t$  y  
 $y(t) = t^2$

e



f



Ayuda: La hélice  
 del ejemplo 4 va de  
 izquierda a derecha

## 2.2. LIMITES Y CONTINUIDAD.

En el ejemplo del aparato digestivo (EJEMPLO 1), describíamos la cantidad de alimento que hay en el estómago e intestino delgado al tiempo  $t$  por medio de la función  $\nabla : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  con

$$\nabla(t) = (m_1(t), m_2(t))$$

Planteemos una pregunta, ¿cómo es el comportamiento de la función  $\nabla$  para tiempos muy cercanos a un tiempo fijo  $t_0$ ? Es claro que tal comportamiento depende de cómo se comporten las funciones  $m_1$  y  $m_2$ . Si denotamos por:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \nabla(t)$$

al proceso de que estamos hablando, entonces se nos ocurre definir la última expresión como:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \nabla(t) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} m_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} m_2(t) \right)$$

De acuerdo a lo visto anteriormente damos la siguiente definición.

**DEFINICION 1** Sea  $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función y  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Definimos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} v(t)$$

sólo si existen los límites de sus funciones componentes:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t)$$

y en este caso es:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) \right)$$

**EJEMPLO 5** Calcular los siguientes límites:

- (a)  $\lim_{t \rightarrow 2} (t^2, 2t - 1, 9)$
- (b)  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\text{Sen } t}{t}, \text{Tan } t, \text{Cos } t \right)$

Como los límites:

$$\lim_{t \rightarrow 2} t^2 = 4, \quad \lim_{t \rightarrow 2} (2t - 1) = 3, \quad \lim_{t \rightarrow 2} 9 = 9$$

existen entonces

$$\lim_{t \rightarrow 2} (t^2, 2t - 1, 9) = (4, 3, 9)$$

Para el segundo límite procedemos de la misma forma:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\text{Sen } t}{t}, \text{Tan } t, \text{Cos } t \right) = (1, 0, 1)$$

**EJEMPLO 6** Mostrar que el siguiente límite no existe:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\text{Sen } t}{t}, \text{Tan } t, \frac{1}{t} \right)$$

Sabemos que una condición para que exista este límite, es que los tres límites:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \text{Tan } t \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}$$

existán. La no existencia del tercer límite prueba nuestra afirmación.

Definiremos, ahora, algunas operaciones entre funciones.

Como sabemos el número de organismos vivos que hay de tres especies animales en un ecosistema, dependerá del tiempo (EJEMPLO 3)

$$V(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Supongamos que tenemos dos ecosistemas en los cuales existen las tres especies animales, cuyo número viene dado por las funciones

$$V_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$$

$$V_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$

¿Cuál será la cantidad de animales de cada especie, si se consideran ambos ecosistemas como uno solo? La respuesta viene dada por la siguiente operación:

$$V_1(t) + V_2(t) = (x_1(t) + x_2(t), y_1(t) + y_2(t), z_1(t) + z_2(t))$$

Podemos pensar esta operación como la suma de las funciones  $V_1$  y  $V_2$ , por ello

podemos definir a la suma de las funciones  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  como:

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)(t) = (x_1(t) + x_2(t), y_1(t) + y_2(t), z_1(t) + z_2(t))$$

## EJERCICIOS

1.- Interpretar las siguientes operaciones entre funciones, usando la interpretación que se hizo para la suma

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)(t) = (x_1(t) - x_2(t), y_1(t) - y_2(t), z_1(t) - z_2(t))$$

$$(\lambda \vec{v}_1)(t) = (\lambda x_1(t), \lambda y_1(t), \lambda z_1(t))$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$

Definiremos dos operaciones más entre funciones. Una es el producto escalar y otra el producto vectorial:

$$(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)(t) = \vec{v}_1(t) \cdot \vec{v}_2(t)$$

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)(t) = \vec{v}_1(t) \times \vec{v}_2(t)$$

La función  $v_1 \times v_2$  admite una interpretación si consideramos el movimiento de una partícula en rotación. Podemos pensar que  $v_1$  es la función que nos da la posición de la partícula al tiempo  $t$  y  $v_2$  es la función que nos indica la fuerza que actúa en la partícula al tiempo  $t$ . Luego entonces  $v_1 \times v_2$  nos da el momento de rotación de la partícula al tiempo  $t$ .

La función  $v_1 \odot v_2$  admite también una interpretación si consideramos que la función  $v_1$  nos da el contenido de jugo que hay en los frutos manzana, naranja y jitomate, es decir,  $v_1$  es una función constante

$$v_1(t) = \left( \alpha \frac{\text{mls. de jugo de manzana}}{\text{manzana}}, \beta \frac{\text{mls.}}{\text{naranja}}, \gamma \frac{\text{mls.}}{\text{jitomate}} \right)$$

y  $v_2$  nos mide la cantidad de frutos procesados al tiempo  $t$

$$v_2(t) = (x(t) \text{ manzanas}, y(t) \text{ naranjas}, z(t) \text{ jitomates})$$

Entonces  $v_1(t) \odot v_2(t)$  nos indica la totalidad de jugo producido al tiempo  $t$ .

El siguiente resultado es fácil de probar y se deja para el lector:

**RESULTADO 1** Si: los límites

$$\lim_{t \rightarrow t_0} v_1(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} v_2(t)$$

existen entonces existen los límites:

(a)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (v_1 \pm v_2)(t)$  y su valor es  $\lim_{t \rightarrow t_0} v_1 \pm \lim_{t \rightarrow t_0} v_2$

(b)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\lambda v_1)(t)$  y su valor es  $\lambda \lim_{t \rightarrow t_0} v_1(t)$

(c)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (v_1 \odot v_2)(t)$  y su valor es  $\lim_{t \rightarrow t_0} v_1(t) \odot \lim_{t \rightarrow t_0} v_2(t)$

(d)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (v_1 \times v_2)(t)$  y su valor es  $\lim_{t \rightarrow t_0} v_1(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} v_2(t)$

### EJERCICIOS

1.- Mostrar que las fórmulas dadas en el resultado uno son ciertas.



Un concepto íntimamente relacionado con los límites es el de continuidad de una función.

Consideremos la función que describe las cantidades de alimento que hay en el estómago e intestino delgado al tiempo  $t$

$$V(t) = (m_1(t), m_2(t))$$

Supongamos que la gráfica de las funciones  $m_1$  y  $m_2$  son como lo muestra la Fig. 6

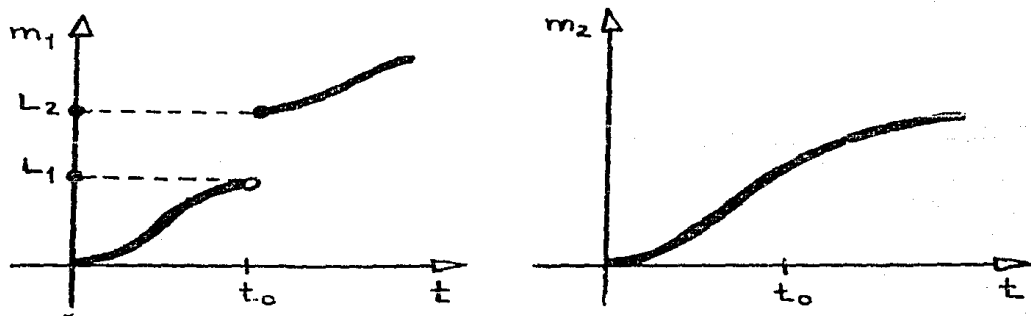


Fig. 6

Para la gráfica de  $m_1$ , es decir la que nos describe la cantidad de alimento en el estómago al tiempo  $t$ , tiene una propiedad curiosa. Conforme el tiempo

se está acercando a  $t_0$  por la izquierda, la cantidad  $m_1$  se acerca a  $L_1$  y cuando el tiempo es  $t_0$ , la cantidad de alimento en el estómago es  $L_2$ , donde  $L_2 > L_1$ . ¿Cómo es que de repente en el estómago fue ingerido la cantidad de alimento  $L_2 - L_1$ ? La intuición nos indica que la cantidad de alimento  $L_2 - L_1$  necesariamente tuvo que ir apareciendo en una forma "continua" y no de repente. Uno podría pensar que si un trozo de carne cae de repente al estómago entonces la función  $m_1$  podría tener un incremento repentino como el de la gráfica de la Fig. 6. Esto no es así, supongamos que la cantidad  $m_1$  se midiera como si un observador estuviera colocado como en la Fig. 7, entonces



Fig. 7

se observa que el trozo de carne tarda un lapso, posiblemente muy corto, de tiempo

en entrar al estómago. En este caso la gráfica de  $m_1$  sería como la de la Fig. 8 y no se "rompería" como en la Fig. 6

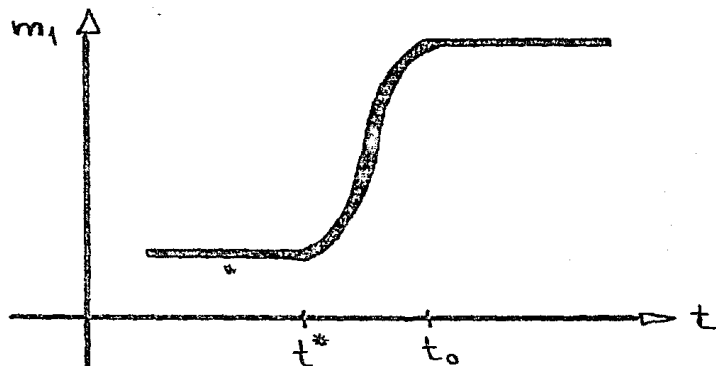


Fig. 8

El tiempo  $t^*$  es antes de que entre el trozo de carne al estómago y  $t_0$  después de que entro.

A continuación definimos que significa que  $\nabla$  sea continua

**DEFINICION 2** Sea  $\nabla: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  función con  $\nabla(t) = (x(t), y(t), z(t))$  y  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Diremos que la función  $\nabla$  es continua en  $t_0$  si, y sólo si, las funciones componentes lo son en  $t_0$ .

**EJEMPLO 7** Aunque no conocemos la fórmula para la función

$$\mathbf{v}(t) = (m_1(t), m_2(t))$$

sabemos, por la discusión anterior, que debe ser continua para todo  $t \in \mathbb{R}^+$

### 2.3. DERIVADA

Consideremos de nuevo la función  $\mathbf{v}(t) = (m_1(t), m_2(t))$ . Nos gustaría analizar como cambia la cantidad de alimento en el sistema ESTOMAGO = INTESTINO DELGADO conforme transcurre el tiempo.

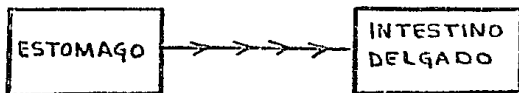


Fig. 9

Como sabemos

$$\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t) = (m_1(t+h) - m_1(t), m_2(t+h) - m_2(t))$$

donde

$m_1(t+h) - m_1(t) =$  variación de alimento en el estómago en el lapso de tiempo  $h$ .

y  
 $m_2(t+h) - m_2(t) =$  variación de alimento en el intestino delgado en el lapso de tiempo  $h$

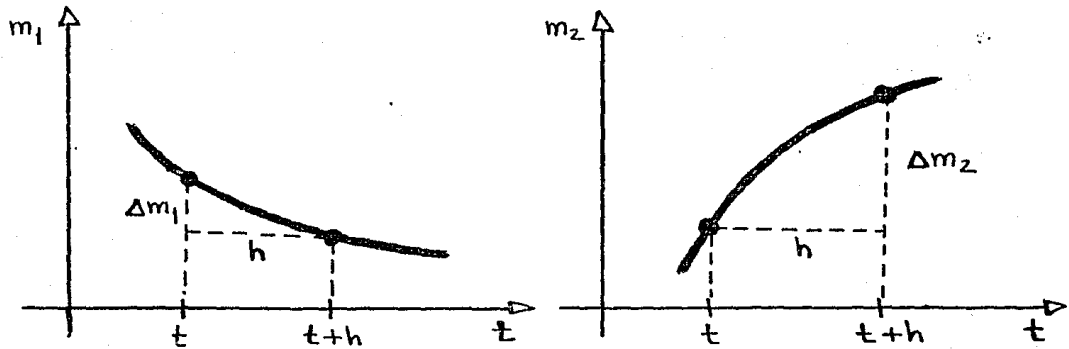


Fig. 10

Se cumple entonces que:

$$\frac{\Delta m_1}{h} = \text{variación de alimento por unidad de tiempo en el estómago en el lapso de tiempo } h$$

donde  $\Delta m_1 = m_1(t+h) - m_1(t)$

y

$\frac{\Delta m_2}{h}$  = variación de alimento por unidad de tiempo en el intestino delgado en el lapso de tiempo  $h$

Por lo tanto la cantidad:

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \left( \frac{\Delta m_1}{h}, \frac{\Delta m_2}{h} \right)$$

nos mide la variación de alimento por unidad de tiempo en el sistema ESTÓMAGO = INTESTINO DELGADO en el lapso de tiempo  $h$ .

Al hacer  $h$  que  $h$  tienda a cero, se observa que las cantidades

$$\frac{\Delta m_1}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\Delta m_2}{h}$$

nos miden la variación instantánea o velocidad instantánea de alimento en el estómago e intestino delgado respectivamente. Por lo tanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

nos mide la variación instantánea de ali-

mento en el sistema ESTOMAGO - INTESTINO DELGA  
DO

Si el lector observa la última fórmula, se dará cuenta que, formalmente, es la definición de derivada para funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . La diferencia que hay, es que la función  $\nabla$  es de  $\mathbb{R}^+$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Motivados por el análisis anterior damos la siguiente definición.

**DEFINICION 3** Sea  $\nabla: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función y  $t_0 \in \mathbb{R}$ . La derivada de  $\nabla$  en  $t_0$ , denotada por  $\nabla'(t_0)$ ,  $D\nabla(t_0)$  o  $\frac{d\nabla}{dt}(t_0)$ , es el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\nabla(t_0+h) - \nabla(t_0)}{h}$$

**EJEMPLO 8** Calcular la derivada de la función  $\nabla(t) = (9-t^2, t^2)$  en cualquier punto.

Según la definición de derivada se tiene que:

$$\begin{aligned}
D\mathbf{v}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(9 - (t+h)^2, (t+h)^2) - (9 - t^2, t^2)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (-2th - h^2, 2th + h^2) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (-2t - h, 2t + h) \\
&= \left( \lim_{h \rightarrow 0} (-2t - h), \lim_{h \rightarrow 0} (2t + h) \right) \\
&= (-2t, 2t)
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $D\mathbf{v}(t) = (-2t, 2t)$

Como ya hemos visto una función de la forma  $\mathbf{v}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  (o  $\mathbb{R}^2$ ) tiene la propiedad de que su imagen:

$$\text{Im}[\mathbf{v}] = \mathbf{v}(\mathbb{R}) = \{ (x(t), y(t), z(t)) : t \in \mathbb{R} \}$$

es una curva en  $\mathbb{R}^3$ . Daremos una interpretación geométrica del concepto de de-



rivada cuando consideremos la imagen de la función  $\nabla$ .

Supongamos que la gráfica de la imagen de  $\nabla$  es como lo indica la Fig. 11. Se observa que el vector:

$$\nabla(t_0+h) - \nabla(t_0)$$

es un vector secante a la curva y entonces el vector:

$$\frac{\nabla(t_0+h) - \nabla(t_0)}{h}$$

queda en la misma dirección que el vector secante  $\overrightarrow{PQ}$ . Al ir tomando  $h$  muy peque

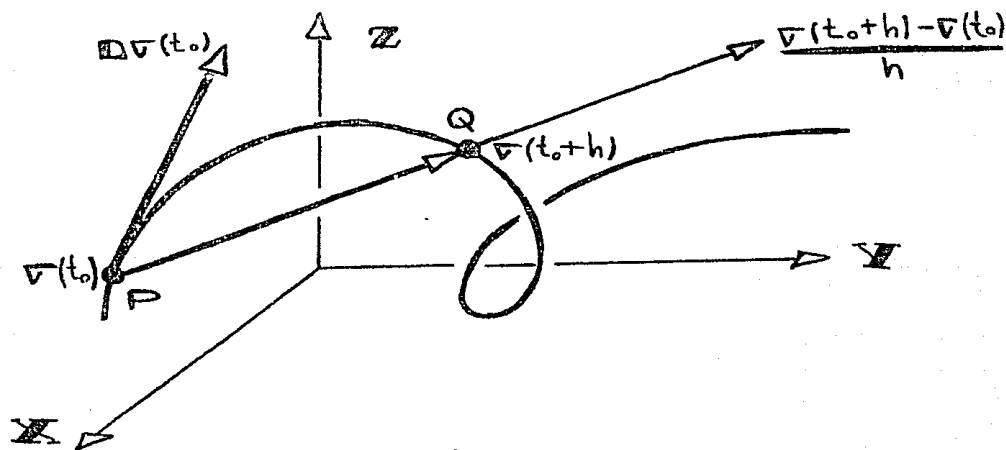


Fig. 11.

no el vector

$$\frac{\mathbf{v}(t_0+h) - \mathbf{v}(t_0)}{h}$$

resulta paralelo a un vector tangente a la curva en el punto  $\mathbf{v}(t_0)$

A partir de la interpretación geométrica del vector  $\mathbf{v}'(t_0)$ , como un vector tangente a la curva en el punto  $\mathbf{v}(t_0)$ , podemos dar la siguiente definición.

**DEFINICION 4** Sea  $\mathbf{v}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función y  $t_0 \in \mathbb{R}$ . La recta tangente a la curva representada por  $\mathbf{v}(\mathbb{R})$  en el punto  $\mathbf{v}(t_0)$  viene dada por la fórmula:

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}(t_0) + t \mathbf{v}'(t_0)$$

siempre que  $\mathbf{v}'(t_0) \neq \mathbf{0}$

**EJEMPLO 9** Considere la función  $\mathbf{v}(t) = (4 \cos t, 3 \sin t)$ . Encontrar:

- (o) La gráfica de  $\nabla(\mathbb{R})$
- (oo) El vector tangente en cada punto de la curva  $\nabla(\mathbb{R})$
- (ooo) La recta tangente en cada punto de la curva  $\nabla(\mathbb{R})$

(o)

Para graficar a la imagen, haremos  $x(t) = 4\cos t$  y  $y(t) = 3\sin t$  entonces

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

entonces

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Por lo tanto  $\nabla(\mathbb{R})$  es una elipse (Realmente sólo hemos mostrado que los puntos de la imagen de  $\nabla$  están en la elipse y no hemos comprobado que llenen a la elipse. Como esto último requiere de argumentos más sofisticados, creemos que efectivamente la imagen de  $\nabla$  es la elipse con eje mayor so-

bre el eje  $X$  de valor 8, mientras que el eje menor está sobre el eje  $Y$  y tiene valor 6. (Fig. 12)

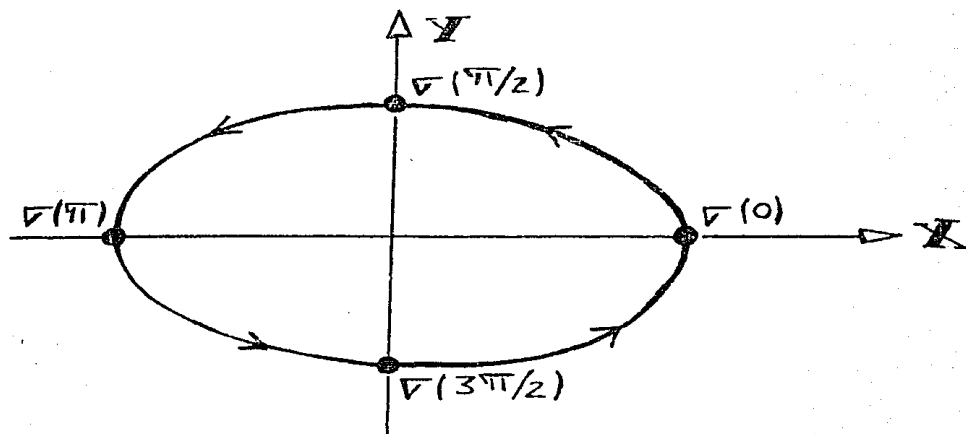


Fig. 12

(••)

El vector tangente a la curva en el punto  $r(t_0)$  es

$$r'(t_0) = (-4\text{Sen}t_0, 3\text{Cos}t_0)$$

(•••)

La recta tangente a la curva en el punto  $r(t_0)$  es:

$$(x, y) = \mathcal{V}(t_0) + \mathcal{V}'(t_0)t$$

o lo que es lo mismo:

$$(x, y) = (4 \text{Cost}_0, 3 \text{Senc}_0) + t(-4 \text{Senc}_0, 3 \text{Cost}_0)$$

o también:

$$x = 4 \text{Cost}_0 - (4 \text{Senc}_0)t$$

$$y = 3 \text{Senc}_0 + (3 \text{Cost}_0)t$$

## EJERCICIOS

1.- Con respecto al ejemplo 9, ¿cuándo la recta tangente es vertical u horizontal? Contestar estas preguntas geométricamente y después comprobarlas analíticamente.

2.- Muestran que la gráfica de la imagen de la función  $\mathcal{V}(t) = (t \text{Cost}, t \text{Senc})$  es una hipérbola. Encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto  $\mathcal{V}(t_0)$ .

3.- Muestran que la gráfica de la imagen de la función  $\mathcal{V}(t) = (e^t \text{Cost}, e^t \text{Senc})$  es una espiral.

Hemos definido  $Dv(t_0)$  como el límite:

$$Dv(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t_0+h) - v(t_0)}{h}$$

En el siguiente resultado presentamos una manera más fácil de obtener la derivada de una función.

**RESULTADO 2** Sea  $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función con  $v(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . La función  $v$  es derivable en  $t = t_0$  si, y sólo si,  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  lo son. Además se da la siguiente relación:

$$Dv(t_0) = (Dx(t_0), Dy(t_0), Dz(t_0))$$

### Convencimiento

La parte que más se utiliza es la condicional: "si  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  son funciones derivables entonces  $v$  también es derivable y  $v'(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$ ". Con este resultado podemos calcular la derivada de la función  $v$  en base a la derivada de las funciones componentes.

Si las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  son derivables en  $t_0$  entonces el vector:

$$\left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t_0+h) - z(t_0)}{h} \right)$$

existe y es igual a:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x(t_0+h), y(t_0+h), z(t_0+h)) - (x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{h}$$

que es lo mismo que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t_0+h) - v(t_0)}{h}$$

Por lo tanto este último límite existe y es igual a  $Dv(t_0)$ . También podemos concluir que  $Dv(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$ , usando la primera y última fórmula de nuestro razonamiento.

### EJERCICIOS.

1. - Mostrar que es cierto el "sólo si" del resultado 2.

2.- Repetir el ejemplo 8 usando ahora el resultado 2.

Finalmente para terminar este capítulo, exponemos el siguiente problema. Considerando el ejemplo 1 de este capítulo, supongamos que conocemos la razón a la que cambia la cantidad de alimento tanto en el estómago como en el intestino delgado. Esto equivale a conocer  $\dot{m}_1(t)$  y  $\dot{m}_2(t)$ , o lo que es lo mismo:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = (\dot{m}_1(t), \dot{m}_2(t))$$

De hecho podemos decir que  $\dot{m}_1(t)$  depende de las variables  $t$ ,  $m_1$  y  $m_2$  y que  $\dot{m}_2(t)$  depende de  $t$ ,  $m_1$  y  $m_2$ , es decir

$$\dot{m}_1(t) = F_1(t, m_1, m_2)$$

$$\dot{m}_2(t) = F_2(t, m_1, m_2)$$

La pregunta que se plantea es, ¿quién es la función  $\dot{\mathbf{v}}(t)$ ? El siguiente ejemplo ilustra este problema en una forma más concreta.



la función EJEMPLO 10 Supongamos que  $\nabla: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es tal que

$$\nabla'(t) = (x, y)$$

donde  $x(t)$  y  $y(t)$  son las funciones componentes de  $\nabla$ . Encontrar a la función  $\nabla$ .

Como sabemos  $\nabla(t) = (x(t), y(t))$  con  $\nabla'(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ . Como también  $\nabla'(t) = (x(t), y(t))$  entonces

$$\dot{x}(t) = x(t)$$

$$\dot{y}(t) = y(t)$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{dy}{dt} = y$$

La primer ecuación se puede escribir como:

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = 1$$

y observamos que el miembro izquierdo

de la igualdad es:

$$\frac{d(\ln x)}{dt}$$

Así que:

$$\frac{d(\ln x)}{dt} = 1$$

lo cual indica que  $\ln x = t + c_1$ , y entonces

$$x = e^{c_1} e^t$$

o sea que  $x$  es de la forma:

$$x(t) = K_1 e^t$$

Similarmente

$$y(t) = K_2 e^t$$

Por lo tanto la función  $\nabla$  viene dada por la fórmula  $\nabla(t) = (K_1 e^t, K_2 e^t)$ .  
¿Cuál es la gráfica de  $\nabla(\mathbb{R})$ ?

## EJERCICIOS.

1.- Supongamos que  $\gamma$  es una función tal que  $\gamma'$  siempre da un mismo vector (diferente de cero) ¿Cuál es la imagen de  $\gamma$ ? ¿Qué ocurre si  $\gamma'$  es  $(0, 0)$ ?

2.- Supongamos que  $\gamma$  es una curva en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\gamma'$  recorre el círculo unitario  $x^2 + y^2 = 1$ . Dar una ecuación para  $\gamma'$  y encontrar la forma que debe tener  $\gamma$ .

3.- Dar una curva  $\gamma$  en  $\mathbb{R}^2$ , tal que su imagen sea el perímetro de un cuadrado.

3

CAMPOS  
ESCALARES.

El tipo de funciones que ahora estudiaremos aparecen, también, en forma natural en fenómenos físicos, químicos y biológicos. Pondremos algunos ejemplos de estos fenómenos para motivar el tema.

### 3.1. CONCEPTO DE CAMPO ESCALAR

Como el lector recordará, una función de  $A$  en  $B$  es una regla que asigna a cada elemento de  $A$  un elemento de  $B$  y solo uno. Para representar una tal función se usan los símbolos:

$$f: A \rightarrow B$$

con

$$b = f(a)$$

donde  $b$  es el elemento de  $B$  que le asignamos al elemento  $a$  de  $A$ .

Si tomamos como  $A = \mathbb{R}^2$  y  $B = \mathbb{R}$  entonces una función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ , la cual es llamada CAMPO ESCALAR, será una regla que asigna a cada pareja  $(x, y)$  un solo un número real  $z$ . Podemos representar a tal función como:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

con

$$z = f(x, y)$$

Los siguientes ejemplos nos motivarán aún más el concepto de campo escalar.

**EJEMPLO 1** Consideremos el movimiento de un microorganismo con un flagelo, por ejemplo un espermatozoide. Y supongamos que el microorganismo se mueve sobre un plano, de tal manera que la posición de cada punto  $P$  del flagelo es dada por una pareja  $(x, y)$ , donde  $y$  indica lo que subió o descendió (con respecto al eje  $x$ ) el punto  $P$  (Fig. 1)

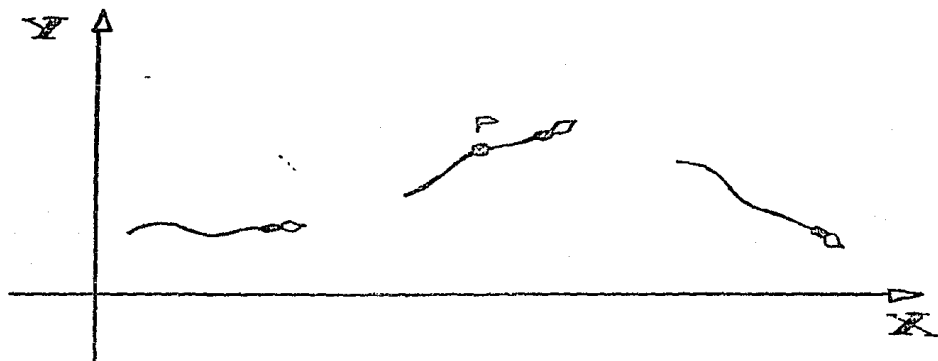


Fig. 1

Definiremos un campo escalar  $f$  como sigue:

$$f(x, t) = \begin{cases} y & \text{si } x \text{ es abscisa de alg\u00fan punto del flagelo en el tiempo } t. \\ 0 & \text{si no sucede lo anterior} \end{cases}$$

Para comprender mejor a esta funci\u00f3n, conviene observar que si mantenemos fijo el tiempo, digamos  $t = t_0$ , entonces la asignaci\u00f3n  $y = f(x, t_0)$  describe la forma que adopta el flagelo al tiempo  $t_0$ .

**EJEMPLO 2** Es conocido por todos nosotros que las variables de estado volumen  $V$ , presión  $P$  y temperatura  $T$  de un gas ideal, se encuentran relacionadas por la ecuación:

$$T = kVP$$

donde  $k$  es una constante que depende del gas que se trate. Podemos pensar a tal ecuación como un campo escalar que asigna a la pareja  $(V, P)$  el número real temperatura  $T$ .

$$T = f(V, P)$$

Cabe mencionar que si en este ejemplo mantenemos constante a  $V$  ó  $P$ , obtendremos las fórmulas:

$$T = \alpha P$$

$$T = \beta V$$

la última es llamada ley de Charles-Gay-Lussac, la cual indica que el volumen de un gas es directamente proporcional a la temperatura.



**EJEMPLO 3** Suponga que estamos estudiando como se difunde una droga en la sangre. Para esto tomamos un tubo cilíndrico de plástico, al cual le inyectamos la droga por medio de una jeringa (Fig. 2)

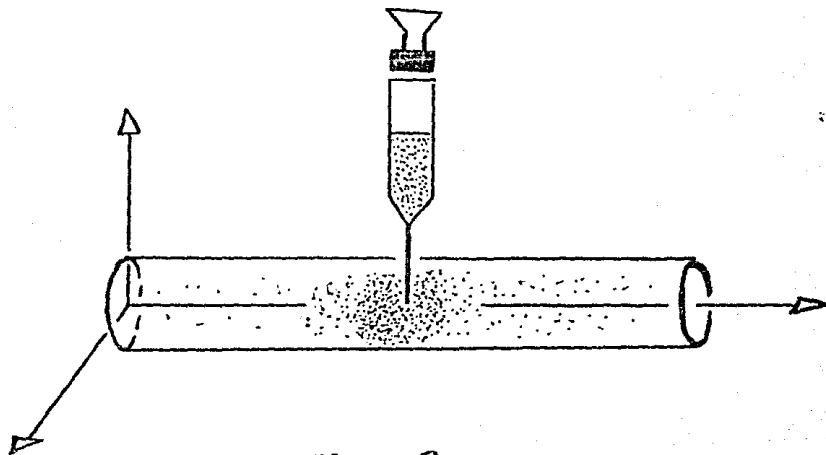


Fig. 2

Para este ejemplo es importante saber el valor de la concentración de la droga  $C$ , para cualquier punto del tubo  $(x, y, z)$  y en cualquier tiempo  $t$ . Por esta razón la concentración  $C$  depende de la cuarteta  $(x, y, z, t)$  y entonces podemos escribir

$$C = f(x, y, z, t)$$

Podemos simplificar el problema si en lugar de medir la concentración en cada punto, la medimos en cada uno de los discos de la Fig. 3. De esta manera, podemos hacer que la función dependa únicamente de dos variables, del tiempo  $t$  y de la ordenada  $y$ . Es decir  $C = f(y, t)$

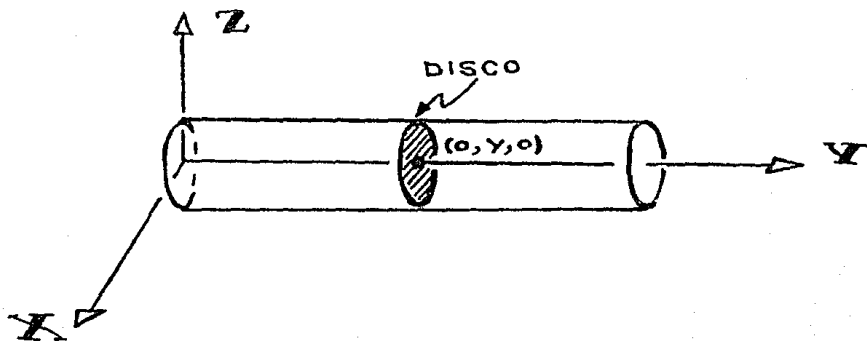
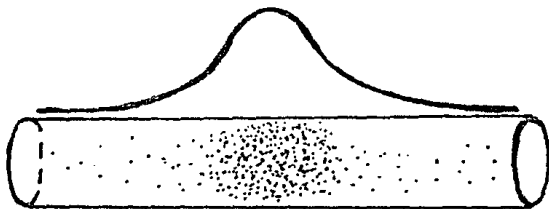


Fig. 3

Si mantenemos constante a  $t$  en la fórmula  $C = f(y, t)$ , obtendremos una función que nos indicará la concentración en cada uno de los discos, esta función tendría una gráfica como la de la Fig. 4 (¿Por qué?)

Fig. 4



Si mantenemos constante a  $y$ , digamos  $y = y_0$ , entonces la función  $C = f(y_0, t)$  nos indica como varía la concentración de droga en el disco localizado en el punto  $(0, y_0, 0)$ . Una gráfica para tal función aparece en la Fig. 5.

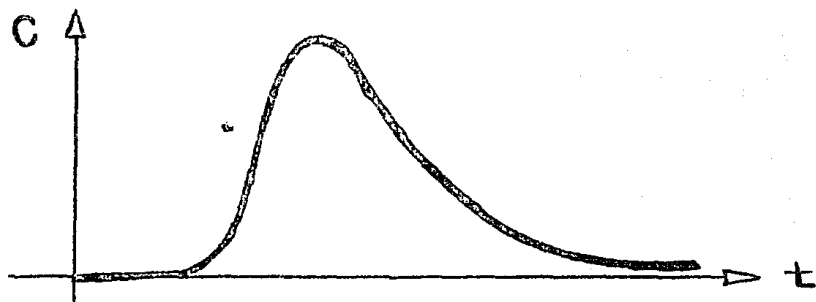


Fig. 5

Otra función bastante importante es la que asigna a cada cilindro de bases localizadas en los puntos  $(0, 0, 0)$  y  $(0, y_0, 0)$ , la masa de droga localizada en éste para un tiempo dado  $t$ .

$$m = f(y_0, t)$$

Fig 6



**EJEMPLO 4** En el proceso de respiración, el oxígeno ejerce presión sobre las paredes interiores de los pulmones. Si situamos un sistema de coordenadas  $XYZ$ , entonces podemos asignarle a cada punto  $(x, y, z)$  de la pared interior del pulmón la presión  $p$  que se está ejerciendo en dicho punto

$$p = f(x, y, z)$$

Este mismo tipo de funciones aparecen al considerar la presión que se ejerce sobre las paredes interiores del corazón o también sobre las paredes interiores de una arteria. También aparecen cuando consideramos una célula confinada en algún líquido o plasma.

**EJEMPLO 5** Tomemos una porción amplia de terreno en las sabanas africanas, y dividámoslo en cuadrados de lados muy pequeños. Si tomamos cada cuadrado como un punto entonces podemos formar un campo escalar que asigne a cada punto  $(x, y)$  del terreno el número de animales de alguna especie  $N = f(x, y)$

Podemos modificar el mismo ejemplo si, en lugar de tomar una población de animales, tomamos una población de bacterias.

Antes de pasar a otra cosa mencionaremos unas cuantas palabras más sobre el tema de campos escalares.

Para el ejemplo 5 se observa que la función  $N = f(x, y)$  sólo tiene sentido para las parejas  $(x, y)$  que pertenecen a la porción de terreno que se está considerando. Lo mismo se puede decir para el ejemplo 3, en este caso la función concentración depende de  $y$ , donde  $0 \leq y \leq l$  con  $l$  la longitud del tubo. En la Fig. 7 se ilustran los puntos  $(x, y)$  para los que tiene sentido aplicar la función para los ejemplos 5 y 3.

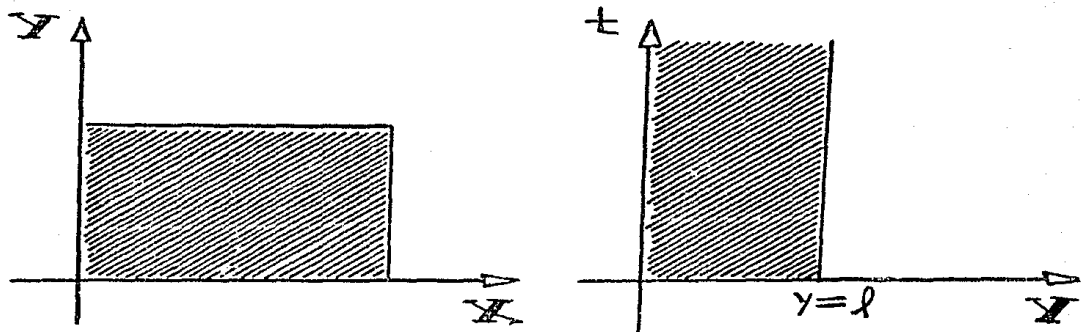


Fig. 7

Los subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  en los cuales está definida una función reciben un nombre especial.

**DEFINICION 1** La región  $\mathcal{d}$  sobre la que está definida una función  $f$  se llama DOMINIO DE LA FUNCION, y para resaltar este hecho escribiremos:

$$f: \mathcal{d} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

### 3.2. GRAFICA DE UN CAMPO ESCALAR

En la sección 3.1. vimos como los campos escalares aparecían en forma natural en fenómenos físicos y biológicos. En esta sección trataremos el problema de como representarlos geométricamente.

Existen esencialmente tres métodos para graficar un campo escalar. Explicaremos como funcionan cada uno de ellos.

## METODO 1

Para explicar este método usaremos el campo escalar  $y = f(x, t)$  que dimos para describir el movimiento de un microorganismo (EJEMPLO 1). Lo ideal para explicar este fenómeno es que tuvieramos la forma que adopta el microorganismo en cada instante. (Fig. 8)

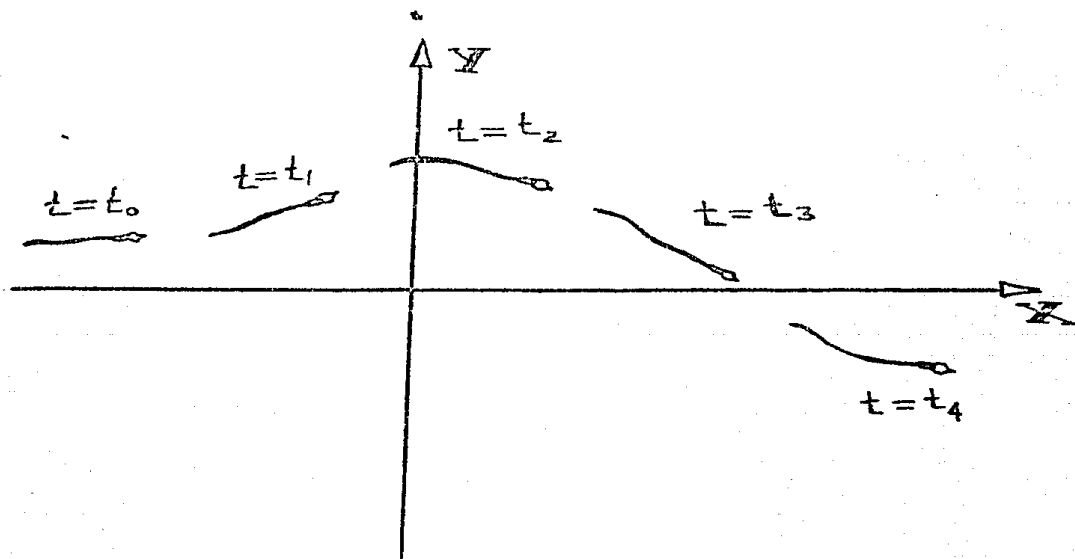


Fig. 8

Como sabemos la posición del microorganismo en diferentes tiempos se puede obtener haciendo al tiempo constante en el campo escalar  $y = f(x, t)$

Podemos organizar las fotografías que se obtuvieron del espermatozoide, si hacemos uso de un sistema de coordenadas rectangular tridimensional  $XTY$ . Como el eje  $T$  representa el tiempo, coloquemos, sobre un plano que pasó por el tiempo correspondiente y el cual es paralelo al plano  $XY$ , la forma que adopte el flagelo en ese tiempo. (Fig. 9)

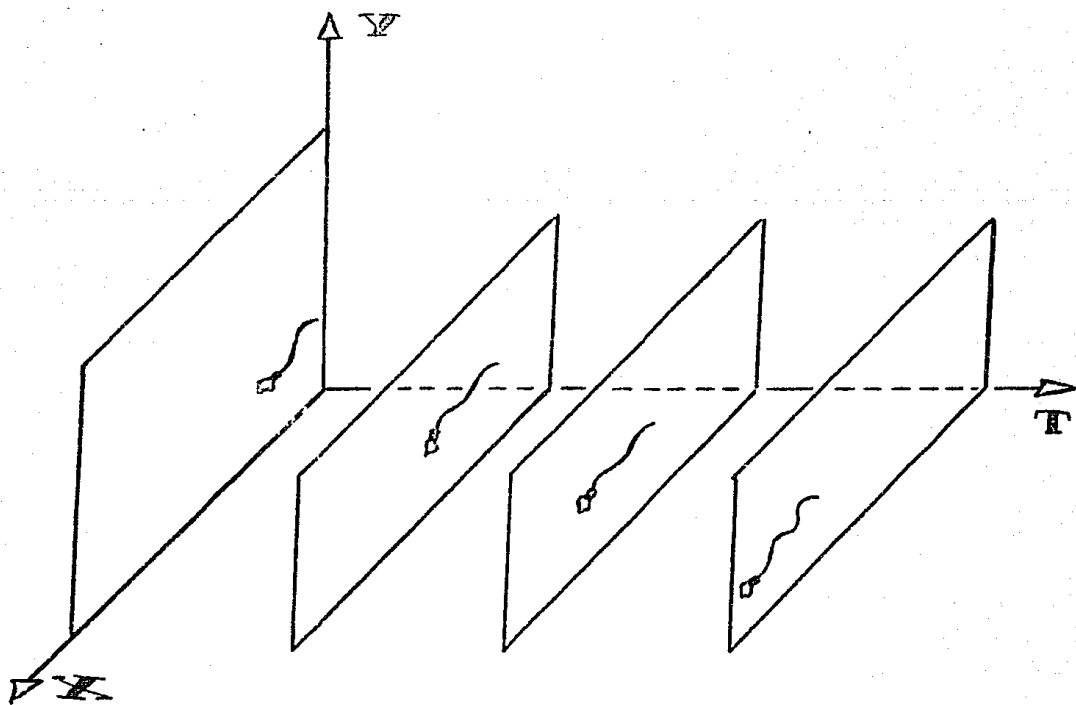


Fig. 9



El paso anterior equivale a fotografar el espermatozoide en los tiempos  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  y  $t_3$  e ir colocando las fotografías en los tiempos correspondientes.

Como entre  $t_0$  y  $t_1$  hay una infinidad de tiempos, necesitamos tomar más fotografías del espermatozoide para cuando  $t_0 < t < t_1$ . De tal suerte que el hueco que hay entre los planos  $t=t_0$  y  $t=t_1$  quede lleno con más fotografías. Esta misma operación se hace para los demás huecos que hay.

En el proceso de ir intercambiando más y más fotografías en los huecos que hay, las curvas que describen el movimiento del espermatozoide van formando una "SUPERFICIE", la cual se parece a una sábana extendida en el espacio. (Fig. 10)

La pregunta que planteamos ahora es la siguiente: ¿cómo obtener las fotografías del espermatozoide en cualquier instante, si nosotros únicamente conocemos la función  $y = f(x, t)$

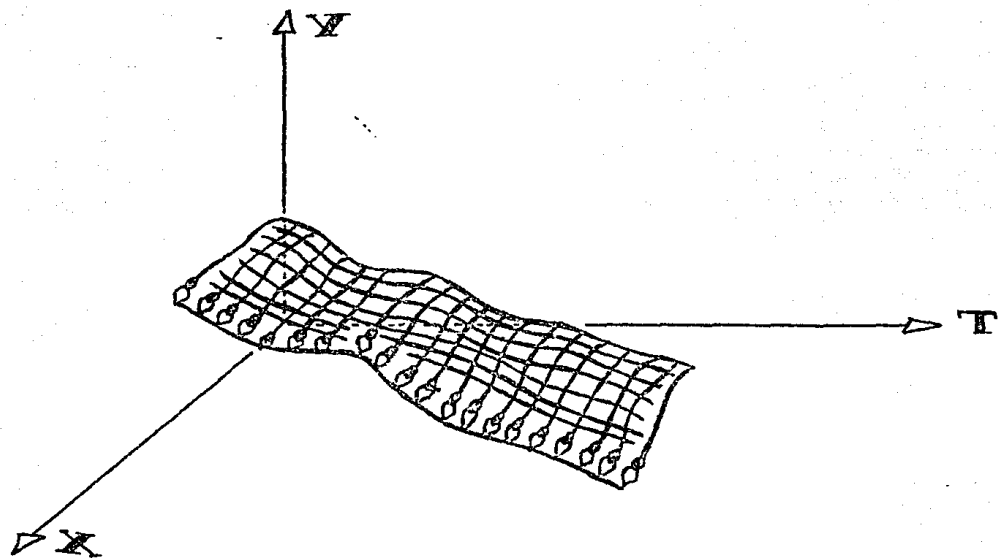


Fig. 10

que nos describe la posición de un punto del flagelo para un tiempo dado? Si el lector recuerda, la función  $y = f(x, t_0)$ , don-  
de  $t$  se ha fijado, en el momento  $t = t_0$ , nos describe la forma del flagelo en el mo-  
mento  $t_0$ , así que las fotografías las ob-  
tenemos de la función  $y = f(x, t)$  al  
hacer  $t$  constante. Cabe observar que la  
función  $y = f(x, t_0)$  depende de una sola  
variable y éstas ya sabemos graficarlas,  
con esto podemos obtener tantas "fotogra-  
fías" como queramos.

**EJEMPLO 6** Usar el método uno para graficar el campo escalar:

$$y = f(x, t) = x^2 + t^2$$

Si hacemos el tiempo constante  $t = k$ , obtendremos las curvas:

$$y = x^2 + k^2$$

las cuales son parábolas, y cuyas gráficas se ilustran en la Fig. 11 para diferentes valores de  $k$ .

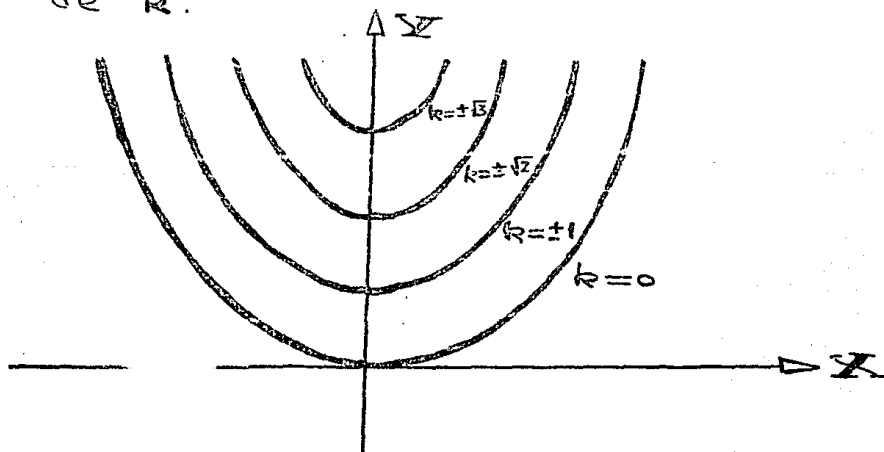


Fig. 11

Podemos, ahora, acomodar las curvas  $y = x^2 + k^2$  tal y como lo indicamos en el método uno para tener el siguiente

gráfico :

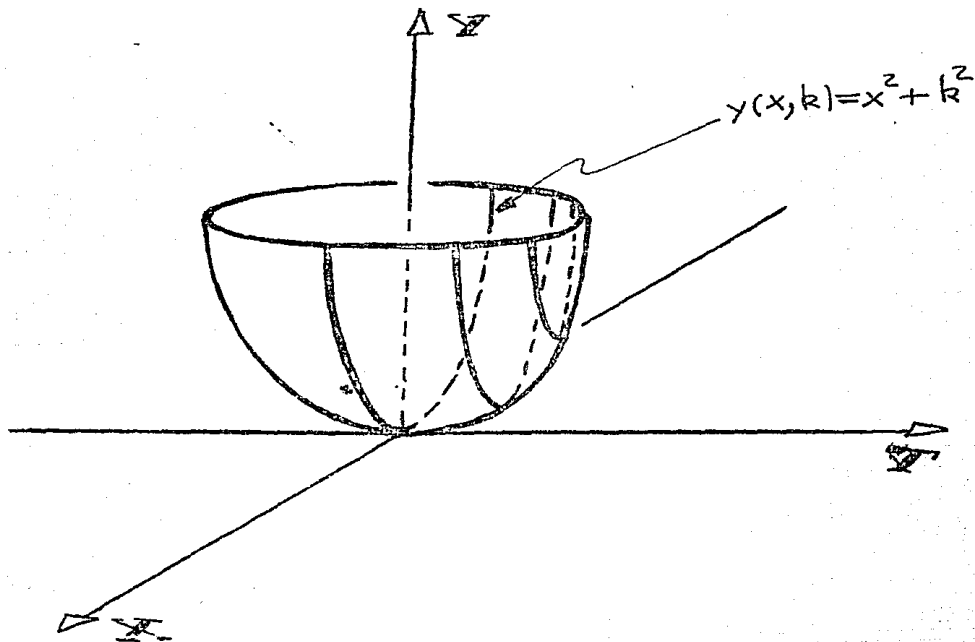


Fig. 12

La superficie generada por las curvas  $y = f(x, k)$  con  $t = k$ , es lo que llamaremos la gráfica del campo escalar  $y = f(x, t)$

## METODO 2

Para explicar este método consideremos el campo escalar del ejemplo 5

Es decir el campo escalar  $N = f(x, y)$ , el cual nos da el número de animales que hay en el punto  $(x, y)$  de un cierto terreno. El método 2 consiste en hacer a la primera variable constante, es decir, hacemos  $x = k$ . La función, de una variable independiente, que resulta

$$N = f(k, y)$$

nos indica el número de animales que hay sobre las líneas paralelas al eje  $Y$  (Fig. 13)

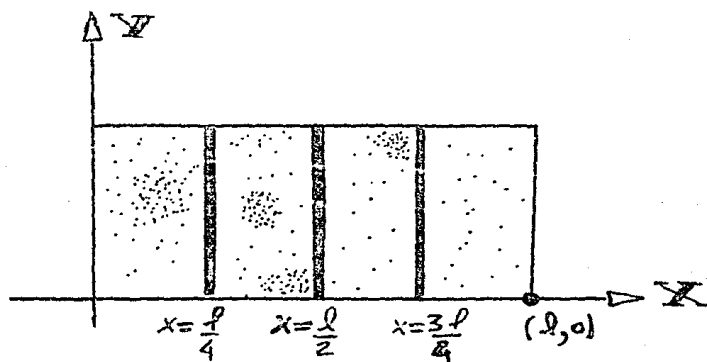


Fig. 13

En general las gráficas de las funciones  $N = f(k, y)$  son curvas, y al ir dibujándolas sobre los planos  $x = k$ , iremos obteniendo un gráfico como el de la Fig. 14.

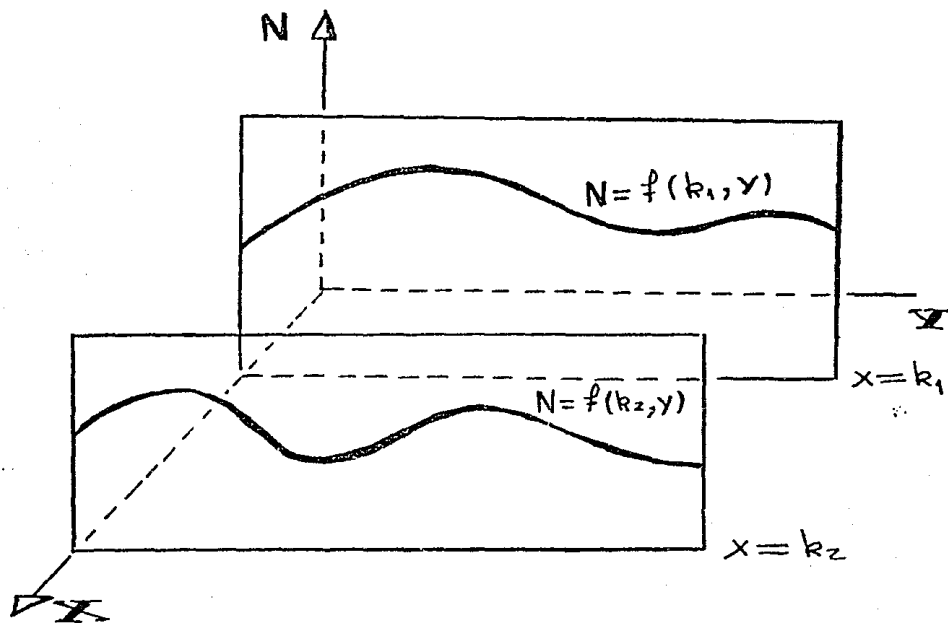


Fig. 14

Conforme vayamos construyendo más curvas del tipo  $N = f(k, y)$  en los planos  $x = k$ , se irá formando una superficie; tal superficie es la gráfica del campo escalar  $N = f(x, y)$  (Fig. 15)

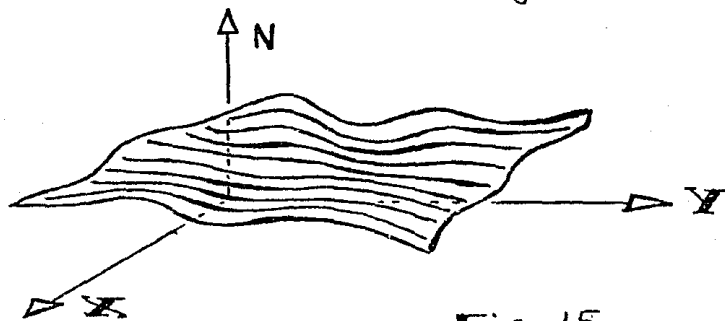


Fig. 15

**EJEMPLO 7** Usar el método dos para graficar el campo escalar:

$$N = N(x, y) = x + y$$

Según el método dos es necesario hacer  $x = k$ . Las curvas que resultan son:

$$N = k + y$$

que no son otra cosa que rectas de pendiente uno y "ordenada" al origen  $k$  (Fig. 16)

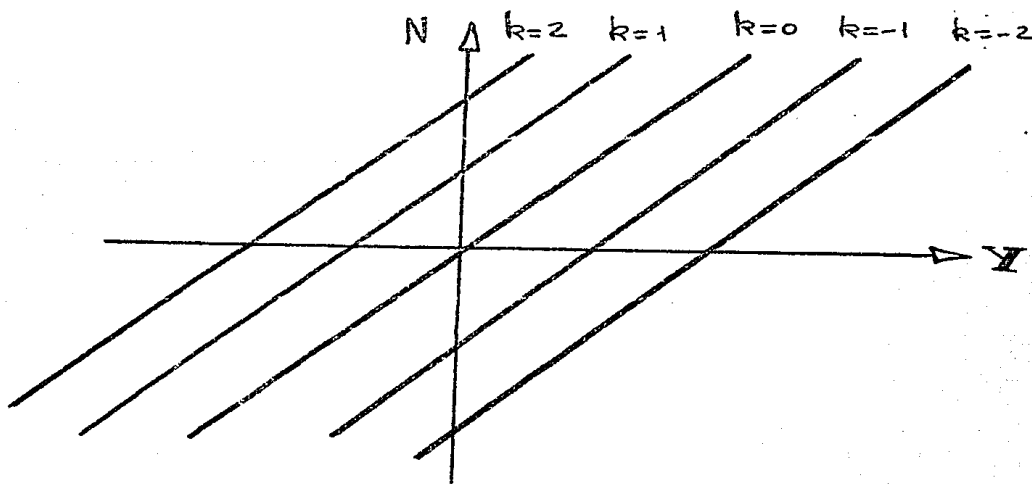


Fig. 16

Al ir colocando las rectas  $N = k + y$  en sus respectivos planos, se va formando una superficie plana (Fig. 17)

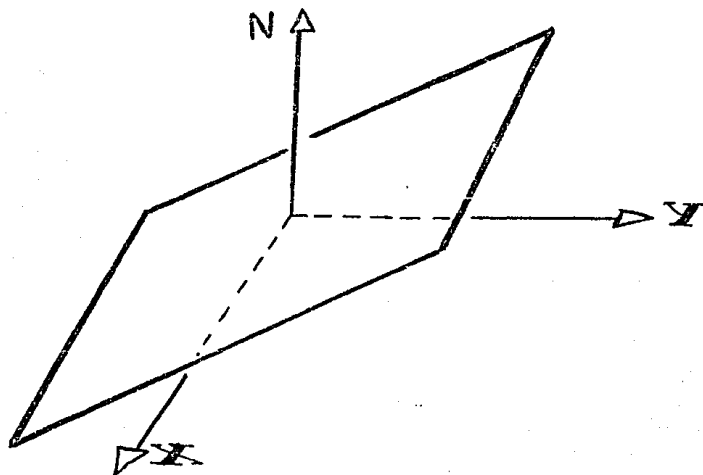


Fig. 17

En los dos métodos que hemos visto para graficar un campo escalar, es decir

$$(1) \quad y = f(x, t) \quad \text{con} \quad t = t_0$$

$$(2) \quad N = f(x, y) \quad \text{con} \quad x = x_0$$

El funcionamiento reside en encontrar la intersección del plano  $t = t_0$  con la superficie que representa al campo escalar, para después ir integrando la superficie a partir de cada una de estas intersecciones. El segundo método funciona de igual manera, solo que en este caso se usan planos de la forma  $x = x_0$ . Aunque estos dos métodos



son esencialmente el mismo, es importante hacer notar que, dependiendo de la función, casi siempre uno de los dos es más fácil de usar que el otro.

El tercer método está basado en hacer, ahora, a la variable dependiente constante.

### METODO 3

Consideremos el ejemplo 2 de este capítulo, tal ejemplo mostraba como están relacionadas las variables de estado  $V$  (volumen),  $P$  (presión) y  $T$  (temperatura).

$$T = f(V, P) = kVP$$

El método que explicaremos está basado en encontrar las parejas  $(V, P)$  que tengan una temperatura dada  $T_0$ , es decir, tal que

$$f(V, P) = T_0$$

En general los puntos  $(V, P)$  que tienen asociada una temperatura  $T_0$  bajo el campo escalar  $f$ , forman una curva, la cual reci-

be el nombre de isoterma. Podemos escribir matemáticamente a las isotermas como:

$$C[T_0] = \{(V, P) : f(V, P) = T_0\}$$

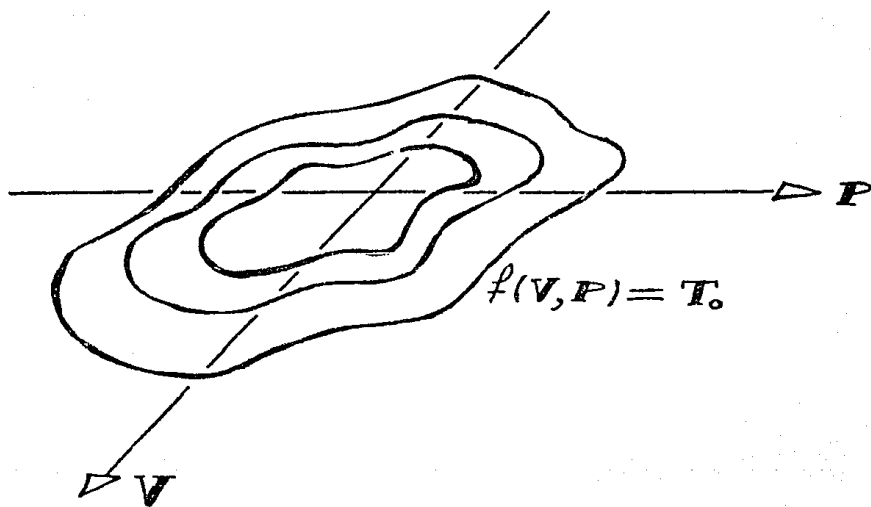


Fig. 18

El concepto de isoterma se generaliza para campos escalares arbitrarios  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como sigue.

**DEFINICION 2** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar y  $k \in \mathbb{R}$ . La curva de nivel  $k$  es el conjunto:

$$C[k] = \{(x, y) : f(x, y) = k\}$$

Para graficar un campo escalar mediante el método 3, colocamos cada curva de nivel  $k$ , es decir  $f(x, y) = k$ , en el plano horizontal  $z = k$  (Fig. 19)

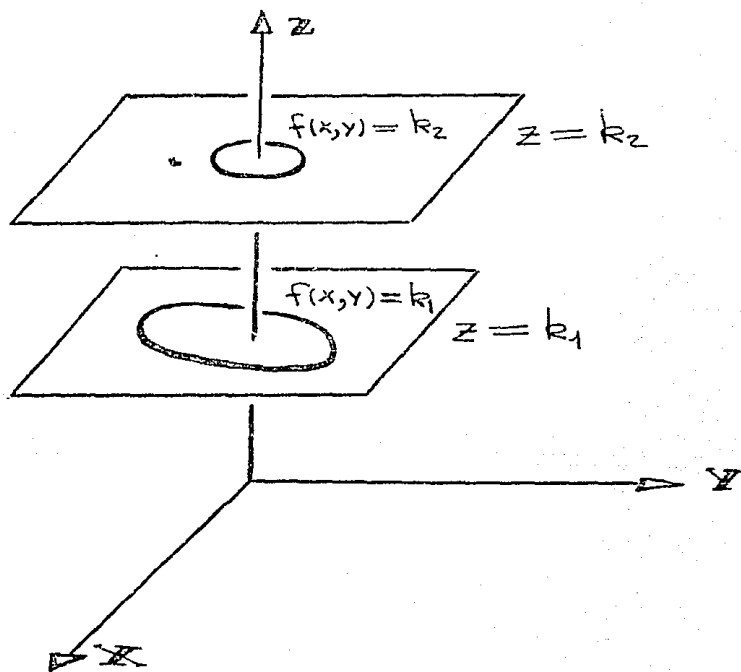


Fig. 19

Al ir colocando más curvas de nivel en los planos  $z = k$ , se irá formando una superficie la cual es la gráfica del campo escalar  $z = f(x, y)$

**EJEMPLO 8** Usar el método tres para graficar al campo escalar:

$$z = y^2 - x^2$$

En este ejemplo las curvas de nivel son las hipérbolas:

$$y^2 - x^2 = k$$

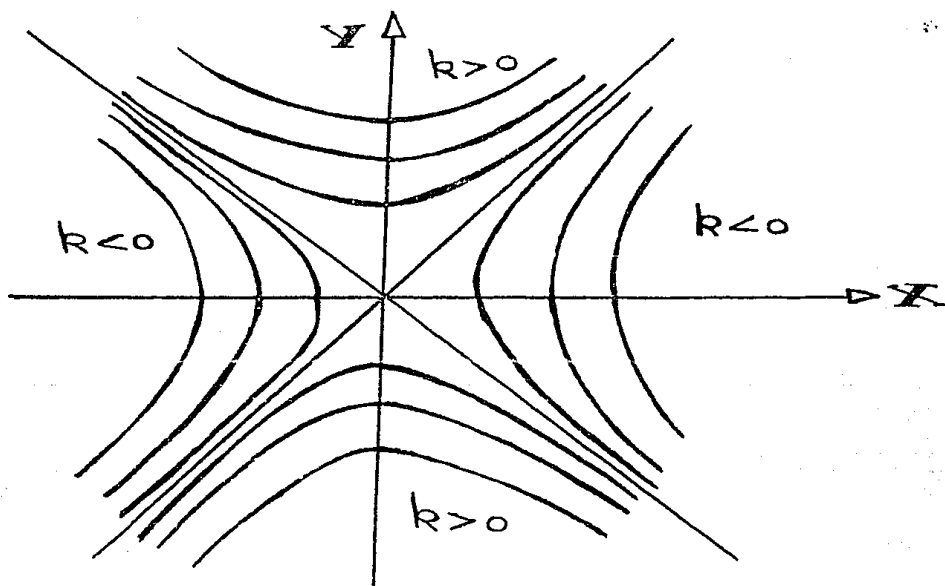


Fig. 20

Al ir colocando dichas hipérbolas sobre los planos  $z = k$ , obtendremos un gráfico como el de la Fig. 21.

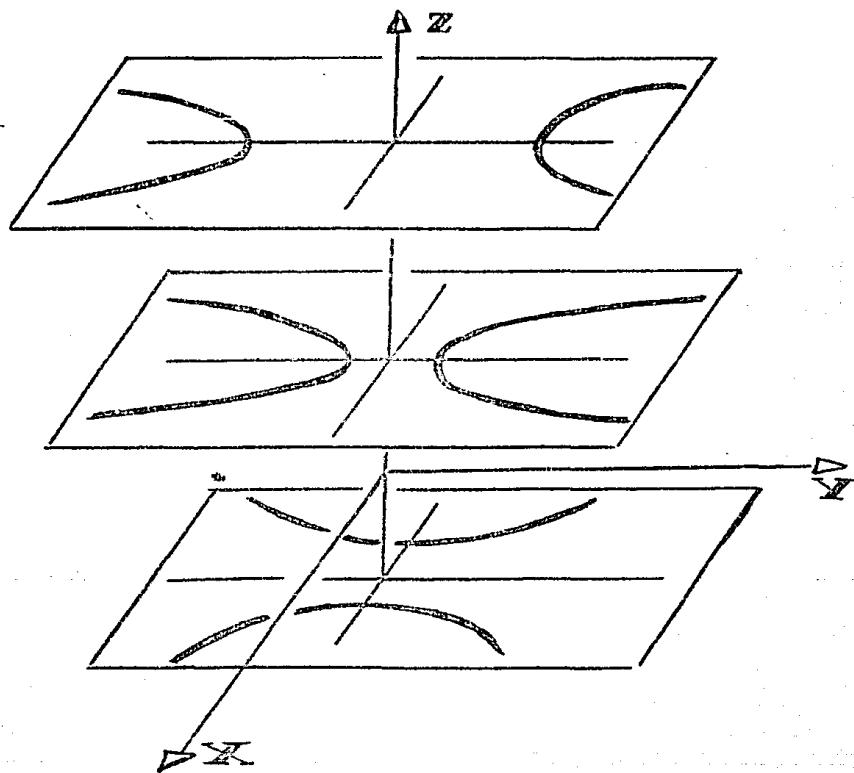


Fig. 21.

El dibujo anterior se puede completar, teniendo en cuenta que las hipérbolas de los planos  $z = k$  con  $k > 0$  se van acercando conforme  $k$  tiende a cero. La gráfica del campo escalar  $z = y^2 - x^2$  se muestra en la Fig. 22, y ella se parece a una silla de montar, aunque su nombre es el de paraboloides hiperbólico.

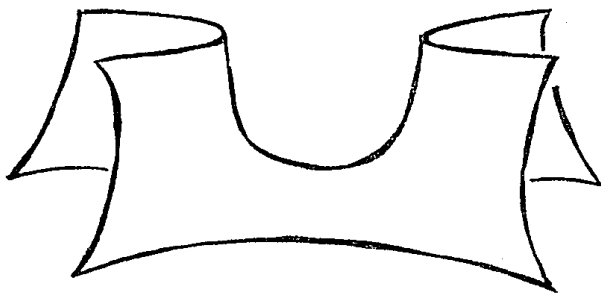


Fig. 22

Podemos resumir los tres métodos para graficar un campo escalar como sigue:

- (1) Decir que curva se obtiene de la ecuación  $z = f(x, y)$  cuando  $y = k$
- (2) Decir que curva se obtiene de la ecuación  $z = f(x, y)$  cuando  $x = k$
- (3) Decir que curva se obtiene de la ecuación  $z = f(x, y)$  cuando  $z = k$

Las curvas que resulten de analizar tales ecuaciones se van colocando en el plano correspondiente  $y = k$ ,  $x = k$  ó  $z = k$

Daremos un último ejemplo sobre graficación de campos escalares.

Como sabemos la temperatura  $T$  de un gas depende del volumen y presión:

$$T = f(V, P)$$

El método uno consiste en obtener las líneas isobaras (presión constante):  $T = f(V, k)$  con  $P = k$ . El método dos consiste en obtener las líneas isocóricas (volumen constante), es decir,  $T = f(k, P)$  con  $V = k$ . Finalmente el método tres consiste en obtener las líneas isotermias (temperatura constante), es decir,  $k = f(V, P)$  con  $T = k$ .

Cuando  $T = kVP$ , las líneas isocóricas son rectas con pendiente  $m = kV_0$  y ordenada al origen cero (Fig. 23). Las líneas isobaras son rectas con pendiente  $m = kP_0$  y ordenada al origen cero (Fig. 23). Finalmente las líneas isotermias son hipérbolas, cuyas asíntotas son los ejes  $V$  y  $P$

$$\frac{T_0}{k} = VP, \quad k \neq 0$$

Cuando la temperatura toma el valor cero, las

líneas isotermas son los ejes  $V$  y  $P$ . (Fig. 23)

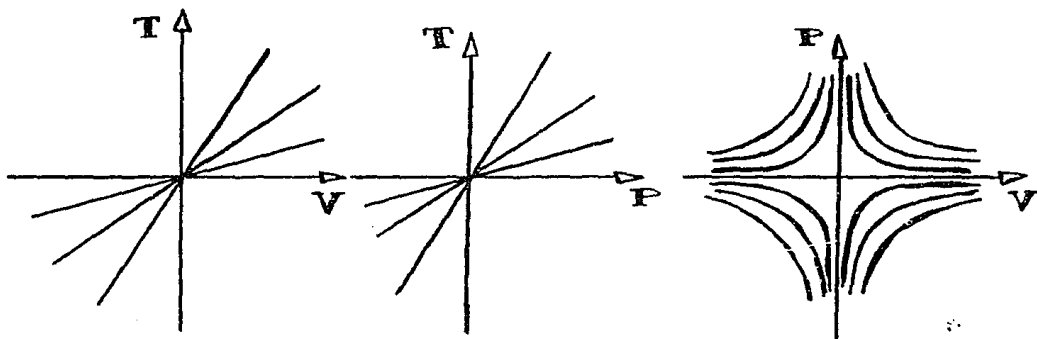


Fig. 23

Realmente para graficar el campo escalar  $T = kVP$  preferimos usar el método tres. Colocando las líneas isotermas en los planos  $T = k$ , tendremos una gráfica como la de la Fig 24.

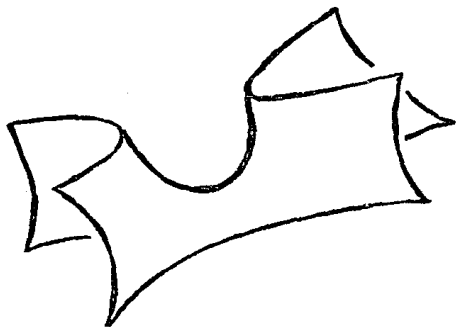


Fig. 24



Podemos generalizar el concepto de curva de nivel a campos escalares del tipo  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supongamos que tomamos una porción amplia del mar, la cual está contaminada de petróleo y supongamos que el campo escalar:

$$C: \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

con

$$C = C(x, y, z)$$

mide la concentración de petróleo en el punto  $(x, y, z)$ . Nos preguntamos por los puntos del mar que tienen una concentración  $k$ , es decir, por el conjunto:

$$S[k] = \{(x, y, z) : C(x, y, z) = k\}$$

En general el conjunto  $S[k]$  será una superficie (pues la ecuación  $C(x, y, z) = k$  involucra tres variables). Por ejemplo en el caso de que  $C(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , el conjunto  $S[k]$  será una esfera si  $k \geq 0$  y el conjunto vacío si  $k < 0$ .

A partir del ejemplo anterior damos la siguiente definición.

**DEFINICION 3** Sea  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

un campo escalar. La superficie de nivel  $k$  con respecto a  $f$  es el conjunto:

$$S[k] = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = k \right\}$$

### EJERCICIOS.

1.- Dar un campo escalar  $f$  cuya gráfica sea una semiesfera.

2.- ¿Por qué no se puede construir  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que su gráfica sea una esfera?

3.- Graficar las siguientes funciones

- (a)  $f(x, y) = |x|$
- (b)  $f(x, y) = |x + y|$
- (c)  $f(x, y) = x/y$
- (d)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- (e)  $f(x, y) = x^2 + xy$

4.- Si sobre un planisferio se marca en cada punto la temperatura promedio al año de ese lugar. ¿Cómo sería

la gráfica de esta función? Si se marca la temperatura promedio de cada uno de los siguientes días del año 22 de marzo, 22 de junio, 22 de septiembre y 22 de diciembre, ¿cómo sería la gráfica de estas funciones?

### 3.3. LÍMITES Y CONTINUIDAD

Supongamos que tenemos un gas contenido en un tanque y en el cual podemos controlar a voluntad las variables temperatura ( $T$ ) y presión ( $P$ ). Sabemos que la variable volumen ( $V$ ) y a no la podemos manejar a nuestro arbitrio, pues ella depende de la temperatura y presión que tenga el gas:

$$V = f(T, P)$$

Consideremos una pareja particular  $(T_0, P_0)$ . Al ir acercando la pareja  $(T, P)$  a la pareja  $(T_0, P_0)$ , nos parece razonable pensar que los volúmenes correspondientes  $V = f(T, P)$  se están aproximando al volumen  $V_0 = f(T_0, P_0)$ .

Pues de lo contrario podríamos encontrar condiciones de estado  $(\mathbf{T}, \mathbf{P})$  muy cercanas a  $(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0)$  y tales que su volumen asociado  $V$  no está muy cerca del volumen  $V_0$ .

En la discusión anterior hay varios puntos que no son claros, tales como:

(•) ¿Qué se entiende por que la pareja  $(\mathbf{T}, \mathbf{P})$  esté muy cerca de la pareja  $(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0)$ ?

(••) ¿Qué se entiende por que el volumen del gas  $V = f(\mathbf{T}, \mathbf{P})$  esté muy cerca del volumen  $V_0 = f(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0)$ ?

Para tratar de precisar lo planteado en (•) y (••), supongamos que encontramos tres puntos  $(\mathbf{T}_1, \mathbf{P}_1)$ ,  $(\mathbf{T}_2, \mathbf{P}_2)$  y  $(\mathbf{T}_3, \mathbf{P}_3)$  tales que:

$$\|(\mathbf{T}_1, \mathbf{P}_1) - (\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0)\| = \frac{1}{10}, \quad \|(\mathbf{T}_2, \mathbf{P}_2) - (\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0)\| = \frac{1}{100}$$

$$\|(\mathbf{T}_3, \mathbf{P}_3) - (\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0)\| = \frac{1}{1000}$$

Es claro que  $(\mathbf{T}_2, \mathbf{P}_2)$  está más cerca de

$(T_0, P_0)$  en comparación con  $(T_1, P_1)$ , pero resulta estar lejos de  $(T_0, P_0)$  en comparación con  $(T_3, P_3)$ .

Como el lector habrá notado la terminología " $(T, P)$  está muy cerca de  $(T_0, P_0)$ " es relativo. En realidad podemos decir que un punto  $(T, P)$  está cerca de  $(T_0, P_0)$  en relación con un "nivel de acercamiento". Por ejemplo los puntos  $(T, P)$  que tienen un nivel de acercamiento en menos de uno, con respecto al punto  $(T_0, P_0)$ , son aquellos puntos que se encuentran en el interior de una circunferencia de radio uno y centro en  $(T_0, P_0)$  (Fig. 25)

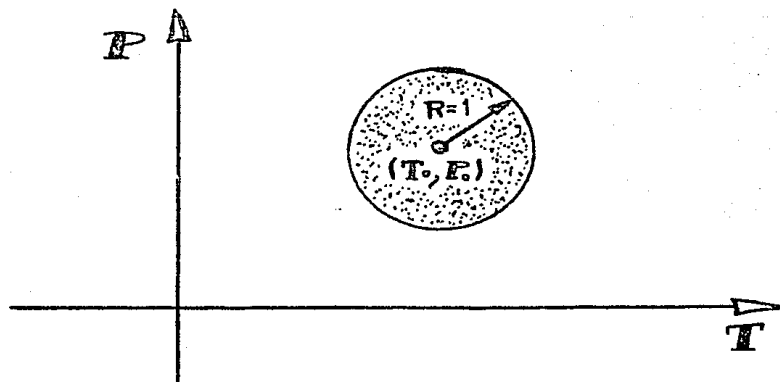


Fig 25.

De la misma manera se habla de niveles de acercamiento en relación con

el volumen  $V$ . Por ejemplo los volúmenes  $V$  que tienen un nivel de acercamiento en menos de uno, con respecto al volumen  $V_0$ , son mostrados en la Fig. 26.

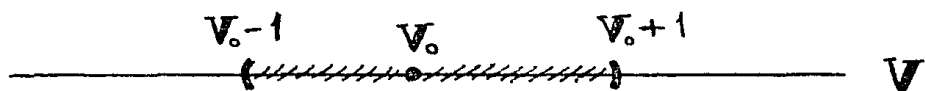


Fig. 26

Retornemos, con nuestra nueva terminología, al problema inicial con que se inició la sección:

"Si  $(T, P)$  está muy cerca de  $(T_0, P_0)$  entonces los respectivos volúmenes  $f(T, P)$  deben de estar muy próximos a  $V_0 = f(T_0, P_0)$ "

Para lograr que los volúmenes  $V$  se acercuen a  $V_0$ , debemos de ir tomando niveles de aproximación cada vez más pequeños, ya que sólo así se puede lograr "ver" si  $V$  se aproxima a  $V_0$  o no (Fig. 27)

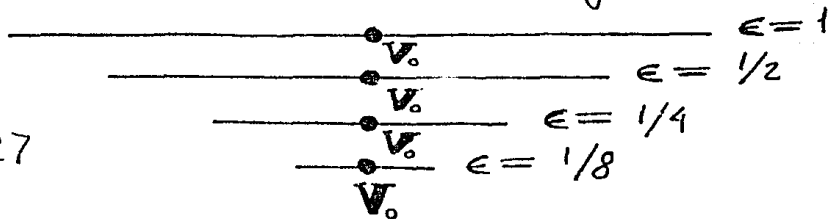


Fig. 27

Ahora bien, para cada uno de estos niveles de aproximación debemos de poder encontrar niveles de aproximación con respecto a  $(T_0, P_0)$ , tales que los puntos que pertenecían a dicho nivel, tengan asociado un volumen que ya esté próximo a  $V_0$ . La Fig. 28 ilustra este aspecto.

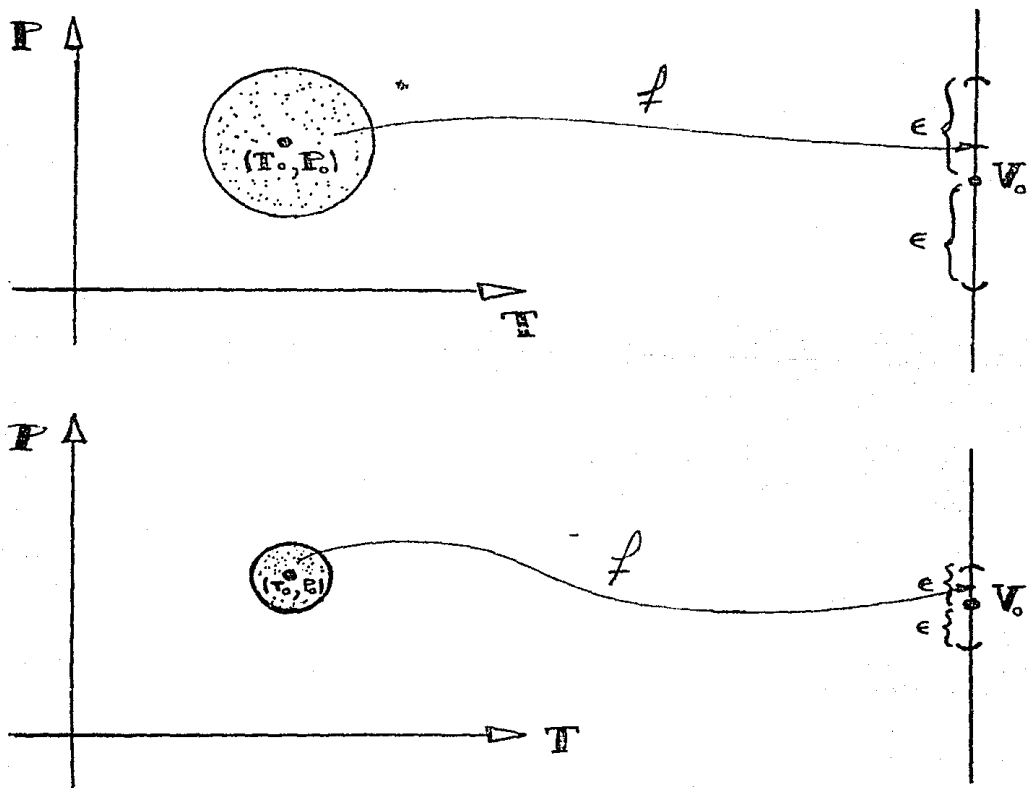


Fig 28

Se observa que al ir tomando  $\epsilon$  muy pequeño e ir obteniendo el  $\delta$  correspondiente, estamos verificando que efectivamente el volumen correspondiente a todos los puntos  $(T, P)$  muy cercanos a  $(T_0, P_0)$  va a dar dentro del nivel  $\epsilon$  en relación con  $V_0$ . Por lo tanto la proposición:

"Si  $(T, P)$  está muy cerca de  $(T_0, P_0)$  entonces  $V$  está muy cerca de  $V_0$ "

quiere decir que:

"Para cualquier nivel de acercamiento  $\epsilon > 0$ , existe un nivel de acercamiento  $\delta > 0$  a  $(T_0, P_0)$  tal que todos los puntos del disco con centro en  $(T_0, P_0)$  y radio  $\delta$  (denotado por  $D((T_0, P_0), \delta)$ ) tienen asociado un volumen que dista en menos de  $\epsilon$  al volumen  $V_0$ "

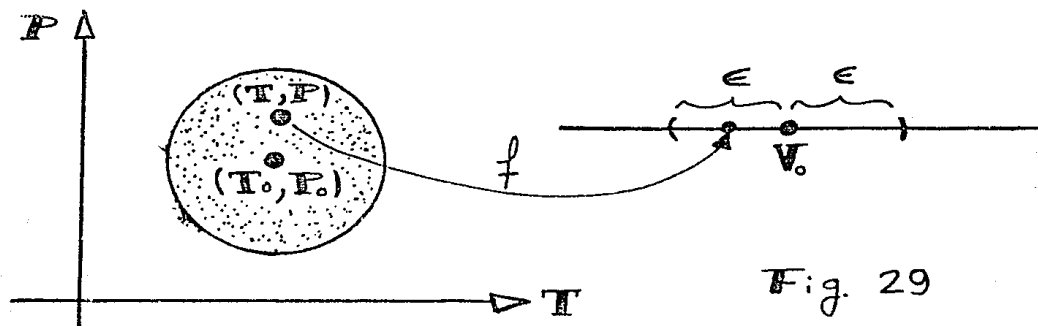


Fig. 29



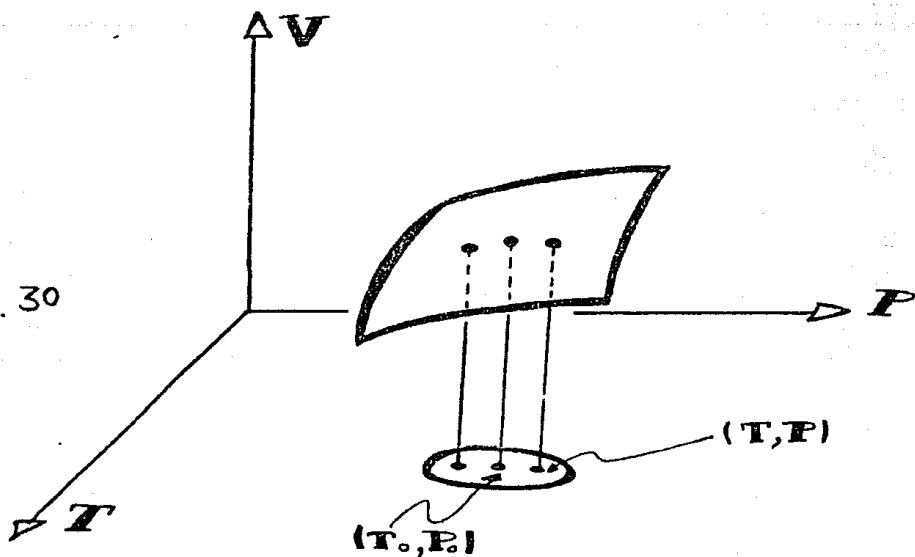
Cuando se cumplen las condiciones planteadas en el párrafo anterior escribiremos (para abreviar)

$$\lim_{(T,P) \rightarrow (T_0,P_0)} f(T,P) = f(T_0,P_0)$$

y se dice que la función es continua en el punto  $(T_0, P_0)$ . Donde el adjetivo "continua" para una función se usa en el sentido que ya hemos estado mencionando.

"Si  $(T, P)$  está muy cerca de  $(T_0, P_0)$  entonces  $f(T, P)$  está muy cerca de  $f(T_0, P_0)$ "

Fig. 30



Algunos ejemplos de funciones que no cumplen con: "Si  $(T, P)$  está muy cerca de  $(T_0, P_0)$  entonces  $f(T, P)$  está muy cerca de  $f(T_0, P_0)$ " aclararan por que del adjetivo de continua.

Considere el campo escalar mostrado en la Fig. 31 y el cual está definido por:

$$f(T, P) = \begin{cases} 5 & \text{si } (T, P) \neq (T_0, P_0) \\ 8 & \text{si } (T, P) = (T_0, P_0) \end{cases}$$

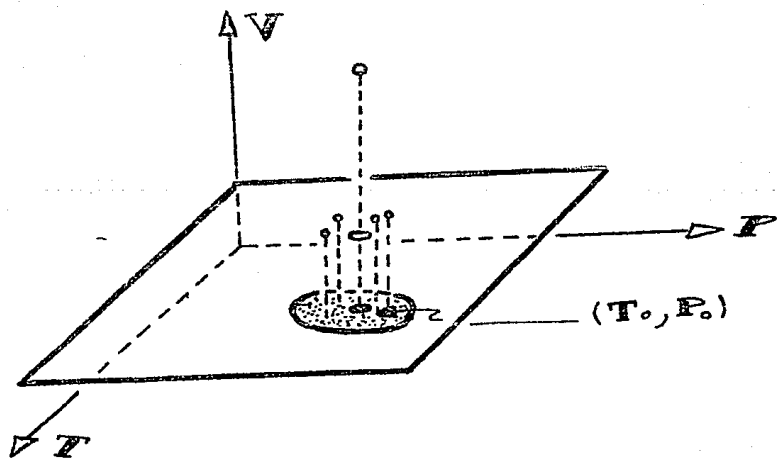


Fig. 31.

Una característica sobresaliente de la gráfica de esta función, es que tiene un agujero en el punto  $(T_0, P_0, 5)$ . Esto se debe a que la función en  $(T_0, P_0)$  no vale cinco.

sino ocho. También sucede que puntos  $(T, P)$  cercanos a  $(T_0, P_0)$  no cumplen con que los valores de la función que les corresponde estén cerca de  $V_0 = f(T_0, P_0)$ , ya que  $f(T, P) = 5$  y  $f(T_0, P_0) = 8$ . Se concluye entonces que la función  $f$  no es continua en  $(T_0, P_0)$ .

### EJERCICIO.

A.- Comprobar que la función antes definida es discontinua de acuerdo con la definición dada en la página 259. Es decir, mostrar que existe  $\epsilon > 0$ , tal que si  $\delta$  es cualquier número mayor que cero, hay puntos  $(T, P)$  del disco  $D((T_0, P_0), \delta)$  tales que  $f(T, P)$  dista de  $f(T_0, P_0)$  en más que  $\epsilon$ .

Este mismo ejemplo nos muestra que las funciones cuya gráfica tiene un agujero en un punto, no pueden ser continuas en tal punto.

También este ejemplo nos muestra que a pesar de que la función  $f$  no es continua en  $(T_0, P_0)$ , aún podemos hablar de un número  $L$  al que se estén aproximando los valores de la función  $f(T, P)$  cuando  $(T, P)$

está próximo a  $(T_0, P_0)$  con  $(T, P) \neq (T_0, P_0)$ . Para este ejemplo los valores de la función se acercan a cinco cuando  $(T, P)$  está próximo a  $(T_0, P_0)$  con  $(T, P) \neq (T_0, P_0)$ . Cabe aclarar que es necesario pedir que  $(T, P) \neq (T_0, P_0)$ , pues de lo contrario habría un punto muy cercano a  $(T_0, P_0)$ , él precisamente, y el cual no está cerca de cinco.

Cuando una función  $f$  tiene la propiedad de que sus valores  $f(x, y)$  se aproximan a un número  $L$  cuando  $(x, y)$  está próximo a  $(x_0, y_0)$  pero es diferente de  $(x_0, y_0)$ , entonces se dice que el límite de la función  $f$  cuando  $(x, y)$  se aproxima a  $(x_0, y_0)$  es  $L$  y tal hecho se denota por el símbolo:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

Cabe hacer notar que la diferencia entre un límite y una continuidad, reside en que en la continuidad es forzoso que  $L = f(x_0, y_0)$ , mientras que para el límite basta con que los valores  $f(x, y)$  se aproximen a un número  $L$ , el cual no es necesariamente  $f(x_0, y_0)$ .

Mostraremos como aplicar la definición de continuidad para saber cuando una función es continua.

**EJEMPLO 9** Sea  $\pi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar definido por:

$$\pi_1(x, y) = x$$

A la función  $\pi_1$  se le llama la proyección sobre el eje  $X$ , la Fig. 32 ilustra la forma en que actúa la función  $\pi_1$ .

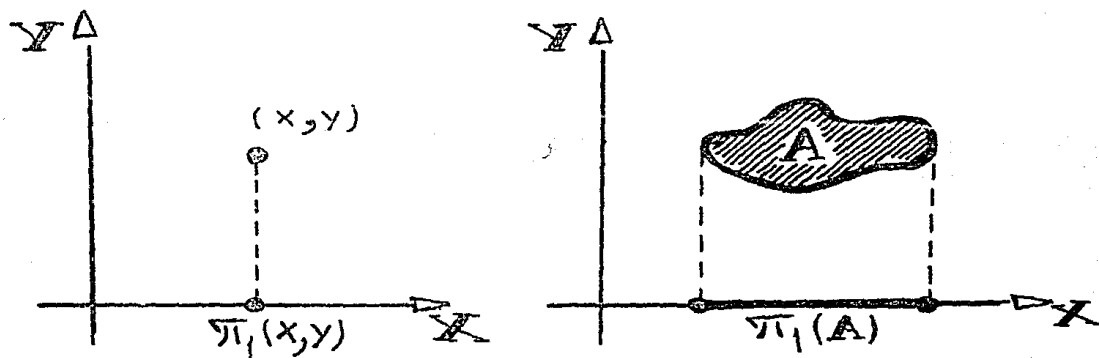


Fig. 32

De la misma forma podemos definir una función proyección sobre el eje  $Y$ ,  $\pi_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\pi_2(x, y) = y$$

Mostraremos que las funciones  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son continuas, ya que ellas nos llevarán en forma natural a saber que otras funciones más complicadas son continuas.

Sea  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  y consideremos una vecindad de radio  $\epsilon > 0$  con centro en  $\pi_1(x_0, y_0) = x_0$  (Fig. 33)

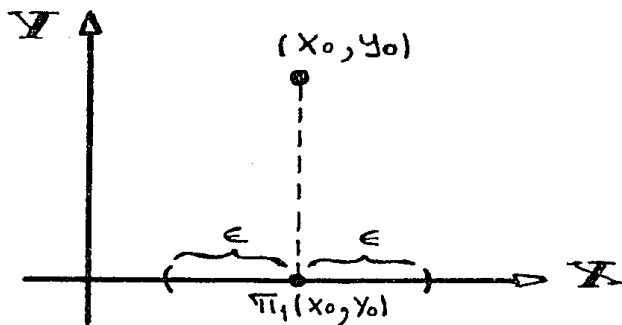


Fig. 33

Deseamos encontrar un disco de radio  $\delta$  con centro en  $(x_0, y_0)$ , de tal forma que si  $(x, y) \in D((x_0, y_0), \delta)$  entonces  $\pi_1(x, y) \in V(\pi_1(x_0, y_0), \epsilon)$ .

Como los puntos  $(x, y)$  que caen en  $V(\pi_1(x_0, y_0), \epsilon)$  están en la banda limitada por las rectas  $x = x_0 - \epsilon$  y  $x = x_0 + \epsilon$  (Fig. 34), entonces el disco  $D((x_0, y_0), \delta)$  debemos de for

marlo dentro de la banda. Como  $(x_0, y_0)$  es  
 to en la banda, debemos tomar  $\delta \leq \epsilon$ ,

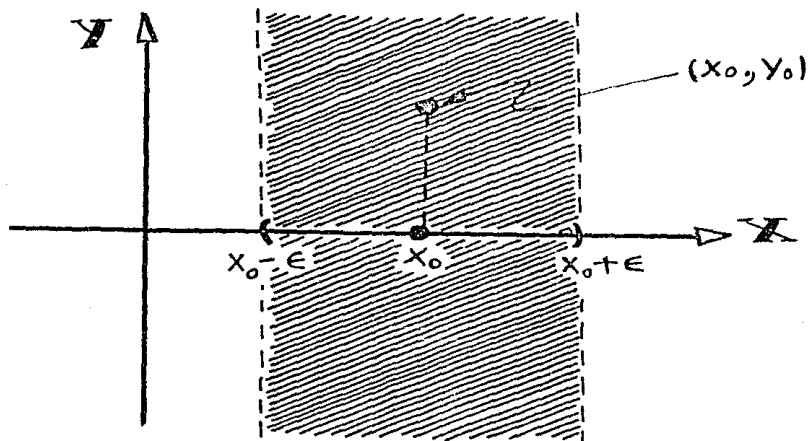


Fig. 34

ya que de otra forma el disco se saldría  
 de la banda y habría puntos  $(x, y)$  que  
 no caerían en la vecindad  $V(x_0, \epsilon)$

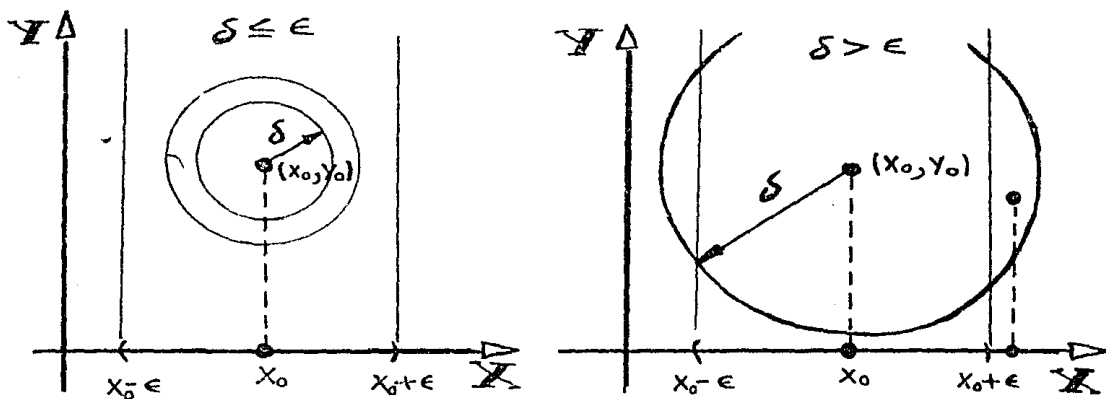


Fig. 35

Como ya hemos encontrado un disco cuyos puntos bajo la función  $\Pi_1$  van a dar a la vecindad  $V(x_0, \epsilon)$ , hemos terminado de comprobar que  $\Pi_1$  es continua.

**EJEMPLO 10** Consideremos un campo escalar  $f$  constante, es decir, el cual asigna a cada  $(x, y)$  un número  $k$  (Fig. 36)

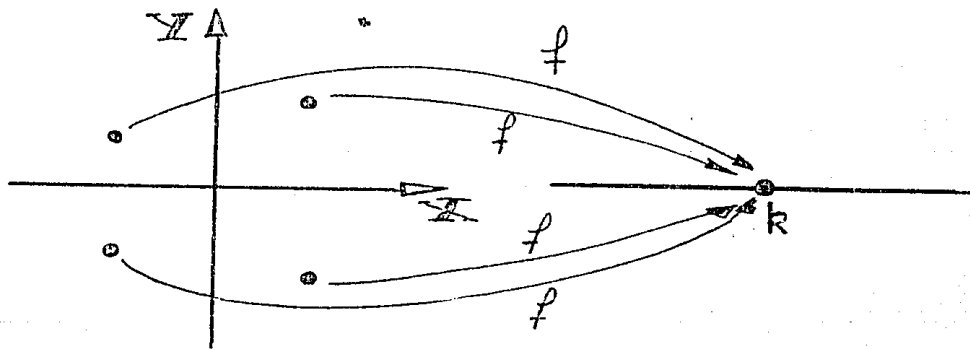


Fig. 36

Para mostrar que  $f$  es continua en  $(x_0, y_0)$ , debemos de tomar una vecindad de radio  $\epsilon > 0$  y con centro en  $f(x_0, y_0) = k$ , la cual denotaremos por  $V(k, \epsilon)$ , para después encontrar un disco con centro en  $(x_0, y_0)$  y de radio  $\delta$ , de tal suerte que los puntos de él vayan a dar a  $V(k, \epsilon)$  (Fig. 37)



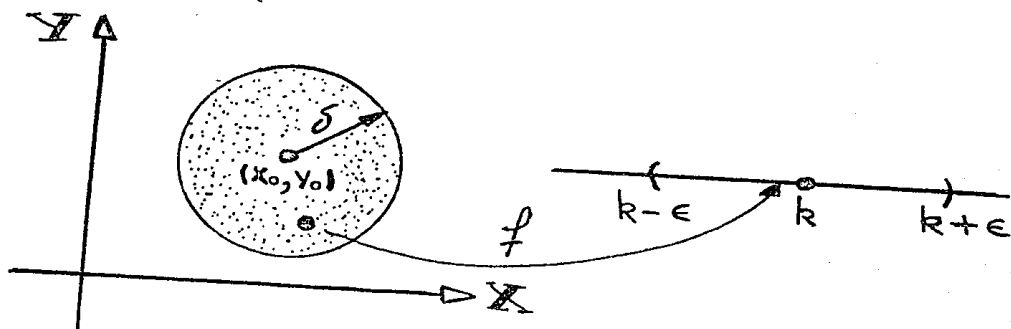


Fig. 37

Como todos los puntos  $(x, y)$  van a dar a el número  $k$ , es decir, siempre caén en el centro de la vecindad  $V(k, \epsilon)$  entonces podemos tomar a  $\delta$  como cualquier número positivo.

## EJERCICIOS.

- 1.- Mostrar que la función  $\sqrt{x}$  es continua en cualquier punto  $(x_0, y_0)$
- 2.- Para los siguientes campos escalares es fácil de identificar los puntos  $(x, y)$  que van a dar a la vecindad  $V(\phi(x_0, y_0), \epsilon)$  bajo tal campo. Muestre que tales funciones son continuas en  $(x_0, y_0)$

$$(a) f(x, y) = -x$$

$$(b) f(x, y) = -y$$

$$(c) f(x, y) = 2x$$

$$(d) f(x, y) = -2x$$

$$(e) f(x, y) = x^2$$

$$(f) f(x, y) = y^2$$

Antes de seguir dando ejemplos sueltos de funciones continuas, daremos varios resultados (sin demostrar) con los cuales podremos dar una lista amplia de funciones continuas.

**RESULTADO 1** Si  $f$  y  $g$  son campos escalares continuos en  $(x_0, y_0)$  entonces

(i)  $f \pm g$  es continuo en  $(x_0, y_0)$

(ii)  $f \cdot g$  es continuo en  $(x_0, y_0)$

(iii)  $1/g$  es continuo en  $(x_0, y_0)$

(iv)  $f/g$  es continuo en  $(x_0, y_0)$

Estos resultados son intuitivamente claros porque si  $(x, y)$  está cerca de  $(x_0, y_0)$  entonces por la continuidad de  $f$  y  $g$  tendremos que  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  están cerca de  $f(x_0, y_0)$  y  $g(x_0, y_0)$  respectivamente. Con lo anterior podemos afirmar que  $f(x, y) \pm g(x, y)$  está cerca de  $f(x_0, y_0) \pm g(x_0, y_0)$

De la misma forma si  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  están cerca de  $f(x_0, y_0)$  y  $g(x_0, y_0)$  entonces  $f(x, y)g(x, y)$  está cerca de el producto  $f(x_0, y_0)g(x_0, y_0)$ .

Con este resultado podemos saber que campos escalares del tipo:

- i)  $f(x, y) = x \pm y$
- ii)  $f(x, y) = xy$
- iii)  $f(x, y) = x/y^a$
- iv)  $f(x, y) = x^2 - y^2$

son continuos. Pues estos se pueden expresar en términos de las funciones proyección  $\pi_1$  o  $\pi_2$ . Por ejemplo

$$\begin{aligned} f(x, y) = x + y &= \pi_1(x, y) + \pi_2(x, y) \\ &= (\pi_1 + \pi_2)(x, y) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $f = \pi_1 + \pi_2$ , y como  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son continuas entonces  $f$  es continuo.

Los demás casos se tratan de la misma forma.

Daremos algunos ejemplos más complicados.

## EJEMPLO 11

Hacer ver que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{Sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

Una técnica muy útil es la de usar coordenadas polares, para expresar a las variables  $x$  e  $y$  (Fig. 38)

$$x = R \cos \phi$$

$$y = R \text{Sen} \phi$$

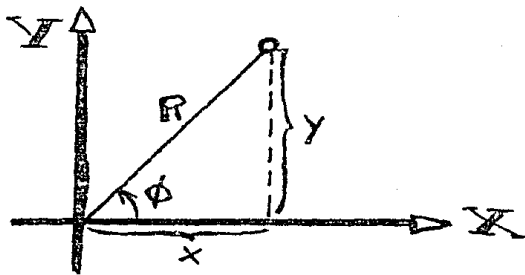


Fig. 38

Claramente se observa que:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

sustituyendo esta expresión en el límite y observando que si  $(x,y)$  es próximo a  $(0,0)$  entonces  $R$  es próximo a cero, tendremos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{Sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} R^2}{R^2} = 1$$

Cabe mencionar que el uso de las coordenadas polares se hace, generalmente, cuando aparecen expresiones del tipo  $x^2 + y^2$  ó  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

**EJEMPLO 12**

Hacer ver que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Haciendo uso de las coordenadas polares se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{(R \cos \phi)(R \sin \phi)}{R} \\ &= R \cos \phi \sin \phi \end{aligned}$$

donde hemos simplificado  $R$  por ser  $(x,y)$  diferente de  $(0,0)$

Como  $-1 \leq \cos \phi \sin \phi \leq 1$  entonces  $-R \leq R \cos \phi \sin \phi \leq R$  (por ser  $R \geq 0$ ). Podemos concluir entonces que para  $(x,y)$  próximos a  $(0,0)$  es  $R$  próximo a cero y por la regla del emparedado se tiene que

$$\lim_{R \rightarrow 0} R \cos \phi \sin \phi = 0$$

y por lo tanto

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow 0$$

cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

**EJEMPLO 13** Mostrar que el

límite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x}{x^2+y^2}$$

no existe.

Consideremos el conjunto de puntos  $\mathcal{L} = \{(x, y) : y = x\}$ . La expresión dada en el límite para puntos  $x$  y  $y$  del conjunto  $\mathcal{L}$  toma la forma:

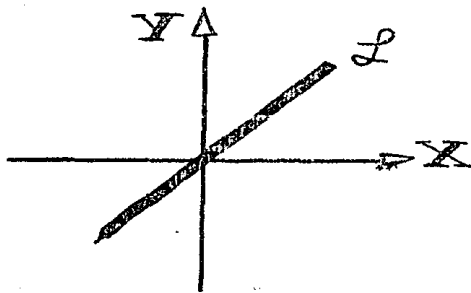


Fig. 39

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+y^2} &= \frac{x}{x^2+x^2} \\ &= \frac{x}{2x^2} \end{aligned}$$

y como  $x \neq 0$  entonces

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2x}$$

Y si tomamos  $(x, y)$  próximo a  $(0, 0)$  y sobre  $\mathcal{L}$  entonces

$$\frac{1}{2x} \longrightarrow \infty \quad \text{si } x > 0$$

$$\frac{1}{2x} \longrightarrow -\infty \quad \text{si } x < 0$$

Por lo tanto

$$\frac{x}{x^2 + y^2} \longrightarrow \infty \quad \text{si } x > 0$$

$$\frac{x}{x^2 + y^2} \longrightarrow -\infty \quad \text{si } x < 0$$

Como la cantidad  $x/x^2 + y^2$  no se aproxima a ningún número real y ni tampoco lo hace con un infinito entonces el límite no existe.

Dejamos al lector el probar este límite por medio de coordenadas polares.

**EJEMPLO 14** Mostrar que

el límite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x}{|x| + |y|}$$

no existe

Un método para mostrar que este límite no existe, consiste en encontrar dos trayectorias que se acercan a  $(0,0)$ , pero mediante las cuales los valores de la función se aproximen a números diferentes. La validez de este método se debe a que en caso de que el límite existiera entonces la función se debería de aproximar a un mismo número y no a dos.

Consideremos las dos trayectorias

$$L_1 = \{ (x, y) : y = 2x \}$$

$$L_2 = \{ (x, y) : y = \frac{1}{2}x \}$$

La expresión

$$\frac{x}{|x| + |y|}$$

para cuando  $(x, y)$  está en  $L_1$  ó  $L_2$  toma la forma:

$$\frac{x}{|x| + |y|} = \frac{x}{|x| + |2x|} = \frac{x}{x + 2x} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{|x| + |y|} = \frac{x}{|x| + |\frac{1}{2}x|} = \frac{x}{x + \frac{x}{2}} = \frac{2}{3}$$



donde hemos tomado  $x > 0$ . Por lo tanto

$$\frac{x}{|x| + |y|} \rightarrow \frac{1}{3} \quad \text{para } (x, y) \text{ sobre } \mathcal{L}_1 \text{ con } x > 0.$$

$$\frac{x}{|x| + |y|} \rightarrow \frac{2}{3} \quad \text{para } (x, y) \text{ sobre } \mathcal{L}_2 \text{ con } x > 0.$$

Por lo tanto el límite no existe.

### 3.4. DERIVADAS PARCIALES.

Para motivar este tema consideremos el ejemplo 3 de este capítulo, el cual trata sobre la difusión de una substancia.

Ya habíamos supuesto antes que la concentración dependía únicamente de  $y$  y  $z$

$$C = C(y, z)$$

También hablamos sobre la función que mide la masa de la droga localizada

en el cilindro limitado por  $y=0$  y  $y=y_0$  al tiempo  $t$ :

$$m = m(y_0, t)$$

Nuestro problema será el de hacer un estudio más profundo sobre el comportamiento que rige a la función concentración.

Como la masa de la droga en el tubo va variando en el espacio y en el tiempo, y como ella es la responsable de que en el tubo haya diferentes concentraciones, entonces podemos analizar como es que la masa varía en el tiempo y en el espacio, para así tener una idea de como varía la concentración en el espacio y el tiempo.

Analizaremos, primeramente, las variaciones de la masa en el espacio, es decir, con respecto a  $y$  para un tiempo dado  $t=t_0$ .

Fijémosnos en un disco de centro  $y=y_0$  en un cierto tiempo  $t=t_0$ , se cumple que:

$$m(y_0+h, t_0) - m(y_0, t_0) = \begin{array}{l} \text{Cantidad de droga en} \\ \text{el cilindro de altura } h \\ \text{al tiempo } t_0. \end{array}$$

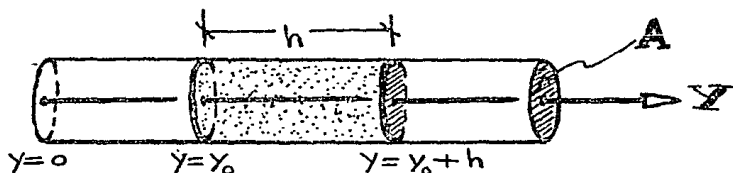


Fig. 40

y si además el área de la base del tubo es  $A$  entonces

$$\frac{m(y_0+h, t_0) - m(y_0, t_0)}{Ah} = \text{Concentración ó densidad de la droga en el cilindro de altura } h \text{ al tiempo } t_0.$$

(recuerde que la densidad o concentración  $\rho$  es igual a la masa  $m$  entre el volumen  $V$   
 $\rho = m/V$ )

Se observa ahora que si  $h$  es muy pequeño entonces el cilindro de altura  $h$  se va aplastando y en el límite coincide con la base del cilindro que se encuentra en el punto  $y=y_0$  (Fig. 40), así que la densidad del cilindro en el límite se transforma en la densidad que hay en el disco de centro  $y=y_0$ , es decir,  $C=C(y_0, t_0)$ . Lo anterior lo podemos escribir matemáticamente como sigue:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(y_0+h, t_0) - m(y_0, t_0)}{A \cdot h} = C(y_0, t_0)$$

y como  $A$  no depende de  $h$  entonces

$$\frac{1}{A} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(y_0+h, t_0) - m(y_0, t_0)}{h} = C(y_0, t_0)$$

El límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(y_0+h, t_0) - m(y_0, t_0)}{h}$$

aparece frecuentemente en Matemáticas, por ello se le da un nombre especial.

**DEFINICION 4** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

un campo escalar y  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Se define la derivada parcial de  $f$  con respecto a la primer componente, en este caso  $x$ , como el límite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

De la misma manera se define la derivada parcial de  $f$  con respecto a la segunda componente como:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Cabe observar que la indicación "con respecto a la primera componente o segunda componente", tiene como objeto el de indicar que componente se incrementa mediante la variable  $h$ .

A continuación se da un ejemplo de como calcular derivadas parciales.

**EJEMPLO 15** Sea  $m$  el campo escalar  $m(y, t) = y^2 + t^2 + ty$ . Calcular  $\frac{\partial m}{\partial y}$  en el punto  $(y_0, t_0)$ .

Usando la definición de derivada parcial tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial y}(y_0, t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(y_0 + h, t_0) - m(y_0, t_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(y_0 + h)^2 + t_0^2 + t_0(y_0 + h) - (y_0^2 + t_0^2 + t_0 y_0)}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2y_0 h + h^2 + t_0 h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2y_0 + h + t_0) = 2y_0 + t_0$$

$$\therefore \frac{\partial m}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 + t_0$$

Existe un método más fácil y rápido de calcular derivadas parciales. Como se observa la expresión  $f(x_0 + h, y_0)$  depende únicamente de la variable  $h$ , podemos entonces definir una función de una sola variable como:

$$\varphi(h) = f(x_0 + h, y_0)$$

donde  $\varphi(0) = f(x_0, y_0)$ . Usando a la función  $\varphi$  podemos reescribir la definición de derivada parcial con respecto a la primer componente como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h}$$

y se observa que el último límite no es otra cosa que la derivada de la función  $\varphi$  en el punto  $h=0$ . Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d\varphi}{dh}(0)$$

A continuación damos un ejemplo de como calcular derivadas parciales con este método

**EJEMPLO 16** Calcular  $\partial f/\partial x$  para el campo escalar  $f(x, y) = \text{Sen}(x^2 + y^2)$ .

En este ejemplo la función  $\varphi$  viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= f(x+h, y) = \text{Sen}((x+h)^2 + y^2) \\ &= \text{Sen}(x^2 + y^2 + 2xh + h^2)\end{aligned}$$

Ahora calculamos la derivada de la función  $\varphi$  (recuerde que la variable es  $h$ )

$$\varphi'(h) = (2x + 2h) \text{Cos}(x^2 + y^2 + 2xh + h^2)$$

y finalmente la evaluamos en cero, es decir, hacemos  $h=0$  en  $\varphi'(h)$ :

$$\varphi'(0) = 2x \cos(x^2 + y^2)$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cos(x^2 + y^2)$$

Usando la notación de derivadas parciales, podemos reescribir la fórmula:

$$\frac{1}{A} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(y_0 + h, t_0) - m(y_0, t_0)}{h} = C(y_0, t_0)$$

como

$$\frac{1}{A} \frac{\partial m}{\partial y}(y_0, t_0) = C(y_0, t_0)$$

Esta fórmula vale para cualquier pareja  $(y, t)$ , por lo tanto podemos obtener la siguiente fórmula más general:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial m}{\partial y}(y, t) = C(y, t)$$

Para continuar con nuestro estudio, analizaremos la variación de la masa en el tiempo, para ello mantendremos constante a la variable  $y$ . Se cumple:

$$m(y_0, t_0 + h) - m(y_0, t_0) = \text{Variación en la masa de la droga en el cilindro de bases } y=0 \text{ y } y=y_0 \text{ en el lapso de tiempo } h.$$



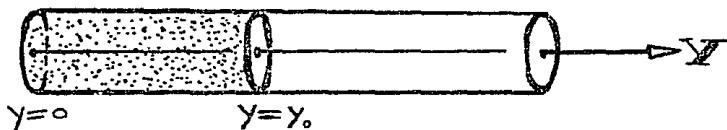


Fig. 41

entonces

$$\frac{m(y_0, t_0+h) - m(y_0, t_0)}{h}$$

mide la velocidad promedio con que cambia la masa de la droga en el cilindro de bases  $y=0$  y  $y=y_0$  en el lapso de tiempo  $h$ .

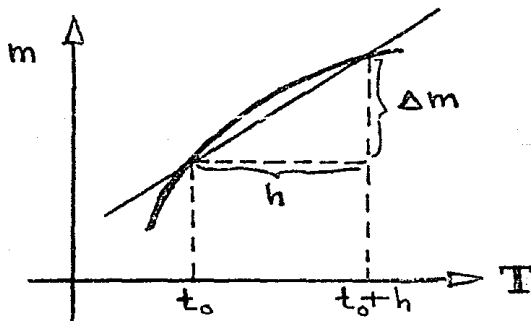


Fig. 42

Para obtener la rapidez instantánea necesitamos hacer  $h$  que tienda a cero (Fig. 42). Por lo tanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(y_0, t_0+h) - m(y_0, t_0)}{h}$$

mide la rapidez instantánea con que cambia la masa de la droga en el cilindro de bases  $y=0$  y  $y=y_0$ , para el tiempo  $t=t_0$ .

De lo anterior concluimos que  $\partial m / \partial t$  representa la velocidad con que cambia la masa en el cilindro que va de  $y=0$  a  $y=y_0$ . Como la única forma en que puede cambiar esta masa es a través del disco localizado en  $y=y_0$ , podemos decir que  $\partial m / \partial t$  representa el flujo de droga a través del disco localizado en  $y=y_0$  (Fig. 41)

Teniendo en cuenta que  $\partial m / \partial t$  es el flujo de droga a través del disco localizado en  $y=y_0$ , podemos suponer que  $\partial m / \partial t$  es proporcional a  $A \partial c / \partial y$ , es decir:

$$\frac{\partial m}{\partial t} \propto A \frac{\partial c}{\partial y}$$

pues:

(1) Mientras más grande sea el área  $A$ , más fácilmente podrán desplazarse las moléculas de droga a través del disco localizado en  $y=y_0$ . Esto se puede comparar con el flujo de un grupo de personas que quieren atravesar una puerta, mientras más grande sea la puerta más fuerte será el flujo y mientras más pequeña sea la puerta, más pequeño será el flujo.

(2) La otra parte de la proporcionalidad contempla el siguiente hecho. Si hay una concentración enorme de la sustancia, para algunos puntos, entonces es intuitivamente claro que el flujo será pequeño, pues si la concentración es alta entonces un gran número de moléculas de la droga están amontonadas y con poco espacio para moverse. Lo anterior se puede comparar con el flujo de una cantidad enorme de personas y las cuales están ocupando una pequeña porción de terreno, el flujo es lento mientras no se vayan separando entre sí, para que así tengan un poco más de espacio por donde se puedan desplazar.

Explicaremos ahora que tiene que ver  $\partial c / \partial x$  en todo esto.

Sabemos que la concentración es muy alta en los lugares próximos al lugar en que se inyecta la droga, y por lo tanto el flujo en esos puntos debe de ser muy pequeño, de hecho el flujo es nulo en el lugar en que se inyecta la droga al tiempo  $t=0$ . En cambio para puntos retirados del punto de inyección, tendremos un flujo más grande, ya que en tales lugares la concentración es baja (Fig. 43)

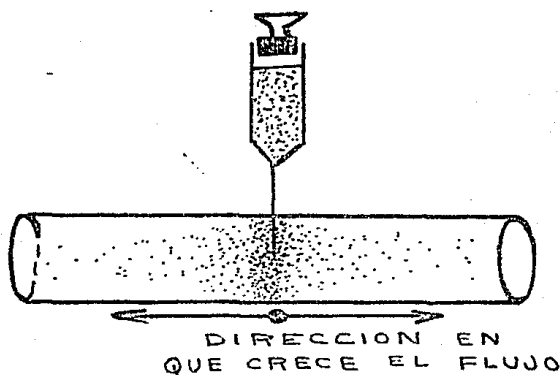


Fig. 43

El concepto matemático que nos describe todo lo anterior es precisamente  $\partial C / \partial Y$ , pues tal magnitud tiende a decrecer precisamente en las cercanías de  $y = \mu$  de se hizo la inyección. Tal aseveración se debe a que en las proximidades en que se hizo la inyección, la función  $C = C(Y, t)$  tiene que ser convexa (Fig. 44)

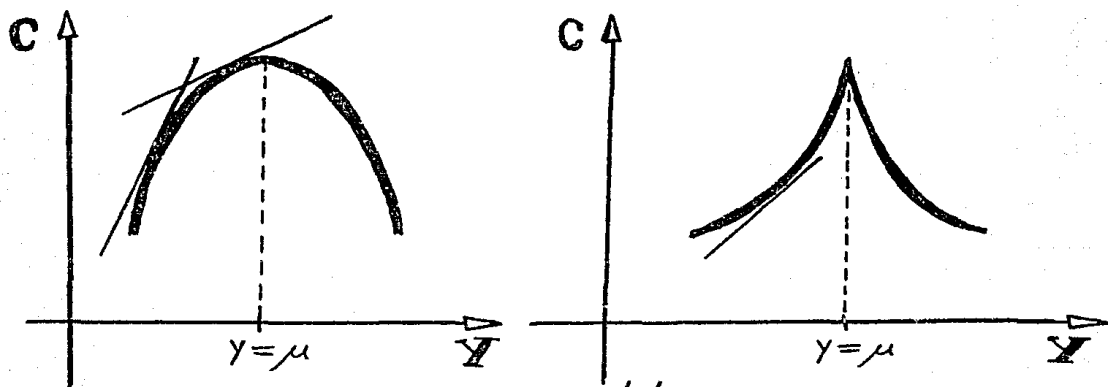


Fig. 44

La función  $C = C(y, t_0)$  no puede ser cóncava porque entonces el flujo cerca de  $y = a$  sería muy grande, y esto no puede ser. De la misma manera se obtiene que el flujo es grande para cuando  $\partial C / \partial y$  es creciente, es decir, en los puntos en que la función  $C = C(y, t_0)$  es cóncava.

Como la relación  $\frac{\partial m}{\partial t} \propto A \frac{\partial C}{\partial y}$  no es del todo mala, podemos concluir que:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = kA \frac{\partial C}{\partial y}$$

Las ecuaciones que describen el cambio de masa en el espacio y en el tiempo son:

$$\frac{\partial m}{\partial y} = A C(y, t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial m}{\partial t} = kA \frac{\partial C}{\partial y}$$

Antes de continuar con nuestro problema (aún no terminamos), revisaremos el tema sobre derivadas parciales de orden superior.

Considerando el ejemplo 16 de este capítulo, se observa que la parcial de la función  $f(x, y) = \text{Sen}(x^2 + y^2)$ , es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{Cos}(x^2 + y^2)$$

es de nuevo una función de dos variables, y por lo tanto es susceptible de volverla a derivar parcialmente. Las dos posibilidades que hay para derivar parcialmente a  $\partial f / \partial x$  son:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

donde el parentesis sirve para indicar que la función que se está derivando es  $\partial f / \partial x$ . De la misma manera se habla de las derivadas parciales de  $\partial f / \partial y$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Las derivadas parciales que estamos estudiando, se llaman derivadas parciales de orden dos, ya que para su realización es necesario derivar parcialmente dos veces.

Existe una forma más corta de simbolizar a las derivadas parciales de orden dos, estas son:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Observe el lector que las nuevas notaciones se leen de derecha a izquierda, por ejemplo:  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  indica que pri-

mero derivamos con respecto a  $x$  y después con respecto a  $y$ , esto está de acuerdo con el símbolo original:  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$ . Los símbolos en

que aparece una sola variable no se prestan a malentendidos  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  o'  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ , pues en ellas

se deriva parcialmente con respecto a la única variable que aparece.

Hablando de derivadas parciales de orden dos, nos preguntamos por la diferencia que hay entre las fórmulas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Se observa que difieren por el orden en que se obtienen las derivadas parciales de la función  $f$ . Obtengamos el valor de tales parciales cuando  $f(x,y) = \text{Sen}(x^2 + y^2)$ . Es claro que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{Cos}(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \text{Cos}(x^2 + y^2)$$

entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4xy \operatorname{Sen}(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy \operatorname{Sen}(x^2 + y^2)$$

Para este ejemplo se satisface la igualdad:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

y en este caso se dice que se da la igualdad entre las derivadas parciales cruzadas.

Como ya hemos hablado bastante de derivadas parciales de orden dos, y no hemos visto para que sirven, daremos un ejemplo en donde se aplican y después daremos un ejemplo de una función en la que no se cumple la igualdad de las derivadas parciales cruzadas.

Según vimos las ecuaciones que rigen la variación de la masa de la droga en el espacio y en el tiempo son:



$$\frac{\partial m}{\partial y} = AC(y, t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial m}{\partial t} = kA \frac{\partial C}{\partial y}$$

Si derivamos a la primera con respecto a  $t$  y a la segunda con respecto a  $y$ , tendremos:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial t \partial y} = A \frac{\partial C}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 m}{\partial y \partial t} = kA \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

y si suponemos la igualdad de las derivadas parciales cruzadas tendremos:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

Esta última ecuación se llama ecuación de difusión, ya que describe procesos de difusión. Además es un ejemplo de las llamadas ecuaciones en derivadas parciales, pues en ella se plantea el problema de encontrar una función, en este ejemplo es la función concentración  $C=C(y, t)$ , que cumpla con los requerimientos de derivación parcial, es decir, que la derivada con respecto a  $t$  sea igual a  $k$ -veces la derivada doble con respecto a  $y$ .

Para terminar con el problema,

con el cual iniciamos esta sección, daremos un ejemplo de un campo escalar  $C = C(y, t)$  que satisface la ecuación de difusión.

Dejamos para el lector probar que el campo escalar:

$$C(y, t) = \frac{m}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{4kt}}$$

satisface la ecuación de difusión, en donde  $m$  indica la masa total de la droga en el tubo.

Dejamos también para el lector probar que las gráficas de la función  $C = C(y, t)$ , en tiempos diferentes, son del tipo mostrado en la Fig. 45. Las personas que conocen la materia de Probabilidad, se darán cuenta que tales funciones son casi funciones de densidad gaussianas con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2 = 2kt$ . A partir de estos datos se concluye que la concentración máxima se alcanza cuando  $y = \mu$  y su valor es:

$$C(\mu, t) = \frac{m}{\sqrt{4\pi kt}}$$

Además la dispersión o variación de la droga depende de la constante  $k$ , llamada constante de difusión y su valor depende del solvente y del soluto, y del tiempo  $\sigma^2 = 2kt$ . Conforme el tiempo va pasando la gráfica de la función concentración se va aplastando. (Fig. 45)

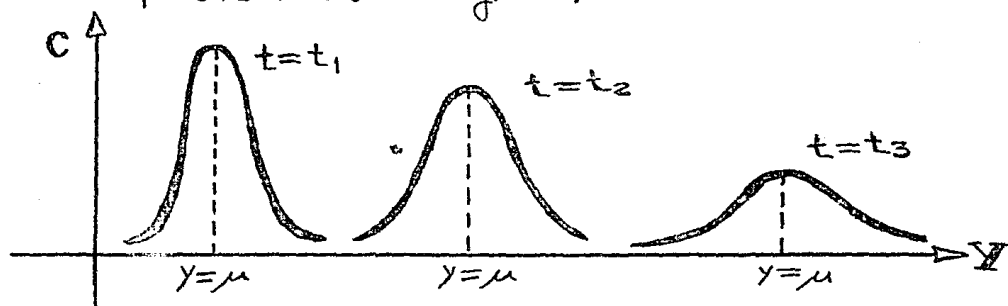


Fig. 45

También dejamos para el lector darle una interpretación física a las integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{4kt}} dy = m$$

$$\int_{\mu-\alpha}^{\mu+\beta} \frac{m}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{4kt}} dy$$

Para analizar la función concentración en tiempos cercanos a cero, es decir, para tiempos próximos al momento de haber inyectado la droga, tomamos el tiempo en retroce-

So, es decir, cuando  $t \rightarrow 0$ . Las gráficas que ahora se obtienen son mostradas en la Fig 46. En ellas se observa que el máximo de la función tiende a infinito:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} C(\mu, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{m}{\sqrt{4\pi kt}} = \infty$$

Mientras que la varianza  $\sigma^2 = 2kt$  tiende a cero, es decir, la concentración tiende a acumularse en el punto  $y = \mu$ . Este proceso de límite nos conduce a la conocida función delta de Dirac  $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  con

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \mu \\ \infty & \text{si } t = \mu \end{cases}$$

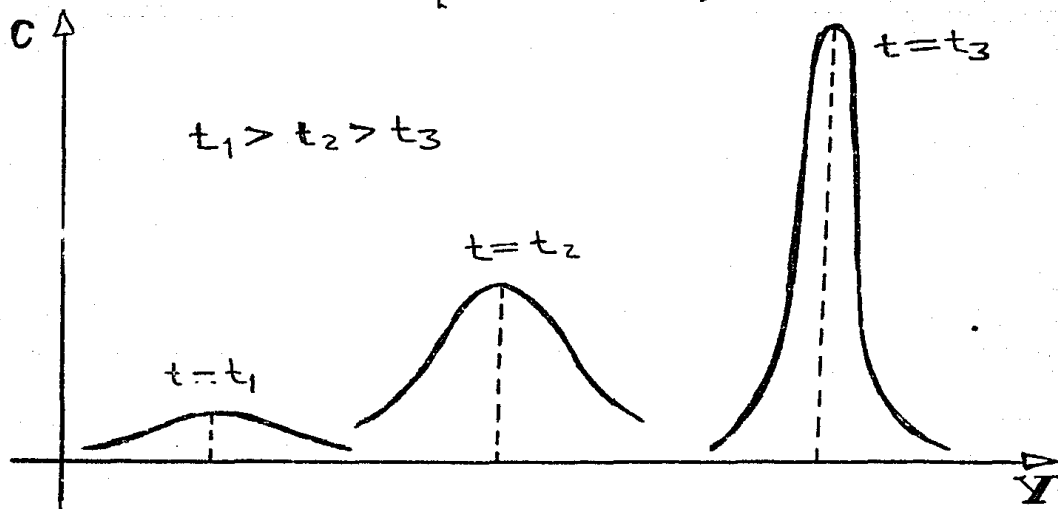


Fig. 46

Daremos ahora un ejemplo de un campo escalar para el cual no se da la igualdad de las derivadas parciales cruzadas.

**EJEMPLO 17** Mostrar que el campo escalar:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

satisface  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ .

Antes de pasar a los cálculos conviene hacer una observación. Generalmente los alumnos piensan que del hecho de que  $f(0, 0) = 0$ , sigue que las parciales, en dicho punto, también valen cero y no toman en cuenta que la definición de derivadas parciales exige mirar a los puntos que se encuentran cerca de  $(0, 0)$  (Fig 47)

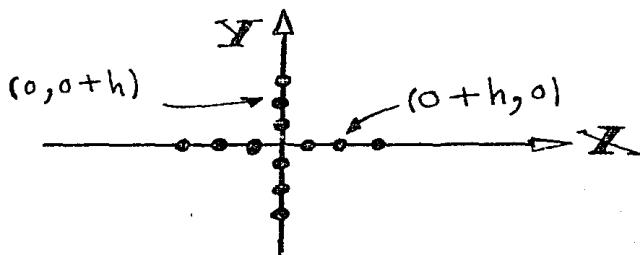


Fig. 47

Por la definición de derivada parcial se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}\end{aligned}$$

de la misma forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$$

Pasaremos a calcular las siguientes parciales:  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Como el punto  $(0,h)$  es diferente de  $(0,0)$ , tenemos que fijarnos en la parte de la función:

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

y como en ella sí van involucrados los puntos cercanos a  $(0, h)$ , tenemos que el cálculo de las derivadas parciales se hace en forma directa:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{[y(x^2 - y^2) + 2x^2y](x^2 + y^2) - 2x^2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{[x(x^2 - y^2) - 2xy^2](x^2 + y^2) - 2xy^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Por lo tanto  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) = \frac{(-h^3)(h^2)}{h^4} = -h$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) = \frac{(h^3)(h^2)}{h^4} = h$$

Ahora calcularemos  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ , el

cálculo de esta parcial no es directo y hay que calcularla de acuerdo a la definición, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

De la misma forma  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ .

Podemos enlistar todos los cálculos hecho como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = -h$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = h$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Volviendo a las derivadas parciales que se querían calcular tenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = -1$$

mientras que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$



Por lo tanto  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$   
 y entonces no se cumple la igualdad.

Así como se puede hablar de derivadas parciales de orden dos, podemos hablar de derivadas parciales de orden tres. Su definición es como sigue:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)$$

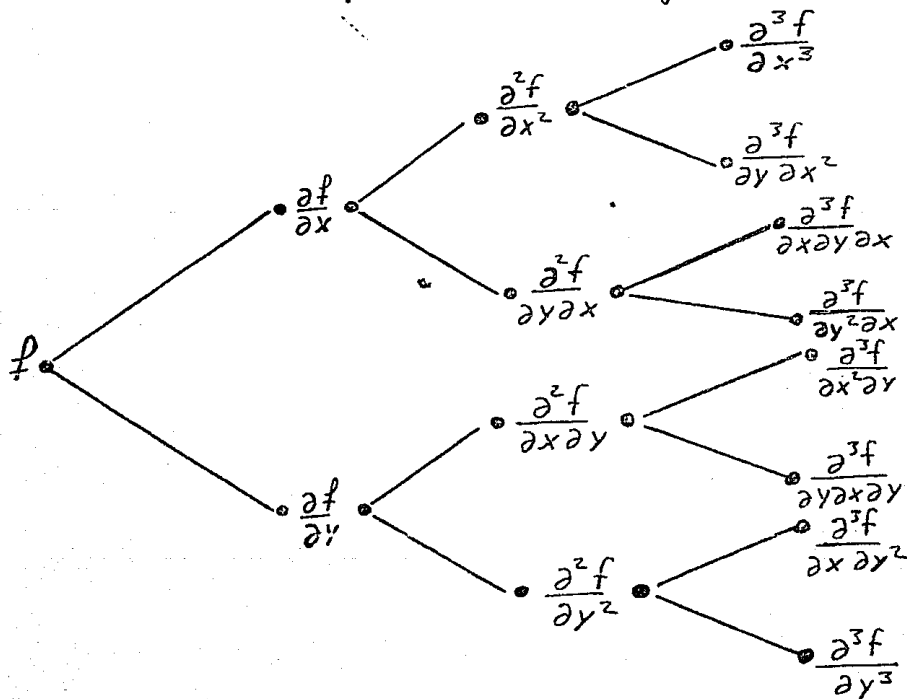
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)$$

Recuerde que el orden de las parciales es de derecha a izquierda. Además las diferentes derivadas de cualquier orden se obtienen a partir del siguiente diagrama:



### EJERCICIOS.

1.- Calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  para los campos escalares:

$$(a) \quad f(x, y) = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$$

$$(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{Sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2.- Encontrar una función que sea continua en todo  $\mathbb{R}^2$ , pero que no existan  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

3.- Encontrar una función  $f$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existan pero con  $f$  no continua en  $(0, 0)$ .

### 5. DERIVADAS DIRECCIONALES.

Suponga que tenemos un gas contenido en un tanque, en el cual podemos controlar las variables de estado temperatura  $T$  y presión  $P$ . Supongamos además que la temperatura y presión inicial son  $T_0$  y  $P_0$  respectivamente. Supongamos también que la velocidad con que cambian la temperatura y presión vienen dadas por el vector:

$$V = \left( \alpha \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min.}}, \beta \frac{\text{atms.}}{\text{min.}} \right)$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  constantes. El vector  $V$  nos indica que después de un minuto la temperatura se incrementa en  $\alpha^{\circ}\text{C}$  y la presión en  $\beta$  atms. Por lo tanto después de  $t$  minutos la temperatura y presión del gas serán:

$$\begin{aligned} T(t) &= T_0 + t\alpha \\ P(t) &= P_0 + t\beta \end{aligned}$$

Las fórmulas anteriores nos indican que estamos controlando a  $T$  y  $P$  linealmente. Las ecuaciones para  $T$  y  $P$  se pueden escribir como

$$(T, P) = (T_0, P_0) + t(\alpha, \beta)$$

Por otra parte sabemos que si la temperatura y presión del gas se controlan en la forma ya descrita entonces el volumen del gas queda determinado, pues el volumen depende de  $T$  y  $P$ .

Una pregunta que se plantea a partir de esta discusión es ... ¿cómo es la razón de cambio instantáneo del volumen al tiempo  $t=0$ , es decir, cuando la tem-

peratura y presión valen  $T_0$  y  $P_0$ ?

Para encontrar como es la razón de cambio del volumen, necesitamos comparar el volumen que hay al tiempo  $t=0$  con volúmenes cercanos a él (Fig. 48)

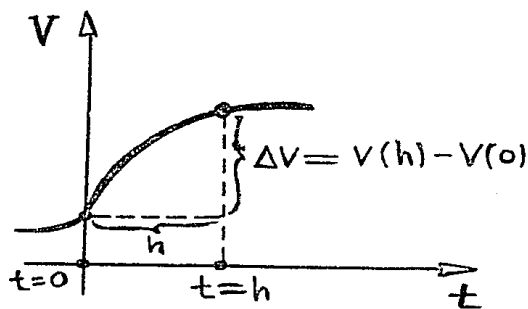


Fig. 48

La velocidad promedio con que cambia el volumen en el lapso de tiempo  $h$  es  $\frac{V(h) - V(0)}{h}$ , y como el volumen del

gas al tiempo  $h$  es  $f(T_0, P_0 + h(\alpha, \beta))$ , mientras que al tiempo 0 es  $f(T_0, P_0)$  entonces la razón de cambio promedio en el lapso de tiempo  $[0, h]$  es:

$$\frac{f(T_0, P_0 + h(\alpha, \beta)) - f(T_0, P_0)}{h}$$

Para obtener la velocidad instantánea de

cambio, debemos tomar a  $h$  muy pequeña. Por lo tanto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(T_0, P_0) + h(\alpha, \beta) - f(T_0, P_0)}{h}$$

mide la razón de cambio instantáneo del volumen.

El límite anterior es importante en Matemáticas y por ello se le da un nombre especial.

**DEFINICIONES** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  y  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  con  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ . La derivada direccional de  $f$  en el punto  $(x_0, y_0)$  y en la dirección  $(\alpha, \beta)$  es:

$$\nabla_{(\alpha, \beta)} f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0) + h(\alpha, \beta) - f(x_0, y_0)}{h}$$

**EJEMPLO 18** Sabemos que la ley que rige a las variables de estado  $T, P$  y  $V$  es  $V = K \frac{T}{P}$  donde  $K$  es

una constante. Hay que calcular  $\nabla_{(\alpha, \beta)} f(T_0, P_0)$

$$\begin{aligned}
 \nabla f(T_0, P_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(T_0, P_0 + h(\alpha, \beta)) - f(T_0, P_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(T_0 + h\alpha, P_0 + h\beta) - f(T_0, P_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K\left(\frac{T_0 + h\alpha}{P_0 + h\beta}\right) - K\left(\frac{T_0}{P_0}\right)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(h\alpha P_0 - h\beta T_0)}{h P_0 (P_0 + h\beta)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(\alpha P_0 - \beta T_0)}{P_0 (P_0 + h\beta)} = \frac{K(\alpha P_0 - \beta T_0)}{P_0^2}
 \end{aligned}$$

¿Cómo se interpreta físicamente este resultado?

Daremos una interpretación geométrica del concepto de derivada direccional:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t(n_1, n_2)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

donde vamos a suponer que  $\|(n_1, n_2)\| = 1$

Consideremos la Fig 49. Sabemos que los puntos  $(x_0, y_0) + t(n_1, n_2)$  están colocados sobre la recta  $\mathcal{L}$  que pasa por  $(x_0, y_0)$  y va en la dirección  $(n_1, n_2)$ . Por lo

tanto  $f(x_0, y_0 + t(n_1, n_2))$  indica el valor de la función para puntos de  $\mathcal{L}$ .

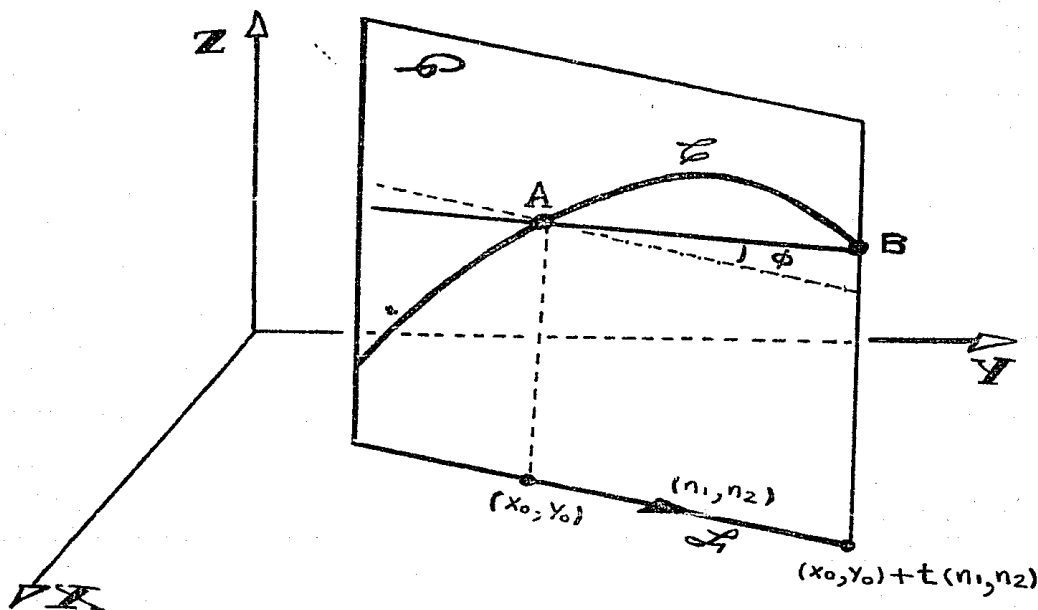


Fig. 49

Si consideramos el plano que pasa por  $\mathcal{L}$  y es perpendicular al plano  $XY$ , entonces  $\mathcal{C}$  intersecta a la gráfica de  $z = f(x, y)$  en la curva  $\mathcal{C}$  (Fig. 49). Afirmando que  $\nabla(n_1, n_2) f(x_0, y_0)$  mide la pendiente de la recta tangente a  $\mathcal{C}$  en  $(x_0, y_0, z_0)$ . Para ver esto consideremos la pendiente de la recta secante que pasa por A y B. (Fig. 49). Como la pendiente no es otra



cosa que la tangente del ángulo de inclinación  $\phi$ , entonces observando la Fig. 49 se tiene:

$$m = \tan \phi = \frac{\text{cateto opuesto a } \phi}{\text{cateto adyacente a } \phi}$$

$$= \frac{f((x_0, y_0) + t(n_1, n_2)) - f(x_0, y_0)}{\|(x_0, y_0) + t(n_1, n_2) - (x_0, y_0)\|}$$

donde hemos tomado  $t > 0$  y  $f$  en los puntos de la recta, es decir la curva  $\mathcal{C}$ , es creciente. Como  $\|(n_1, n_2)\| = 1$  entonces

$$m = \frac{f((x_0, y_0) + t(n_1, n_2)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Si  $t < 0$  entonces el cateto opuesto mide  $f(x_0, y_0) - f((x_0, y_0) + t(n_1, n_2))$ , pues si no fuera así la gráfica de  $f$  tendría un pico en  $(x_0, y_0, z_0)$  (Fig. 50)

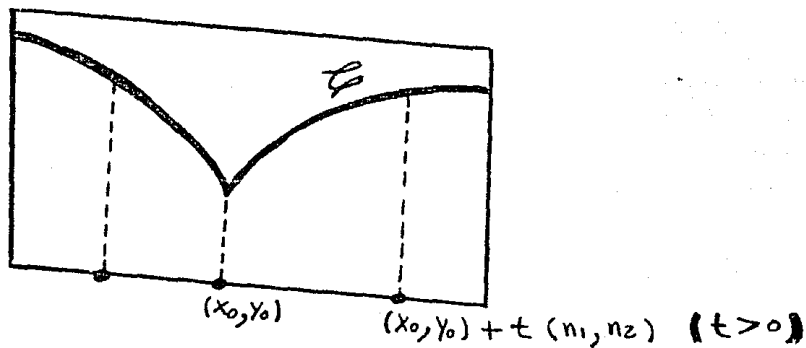


Fig. 50

y entonces  $\mathcal{C}$  no tendría recta tangente en  $(x_0, y_0, z_0)$ . Por otra parte el cateto adyacente mide  $|t| = -t$  (pues  $t < 0$ ). Luego entonces la pendiente de la recta secante es:

$$m = \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 + t(n_1, n_2))}{-t}$$

$$= \frac{f(x_0, y_0 + t(n_1, n_2)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Podemos concluir entonces que la pendiente de la recta secante a  $\mathcal{C}$  en  $(x_0, y_0, z_0)$  es:

$$m = \frac{f(x_0, y_0 + t(n_1, n_2)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Quando hacemos  $t \rightarrow 0$  (es decir cuando  $\mathcal{C}$  se acerca a  $A$ ), sabemos que la pendiente de la recta secante tiende a la pendiente de la recta tangente en  $A$ .

## EJERCICIOS.

1.- La interpretación de  $\nabla_{(n_1, n_2)} f(x_0, y_0)$  la dimos suponiendo que la curva  $\mathcal{C}$  es creciente

Interprete la derivada direccional en el caso en que  $\phi$  es decreciente.

2.- ¿Qué significado geométrico tiene  $\nabla_{(n_1, n_2)} f(x_0, y_0)$  si tal número es positivo, negativo o cero?

### 3.6. GRADIENTE.

Retornemos de nuevo al problema de la difusión de una droga en un tubo (ejemplo 3 de este capítulo)

Recordemos que una de las suposiciones que se hicieron en el caso  $C=C(x,t)$ , fue que el flujo de droga:

$$\frac{\partial m}{\partial t}$$

era proporcional a la magnitud  $\partial C / \partial y$ , es decir:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = k \frac{\partial C}{\partial y}$$

Ahora supongamos que la función  $C$  mide la concentración de droga en segmentos como los de la Fig. 51, y que entonces  $C$  depende de las variables  $x, y$  y  $t$ . Es decir

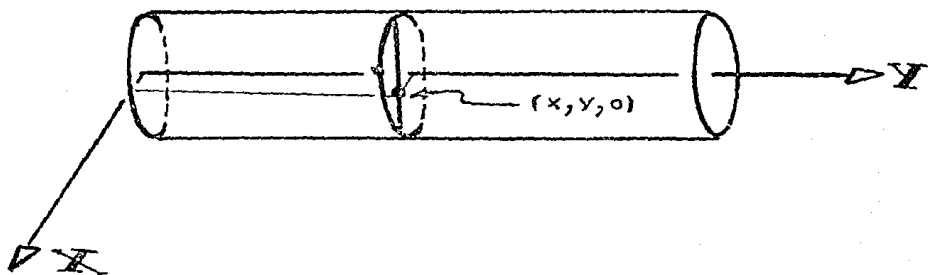


Fig. 51

$C = C(x, y, t)$ . Quisiéramos encontrar un concepto análogo al de flujo. Resulta natural, en este caso, ver el flujo de la droga en un punto  $(x, y)$  como un vector  $J$ . Esto debe de ser así, pues cada punto  $(x, y)$  para un tiempo dado  $t_0$  la droga fluye con cierta rapidez y además el flujo de droga se da en cierta dirección y con cierto sentido (Fig. 52)

Ahora bien para determinar las componentes del vector flujo  $J = (J_x, J_y)$ , basta

observar que  $J_x$  y  $J_y$  son los flujos de la droga en las direcciones  $X$  e  $Y$  (Fig. 52)

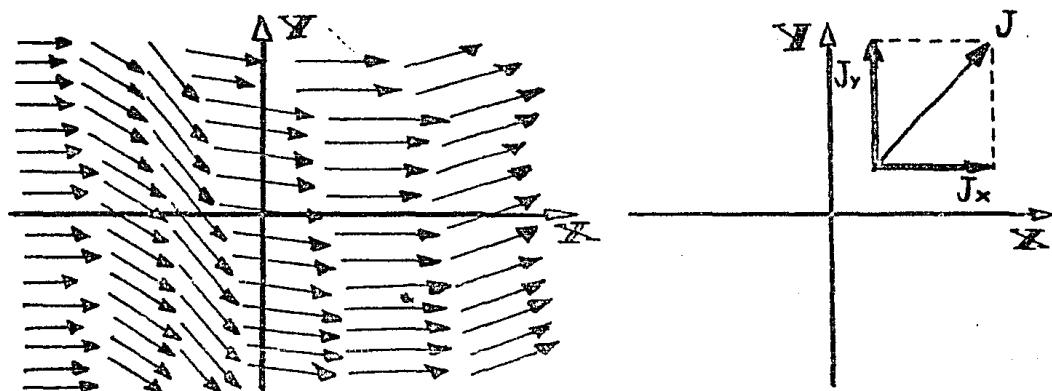


Fig. 52

$$J_x = k \frac{\partial C}{\partial x} \quad \text{y} \quad J_y = k \frac{\partial C}{\partial y}$$

la constante  $k$  es la misma para ambos flujos, pues ella únicamente depende del solvente y soluto que combinamos.

Podemos escribir el vector flujo como  $\mathbf{J} = J_x \mathbf{i} + J_y \mathbf{j}$ , lo cual nos indica que el vector flujo  $\mathbf{J}$  se obtiene de sumar los vectores flujo en las direcciones  $X$  e  $Y$ . También se puede escribir como:

$$\mathbf{J} = \left( k \frac{\partial C}{\partial x}, k \frac{\partial C}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y} \right)$$

Así como hemos hablado de los casos en que  $C$  mide la concentración en un disco y un segmento, también podemos hablar del caso en que  $C$  mide la concentración en cada punto del tubo, en este caso  $C$  depende de las variables  $x, y, z$  y  $t$ , los tres primeros determinan la posición del punto y la cuarta el tiempo, es decir,  $C = C(x, y, z, t)$  (En realidad sólo hemos definido  $\partial C / \partial x$  y  $\partial C / \partial y$  cuando la función  $C$  depende únicamente de dos variables, pero tales parciales se pueden definir en el caso de que  $C$  dependa de más de dos variables. Por ejemplo si  $C = C(x, y, z, t)$ , podemos definir  $\partial C / \partial x$  en forma similar en que dimos la definición, sólo que ahora se piensa a  $y$  y  $z$  constantes. Dejamos como ejercicio al lector dar las definiciones de  $\partial C / \partial x$ ,  $\partial C / \partial y$  y  $\partial C / \partial t$ ). Para esta  $C$  el flujo  $J$  es un vector para el cual  $\|J\|$  nos indica que tan fuerte es el flujo, mientras que su dirección y sentido nos dicen en que forman se difunde la droga en ese punto (Fig. 53)

Razonando como antes obtenemos que:

$$J = (J_x, J_y, J_z)$$

con

$$J_x = k \frac{\partial C}{\partial x}, \quad J_y = k \frac{\partial C}{\partial y}, \quad J_z = k \frac{\partial C}{\partial z}$$

entonces el vector flujo es:

$$\mathbf{J} = k \left( \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

Resumiendo se observa que el vector flujo  $\mathbf{J}$  se puede escribir como:

$$\mathbf{J} = k \frac{\partial C}{\partial x}$$

si  $C$  depende de  $x$  y  $t$ , como:

$$\mathbf{J} = k \left( \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y} \right)$$

si  $C$  depende de  $x, y$  y  $t$ , como:

$$\mathbf{J} = k \left( \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

si  $C$  depende de  $x, y, z$  y  $t$ . Los vectores

$$\frac{\partial C}{\partial x}, \left( \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y} \right), \left( \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

se llaman vectores gradientes de la función concentración  $C$ , y se les denota por  $\nabla C$  ó  $DC$ .

Motivados por la discusión anterior damos la siguiente definición.

**DEFINICION 6** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Un campo escalar y  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . El gradiente o derivada de  $f$  en el punto  $(x_0, y_0)$  es el vector:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

A partir del significado físico del flujo, así como de experimentos podemos deducir algunas propiedades del gradiente.

(1) Los experimentos muestran que la droga fluye de los lugares con alta concentración de droga a los de baja. Esto nos indica que el vector  $J$  debe de estar dirigido en la dirección en que la concentración disminuye. Ahora bien, dependiendo del signo de  $k$  hay dos posibilidades:



= Si  $k > 0$  entonces  $\nabla C$  debe apuntar en la dirección en que la concentración disminuye.

= Si  $k < 0$  entonces  $\nabla C$  debe apuntar en la dirección en que la concentración aumenta, para que así  $k \nabla C$  cambie de sentido y apunte entonces en la dirección en que la concentración disminuye.

De entre los casos  $k > 0$  y  $k < 0$  el que se da es  $k < 0$  y por lo tanto  $\nabla C$  debe de apuntar en la dirección en que la concentración aumenta.

(2) Podemos ir un poco más lejos y probar que  $\nabla C$  es un vector ortogonal a las curvas de nivel, es decir, a las curvas de isoconcentración (Fig. 53) (es decir, las curvas de la forma  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid C(x, y) = cte\}$ )

Si suponemos que  $\nabla C(x_0, y_0)$  no es ortogonal a la curva de isoconcentración entonces el vector flujo  $\mathbf{J} = k \nabla C(x_0, y_0)$  tampoco es ortogonal a la curva de isoconcentración. Por lo tanto el vector flujo  $\mathbf{J}$  se

puede descomponer en dos vectores  $J_N$  y  $J_T$

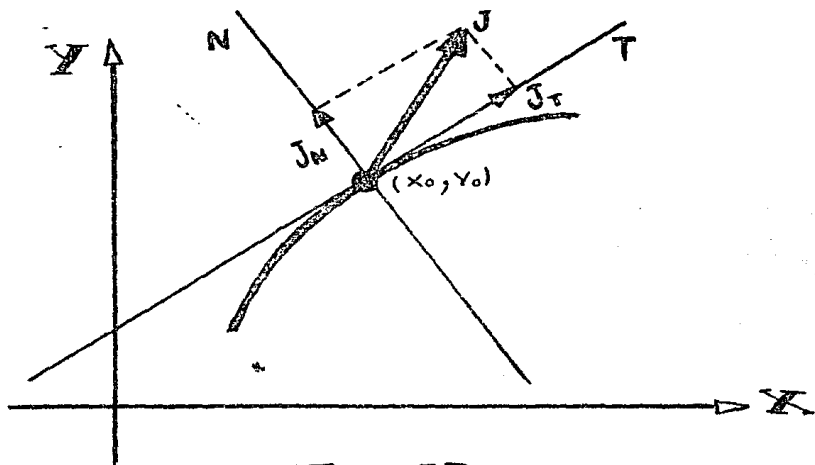


Fig. 53

donde  $J_T$  es la componente de  $J$  sobre la recta tangente a la curva de isocentración en el punto  $(x_0, y_0)$ . Al existir esta componente del flujo, se deduce que la droga también fluye en la dirección de la curva isocentración, esto querría decir que el flujo no avanza directamente en la dirección en que la concentración disminuye [ el vector  $J_N$  avanzaría más directamente ]. Este absurdo muestra que  $\nabla C(x_0, y_0)$  debe ser ortogonal a la curva isocentración en el punto  $(x_0, y_0)$ .

En la sección 3.7. demostraremos matemáticamente las propiedades (1) y (2).

## 3.7. REGLA DE LA CADENA.

Con el material que se verá en esta sección podremos demostrar matemáticamente las propiedades (1) y (2) del gradiente y las cuales fueron presentadas en la sección anterior. Además podremos analizar más profundamente el concepto de derivada direccional y formar conceptos matemáticos más útiles.

Supongamos que tenemos dos funciones tales que la imagen de la primera es tá contenida en el dominio de la segunda:

$$A \xrightarrow{f} f(A) \subseteq B \xrightarrow{g} C$$

Sabemos que en tales condiciones podemos hablar de la composición de  $f$  y  $g$  (  $f$  seguida de  $g$  ) :

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

la cual se define como  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

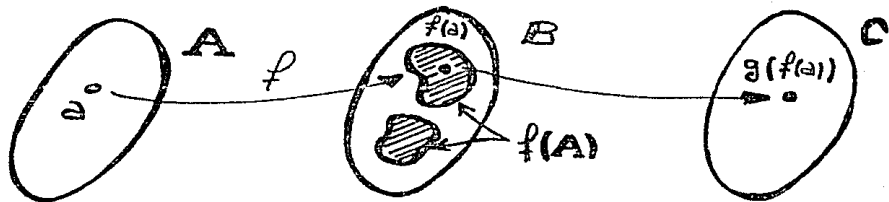


Fig. 54

En esta sección estudiaremos composiciones de funciones del tipo:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\Gamma} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

o también

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\Gamma} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

con  $\Gamma$  una curva y  $f$  un campo escalar.

En este tipo de composiciones la función composición  $\varphi = f \circ \Gamma$  asigna a cada real  $t$  un número real  $u$  mediante el siguiente proceso. Al número real  $t$  se le asigna una terna  $\{x, y, z\}$  mediante  $\Gamma$ , después a  $\{x, y, z\}$  se le asigna el número real  $u$  mediante  $f$ . (Fig. 55)

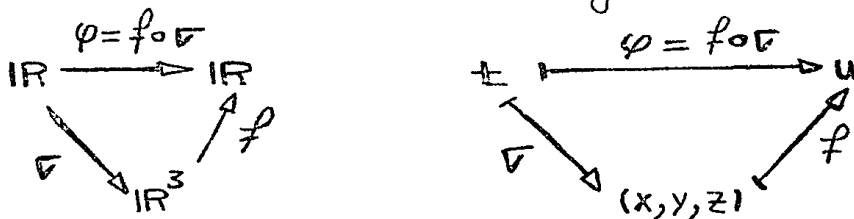


Fig. 55

donde  $\varphi$  indica la composición.

A continuación damos algunos ejemplos para ilustrar la composición de fun

ciones.

**EJEMPLO 19** En el problema que se planteó en la sección de derivadas direccionales, aparece una composición de funciones. Si el lector recuerda, las variables de estado temperatura  $T$  y presión  $P$  se controlaban en forma lineal:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= (T, P) \\ &= (T_0, P_0) + t(\alpha, \beta)\end{aligned}$$

Para obtener el volumen del gas al tiempo  $t$ , aplicamos a  $\mathbf{v}(t)$  el campo escalar  $V = f(T, P)$ , es decir,  $V = f(\mathbf{v}(t)) = (f \circ \mathbf{v})(t)$

Podemos generalizar lo anterior si controlamos la temperatura y presión en una forma arbitraria, por medio de la curva  $\mathbf{v}(t) = (T(t), P(t))$

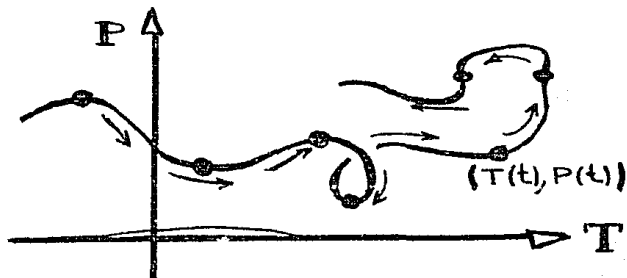


Fig. 56

Aprovechando la composición de funciones, daremos una fórmula para calcular derivadas direccionales.

Sea  $f$  un campo escalar,  $X_0 = (x_0, y_0)$  un punto en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  otro elemento de  $\mathbb{R}^2$ . Además sea  $\gamma$  la curva definida por  $\gamma(t) = X_0 + t\mathbf{n}$  y  $\varphi$  la composición  $f \circ \gamma$ , entonces

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{n}} f(X_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + t\mathbf{n}) - f(X_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \end{aligned}$$

y este último límite corresponde a  $\varphi'(0)$ . Por lo tanto se tiene el resultado:

**RESULTADO 2** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar,  $X_0, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma$  la curva  $\gamma(t) = X_0 + t\mathbf{n}$  y  $\varphi$  la composición  $\varphi = f \circ \gamma$ . La derivada direccional de  $f$  en el punto  $X_0$  y en la dirección  $\mathbf{n}$

viene dada por la fórmula:

$$\nabla_n f(x_0) = \varphi'(0)$$

En el siguiente ejemplo se declara como usar tal resultado.

**EJEMPLO 20**

Calcular  $\nabla_n f(x_0)$  si  $x_0 = (x, y)$ ,  $n = \frac{1}{\sqrt{10}} \langle -3, 1 \rangle$  y  $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x - y}$

Primero determinamos a la función  $\varphi$ . Sabemos que  $\varphi(t) = f(\nabla(t))$  con  $\nabla(t) = (x, y) + t \langle \frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \rangle$ , entonces

$$\varphi(t) = f\left((x, y) + t \left\langle \frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right\rangle\right)$$

$$= f\left(x - \frac{3t}{\sqrt{10}}, y + \frac{t}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= \frac{\left(x - \frac{3t}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(y + \frac{t}{\sqrt{10}}\right)}{x - \frac{3t}{\sqrt{10}} - y - \frac{t}{\sqrt{10}}}$$

$$x - \frac{3t}{\sqrt{10}} - y - \frac{t}{\sqrt{10}}$$

Por lo tanto:

$$\varphi(t) = \frac{\left(x - \frac{3t}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(y + \frac{t}{\sqrt{10}}\right)^2}{x - \frac{3t}{\sqrt{10}} - y - \frac{t}{\sqrt{10}}}$$

Ahora calculamos la derivada de  $\varphi$

$$\frac{\left[2\left(x - \frac{3t}{\sqrt{10}}\right)\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{1}{\sqrt{10}}\right]\left[x - \frac{3t}{\sqrt{10}} - y - \frac{t}{\sqrt{10}}\right] - \left[\left(x - \frac{3t}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(y + \frac{t}{\sqrt{10}}\right)^2\right]\left[-\frac{4}{\sqrt{10}}\right]}{\left[x - \frac{3t}{\sqrt{10}} - y - \frac{t}{\sqrt{10}}\right]^2}$$

Finalmente la evaluamos en  $t=0$

$$\varphi'(0) = \frac{\left[-\frac{6x}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}}\right][x-y] - [x^2+y^2]\left[-\frac{4}{\sqrt{10}}\right]}{[x-y]^2}$$

y tal expresión es el valor de la derivada direccional en  $X_0$  y en la dirección  $n$ .

Continuamos con los ejemplos de composición de funciones.

**EJEMPLO 21** Supongamos



que tenemos un ecosistema en el cual hay tres especies de animales como chapulines, sapos y víboras. Sabemos que el número de animales que hay de cada especie, depende del tiempo, por ello definimos la curva  $\gamma(t) = (CH(t), S(t), V(t))$  donde  $CH(t)$  mide el número de chapulines al tiempo  $t$ ,  $S(t)$  a los sapos y  $V(t)$  a las víboras.

Si a la curva  $\gamma$  la componemos con el campo escalar  $f(x, y, z) = x + y + z$  entonces  $(f \circ \gamma)(t) = CH(t) + S(t) + V(t)$  mide el total de animales que hay en las tres especies consideradas al tiempo  $t$ .

**EJEMPLO 22** Definamos la curva  $\gamma$  como  $\gamma(t) = (A(t), C(t))$ , donde  $A(t)$  mide la concentración de azúcar en la sangre al tiempo  $t$  en una persona y  $C(t)$  mide la concentración de colesterol al tiempo  $t$  en la misma persona. Supongamos además que los niveles permitidos en la concentración de azúcar y colesterol en la sangre son de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Sea  $f$  el campo escalar:

$$f(x, y) = x + y - (\alpha + \beta)$$

Entonces, la composición  $f \circ \gamma$  nos indica si el azúcar y/o colesterol han aumentado visiblemente al tiempo  $t$ . Cabe señalar que  $\varphi(t) = (f \circ \gamma)(t) = A(t) + C(t) - (\alpha + \beta)$  ¿Qué significado físico tienen las desigualdades  $(f \circ \gamma)(t) > 0$ ,  $(f \circ \gamma)(t) < 0$  y el caso  $(f \circ \gamma)(t) = 0$ ?

### EJEMPLO 23

Supongamos que tenemos un ecosistema en el cual hay animales herbívoros y carnívoros. Denotemos por medio de la curva  $\gamma(t) = (H(t), C(t))$  la cantidad de animales herbívoros y carnívoros al tiempo  $t$ . Y sea  $f$  el campo escalar

$$f(x, y) = \frac{x}{x+y}$$

entonces  $(f \circ \gamma)(t)$  mide la proporción de animales herbívoros que hay en el total de animales considerados.

### EJEMPLO 24

Supongamos que se localiza un banco de atún en el mar. Las coordenadas del banco se toma o considera un punto que represente la localización o posición que tiene el banco.

se dan por medio de la curva  $\mathcal{C}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  y sea  $f$  el campo escalar:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

entonces  $\varphi(t) = (f \circ \mathcal{C})(t)$  nos mide la distancia del banco de stún al origen al tiempo  $t$ .

De la misma manera podemos considerar una curva  $\mathcal{C}(t) = (x(t), y(t))$ , tal que  $\mathcal{C}(t)$  denote la posición de una manada de animales al tiempo  $t$ . Al componer con el campo escalar

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

la composición  $(f \circ \mathcal{C})(t)$  nos mide la distancia de la manada al origen al tiempo  $t$ . (Fig. 57)

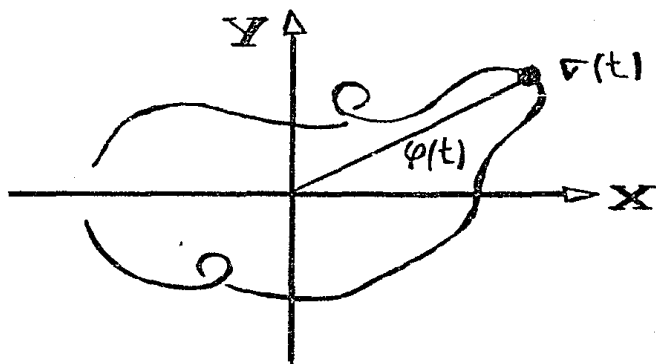


Fig. 57

El resultado fundamental de esta sección es el dar una fórmula para la derivada de la función composición  $\varphi = f \circ \gamma$ . Por desgracia la demostración de la fórmula que nos da la relación entre las derivadas de  $\varphi$ ,  $f$  y  $\gamma$  queda fuera del alcance de las notas y por ello únicamente lo mencionaremos.

**RESULTADO 3** (Regla de la Cadena). Sean  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  (ó  $\mathbb{R}^2$ ) una curva y  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (ó  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ) un campo escalar. Si la derivada de  $\gamma$  en  $t=t_0$  existe y la derivada o gradiente de  $f$  en  $\gamma(t_0)$  también existe, entonces la función composición  $\varphi = f \circ \gamma$  es derivable y además:

$$D\varphi(t_0) = Df(\gamma(t_0)) \cdot D\gamma(t_0)$$

Conviene aclarar que  $D\varphi(t_0)$  es un número, por ser  $\varphi$  función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . La expresión  $Df(\gamma(t_0))$  es el vector gradiente

$$Df(\gamma(t_0)) = \nabla f(\gamma(t_0)) = \left( \frac{\partial f(\gamma(t_0))}{\partial x}, \frac{\partial f(\gamma(t_0))}{\partial y} \right)$$

y finalmente  $D\mathbf{v}(t_0)$  es el vector:

$$D\mathbf{v}(t_0) = \left( \frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0) \right)$$

De acuerdo a lo que es cada expresión en la fórmula de la regla de la cadena, se observa que el producto  $Df(\mathbf{v}(t_0)) \cdot D\mathbf{v}(t_0)$  es escalar. Realizando tal producto, obtenemos la fórmula:

$$\frac{d\varphi}{dt}(t_0) = \frac{\partial f(\mathbf{v}(t_0))}{\partial x} \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f(\mathbf{v}(t_0))}{\partial y} \frac{dy}{dt}(t_0)$$

El siguiente ejemplo aclara sobre el uso de la regla de la cadena.

**EJEMPLO 25** Las coordenadas de una manada de antílopes al tiempo  $t$  vienen dadas por la curva  $\mathbf{v}(t) = (t^2 - 2t, 5t - 8)$ . Dar una expresión para la función composición  $f \circ \mathbf{v}$ , cuando  $f$  es el campo escalar  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Calcular la rapidez con que la manada se aleja o acerca al origen, a partir de la expresión dada para  $\varphi = f \circ \mathbf{v}$ . Volver a calcular la derivada de  $\varphi$ , pero ahora

usando la regla de la cadena. Comprobar que el resultado dado en la segunda pregunta coincide con este último.

Antes de tomar la primera pregunta como  $\varphi = f \circ \nabla$  entonces

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(\nabla(t)) \\ &= f(t^2 - 2t, 5t - 8) \\ &= \sqrt{(t^2 - 2t)^2 + (5t - 8)^2}\end{aligned}$$

Ahora damos respuesta a la segunda pregunta. Calculando la derivada de  $\varphi$  se tiene:

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \frac{2(t^2 - 2t)(2t - 2) + 2(5t - 8)(5)}{2\sqrt{(t^2 - 2t)^2 + (5t - 8)^2}}$$

Para la tercera pregunta usamos la regla de la cadena, y para esto calculamos las derivadas:

$$\nabla(t) = (2t - 2, 5)$$

$$\nabla f(x, y) = \left( -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Calculamos  $\nabla f(\mathbf{v}(t)) = \nabla f(t^2 - 2t, 5t - 8)$ . Al sustituir a  $x$  por  $t^2 - 2t$  y a  $y$  por  $5t - 8$ , obtenemos el vector:

$$\left( -\frac{2(t^2 - 2t)}{2\sqrt{(t^2 - 2t)^2 + (5t - 8)^2}}, -\frac{2(5t - 8)}{2\sqrt{(t^2 - 2t)^2 + (5t - 8)^2}} \right)$$

Con esto podemos concluir que el producto  $\nabla f(\mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{I} \mathbf{v}'(t)$  es igual a:

$$-\frac{2(t^2 - 2t)(2t - 2) + 2(5t - 8)(5)}{2\sqrt{(t^2 - 2t)^2 + (5t - 8)^2}}$$

que es exactamente la misma expresión que obtuvimos en la segunda pregunta.

Hemos comprobado la regla de la cadena, es decir

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \nabla f(\mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{I} \mathbf{v}'(t)$$

### EJERCICIO.

1. Supongamos que un objeto

vuela de tal forma que describe la curva  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ . Supongamos también que un observador está situado en el punto  $(\sqrt{3}, 1, 2)$ . ¿En qué momento el objeto está más cerca del observador? ¿Cuál es la distancia en ese momento?

Aparte de las aplicaciones que ya hemos visto que tiene la regla de la cadena, esta también nos ayudará a probar las dos propiedades que posee el gradiente y las cuales fueron dadas intuitivamente en la sección anterior. Iniciamos con el siguiente resultado.

**RESULTADO 4** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

un campo escalar y  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . La derivada direccional de  $f$  en el punto  $(x_0, y_0) = X_0$  y en la dirección  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  viene dada por la fórmula:

$$\nabla_{\mathbf{n}} f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot \mathbf{n}$$

Convencimiento.

Sabemos que la derivada direccional de  $f$  en  $X_0$  y en la dirección



$\eta$  viene dada por:

$$\nabla_{\eta} f(x_0) = \varphi'(0)$$

donde  $\varphi = f \circ \gamma$  con  $\gamma(t) = x_0 + t\eta$ . Si calculamos la derivada de  $\varphi$  usando la regla de la cadena, tendremos

$$\varphi'(0) = \nabla f(\gamma(0)) \circ \gamma'(0)$$

Como  $\gamma(0) = x_0$  y  $\gamma'(0) = \eta$ , entonces

$$\nabla_{\eta} f(x_0) = \nabla f(x_0) \circ \eta$$

Ahora si probaremos matemáticamente la propiedad (1) que posee el gradiente, y la cual fue dada en la sección anterior en forma intuitiva.

**RESULTADO 5** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar y  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ . Si  $t$  va de 0 a 1,  $f$  crece (decrece) más rápido si seguimos la dirección del vector gradiente  $\nabla f(x_0)$  (la del vector  $-\nabla f(x_0)$ ).

## Convencimiento.

La rapidez con que cambia una función en el punto  $X_0$  y siguiendo una dirección  $n$  es  $\nabla_n f(X_0)$ , pero por el resultado 4

$$\begin{aligned}\nabla_n f(X_0) &= \nabla f(X_0) \cdot n \\ &= \|\nabla f(X_0)\| \|n\| \cos \phi\end{aligned}$$

donde  $\phi$  es el ángulo que forman los vectores  $\nabla f(X_0)$  y  $n$ .

Ahora bien como  $\|n\| = 1$  entonces  $\nabla_n f(X_0) = \|\nabla f(X_0)\| \cos \phi$ , y se observa que  $\nabla_n f(X_0)$  alcanza su valor máximo (mínimo) cuando  $\cos \phi = 1$  ( $\cos \phi = -1$ ). Pero  $\cos \phi = 1$  ( $\cos \phi = -1$ ) cuando  $\phi = 0$  ( $\phi = \pi$ ). Esto último nos indica que la dirección que hace d que la función crezca (disminuya) más rápidamente, se da cuando  $n$  y  $\nabla f(X_0)$  tienen la misma dirección y sentido (misma dirección y sentido opuesto), es decir, cuando  $n$  tiene la misma dirección y sentido de  $\nabla f(X_0)$ .

Ahora demostraremos que el gradiente es ortogonal a las curvas de nivel,

es decir, la propiedad (2) que fue enunciada en la sección anterior.

**RESULTADO 6** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar,  $k \in \mathbb{R}$  y  $C(k) = \{(x, y) : f(x, y) = k\}$ . Si  $C(k)$  es una curva derivable y  $(x_0, y_0) \in C(k)$  entonces  $\nabla f(x_0, y_0)$  es ortogonal a  $C(k)$  en el punto  $(x_0, y_0)$ .

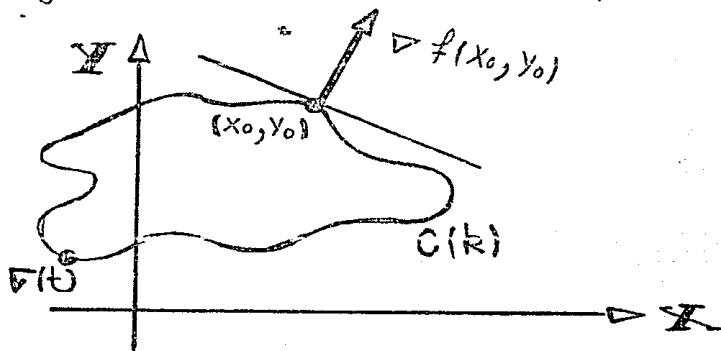


Fig. 58

Convencimiento.

Supongamos que  $C(k)$  se puede escribir como  $\nabla: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\nabla(t) = (x(t), y(t))$ . Entonces como  $\nabla(t) \in C(k)$ , se cumple:

$$f(\nabla(t)) = f(x(t), y(t)) = k$$

Y por lo tanto  $(f \circ \nabla)(t) = k$ . Esto significa que la función  $\varphi = f \circ \nabla$  es constante. Aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\varphi'(t) = \nabla f(\nabla(t)) \circ \nabla'(t)$$

y como  $\varphi$  es constante  $\varphi'(t) = 0$ , entonces

$$\nabla f(\nabla(t)) \circ \nabla'(t) = 0$$

Por lo tanto  $\nabla f(\nabla(t)) \perp \nabla'(t)$ , y en especial para cuando  $\nabla(t) = (x_0, y_0)$ .

## EJERCICIOS.

1.- Supongamos que la temperatura de una región está dada por la función

$$f(x, y) = e^{x+y^2}$$

y que un vehículo está en el punto  $(1, 2)$ .  
 ¿En qué punto estará situado si avanzó una unidad de medida en la dirección para la que: (a) Hace más calor (b) Hace más frío (c) La temperatura varía lo menos posible?

## 3.8. PLANO TANGENTE.

Supongamos que la gráfica del campo escalar  $z = f(x, y)$  es como lo indica la Fig. 59, podemos aproximar la función en un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  mediante un plano. Donde se ha cogido un plano por tener esta una expresión muy fácil de manejar  $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ .

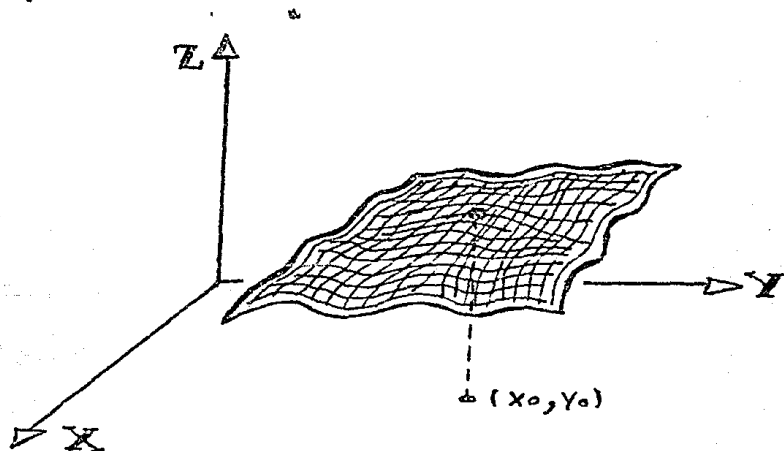


Fig. 59

Si el lector observa, lo que estamos haciendo es aproximar una función, que puede ser muy complicada en su forma, mediante un plano. Cabe aclarar también que la aproximación es bastante buena para puntos muy cercanos a  $(x_0, y_0)$ , es decir, que la di-

ferencia entre los valores de la función y los del plano es muy pequeña. En este sentido es que la aproximación es únicamente local, es decir, que vale para los puntos que se encuentran alrededor de  $(x_0, y_0)$ .

Al plano que aproxima a la función  $z = f(x, y)$  en las cercanías de  $(x_0, y_0)$  se le llama plano tangente en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Dado que el plano tangente en el punto  $(x_0, y_0)$  es una aproximación a la función, podemos escribir:

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma + E$$

donde  $E$  es la función que mide el error que se comete al aproximar a  $f(x, y)$  mediante el plano, es decir

$$E = f(x, y) - \alpha x - \beta y - \gamma$$

De lo dicho anteriormente todo va bien, solo una cosa no. Si la función  $f(x, y)$  se va a aproximar mediante el plano  $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ , entonces es necesario conocer el valor de las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ .

Para determinar el valor de las

constantes, le imponemos varias condiciones al plano tangente:

(1) El plano tangente debe de pasar por el punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Lo anterior equivale a que  $z(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$ .

(2) El plano tangente debe de contener a todas las rectas tangentes a la superficie en el punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ , y en especial a las que son paralelas a los ejes  $X$  e  $Y$ . (Fig. 60). Ya vimos que estas rectas tienen pendiente  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  res-

pectivamente. Por otra parte, estas rectas deben de coincidir con las rectas tangentes al plano en el mismo punto y las pendientes de estas últimas están dadas por  $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$

y  $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$  respectivamente de aquí que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Las condiciones (1) y (2) nos ayu-

darán a determinar las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$ .

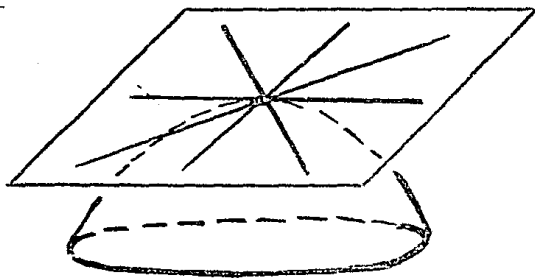


Fig. 60

Teniendo en cuenta que  $z = \alpha x + \beta y + \delta$  y las condiciones dadas en (2) tendremos  $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  y para determinar  $\delta$  usamos la condición (1):

$$f(x_0, y_0) = z(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y_0 + \delta$$

es decir:

$$\delta = f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y_0$$

Por lo tanto la ecuación del plano tangente es:

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y_0 + f(x_0, y_0)$$



la cual es equivalente a :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

o también :

$$z = f(x_0, y_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

y esta es a su vez equivalente a :

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

A partir de la discusión precedente damos la siguiente :

**DEFINICION 7** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

función,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  y supongamos que las derivadas parciales de  $f$  en el punto  $(x_0, y_0)$  existen. Definimos el plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  como :

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

La definición 7 tiene el in-

conveniente de solo usarse para gráficas de funciones. ¿Qué pasa entonces para superficies como los elipsoides o los esferas? Dichas superficies no son gráfica de una función y sin embargo la intuición nos dice que admiten planos tangentes. El siguiente trabajo a realizar va encaminado a llenar este hueco.

Primero definiremos lo que entendemos por una superficie.

**DEFINICION 8** Una superficie se define como una superficie de nivel para alguna función  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**EJEMPLO 26** La gráfica de una función  $z = f(x, y)$  es una superficie, ya que si definimos  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  como  $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ . Entonces la gráfica de  $f$  es la superficie de nivel cero de  $F$ :

$$\begin{aligned} S(0) &= \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) : z - f(x, y) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) : z = f(x, y)\} = \text{GR}[f] \end{aligned}$$

**EJEMPLO 27**

Los elipsoides  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  son superficies, pues son superficies de nivel uno para la función:

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

**EJEMPLO 28**

Las esferas  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  son superficies de nivel de la función  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .  
¿Cuál es el nivel?

El siguiente resultado nos ayudará a motivar el concepto de plano tangente a una superficie en un punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**RESULTADO 7**

Sea  $S(k)$  una superficie de nivel para la función  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $(x_0, y_0, z_0) \in S(k)$ . Sea  $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva tal que  $\gamma(t) \in S(k)$  y además existe  $t_0 \in I$  tal que  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ . Si  $\gamma'(t_0)$  existe y también  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  entonces  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$

Convenimiento.

Como  $\gamma(t) \in S(k)$  entonces  $F(\gamma(t)) = k$ . Si hacemos  $\varphi = F \circ \gamma$  entonces  $\varphi$  es constante y por la regla de la cadena:

$$0 = \frac{d\varphi}{dt}(t) = \nabla F(\gamma(t)) \circ \gamma'(t)$$

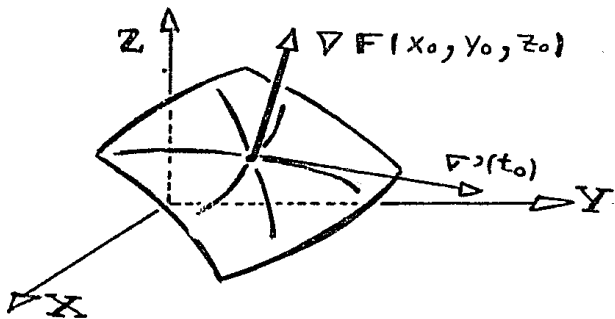
En especial cuando  $t = t_0$  se cumple:

$$\nabla F(\gamma(t_0)) \circ \gamma'(t_0) = 0$$

que es lo que se quería demostrar.

A partir del resultado 7 se observa que el vector  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  es ortogonal a los vectores tangentes  $\gamma'(t_0)$  y como las curvas  $\gamma(t)$  están sobre la superficie entonces podemos tomar a  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  como un vector ortogonal a la superficie

Fig. 61



**DEFINICION 9** Sea  $S(k)$  una superficie de nivel  $k$  para el campo escalar  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . y  $(x_0, y_0, z_0) \in S(k)$ . El plano tangente a  $S(k)$  en el punto  $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$  viene dado por la ecuación:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (X - X_0) = 0$$

donde  $X = (x, y, z)$ .

### EJERCICIOS.

1.- Consideremos el elipsoide  $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 25$  y los puntos  $(5/2, 0, 0)$ ,  $(0, 5, 0)$  y  $(0, 0, 5/3)$  de él. Calcular los planos tangentes en estos puntos usando los dos métodos que se vieron.

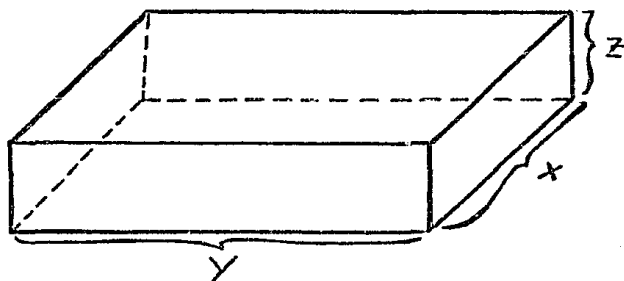
2.- Encuentre los puntos del hiperboloide  $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$  en los que el plano tangente es paralelo al plano  $4x - 2y + 4z = 5$ .

3.- Demuestre que la ecuación del plano tangente a  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  es  $\frac{2x_0x}{a^2} + \frac{2y_0y}{b^2} = c(z + z_0)$

## 3.9. MAXIMOS Y MINIMOS.

En esta sección estudiaremos métodos para obtener los máximos y mínimos de campos escalares. El tipo de problemas que aparecerán en esta sección son de la forma:

- P.1. Una compañía planea fabricar cajas rectangulares cerradas con un volumen de 8 litros. El material para la base y la tapa cuesta el doble que el que se usa para los lados. Encuentre las dimensiones para las cuales el costo es mínimo.



$$V = 8 = xyz ; a = \text{costo para los lados}$$

$$C = 2axz + 2ayz + 4axy$$

P.2. METODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS. Dados  $n$  números distintos  $x_1, \dots, x_n$  y otros  $n$  números  $y_1, \dots, y_n$  (no necesariamente distintos), es en general imposible encontrar una recta  $f(x) = ax + b$  que pase por todos los puntos  $(x_i, y_i)$ , esto es, tal que  $f(x_i) = y_i$  para cada  $i$  (Fig. 63)

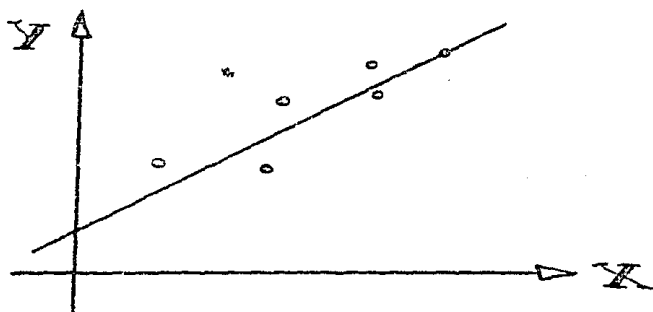


Fig. 63

No obstante, podemos encontrar una función lineal con la que el "error cuadrático total"

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [ax_i + b - y_i]^2 \end{aligned}$$

Sea mínimo.

Antes de iniciar nuestro estudio damos la definición precisa de lo que es un máximo o un mínimo de un campo escalar.

**DEFINICION 10** Sea  $f: \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar con  $\mathcal{A}$  su dominio y  $(x_0, y_0)$  un punto en  $\mathcal{A}$ . Se dice que  $f$  alcanza un máximo (mínimo) relativo en  $x_0 = (x_0, y_0)$  si existe un disco con centro en  $x_0$ ,  $\mathbb{D}(x_0, \delta)$ , tal que para cada  $x = (x, y)$  en  $\mathbb{D}(x_0, \delta) \cap \mathcal{A}$  se cumple:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x))$$

Y se dice que el máximo (mínimo) es absoluto si las desigualdades anteriores se cumplen para todo  $x \in \mathcal{A}$ .

**EJEMPLO 29** Consideremos los campos escalares  $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definidos por

$$f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)} \quad ; \quad g(x, y) = x^2 + y^2$$

Sabemos que la gráfica de tales funciones es una superficie de revolución, generadas



por las curvas:

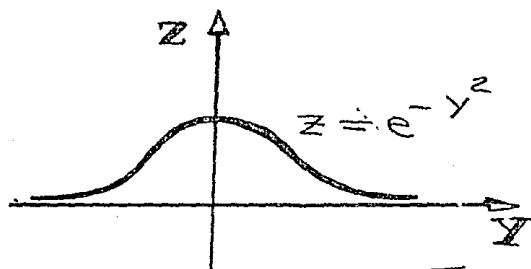
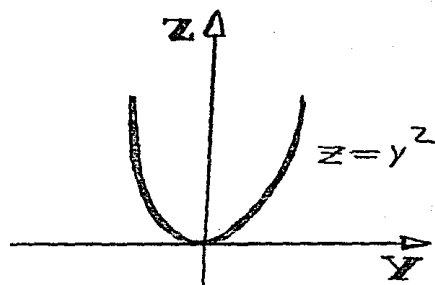


Fig. 64



Y por lo tanto la gráfica de los campos escalares  $f$  y  $g$  son:

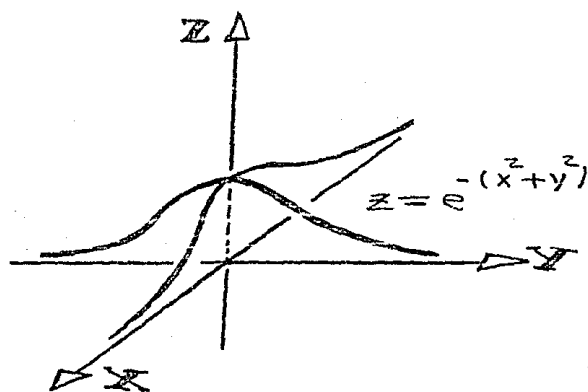
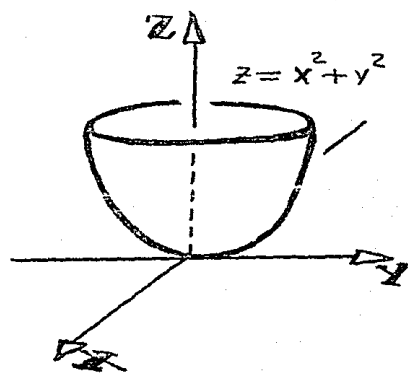


Fig. 65



Se observa que en el punto  $(0,0)$ , para ambas funciones, se alcanza un máximo y un mínimo absoluto respectivamente.

**EJEMPLO 30** Considere el campo escalar, cuya gráfica se muestra en la Fig. 66. En los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  la función alcanza un máximo relativo.

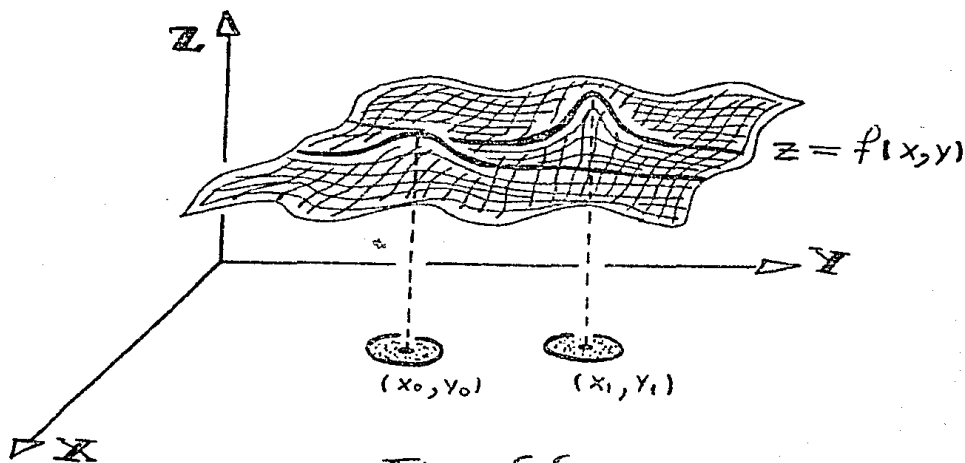


Fig. 66

A continuación damos una definición que usaremos más adelante.

**DEFINICIÓN 11.** Los puntos donde un campo escalar  $f$  alcanza un máximo o un mínimo, se llaman puntos extremos, y el conjunto de puntos extremos lo denotaremos por:

$$\mathbf{EXT}[f] = \{(x, y) : (x, y) \text{ es punto extremo de } f\}$$

**EJEMPLO 31** Para los campos escalares  $f(x,y) = \exp(-x^2 - y^2)$  y  $g(x,y) = x^2 + y^2$  se cumple.

$$\text{EXT}[f] = \text{EXT}[g] = \{(0,0)\}$$

En el siguiente resultado damos un criterio para saber cuando en un punto  $(x_0, y_0)$  un campo escalar no alcanza un máximo o un mínimo.

**RESULTADO 8** Sea  $f$  un campo escalar,  $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  y supongamos que  $\nabla f(X_0)$  existe. Si  $\nabla f(X_0) \neq (0,0)$  entonces  $X_0 \notin \text{EXT}[f]$ , es decir, en  $X_0$  el campo escalar no alcanza un máximo o un mínimo.

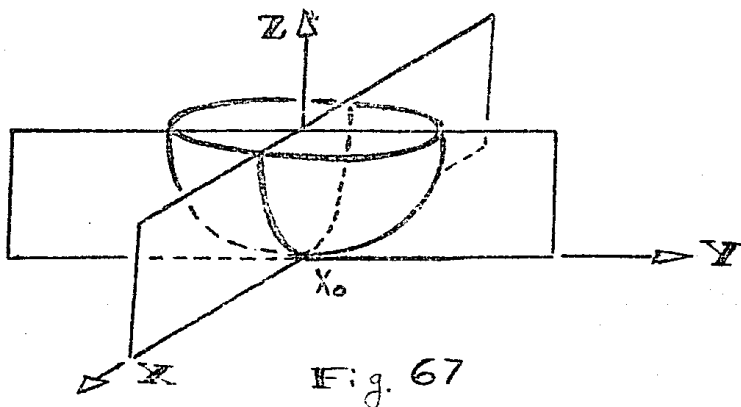
Convencimiento.

El resultado equivale a demostrar que si en  $X_0$  hay un punto extremo entonces  $\nabla f(X_0) = (0,0)$ .

Supongamos, pues, que el campo escalar alcanza un extremo en  $X_0$ . Demostremos que  $\partial f / \partial x = 0$  y  $\partial f / \partial y = 0$ , para así tener  $\nabla f(X_0) = (0,0)$ .

Como sabemos las derivadas parciales en  $X_0$ , nos dan la pendiente de la curva que resulta de intersectar a la gráfica de  $f$  con un plano que pase por  $X_0$  y es paralelo a los ejes de coordenadas  $X$  y  $Y$  (Fig. 67). Pero es claro que las curvas que resultan tienen un extremo en  $X_0$  y entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = 0$$



**EJEMPLO 32** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  el campo escalar definido por

$$f(x, y) = 2x + 3y + 8$$

Probar que tal campo escalar no tiene puntos extremos, es decir,  $\text{Ext} \cap [f] = \emptyset$ .

Como  $\nabla f(x, y) = (2, 3)$ , tenemos que  $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , y por tanto  $f$  no tiene puntos extremos.

El resultado 8 nos indica que donde puede haber extremos, es en los puntos  $(x_0, y_0)$  tales  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ . A tales puntos se les da un nombre especial.

**DEFINICION 12** Sea  $f$  un campo escalar y  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Diremos que  $(x_0, y_0)$  es un punto estacionario de  $f$  si  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Además al conjunto de puntos estacionarios los denotaremos por:

$$\text{EST}[f] = \{(x, y) : \nabla f(x, y) = (0, 0)\}$$

Una relación inmediata de obtener, a partir del resultado ocho, entre los conjuntos  $\text{EXT}[f]$  y  $\text{EST}[f]$  es

**RESULTADO 9** Sea  $f$  un campo escalar, entonces

$$\text{EXT}[f] \subseteq \text{EST}[f]$$

Si la contención que aparece en el resultado  $\circledast$  también se diera en el otro sentido, es decir,  $\text{EXT}[f] \supseteq \text{EST}[f]$ , entonces resultaría  $\text{EXT}[f] = \text{EST}[f]$  y entonces las cosas (para encontrar extremos) serían sencillas de hacer, pues bastaría con encontrar los puntos  $(x_0, y_0)$  tales que  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Por desgracia las cosas no suceden así, daremos un ejemplo de un campo escalar en que la contención dada en el resultado  $\circledast$  es estricta (que no se cumple la igualdad).

### EJEMPLO 33

Probar que para el campo escalar  $T = kPV$  (ley de los gases ideales) con  $k > 0$ , se cumple:

$$\text{EXT}[T] = \emptyset \quad \text{y} \quad \text{EST}[T] = \{(0, 0)\}$$

Calculemos  $\nabla T$ , claramente  $\nabla T = (kP, kV)$  y entonces  $\nabla T = (0, 0)$  si, y solo si,  $P = 0$  y  $V = 0$ . Por lo tanto  $\text{EST}[T] = \{(0, 0)\}$

Probaremos ahora que  $(0, 0)$  no es un punto extremo. Ya que  $T(0, 0) = 0$ , cuando nos acercamos por el camino  $P = V$ , entonces  $T$  toma los valores  $T = kV^2 > 0 = T(0, 0)$ . Por lo tanto, hay puntos tan

cercanos a  $(0,0)$  donde  $T$  toma valores "más grandes que en  $(0,0)$ ". Esto muestra que  $(0,0)$  no es un máximo de  $T$ . Similarmente, acercándose por  $P = -V$ , se demuestra que  $(0,0)$  no es un mínimo de  $T$ . De manera que  $(0,0)$  no es un punto extremo de  $T$ . Toda la discusión anterior prueba que  $\text{EXT}[f] = \emptyset$ .

Del ejemplo anterior se concluye que hay casos en que  $\text{EST}[f]$  tiene más elementos que  $\text{EXT}[f]$ .

**DEFINICION 13** A los elementos del conjunto

$$\text{SLL}[f] = \text{EST}[f] - \text{EXT}[f]$$

se les llamará puntos silla de  $f$ .

En base a toda la discusión precedente se observó la necesidad de encontrar métodos, por medio de los cuales se puedan obtener los elementos de **EST** que pertenecen también a **EXT**. En otras palabras determinaremos los elementos de **EST** (lo cual es fácil de hacer), para después mediante algún método seleccionar

los elementos de EXT.

**EJEMPLO 34** Sea  $f$  el campo escalar definido por:

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + 5x - 2y + 6y^2 + 8$$

Calcular EST  $[f]$ .

de  $f$ : Primero calculamos el gradiente

$$\nabla f(x, y) = (2x - 3y + 5, -3x + 12y - 2)$$

Ahora hacemos  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ , para obtener el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -5 \\ -3x + 12y &= 2 \end{aligned}$$

La solución a dicho sistema es el único punto de componentes  $x = -\frac{54}{15}$ ,  $y = -\frac{11}{15}$

Por lo tanto  $\text{EST}[f] = \left\{ \left( -\frac{54}{15}, -\frac{11}{15} \right) \right\}$

Para motivar el método que nos ayudará en la determinación de los elemen-



tos de **EXT** a partir de los elementos de **EST**, damos el siguiente recordatorio de cálculo de una variable.

**RECORDATORIO** Un método muy usado para determinar los máximos o mínimos de funciones de variable real con valores reales, consiste en usar la segunda derivada. Por ejemplo, supongamos que tenemos la función:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$$

Primero determinamos los puntos en que la derivada se anula, es decir, resolvemos la ecuación:

$$f'(x) = x^2 + x - 6 = 0$$

La cual tiene como raíces  $x=2$  y  $x=-3$ .

Ahora obtenemos la segunda derivada  $f''(x) = 2x + 1$  y la evaluamos en los puntos  $x=2$  y  $x=-3$ , para poder decidir si hay máximo o mínimo. Como  $f''(2) = 5 > 0$  y  $f''(-3) = -5 < 0$ , podemos concluir que en  $x=2$  hay un mínimo y en  $x=-3$  un máximo.

Se observa que el método funciona en base al signo que posee la segunda derivada en los puntos en que se anula la primera derivada.

El método que nosotros aplicaremos para determinar los máximos o mínimos de un campo escalar, también tiene su fundamento en el tipo de signo que tenga la "segunda derivada" del campo escalar. Solo hay un problema, no hemos definido lo que es la segunda derivada y mucho menos cuando es positiva o negativa.

**DEFINICION 14** Sea  $f: \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

un campo escalar y  $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ . Si las segundas derivadas parciales de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  existen entonces definimos la segunda derivada del campo escalar  $f$  en  $(x_0, y_0)$  como la matriz:

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

**EJEMPLO 35** Calcular la segunda derivada del campo escalar:

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + 5x - 2y + 6y^2 + 8$$

en el punto  $(1, 1)$ .

Primero calculamos las derivadas parciales de orden uno de  $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y + 5 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 12y - 2$$

Ahora las segundas derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12$$

Como tales derivadas parciales son constantes entonces no se alteran si las evaluamos en  $(1, 1)$ . Por lo tanto

$$\nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$$

**DEFINICION 15** Sea  $z = f(x, y)$  un campo escalar y  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Diremos que la segunda derivada  $\nabla^2 f(x_0, y_0)$  es positiva (negativa) si se satisface la desigualdad: (para todo  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ )

$$(h \ k) \nabla^2 f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\leq 0)$$

Y además toma el valor cero solo cuando  $(h, k) = (0, 0)$ .

Cabe señalar que el producto que aparece en la definición anterior, es un producto de matrices cuyo resultado es un número. Si hacemos

$$\Phi(h, k) = (h \ k) \nabla^2 f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

y efectuamos el producto, se obtiene:

$$\Phi(h, k) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) h^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) hk + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) k^2$$

Se observa, pues, que el signo de la segunda derivada, depende del signo de  $\Phi(h, k)$ . Por comodidad cuando  $\nabla^2 f(x_0, y_0)$

sea positiva, escribiremos  $\nabla^2 f(x_0, y_0) \geq 0$ . Y cuando sea negativa se escribirá  $\nabla^2 f(x_0, y_0) \leq 0$ .

**EJEMPLO 36** Sea  $f$  el campo escalar

$$f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$$

Probar que  $\nabla^2 f(0, 0) \leq 0$ .

Primero obtenemos las derivadas parciales de orden uno:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y e^{-(x^2 + y^2)}$$

Mientras que las parciales de orden dos son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 e^{-(x^2 + y^2)} + 4x^2 e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 e^{-(x^2 + y^2)} + 4y^2 e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy e^{-(x^2+y^2)}$$

A partir de estas derivadas parciales, podemos calcular la segunda derivada de  $f$  en  $(0,0)$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la función  $\Phi(h,k)$ :

$$\Phi(h,k) = (h \ k) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

para obtener  $\Phi(h,k) = -2(h^2 + k^2)$ . Y se observa que  $\Phi(h,k) \leq 0$  para todo  $(h,k) \in \mathbb{R}^2$  y además toma el valor cero sólo cuando  $h=0$  y  $k=0$ . Por lo tanto

$$\nabla^2 f(0,0) \leq 0$$

Como ya hemos definido cuando la segunda derivada de un campo escalar es positiva o negativa, daremos los criterios para saber cuando hay máximos o mínimos de campos escalares. Pero antes escribire

mos tales criterios para funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , con el fin de que al lector se le hagan familiares su extensión a campos escalares.

### CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA.

1° Si:  $f'(x_0) = 0$  y  $f''(x_0) < 0$  entonces  $f$  alcanza un máximo en  $x_0$ .

2° Si:  $f'(x_0) = 0$  y  $f''(x_0) > 0$  entonces  $f$  alcanza un mínimo en  $x_0$ .

Estos dos criterios para campos escalares se traducen como:

1° Si:  $\nabla f(x_0) = 0$  y  $\nabla^2 f(x_0) \leq 0$  entonces  $f$  alcanza un máximo en  $x_0$ .

2° Si:  $\nabla f(x_0) = 0$  y  $\nabla^2 f(x_0) \geq 0$  entonces  $f$  alcanza un mínimo en  $x_0$ .

#### EJEMPLO 37

Analizar, respecto a los puntos extremos, el campo escalar  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ .

Primero determinamos  $\text{EST}[f]$   
 Sabemos que los puntos estacionarios se obtienen de resolver la ecuación:

$$\nabla f(x, y) = (0, 0)$$

la cual es:

$$(2x - y, 2y - x) = (0, 0)$$

Y esta última se traduce en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Como el determinante del sistema no es cero, entonces la única solución del sistema es  $(0, 0)$ . Por lo tanto  $\text{EST}[f] = \{(0, 0)\}$

Ahora para decidir si el punto estacionario  $(0, 0)$  es un máximo o un mínimo, debemos de averiguar el "signo" de  $\nabla^2 f(0, 0)$ . Para hacer esto debemos de evaluar las derivadas parciales de orden dos en  $(0, 0)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$



Por lo tanto :

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y además  $\Phi(h,k) = 2h^2 - 2hk + 2k^2$ . Ahora bien, a simple vista no se "ve" si  $\Phi(h,k)$  es positivo o negativo, pero formando un cuadrado perfecto podremos determinar esto.

$$\begin{aligned} \Phi(h,k) &= 2h^2 - 2hk + 2k^2 \\ &= 2(h^2 - hk) + 2k^2 \\ &= 2\left(h^2 - hk + \frac{k^2}{4}\right) + 2k^2 - \frac{k^2}{2} \\ &= 2\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}k^2 \end{aligned}$$

Y ahora sí, de esta última expresión se observa que  $\Phi(h,k) \geq 0$  y que  $\Phi(h,k) = 0$  si y solo si  $(h,k) = (0,0)$ . Por lo tanto en  $(0,0)$   $f$  alcanza un mínimo.

Aprovechando el ejemplo anterior, se observa que para determinar el signo de  $\Phi(h,k)$ , es útil completar un binomio para que sea un trinomio cuadrado perfecto. En el siguiente resultado se da la forma que adopta  $\Phi(h,k)$  al hacer tal operación en el caso general.

**RESULTADO 10** La siguiente expresión para  $\Phi$  es válida:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \left[ h + \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} k \right]^2 + \frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} k^2$$

Convenimiento.

Sabemos que:

$$\Phi(h, k) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) h^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) hk + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) k^2$$

Ahora completamos el binomio:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) h^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) hk$$

para formar un trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned} \Phi(h, k) &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) h^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) hk + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) k^2 \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left[ h^2 + 2 \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} hk \right] + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \left[ h^2 + 2 \frac{\left( \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right)}{\left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)} hk + \left( \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}{\left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)} k \right)^2 \right] + \\
&+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} k^2 - \frac{\left( \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right)^2}{\left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)} k^2 = \\
&= \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \left[ h + \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} k \right]^2 + \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right)^2}{\left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)} k^2
\end{aligned}$$

Y esto último es lo que queremos ver.

A partir de la expresión dada para  $\Phi(h, k)$  en el resultado 10, podemos decir cuando  $\Phi(h, k) \geq 0$  y cuando es  $\Phi(h, k) \leq 0$ .

**RESULTADO 11** Se cumple:

1º Si:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$  y  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right)^2 > 0$

entonces  $\Phi(h, k) \geq 0$ .

$$2^{\circ} \text{ Si: } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0 \text{ y } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right)^2 > 0$$

entonces  $\Phi(h, k) \leq 0$ .

Ahora a partir del resultado 11 y de los criterios para encontrar extremos, damos el siguiente resultado.

**RESULTADO 12** Sea  $f$  un campo escalar y  $X_0 \in \mathbb{R}^2$ . Se cumplen:

$$1^{\circ} \text{ Si: } \nabla f(X_0) = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(X_0) > 0 \text{ y además}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(X_0) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(X_0) - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(X_0) \right)^2 > 0 \text{ entonces}$$

$f$  alcanza un mínimo en  $X_0$ .

$$2^{\circ} \text{ Si: } \nabla f(X_0) = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(X_0) < 0 \text{ y además}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(X_0) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(X_0) - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(X_0) \right)^2 > 0 \text{ entonces}$$

$f$  alcanza un máximo en  $X_0$ .

3º Si:  $\nabla f(x_0) = 0$  y  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0) = 0$  entonces

$x_0$  es punto silla.

4º Si:  $\nabla f(x_0) = 0$  y  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0)\right)^2$

es menor que cero entonces  $x_0$  es punto silla.

## EJERCICIOS.

1.- Una observación que debe hacerse al resultado 12, es que hay campos escalares para los que no se puede utilizar. Muestran que para la función  $f(x, y) = x^2$ , todos los puntos de la forma  $(0, y)$  son mínimos, pero no podemos usar el resultado.

2.- Para los siguientes campos escalares, determinar los puntos estacionarios diciendo cuales de ellos son máximos, mínimos o puntos silla.

$$\textcircled{a} \quad f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$$


$$\textcircled{b} \quad f(x, y) = e^{2x^2 + y^2}$$

$$\textcircled{c} \quad f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$$

$$\textcircled{d} \quad f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4$$

$$\textcircled{e} \quad f(x, y) = \text{Sen}(x^2 + y^2)$$

3.- Resolver los problemas P.1.  
y P.2. dados al principio de esta sección.



4

CAMPOS  
VECTORIALES.

En este capítulo estudiaremos el tipo de funciones más generales. De hecho las curvas (capítulo dos) y los campos escalares (capítulo tres) son casos particulares de los campos vectoriales.

#### 4.1. CONCEPTO DE CAMPO VECTORIAL

Cuando se toma  $A = \mathbb{R}^n$  y  $B = \mathbb{R}^m$  en la función  $f: A \rightarrow B$ , se obtienen los campos vectoriales o funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ . Dichas funciones asignan a cada  $n$ -ada  $(x_1, \dots, x_n)$  una y solo una  $m$ -ada  $(y_1, \dots, y_m)$ . Y entonces las cosas se escriben como:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$$



Igual que en el caso de curvas sucede que las componentes  $y_1, \dots, y_m$  cambian conforme se cambia la  $n$ -ada  $(x_1, \dots, x_n)$ . Por ello las variables  $y_1, \dots, y_m$  son funciones de la  $n$ -ada  $(x_1, \dots, x_n)$ , es decir:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $f$  se puede escribir como:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

y las funciones  $f_1, \dots, f_m$  se llaman las funciones componentes de  $f$ .

Conviene aclarar que las funciones vistas en los capítulos dos y tres son casos particulares de campos vectoriales.

Si:  $n=1$  y  $m=2$  ó  $3$  entonces se tienen las curvas:

$$\nabla: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3$$

Si:  $n=2$  y  $m=1$  entonces se obtienen los campos escalares:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Así que todos los ejemplos de funciones que se vieron en esos capítulos, también sirven como ejemplos para este capítulo.

A pesar del comentario anterior, nos gustaría dar ejemplos de fenómenos en que aparecen campos vectoriales del tipo:

$$(1) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f(x, y) = (u, v)$$

$$(2) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x, y) = (u, v, w)$$

$$(3) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f(x, y, z) = (u, v)$$

$$(4) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x, y, z) = (u, v, w)$$

### EJEMPLO 1

Supongamos que se riega el plano  $XY$  con dos sustancias como petróleo y alcohol, es claro que cada punto  $(x, y)$  tiene asociadas una concentración en petróleo y una en alcohol. Por ello podemos definir un campo vectorial como:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

con

$$f(x, y) = \left( \begin{array}{l} \text{Concentración de} \\ \text{petróleo en } (x, y), \end{array} \begin{array}{l} \text{Concentración de} \\ \text{alcohol en } (x, y) \end{array} \right)$$

## EJEMPLO 2

Supongamos que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{PAN} \quad \text{LECHE} \\ \text{CARBOHIDRATOS} \\ \text{PROTEINAS} \end{array}$$

nos describe el contenido de carbohidratos y proteínas en el pan y leche. Es claro que el consumo de carbohidratos y proteínas dependen de las cantidades ingeridas de pan y leche. Si denotamos por

$$B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

lo que se consume de pan y leche, entonces las cantidades de carbohidratos y proteínas consumidas vienen dadas por la operación:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y \end{pmatrix}$$

Podemos pensar a la fórmula anterior como una función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , cuya regla de correspondencia es

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Podemos describir la función anterior como :

$$f(\text{Pan}, \text{Leche}) = (\text{Carbohidratos}, \text{Proteínas})$$

**EJEMPLO 3** Supongamos que cada punto  $(x, y)$  del plano se toma como una porción de terreno en que se producen maíz, trigo y cebada. Asociémosle a cada punto  $(x, y)$  la producción que hubo de los tres productos en tal punto. Es decir, definamos  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  como :

$$f(x, y) = \left( \begin{array}{l} \text{Producción de} \\ \text{maíz en } (x, y), \end{array} \begin{array}{l} \text{Producción de} \\ \text{trigo en } (x, y), \end{array} \begin{array}{l} \text{Producción de} \\ \text{cebada en } (x, y) \end{array} \right)$$

**EJEMPLO 4** Supongamos que en el ejemplo 4.2. hacemos referencia también a las grasas, es decir, damos una matriz del tipo :

	PAN	LECHE	
$A =$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	CARBOHIDRATOS
	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	PROTEINAS
	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	GRASAS

Podemos definir un campo vectorial  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  como :

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es decir como:

$$f(\text{Pan}, \text{Leche}) = (\text{Carbohidratos}, \text{Proteinas}, \text{Grasas})$$

### EJEMPLO 5

Consideremos ahora el ejemplo 3<sup>o</sup> del capítulo 3. Solo que ahora supondremos que inyectamos dos sustancias como petróleo y alcohol. Es claro que cada punto  $(x, y, z)$  del tubo tiene asociada una concentración en petróleo y una en alcohol. Por ello definimos  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como:

$$f(x, y, z) = \left( \begin{array}{l} \text{Concentración de} \\ \text{petróleo en } (x, y, z) \end{array} ; \begin{array}{l} \text{Concentración de} \\ \text{alcohol en } (x, y, z) \end{array} \right)$$

### EJEMPLO 6

Supongamos que tenemos una matriz del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} \text{PAN} & \text{LECHE} & \text{PESCADO} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{CARBOHIDRATOS} \\ \text{PROTEINAS} \end{array}$$

Y además

$$\alpha \mathcal{L} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

denota lo que se consume de pan, leche y pescado. Entonces

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

denota el consumo de carbohidratos y proteínas que se ingieren en la dieta  $\alpha \mathcal{L}$ . Podemos definir un campo vectorial  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**EJEMPLO 7** Considere la pared interior del corazón  $\alpha \mathcal{L}$  y formemos un campo vectorial  $f: \alpha \mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que a cada punto  $(x, y, z)$  se le asigne la presión y temperatura que tiene dicho punto.

$$f(x, y, z) = \left( \begin{array}{l} \text{Presión en el} \\ \text{punto } (x, y, z) \end{array}, \begin{array}{l} \text{Temperatura en el} \\ \text{punto } (x, y, z) \end{array} \right)$$

EJEMPLO 8

Consideremos ahora una porción de medio ambiente y asociémosle a cada punto  $(x, y, z)$  la concentración que tiene en  $O_2$  y  $CO_2$ , es decir, definamos un campo vectorial  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \text{Concentración de } O_2 \text{ en } (x, y, z) \\ \text{Concentración de } CO_2 \text{ en } (x, y, z) \end{pmatrix}$$

#### 4.2. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LOS CAMPOS VECTORIALES.

Existe una forma de representar geoméricamente a los campos vectoriales de la forma  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  cuando  $n$  o  $m$  toman los valores 2 o 3.

Consideremos un campo vectorial de la forma  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(x, y) = (u, v)$ . Dibujemos el espacio dominio  $\mathbb{R}^2$  y coloquemos en cada punto  $(x, y)$  el vector asociado a ese punto (Fig. 1)

Al dibujarle a cada punto del plano su vector asociado, tendremos una idea geométrica del comportamiento de la función.

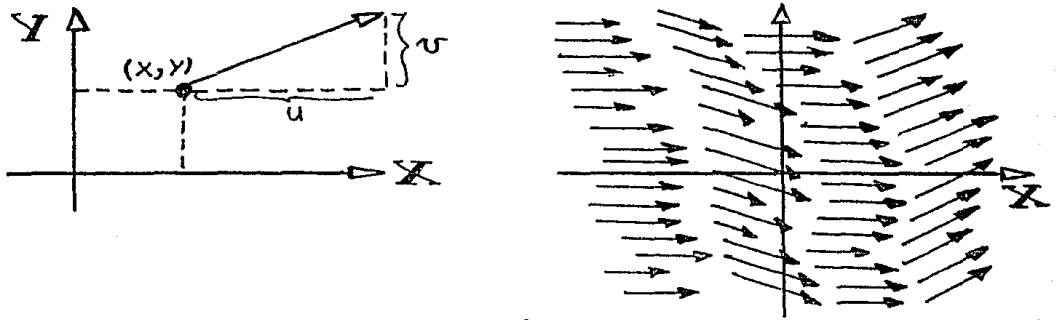


Fig. 1

En términos del ejemplo uno de este capítulo, lo que estamos haciendo equivale a colocar en cada punto  $(x, y)$  un vector cuyas componentes son la concentración de petróleo y alcohol en dicho punto (Fig. 2)

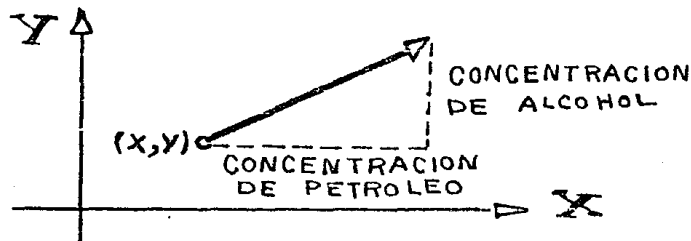


Fig. 2.

Para los ejemplos cuatro y ocho de este capítulo, la representación geométrica sería como lo ilustra la Fig. 3.



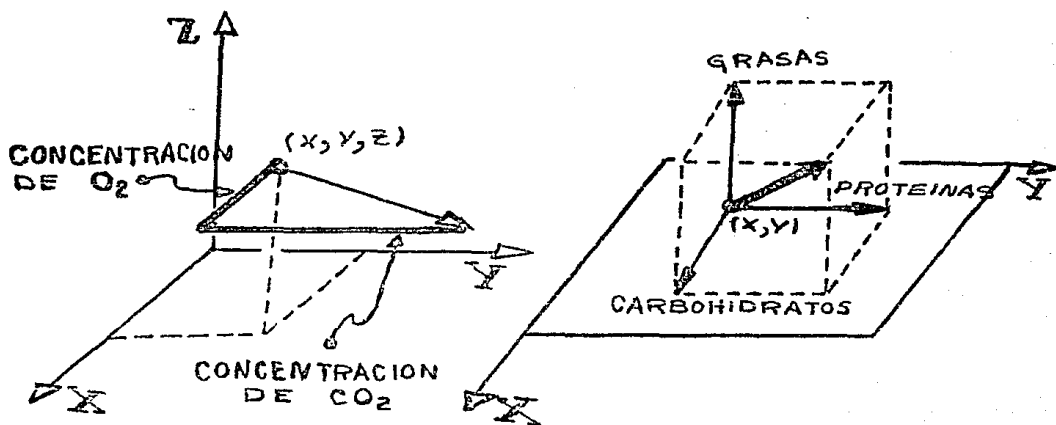


Fig. 3

#### 4.3. TRANSFORMACIONES LINEALES.

Consideremos el ejemplo dos de este capítulo. Sabemos que la función:

$$f(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nos indica el consumo de carbohidratos y proteínas que se ingieren en los  $x$  grs. de pan y  $y$  mls. de leche. De hecho podemos escribir en una forma más sugestiva a la función  $f$ :

$$f(\text{Pan}, \text{Leche}) = (\text{Carbohidratos}, \text{Proteína})$$

o también:  $f(P_A, L) = (C, P)$ .

Supongamos ahora que se duplica el consumo de pan y leche, es claro que también se duplica el consumo de carbohidratos y proteínas, es decir

$$f(2(P_A, L)) = 2(C, P)$$

lo cual es equivalente a:

$$f(2(P_A, L)) = 2 f(P_A, L)$$

Si en lugar de duplicar el consumo de pan y leche, los incrementos en  $\lambda$  veces, entonces

$$f(\lambda(P_A, L)) = \lambda f(P_A, L)$$

Supongamos ahora que se consumen dos cantidades de pan y leche, las cuales vienen dadas por los vectores:

$$(P_1, L_1) \quad \text{y} \quad (P_2, L_2)$$

Es claro que el consumo de carbohidratos y proteínas en  $(P_1 + P_2, L_1 + L_2)$  es igual a la cantidad de carbohidratos y proteínas consumidos en  $(P_1, L_1)$  más los consumidos en  $(P_2, L_2)$ , es decir:

$$f((P_1, L_1) + (P_2, L_2)) = f(P_1, L_1) + f(P_2, L_2)$$

Las funciones que satisfacen las dos últimas propiedades son muy importantes en Matemáticas. Por tal razón se les da un nombre especial.

### DEFINICION 1

Una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (con  $n, m = 1, 2$  ó  $3$ ) es lineal si satisface las propiedades siguientes:

$$(L.1.) \quad f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } x \in \mathbb{R}^n$$

$$(L.2.) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R}^n$$

Antes de pasar a otra cosa, interpretaremos geométricamente las transformaciones lineales en los casos:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Consideremos el primer caso y supongamos que  $f(1) = m$ , entonces por la propiedad L.1. se tiene:

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x f(1) = mx$$

Es decir  $f$  adopta la forma  $f(x) = mx$ .

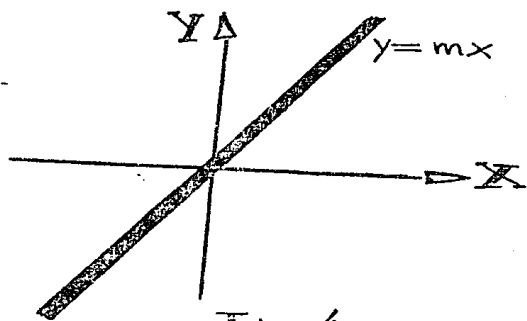


Fig. 4

Se deja para el lector probar que las líneas rectas  $f(x) = mx + b$  con  $b \neq 0$  no son lineales.

Ahora consideremos el segundo caso. Supongamos que  $g(1) = (\alpha, \beta, \gamma)$  entonces

$$\begin{aligned} g(t) &= g(t \cdot 1) \\ &= t g(1) \\ &= t (\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $g$  es una línea recta en el espacio que pasa por el origen  $(0, 0, 0)$  y que va en la dirección  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Finalmente consideremos el caso  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Sabemos que cualquier pareja  $(x, y)$  se puede escribir como:

$$(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$$

Usando las propiedades L.1. y L.2. se tiene

$$\begin{aligned} h(x, y) &= h(x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) \\ &= h(x \mathbf{i}) + h(y \mathbf{j}) \\ &= x h(\mathbf{i}) + y h(\mathbf{j}) \end{aligned}$$

Si suponemos que  $h(\mathbf{i}) = \alpha$  y  $h(\mathbf{j}) = \beta$  entonces

$$h(x, y) = \alpha x + \beta y$$

Y se observa que dicha ecuación es la de un plano que pasa por el origen.

Estos tres ejemplos muestran que una transformación lineal queda determinada por los valores que toma en  $\mathbf{i}$  o en  $\mathbf{j}$ .

Para el ejemplo con que se inicio esta sección también se cumple una aseveración parecida. Si conocemos el contenido de carbohidratos y proteínas que hay en un gramo de pan y en un mililitro de leche, es decir, si conocemos:

$$f(1, 0) \quad \text{y} \quad f(0, 1)$$

Entonces podemos conocer el contenido de carbohidratos y proteínas en  $x$  grs. de pan y  $y$  mls. de leche. Por medio de la ecuación

$$f(x, y) = x f(1, 0) + y f(0, 1)$$

Si suponemos que  $f(1, 0) = (\alpha_{11}, \alpha_{21})$  y  $f(0, 1) = (\alpha_{12}, \alpha_{22})$  entonces

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x (\alpha_{11}, \alpha_{21}) + y (\alpha_{12}, \alpha_{22}) \\ &= (x\alpha_{11} + y\alpha_{12}, x\alpha_{21} + y\alpha_{22}) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se observa, pues, que los valores de la transformación lineal  $f$  se pueden determinar a partir de un producto de matrices, además la matriz queda determinada porque sus columnas son  $f(1, 0)$  y  $f(0, 1)$ :

$$\begin{array}{cc} f(1, 0) & f(0, 1) \\ \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

Presentamos a continuación el resultado general.

**RESULTADO 1** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal tal que  $f(1,0) = (\alpha_{11}, \alpha_{21})$  y  $f(0,1) = (\alpha_{12}, \alpha_{22})$ . Se cumple:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Convencimiento.

Como en realidad ya hemos demostrado este resultado anteriormente, damos los pasos muy rápidos:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x\mathbf{i}) + f(y\mathbf{j}) \\ &= x f(\mathbf{i}) + y f(\mathbf{j}) \\ &= x(\alpha_{11}, \alpha_{21}) + y(\alpha_{12}, \alpha_{22}) \\ &= (\alpha_{11}x + \alpha_{12}y, \alpha_{21}x + \alpha_{22}y) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las mismas observaciones que se hicieron para transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , también se cumplen para las transformaciones:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

El caso  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se puede explicar del siguiente modo. Supongamos que tenemos tres alimentos pan, leche y huevo  $(P, L, H)$  y asociémosle a la terna anterior los carbohidratos y proteínas consumidas en tales alimentos.

Afirmemos que si conocemos las cantidades de carbohidratos y proteínas consumidas en 1 gr. de pan, 1 ml. de leche y 1 gr. de huevo, entonces podemos conocer la cantidad de carbohidratos y proteínas consumidas en  $x$  grs. de pan,  $y$  mls. de leche y  $z$  grs. de huevo, esto por la ecuación:

$$f(x, y, z) = x f(\mathbf{i}) + y f(\mathbf{j}) + z f(\mathbf{k})$$

Si suponemos que:  $f(\mathbf{i}) = (\alpha_{11}, \alpha_{21})$ ,  $f(\mathbf{j}) = (\alpha_{12}, \alpha_{22})$  y  $f(\mathbf{k}) = (\alpha_{13}, \alpha_{23})$  entonces

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x(\alpha_{11}, \alpha_{21}) + y(\alpha_{12}, \alpha_{22}) + z(\alpha_{13}, \alpha_{23}) \\ &= (\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z, \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cabe señalar que las columnas



de la matriz que representa a  $f$  son  $f(\mathbf{i})$ ,  $f(\mathbf{j})$  y  $f(\mathbf{k})$ .

Todo lo anterior lo señalamos como un resultado.

**RESULTADO 2** Sea  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función lineal. Si  $f(\mathbf{i}) = (\alpha_{11}, \alpha_{21})$ ,  $f(\mathbf{j}) = (\alpha_{12}, \alpha_{22})$  y  $f(\mathbf{k}) = (\alpha_{13}, \alpha_{23})$  entonces la matriz que representa a  $f$  es:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$$

Se deja al lector comprobar y obtener la matriz asociada a las funciones lineales restantes.

A partir de los resultados uno y dos, podemos construir transformaciones lineales con valores asignados. Este hecho tiene interpretaciones geométricas muy interesantes.

Tomemos el cuadrado cuyos vértices son  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  y  $(0,1)$  (Fig. 5) Quisiéramos modificar la forma del cuadrado

mediante una transformación lineal  $T$ . Por ejemplo, podemos "alargar" dicho cuadrado a lo largo del eje  $X$  (Fig 5)

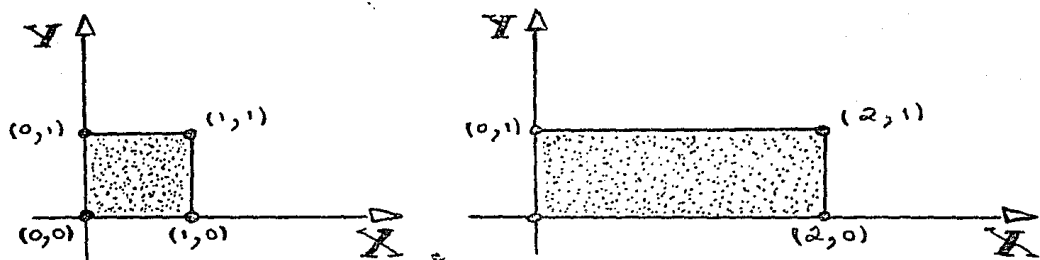


Fig. 5

Para realizar tal transformación, podemos usar una transformación lineal  $T$  tal que  $T(\mathbf{i}) = (2, 0)$  y  $T(\mathbf{j}) = (0, 1)$ , es decir, una transformación dada por  $T(x, y) = (2x, y)$ . Podemos comprobar que  $T$  hace las siguientes transformaciones:  $T(0, 0) = (0, 0)$ ,  $T(1, 0) = (2, 0)$ ,  $T(1, 1) = (2, 1)$  y  $T(0, 1) = (0, 1)$ . Esto último nos indica, en parte, que el cuadrado se transforma en el rectángulo ya mencionado. Realmente para demostrar que el cuadrado entero se transforma en exactamente el rectángulo, tenemos que probar dos cosas:

(\*) Cada punto del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  se transforma en un punto del cuadrado o rectángulo  $[0, 2] \times [0, 1]$ .

(\*\*) Cada punto del rectángulo  $[0, 2] \times [0, 1]$  proviene de un punto del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

La comprobación de estos dos hechos es necesario, pues si se cumple (\*) y no (\*\*) entonces podría ocurrir algo como en la Fig. 6.

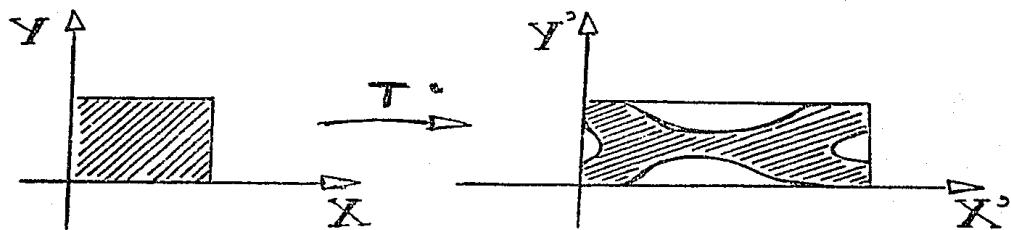


Fig. 6

Para el ejemplo que estamos considerando probaremos que se cumplen (\*) y (\*\*).

Sea  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$  entonces  $0 \leq x, y \leq 1$ , y por lo tanto  $0 \leq 2x \leq 2$  y  $0 \leq y \leq 1$ . Y como  $(2x, y) = T(x, y)$ , hemos probado que  $T(x, y) \in [0, 2] \times [0, 1]$ .

Sea ahora  $(u, v) \in [0, 2] \times [0, 1]$  entonces  $0 \leq u \leq 2$  y  $0 \leq v \leq 1$ . Por lo tanto  $0 \leq \frac{u}{2} \leq 1$  y  $0 \leq v \leq 1$ . Afirmamos que la pareja  $(\frac{u}{2}, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$  va a dar a  $(u, v)$  bajo  $T$ . Como  $T(\frac{u}{2}, v) = (u, v)$  tenemos el resultado.

Podemos proseguir con más ejemplos, pero preferimos presentar únicamente los resultados y dejamos que el lector los compruebe.

(1) Dilatación a lo largo del eje  $Y$ .

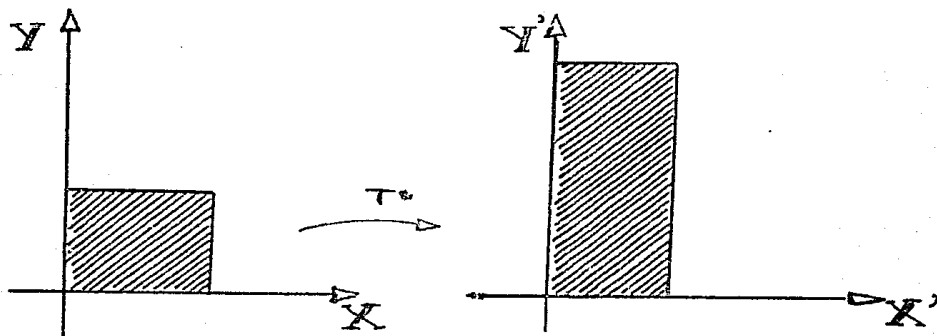


Fig. 7

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) Reflexión sobre el eje  $X$ .

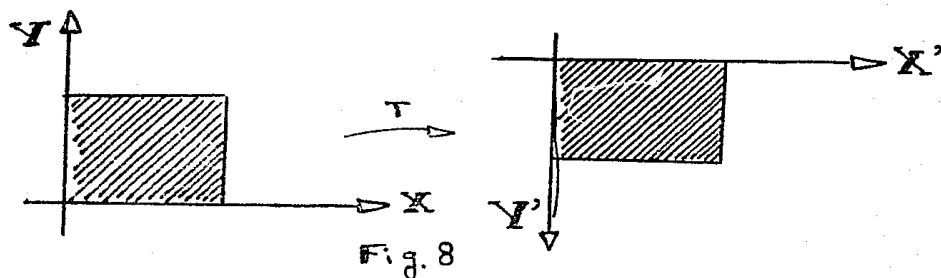


Fig. 8

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

## (3) Rotación y Dilatación.

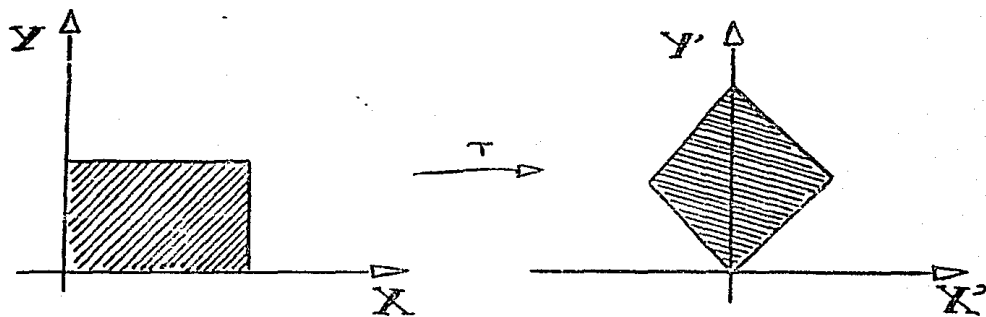


Fig. 9

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos extender este tipo de ideas para transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ , solo que en este caso hay que considerar al cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

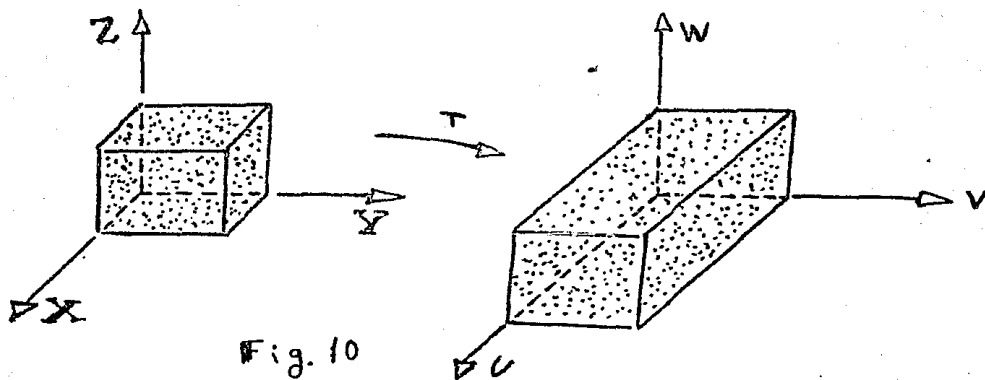
(4) Dilatación a lo largo del eje  $X$ 

Fig. 10

## EJERCICIOS.

1.- Encontrar una transformación lineal  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que transforme el cuadrado  $[0,1] \times [0,1]$  en el paralelogramo de la Fig. 11.

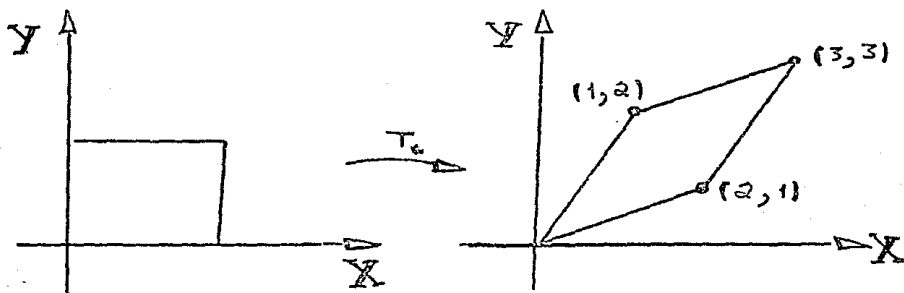


Fig. 11

2.- Mostrar que si  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es lineal entonces  $T(0) = 0$ .

## 4.4. MATRIZ JACOBIANA.

Para introducir el concepto matemático de esta sección, consideremos el ejemplo 5. En dicho ejemplo se plantea el campo vectorial:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \text{Concentración de} \\ \text{petroleo en } (x, y, z) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{Concentración de} \\ \text{alcohol en } (x, y, z) \end{pmatrix}$$

La cual podemos escribir como:

$$f(x, y, z) = (C_1(x, y, z), C_2(x, y, z))$$

Una matriz asociada a  $f$  en forma natural es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dicha matriz nos indica la rapidez con que cambia la concentración de cada sustancia con respecto a las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ . También se puede observar que el primer renglón de tal matriz es el gradiente de la función  $C_1$  y el segundo renglón es el gradiente de la función  $C_2$ . A partir de esta observación y de lo visto en la sección de gradiente del capítulo tres, se tiene que el negativo de tal matriz es casi el ente matemático que representa el "flujo" de las dos sustancias.

La matriz de la que hemos estado hablando se llama matriz jacobiana. En la siguiente definición extendemos dicho concepto a cualquier campo vectorial.

**DEFINICION 2** Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  un campo vectorial con  $f = (f_1, \dots, f_m)$  y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Se define la matriz jacobiana en el punto  $x_0$  como la matriz:

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{bmatrix}$$

**EJEMPLO 9** Consideremos el campo vectorial:

$$f(\text{Pan}, \text{Leche}, \text{Pescado}) = (\text{Carbohidratos}, \text{Proteinas})$$

definido por:

$$f(x, y, z) = (\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z, \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z)$$

Para este ejemplo la matriz jacobiana es:

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$$

Como las cantidades  $\alpha_{ij}$  dan el contenido de carbohidratos o proteínas por unidad de alimento, entonces la matriz jacobiana es una matriz de concentraciones.



#### 4.5. COORDENADAS CILINDRICAS Y ESFERICAS.

Aprovechando el material que hemos visto en este capítulo, daremos dos formas más de localizar un punto en el espacio.

Si el lector recuerda lo que vimos en el capítulo uno sección uno, dada la terna  $(X, Y, Z)$  se tenía un procedimiento para localizar el punto que representa a la terna.

En esta sección veremos dos procedimientos más para identificar un punto.

El primero de tales procedimientos se llama "SISTEMA DE COORDENADAS CILINDRICAS". Este procedimiento usa a la coordenada  $Z$  del sistema de coordenadas cartesianas, más dos coordenadas denotadas por  $R$  y  $\theta$ , donde  $R$  y  $\theta$  son las coordenadas polares del punto  $P'$ , el cual es la proyección del punto original  $P$  en el plano  $XY$ . (Fig. 12)

Resulta claro que la terna  $(R, \theta, Z)$  determina la posición del punto

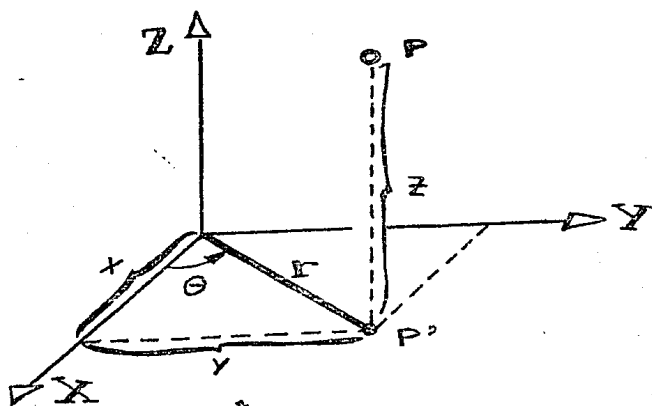


Fig. 12

P. Podemos relacionar las coordenadas cartesianas con las coordenadas cilíndricas de un punto, por medio de las ecuaciones:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{Sen} \theta, \quad z = z$$

De hecho podemos usar las ecuaciones anteriores para definir un campo vectorial  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con

$$F(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{Sen} \theta, z)$$

Este campo vectorial transforma las coordenadas cilíndricas de un punto a coordenadas cartesianas.

Podemos interpretar geométricamente al campo  $F$  como sigue. Si mantenemos constante a  $r$ , digamos  $r=k$ , entonces los puntos que se encuentran en el plano  $r=k$  se transforman en un cilindro en el espacio  $XYZ$  de radio  $k$ , pues si  $F(r, \theta, z) = (x, y, z)$  entonces  $x^2 + y^2 = k^2$  y  $z \in \mathbb{R}$  (Fig. 13)

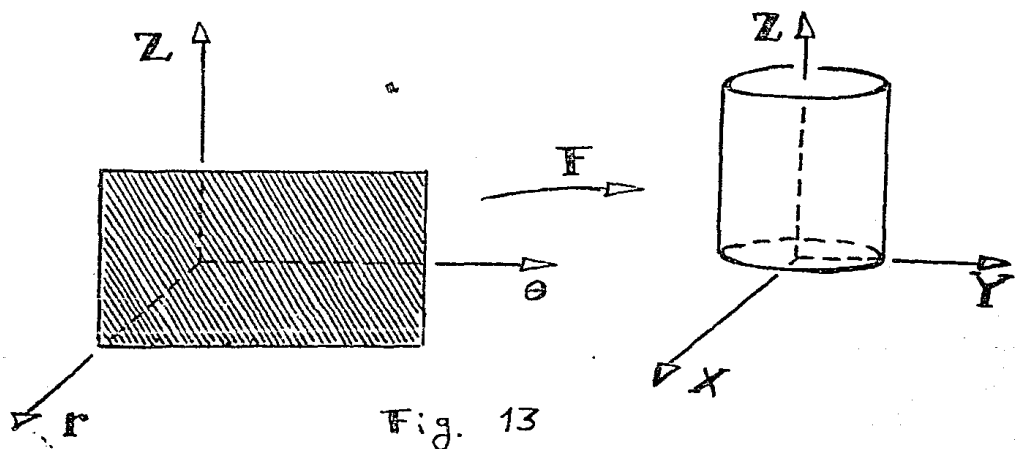


Fig. 13

La principal aplicación de las coordenadas cilíndricas reside en el hecho de facilitar la solución de problemas de aplicación en Física y Biología.

El lector podrá comprobar esto en el próximo capítulo, en el cual resolveremos algunos problemas de Biología mediante el uso de sistemas de coordenadas polares.

Pasaremos, ahora, a estudiar el sistema de coordenadas esféricas.

Consideremos un punto  $P$  localizado mediante sus coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ . Para localizar a  $P$  mediante coordenadas esféricas usamos tres números  $\rho$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , donde  $\rho$  es la distancia de  $P$  al origen, es decir,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . La cantidad  $\theta$  es exactamente el ángulo que aparece en las coordenadas polares y  $\phi$  es el ángulo que forma el vector  $\overline{OP}$  con el eje  $Z^+$  (Fig 14)

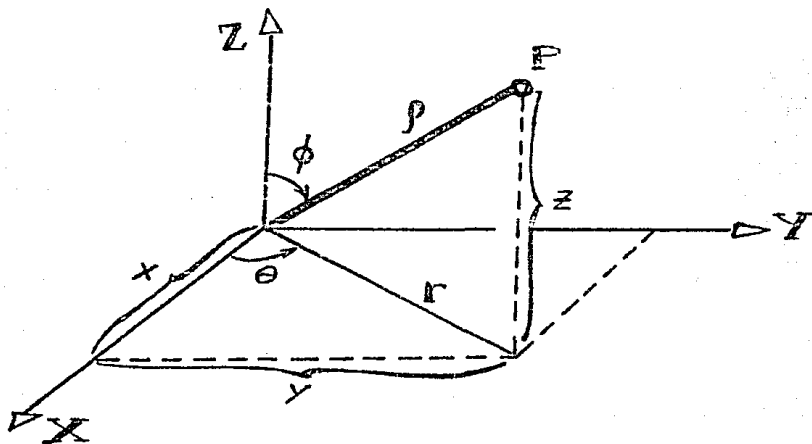


Fig. 14

Podemos encontrar una relación entre las coordenadas esféricas de un punto y sus coordenadas cartesianas. Observando

la Fig. 14, notamos que:  $\text{Cos } \phi = \frac{z}{\rho}$ ,

$\text{Cos } \theta = \frac{x}{r}$  y  $\text{Sen } \theta = \frac{y}{r}$ . Por lo tanto

$x = r \text{Cos } \theta$ ,  $y = r \text{Sen } \theta$  y  $z = \rho \text{Cos } \phi$ .

Como la variable  $r$  no debe de aparecer (pues no es parte de las coordenadas esféricas), tenemos que recurrir al hecho de que  $r = \rho \text{Sen } \phi$ . Sustituyendo esta ecuación en las tres ecuaciones anteriores, tenemos:

$$x = \rho \text{Sen } \phi \text{Cos } \theta, \quad y = \rho \text{Sen } \phi \text{Sen } \theta, \quad z = \rho \text{Cos } \phi$$

Las tres fórmulas anteriores nos ayudan a definir un campo vectorial  $T$  como  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con

$$T(\rho, \theta, \phi) = (\rho \text{Sen } \phi \text{Cos } \theta, \rho \text{Sen } \phi \text{Sen } \theta, \rho \text{Cos } \phi)$$

Esta transformación es la que asigna a las coordenadas esféricas de un punto sus coordenadas cartesianas.

Podemos interpretar geométricamente al campo vectorial  $T$ , observando en que transforma el plano  $\rho = 1$ . Como  $\rho = 1$  entonces  $x = \text{Sen } \phi \text{Cos } \theta$ ,  $y = \text{Sen } \phi \text{Sen } \theta$  y  $z = \text{Cos } \phi$ , y con estas ecuaciones po-

demostramos deducir que  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .  
Lo cual nos indica que el plano  $\rho = 1$  se  
transforma en una esfera de radio uno  
y con centro en el origen.

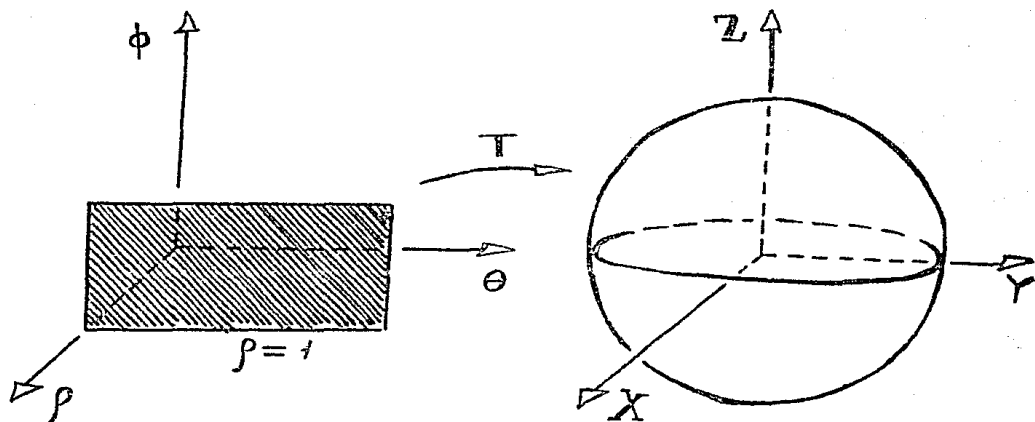


Fig. 15

¿Qué pasa si imponemos las condiciones  $\rho = 1$  y  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ? Como  $\phi$  es el ángulo que forma el vector  $\overrightarrow{OP}$  con  $Z^+$  y solo varía entre 0 y  $\pi/2$ , entonces el vector  $\overrightarrow{OP}$  solo toca a los puntos de la esfera que se encuentran en el hemisferio norte, es decir,  $P$  describe el hemisferio norte de la esfera unitaria.

## EJERCICIOS.

1.- ¿En qué se transforman los puntos  $(\rho, \theta, \phi)$  que tienen la propiedad de que  $0 \leq \rho \leq 1$ ? ¿Qué pasa con los puntos en que  $1 \leq \rho \leq 2$ ?

2.- ¿Cómo se obtiene el hemisferio sur de la esfera unitaria?

3.- ¿Qué condición hay que imponer a la terna  $(\rho, \theta, \phi)$  para que el punto  $T(\rho, \theta, \phi)$  describa un meridiano o un paralelo?

4.- ¿Qué puntos  $(\rho, \theta, \phi)$  van a dar al polo norte o polo sur mediante la transformación  $T$ ?

Para terminar esta sección, daremos algunas aplicaciones de los diferentes sistemas de coordenadas.

**EJEMPLO 10** Suponga que estamos estudiando el movimiento de una membrana, cuando se le somete a

una fuerza y empiezo a vibrar verticalmente.

Para dar un ejemplo concreto, podemos pensar en un estanque en que la membrana es la superficie del agua y el fenómeno de vibración se da cuando dejamos caer una piedra sobre él. (Fig. 16)

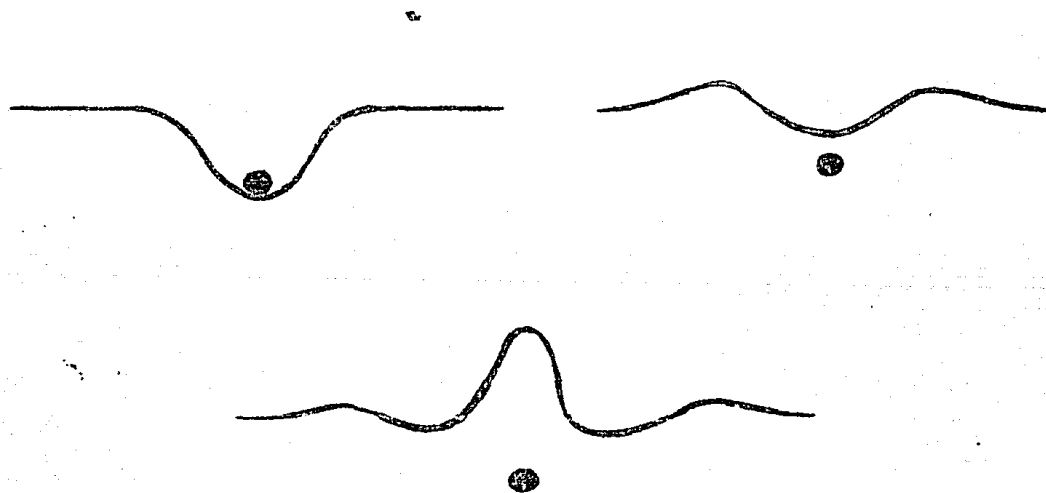


Fig. 16

Denotemos por  $U(x, y, t)$  a la altura que alcanza el agua sobre el punto  $(x, y)$  en el tiempo  $t$ .

Supongamos que la piedra cayó en el  $(0, 0)$ . Como las olas de agua



son circulares, para un tiempo  $t$ , la función  $u$  es constante en circunferencias del tipo  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Si cambiamos las coordenadas  $(x, y, t)$  por sus coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, t)$ , tendremos que, realmente, la función  $u$  no depende de  $\theta$ , es decir,  $u$  sólo depende de  $r$  y  $t$ :

$$u(x, y, t) = v(r, t)$$

Entonces el cambio a coordenadas cilíndricas nos ahorra el manejo de una variable.

**EJEMPLO 11** Consideremos una arteria cuya sección transversal es circular de radio  $R$ . Estamos interesados en medir la cantidad de sangre que fluye a través de la sección por unidad de tiempo.

Cuando la velocidad con que corre un fluido es constante, el flujo se calcula con la fórmula:

$$\text{Flujo} = (\text{Area})(\text{Velocidad})$$

Notemos que en el problema que estamos tratando, la velocidad con que corre la sangre en la sección no es constante pues las partículas más alejadas del centro avanzan más despacio por efecto de la fricción que produce la pared de la arteria. De hecho, se sabe que la velocidad en un punto  $(x, y)$  del círculo está dada por  $v(x, y) = K(R^2 - r^2)$ , donde  $r$  es la distancia de  $(x, y)$  al centro, es decir,  $\sqrt{x^2 + y^2}$  (pensando que el centro es  $(0, 0)$ )

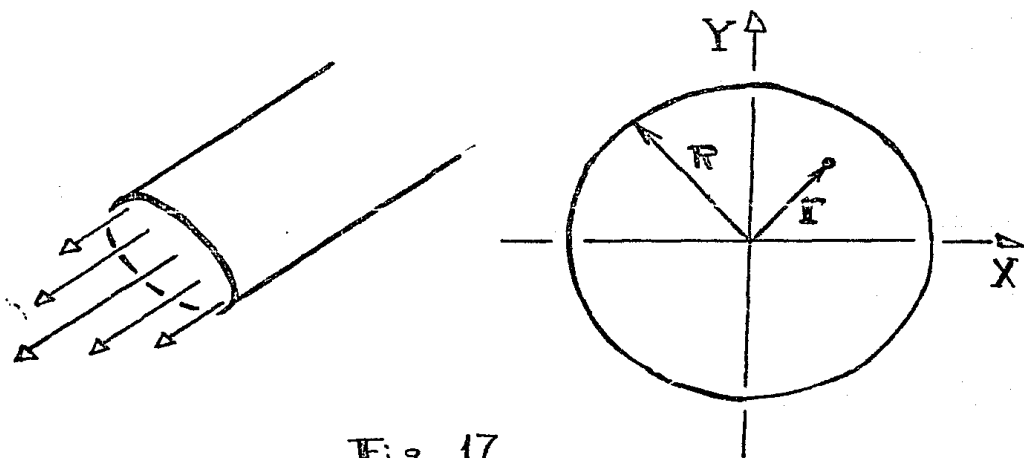
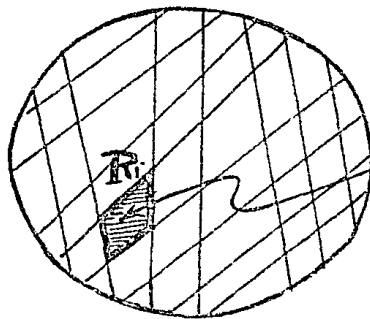


Fig. 17

Para remediar este inconveniente, podemos dividir la sección transversal de la arteria en pedazos muy pequeños. En estos pedazos la velocidad es muy parecida para todos sus puntos y entonces la podemos suponer constante.

Podremos por lo tanto calcular el flujo en cada pedazo, para después sumar todos estos flujos y así obtener el flujo total. (Fig. 18)



AQUI LA VELOCIDAD CON QUE SE MUEVE LA SANGRE ES CASI CONSTANTE

Fig. 18

$$\text{Flux} = \sum \text{Flux}[R_i]$$

Nuestro problema ahora es el saber como vamos a dividir a esta sección transversal. Es en este punto donde entra en acción las coordenadas polares. Si tomamos diferenciales del radio vector  $dr$  y diferenciales del ángulo  $d\theta$ , la sección de la arteria queda partida como lo ilustra la Fig. 19.

Como la región  $R_i$  puede pensarse como un rectángulo de lados  $dr_i$  y  $ds_i$  (donde  $ds_i$  es el diferencial de arco inferior) entonces su área es  $A(R_i) = (ds_i)(dr_i)$ , y como

$ds_i = r_i d\theta_i$  entonces  $A(R_i) = r_i dr_i d\theta_i$

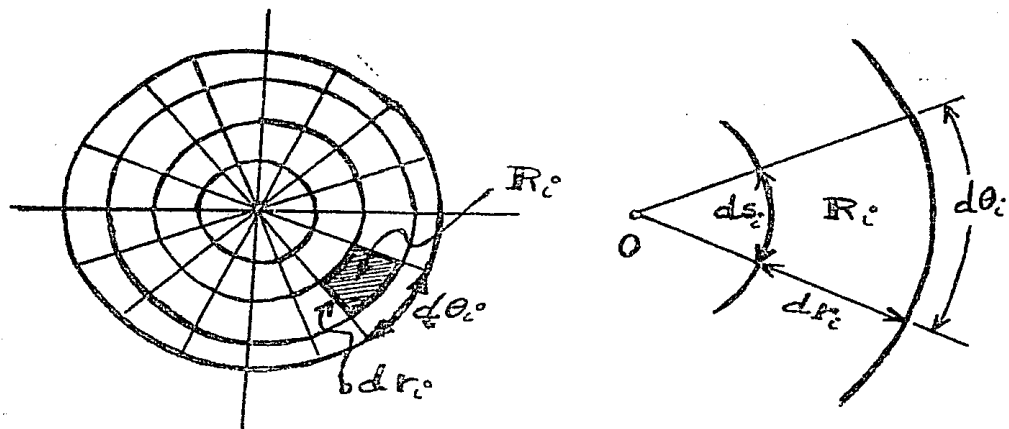


Fig. 19

Suponiendo ahora que la velocidad con que fluye la sangre en  $R_i$  es constante e igual a  $v = k(R^2 - R_i^2)$  entonces el flujo en  $R_i$  es:

$$\text{Flux}[R_i] = k(R^2 - R_i^2) r_i dr_i d\theta_i$$

y entonces el flujo total es aproximadamente igual a:

$$\text{Flux}[R] = \sum_i k(R^2 - R_i^2) dr_i d\theta_i$$

Estudiaremos más profundamente este ejemplo en el próximo capítulo.

**EJEMPLO 12** Consideremos una bomba (como las hechas con jabón), la cual se forma debido a una diferencia de presiones  $\Delta P$  entre su interior y el medio ambiente.

Estamos interesados en calcular la fuerza que se ejerce sobre las paredes de la bomba. Se sabe que la fuerza  $F$  se relaciona con la presión  $\Delta P$  y el área  $A$  por la fórmula:

$$F = \Delta P A$$

De la Fig. 20 se observa que el elemento de área  $dA$  sobre la superficie de la bomba tiene magnitud:

$$dA = (\rho \text{ Sen } \phi d\theta)(\rho d\phi)$$

donde hemos usado coordenadas esféricas para tal cálculo.

Ahora bien, la componente  $F_z$  de la diferencial de la fuerza viene dada por  $dF_z = (\Delta P dA) \text{Cos } \phi$  o lo que es lo mismo:

$$dF_z = \Delta P \rho^2 \text{ Sen } \phi \text{ Cos } \phi d\phi d\theta$$

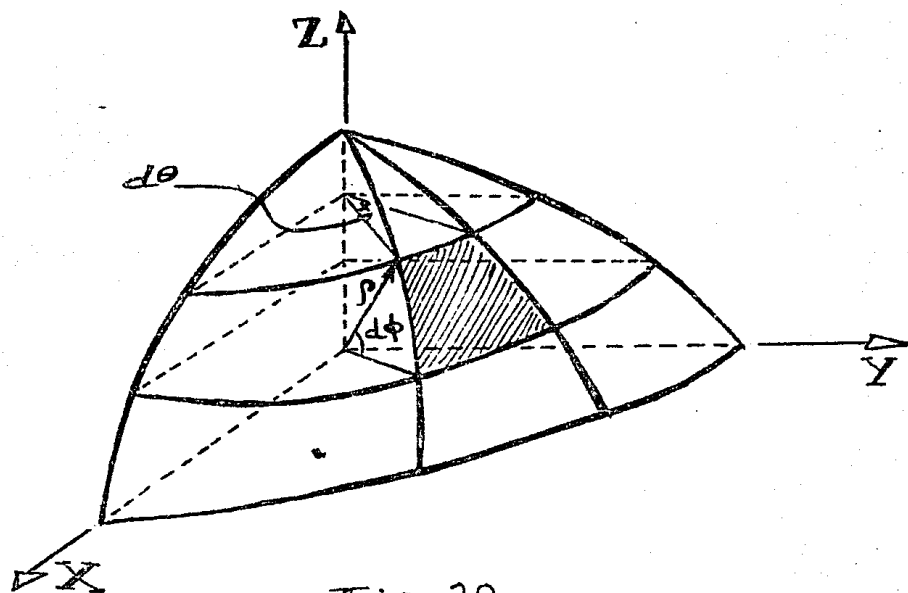


Fig. 20

De nuevo queremos decirle al lector que no olvide este ejemplo y que lo tenga presente para el próximo capítulo.

Quisimos dar estos ejemplos para que el lector "observara" como es que en algunas situaciones prácticas, es mucho mejor usar un sistema de coordenadas mediante el cual se simplifique el problema. Cabe mencionar, por último, que los sistemas de coordenadas que hemos visto no son los únicos, existen muchos otros que reciben el nombre de **SISTEMAS DE COORDENADAS GENERALIZADOS**.

5

INTEGRACION.

El concepto matemático que ahora estudiaremos, también aparece en forma natural en fenómenos biológicos.

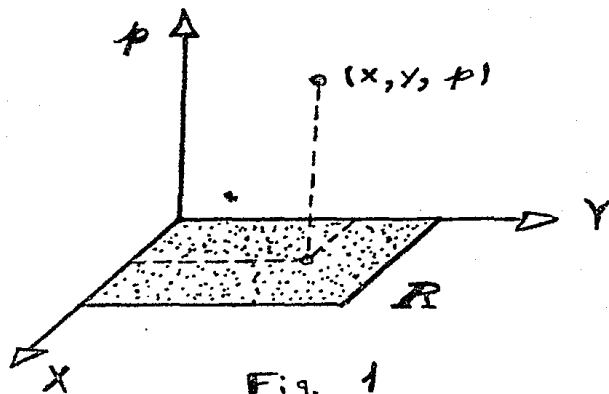
### 5.1. CONCEPTO DE INTEGRAL DOBLE.

Sabemos que el proceso de respiración se da en base al oxígeno ( $O_2$ ) que entra por las fosas nasales y llega a los pulmones. Cuando el  $O_2$  llega a los pulmones, cada punto de la membrana interior del pulmón resiente una presión ejercida por éste.

Supongamos que nos fijamos en una capa rectangular del pulmón (Fig. 1).



Y supongamos que conocemos la función que nos mide la presión  $p$  que se ejerce en cada punto  $(x, y)$  de la membrana rectangular.



Se pregunta por el valor de la fuerza  $F$  que se ejerce sobre la membrana  $R$ , por efecto de la presión.

Si la presión que se ejerce en cada punto es constante entonces la fuerza viene dada por la fórmula  $F = pA(R)$ , donde  $A(R)$  denota el área de la región  $R$ . La fórmula anterior equivale, numéricamente, a obtener el volumen de la caja mostrada en la Fig. 2.

El caso en que la presión no es constante, es necesario recurrir a otro

tipo de cálculos.

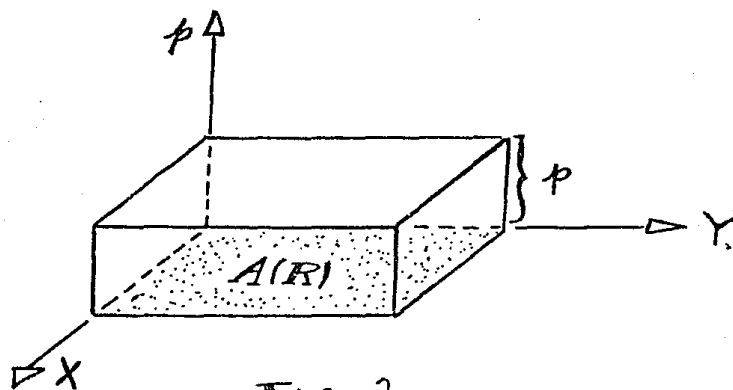


Fig. 2

Para iniciar nuestro trabajo, grafiquemos la función  $p = f(x, y)$  (Fig. 3)

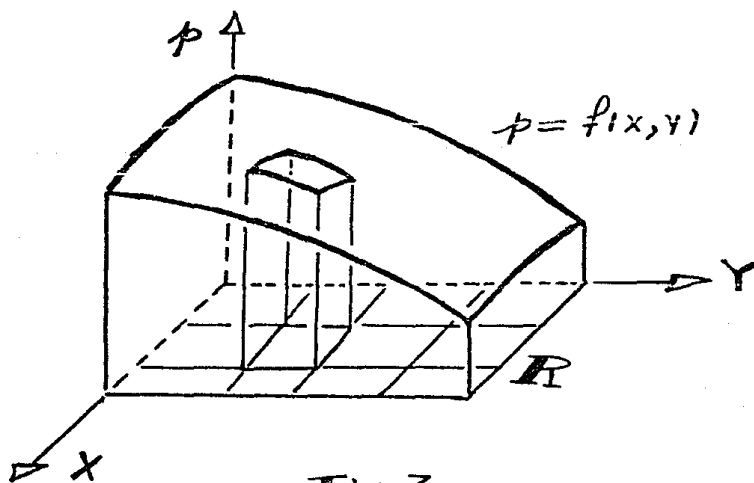


Fig. 3

Ahora se hace la siguiente observación. Si la región rectangular  $R$  se

divide en rectángulos muy pequeños (Fig 3), entonces la presión ejercida en cada uno de ellos es casi constante. Y se observa que mientras más pequeños sean los rectángulos más cierta será nuestra afirmación.

Antes de continuar conviene denotar de alguna forma a los rectángulos que dividen a la región  $R$ . Como los rectángulos se pueden caracterizar por el renglón y columna en que se encuentran, denotaremos por  $R_{ij}$  al rectángulo que se encuentra en el  $i$ -ésimo renglón y  $j$ -ésima columna.

A la totalidad de rectángulos  $R_{ij}$  que aparecen al dividir a  $R$  se les da un nombre especial.

**DEFINICION 1** Sea  $R$  una región rectangular contenida en  $\mathbb{R}^2$ . Una partición de  $R$  es una colección finita de sub-rectángulos

$$P = \left\{ \begin{array}{cccc} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{renglón uno} \\ \vdots \\ \text{renglón } n \end{array}$$

tales que: (P.1) La unión de todos ellos nos da  $R$  y (P.2) Dos rectángulos  $R_{ij}$  y  $R_{kl}$  si se intersectan, entonces lo hacen únicamente en una parte de su frontera (Fig. 4)

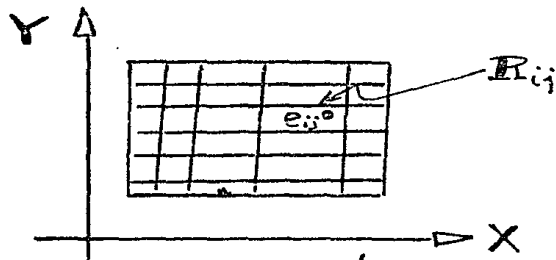


Fig. 4.

Seguidamente pasaremos a calcular la fuerza que se ejerce sobre cada uno de los rectángulos  $R_{ij}$ . Para hacer esto escogemos un punto  $e_{ij}$  de cada subrectángulo,  $R_{ij}$ . (Fig. 4). A los puntos  $e_{ij}$  les damos un nombre especial.

**DEFINICION 2** Sea  $R \in \mathbb{R}^2$  un rectángulo y  $\mathcal{P} = \{R_{11}, \dots, R_{nm}\}$  una partición de  $R$ . Una elección de puntos  $\mathcal{E}$  con respecto a  $\mathcal{P}$ , es un conjunto finito de punto

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{ccc} e_{11} & \dots & e_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nm} \end{array} \right\}$$

tal que  $e_{ij} \in R_{ij}$ .

Ahora si estamos en posibilidades de calcular la fuerza (aproximadamente) que se ejerce en el subrectángulo  $R_{ij}$ . Si denotamos por  $F_{ij}$  la fuerza ejercida en el sub-rectángulo  $R_{ij}$  debida a la presión  $p_{ij} = f(e_{ij})$  entonces

$$F_{ij} = f(e_{ij}) A(R_{ij})$$

Podemos interpretar la fórmula anterior en términos del volumen. El valor de  $F_{ij}$  es igual al volumen del paralelepípedo de altura  $f(e_{ij})$  y base  $A(R_{ij})$ . En realidad lo que estamos haciendo es aproximar el volumen del paralelepípedo irregular  $ABCD$  por medio del paralelepípedo regular  $A'B'C'D'$  (Fig. 5)

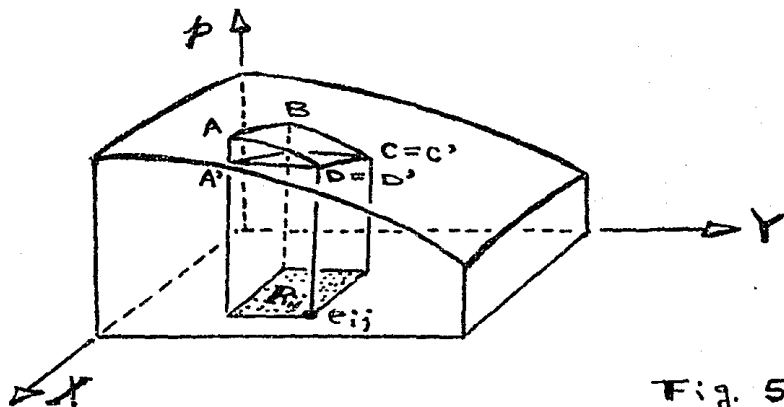


Fig. 5

El paso siguiente es el de sumar todas las fuerzas que se ejercen en cada subrectángulo  $R_{ij}$ , para así tener una aproximación a la fuerza  $F$  que se ejerce sobre la región  $R$ :

$$\begin{array}{c} f(e_{11})A(R_{11}) + \dots + f(e_{1m})A(R_{1m}) \\ \vdots \\ f(e_{in})A(R_{in}) + \dots + f(e_{nm})A(R_{nm}) \end{array}$$

Podemos abreviar la suma anterior. El primer renglón se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^m f(e_{1j})A(R_{1j}), \text{ el segundo renglón como}$$

$$\sum_{j=1}^m f(e_{2j})A(R_{2j}) \text{ y el último renglón}$$

$$\text{como } \sum_{j=1}^m f(e_{nj})A(R_{nj}). \text{ Por lo tanto}$$

la suma que estamos considerando se puede escribir como:

$$\sum_{i=1}^m f(e_{i1})A(R_{i1}) + \dots + \sum_{j=1}^m f(e_{nj})A(R_{nj})$$

A su vez esta última suma se puede escribir como:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(e_{ij}) A(R_{ij})$$

Podemos también sumar las fuerzas ejercidas en la primera columna, la segunda etc. y obtener entonces la expresión:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(e_{ij}) A(R_{ij})$$

Claramente las dos sumas anteriores son sólo una aproximación a la fuerza aplicada sobre  $R$ . Dichas sumas reciben un nombre especial.

**DEFINICION 3** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar continuo definido en un rectángulo  $R$ ,  $\mathcal{P}$  una partición de  $R$  y  $\mathcal{E}$  una elección de puntos con respecto a  $\mathcal{P}$ . Se define la suma de Riemann para la terna  $(f, \mathcal{P}, \mathcal{E})$  como:

$$S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(e_{ij}) A(R_{ij})$$

**EJEMPLO 1**

Supongamos que la función presión es dada por la función  $f: \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , y donde  $\mathbb{R}$  es el cuadrado mostrado en la Fig 6. Calcular la suma de Riemann  $S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E})$  cuando  $\mathcal{P}$  es la partición de  $\mathbb{R}$  que lo divide en cuatro partes iguales y  $\mathcal{E}$  consiste en tomar de cada cuadrado el extremo superior derecho.

La partición dada, así como la elección se dan en la Fig. 6

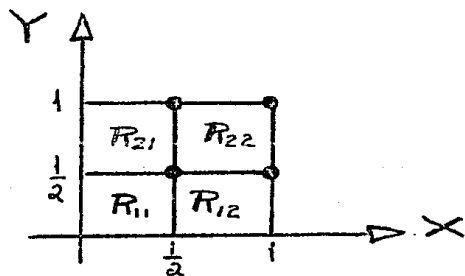


Fig. 6

Se observa que  $e_{11} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $e_{12} = (1, \frac{1}{2})$ ,  $e_{21} = (\frac{1}{2}, 1)$  y  $e_{22} = (1, 1)$ , mientras que el área de cualquier cuadrado  $R_{ij}$  es  $1/4$ . Por lo tanto:

$$S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{4} + f(1, \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{4} + f(\frac{1}{2}, 1) \cdot \frac{1}{4} + f(1, 1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$



Con todo lo desarrollado hasta el momento ya podemos definir el concepto más importante del capítulo, la integral doble. Para ello volvemos a mencionar que las sumas de Riemann  $S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E})$  son sólo una aproximación al volumen bajo la superficie  $z = f(x, y)$  y sobre la región  $R$ . Y además el resultado es más exacto conforme el número de paralelepípedos aumenta o también conforme las bases de los mismos disminuyen en área.

Para describir este proceso que estamos discutiendo, definiremos el concepto de norma de una partición.

#### DEFINICION 4

Sea  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  un rectángulo y  $\mathcal{P}$  una partición de  $R$ . Definimos la norma de  $\mathcal{P}$ , denotada por  $\|\mathcal{P}\|$ , como la longitud más grande de las diagonales de los rectángulos que aparecen en  $\mathcal{P}$ .

La utilidad principal del concepto de norma, está en que nos ayudará a definir la integral doble como un proceso límite.

**DEFINICION 5** Sea  $R \in \mathbb{R}^2$  un rectángulo y  $f: R \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar. Se define la integral doble de  $f$  en  $R$ , denotada por

$$\iint_R f(x, y) dA$$

como el límite al que tienden las sumas de Riemann  $S(f, \mathcal{P}, \epsilon)$  conforme se toman particiones  $\mathcal{P}$  que tengan norma muy pequeña. Lo anterior se simboliza como:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} S(f, \mathcal{P}, \epsilon)$$

Como se observa, de la definición cinco, el cálculo de una integral doble es muy difícil, pues el proceso de evaluar sumas de Riemann para después "ver" a qué número se aproximan conforme  $\|\mathcal{P}\|$  es muy pequeño, es imposible de hacer. En la próxima sección veremos como evaluar integrales dobles con métodos más sencillos.

Antes de terminar esta sección, quisieramos relacionar los ejemplos vistos en el capítulo cuatro y en la sección de sistemas de coordenadas, con la integral doble.

Si el lector recuerda, obtuvimos dos fórmulas:

$$\text{Flux} [R_0] = K(R_0^2 - r_0^2) r_0 dr_0 d\theta$$

y

$$dF_z = \Delta P \rho^2 \text{Sen} \phi \text{Cos} \phi d\phi d\theta$$

Con ellas se obtenía el flujo de sangre a través de una diferencial de la sección transversal de una arteria y una diferencial de la componente vertical de la fuerza que se ejerce sobre las paredes interiores de una bomba respectivamente.

Para relacionar dichas fórmulas con la integral doble, el lector puede recordar el procedimiento que se hizo para obtener dichas fórmulas, pero en lugar de hablar de los diferenciales  $dr$ ,  $d\theta$  y  $d\phi$ , puede sustituirlos por incrementos de la forma  $\Delta r$ ,  $\Delta\theta$  y  $\Delta\phi$ . De hecho lo que estamos haciendo es efectuar una partición sobre el disco y la esfera, para entonces calcular (aproximadamente) la mag-

nitud en que estamos interesados.

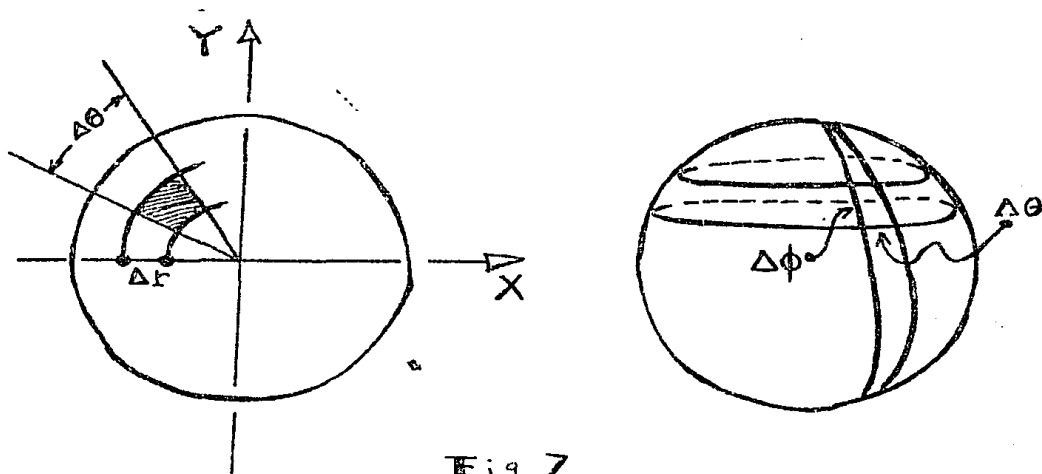


Fig 7

Para el primer ejemplo, podemos afirmar que el flujo en la  $j$ -ésima división es  $k(R^2 - r_j^2) r_j \Delta r_j \Delta \theta_j$ . Pero para obtener el flujo total, debemos sumar los flujos sobre cada pedazo, es decir

$$\sum_{\Delta \theta_j} \sum_{\Delta r_j} k(R^2 - r_j^2) r_j \Delta r_j \Delta \theta_j$$

Y ya que el proceso que hemos hecho sólo es una aproximación al "flujo verdadero", podemos hacer a que  $\Delta r$  y  $\Delta \theta$  tiendan a cero. Por lo tanto esperamos que el flujo sea dado por la fórmula:

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_{\Delta\theta} \sum_{\Delta r} k(R^2 - r_j^2) r_j \Delta r_j \Delta\theta_j$$

Pero tal procedimiento nos recuerda a nuestra definición de integral doble. Por lo tanto podemos concluir que el flujo viene dado por

$$\text{Flux} = \iint_D f(r, \theta) dr d\theta$$

donde  $f(r, \theta) = k(R^2 - r^2)r$  y  $D$  es la región:

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

La cual también se especifica en termino de las variables  $r$  y  $\theta$  como:

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

De la misma forma se puede demostrar en el segundo ejemplo, que la fuerza vertical total que se ejerce sobre las paredes de la bomba es:

$$F_z = \iint_D \Delta P \rho^2 \text{Sen } \phi \text{ Cos } \phi \, d\phi \, d\theta$$

donde  $D$  se especifica por:

$$D = \{(\theta, \phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ y } 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

Las integrales dobles que han aparecido aquí las calcularemos más adelante, cuando tengamos la herramienta suficiente para hacerlo. Por el momento son ejemplos de cómo aplicar el concepto de integral doble para resolver problemas de Biología y Física.

## EJERCICIOS.

1.- Mostrar que la fuerza total  $F_z$  que se ejerce sobre las paredes de una bomba se puede expresar por la fórmula dada arriba.

2.- Suponga que  $\rho(x, y)$  indica la densidad que hay en el punto  $(x, y)$  de una lámina de forma rectangular. Muestre que la masa de la lámina se puede expresar como  $m = \iint \rho(x, y) \, dx \, dy$ .

## 5.2. INTEGRALES ITERADAS.

Como ya mencionamos en la sección anterior, el valor de una integral doble es difícil de obtener. A pesar de ello en esta sección estudiaremos el concepto de integral iterada, el cual es una herramienta muy útil para calcular integrales dobles.

La palabra "iterada" (que proviene de la palabra "iteración" y la cual significa repetición de acciones semejantes) se usa antes de la palabra integración, para indicar un proceso por el cual se calculan integrales en forma repetida. La idea central se entiende mejor si damos un ejemplo.

Supongamos que tenemos un campo escalar de la forma  $z = f(x, y)$  y consideremos a esta función como dependiente de  $x$  únicamente (en otras palabras  $y$  es constante). La Fig. 8 ilustra esto. Podemos entonces calcular

$$\int f(x, y) dx$$

Habiendo efectuado la integración, podemos

integrar el resultado con respecto a  $y$  para tener:

$$\int \left( \int f(x, y) dx \right) dy$$

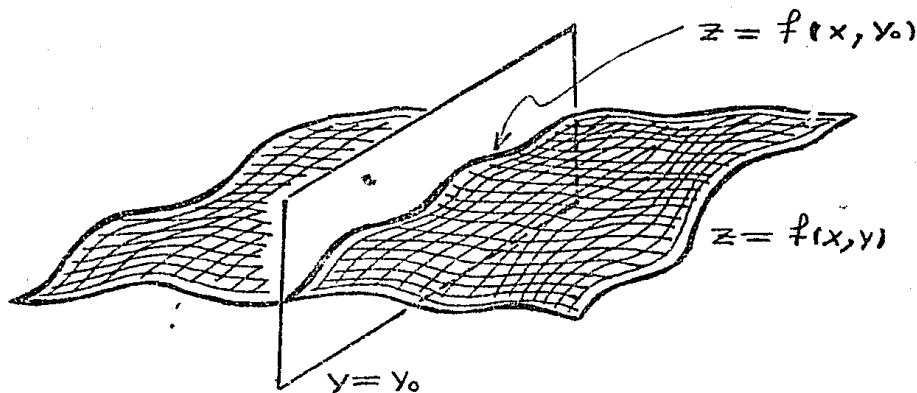


Fig. 8

También existe la posibilidad de integrar con respecto a  $y$  y después con respecto a  $x$

$$\int \left( \int f(x, y) dy \right) dx$$

**EJEMPLO 2** Calcular los dos tipos de integrales iteradas para el campo escalar  $f(x, y) = x + y$ .



$$\int (\int (x+y) dx) dy = \int \left( \frac{x^2}{2} + xy \right) dy$$

$$= \frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2}$$

mientras que

$$\int (\int (x+y) dy) dx = \int \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) dx$$

$$= \frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2}$$

Para este ejemplo se da la igualdad de las integrales iteradas.

Debemos mencionar que no hemos escrito los límites de integración a las integrales que aparecen en las integrales iteradas, pues su especificación requiere de una explicación más detallada.

Como sabemos los límites de integración en la integral:

$$\int f(x,y) dx$$

dependen como varía la  $x$ , mientras que los límites de integración en la integral

exterior :

$$\int \left( \int f(x, y) dx \right) dy$$

dependen de como varía  $y$ .

Ahora bien, es común que los puntos  $(x, y)$  en los que estamos interesados sean elementos de una región (Fig 9)

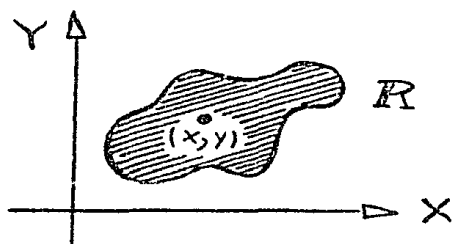


Fig. 9

Si especificamos que el punto  $(x, y)$  debe variar sólo en la región  $R$ , entonces las variables  $x$  y  $y$  sólo pueden tomar valores que hagan a que  $(x, y)$  pertenezca a  $R$ .

Para un caso como el de la Fig. 10 se observó que un punto  $(x, y)$ , perteneciente a  $R$ , cumple con  $\alpha \leq x \leq \beta$  y  $g(x) \leq y \leq f(x)$ . Si la  $x$  o la  $y$  no varían en esa forma, el punto  $(x, y)$  se saldrá de la región. En la misma figura se da el punto  $(x_0, y_0)$  con

la propiedad  $\alpha \leq x_0 \leq \beta$  pero  $y_0 > f(x)$  y  $y_0 > g(x)$ .

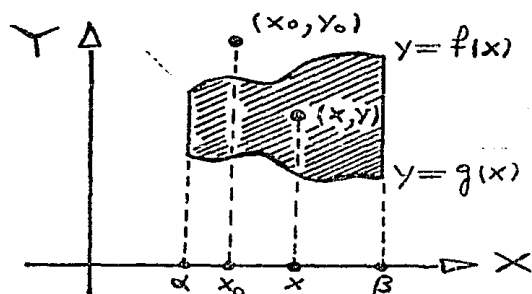


Fig. 10

Para precisar las cosas definiremos tres tipos de regiones para especificar las variaciones en  $x$  e  $y$ .

**DEFINICION 6** Sean  $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones con  $g(x) \leq f(x)$  para cada  $x \in [\alpha, \beta]$ . Definimos una región del tipo I como el conjunto:

$$R = \{(x, y) : \alpha \leq x \leq \beta \text{ y } g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

La Fig. 10 muestra una región del tipo I.

Hay que notar que una región del tipo I se distingue por variar la  $x$  en un

intervalo.

**EJEMPLO 3** Sea  $R$  la parte interior de una circunferencia de radio  $R$  (Fig 11)

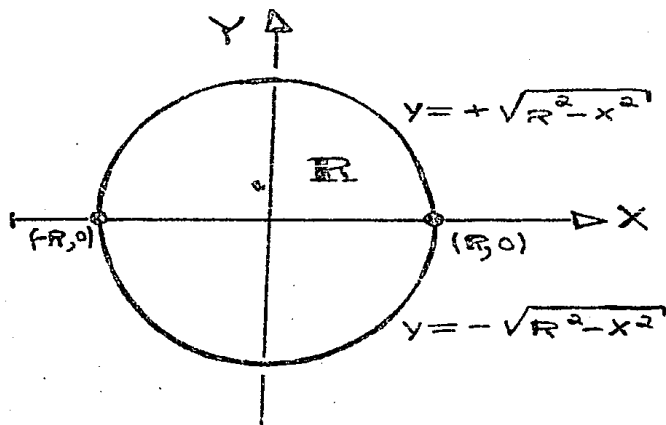


Fig. 11

Para este ejemplo podemos tomar  $[\alpha, \beta] = [-R, R]$ ,  $f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}$  y  $g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ , para así tener:

$$R = \left\{ (x, y) : -R \leq x \leq R \text{ y } -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \right\}$$

En ocasiones para obtener la descripción de la región es necesario hacer algunos cálculos.

**EJEMPLO 4** Describir la región  $R$  limitada por las gráficas de las ecuaciones  $y = 4x - x^2$  y  $y = x$ .

En este caso es necesario dibujar las curvas dadas. Como  $y = 4x - x^2$  es una parábola que se abre hacia abajo, basta ver en qué puntos intersecta al eje  $X$ , para tener una idea de su gráfica. Los puntos de intersección se obtienen al resolver la ecuación  $4x - x^2 = 0$ , la cual tiene como raíces  $x = 0$  y  $x = 4$ . Conjugando las gráficas de  $y = x$  y  $y = 4x - x^2$ , tenemos la situación dada en la Fig. 12.

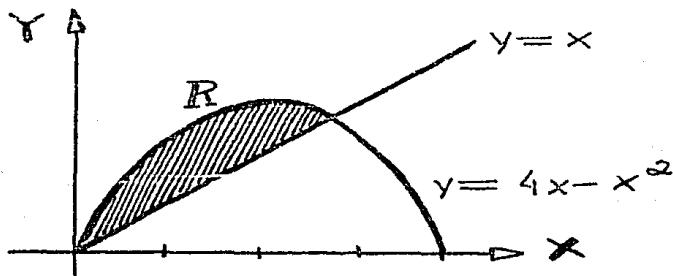


Fig. 12

Para poder determinar la región, es necesario conocer los puntos en que se intersectan ambas gráficas. Dichos puntos se obtienen al resolver la ecuación  $4x - x^2 = x$  cuya solución es  $x = 0$  y  $x = 3$ . Con esto

podemos decir que:

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3 \text{ y } x \leq y \leq 4x - x^2\}$$

El otro tipo de regiones que se van a considerar son:

**DEFINICION 7** Sean  $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones, pero las cuales tienen como variable independiente a  $y$  y como variable dependiente a  $x$ , es decir,  $x = f(y)$  y  $x = g(y)$ . Si  $g(y) \leq f(y)$ , definimos una región del tipo II como

$$R = \{(x, y) : \alpha \leq y \leq \beta \text{ y } g(y) \leq x \leq f(y)\}$$

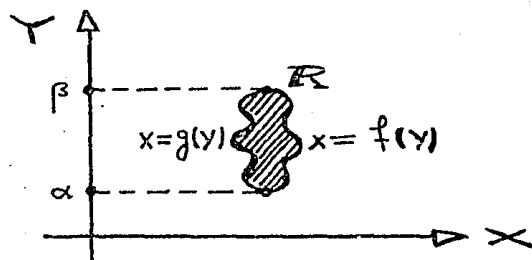


Fig. 13

**EJEMPLO 5** Sea  $R$  especificada como lo indica la Fig. 14.

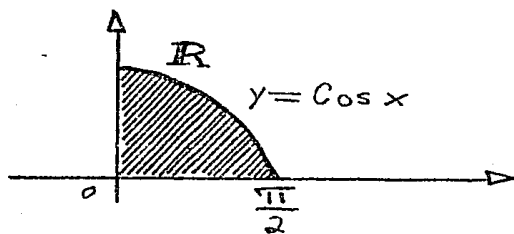


Fig. 14

Esta región se puede ver como una región del tipo I, pero también podemos verla como una región del tipo II. Como las funciones  $f$  y  $g$  que limitan a la región deben de depender de  $y$ , ponemos

$$f(y) = \text{Arccos } y \quad \text{y} \quad g(y) = 0$$

(Observe como fue necesario despejar a  $x$  de la ecuación  $y = \cos x$ ). Podemos concluir que:

$$R = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq 1 \text{ y } 0 \leq x \leq \text{Arccos } y \right\}$$

Finalmente definimos una región del tipo III como una región que es del tipo I y II al mismo tiempo.

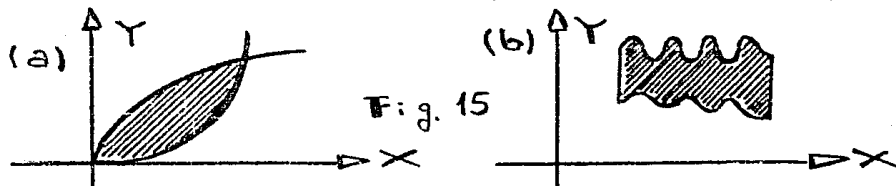


Fig. 15

En la Fig. 15-a se muestra una región del tipo III y una región del tipo I pero no del II en b.

Podemos decir, también, que hay regiones que no son del tipo I y ni tampoco del tipo II. La Fig 16 muestra una de éstas.

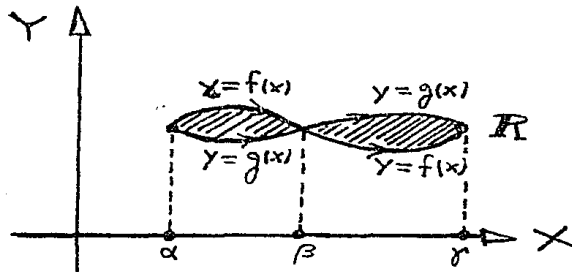


Fig 16

La región mostrada en la Fig. 16 no es del tipo I, pues la función  $y=f(x)$  no está completamente abajo de la función  $y=g(x)$ . A pesar de esto podemos describir nuestra región en termino de regiones del tipo I o II. Si dividimos a la región de  $\alpha$  a  $\beta$  y de  $\beta$  a  $\gamma$  entonces  $R$  es unión de las regiones del tipo I:

$$R_1 = \{(x, y) : \alpha \leq x \leq \beta \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

$$R_2 = \{(x, y) : \beta \leq x \leq \gamma \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$



Queremos prevenir al lector para que esté atento con aquellas regiones que no son del tipo I y/o II, para que él efectúe algún artificio y logre relacionar tal región con las que hemos visto.

## - EJERCICIOS.

1.- Calcular las integrales iteradas de las siguientes funciones:

a)  $f(x,y) = e^{x+y}$     b)  $f(r,\theta) = r \operatorname{Sen} \theta$     c)  $f(x,y) = x \operatorname{Sen} y$

2.- Clasificar las siguientes regiones del tipo I y/o II. Si ellas están limitadas por las curvas indicadas:

- a)  $x+y=1$  y  $y=x^2$   
 b)  $xy=6$  y  $x+y=5$   
 c)  $x^2+y^2=16$  y  $x^2+(y-6)^2=16$   
 d)  $(x-1)^2+y^2=1$  y  $y=\pm 1$  y  $x=0$

3.- Las siguientes regiones no son ni del tipo I y ni del tipo II, ¿cómo puede relacionarlas con dichas regiones?

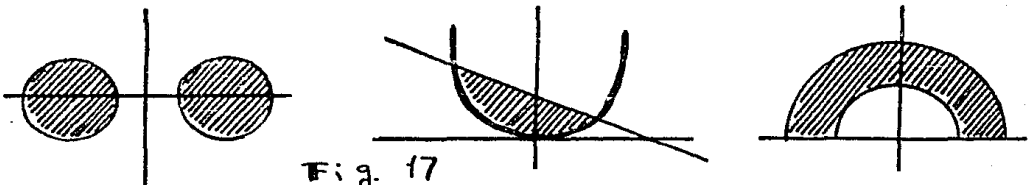


Fig. 17

Después de haber visto como se especifican las variaciones en  $x$  y  $y$ , pasaremos a ver como se introducen en el cálculo de una integral iterada.

**DEFINICION 8** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar y  $R = \{(x, y) : \alpha \leq x \leq \beta \text{ y } \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  una región del tipo I. Definimos la integral iterada de  $f$  sobre  $R$  como

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Si:  $R = \{(x, y) : \alpha \leq y \leq \beta \wedge \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$  es del tipo II, entonces la integral iterada se define por:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

**EJEMPLO 6** Sea  $f$  el campo escalar  $f(x, y) = x \sin y$ . Calcular la integral iterada de  $f$  sobre la región  $R$  limitada por  $y = x^2$  y  $y = 1$ .

Lo primero que hacemos es dibujar a la región  $R$  para poder clasificarla.

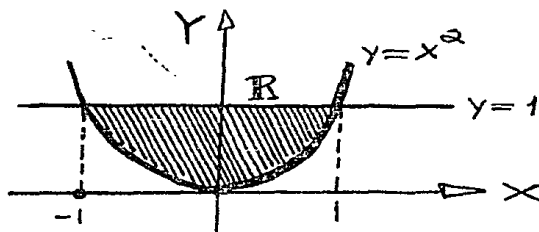


Fig 18.

Se observa que  $R$  es una región del tipo I dada por  $R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq 1\}$   
 Por lo tanto la integral iterada vale:

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 x \operatorname{sen} y \, dy \right) dx = \operatorname{sen} 1$$

En muchas ocasiones se da el problema de calcular una integral iterada con los límites de integración ya dados, por ejemplo:

$$\int_0^1 \left( \int_{2x}^{2\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx \quad \text{ó} \quad \int_0^2 \left( \int_{-1}^y f(x, y) \, dx \right) dy$$

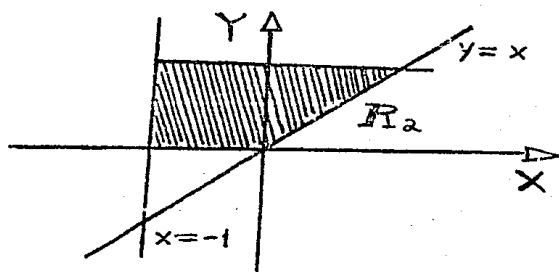
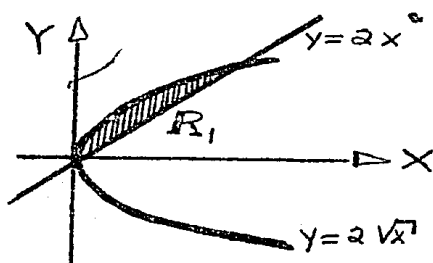
En tales problemas no hay ningún problema en calcular la integral iterada. Lo

que es interesante es conocer la región sobre la cual se está integrando. Para las dos últimas integrales las regiones son:

$$R_1 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1 \wedge 2x \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$$

$$R_2 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2 \wedge -1 \leq x \leq y\}$$

cuya gráfica aparece en la Fig 19.



### EJERCICIOS.

1.- Calcule cada una de las integrales iteradas y además dibuje la región de integración:

a)  $\int_0^2 \left( \int_0^x y \, dy \right) dx$

b)  $\int_0^2 \left( \int_{2-x}^{\sqrt{2-x^2}} y \, dy \right) dx$

c)  $\int_1^2 \left( \int_y^{y^2} (x+2y) \, dx \right) dy$

d)  $\int_1^{\ln 8} \left( \int_0^{\ln y} e^{x+y} \, dx \right) dy$

### 5.3. TEOREMA FUNDAMENTAL PARA INTEGRALES DOBLES.

En esta sección se dará un teorema por medio del cual podremos calcular integrales dobles a partir de integrales iteradas.

**RESULTADO 1** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar y  $R$  una región del tipo I, II o III. Si  $f$  es continuo entonces la integral doble de  $f$  sobre  $R$  es igual a la integral iterada de  $f$  sobre  $R$ .

Pasaremos a aplicar el resultado uno, para resolver los problemas que dimos al inicio del capítulo.

**EJEMPLO 7** Para el problema de flujo de sangre por una arteria, llegamos a la fórmula:

$$\text{Flux} = \iint_R K(R^2 - r^2) r dr d\theta$$

donde  $R$  es la región

$$R = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Teniendo en cuenta el teorema fundamental, podemos concluir que:

$$\iint_R K(R^2 - r^2) r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R K(R^2 - r^2) r \, dr \right) d\theta$$

Al calcular la integral iterada resulta que:

$$\text{Flux} = \frac{\pi K R^4}{2}$$

La fórmula nos indica que las arterias que tienen radio mayor que 1, tienen un mayor flujo.

**EJEMPLO 8** Demostrar que el volumen de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  es  $\frac{4}{3} \pi r^3$ .

Para resolver este problema efectuamos la siguiente integral doble:

$$\iint_R \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \, dA$$

con  $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq r \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$

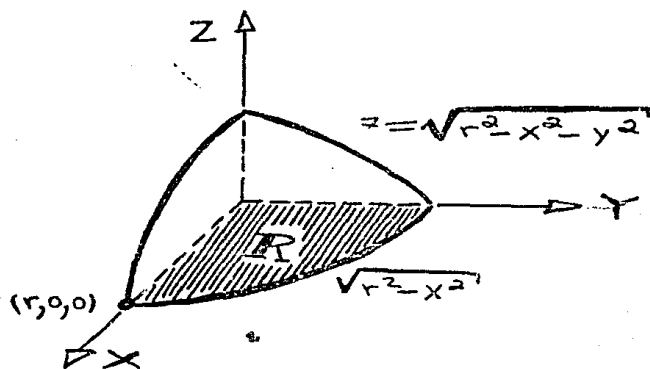


Fig. 20

El resultado de la integral nos dará un octavo del volumen de la esfera, por ello al resultado lo multiplicaremos por ocho.

Ahora bien la integral doble la podemos calcular por medio del teorema fundamental:

$$\iint_R \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dA = \int_0^r \left( \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dy \right) dx$$

Podemos calcular la integral interior en la integral iterada por medio de la fórmula:

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{Arcsen} \frac{u}{a}$$

donde hacemos  $a^2 = r^2 - x^2$ .

Efectuando el cálculo de la integral interior, llegamos al resultado:

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2} dy = \frac{\pi}{4} (r^2-x^2)$$

Continuando con la siguiente integral tendremos:

$$\iint_R \sqrt{r^2-x^2-y^2} dA = \int_0^r \frac{\pi}{4} (r^2-x^2) dx = \frac{\pi r^3}{6}$$

Por lo tanto el volumen de la esfera es

$$V = 8 \left( \frac{\pi r^3}{6} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

## EJERCICIOS.

1.- Calcular el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



2.- Sea  $R$  una región del tipo I, II o III y sea  $f$  el campo escalar  $f(x, y) = 1$ . Mostrar que la integral doble de  $f$  sobre  $R$  se puede interpretar como el área de la región  $R$ . Usar este problema para calcular el área de un círculo de radio  $r$ .

3.- En el problema de calcular la fuerza vertical sobre las paredes de una bomba, calcular la integral doble que se obtuvo.

4.- Demuestre que el volumen de un cono de altura  $h$  y base circular de radio  $r$  es

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

5.- Determinar la masa de una placa circular de radio  $R$ , si la densidad superficial en el punto  $(x, y)$  es proporcional a la distancia del punto  $(x, y)$  al centro de la placa.

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] Batchelet, Edward : Introduction to  
mathematic for life scientists.  
Springer-Verlag New York • Heidelberg  
Berlin 1974.
- [2] Lotka, Alfred J. : Elements of mathe  
matical Biology. Dover Publications,  
Inc., New York. 1956.