



24.5  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE INGENIERIA

**INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA CON LA PRESENCIA  
DE NUDOS ARTICULADOS, PROGRAMA DE  
COMPUTADORA EN LENGUAJE BASIC**

T E S I S  
QUE PARA OBTENER  
EL TITULO DE  
INGENIERO CIVIL  
P R E S E N T A  
SALVADOR EUGENIO ALVAREZ GOMEZ



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

	PAG.
I. INTRODUCCION .....	1
II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	5
II.1 Reacción del Terreno sobre la Estructura .....	5
II.2 Vector de Cargas .....	6
II.3 Vector de Desplazamientos .....	7
II.4 Análisis de Hundimientos .....	8
II.5 Elementos Mecánicos .....	8
II.6 Efecto del Tipo de Cimentación en el Análisis de la Estructura .....	9
III. DESARROLLO DEL METODO .....	13
III.1 Cálculo de los Coeficientes que Permiten Tomar en Cuenta la Presencia de Nudos Articulados .....	14
III.1.1 Coeficientes Relativos a las Rigideces Angular y Lineal .....	14
III.1.2 Coeficientes Relativos a los Momentos de Empotramiento .....	17
III.1.3 Coeficiente Relativo al Nivel de la Estructura Bajo Análisis .....	22
III.2 Condición de Equilibrio de Momentos en el Nudo $i, j$ .....	24

	PAG.
III.3 Condición de Equilibrio de Fuerza Cortante en la Crujía I .....	30
III.4 Obtención del Desplazamiento $\zeta_i$ en la Cimentación, a la Mitad de la Crujía I .....	35
III.4.1 Trabe con Apoyos Continuos .....	38
III.4.2 Trabe con un Apoyo Continuo y Otro Articulado .....	44
III.4.3 Trabe con Apoyos Articulados .....	53
III.5 Equilibrio de Fuerzas Verticales .....	56
III.6 Cálculo de los Hundimientos del Suelo .....	56
III.7 Ecuación Auxiliar de Equilibrio de Momentos en las Vigas Conjugadas de la Cimentación .....	64
III.7.1 Trabe de la Cimentación con su Apoyo I Articulado y su Apoyo I+1 Continuo .....	67
III.7.2 Trabe de la Cimentación con Ambos Apoyos Articulados .....	72
IV. EJEMPLO DE APLICACION .....	77
IV.1 Planteamiento del Problema .....	78
IV.2 Solución del Problema .....	79
IV.2.1 Notación y Cálculo de Rigideces .....	80
IV.2.2 Definición de Coeficientes .....	80
IV.2.3 Equilibrio de Momentos en los Nudos .....	81
IV.2.4 Equilibrio de Fuerza Cortante en la Crujía .....	82
IV.2.5 Desplazamiento $\zeta_i$ a la Mitad de la Crujía en la Cimentación .....	83
IV.2.6 Equilibrio de Fuerzas Verticales .....	83
IV.2.7 Equilibrio de Momentos en la Viga Conjugada de la Cimentación .....	83

	PAG.
IV.2.8 Hundimientos del Suelo .....	84
IV.2.9 Solución del Sistema de Ecuaciones .....	95
IV.2.10 Determinación de Elementos Mecánicos .....	102
IV.2.11 Comentarios y Conclusiones .....	108
 V. PROGRAMA DE COMPUTADORA .....	 110
V.1 Adaptación del Método de Interacción a una Microcomputadora .....	 111
V.2 El Método de Interacción y los Marcos Esbeltos .....	116
V.3 Elaboración del Programa de Computadora para el Método de Interacción .....	 117
V.4 Instructivo para el Uso del Programa de Interacción Suelo-Estructura .....	 134
V.4.1 Determinación del Tamaño de la Estructura .....	134
V.4.2 Forma de Proporcionar los Datos .....	137
V.5 Indicaciones Sobre la Impresión de Datos y Resultados en el Listado de una Corrida .....	 148
V.6 Problemas .....	149
 VI. CONCLUSIONES .....	 156
 VII. REFERENCIAS .....	 162
 ANEXO I .....	 163
ANEXO II .....	181
ANEXO III .....	194
ANEXO IV .....	208

# I

## INTRODUCCION

La cimentación de estructuras sobre suelos de mediana a alta compresibilidad plantea el problema de determinar los hundimientos totales y diferenciales, así como los elementos mecánicos (momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal), tanto en la subestructura como en la superestructura, ocasionados por los hundimientos de la cimentación. Estos valores dependen, por un lado, de la compresibilidad del subsuelo, y por otro, de la rigidez de la estructura. Tomando en cuenta que en los análisis estructurales convencionales, se considera en general que la estructura está empotrada o articulada en su cimentación y que, también en general, el cálculo de hundimientos del terreno se realiza considerando la cimentación cien por ciento flexible o totalmente rígida, lo cual en ambos casos (estructural y de mecánica de suelos) dista bastante de la realidad, se ve clara la necesidad de desarrollar métodos de análisis estructural que tengan en cuenta los efectos de los hundimientos del terreno y que, al mismo tiempo, permitan calcular los valores de estos últimos.<sup>2</sup>

Este trabajo presenta un método para tratar de resolver el problema que se acaba de esbozar, por medio de un análisis conjunto de la estructura y el suelo. El método en cuestión puede aplicarse indistintamente a estructuras de nudos continuos, caso típico entre las estructuras de

concreto reforzado, y a estructuras que combinen nudos continuos y articulados, situación ciertamente común en estructuras de acero. El planteamiento que se hace es pues general y permite un análisis versátil.

El nombre completo que se le da al citado método, objeto de esta tesis, es el de Método de Análisis con Interacción Suelo-Estructura.

En el capítulo II de este trabajo se hace el planteamiento del problema: se establecen las variables que entran en juego y la forma en que lo hacen, y se describe en forma general el procedimiento que se sigue para implementar el método. Por un lado, el análisis conjunto de la estructura y el suelo se realiza exclusivamente por cargas verticales, pues estas acciones son las que fundamentalmente influyen en los asentamientos a largo plazo en suelos compresibles; por otro lado, a fin de aceptar que los desplazamientos laterales pueden desprejarse y así evitar que el número de incógnitas aumente demasiado, se considera que se está tratando con estructuras sin fuerte asimetría en geometría y cargas. Finalmente, el método que se utiliza para el análisis de la estructura es el de las rigideces, pues este método se presta para un planteamiento algorítmico que después puede implementarse en un programa de computadora.<sup>2</sup>

El capítulo III contiene el desarrollo del método, que consiste en el establecimiento de las ecuaciones que se requieren para llevar a cabo un análisis considerando la interacción suelo-estructura. En este capítulo, se valúan primeramente los coeficientes que permiten cubrir con facilidad los casos de nudos continuos y articulados en una estructuración; posteriormente, se estudian las condiciones que conducen al planteamiento de las ecuaciones que relacionan las variables que se tratan en el capítulo II.

Abundando un poco más sobre esto último, conviene mencionar que el citado planteamiento se efectúa recurriendo a los métodos de las rigideces y de la viga conjugada, y a un análisis de hundimientos, y que el sistema de ecuaciones resultante constituye la herramienta, propiamente dicha, para analizar una estructura cualquiera teniendo en cuenta su interacción con el suelo.

El ejemplo de aplicación que se presenta en el capítulo IV, si bien sencillo, tiene por objeto mostrar en forma detallada la secuela de cálculo asociada al método de interacción. Los elementos que se requieren para resolver el problema que allí se plantea se indican con gala de detalle, a fin de que el lector pueda concretizar e integrar las ideas que se establecen en los capítulos II y III. Son particularmente interesantes los incisos correspondientes al cálculo de hundimientos y a la determinación de elementos mecánicos, esto último, parte fundamental de un análisis que se precie de serlo.

En el capítulo V puede encontrarse todo lo concerniente a la elaboración del programa de computadora para el Método de Análisis con Interacción Suelo-Estructura. El programa, cuyo listado puede encontrarse en el anexo II, está codificado en lenguaje BASIC y fue desarrollado y probado en una microcomputadora. A fin de aprovechar al máximo la capacidad de un aparato de esta naturaleza, el capítulo en cuestión incluye una adaptación del método a ese tipo de computadoras. Por otro lado, el instructivo para el uso del programa se presenta desglosado en forma minuciosa para facilitar su comprensión. Se incluyen también tablas que contienen los arreglos y variables que fueron empleados en la implementación del programa, con

una breve explicación sobre la naturaleza de cada uno de estos elementos. El capítulo termina con el planteamiento de dos casos de estructuras a resolverse por medio del programa, habiéndose escogido aquellas de tal manera que sus características pongan a prueba los diversos ámbitos y opciones varias de este último. Los listados para las corridas de los problemas de que acabamos de hablar, pueden encontrarse en los anexos III y IV, respectivamente.

Las conclusiones relacionadas con el método aquí propuesto, y con la totalidad del trabajo, están comprendidas en el capítulo VI.

El capítulo VII contiene las referencias que fueron consultadas durante el desarrollo de esta tesis, y a las cuales puede recurrirse si así lo requieren las circunstancias.

Finalmente, el anexo I presenta el cálculo de los momentos de empotramiento para el caso de una viga con nudos continuos - o con un nudo continuo y otro articulado - sujeta a cargas uniformes de diferentes magnitudes, cada una de las cuales aparece distribuida en un tramo que abarca solamente una parte de la longitud total de la viga. Esta disposición de cargas es transmitida por las reacciones del terreno a las trabes de la cimentación y los momentos de empotramiento correspondientes se requieren para el desarrollo del método. La presentación del cálculo de tales momentos no deja de ser interesante dada la ambigüedad del caso.

Teniendo en mente la reseña anterior, procedemos ahora a pasar adelante.

## II

### PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos el caso de una estructura reticular con trabes y columnas de rigidez constante cada una de ellas ( $EI = \text{cte.}$ , donde  $E$  es el módulo de elasticidad e  $I$  el momento de inercia correspondientes), apoyada en un suelo de mediana a alta compresibilidad (figura II.1), cuya cimentación puede ser resuelta a base de zapatas corridas o por medio de una losa con contratrabes de concreto armado. Queremos determinar los hundimientos totales y diferenciales de la cimentación, así como los elementos mecánicos de la subestructura y de la superestructura.<sup>2</sup>

Siguiendo adelante con el planteamiento del problema, es necesario tener en cuenta las ideas que a continuación se enumeran, relativas a la estructura por analizar.

#### II.1 REACCION DEL TERRENO SOBRE LA ESTRUCTURA

El diagrama de reacción del terreno sobre la estructura es desconocido por lo que sustituiremos la carga distribuida del suelo sobre la cimentación por cargas repartidas. (figura II.1.a). En los primeros trabajos de interacción suelo-estructura<sup>2</sup>, dicho diagrama de reacción del suelo se

sustituya por cargas concentradas bajo los apoyos y al centro de los claros. Esta idea, si bien válida, se aleja más de la realidad que el considerar un diagrama formado por cargas repartidas.

## II.2 VECTOR DE CARGAS

El vector de cargas estará formado por todos aquellos pares externos y/o fuerzas verticales y horizontales externas que estén obrando sobre la estructura. En este vector integraremos además las reacciones del terreno  $r_i$  y  $t_i$  (figura 11.1.a), pues ciertamente son cargas externas afectando a la estructura. Este simple hecho nos da una primera idea de la naturaleza del problema que enfrentamos, pues, evidentemente, mientras que el vector de cargas es dato en los problemas usuales de análisis estructural en que se emplea el método de las rigideces, en nuestro caso no lo conocemos en forma completa.

Teniendo en cuenta los objetivos del presente trabajo, desarrollaremos el análisis exclusivamente para cargas verticales. Recordemos que son estas cargas verticales, en sus modalidades de carga muerta (acción permanente) y carga viva (acción variable tomada con su intensidad media), las que se emplean para el cálculo de asentamientos a largo plazo en suelos comprensibles.<sup>5</sup> Hay que aclarar que, sin embargo, el método que desarrollaremos es también válido para el caso de estructuras apoyadas en suelos friccionantes que en un momento dado puedan verse sujetas a fuerzas horizontales como las debidas a sismo o viento, siempre que estas acciones no alcancen valores significativos. En caso contrario, la estructura puede ser objeto

de asentamientos inmediatos, cuya determinación en base a un análisis que considere la interacción suelo-estructura, queda más allá de los alcances de este trabajo.

### 11.3 VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS

El vector de desplazamientos es desconocido por completo, y al hablar de él nos referimos a los desplazamientos angulares o giros  $\theta_{i,j}$  de cada uno de los nudos de la estructura (fig. 11.2) y a los desplazamientos verticales  $\delta_i$  y  $\zeta_i$  en la cimentación (fig. 11.1.b).

Siendo congruentes con lo que establecimos en el inciso 11.2 respecto a cargas horizontales y teniendo en cuenta que, para no complicar la exposición del método, consideraremos que estamos tratando con estructuras sin fuerte asimetría en geometría y cargas, aceptaremos que los desplazamientos laterales pueden despreciarse ( $\delta_j = 0$ ). Por las mismas razones el vector de desplazamientos tampoco incluirá los alargamientos o acortamientos que se suscitan en las columnas, pues estos efectos solo alcanzan valores significativos en estructuras muy esbeltas sujetas a cargas laterales.

Cabe hacer notar en este punto que, si por alguna razón se hace necesario que los efectos de los desplazamientos laterales y/o de los alargamientos o acortamientos de las columnas sobre la estructura sean integrados al método, esto puede lograrse con relativa facilidad aplicando siempre las ideas que para tales fines nos proporciona el análisis por el método de las rigideces.

## 11.4 ANÁLISIS DE HUNDIMIENTOS

Hasta este momento, de acuerdo con lo que hemos planteado en los incisos anteriores, resulta evidente que el número de incógnitas sobrepasa el número de ecuaciones con que contamos, pues baste recordar que no conocemos  $r_i$  y  $t_i$  en el vector de cargas. Sin embargo, el análisis de hundimientos nos permitirá establecer una relación entre las reacciones  $r_i$  y  $t_i$  y los desplazamientos del suelo  $\delta_i$  y  $\zeta_i$ , de tal suerte que los segundos quedarán en función de las primeras.

## 11.5 ELEMENTOS MECANICOS

Si las ecuaciones que nos permiten establecer lo dicho en el punto 11.4 son sustituidas en las expresiones derivadas de la aplicación inicial del método de las rigideces, nos queda un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son únicamente los giros en los nudos  $\theta_{i,j}$  y las reacciones del terreno  $r_i$  y  $t_i$ . La solución de este sistema nos permitirá conocer entonces los giros en los nudos y las reacciones del suelo. A continuación, pueden también determinarse los desplazamientos verticales que, de acuerdo con el punto 11.4, están en función de las reacciones.<sup>2</sup>

Una vez conocidos los giros y los desplazamientos, la obtención de los elementos mecánicos en toda la estructura, a saber: momentos flexionantes, fuerzas cortantes y fuerzas normales, resulta meramente académica. Este hecho, si bien evidente para cualquier persona familiarizada con el análisis estructural, podrá constatarse en el siguiente capítulo en el que se desarrolla el método con todo detalle.

## II.6 EFECTO DEL TIPO DE CIMENTACION EN EL ANALISIS DE LA ESTRUCTURA

Tal como se mencionó al principio de este capítulo, el método de análisis que considera la interacción entre la estructura y el suelo, será desarrollado, entre otras cosas, para el caso de una estructura reticular cuya cimentación pueda ser resuelta a base de zapatas corridas o por medio de una losa con contratraveses. Es importante tener en mente la naturaleza de la cimentación que vaya a utilizarse, porque, como veremos a continuación, ésta definirá las condiciones bajo las cuales tendrá que llevarse a cabo el análisis estructural:

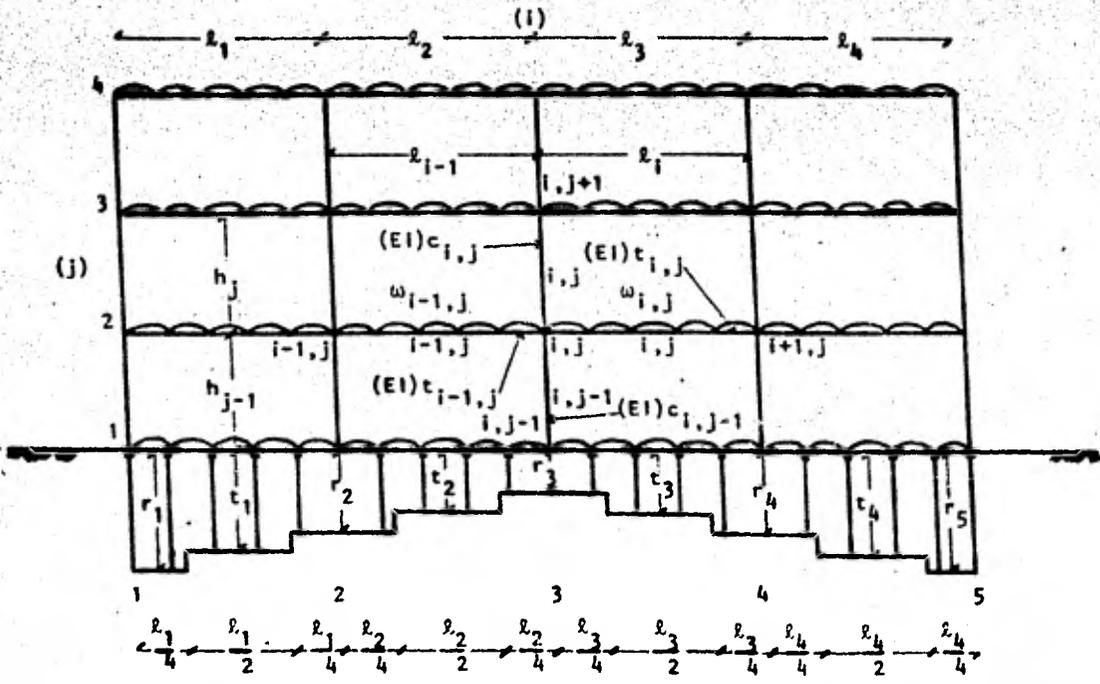
a. Si la estructura bajo estudio posee una cimentación a base de una losa con contratraveses, el método de análisis con interacción requerirá lo siguiente: la estructura deberá idealizarse como un solo marco, cuyas dimensiones serán iguales a las de los marcos tipo que hayan sido empleados para estructurar el edificio en la dirección de análisis; el marco en cuestión deberá colocarse sobre el eje de simetría de la losa vista en planta, en la misma dirección de análisis; las cargas a que se considerará sujeto el marco deberán tomarse como un promedio de las que actúan sobre los marcos tipo, o bien, podrán también considerarse las más desfavorables.

Evidentemente, los valores que se obtengan para los elementos mecánicos de la estructura después de aplicar el método, servirán únicamente para darnos una idea del orden de magnitud que podrá esperarse en los verdaderos. Sin embargo, la ventaja de utilizar el método de interacción para este tipo de estructuras estriba en que, los resultados que se obtengan para

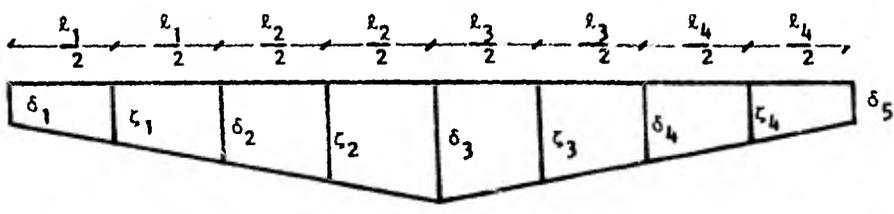
el suelo, nos permitirán conocer la forma y magnitud de la reacción del terreno, así como los hundimientos diferenciales que podrán esperarse a largo plazo. Los valores de la reacción del terreno podrán además emplearse como datos en alguno de los métodos convencionales de análisis, a fin de resolver en forma completa los marcos de la estructura bajo estudio. Si tomamos en cuenta que uno de los problemas principales a que se enfrenta el ingeniero civil al analizar una estructura, es el del desconocimiento de los efectos del terreno sobre aquélla, queda entonces de manifiesto la utilidad de un método como el presente.

b. Cuando la estructura bajo estudio posea una cimentación a base de zapatas corridas, los marcos que la constituyan conservarán sus dimensiones y posición, y las cargas sobre estos últimos serán asignadas recurriendo a los sistemas empleados en los métodos convencionales de análisis.

En estas condiciones, los resultados que se obtengan de aplicar el método con interacción a estructuras que posean marcos en una sola dirección -tal y como puede ocurrir en el caso de naves industriales- serán enteramente correctos. Sin embargo, cuando la estructura en consideración esté cimentada sobre una retícula de zapatas corridas, resultará complejo llegar a establecer la influencia que tendrán las dos direcciones del conjunto sobre los puntos de interés, y es por ésto que el método que desarrollaremos tomará en cuenta una sola dirección. A este respecto, queda en el aire la pregunta sobre la conveniencia de ejecutar un análisis tan complejo, puesto que, como ya lo mencionamos antes, los resultados que se obtengan para el suelo estudiando únicamente la dirección del marco plano, encerrarán de por sí una gran utilidad para el ingeniero.

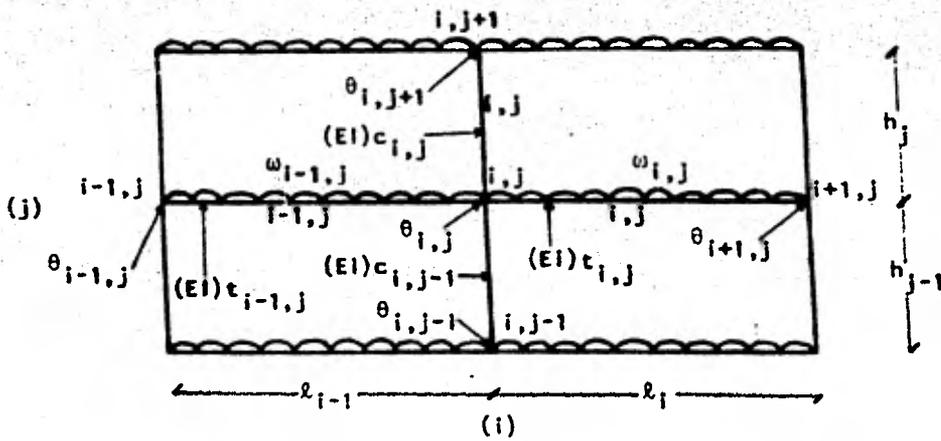


(a) Geometría y cargas en la estructura; n=número total de columnas; q=número total de pisos.



(b) Desplazamientos verticales.

Figura 2.1: características de la estructura.



$\theta_{i,j}$  = giro en el nudo  $i,j$  ;  $\phi_{i,j} = 2\theta_{i,j}$  = doble giro en el nudo  $i,j$ .

Figura 11.2: notación y giros en la estructura.

### III DESARROLLO DEL METODO

Antes de entrar de lleno al desarrollo del método, es necesario recalcar que lo aquí se pretende es generar un sistema de ecuaciones que pueda aplicarse indistintamente a estructuras que posean nudos continuos y/o articulados. En el primer punto de este capítulo explicaremos la manera de lograr esto a base de coeficientes y valuaremos dichos coeficientes. Luego, en los puntos subsiguientes, emplearemos los métodos de las rigideces y de la viga conjugada para establecer el citado sistema de ecuaciones que relaciona las variables que intervienen en el problema: empezaremos con la condición de equilibrio de momentos en el nudo  $i, j$ ; a continuación plantearemos la condición de equilibrio de fuerzas cortantes en la cruzía  $i$ ; seguiremos con la determinación de la deflexión  $\zeta_i$  a la mitad de la cruzía  $i$ ; continuaremos con la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales en toda la estructura; proseguiremos con el cálculo de los hundimientos del suelo y terminaremos con la ecuación auxiliar de equilibrio de momentos en la viga conjugada.

### III.1 CALCULO DE LOS COEFICIENTES QUE PERMITEN TOMAR EN CUENTA LA PRESENCIA DE NUDOS ARTICULADOS

De acuerdo con las expresiones a que daremos forma en el punto siguiente, será necesario determinar los valores de ocho coeficientes distintos. Los tres primeros nos permitirán establecer los valores por los que hay que multiplicar las rigideces angular y lineal de barras con nudos continuos, para obtener las rigideces correspondientes de barras que presenten articulado alguno de sus nudos. Los siguientes cuatro coeficientes nos esclarecerán los valores de los que acabamos de hablar pero para el caso de los momentos de empotramiento. Finalmente, el octavo coeficiente nos permitirá tomar en cuenta el nivel de la estructura al que estemos llevando a cabo nuestro análisis, ya que si se trata de la cimentación, tendremos que incluir el efecto de la reacción del terreno sobre los elementos estructurales correspondientes, lo que no sucederá para los demás niveles.

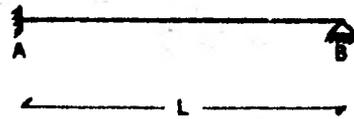
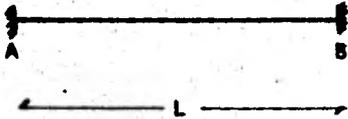
Antes de pasar a calcular los coeficientes, volveremos a recalcar que todos los elementos estructurales con los que trabajaremos serán prismáticos (cuatro lados) y de sección constante.

#### III.1.1 COEFICIENTES RELATIVOS A LAS RIGIDECES ANGULAR Y LINEAL

La rigidez angular se define como el momento que hay que aplicar en el extremo de una barra para producir un giro unitario en ese punto.

La rigidez lineal se define como el momento que se aplica en el extremo de una barra para producir un desplazamiento relativo unitario entre sus puntos finales, siendo nulo el giro correspondiente.

Teniendo en mente las definiciones anteriores, supongamos ahora dos barras con las mismas dimensiones, teniendo la primera sus nudos continuos, y la segunda un nudo continuo y otro articulado:



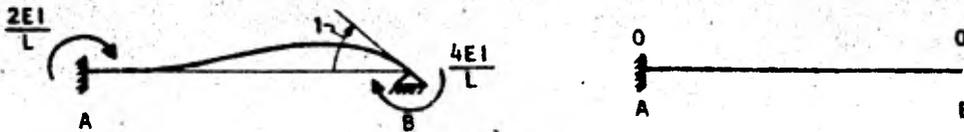
Permitiendo un giro unitario en A, la rigidez angular y el momento que aparece en el extremo opuesto de cada barra son, respectivamente:



Estableciendo relaciones entre los valores que acabamos de definir en los extremos de las dos barras, respectivamente, podemos determinar las magnitudes del primer coeficiente. Llamando  $\alpha$  a dicho coeficiente, tendremos que, partiendo de un nudo continuo como es el A:

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{para nudo adyacente continuo} \\ \frac{3EI/L}{4EI/L} = 0.75 & \text{para nudo adyacente articulado} \end{array} \right\}$$

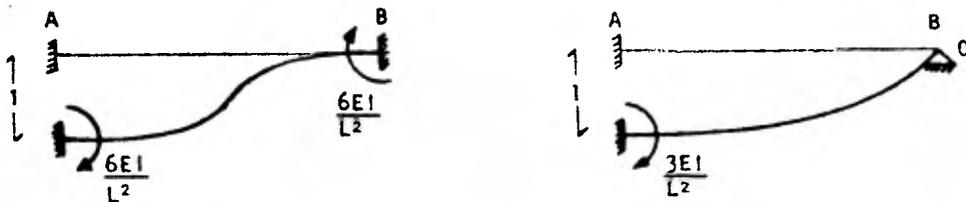
De la misma manera, permitiendo ahora un giro unitario en B y recordando que la rigidez angular de un cantiliver es cero:



Procediendo enteramente igual que para el caso anterior, llamando  $\beta$  al segundo coeficiente y partiendo de un nudo continuo como el A, tendremos que:

$$\beta = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{para nudo adyacente continuo} \\ \frac{0}{2EI/L} = 0 & \text{para nudo adyacente articulado} \end{array} \right\}$$

Para poder valuar el tercer coeficiente, permitimos a continuación un desplazamiento relativo unitario con giro nulo entre los extremos de las barras. La rigidez lineal y el momento que aparece en el extremo opuesto de cada barra son:



Si asignamos la letra  $\gamma$  al tercer coeficiente y seguimos los mismos pasos que para definir  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\gamma = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{para una barra con sus dos nudos continuos} \\ \frac{3EI/L^2}{6EI/L^2} = 0.5 & \text{para una barra con nudo continuo y otro articulado} \end{array} \right\}$$

Es conveniente anotar aquí que las barras doblemente articuladas son isostáticas, por lo que no tiene sentido hablar de rigideces angular y lineal para ellas, y obviamente no entran en el análisis que acabamos de efectuar.

### III.1.2 COEFICIENTES RELATIVOS A LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

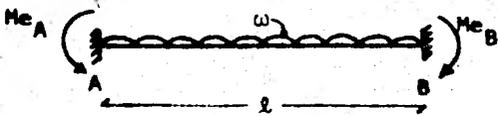
En la figura 11.1.a podemos apreciar que estaremos manejando dos tipos de carga repartida. La primera, llamada comúnmente  $w$ , obra sobre todas las trabes, ya que se debe a la presencia de la carga muerta más la carga viva y es uniforme en toda la longitud de las vigas. La segunda, denotada con  $r$  y  $t$  en la misma figura, obra exclusivamente sobre los elementos estructurales en contacto con el suelo, pues se debe a la reacción de éste sobre aquéllos y, de acuerdo con lo que establecimos en el punto 11.1, es uniforme por tramos sobre dichos elementos.

Los tipos de carga anteriores son los que definirán los momentos de empotramiento con los que estaremos trabajando, aunque éstos dependerán también de los apoyos que presenten las barras en sus extremos.

Recordando que los momentos de empotramiento de barras doblemente articuladas son nulos, nos quedarán dos posibles tipos de barra: barras con nudos continuos y barras con un nudo continuo y otro articulado. Los momentos de empotramiento para cada caso pueden calcularse fácilmente por algún método conocido (flexibilidades o viga conjugada) o consultarse en tablas. A continuación se presentan sus valores y se hace el cálculo de los coeficientes respectivos.

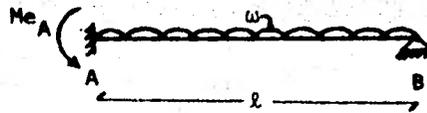
### III.1.2.1 Carga uniformemente distribuida $\omega$

Viga con nudos continuos



$$Me_A = -Me_B = -\frac{\omega l^2}{12}$$

Viga con un nudo articulado



$$Me_A = -\frac{\omega l^2}{8}$$

Estableciendo las relaciones que ya hemos empleado en la definición de otros coeficientes, llamando  $\Omega$  al coeficiente en cuestión y partiendo de un nudo continuo como es el A, tenemos que:

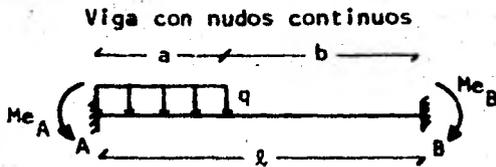
$$\Omega = \left. \begin{array}{l} 1. \quad \text{para nudo adyacente continuo} \\ \frac{\omega l^2/8}{\omega l^2/12} = 1.5 \quad \text{para nudo adyacente articulado} \end{array} \right\}$$

### III.1.2.2 Cargas repartidas r y t

Para mayor claridad y simplicidad, las cargas se presentan desglosadas y los momentos están valuados para el caso general; luego se hacen las conversiones necesarias para llegar a los valores de los momentos para nuestro caso particular y se determinan las magnitudes de los coeficientes.

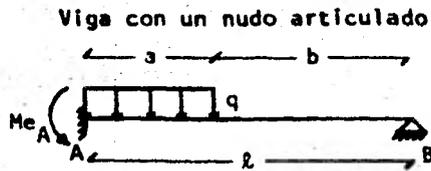
La obtención de los momentos de empotramiento en cuestión por el método de las flexibilidades puede consultarse en el Anexo I. Siendo el tipo de cargas poco común, el cálculo resulta un buen ejercicio.

### III.1.2.2.1 CARGA UNIFORME A LA IZQUIERDA



$$Me_A = -\frac{qa^2}{4} \left( 2 - \frac{a}{l} \left( \frac{8}{3} - \frac{a}{l} \right) \right)$$

$$Me_B = \frac{qa^3}{12l^2} (4l - 3a)$$



$$Me_A = -\frac{qa^2}{2l^2} \left( l - \frac{a}{2} \right)^2$$

Para nuestro caso, auxiliándonos de la figura II.1.a:  $q = r_A$ ,  $a = \frac{l}{4}$  y  $b = \frac{3l}{4}$ . Haciendo las sustituciones necesarias y reduciendo, llegamos a que:

$$Me_A = -\frac{67}{3072} r_A l^2$$

$$Me_B = \frac{13}{3072} r_A l^2$$

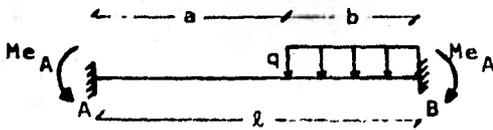
$$Me_A = -\frac{49r_A l^2}{2048}$$

Si bautizamos con  $p$  al coeficiente para este caso y establecemos la relación de momentos en el extremo A de las vigas, partiendo de un nudo continuo tenemos que:

$$p = \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{para nudo adyacente continuo} \\ \frac{49r_A l^2 / 2048}{67r_A l^2 / 3072} = \frac{147}{134} \quad \text{para nudo adyacente articulado} \end{array} \right\}$$

### III.1.2.2.2. CARGA UNIFORME A LA DERECHA

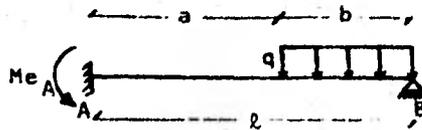
Viga con nudos continuos



$$Me_A = - \frac{qb^3}{12l^2} (4l - 3b)$$

$$Me_B = \frac{qb^2}{4} \left( 2 - \frac{b}{l} \left( \frac{8}{3} - \frac{b}{l} \right) \right)$$

Viga con un nudo articulado



$$Me_A = - \frac{qb^2}{8l^2} (2l^2 - b^2)$$

Valiéndonos nuevamente de la figura II.1.a, es evidente que:  $q = r_B$ ,  $a = \frac{3}{4}l$  y  $b = \frac{l}{4}$ . Sustituyendo estos valores en las expresiones de los momentos y reduciendo:

$$Me_A = - \frac{13}{3072} r_B l^2$$

$$Me_B = \frac{67}{3072} r_B l^2$$

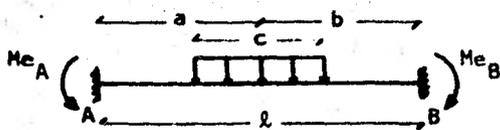
$$Me_A = - \frac{31}{2048} r_B l^2$$

Designando con la letra griega  $\mu$  al coeficiente correspondiente y estableciendo la relación de momentos en el extremo A de la viga, tenemos que, partiendo de un nudo continuo:

$$\mu = \left. \begin{array}{l} 1 \\ \frac{31r_B l^2 / 2048}{13r_B l^2 / 3072} = \frac{93}{26} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{para nudo adyacente continuo} \\ \text{para nudo adyacente articulado} \end{array}$$

### III.1.2.2.3 CARGA UNIFORME AL CENTRO

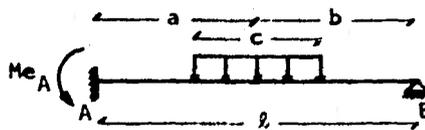
Viga con nudos continuos



$$Me_A = -\frac{qc}{l^2} \left( ab^2 - \frac{c^2}{6} \left( b - \frac{a}{2} \right) \right)$$

$$Me_B = \frac{qc}{l^2} \left( a^2b - \frac{c^2}{6} \left( a - \frac{b}{2} \right) \right)$$

Viga con un nudo articulado



$$Me_A = -\frac{qbc}{8l^2} (4a^2 - c^2 + 8ab)$$

Refiriéndonos otra vez a la figura II.1.a, obtenemos las siguientes igualdades:  $q = t$  y  $a = b = c = \frac{l}{2}$ . Sustituyendo en las fórmulas de los momentos y reduciendo, tendremos que :

$$Me_A = -\frac{11}{192} t l^2$$

$$Me_A = -\frac{11}{128} t l^2$$

$$Me_B = \frac{11}{192} t l^2$$

Llamando  $v$  al coeficiente que pretendemos determinar y estableciendo el cociente de momentos en A, si partimos de un nudo continuo la magnitud de  $v$  será:

$$v = \left. \begin{array}{l} 1 \\ \frac{11t l^2 / 128}{11t l^2 / 192} = 1.5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{para nudo adyacente continuo} \\ \text{para nudo adyacente articulado} \end{array}$$

Hasta este punto, hemos llegado a determinar las magnitudes de los coeficientes:  $\Omega$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  y  $\nu$ , cuya importancia primordial radica en el hecho de que nos indican los valores por los que hay que multiplicar los momentos de empotramiento de vigas con nudos continuos, sujetas a los tipos de carga que ya conocemos, para obtener los correspondientes momentos en el extremo continuo de vigas con su otro extremo articulado.

Es menester anotar aquí que los momentos de empotramiento totales en los extremos de vigas sujetas a diversos tipos de carga, se determinan sumando algebraicamente los momentos debidos a cada una de las cargas tomadas independientemente. Esto es evidente, sobre todo en el caso de la carga repartida debido a la reacción del terreno, en que el análisis se ha efectuado desglosando dicha carga.

El objeto de hacer hincapié en este principio, por todos conocidos como el principio de superposición de causas y efectos, es el de recordar que al plantear la condición de equilibrio de momentos en los nudos de la estructura, los momentos de empotramiento podrán ser incluidos en las expresiones correspondientes en forma de términos independientes sencillos, cada uno premultiplicado por su coeficiente respectivo.

### III.1.3 COEFICIENTE RELATIVO AL NIVEL DE LA ESTRUCTURA BAJO ANALISIS

Ya hemos hecho notar con anterioridad el tipo de cargas a que consideraremos sujetos los diversos niveles de las estructuras bajo análisis. Dichas cargas son todas verticales y hemos dicho que pueden deberse a la acción de la carga muerta más la carga viva o a la reacción del terreno sobre

la estructura. Mientras que las primeras deberán tomarse en cuenta en todos los niveles, la segunda solo entrará en juego al analizarse el nivel de la cimentación. Esta situación dará lugar a que, al analizarse el equilibrio de momentos en los nudos, el número de momentos de empotramiento relativo a los nudos del nivel de la cimentación sea mayor que el relativo a los nudos de los demás niveles. A pesar de la presencia de los términos extra en los nudos del nivel de la cimentación, aquellos pueden integrarse a una sola ecuación general, siempre y cuando se afecten de un coeficiente que los premultiplique a manera de factor común, y que valga uno para el nivel de la cimentación y cero para cualquier otro nivel. Si este coeficiente es llamado  $\sigma$ , tenemos:

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{para el nivel de la cimentación} \\ 0 \quad \text{para el resto de los niveles} \end{array} \right\}$$

La utilización del coeficiente  $\sigma$  nos permitirá plantear entonces una sola expresión, completamente general, aplicable a cualquier nudo continuo de la estructura.

En los trabajos previos de interacción suelo-estructura,<sup>2</sup> en lugar de introducirse el coeficiente  $\sigma$ , suelen plantearse dos ecuaciones de equilibrio de momentos en los nudos, a saber: una para los nudos del nivel de la subestructura y otra para los nudos de la superestructura. Aunque este desglosamiento da lugar a dos ecuaciones en lugar de a una, la realidad es que el cálculo se optimiza, pues los términos debidos a la reacción del terreno solo afectan el nivel de la cimentación, haciéndose cero para el resto de los niveles. Resultando inoperante arrastrar términos nulos en el análisis de la superestructura, sobre todo si se pretende adaptar el

método para computadora, conviene entonces plantear las dos ecuaciones que ya mencionamos. La utilización del coeficiente  $\sigma$  para dar forma a una sola expresión, sin embargo, no deja de tener interés teórico.

### III.2 CONDICION DE EQUILIBRIO DE MOMENTOS EN EL NUDO $i,j$

La ecuación a la que vamos a llegar al plantear la condición de equilibrio de momentos será aplicable a cualquier nudo de la estructura. La manera más sencilla y obvia de lograr esta generalidad en cuanto a notación, es mediante la utilización de los subíndices  $i,j$ . Al respecto pueden consultarse las figuras 11.1 y 11.2. Las expresiones que plantearemos quedarán entonces en forma de algoritmos, muy susceptibles de ser utilizados en un análisis por computadora.

Una última palabra antes de entrar en materia: los momentos que se utilizarán serán los de barra sobre nudo y se considerarán positivos si van en el sentido de las manecillas del reloj.

El momento sobre el nudo  $i,j$  debido a la barra limitada por los nudos  $(i,j) - (i+1,j)$ , (de hecho trabe  $i,j$ , ver fig. 11.2) valdrá:<sup>4</sup>

$$M_{(i,j)(i+1,j)} = M^e_{(i,j)(i+1,j)} + 2\alpha r_{(i,j)} K_{t,i,j} \phi_{i,j} + \beta r_{(i,j)} K_{t,i,j} \phi_{i+1,j} - 6\gamma r_{(i,j)} \frac{K_{t,i,j}}{l_i} \delta_i + 6\gamma r_{(i,j)} \frac{K_{t,i,j}}{l_i} \delta_{i+1} \quad (111.1)$$

en donde:

$$M_{(i,j)(i+1,j)} = \text{momento sobre el nudo } i,j \text{ debido a la trabe } (i,j) - (i+1,j), \text{ (trabe } i,j, \text{ fig. 11.2).}$$

$M^e_{(i,j)(i+1,j)}$  = momento de empotramiento sobre el nudo  $i,j$ , debido a la trabe  $(i,j) - (i+1,j)$  (trabe  $i,j$ , fig. 11.2).

$Kt_{i,j} = \frac{(EI)t_{i,j}}{l_i}$  = rigidez de la trabe  $i,j$ .

$\phi_{i,j} = 2\theta_{i,j}$  = doblegiro en el nudo  $i,j$ .

$\phi_{i+1,j} = 2\theta_{i+1,j}$  = doblegiro en el nudo  $i+1,j$ .

$\theta_{i,j}$  = giro en el nudo  $i,j$ .

$\theta_{i+1,j}$  = giro en el nudo  $i+1,j$ .

$r$  = indica a la derecha.

$\alpha^r_{(i,j)}$  = coeficiente relativo a las rigideces angulares tal que, partiendo de un nudo continuo  $i,j$ , vale:

1 si el nudo a la derecha  $(i+1,j)$  es continuo.

0.75 si el nudo a la derecha  $(i+1,j)$  es articulado.

$\beta^r_{(i,j)}$  = coeficiente relativo a las rigideces angulares tal que, partiendo de un nudo continuo  $i,j$ , vale:

1 si el nudo a la derecha  $(i+1,j)$  es continuo.

0 si el nudo a la derecha  $(i+1,j)$  es articulado.

$\gamma^r_{(i,j)}$  = coeficiente relativo a las rigideces lineales tal que, partiendo de un nudo continuo  $i,j$ , vale:

1 si el nudo a la derecha  $(i+1,j)$  es continuo.

0.5 si el nudo a la derecha  $(i+1,j)$  es articulado.

$\delta_i$  y  $\delta_{i+1}$  son los desplazamientos verticales que sufre la estructura en los ejes de columnas  $i$  e  $i+1$ .

El momento sobre el nudo  $i,j$ , debido a la trabe limitada por los nudos  $(i,j)(i-1,j)$ , (trabe  $i-1,j$ , ver fig. 11.2) valdrá:

$$M(i,j)(i-1,j) = M^e(i,j)(i-1,j) + 2\alpha^l(i,j) K_t(i-1,j) \phi_{i,j} + \\ + \beta^l(i,j) K_t(i-1,j) \phi_{i-1,j} - 6\gamma^l(i,j) \frac{K_t(i-1,j)}{l_{i-1}} \delta_{i-1} + 6\gamma^l(i,j) \frac{K_t(i-1,j)}{l_{i-1}} \delta_i \quad (111.2)$$

El significado de las literales es el mismo que para el caso de la ecuación 111.1 y el subíndice  $l$  indica a la izquierda.

Los momentos sobre los nudos  $i,j$  debidos a las columnas  $j$  y  $j-1$ , serán:

$$M(i,j)(i,j+1) = M^e(i,j)(i,j+1) + 2\alpha^u(i,j) K_c(i,j) \phi_{i,j} + \beta^u(i,j) K_c(i,j) \phi_{i,j+1} - \\ - 6\gamma^u(i,j) \frac{K_c(i,j)}{h_j} \delta_j + 6\gamma^u(i,j) \frac{K_c(i,j)}{h_j} \delta_{j+1} \quad (111.3)$$

$$M(i,j)(i,j-1) = M^e(i,j)(i,j-1) + 2\alpha^d(i,j) K_c(i,j-1) \phi_{i,j} + \beta^d(i,j) K_c(i,j-1) \phi_{i,j-1} - \\ - 6\gamma^d(i,j) \frac{K_c(i,j-1)}{h_{j-1}} \delta_{j-1} + 6\gamma^d(i,j) \frac{K_c(i,j-1)}{h_{j-1}} \delta_j \quad (111.4)$$

en donde:

$$K_{c,i,j} = \frac{(EI)c_{i,j}}{h_j}, \quad K_{c,i,j-1} = \frac{(EI)c_{i,j-1}}{h_{j-1}} \quad \text{y los subíndices } u \text{ y } d \text{ indican}$$

arriba y abajo, respectivamente.

A continuación plantearemos las expresiones más generales para valuar los momentos de empotramiento en nudos continuos.

#### a. Para las traves

$$M^e(i,j)(i+1,j) + \Omega_r(i,j) \frac{\omega_{i,j} l_i^2}{12} - \sigma_j \left( \frac{67}{3072} \rho_r(i) r_i l_i^2 + \frac{13}{3072} \mu_r(i) r_{i+1} l_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{11}{192} \nu_r(i) t_i l_i^2 \right) \quad (111.5)$$

$$M^e(i,j)(i-1,j) = -\Omega_l(i,j) \frac{\omega_{i-1,j} l_{i-1}^2}{12} + \sigma_j \left( \frac{67}{3072} \rho_l(i) r_i l_{i-1}^2 + \right. \\ \left. + \frac{13}{3072} \mu_l(i) r_{i-1} l_{i-1}^2 + \frac{11}{192} \nu_l(i) t_{i-1} l_{i-1}^2 \right) \quad (111.6)$$

en donde:

$w_{i,j}$ ,  $r_i$ ,  $r_{i+1}$  y  $t_i$  son cargas por unidad de longitud en las trabes  $i,j$ , con la distribución que ya establecimos y que puede consultarse en la fig. 11.1.a.

$\Omega_{r(i,i)}$  = coeficiente relativo al momento de empotramiento debido a  $w_{i,j}$  tal que partiendo de un nudo continuo  $(i,j)$ , vale:

1 si el nudo a la derecha  $(i+1,j)$  es continuo.

1.5 si el nudo a la derecha  $(i+1,j)$  es articulado.

$\sigma_j$  = coeficiente que toma en cuenta el nivel de la estructura bajo análisis y vale:

1 para el primer nivel de piso.

0 para el resto de los niveles.

$\rho_{r(i)}$  = coeficiente relativo al momento de empotramiento debido a  $r_i$  tal que, partiendo de un nudo continuo  $(i,1)$ , vale:

1 si el nudo a la derecha  $(i+1,1)$  es continuo.

147/134 si el nudo a la derecha  $(i+1,1)$  es articulado.

$\mu_{r(i)}$  = coeficiente relativo al momento de empotramiento debido a  $r_{i+1}$  tal que, partiendo de un nudo continuo  $(i,1)$ , vale:

1 si el nudo a la derecha  $(i+1,1)$  es continuo.

93/26 si el nudo a la derecha  $(i+1,1)$  es articulado.

$\nu_{r(i)}$  = coeficiente relativo al momento de empotramiento debido a  $t_i$  tal que, partiendo de un nudo continuo  $(i,1)$ , vale:

1 si el nudo a la derecha  $(i+1,1)$  es continuo.

1.5 si el nudo a la derecha  $(i+1,1)$  es articulado.

b. Para las columnas

Ya en el punto 11.2 establecimos las razones por las que en este trabajo no se tomará en cuenta el efecto de fuerzas horizontales. Entonces:

$$M^e(i, j)(i, j+1) = M^e(i, j)(i, j-1) = 0 \quad (111.7)$$

Por otro lado, en el punto 11.3 explicamos por que supondremos que los desplazamientos laterales son de pequeña magnitud, es decir:

$$\delta_{j-1} = \delta_j = \delta_{j+1} = 0 \quad (111.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones 111.5 y 111.6 en las ecuaciones 111.1 y 111.2, respectivamente:

$$\begin{aligned} M(i, j)(i+1, j) = & \Omega r(i, j) \frac{\omega_{i, j} \ell_i^2}{12} - \sigma_j \left( \frac{67}{3072} \rho r(i) r_i \ell_i^2 + \frac{13}{3072} \mu r(i) r_{i+1} \ell_i^2 + \right. \\ & + \frac{11}{192} \nu r(i) t_i \ell_i^2 \left. \right) + 2\alpha r(i, j) K t_{i, j} \phi_{i, j} + \beta r(i, j) K t_{i, j} \phi_{i+1, j} - \\ & - 6\gamma r(i, j) \frac{K t_{i, j}}{\ell_i} \delta_i + 6\gamma r(i, j) \frac{K t_{i, j}}{\ell_i} \delta_{i+1} \end{aligned} \quad (111.9)$$

$$\begin{aligned} M(i, j)(i-1, j) = & -\Omega \ell(i, j) \frac{\omega_{i-1, j} \ell_{i-1}^2}{12} + \sigma_j \left( \frac{67}{3072} \rho \ell(i) r_i \ell_{i-1}^2 + \right. \\ & + \frac{13}{3072} \mu \ell(i) r_{i-1} \ell_{i-1}^2 + \frac{11}{192} \nu \ell(i) t_{i-1} \ell_{i-1}^2 \left. \right) + 2\alpha \ell(i, j) K t_{i-1, j} \phi_{i, j} + \\ & + \beta \ell(i, j) K t_{i-1, j} \phi_{i-1, j} - 6\gamma \ell(i, j) \frac{K t_{i-1, j}}{\ell_{i-1}} \delta_{i-1} + 6\gamma \ell(i, j) \frac{K t_{i-1, j}}{\ell_{i-1}} \delta_i \end{aligned} \quad (111.10)$$

Sustituyendo las ecuaciones 111.7 y 111.8 en las ecuaciones 111.3 y 111.4

$$M(i, j)(i, i+1) = 2\alpha u(i, j) K c_{i, j} \phi_{i, j} + \beta u(i, j) K c_{i, j} \phi_{i, j+1} \quad (111.11)$$

$$M(i, j)(i, j-1) = 2\alpha d(i, j) K c_{i, j-1} \phi_{i, j} + \beta d(i, j) K c_{i, j-1} \phi_{i, j-1} \quad (111.12)$$

En el nudo  $i, j$  debe haber equilibrio de momentos, por lo tanto:

$$M_{(i,j)}(i+1,j) + M_{(i,j)}(i-1,j) + M_{(i,j)}(i,j+1) + M_{(i,j)}(i,j-1) = 0 \quad (III.13)$$

Sustituyendo las ecuaciones III.9, III.10, III.11 y III.12 en III.13, obtenemos la expresión de equilibrio de momentos para un nudo continuo cualquiera de la estructura:

$$\begin{aligned} & 2 \left[ \alpha \ell_{(i,j)} K_{t_{i-1,j}} + \alpha r_{(i,j)} K_{t_{i,j}} + \alpha d_{(i,j)} K_{c_{i,j-1}} + \alpha u_{(i,j)} K_{c_{i,j}} \right] \phi_{i,j} + \\ & + \beta \ell_{(i,j)} K_{t_{i-1,j}} \phi_{i-1,j} + \beta r_{(i,j)} K_{t_{i,j}} \phi_{i+1,j} + \beta d_{(i,j)} K_{c_{i,j-1}} \phi_{i,j-1} + \\ & + \beta u_{(i,j)} K_{c_{i,j}} \phi_{i,j+1} - 6\gamma \ell_{(i,j)} \frac{K_{t_{i-1,j}}}{\ell_{i-1}} \delta_{i-1} + 6 \left[ \gamma \ell_{(i,j)} \frac{K_{t_{i-1,j}}}{\ell_{i-1}} - \right. \\ & \left. - \gamma r_{(i,j)} \frac{K_{t_{i,j}}}{\ell_i} \right] \delta_i + 6\gamma r_{(i,j)} \frac{K_{t_{i,j}}}{\ell_i} \delta_{i+1} + \frac{13}{3072} \sigma_j \mu \ell_{(i)} \ell_{i-1}^2 r_{j-1} + \\ & + \frac{67}{3072} \sigma_j \left[ \rho \ell_{(i)} \ell_{i-1}^2 - \rho r_{(i)} \ell_i^2 \right] r_i - \frac{13}{3072} \sigma_j \mu r_{(i)} \ell_i^2 r_{i+1} + \\ & + \frac{11}{192} \sigma_j \nu \ell_{(i)} \ell_{i-1}^2 t_{i-1} - \frac{11}{192} \sigma_j \nu r_{(i)} \ell_i^2 t_i = \frac{1}{12} \Omega \ell_{(i,j)} \omega_{i-1,j} \ell_{i-1}^2 - \\ & - \frac{1}{12} \Omega r_{(i,j)} \omega_{i,j} \ell_i^2 \end{aligned} \quad (III.14)$$

A continuación desglosaremos la expresión III.14 en dos ecuaciones: la primera será aplicable solamente al nivel de la cimentación ( $j=1$  y  $\sigma=1$ ) y la segunda será aplicable al resto de los niveles ( $j>1$  y  $\sigma=0$ ).

Para el primer nivel o nivel de la cimentación,  $[j=1, \sigma=1]$  (III.15); sustituyendo III.15 en III.14:

$$\begin{aligned} & 2 \left[ \alpha \ell_{(i,1)} K_{t_{i-1,1}} + \alpha r_{(i,1)} K_{t_{i,1}} + \alpha u_{(i,1)} K_{c_{i,1}} \right] \phi_{i,1} + \\ & + \beta \ell_{(i,1)} K_{t_{i-1,1}} \phi_{i-1,1} + \beta r_{(i,1)} K_{t_{i,1}} \phi_{i+1,1} + \beta u_{(i,1)} K_{c_{i,1}} \phi_{i,2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 6\gamma_L(i,1) \frac{Kt_{i-1,1}}{l_{i-1}} \delta_{i-1} + 6 \left[ \gamma_L(i,1) \frac{Kt_{i-1,1}}{l_{i-1}} - \gamma_r(i,1) \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \right] \delta_i + \\
& + 6\gamma_r(i,1) \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_{i+1} + \frac{13}{3072} \mu_L(i) l_{i-1}^2 r_{i-1} + \frac{67}{3072} \left[ \rho_L(i) l_{i-1}^2 - \right. \\
& \left. - \rho_r(i) l_i^2 \right] r_i - \frac{13}{3072} \mu_r(i) l_i^2 r_{i+1} + \frac{11}{192} \nu_L(i) l_{i-1}^2 t_{i-1} - \\
& - \frac{11}{192} \nu_r(i) l_i^2 t_i = \frac{1}{12} \Omega_L(i,1) \omega_{i-1,1} l_{i-1}^2 - \frac{1}{12} \Omega_r(i,1) \omega_{i,1} l_i^2 \quad (III.16)
\end{aligned}$$

Para el resto de los niveles,  $[j > 1, \sigma = 0]$  (III.17)

Sustituyendo III.17 en III.14:

$$\begin{aligned}
& 2 \left[ \alpha_L(i,j) Kt_{i-1,j} + \alpha_r(i,j) Kt_{i,j} + \alpha_d(i,j) Kc_{i,j-1} + \alpha_u(i,j) Kc_{i,j} \right] \phi_{i,j} + \\
& + \beta_L(i,j) Kt_{i-1,j} \phi_{i-1,j} + \beta_r(i,j) Kt_{i,j} \phi_{i+1,j} + \beta_d(i,j) Kc_{i,j-1} \phi_{i,j-1} + \\
& + \beta_u(i,j) Kc_{i,j} \phi_{i,j+1} - 6\gamma_L(i,j) \frac{Kt_{i-1,j}}{l_{i-1}} \delta_{i-1} + 6 \left[ \gamma_L(i,j) \frac{Kt_{i-1,j}}{l_{i-1}} - \right. \\
& \left. - \gamma_r(i,j) \frac{Kt_{i,j}}{l_i} \right] \delta_i + 6\gamma_r(i,j) \frac{Kt_{i,j}}{l_i} \delta_{i+1} = \frac{1}{12} \Omega_L(i,j) \omega_{i-1,j} l_{i-1}^2 - \\
& - \frac{1}{12} \Omega_r(i,j) \omega_{i,j} l_i^2 \quad (III.18)
\end{aligned}$$

### III.3 CONDICION DE EQUILIBRIO DE FUERZA CORTANTE EN LA CRUJIA I

Para plantear la condición de equilibrio de fuerza cortante en la crujía  $i$ , se requiere establecer el diagrama de cuerpo libre de la crujía  $i$  precisamente. Utilizando la figura II.1.a, procedemos a aislar las trabes de la crujía  $i$ , quedándonos la disposición de fuerzas indicada en la figura III.1:

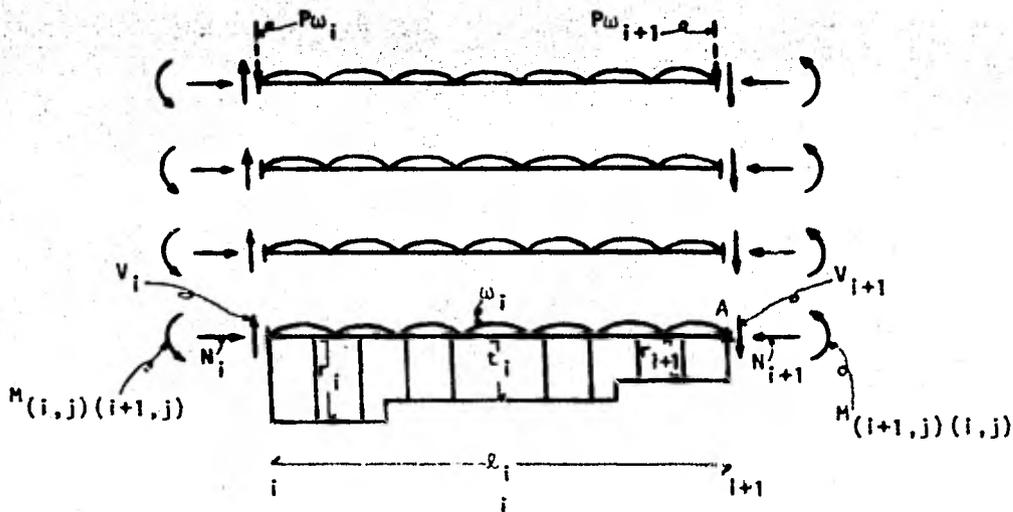


Figura III.1

Diagrama de cuerpo libre de la cruzija  $i$ . Las fuerzas  $Pw_i$  y  $Pw_{i+1}$  no se utilizan en la deducción de las ecuaciones correspondientes a este subcapítulo; su significado y uso serán aclarados en el subcapítulo V.1.

Para establecer la condición de equilibrio de fuerza cortante, tomaremos momentos respecto al punto A de la cruzija (fig. III.1), pero antes, hay que tener en cuenta lo siguiente:

a. Las fuerzas normales no cambian de magnitud a lo largo de las traveses por lo que, siendo de sentido contrario, se cancelan.

b. Para que el equilibrio de fuerzas verticales se mantenga, es necesario que la suma de fuerzas cortantes a la izquierda de la cruzija, sea la resultante de todas las cargas verticales que actúan sobre la porción de la estructura que queda a la izquierda de la sección  $i$ ; la misma idea es aplicable en el extremo derecho, solo que la resultante no produce momentos

porque pasa por el punto A y por lo tanto no es necesario calcularla.

Teniendo en mente lo anterior, procedemos ahora a tomar momentos alrededor del punto A, considerando positivo el sentido de las manecillas del reloj. Llamando q al número de pisos de la estructura, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 & \left( r_1 \frac{\ell_1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{i-1} r_k (\ell_{k-1} + \ell_k) + r_i \frac{\ell_{i-1}}{4} + \sum_{k=1}^{i-1} t_k \frac{\ell_k}{2} - \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^q \omega_{k,j} \ell_k \right) \ell_i + \\
 & + r_i \frac{\ell_i}{4} \cdot \frac{7}{8} \ell_i + \frac{r_{i+1}}{4} \ell_i \frac{\ell_i}{8} + \left( t_i \frac{\ell_i}{2} - \sum_{j=1}^q \omega_{i,j} \ell_i \right) \frac{\ell_i}{2} = \sum_{j=1}^q M(i,j)(i+1,j) + \\
 & + \sum_{j=1}^q M(i+1,j)(i,j) \tag{III.19}
 \end{aligned}$$

donde auxiliándonos de las ecuaciones III.9 y III.10, el miembro derecho de III.19 vale:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^q M(i,j)(i+1,j) + \sum_{j=1}^q M(i+1,j)(i,j) = \sum_{j=1}^q \left[ \Omega r(i,j) \frac{\omega_{i,j} \ell_i^2}{12} - \right. \\
 & - \frac{67}{3072} \rho r(i) r_i \ell_i^2 - \frac{13}{3072} \mu r(i) r_{i+1} \ell_i^2 - \frac{11}{192} \nu r(i) t_i \ell_i^2 + \\
 & + 2\alpha r(i,j) K t_{i,j} \phi_{i,j} + \beta r(i,j) K t_{i,j} \phi_{i+1,j} - 6\gamma r(i,j) \frac{K t_{i,j}}{\ell_i} \delta_i + \\
 & + 6\gamma r(i,j) \frac{K t_{i,j}}{\ell_i} \delta_{i+1} \left. \right] + \sum_{j=1}^q \left[ -\Omega \ell(i+1,j) \frac{\omega_{i,j} \ell_i^2}{12} + \frac{13}{3072} \mu \ell(i+1) r_i \ell_i^2 + \right. \\
 & + \frac{67}{3072} \rho \ell(i+1) r_{i+1} \ell_i^2 + \frac{11}{192} \nu \ell(i+1) t_i \ell_i^2 + 2\alpha \ell(i+1,j) K t_{i,j} \phi_{i+1,j} + \\
 & + \beta \ell(i+1,j) K t_{i,j} \phi_{i,j} - 6\gamma \ell(i+1,j) \frac{K t_{i,j}}{\ell_i} \delta_i + 6\gamma \ell(i+1,j) \frac{K t_{i,j}}{\ell_i} \delta_{i+1} \left. \right] \tag{III.20}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo III.20 en III.19 y reduciendo:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^q \left[ 2\alpha r(i,j) + \beta l(i+1,j) \right] K t_{i,j} \phi_{i,j} + \sum_{j=1}^q \left[ 2\alpha l(i+1,j) + \right. \\
& \left. + \beta r(i,j) \right] K t_{i,j} \phi_{i+1,j} - \frac{6}{l_i} \sum_{j=1}^q \left[ \gamma r(i,j) + \gamma l(i+1,j) \right] K t_{i,j} \delta_i + \\
& + \frac{6}{l_i} \sum_{j=1}^q \left[ \gamma r(i,j) + \gamma l(i+1,j) \right] K t_{i,j} \delta_{i+1} - \frac{l_i l_i}{4} r_i - \frac{l_i}{4} \sum_{k=2}^{i-1} (l_{k-1} + \\
& + l_k) r_k - \left[ \frac{l_{i-1} l_i}{4} + \frac{l_i^2}{3072} (67 \rho r(i) - 13 \mu l(i+1) + 672) \right] r_i - \frac{l_i^2}{3072} \left[ 96 + \right. \\
& \left. + 13 \mu r(i) - 67 \rho l(i+1) \right] r_{i+1} - \frac{l_i}{2} \sum_{k=1}^{i-1} l_k t_k - \frac{l_i^2}{192} \left[ 48 + 11 \nu r(i) - \right. \\
& \left. - 11 \nu l(i+1) \right] t_i = \frac{l_i^2}{12} \sum_{j=1}^q \left[ \Omega l(i+1,j) - \Omega r(i,j) \right] \omega_{i,j} - \\
& - l_i \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^q \omega_{k,j} l_k - \frac{l_i^2}{2} \sum_{j=1}^q \omega_{i,j} \tag{III.21}
\end{aligned}$$

Es conveniente poner de relieve nuevamente, que las expresiones que estamos determinando serán aplicadas posteriormente en un programa de computadora. Teniendo esto en mente, debemos tratar de "arreglar" las ecuaciones para que faciliten y optimicen la labor de la computadora lo mas posible. Así por ejemplo, la expresión de condición de elementos en los nudos (III.14), fue desglosada en las III.16 y III.18, teniendo en cuenta las razones expuestas en III.1.3. Por lo que se refiere a la expresión que acabamos de determinar (III.21), es conveniente hacer notar que existen varios términos en que se maneja el subíndice  $i-1$ . Es lógico pensar que para la primera cruzía, dichos términos valdrán cero. Para facilitar la posterior programación de III.21 y para no arrastrar términos que valen cero

al aplicar la condición de equilibrio de fuerza cortante en la primera cruzija, generaremos a partir de III.21, una ecuación aplicable solamente a la cruzija número uno.

De III.21 haciendo cero los términos que se deben a fuerzas que supuestamente están a la izquierda de la primera cruzija:

Para  $i=1$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^q \left[ 2\alpha r(1,j) + \beta l(2,j) \right] K_{t1,j} \phi_{1,j} + \sum_{j=1}^q \left[ 2\alpha l(2,j) + \beta r(1,j) \right] K_{t1,j} \phi_{2,j} \\ & - \frac{6}{l_1} \sum_{j=1}^q \left[ \gamma r(1,j) + \gamma l(2,j) \right] K_{t1,j} \delta_1 + \frac{6}{l_1} \sum_{j=1}^q \left[ \gamma r(1,j) + \right. \\ & \left. + \gamma l(2,j) \right] K_{t1,j} \delta_2 - \frac{l_1^2}{3072} \left[ 67 \rho r(1) - 13 \nu l(2) + 672 \right] r_1 - \\ & - \frac{l_1^2}{3072} \left[ 96 + 13 \nu r(1) - 67 \rho l(2) \right] r_2 - \frac{l_1^2}{192} \left[ 48 + 11 \nu r(1) - \right. \\ & \left. - 11 \nu l(2) \right] t_1 = \frac{l_1^2}{12} \sum_{j=1}^q \left[ \Omega l(2,j) - \Omega r(1,j) \right] \omega_{1,j} - \frac{l_1^2}{2} \sum_{j=1}^q \omega_{1,j} \end{aligned} \quad (III.22)$$

Para  $i>1$ , aplíquese la ecuación III.21.

Por la forma en que han sido determinadas las expresiones III.21 y III.22, tendrán que considerarse simultáneamente las características de los nudos que limitan a las trabes, en el sentido de que ahora no bastará ignorar los nudos articulados, sino que habrá que definir como cero las magnitudes de los coeficientes que les corresponden. Esto garantizará la correcta aplicación de III.21 ó III.22, y se hace hincapié en ello pensando nuevamente en que las expresiones serán adaptadas a un programa de computadora.

### III.4 OBTENCIÓN DEL DESPLAZAMIENTO $\zeta_i$ EN LA CIMENTACIÓN, A LA MITAD DE LA CRUJIA $i$

En este punto llegaremos a determinar ecuaciones que relacionen los desplazamientos  $\zeta_i$  a la mitad de la crujía  $i$  en el primer nivel de piso ( $j=1$ ), con los doblegiros  $\phi_{i,1}$  y  $\phi_{i+1,1}$  en los extremos de la barra  $(i,1) - (i+1,1)$ , con los desplazamientos  $\delta_i$  y  $\delta_{i+1}$  bajo las columnas  $i$  e  $i+1$  y con la fuerza  $t_i$  situada hacia el centro de la crujía  $i$  (fig. 11.1).

Para poder establecer las relaciones anteriores, emplearemos el segundo teorema de la viga conjugada. Recordemos que el método de la viga conjugada supone una viga ficticia, denominada viga conjugada precisamente, que tiene la misma longitud que la viga real pero con apoyos tales que si la viga conjugada se carga con el diagrama  $M/EI$  de la viga real:

a. Primer teorema: la fuerza cortante de la viga conjugada en una sección cualquiera es igual a la pendiente de la tangente de la viga real en ese punto.

b. Segundo Teorema: el momento flexionante de la viga conjugada en un punto cualquiera es el desplazamiento de ese punto en la viga real.

No debemos perder de vista el hecho de que en este trabajo estamos tratando tanto con nudos continuos como con nudos articulados, porque esta situación da pie a tener que considerar tres tipos diferentes de barras de acuerdo con los apoyos que las limitan, a saber: barras limitadas por dos nudos continuos, barras limitadas por un nudo continuo y uno articulado y barras limitadas por dos nudos articulados. Aunque todas las traves del

primer nivel de piso están sujetas al mismo tipo de cargas, la importancia de tener en mente los tres casos anteriores radica en que, dichas diferencias no solamente darán lugar a diagramas de momento flexionante distintos para cada caso, sino que harán que los apoyos de las vigas conjugadas equivalentes a cada uno de los tres tipos de vigas reales sean también distintos entre sí. Evidentemente, estas variantes nos obligarán a hacer un análisis independiente para cada una de las tres combinaciones de apoyos.

Antes de entrar de lleno a la deducción de las expresiones correspondientes a esta sección, es muy importante mencionar que la convención de signos que usualmente se aplica al manejar el método de la viga conjugada, es la misma que establece el análisis estructural para fuerza cortante y momento flexionante sobre las barras, considerándose los signos automáticamente (fig. III.2.a). Recordemos que esta convención corresponde a una barra cuya elástica deformada le produce compresión en las fibras superiores y tensión en las inferiores, y que además está asociado a un sistema de ejes  $xy$  como el que se presenta en la figura III.2.b. La figura III.2.c hace extensiva la convención a la viga conjugada.

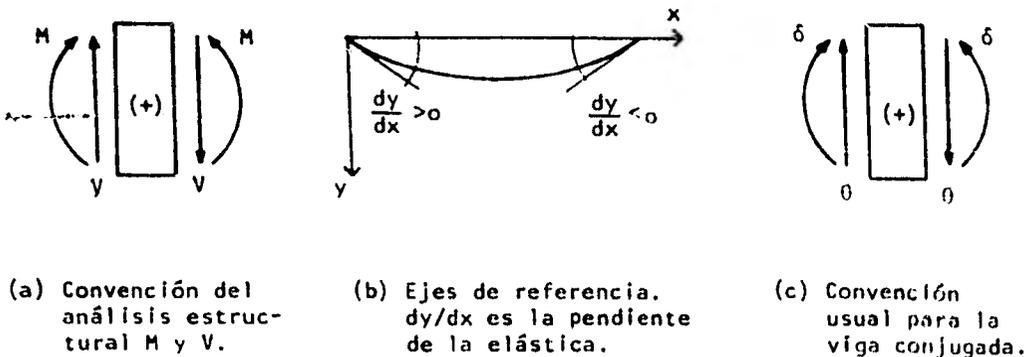
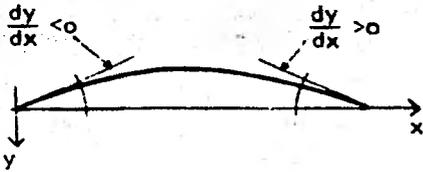


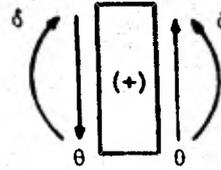
Figura III.2

Sin embargo, la convención para desplazamientos y giros que nosotros emplearemos al aplicar el método de la viga conjugada tendrá una ligera variación. Esto se debe a que nos veremos obligados a respetar lo que establecimos cuando estudiamos la condición de equilibrio de momentos en el nudo  $i, j$  (III.2), en el sentido de que al abordar dicho planteamiento, consideramos los efectos de barra sobre nudo. Siguiendo esta misma línea, resulta que si nos apegamos a la convención del análisis estructural para momentos en la viga real (desplazamientos en la viga conjugada) mostrada en la figura III.2.a, dichos momentos quedarán ligados a una barra cuya elástica deformada le producirá tensión en las fibras superiores y compresión en las inferiores (fig. III.3.a). Lo anterior es obvio si tenemos en cuenta que los momentos citados son ahora los de barra sobre nudo. En la figura III.3.a, puede apreciarse también que la curvatura de la elástica tiene signo opuesto respecto al del caso original (fig. III.2.b), lo cual implica que los signos de las pendientes también son opuestos. Evidentemente, el cambio de signos se hace extensivo a los giros y nos obliga a modificar la convención que usualmente se emplea para los mismos en la viga conjugada (fig. III.2.c).

De acuerdo con las ideas expuestas en las líneas anteriores, la convención de momentos (desplazamientos) y fuerzas cortantes (giros) que emplearemos en el análisis por viga conjugada será la que se indica en la figura III.3.b.



(a) Elástica

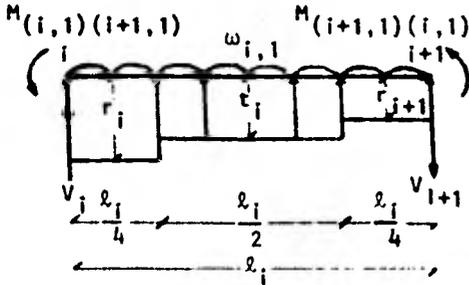


(b) Convención que emplearemos para la viga conjugada.

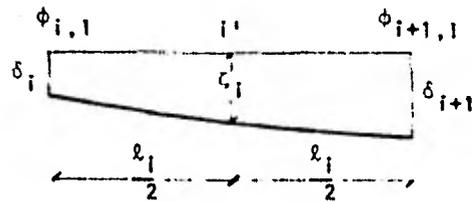
Figura 111.3

III.4.1 TRABE CON APOYOS CONTINUOS<sup>1</sup>

Las figuras 111.4.a y 111.4.b muestran, respectivamente, el diagrama de cuerpo libre con las cargas a que está sujeta la viga y la configuración de deformaciones de la misma.



(a) Diagrama de cuerpo libre de la trabe i,1.



(b) Notación empleada para la deformación.

Figura 111.4: caso de una trabe con apoyos continuos.

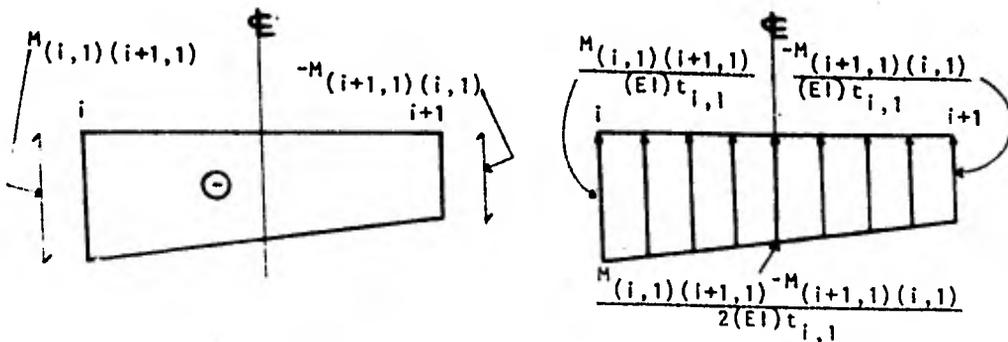
El diagrama de momento flexionante total actuando sobre la viga, será la suma algebraica de los diagramas debidos a:

- La carga  $\omega_i$
- Las cargas  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$
- Los momentos  $M_{(i,1)(i+1,1)}$  y  $M_{(i+1,1)(i,1)}$

La manera más sencilla de manejar estos diagramas consiste en calcular los debidos a  $\omega_i$ ,  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$  para una viga simplemente apoyada y utilizar el debido a  $M_{(i,1)(i+1,1)}$  y  $M_{(i+1,1)(i,1)}$ , como correctivo.

De acuerdo con lo anterior y sin olvidar que para transformar los diagramas de momento flexionante de las vigas reales en diagramas de carga sobre las vigas conjugadas debemos dividir entre  $EI$ , tendremos:

#### III.4.1.1 Diagramas correctivos debidos a $M_{(i,1)(i+1,1)}$ y $M_{(i+1,1)(i,1)}$



(a) Momento

(b) Carga

Diagrama III.1: para facilitar el cálculo de la ordenada en la línea de centro,  $M_{(i+1,1)(i,1)}$  se ha dibujado hacia abajo, razón por la cual se le ha cambiado de signo.

### III.4.1.2 Diagramas debidos a $\omega_{i,1}$ en una viga simplemente apoyada

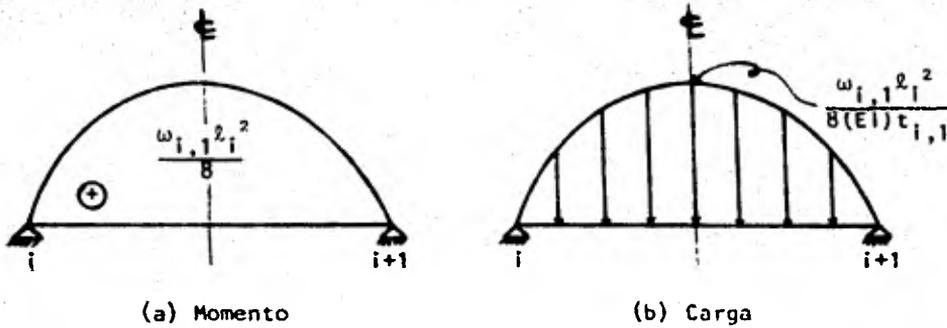


Diagrama III.2

### III.4.1.3 Diagramas debidos a $r_i$ , $t_i$ y $r_{i+1}$ sobre una viga simplemente apoyada

Antes de presentar los diagramas, valüaremos la fuerza cortante  $V_i'$  en el extremo  $i$  de la viga simplemente apoyada debida a las cargas  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$ , con objeto de ponerla en función de ellas. En la figura III.5 puede apreciarse la barra  $i,1$ .

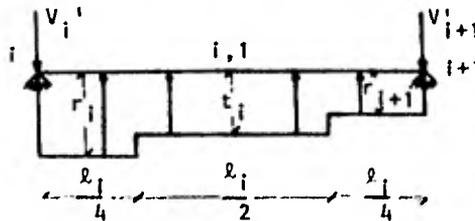


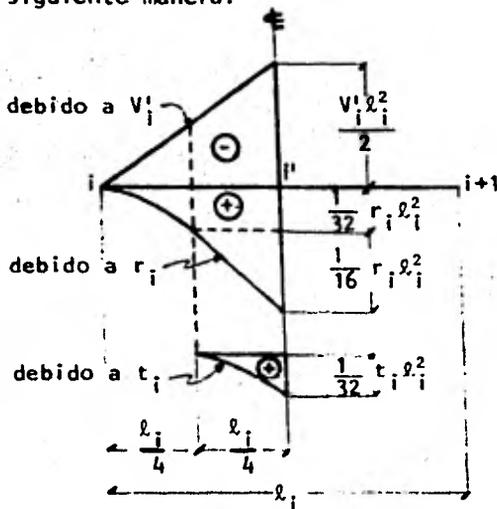
Figura III.5: reacción del terreno sobre una viga simplemente apoyada.

De la figura III.5, tomando momentos respecto del punto  $i+1$  con la convención (+) :

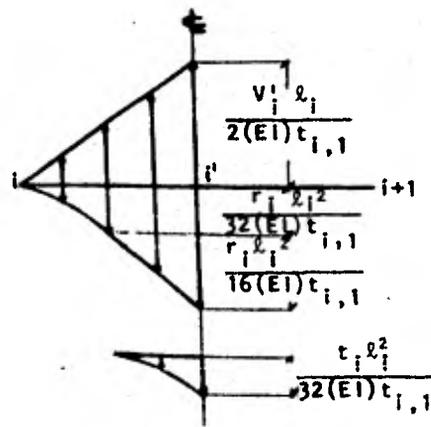
$$\sum M_{i+1} = 0 \rightarrow -V_i' l_i + r_i \frac{l_i}{4} \left( \frac{7}{8} l_i \right) + t_i \frac{l_i}{2} \frac{l_i}{2} + r_{i+1} \frac{l_i}{4} \frac{l_i}{8} = 0$$

$$\therefore V_i' = \frac{1}{l_i} \left( \frac{7}{32} r_i l_i^2 + \frac{1}{4} t_i l_i^2 + \frac{1}{32} r_{i+1} l_i^2 \right) \quad (111.23)$$

El diagrama de momento flexionante debido a  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$  queda de la siguiente manera:



(a) Momento



(b) Carga

Diagrama 111.3: diagrama de momento flexionante debido a  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$ .

Nótese que el diagrama se calcula únicamente hasta el punto medio  $i'$  de la barra.

Dado que lo que nos interesa es llegar a conocer el desplazamiento a la mitad de la cruzía, lo cual se logrará valuando el momento flexionante de la viga cargada con el diagrama  $M/EI$  en la sección  $i'$ , bastará que calculemos el diagrama de momento flexible de la viga real hasta la línea de centro, tal como lo indica el diagrama 111.3.

En resumen, la viga conjugada que nos servirá para resolver este problema, estará sujeta a las condiciones siguientes:

- a. Teniendo en cuenta que la viga real tiene apoyos continuos, la viga conjugada tendrá entonces extremos libres.
- b. La viga conjugada estará sujeta a los diagramas de carga III.1.b, III.2.b y III.3.b.
- c. Dado que los apoyos de la estructura van a estar sujetos a desplazamientos y giros, éstos deberán tomarse en cuenta en forma de momentos y fuerzas, respectivamente, al analizarse las traveses de la cimentación por el método de la viga conjugada. En la figura III.6 se muestra la idea anterior gráficamente.
- d. La viga se analizará únicamente hasta la línea del centro, por ser ahí donde se encuentra el punto de interés  $i'$  (fig. III.6).

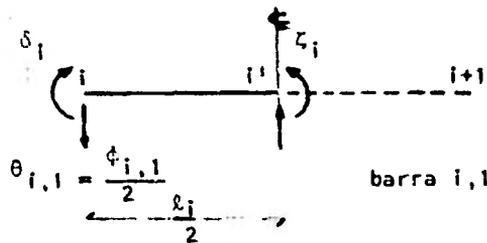


Figura III.6: Desplazamientos y giros en la viga conjugada; ambos apoyos son continuos.

Integrando los conceptos anteriores, procedemos a hacer  $\sum M_{i'} = 0$  (+):

$$\frac{1}{(EI)t_{i,1}} \left[ (M_{(i,1)}(i+1,1) - \frac{M_{(i,1)}(i+1,1) - M_{(i+1,1)}(i,1)}{2}) \frac{l_i}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{l_i}{2} + \frac{M_{(i,1)}(i+1,1) - M_{(i+1,1)}(i,1)}{2} \times \frac{l_i}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{l_i}{2} \right] - \frac{1}{(EI)t_{i,1}} \left[ \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{8} \times \frac{l_i}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{l_i}{2} \right] + \frac{1}{(EI)t_{i,1}} \left[ \frac{1}{2} \times \frac{V_{i'} l_i}{2} \times \frac{l_i}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{2} - \right]$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{3} \times \frac{\ell_i}{4} \times \frac{r_i \ell_i^2}{32} \left( \frac{\ell_i}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{\ell_i}{4} \right) - \frac{\ell_i}{4} \times \frac{r_i \ell_i^2}{32} \times \frac{1}{2} \times \frac{\ell_i}{4} - \frac{\ell_i}{4} \times \frac{r_i \ell_i^2}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{\ell_i}{4} \\
 & - \left. \frac{1}{3} \times \frac{\ell_i}{4} \times \frac{t_i \ell_i^2}{32} \times \frac{1}{4} \times \frac{\ell_i}{4} \right] + \delta_i - \zeta_i - \frac{\phi_{i,1}}{2} \times \frac{\ell_i}{2} = 0 \quad (111.24)
 \end{aligned}$$

Auxiliándonos de la ecuación 111.9, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 M_{(i,1)(i+1,1)} &= \frac{\omega_{i,1} \ell_i^2}{12} - \frac{67}{3072} r_i \ell_i^2 - \frac{13}{3072} r_{i+1} \ell_i^2 - \frac{11}{192} t_i \ell_i^2 + \\
 &+ 2Kt_{i,1} \phi_{i,1} + Kt_{i,1} \phi_{i+1,1} - 6 \frac{Kt_{i,1}}{\ell_i} \delta_i + 6 \frac{Kt_{i,1}}{\ell_i} \delta_{i+1} \quad (111.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{(i+1,1)(i,1)} &= - \frac{\omega_{i,1} \ell_i^2}{12} + \frac{67}{3072} r_{i+1} \ell_i^2 + \frac{13}{3072} r_i \ell_i^2 + \frac{11}{192} t_i \ell_i^2 + \\
 &+ 2Kt_{i,1} \phi_{i+1,1} + Kt_{i,1} \phi_{i,1} - 6 \frac{Kt_{i,1}}{\ell_i} \delta_i + 6 \frac{Kt_{i,1}}{\ell_i} \delta_{i+1} \quad (111.26)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo 111.23, 111.25 y 111.26 en 111.24 y reduciendo:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\ell_i^2}{24(EI)t_{i,1}} \left[ - \frac{9}{512} r_i \ell_i^2 + \frac{9}{512} r_{i+1} \ell_i^2 + 3Kt_{i,1} \phi_{i,1} + 3Kt_{i,1} \phi_{i+1,1} - \right. \\
 & - 12 \frac{Kt_{i,1}}{\ell_i} \delta_i + 12 \frac{Kt_{i,1}}{\ell_i} \delta_{i+1} \left. \right] + \frac{\ell_i^2}{16(EI)t_{i,1}} \left[ \frac{1}{6} \omega_{i,1} \ell_i^2 - \right. \\
 & - \frac{5}{192} r_i \ell_i^2 - \frac{5}{192} r_{i+1} \ell_i^2 - \frac{11}{96} t_i \ell_i^2 + Kt_{i,1} \phi_{i,1} - Kt_{i,1} \phi_{i+1,1} \left. \right] - \\
 & - \frac{1}{128(EI)t_{i,1}} \omega_{i,1} \ell_i^4 + \frac{\ell_i^2}{48(EI)t_{i,1}} \left( \frac{7}{32} r_i \ell_i^2 \frac{1}{4} t_i \ell_i^2 + \frac{1}{32} r_{i+1} \ell_i^2 \right) - \\
 & - \frac{5}{6144(EI)t_{i,1}} r_i \ell_i^4 - \frac{1}{1024(EI)t_{i,1}} r_{i+1} \ell_i^4 - \frac{1}{1536(EI)t_{i,1}} r_i \ell_i^4 - \\
 & - \frac{1}{6144(EI)t_{i,1}} t_i \ell_i^4 + \delta_i - \zeta_i - \frac{1}{4} \phi_{i,1} \ell_i = 0 \quad (111.27)
 \end{aligned}$$

Recordando que  $Kt_{i,1} = \frac{(EI)t_{i,1}}{l_i}$  y reduciendo, la ecuación III.27 queda:

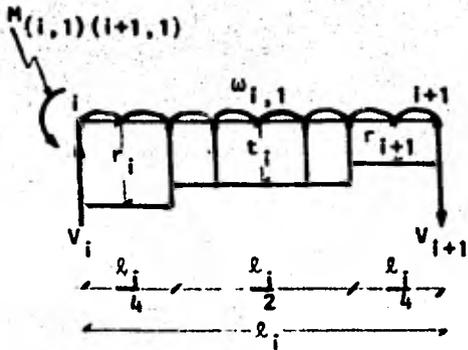
$$Kt_{i,1} \psi_{i,1} - Kt_{i,1} \phi_{i+1,1} - 8 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_i - 8 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_{i+1} + 16 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \zeta_i + \frac{l_i^2}{256} r_i + \frac{l_i^2}{256} r_{i+1} + \frac{13}{384} l_i^2 t_i = \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{24} \quad (III.28)$$

#### III.4.2 TRABE CON UN APOYO CONTINUO Y OTRO ARTICULADO

La condición de apoyos presente se presta a tener que considerar dos casos: en el primero supondríamos el apoyo  $i$  continuo y el apoyo  $i+1$  articulado y en el segundo consideraríamos articulado el  $i$  y continuo el  $i+1$ . A continuación presentaremos las deducciones para cada uno de los dos arreglos de apoyos, las que si bien son básicamente similares, también presentan algunas diferencias de importancia como podrá apreciarse a lo largo de sus desarrollos.

##### III.4.2.1 Apoyo $i$ continuo y apoyo $i+1$ articulado

En las figuras III.7.a y III.7.b pueden apreciarse el diagrama de cuerpo libre con las cargas a que está sujeta la viga y la configuración de deformaciones de la misma, respectivamente.



(a) Diagrama de cuerpo libre de la trabe  $i,1$

(b) Notación empleada para la deformación

Figura iii.7: caso de una trabe con su apoyo  $i$  continuo y su apoyo  $i+1$  articulado.

Procediendo de manera enteramente similar a la del caso iii.4.1, el diagrama de momento flexionante total actuando sobre la viga será la suma algebraica de los diagramas debidos a:

- La carga  $\omega_{i,1}$
- Las cargas  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$
- El momento  $M_{(i,1)(i+1,1)}$

Manejando el diagrama debido a  $M_{(i,1)(i+1,1)}$  como correctivo y calculando los debidos a  $\omega_{i,1}$ ,  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$  para una viga simplemente apoyada tendremos:

### 111.4.2.1.1 DIAGRAMAS CORRECTIVOS DEBIDOS A $M_{(i,1)(i+1,1)}$

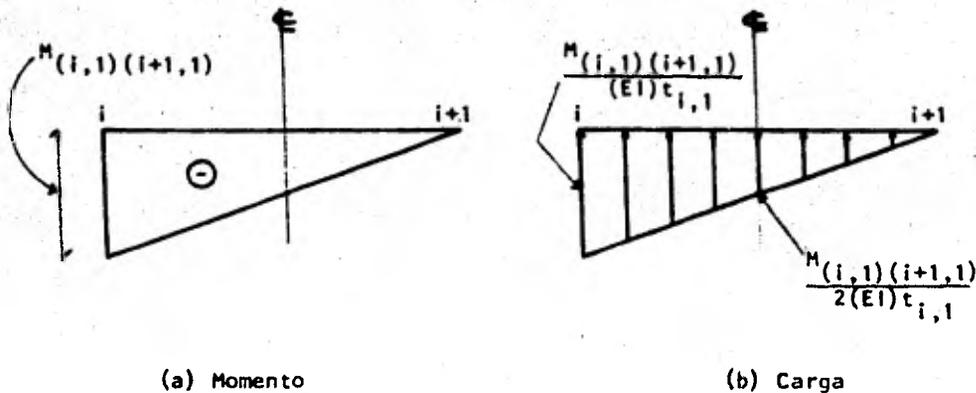


Diagrama 111.4

### 111.4.2.1.2 DIAGRAMAS DEBIDOS A $\omega_{i,1}$ Y A $r_i, t_i$ Y $r_{i+1}$ SOBRE UNA VIGA

#### SIMPLEMENTE APOYADA

Las condiciones de carga establecidas por  $\omega_{i,1}$  y  $r_i, t_i$  y  $r_{i+1}$  sobre la viga simplemente apoyada son idénticas a las correspondientes al caso 111.4.1 por lo que al respecto pueden consultarse el diagrama 111.2 y la figura 111.5 y el diagrama 111.3, respectivamente.

En resumen, las condiciones a que quedará sujeta la viga conjugada para este caso serán:

- Al apoyo continuo de la viga real corresponde un extremo libre en la viga conjugada, mientras que el apoyo articulado permanece tal cual.
- La viga conjugada estará sujeta a los diagramas de carga 111.2.b, 111.3.b y 111.4.b.

- c. Los apoyos de la estructura estarán sujetos a desplazamientos y giros que deberán tomarse en cuenta en forma de momentos y fuerzas, en ese orden, al analizarse las traveses de la cimentación por el método de la viga conjugada. La figura III.6 muestra la idea anterior en forma gráfica.
- d. Bastará analizar la viga conjugada hasta su punto medio  $i'$  por ser éste el sitio de interés (fig. III.6).
- e. La barra  $i - i+1$  forma parte de un sistema de barras y tiene su extremo  $i+1$  articulado. Cuando dichas barras sean sujetas a alguna condición de carga, el giro que aparecerá a la derecha del apoyo  $i+1$  no será igual, en general, al giro que se presentará en el lado izquierdo del mismo (fig. III.7). Si bien esta situación no nos afectará por el momento, pues una vez que la barra en cuestión sea aislada para el análisis, su apoyo  $i+1$  quedará a la derecha del punto  $i'$ , es conveniente tenerla presente para los casos en que el extremo  $i$ , según nuestra convención, sea articulado. Tales casos se desarrollarán más adelante y en ellos se dará una explicación adicional.

Teniendo en cuenta los conceptos anteriores, tomamos ahora momentos respecto al punto  $i'$ , con la convención (+) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(EI)l_{i,1}} \left[ M_{(i,1)(i+1,1)} - \frac{M_{(i,1)(i+1,1)}}{2} \right] \frac{l_i}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{l_i}{2} + \\ & + \frac{M_{(i,1)(i+1,1)}}{2} \times \frac{l_i}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{l_i}{2} - \frac{1}{(EI)l_{i,1}} \left[ \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{8} \times \frac{l_i}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{l_i}{2} \right] + \\ & + \frac{1}{(EI)l_{i,1}} \left[ \frac{1}{2} \times \frac{V_{i,1} l_i}{2} \times \frac{l_i}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{4} \times \frac{r_i l_i^2}{32} \left( \frac{l_i}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{l_i}{4} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{l_i}{4} \times \frac{r_i l_i^2}{32} \times \frac{1}{2} \times \frac{l_i}{4} - \frac{l_i}{4} \times \frac{r_i l_i^2}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{4} \times \frac{l_i l_i^2}{32} \times \frac{1}{4} \times \frac{l_i}{4} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \delta_i - \zeta_i - \frac{\phi_{i,1}}{2} \times \frac{l_i}{2} = 0 \quad (111.29)$$

Auxiliándonos de la ecuación 111.9 tenemos que, por ser el nudo  $i+1$  articulado:

$$M_{(i,1)(i+1,1)} = \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{8} - \frac{49}{2048} r_i l_i^2 - \frac{31}{2048} r_{i+1} l_i^2 - \frac{11}{128} t_i l_i^2 + \\ + \frac{3}{2} Kt_{i,1} \phi_{i,1} - 3 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_i + 3 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_{i+1} \quad (111.30)$$

Sustituyendo 111.23 y 111.30 en 111.29 reduciendo:

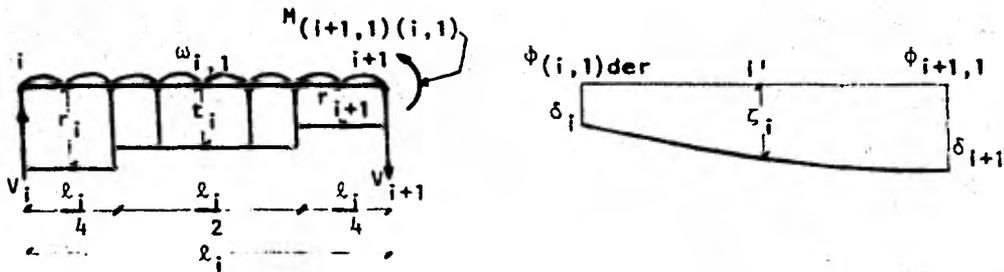
$$\frac{l_i^2}{12(EI)t_{i,1}} \left[ \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{16} - \frac{49}{4096} r_i l_i^2 - \frac{31}{4096} r_{i+1} l_i^2 - \frac{11}{256} t_i l_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} Kt_{i,1} \phi_{i,1} - \frac{3}{2} \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_i + \frac{3}{2} \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_{i+1} \right] + \frac{l_i^2}{16(EI)t_{i,1}} \left[ \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{8} - \right. \\ \left. - \frac{49}{2048} r_i l_i^2 - \frac{31}{2048} r_{i+1} l_i^2 - \frac{11}{128} t_i l_i^2 + \frac{3}{2} Kt_{i,1} \phi_{i,1} - 3 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_i + \right. \\ \left. + 3 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_{i+1} \right] - \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{128(EI)t_{i,1}} + \frac{l_i^2}{48(EI)t_{i,1}} \left( \frac{7}{32} r_i l_i^2 + \frac{1}{4} t_i l_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{32} r_{i+1} l_i^2 \right) - \frac{5}{6144(EI)t_{i,1}} r_i l_i^4 - \frac{1}{1024(EI)t_{i,1}} r_i l_i^4 - \\ - \frac{1}{1536(EI)t_{i,1}} r_i l_i^4 - \frac{1}{6144(EI)t_{i,1}} t_i l_i^4 + \delta_i - \zeta_i - \frac{1}{4} \phi_{i,1} l_i = 0 \quad (111.31)$$

Aplicando  $Kt_{i,1} = \frac{(EI)t_{i,1}}{l_i}$  en 111.31 y reduciendo:

$$3 Kt_{i,1} \phi_{i,1} - 22 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_i - 10 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_{i+1} + 32 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \zeta_i + \frac{37 l_i^2}{3072} r_i + \\ + \frac{91 l_i^2}{3072} r_{i+1} + \frac{l_i^2}{8} t_i = \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{6} \quad (111.32)$$

### III.4.2.2 Apoyo $i$ articulado y apoyo $i+1$ continuo

El diagrama de cuerpo libre de la viga en cuestión mostrando las cargas a que está sujeta, puede apreciarse en la figura III.8.a, mientras que la figura III.8.b indica su configuración de deformaciones.



(a) Diagrama de cuerpo libre de la trabe  $i,1$ .

(b) Notación empleada para la deformación.

Figura III.8: caso de una trabe con su apoyo  $i$  articulado y su apoyo  $i+1$  continuo.

El diagrama del momento flexionante total actuando sobre la viga, será la suma algebraica de los diagramas debidos a:

- La carga  $\omega_{i,1}$
- Las cargas  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$
- El momento  $M_{(i+1,1)}(i,1)$

Manejando el diagrama debido a  $M_{(i+1,1)}(i,1)$  como correctivo y calculando los debidos a  $\omega_{i,1}$ ,  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$  para una viga simplemente apoyada tendremos:

### III.4.2.2.1 DIAGRAMAS CORRECTIVOS DEBIDOS A $M(i+1,1)(i,1)$

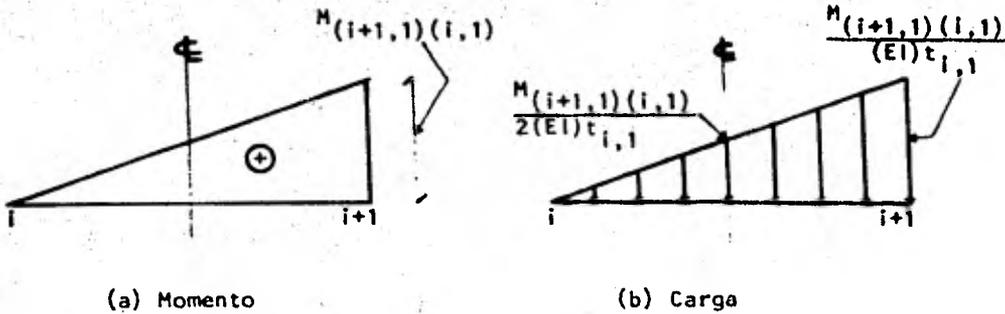


Diagrama III.5

### III.4.2.2.2 DIAGRAMAS DEBIDOS A $\omega_{i,1}$ Y A $r_i, t_i$ Y $r_{i+1}$ SOBRE UNA VIGA

#### SIMPLEMENTE APOYADA

Las condiciones de carga establecidas por  $\omega_{i,1}$  y  $r_i, t_i$  y  $r_{i+1}$  sobre la viga simplemente apoyada son idénticas a las correspondientes al caso III.4.1, por lo que al respecto deben volver a consultarse el diagrama III.2, y la figura III.5 y el diagrama III.3, respectivamente.

Como en los casos anteriores, conviene ahora establecer las condiciones a que quedará sujeta la viga conjugada:

- El apoyo continuo de la viga real corresponde a un extremo libre en la viga conjugada, mientras que el apoyo articulado permanece como tal en ambos casos.
- La viga conjugada estará sujeta a los diagramas de carga III.2.b, III.3.b y III.5.b.
- Los desplazamientos y giros a que estarán sujetos los apoyos de la

estructura deberán tomarse en cuenta en forma de momentos y fuerzas, respectivamente, al emplearse el método de la viga conjugada para analizar las trabes de la cimentación. Además, el hecho de que el apoyo  $i$  sea articulado dará lugar a que en la viga conjugada tenga que considerarse la presencia de la reacción correspondiente ( $R_i$ ). Esto significa que el giro total en el apoyo  $i$  de la trabe ( $\theta_{i,1}$ ) estará formado por la suma algebraica del giro debido al movimiento del apoyo ( $\theta'_{i,1}$ ) y el giro debido a la naturaleza articulada de dicho apoyo ( $R_i$ ). Aunque esta consideración no modificará la secuela de cálculo que va tenemos establecida, pues basta hacer  $\theta_{i,1} = \theta'_{i,1} + R_i$ , si es conveniente tener en mente la existencia de  $R_i$ .

Las ideas anteriores pueden apreciarse gráficamente en la figura III.9.

- d. La figura III.9 muestra que se analizará únicamente la mitad izquierda de la viga. Esto se debe a que el punto de interés  $i'$  se encuentra precisamente al centro de la barra.
- e. La barra  $i - i+1$  forma parte de un sistema de barras y tiene su extremo  $i$  articulado. Si las barras son sometidas a un grupo de cargas cualquiera, los giros que se presentarán a ambos lados del apoyo  $i$  serán en la generalidad diferentes entre sí. Resulta entonces que al aislarse la barra  $i - i+1$  para su estudio, el giro que deberá considerarse actuando en el extremo  $i$  es el que se presente a la derecha del apoyo correspondiente ( $\theta_{(i,1)d}$ , fig. III.9).

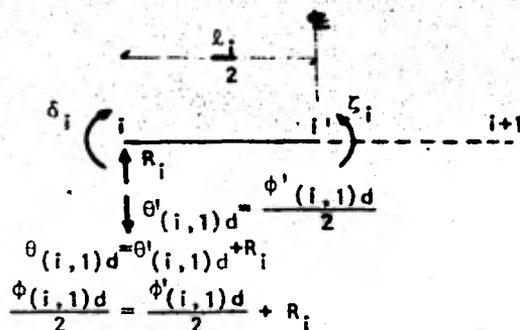


Figura III.9: Desplazamientos y giros en la viga conjugada para el caso del apoyo  $i$  articulado y el  $i+1$  continuo.

Tomando ahora momentos respecto al punto  $i'$ , con la convención (+) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(EI)t_{i,1}} \left[ - \frac{M(i+1,1)(i,1)}{2} \times \frac{l_i}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{2} \right] - \frac{1}{(EI)t_{i,1}} \left[ \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{8} \times \frac{l_i}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{l_i}{2} \right] + \\
 & + \frac{1}{(EI)t_{i,1}} \left[ \frac{1}{2} \times \frac{V_{i,1} l_i}{2} \times \frac{l_i}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{4} \times \frac{r_i l_i^2}{32} \left( \frac{l_i}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{l_i}{4} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{l_i}{4} \times \frac{r_i l_i^2}{32} \times \frac{1}{2} \times \frac{l_i}{4} - \frac{l_i}{4} \times \frac{r_i l_i^2}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{4} \times \frac{t_i l_i^2}{32} \times \frac{1}{4} \times \frac{l_i}{4} \right] + \\
 & + \delta_i - \zeta_i - \frac{\phi(i,1)d}{2} \times \frac{l_i}{2} = 0 \tag{III.33}
 \end{aligned}$$

Auxiliándonos de la ecuación III.10 tenemos que por ser articulado el nudo  $i$ :

$$\begin{aligned}
 M(i+1,1)(i,1) = & - \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{8} + \frac{31}{2048} r_i l_i^2 + \frac{49}{2048} r_{i+1} l_i^2 + \frac{11}{128} t_i l_i^2 + \\
 & + \frac{3}{2} K t_{i,1} \phi_{i+1,1} - 3 \frac{K t_{i,1}}{l_i} \delta_i + 3 \frac{K t_{i,1}}{l_i} \delta_{i+1} \tag{III.34}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo III.23 y III.34 en III.33 y reduciendo:

$$\frac{l_i^2}{48(EI)t_{i,1}} \left[ \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{8} - \frac{31}{2048} r_i l_i^2 - \frac{49}{2048} r_{i+1} l_i^2 - \frac{11}{128} t_i l_i^2 - \right.$$

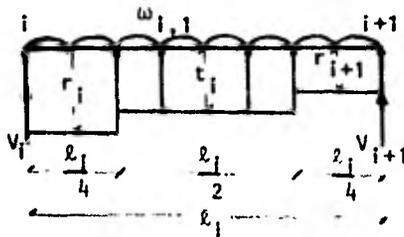
$$\begin{aligned}
& - \frac{3}{2} Kt_{i,1} \phi_{i+1,1} + 3 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_i - 3 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_{i+1} \Big] - \frac{\omega_{i,1} l_i^4}{128(EI)t_{i,1}} + \\
& + \frac{l_i^2}{48(EI)t_{i,1}} \left[ \frac{7}{32} r_i l_i^2 + \frac{1}{4} t_i l_i^2 + \frac{1}{32} r_{i+1} l_i^2 \right] - \frac{5}{6144(EI)t_{i,1}} r_i l_i^4 - \\
& - \frac{1}{1024(EI)t_{i,1}} r_i l_i^4 - \frac{1}{1536(EI)t_{i,1}} r_i l_i^4 - \frac{1}{6144(EI)t_{i,1}} t_i l_i^4 + \\
& + \delta_i - \zeta_i - \frac{1}{4} \phi_{(i,1)d} l_i = 0 \tag{III.35}
\end{aligned}$$

Aplicando  $Kt_{i,1} = \frac{(EI)t_{i,1}}{l_i}$  en III.35 y reduciendo:

$$\begin{aligned}
& Kt_{i,1} \phi_{(i,1)d} + \frac{Kt_{i,1}}{8} \phi_{i+1,1} - \frac{17Kt_{i,1}}{4l_i} \delta_i + \frac{Kt_{i,1}}{4l_i} \delta_{i+1} + \frac{4Kt_{i,1}}{l_i} \zeta_i - \\
& - \frac{59l_i^2}{8192} r_i - \frac{5l_i^2}{8192} r_{i+1} - \frac{5l_i}{384} t_i = - \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{48} \tag{III.36}
\end{aligned}$$

### III.4.3 TRABE CON APOYOS ARTICULADOS

Las figuras III.10.a y III.10.b indican, respectivamente, el diagrama de cuerpo libre de la viga y su configuración de deformaciones.



(a) Diagrama de cuerpo libre de la trabe  $i,1$

(b) Notación empleada para la deformación

Figura III.10: caso de una trabe con apoyos articulados.

El diagrama de momento flexionante total actuando sobre la viga será la suma algebraica de los diagramas debidos a:

- a. La carga  $w_{i,1}$
- b. Las cargas  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$

Evidentemente, la viga bajo análisis es isostática y los diagramas de momento flexionante debidos a  $w_{i,1}$  y  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$  son idénticos a los de los diagramas III.2 y III.3 en ese orden.

Las condiciones a que quedará sujeta la viga conjugada en cuestión serán como sigue:

- a. Los apoyos articulados de la viga real permanecerán articulados en la viga conjugada.
- b. La viga conjugada estará sujeta a los diagramas de carga III.2.b y III.3.b.
- c. Los desplazamientos y giros a que se verán sujetos los apoyos de la estructura deberán tomarse en cuenta en forma de momentos y fuerzas en ese orden, en los extremos de las trabes de la cimentación. Esto se debe a que el método de análisis empleado es el de la viga conjugada.

Por otra parte, al igual que en el caso III.4.2.2, la viga conjugada del caso presente también tiene su extremo I articulado, por lo que hay que recordar que eso da lugar a la aparición de la reacción  $R_i$ , cuyo significado y tratamiento pueden consultarse en la sección correspondiente del caso III.4.2.2 (fig. III.9).

- d. La viga conjugada se estudiará únicamente de su extremo I a su punto medio  $i'$ , por ser este último el que atrae nuestro interés. Esta situación puede apreciarse gráficamente en la figura III.9.
- e. Si el grupo de barras del que forma parte la barra doblemente articulada

$i - i+1$  es sometido a un sistema aleatorio de cargas, los giros que se presentarán a la derecha y a la izquierda de los apoyos  $i$  e  $i+1$ , respectivamente, serán en general distintos entre sí. Al aislarse la citada barra, los giros que se considerarán entonces ligados a ella, deberán ser los que se encuentran a la derecha e izquierda de sus apoyos  $i$  e  $i+1$ , en ese orden.

Es conveniente aclarar, sin embargo, que únicamente el primero de estos giros será el que intervendrá en el planteamiento de la ecuación correspondiente a este punto, por ser el que se localiza a la izquierda del punto medio  $i'$  de la barra.

Utilizando las condiciones anteriores, procedemos ahora a tomar momentos respecto al punto  $i'$  con la convención (+):

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{(EI)t_{i,1}} \left[ \frac{\omega_i l_i^2}{8} \times \frac{l_i}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{l_i}{2} \right] + \frac{1}{(EI)t_{i,1}} \left[ \frac{1}{2} \times \frac{V_i' l_i}{2} \times \frac{l_i}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{2} - \right. \\
 & - \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{4} \times \frac{r_i l_i^2}{32} \left( \frac{l_i}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{l_i}{4} \right) - \frac{l_i}{4} \times \frac{r_i l_i^2}{32} \times \frac{1}{2} \times \frac{l_i}{4} - \frac{l_i}{4} \times \frac{r_i l_i^2}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{4} - \\
 & \left. - \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{4} \times \frac{t_i l_i^2}{32} \times \frac{1}{4} \times \frac{l_i}{4} \right] + \delta_i - \zeta_i - \frac{\phi(i,1)d}{2} \times \frac{l_i}{2} = 0 \quad (111.37)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo 111.23 en 111.37, utilizando  $Kt_{i,1} = \frac{(EI)t_{i,1}}{l_i}$  y reduciendo, llegamos finalmente a:

$$\begin{aligned}
 Kt_{i,1} \phi(i,1)d - 4 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \delta_i + 4 \frac{Kt_{i,1}}{l_i} \zeta_i - \frac{13 l_i^2}{1536} r_i - \frac{l_i^2}{384} r_{i+1} - \\
 - \frac{31 l_i^2}{1536} t_i = - \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{32} \quad (111.38)
 \end{aligned}$$

### III.5 EQUILIBRIO DE FUERZAS VERTICALES

A continuación obtendremos la ecuación relativa al equilibrio de fuerzas verticales en la estructura. Observando la figura 11.1.a, si llamamos  $n$  al número de columnas y  $q$  al número de pisos, fácilmente llegamos a determinar que:

$$\frac{l_1}{4} r_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \left( \frac{l_{i-1}}{4} + \frac{l_i}{4} \right) r_i + \frac{l_{n-1}}{4} r_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{l_i}{2} t_i = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^q l_i w_{i,j}$$

Ordenando adecuadamente la expresión anterior, tenemos que:

$$l_1 r_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (l_{i-1} + l_i) r_i + l_{n-1} r_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} l_i t_i = 4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^q l_i w_{i,j} \quad (111.39)$$

### III.6 CALCULO DE LOS HUNDIMIENTOS DEL SUELO<sup>2</sup>

En todas las ecuaciones que hemos etiquetado como definitivas en los incisos anteriores, (111.16, 111.18, 111.21, 111.22, 111.28, 111.32, 111.36, 111.38 y 111.39), encontramos que tenemos como incógnitas los doblegiros  $\phi_{i,j}$ , los desplazamientos bajo las columnas  $\delta_i$ , los desplazamientos bajo la mitad de las crujeas  $\zeta_i$  y las reacciones del terreno  $r_i$  y  $t_i$ .

En este inciso estableceremos las expresiones que permiten obtener los desplazamientos del suelo  $\delta_i$  y  $\zeta_i$  en función de las cargas  $r_i$  y  $t_i$ , llevando a cabo un análisis de hundimientos del terreno. Para este análisis requeriremos un diagrama de cuerpo libre del terreno, en el que se indiquen las acciones de la estructura sobre el mismo. La figura 11.1 muestra gráficamente la posición de los

desplazamientos verticales del suelo  $\delta_i$  y  $\zeta_i$  y las reacciones del terreno  $r_i$  y  $t_i$ . Para poner los primeros en función de las segundas, haremos un cambio de notación, llamando  $q_i$  a las fuerzas y  $\eta_i$  a los desplazamientos. Al respecto puede consultarse la figura III.12 y puede verse que el cambio de variable está dado por:

$$\delta_i = \eta_{2i-1} ; \zeta_i = \eta_{2i} \quad \text{con } i=1,2,\dots,n$$

$$r_i = q_{2i-1} ; t_i = q_{2i} \quad \text{con } i=1,2,\dots,n$$

siendo  $n$  el número de columnas de la estructura.

El cambio de variable tiene como único objeto el de simplificar la secuencia de cálculo que estamos por establecer.

A continuación calcularemos los desplazamientos  $\eta_i$  en función de las cargas, para la estratigrafía y propiedades del subsuelo mostradas también en la figura III.12.b: la deformación del estrato  $j$ , bajo la carga  $q_i$ , es decir, la deformación del "cuadro"  $i,j$ , debida a una carga repartida colocada con centro en  $r$ ,  $q_r$ , valdrá:

$$\psi_{(i,j)r} = m_{v,i,j} H_j (\Delta T)_{(i,j)r}, \quad \text{en donde:}$$

$$\psi_{(i,j)r} = \text{deformación del "cuadro" } i,j \text{ debida a una carga repartida colocada con centro en } r(q_r).$$

$m_{v,i,j}$  = módulo de deformación del "cuadro"  $i,j$ , determinado para la condición de esfuerzos y tiempo correspondientes al análisis que se está realizando.

$H_j$  = espesor del estrato  $j$ .

$(\Delta T)_{(i,j)r}$  = incremento del esfuerzo normal vertical en el "cuadro"  $i,j$ , debido a la presión  $q_r/b_r$  en el contacto cimentación-suelo.

$b_r$  = ancho de la cimentación, correspondiente a la carga  $q_r$ .

Por otro lado:

$$(\Delta T)_{(i,j)r} = I_{(i,j)r} \frac{q_r}{b_r}, \text{ siendo:}$$

$I_{(i,j)r}$  = valor de influencia en el cuadro  $i,j$ , debido a una presión unitaria colocada en  $r$ . El valor de  $I_{(i,j)r}$  se puede determinar calculando el esfuerzo que ocasiona una presión unitaria en el área  $a_r$  (correspondiente a la carga  $q_r$ ), sobre el cuadro  $i,j$ .<sup>6</sup>

En nuestro caso, dichos valores llegarán a conocerse a partir del uso de la expresión de Boussinesq para carga uniformemente distribuida sobre una superficie rectangular,<sup>3</sup> dada por:

$$\sigma_z = \frac{\omega}{4\pi} \left[ \frac{2xyz(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{z^2(x^2+y^2+z^2)+x^2y^2} \cdot \frac{x^2+y^2+2z^2}{x^2+y^2+z^2} + \text{ang. tan} \frac{2xyz(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{z^2(x^2+y^2+z^2)-x^2y^2} \right] \quad (111.40)$$

donde  $\sigma_z$  es el esfuerzo bajo una esquina de la superficie cargada y a una profundidad  $z$ ,  $\omega$  es la carga por unidad de área y  $x$  y  $y$  son las dimensiones de la superficie rectangular sujeta a la carga. Para mayor claridad puede consultarse la figura 111.11.

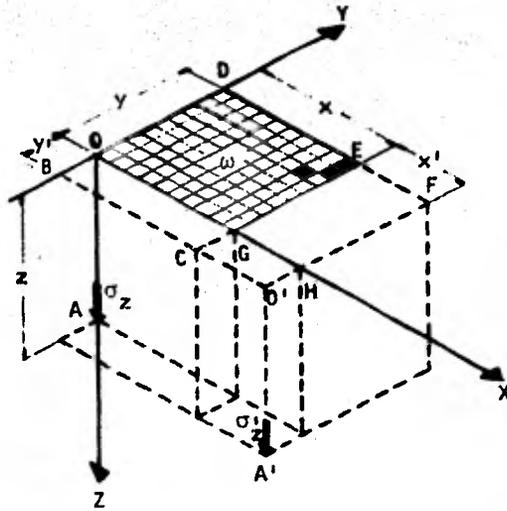


Figura III.11: distribución de esfuerzos bajo una superficie rectangular uniformemente cargada.

Si en la ecuación III.40 dividimos ambos miembros por  $\omega$ , adoptamos los parámetros  $m$  y  $n$ , tales que  $m = \frac{x}{z}$  y  $n = \frac{y}{z}$  (intercambiables), y recordamos que para nuestro caso la carga uniforme  $\omega$  es unitaria, podemos establecer la siguiente expresión:

$$if = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{2mn(m^2+n^2+1)^{1/2}}{(m^2+n^2+1)+m^2n^2} \cdot \frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} + \text{ang. tan} \frac{2mn(m^2+n^2+1)^{1/2}}{(m^2+n^2+1) - m^2n^2} \right] \quad (III.41)$$

La ecuación III.41 es adimensional y permite calcular el valor de influencia  $if$  bajo una esquina de la superficie cargada y a una profundidad dada.

Debe notarse que el sistema coordenado base es tal que su origen coincide precisamente con la esquina del área rectangular uniformemente cargada. Esto significa que si se desean calcular los esfuerzos bajo otro punto, tal como el A' de la figura III.11, podrá procederse haciendo sustracciones y adiciones convenientes al área cargada. Por ejemplo, en el caso del punto A', podría calcularse el  $if''$  correspondiente al área hipotética BO'FD; después los  $if'''$  e  $if^{IV}$  substractivos correspondientes a las áreas BO'H0 y CO'FE, debiendo tenerse en cuenta que al hacer estas sustracciones, el área CO'HG se restó del total inicial dos veces, por lo que será necesario calcular el valor de influencia  $if^V$  por ella producido y tomarlo como aditivo una vez. El valor de influencia  $if'$  deseado será:

$$if' = if'' - if''' - if^{IV} + if^V.^3$$

Integrando las ideas anteriores, la deformación del cuadro  $i, j$  debida a todas las cargas  $q_r$  será:

$$\eta_{i,j} = mv_{i,j} H_j \sum_{r=1}^m I(i,j)_r \frac{q_r}{b_r}, \text{ en donde}$$

$m=2n-1$  es el número total de cargas repartidas aplicadas en la superficie del terreno (fig. III.12.a).

Ahora bien, llamando  $p$  al número de estratos del subsuelo, el hundimiento bajo el punto  $i$  valdrá:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^p \eta_{i,j}, \text{ es decir}$$

$$\eta_i = \sum_{j=1}^p mv_{i,j} H_j \sum_{r=1}^m I(i,j)_r \frac{q_r}{b_r} \quad (III.42)$$

En la ecuación III.42, los hundimientos del terreno han quedado como una función lineal de las cargas  $q_r$ .

Por otra parte, es importante en este momento hacer notar que los valores del módulo de deformación del suelo  $m_{v_{i,j}}$  en la expresión III.42, dependen del esfuerzo de confinamiento, el cual no se conoce a priori. Por esta razón, los  $m_{v_{i,j}}$  deben determinarse para un nivel de esfuerzos lo más cercano posible a la realidad,<sup>6</sup> dependiendo este nivel de la experiencia del ingeniero que realiza el análisis. Si posteriormente se ve que el nivel de presiones considerado en el primer análisis está muy alejado de la magnitud de los esfuerzos obtenidos después de resolver todo el problema, es probable que haya necesidad de volver a calcular los hundimientos del suelo con los valores corregidos del módulo al tomar un nuevo nivel de esfuerzos.

Una vez que hemos valuado  $\eta_i$  con la expresión III.42, lo que nos interesa ahora es llegar a determinar la magnitud de los desplazamientos  $\delta_i$  y  $\zeta_i$ . Para ello, recurrimos a las siguientes transformaciones:

$$q_{2i-1} = r_i \quad \text{con } i=1,2,\dots,n \quad (\text{III.43})$$

$$q_{2i} = t_i$$

y

$$\eta_{2i-1} = \delta_i \quad \text{con } i=1,2,\dots,n \quad (\text{III.44})$$

$$\eta_{2i} = \zeta_i$$

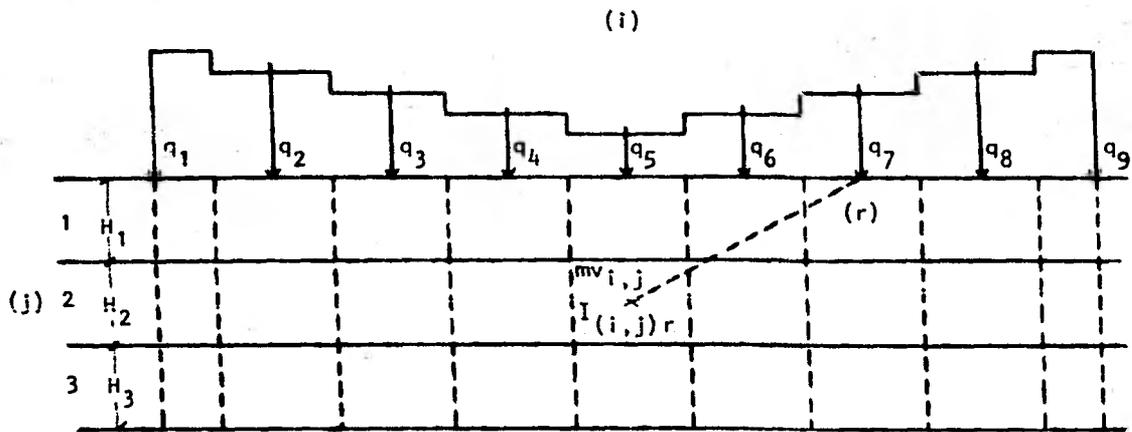
De esta manera, los hundimientos del terreno  $\delta_i$  y  $\zeta_i$  quedarán en función lineal de las reacciones  $r_i$  y  $t_i$ .

Las expresiones que se obtienen de aplicar las ecuaciones III.42, III.43 y III.44, se sustituyen en las ecuaciones que hemos catalogado como definitivas en los incisos anteriores, (III.16, III.18, III.21, III.22, III.28, III.32, III.36, III.38, III.39). Al proceder de esta manera, estamos

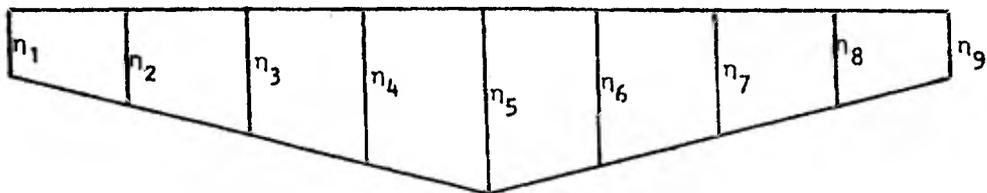
generando un sistema de ecuaciones en el que desaparecen como incógnitas los desplazamientos y quedan por conocerse únicamente los doblegiros en los nudos  $i, j$  y las reacciones  $r_i$  y  $t_i$ . Siendo el número de incógnitas igual al número de ecuaciones del sistema, pueden entonces llegar a valuarse los doblegiros y las reacciones. Utilizando luego las ecuaciones III.42 a III.44, ya conocidas  $r_i$  y  $t_i$ , se pueden también determinar los hundimientos del terreno.

En resumen, atendiendo al párrafo anterior, resulta evidente que el método de interacción suelo-estructura ha sido planteado de tal manera que determina, como resultados finales, los ya citados doblegiros, efectos del terreno sobre la estructura y hundimientos. Estas ideas significan también que el cálculo de los elementos mecánicos, cuyo conocimiento es fundamental para los fines de la Ingeniería Civil, tendrá todavía que implementarse a partir de la solución que nos brinda el método en cuestión. Afortunadamente, los momentos sobre los nudos pueden llegar a conocerse fácilmente con el simple hecho de sustituir los resultados que hemos calificado como finales, en las ecuaciones de momentos que fueron planteadas en el subcapítulo III.2 y que forman parte del método mismo. En efecto, una vez conocidas las magnitudes de los doblegiros, de las reacciones del terreno y de los hundimientos, basta sustituir éstas en las ecuaciones III.9 y/o III.10 para el caso de trabes, y en las III.11 y/o III.12 si se trata de columnas, y los momentos en los nudos quedan determinados. Conocidos los momentos de esta manera, resta solo llegar a valuar las fuerzas cortantes y normales. Los cortantes se calculan a partir del diagrama de cuerpo libre de cada elemento estructural tomado por separado. Una vez conocidos aquellos, las fuerzas normales quedan automáticamente determinadas.

Solo sobra decir que si no hemos profundizado más en la descripción de la secuela anterior, es porque ésta es bien conocida por el ingeniero civil. Además, si procediéramos de otra forma no estaríamos siendo congruentes con los objetivos del presente trabajo.



(a) Cargas, estratigrafía y propiedades;  $m$ =número total de cargas;  $p$ =número total de estratos.



(b) Desplazamientos verticales

Figura 111.12: determinación de los desplazamientos verticales o hundimientos del terreno.

### III.7 ECUACION AUXILIAR DE EQUILIBRIO DE MOMENTOS EN LAS VIGAS CONJUGADAS DE LA CIMENTACION

Reflexionando un poco sobre el método que hemos venido desarrollando para generar un sistema de ecuaciones que nos permita resolver el problema que nos hemos planteado, podemos darnos cuenta de varios aspectos interesantes e importantes, a saber:

- a. Para el caso de una barra con un nudo articulado, el momento final en el nudo continuo es independiente del giro en el extremo articulado, por lo que dicho giro no aparece como incógnita en las ecuaciones de equilibrio de momentos. Esto es evidente si tenemos en mente que para una barra  $i-j$  con su nudo  $i$  articulado y su nudo  $j$  continuo, el momento en  $j$  es:

$$M_j = M_j^e + \frac{3EI}{l} \theta_j + \frac{3EI}{l^2} \Delta_{ij}.$$

- b. Puesto que los giros que aparecen en la ecuación de equilibrio de fuerza cortante en la cruzja  $i$  provienen de las expresiones planteadas para evaluar los momentos en nudos continuos, dicha ecuación tampoco presenta como incógnitas los giros en nudos articulados.
- c. La ecuación del desplazamiento  $\zeta_i$  en la cimentación a la mitad de la cruzja  $i$ , como su nombre lo indica, se plantea exclusivamente para las trabes de la cimentación; el efecto del hundimiento del terreno sobre la subestructura provoca la aparición de desplazamiento y giros en los nudos de la cimentación, sean éstos continuos o articulados, que deben tomarse en cuenta al plantear la ecuación a la que nos referimos al principio de este inciso. En caso de tratarse de nudos articulados, ya en el

subcapítulo III.4 establecimos que el único giro que aparece en la ecuación de desplazamiento correspondiente, es el que actúa a la derecha del apoyo i.

- d. Las ecuaciones resultantes de considerar el equilibrio de fuerzas verticales y el análisis de hundimientos no toman en cuenta los giros en los nudos de la estructura.

El planteamiento original del método de interacción suelo-estructura para análisis, fue desarrollado para el caso de estructuras que presenten todos sus nudos continuos<sup>2</sup>, de modo que, basándonos en los cuatro incisos que acabamos de exponer, es interesante establecer las alteraciones que se suscitan en el método original como consecuencia de la presencia de articulaciones en algunos nudos de la estructura. Atendiendo a lo dicho en los incisos a, b, c y d, resulta que los giros en los nudos articulados de la superestructura no intervienen como incógnitas en la solución del problema; este hecho no significa que en un momento dado el número de incógnitas vaya a ser menor que el de ecuaciones disponibles, puesto que cada nudo articulado implica también el no poder plantear la condición de equilibrio de momentos y por lo tanto contar con una ecuación de menos. El número de ecuaciones y de incógnitas sigue pues manteniéndose igual. Las complicaciones aparecen al analizar los nudos de la subestructura, en caso de que alguno de ellos sea articulado. Esto se debe a lo siguiente: supongamos que la trabe  $i - i+1$  presenta su nudo i articulado; sabemos automáticamente que en él no podemos plantear la condición de equilibrio de momentos, por lo que contaremos con una ecuación de menos. Sin embargo, a diferencia de que los giros en los nudos articulados de la superestructura no representan

incógnitas, el giro a la derecha en el nudo  $i$  de la cimentación, tal como lo indica el inciso c, si aparece como incógnita en la ecuación del desplazamiento  $\zeta_i$  a la mitad de la cruzja  $i$ . Hasta este punto, entonces, hemos llegado a determinar que si el nudo  $(i,1)$  es articulado,  $\phi_{(i,1)d}$  provoca que el número de incógnitas sobrepase en uno al número de ecuaciones.

Siguiendo esta misma línea, el problema aparentemente se complica aún más si el nudo  $(i+1,1)$  es también articulado, pues el giro  $\phi_{(i+1,1)izq}$  viene a añadirse como incógnita. En realidad, el hecho de haber planteado la ecuación del desplazamiento  $\zeta_i$  analizando solamente la mitad izquierda de la viga conjugada correspondiente, evita que el giro  $\phi_{(i+1,1)izq}$  intervenga como incógnita en el citado planteamiento. En resumen, solo el giro  $\phi_{(i,1)d}$  representa una incógnita extra que habrá que absorber a través del establecimiento de una ecuación adicional. Ya en el título de este punto hemos dejado ver que dicha ecuación adicional la obtendremos al plantear el equilibrio de momentos respecto al nudo  $i+1$  de la viga conjugada  $i - i+1$  de la cimentación, siempre que el nudo  $i$  sea articulado. Por lo que respecta al nudo  $i+1$ , es bueno tener en mente que éste puede ser continuo o articulado, porque tal situación influye en la forma del correctivo y da lugar a dos casos por analizar.

Finalmente, es bueno aclarar que la razón por la que hemos calificado como auxiliar a la ecuación en cuestión, es la de que solamente recurriremos a ella en caso de que el nudo  $(1,1)$ , obviamente de la cimentación, sea articulado.

### III.7.1 TRABE DE LA CIMENTACION CON SU APOYO $i$ ARTICULADO Y SU APOYO $i+1$ CONTINUO

La trabe a la que nos estamos refiriendo en el título estará sujeta a las condiciones indicadas por la figura III.13:

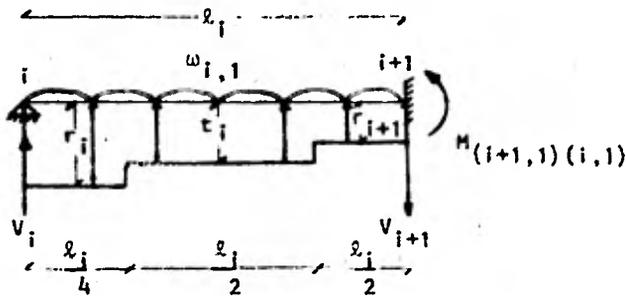


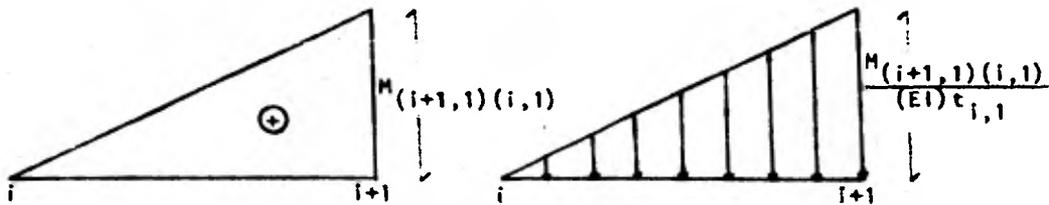
Figura III.13: diagrama de cuerpo libre de la trabe  $i,1$ , con su apoyo  $i$  articulado y su apoyo  $i+1$  continuo.

Procediendo de manera enteramente similar a la que utilizamos para el desarrollo de la ecuación del desplazamiento  $\zeta_i$  en la cimentación (subcapítulo III.4), tenemos ahora que el diagrama de momento flexionante total actuando sobre la viga, será la suma algebraica de los diagramas debidos a:

- La carga  $w_{i,1}$
- Las cargas  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$
- El momento  $M_{(i+1,1)(i,1)}$

Los diagramas debidos a  $\omega_{i,1}$ ,  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$  los calcularemos para una viga simplemente apoyada, y utilizaremos el debido a  $M_{(i+1,1)}(i,1)$  como correctivo. Dado que estaremos trabajando sobre vigas conjugadas, tendremos que dividir los diagramas de momento flexionante anteriores por  $EI$ , con objeto de transformarlos en diagramas de carga.

Los diagramas III.6, III.7 y III.8 muestran gráficamente la explicación que acabamos de desarrollar en las líneas superiores:



(a) Momento

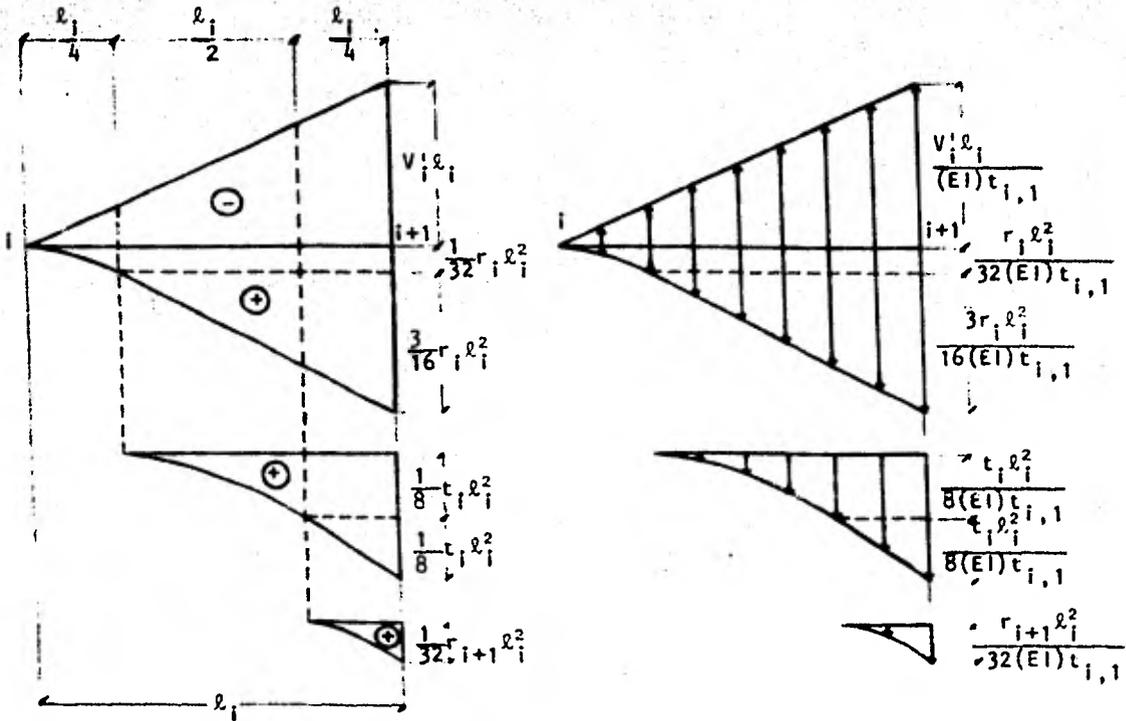
(b) Carga

Diagrama III.6: diagrama correctivo debido a  $M_{(i+1,1)}(i,1)$ .

De acuerdo con la ecuación III.34, el valor del correctivo es:

$$M_{(i+1,1)}(i,1) = - \frac{\omega_{i,1} l_i^2}{8} + \frac{31}{2048} r_i l_i^2 + \frac{49}{2048} r_{i+1} l_i^2 +$$

$$+ \frac{11}{128} t_i l_i^2 + \frac{3}{2} K t_{i,1} \phi_{i+1,1} - 3 \frac{K t_{i,1}}{l_i} \delta_i + 3 \frac{K t_{i,1}}{l_i} \delta_{i+1}$$

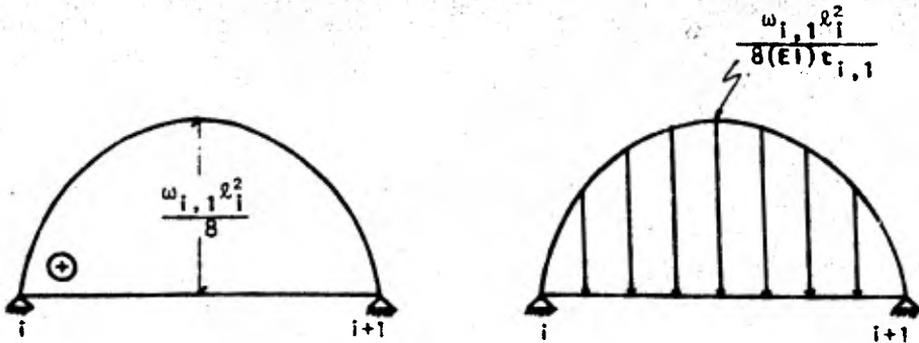


(a) Momento

(b) Carga

Diagrama 111.7: diagramas debidos a  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$ , sobre una viga simplemente apoyada.

De la ecuación 111.23, sabemos que  $V_{i+1}' = \frac{1}{l_i} \left( \frac{7}{32} r_i l_i^2 + \frac{1}{4} t_i l_i^2 + \frac{1}{32} r_{i+1} l_i^2 \right)$



(a) Momento

(b) Carga

Diagrama III.8: diagramas debidos a  $w_{i,1}$  en una viga simplemente apoyada.

Resumiendo, las condiciones a que estará sujeta la viga conjugada bajo estudio serán:

- El apoyo continuo de la viga real corresponde a un extremo libre en la viga conjugada, mientras que el apoyo articulado permanece inalterado.
- La viga conjugada estará sujeta a los diagramas de carga III.6.b, III.7.b y III.8.b.
- Los desplazamientos y giros a que estarán sujetos los apoyos de la estructura deberán tomarse en cuenta en forma de momentos y fuerzas, respectivamente, al emplearse el método de la viga conjugada para analizar las traveses de la cimentación. Además, siendo el apoyo I articulado, aparece en ese punto la reacción  $R_1$ , cuyo significado y tratamiento pueden consultarse en la sección correspondiente del caso III.4.2.2

(fig. III.9). La figura III.14 muestra gráficamente las ideas expresadas en el inciso c.

- d. La barra bajo estudio  $i - i+1$  presenta su extremo  $i$  articulado y además forma parte de un sistema de barras. Al someter las barras a un estado de carga, los giros a los lados del apoyo  $i$  serán, en general, distintos uno de otro. Como la barra  $i - i+1$  deberá aislarse para su estudio, el giro que se ligará a su apoyo  $i$  será, evidentemente, el que actúa a la derecha del mismo.



Figura III.14: desplazamientos y giros en la viga conjugada para el caso del apoyo  $i$  articulado e  $i+1$  continuo.

Valléndonos de los conceptos anteriores, hacemos ahora  $\sum M_{i+1} = 0$ , con la convención (+) :

$$\frac{1}{EI} \left[ - \frac{M_{(i+1,1)}(i,1) l_i}{2} \times \frac{l_i}{3} + \frac{V_{i+1} l_i l_i}{2} \times \frac{l_i}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{r_i l_i^2}{32} \times \frac{l_i}{4} \left( \frac{1}{4} \times \frac{l_i}{4} + \frac{3}{4} l_i \right) - \right. \\ \left. - \frac{r_i l_i^2}{32} \times \frac{3}{4} l_i \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} l_i - \frac{1}{2} \times \frac{3}{16} r_i l_i^2 \times \frac{3}{4} l_i \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} l_i - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \times \frac{t_i l_i^2}{8} \times \frac{l_i}{2} \left( \frac{1}{4} \times \frac{l_i}{2} + \frac{l_i}{4} \right) - \frac{t_i l_i^2}{8} \times \frac{l_i}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{l_i}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{t_i l_i^2}{8} \times \frac{l_i}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{4} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \times \frac{r_{i+1} l_i^2}{32} \times \frac{l_i}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{l_i}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{\omega_{i+1} l_i^2}{8} \times l_i \times \frac{l_i}{2} \right] + \delta_i - \delta_{i+1} - \\ - \frac{\phi(i,1)d}{2} l_i = 0 \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow -\frac{\ell_i^2}{6EI} \left[ -\frac{\omega_{i,1} \ell_i^2}{8} + \frac{31}{2048} r_i \ell_i^2 + \frac{49}{2048} r_{i+1} \ell_i^2 + \frac{11}{128} t_i \ell_i^2 + \right. \\
& + \frac{3}{2} K t_{i,1} \phi_{i+1,1} - 3 \frac{K t_{i,1}}{\ell_i} \delta_i + 3 \frac{K t_{i,1}}{\ell_i} \delta_{i+1} \left. \right] + \frac{\ell_i^2}{6EI} \left[ \frac{7}{32} r_i \ell_i^2 + \right. \\
& + \frac{1}{4} t_i \ell_i^2 + \frac{1}{32} r_{i+1} \ell_i^2 \left. \right] + \frac{1}{EI} \left[ -\frac{13}{6144} r_i \ell_i^4 - \frac{9}{1024} r_i \ell_i^4 - \frac{9}{512} r_i \ell_i^4 - \right. \\
& - \frac{3}{384} t_i \ell_i^4 - \frac{t_i \ell_i^4}{768} - \frac{r_{i+1} \ell_i^4}{6144} - \frac{\omega_{i,1} \ell_i^4}{24} \left. \right] + \delta_i - \delta_{i+1} - \\
& - \frac{\phi(i,1)d}{2} \ell_i = 0 \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{1}{EI} \left[ \frac{\omega_{i,1} \ell_i^4}{48} - \frac{31}{12288} r_i \ell_i^4 - \frac{49}{12288} r_{i+1} \ell_i^4 - \frac{11}{768} t_i \ell_i^4 - \right. \\
& - \frac{1}{4} K t_{i,1} \phi_{i+1,1} \ell_i^2 + \frac{1}{2} K t_{i,1} \delta_i \ell_i - \frac{1}{2} K t_{i,1} \delta_{i+1} \ell_i + \frac{7}{192} r_i \ell_i^4 + \\
& + \frac{1}{24} t_i \ell_i^4 + \frac{1}{192} r_{i+1} \ell_i^4 - \frac{13}{6144} r_i \ell_i^4 - \frac{9}{1024} r_i \ell_i^4 - \frac{9}{512} r_i \ell_i^4 - \frac{3}{384} t_i \ell_i^4 - \\
& - \frac{t_i \ell_i^4}{256} - \frac{t_i \ell_i^4}{768} - \frac{r_{i+1} \ell_i^4}{6144} - \frac{\omega_{i,1} \ell_i^4}{24} \left. \right] + \delta_i - \delta_{i+1} - \frac{\phi(i,1)d}{2} \ell_i = 0 \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{1}{EI} \left[ \frac{67}{12288} r_i \ell_i^4 + \frac{13}{12288} r_{i+1} \ell_i^4 + \frac{11}{768} t_i \ell_i^4 \right] - \frac{\phi(i,1)d}{2} \ell_i - \\
& - \frac{\phi_{i+1}}{4} \ell_i + \frac{3}{2} \delta_i - \frac{3}{2} \delta_{i+1} = \frac{\omega_{i,1} \ell_i^3}{48 K t_{i,1}} + \\
& \rightarrow K t_{i,1} \phi(i,1)d + \frac{K t_{i,1}}{2} \phi_{i+1,1} - \frac{3 K t_{i,1}}{\ell_i} \delta_i + \frac{3 K t_{i,1}}{\ell_i} \delta_{i+1} - \frac{67 \ell_i^2}{6144} r_i - \\
& - \frac{13 \ell_i^2}{6144} r_{i+1} - \frac{11 \ell_i^2}{384} t_i = - \frac{\omega_{i,1} \ell_i^2}{24} \quad (III.45)
\end{aligned}$$

### III.7.2 TRABE DE LA CIMENTACION CON AMBOS APOYOS ARTICULADOS

Las características de la trabe en cuestión y las acciones a las que está sujeta se indican en la figura III.15:

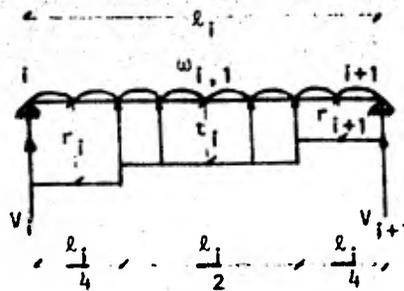


Figura III.15: diagrama de cuerpo libre de la trabe  $i,1$  con sus apoyos articulados

Utilizando nuevamente la secuela ya conocida, resulta ahora que el diagrama de momento flexionante total actuando sobre la viga, será la suma algebraica de los diagramas debidos a:

- a. La carga  $w_{i,1}$
- b. Las cargas  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$

Es claro que la viga  $i,1$  bajo análisis es isostática y que los diagramas de momento flexionante debidos a  $w_{i,1}$ ,  $r_i$ ,  $t_i$  y  $r_{i+1}$  son idénticos a los que muestran, respectivamente, los diagramas III.7 y III.8.

La viga conjugada en estudio quedará entonces sujeta a las siguientes condiciones:

- a. Siendo articulados los apoyos de la viga real, permanecen como tales en la conjugada.
- b. La viga conjugada estará sujeta a los diagramas de carga III.7.b y III.8.b.

c. Puesto que el método de análisis que estamos empleando es el de la viga conjugada, los desplazamientos y giros a que se verán sujetos los apoyos de la estructura deberán tomarse en cuenta en forma de momentos y fuerzas, respectivamente, en los extremos de las trabes de la cimentación. Cabe recordar que los apoyos articulados  $i$  e  $i+1$  dan lugar a la aparición de las reacciones  $R_i$  y  $R_{i+1}$ , en ese orden, cuyo significado y tratamiento pueden consultarse en la sección correspondiente del caso III.4.2.2 (fig. III.9).

d. La barra  $i - i+1$  está doblemente articulada y forma parte de un sistema de barras. En general, cuando las barras se sujetan a un conjunto de cargas, los giros que ocurrirán a ambos lados de los apoyos  $i$  e  $i+1$ , respectivamente, diferirán uno del otro. Los giros que deberán considerarse ligados a los extremos de la barra en cuestión cuando ésta se aisle para su análisis, tendrán que ser los que actúan a la derecha e izquierda de los apoyos  $i$  e  $i+1$ , respectivamente.

En resumen, utilizando los diagramas de carga III.7.b y III.8.b y la figura III.14, procedemos a tomar momentos respecto al punto  $i+1$  con la convención (+) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \left[ \frac{V_i l_i^2}{2} \times \frac{l_i}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{r_i l_i^2}{32} \times \frac{l_i}{4} \left( \frac{1}{4} \times \frac{l_i}{4} + \frac{3}{4} l_i \right) - \frac{r_i l_i^2}{32} \times \frac{3}{4} p_i \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} l_i - \right. \\ & - \frac{1}{2} \times \frac{3}{16} r_i l_i^2 \times \frac{3}{4} l_i \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} l_i - \frac{1}{3} \times \frac{t_i l_i^2}{8} \times \frac{l_i}{2} \left( \frac{1}{4} \times \frac{l_i}{2} + \frac{l_i}{4} \right) - \\ & - \frac{t_i l_i^2}{8} \times \frac{l_i}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{l_i}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{t_i l_i^2}{8} \times \frac{l_i}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{l_i}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{r_{i+1} l_i^2}{32} \times \frac{l_i}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{l_i}{4} - \\ & \left. - \frac{2}{3} l_i \times \frac{\omega_i l_i^2}{8} \times \frac{1}{2} \times l_i \right] + \delta_i - \delta_{i+1} - \frac{\phi(i,1)d}{2} p_i = 0 \rightarrow \\ & + \frac{r_i^3}{6EI} \left[ \frac{7}{32} r_i l_i^2 + \frac{1}{4} t_i l_i^2 + \frac{1}{32} r_{i+1} l_i^2 \right] + \frac{1}{EI} \left[ - \frac{13 r_i l_i^4}{6144} - \frac{9 r_i p_i^4}{1024} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{9r_i \ell_i^3}{512} - \frac{3t_i \ell_i^4}{384} - \frac{t_i \ell_i^4}{256} - \frac{t_i \ell_i^4}{768} - \frac{r_{i+1} \ell_i^3}{6144} - \frac{\omega_{i,1} \ell_i^4}{24} \right] + \delta_i - \delta_{i+1} - \\
& - \frac{\phi(i,1)d}{2} \ell_i = 0 \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{1}{EI} \left[ \frac{49}{6144} r_i \ell_i^4 + \frac{31}{6144} r_{i+1} \ell_i^4 + \frac{11}{384} t_i \ell_i^4 \right] + \delta_i - \delta_{i+1} - \\
& - \frac{\phi(i,1)d}{2} \ell_i = \frac{\omega_{i,1} \ell_i^4}{24 EI} \rightarrow \\
& \rightarrow Kt_{i,1} \phi(i,1)d - 2 \frac{Kt_{i,1}}{\ell_i} \delta_i + 2 \frac{Kt_{i,1}}{\ell_i} \delta_{i+1} - \frac{49 \ell_i^2}{3072} r_i - \frac{31 \ell_i^2}{3072} r_{i+1} - \\
& - \frac{11 \ell_i^2}{192} t_i = - \frac{\omega_{i,1} \ell_i^2}{12} \quad (111.46)
\end{aligned}$$

Recalcando lo dicho en el último párrafo del subcapítulo 111.6, resulta ahora que las ecuaciones 111.45 y 111.46 deben añadirse a las ecuaciones 111.16, 111.18, 111.21, 111.22, 111.28, 111.32, 111.36, 111.38 y 111.39, catalogadas como definitivas, si así lo ameritan las características de la estructura bajo análisis. Es evidente que el resto de la explicación a que se refiere el citado párrafo del subcapítulo 111.6, también se aplica íntegramente a las expresiones 111.45 y 111.46.

Ya al inicio de este subcapítulo, comentamos que la utilización de la viga conjugada en las barras de la cimentación para plantear la ecuación auxiliar de equilibrio de momentos, tiene su origen en la necesidad de absorber la incógnita que representa el giro a la derecha del apoyo  $i,1$  ( $\phi(i,1)_{der}$ ), que resulta de establecer la ecuación de desplazamiento  $t_i$  para una barra de la cimentación con su extremo  $i$  articulado. Esto nos lleva a concluir que, para poder resolver la interacción suelo-estructura cuando el apoyo  $i$  de la cimentación es articulado, es necesario que el método que

hemos desarrollado íntegramente como incógnita el giro que ocurre a la derecha de dicho apoyo cuando la barra  $i - i+1$  se aísla para analizarse. Este hecho no deja de representar una característica particular del método, sobre todo si tomamos en cuenta que los nudos de la superestructura no se prestan a tal situación.

## IV

EJEMPLO DE APLICACION

A través de la solución de un ejemplo sencillo, este capítulo presenta en forma detallada la manera en que debe aplicarse el método desarrollado en el capítulo III. Se ha tenido buen cuidado de seleccionar un problema que, si bien elemental, sea también representativo, en el sentido de que permita utilizar ecuaciones de cada una de las condiciones analizadas en el capítulo anterior, y que no se preste a simplificaciones por simetría. En efecto, el marco que se ha seleccionado consta de una sola cruzija y un solo nivel, y presenta uno de sus nudos de la cimentación articulado.

Conviene añadir aquí que el introducir los efectos del terreno sobre la estructura en el análisis, como es nuestro caso, no solo provoca que el número de incógnitas que se genera sea mayor que aquel que resulta de aplicar los métodos convencionales, sino que, además, involucra la ejecución de diversos cálculos adicionales. Es fácil entender entonces que, de no ser por el auxilio de las computadoras, el método que hemos planteado en el presente trabajo no pasaría de un nivel puramente teórico, pues no podría competir eficazmente frente a los sistemas de solución usualmente empleados, los cuales simplifican todo el proceso estudiando la estructura y el suelo por separado.

Las ideas que acabamos de plantear en el párrafo anterior se harán patentes aún en el ejemplo que estudiaremos a continuación.

## IV.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La figura IV.1 muestra la geometría y situación en que se encuentra la estructura que vamos a resolver. El resto de los datos es como sigue: los elementos estructurales son todos y cada uno prismáticos, de sección constante y están hechos en concreto reforzado; la resistencia especificada del concreto a compresión es  $f'c = 250 \text{ Kg/cm}^2$ ; el módulo de elasticidad del concreto es  $E = 10000 \sqrt{f'c} \text{ Kg/cm}^2$ ; el momento de inercia de traveses y columnas es, respectivamente,  $I_t = 1.305 \times 10^6 \text{ cm}^4$  e  $I_c = 13.5 \times 10^4 \text{ cm}^4$ ; y la cimentación consiste en una losa con contratraveses de ancho tributario  $b$  constante e igual a 8m.

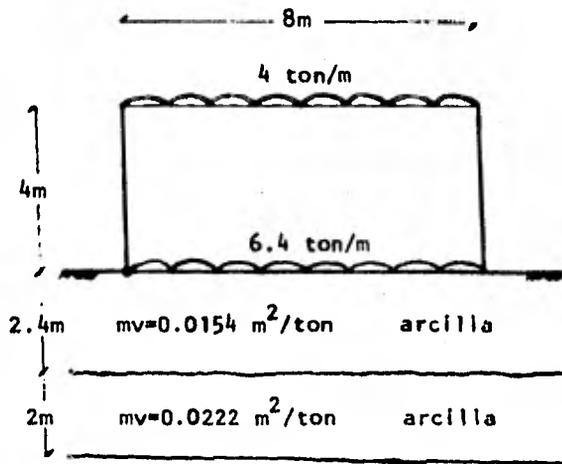


Figura IV.1: geometría y situación de la estructura en estudio. El módulo de deformación del suelo se identifica como  $mv$ .

Se trata entonces de una estructura reticular con elementos estructurales de rigidez constante cada uno, apoyada en un suelo de mediana

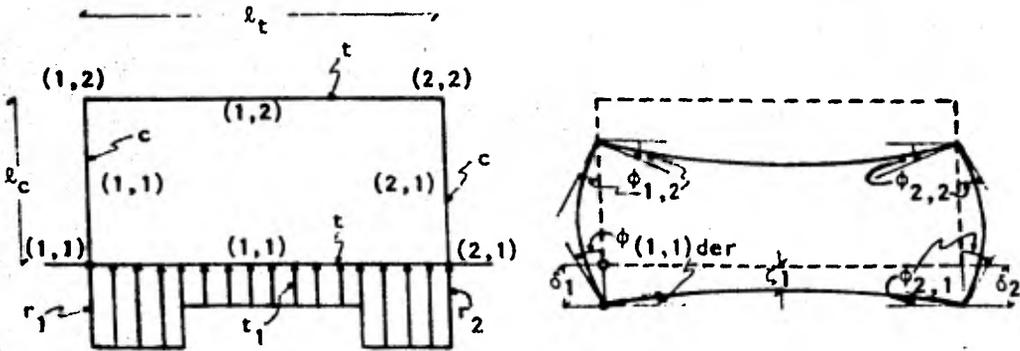
compresibilidad, cuya cimentación ha sido resuelta a base de una losa con contratabes. Debemos recordar que estas condiciones concuerdan con lo establecido al respecto en el capítulo II, y además permiten que el método en cuestión sea aplicable.

## IV.2 SOLUCION DEL PROBLEMA

Primero que nada se deberá tener en cuenta que el método de interacción suelo-estructura considerará como incógnitas los giros en los cuatro nudos de la estructura, y las reacciones del terreno y los hundimientos bajo los ejes de columnas y el centro de la cruz. El total de incógnitas será pues de diez y sus magnitudes quedarán determinadas a través de la solución del problema, para la cual se procederá como se indica a continuación: primero se establecerá la notación que se utilizará y se calcularán las rigideces; luego se definirán los coeficientes; después se plantearán las ecuaciones de lo siguiente: equilibrio de momentos en los nudos, equilibrio de fuerza cortante en la cruz, desplazamiento  $\zeta_1$  a la mitad de la cruz en la cimentación, equilibrio de fuerzas verticales, equilibrio de momentos en la viga conjugada de la cimentación puesto que el nudo (1,1) es articulado y hundimientos; en seguida se procederá a resolver el sistema de ecuaciones generado con objeto de obtener las magnitudes de los giros, de las reacciones del terreno y de los hundimientos; finalmente, conocidos los valores anteriores, se determinarán los elementos mecánicos.

#### IV.2.1 NOTACION Y CALCULO DE RIGIDECES

La figura IV.2 muestra la notación que se empleará para resolver el ejemplo.



(a) Identificación de elementos estructurales y reacciones.

(b) Doblegiros y hundimientos.

Figura IV.2: notación

$$\text{Rígidez de las traves : } K_t = \frac{EIt}{l_t} = \frac{10000 \sqrt{250} \times 1.305 \times 10^6}{800} \approx$$

$$\approx 2.579 \times 10^8 \text{ Kg}\cdot\text{cm} \approx 2579 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$\text{Rígidez de las columnas : } K_c = \frac{EIc}{l_c} = \frac{10000 \sqrt{250} \times 13.5 \times 10^4}{400} \approx$$

$$\approx 5.336 \times 10^7 \text{ Kg}\cdot\text{cm} \approx 534 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

#### IV.2.2 DEFINICION DE COEFICIENTES

Atendiendo a las características de los elementos estructurales y de los nudos, el capítulo III.1 nos indica los coeficientes y la magnitud de

los mismos que deben asociarse a cada uno de dichos nudos, a saber:

Nudo (1,1): dado que el nudo (1,1) es articulado, no se le asigna ningún coeficiente porque éstos fueron definidos partiendo de la base de que el nudo bajo análisis (i,j) debía ser continuo.

<u>Nudo (2,1)</u>	<u>Nudo (1,2)</u>	<u>Nudo (2,2)</u>
$\alpha l = 0.75$	$\alpha r = 1$	$\alpha d = 1$
$\beta l = 0$	$\beta r = 1$	$\beta d = 1$
$\gamma l = 0.5$	$\gamma r = 1$	$\gamma d = 1$
$\alpha u = 1$	$\alpha d = 0.75$	$\alpha d = 1$
$\beta u = 1$	$\beta d = 0$	$\beta d = 1$
$\gamma u = 1$	$\gamma d = 0.5$	$\gamma d = 1$
$\Omega l = 1.5$	$\Omega r = 1$	$\Omega d = 1$
$\rho l = 147/134$		
$\mu l = 93/26$		
$\nu l = 1.5$		

#### IV.2.3 EQUILIBRIO DE MOMENTOS EN LOS NUDOS

Aplicando la ecuación 111.16 al nudo (2,1) ( $i=2, j=1$ ) y sustituyendo los valores de las variables que ya definimos:

$$\begin{aligned}
 & 2 \left[ 0.75 (2579) + 534 \right] \phi_{2,1} + 534 \phi_{2,2} - 6 (0.5) \left( \frac{2579}{8} \right) \delta_1 + 6 (0.5) \left( \frac{2579}{8} \right) \delta_2 + \\
 & + \left( \frac{13}{3072} \right) \left( \frac{93}{26} \right) (8)^2 r_1 + \left( \frac{67}{3072} \right) \left( \frac{147}{134} \right) (8)^2 r_2 + \left( \frac{11}{92} \right) (1.5) (8)^2 t_1 = \\
 & = \left( \frac{1}{12} \right) (1.5) (6.4) (8)^2 \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$+ 4936.50 \phi_{2,1} + 534 \phi_{2,2} - 967.13 \delta_1 + 967.13 \delta_2 + 0.97 r_1 + 1.53 r_2 +$$

$$+ 5.50 t_1 = 51.20 \quad (IV.1)$$

Aplicando la ecuación III.18 al nudo (1,2) ( $i=1, j=2$ ) y sustituyendo las magnitudes ya conocidas:

$$2 \left[ 2579 + 0.75 (534) \right] \phi_{1,2} + 2579 \phi_{2,2} - 6 \left( \frac{2579}{8} \right) \delta_1 +$$

$$+ 6 \left( \frac{2579}{8} \right) \delta_2 = - \left( \frac{1}{12} \right) (4) (8)^2 \rightarrow$$

$$+ 5959 \phi_{1,2} + 2579 \phi_{2,2} - 1934.25 \delta_1 + 1934.25 \delta_2 = - 21.33 \quad (IV.2)$$

Aplicando la ecuación III.18 al nudo (2,2) ( $i=2, j=2$ ) y sustituyendo valores como en los casos anteriores:

$$2 \left[ 2579 + 534 \right] \phi_{2,2} + 2579 \phi_{1,2} + 534 \phi_{2,1} - 6 \left( \frac{2579}{8} \right) \delta_1 + 6 \left( \frac{2579}{8} \right) \delta_2 =$$

$$= \left( \frac{1}{12} \right) (4) (8)^2 \rightarrow$$

$$+ 6226 \phi_{2,2} + 2579 \phi_{1,2} + 534 \phi_{2,1} - 1934.25 \delta_1 + 1934.25 \delta_2 = 21.33 \quad (IV.3)$$

#### IV.2.4 EQUILIBRIO DE FUERZA CORTANTE EN LA CRUJIA

Utilizando la ecuación III.22 para definir el equilibrio de fuerza cortante en la crujía del marco ( $i=1$ ) y sustituyendo los valores ya determinados tenemos:

$$\left[ (2+1) (2579) \phi_{1,2} \right] + \left[ (2 \times 0.75) (2579) \phi_{2,1} + (2+1) (2579) \phi_{2,2} \right] -$$

$$- \left( \frac{6}{8} \right) \left[ (0.5) (2579) \delta_1 + (1+1) (2579) \delta_1 \right] + \left( \frac{6}{8} \right) \left[ (0.5) (2579) \delta_2 + \right.$$

$$\left. + (1+1) (2579) \delta_2 \right] - \frac{(8)^2}{3072} \left[ - 13 \left( \frac{93}{26} \right) + 672 \right] r_1 - \frac{(8)^2}{3072} \left[ 96 - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - 67 \left( \frac{147}{134} \right) r_2 - \frac{(8)^2}{192} \left[ 48 - 11 (1.5) \right] t_1 = \frac{(8)^2}{12} \left[ (1.5)(6.4) \right] - \\
 & - \frac{(8)^2}{2} (6.4 + 4) + \\
 & + 7737 \phi_{1,2} + 3868.50 \phi_{2,1} + 7737 \phi_{2,2} - 4835.63 \delta_1 + 4835.63 \delta_2 - \\
 & - 13.03 r_1 - 0.47 r_2 - 10.50 t_1 = - 281.60 \quad (IV.4)
 \end{aligned}$$

#### IV.2.5 DESPLAZAMIENTO $\zeta_1$ A LA MITAD DE LA CRUJIA EN LA CIMENTACION

Empleando la ecuación III.36 con  $i=1$ , después de sustituir las magnitudes conocidas llegamos a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 & 2579 \phi_{(1,1)d} + \left( \frac{2579}{8} \right) \phi_{2,1} - \left( \frac{17 \times 2579}{4 \times 8} \right) \delta_1 + \left( \frac{2579}{4 \times 8} \right) \delta_2 + \left( \frac{4 \times 2579}{8} \right) \zeta_1 - \\
 & - \left[ \frac{(59)(8)^2}{8192} \right] r_1 - \left[ \frac{(5)(8)^2}{8192} \right] r_2 - \left[ \frac{(15)(8)^2}{384} \right] t_1 = - \frac{(6.4)(8)^2}{48} + \\
 & + 2579 \phi_{(1,1)d} + 322.38 \phi_{2,1} - 1370.09 \delta_1 + 80.59 \delta_2 + 1289.50 \zeta_1 - 0.46 r_1 - \\
 & - 0.04 r_2 - 0.83 t_1 = - 8.53 \quad (IV.5)
 \end{aligned}$$

#### IV.2.6 EQUILIBRIO DE FUERZAS VERTICALES

La ecuación III.39 se refiere al equilibrio de fuerzas verticales en la estructura y para  $i=1$  se reduce a lo siguiente una vez que los valores conocidos se le aplican:

$$\begin{aligned}
 & 8 r_1 + 8 r_2 + 2 (8) t_1 = 4 (8) (6.4 + 4) + \\
 & + r_1 + r_2 + 2 t_1 = 41.6 \quad (IV.6)
 \end{aligned}$$

#### IV.2.7 EQUILIBRIO DE MOMENTOS EN LA VIGA CONJUGADA DE LA CIMENTACION

La ecuación III.45 se refiere a una viga con su apoyo  $i$  articulado y su apoyo  $i+1$  continuo, tal como es nuestro caso. Sustituyendo

valores en dicha ecuación con  $i=1$  tenemos:

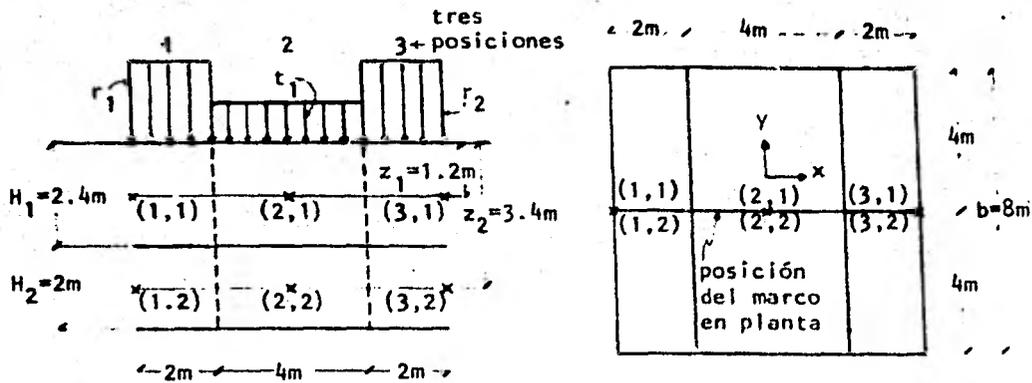
$$\begin{aligned}
 & 2579 \phi_{(1,1)d} + \left(\frac{2579}{2}\right) \phi_{2,1} - \left(\frac{3 \times 2579}{8}\right) \delta_1 + \left(\frac{3 \times 2579}{8}\right) \delta_2 - \left[\frac{67(8)^2}{6144}\right] r_1 - \\
 & - \left[\frac{13(8)^2}{6144}\right] r_2 - \left[\frac{11(8)^2}{384}\right] t_1 = - \frac{(6.4)(8)^2}{24} \rightarrow \\
 & + 2579 \phi_{(1,1)d} + 1289.50 \phi_{2,1} - 967.13 \delta_1 + 967.13 \delta_2 - 0.70 r_1 - \\
 & - 0.14 r_2 - 1.83 t_1 = - 17.07 \quad (IV.7)
 \end{aligned}$$

#### IV.2.8 HUNDIMIENTOS DEL SUELO

En este punto generaremos las ecuaciones que relacionan las reacciones del terreno con el hundimiento bajo cada eje de columna y al centro de la cruzía.

En la figura IV.3.a se indica el diagrama de cuerpo libre del suelo con la acción de la estructura sobre éste. También se señalan los puntos en los cuales se determinará la magnitud de los valores de influencia. Estos puntos se localizan bajo los ejes de columna y el centro de la cruzía y a la mitad de cada uno de los estratos en que se ha considerado dividido el suelo. Las reacciones han sido numeradas del 1 al 3 con objeto de identificar las distintas posiciones de carga que transmiten sus efectos a los puntos bajo análisis.

La figura IV.3.b muestra una planta de la cimentación en la que se han definido las áreas de influencia asociadas a las reacciones y la situación de los puntos de interés del terreno.



(a) Diagrama de cuerpo libre del suelo y puntos de interés.

(b) Planta de la cimentación.

Figura IV.3

En el subcapítulo III.6 establecimos que para plantear las ecuaciones relativas al análisis de hundimientos se requiere el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} q_1 &= r_1 & \eta_1 &= \delta_1 \\ q_2 &= t_1 & \eta_2 &= \zeta_1 \\ q_3 &= r_2 & \eta_3 &= \delta_2 \end{aligned}$$

El subcapítulo III.6 también nos exige el cálculo de los valores de influencia  $I_{i,j,k}$ , donde  $i, j$  indica el punto y  $k$  indica

la posición de la carga. Para facilitar este cálculo construiremos una tabla que constará de nueve columnas con los encabezados siguientes: la primera determinará el valor de los subíndices  $i, j, k$  que identificarán las posiciones del punto y de la carga bajo estudio, respectivamente; la segunda indicará la profundidad  $z$ , medida desde la superficie del terreno, a la que se encuentra el punto de interés; la tercera y la cuarta se emplearán para alojar las distancias  $x$  y  $y$ , en ese orden, que definirán el tamaño del o de las áreas cargadas que tengan que considerarse asociadas al punto analizado; la quinta y la sexta comprenderán los parámetros  $m$  y  $n$ , tales que  $m = \frac{x}{z}$  y  $n = \frac{y}{z}$  (intercambiables), respectivamente; la séptima se reservará para las magnitudes  $if$  que resulten de aplicar la expresión de Boussinesq (ecuación III.41), tantas veces como secciones de área cargada tengan que considerarse por así requerirlo la posición relativa a ellas del punto bajo análisis (para mayor detalle consultar el subcapítulo III.6); la octava se referirá al resultado de las adiciones o subtracciones de los valores de la columna anterior y se identificará como  $if'$ ; finalmente, la novena contendrá los valores de influencia  $I$  propiamente dichos, a los cuales se llegará multiplicando los resultados de la columna ocho por el número de veces que se repita la misma condición de área cargada sobre el punto en cuestión.

La tabla queda como sigue:

i,j,k	z (m)	x (m)	y (m)	m	n	if	if'	I
1,1,1	1.2	2	4	1.67	3.33	0.232961	0.232961	0.465922
1,1,2	1.2	6 2	4 4	5.00 1.67	3.33 3.33	0.246928 0.232961	0.013967	0.027934
1,1,3	1.2	8 6	4 4	5.67 5.00	3.33 3.33	0.247245 0.246928	0.000318	0.000635
1,2,1	3.4	2	2	0.59	1.18	0.140610	0.140610	0.281221
1,2,2	3.4	6 2	4 4	1.76 0.59	1.18 1.18	0.208696 0.140610	0.068086	0.136172
1,2,3	3.4	8 6	4 4	2.35 1.76	1.18 1.18	0.213296 0.208696	0.004600	0.009200
2,1,1	1.2	4 2	4 4	3.36 1.67	3.33 3.33	0.245470 0.232961	0.012509	0.25019
2,1,2	1.2	2	4	1.67	3.33	0.232961	0.232961	0.931844
2,1,3	1.2	4 2	4 4	3.33 1.67	3.33 3.33	0.245470 0.232961	0.012509	0.025019
2,2,1	3.4	4 2	4 4	1.18 0.58	1.18 1.18	0.193779 0.140610	0.053169	0.106337
2,2,2	3.4	2	4	0.58	1.18	0.140610	0.140610	0.562442
2,2,3	3.4	4 2	4 4	1.18 0.58	1.18 1.18	0.193779 0.140610	0.053169	0.106337
3,1,1	1.2	8 6	4 4	6.67 5.00	3.33 3.33	0.247245 0.246928	0.000318	0.000635
3,1,2	1.2	6 2	4 4	5.00 1.67	3.33 3.33	0.246928 0.232961	0.013967	0.027934
3,1,3	1.2	2	4	1.67	3.33	0.232961	0.232961	0.465922
3,2,1	3.4	8 6	4 4	2.35 1.76	1.18 1.18	0.213296 0.208696	0.004600	0.009200
3,2,2	3.4	6 2	4 4	1.76 0.59	1.18 1.18	0.208696 0.140610	0.068086	0.136172
3,2,3	3.4	2	4	0.59	1.18	0.140610	0.140610	0.281221

La labor del cálculo de los valores de influencia  $I$  es tediosa y toma tiempo considerable si se realiza a mano. El trabajo puede reducirse considerablemente si se emplea una calculadora programable de bolsillo sencilla, como puede ser la Hewlett-Packard 25, cuya capacidad de almacenaje se reduce a 50 pasos de programación, 7 registros y 4 memorias de tablero (stack). Si programamos una calculadora de este tipo con la expresión de Boussinesq (ecuación III.41), la determinación de los valores  $I$  se facilita grandemente.

A continuación se presenta la codificación de la ecuación III.41 para la calculadora mencionada:

DISPLAY		TECLA A OPRIMIR	STACK				COMENTARIOS	REGISTROS
LINEA	CLAVE		X	Y	Z	T		
00	////	////////	z	y	x		$R_0 = 4x$	
01	23 01	STØ 01	z	y	x		$R_1 = z$	
02	71	÷	n	x				
03	23 03	STØ 03	n	x			$R_3 = n$	
04	15 02	g x <sup>2</sup>	n <sup>2</sup>	x				
05	21	x ≥ y	x	n <sup>2</sup>	n <sup>2</sup>			
06	24 01	RCL 01	z	x				
07	71	÷	m	n <sup>2</sup>				
08	23 02	STØ 02	m	n <sup>2</sup>			$R_2 = m$	
09	15 02	g x <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	n <sup>2</sup>				
10	51	+	m <sup>2</sup> +n <sup>2</sup>					
11	01	1	1	m <sup>2</sup> +n <sup>2</sup>				
12	51	+	m <sup>2</sup> +n <sup>2</sup> +1					

DISPLAY		TECLA A OPRIMIR	STACK				COMENTARIOS	REGISTROS
LINEA	CLAVE		X	Y	Z	T		
13	23 04	STØ 04	$m^2+n^2+1$				$R_4 = m^2+n^2+1$	
14	14 02	f $\sqrt{x}$	$(m^2+n^2+1)^{1/2}$					
15	24 02	RCL 02	m	$(m^2+n^2+1)^{1/2}$				
16	24 03	RCL 03	n	m	$(m^2+n^2+1)^{1/2}$			
17	61	x	mn	$(m^2+n^2+1)^{1/2}$				
18	23 05	STØ 05	mn	$(m^2+n^2+1)^{1/2}$			$R_5 = mn$	
19	61	x	$mn(m^2+n^2+1)^{1/2}$					
20	02	2	2	$mn(m^2+n^2+1)^{1/2}$				
21	61	x	$2mn(m^2+n^2+1)^{1/2}$					
22	23 06	STØ 06	$V_1$			$V_1 = 2mn(m^2+n^2+1)^{1/2}$	$R_6 = V_1$	
23	24 05	RCL 05	mn	$V_1$				
24	15 02	g $x^2$	$m^2n^2$	$V_1$				
25	23 07	STØ 07	$m^2n^2$	$V_1$			$R_7 = m^2n^2$	

DISPLAY		TECLA A OPRIMIR	STACK				COMENTARIOS	REGISTROS
LINEA	CLAVE		X	Y	Z	T		
26	24 04	RCL 04	$m^2+n^2+1$	$m^2n^2$	$V_1$			
27	51	+	$m^2n^2+m^2+n^2+1$	$V_1$				
28	71	÷	$V_2$			$V_2 = \frac{V_1}{m^2+n^2+1+m^2n^2}$		
29	24 04	RCL 04	$m^2+n^2+1$	$V_2$				
30	01	1	1	$m^2+n^2+1$	$V_2$			
31	51	+	$m^2+n^2+2$	$V_2$				
32	24 04	RCL 04	$m^2+n^2+1$	$m^2+n^2+2$	$V_2$			
33	71	÷	$V_3$	$V_2$		$V_3 = \frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1}$		
34	61	x	$V_3 \times V_2$					
35	24 04	RCL 04	$m^2+n^2+1$	$V_3 \times V_2$				
36	24 07	RCL 07	$m^2n^2$	$m^2+n^2+1$	$V_3 \times V_2$			
37	41	-	$m^2n^2 - (m^2+n^2+1)$	$V_3 \times V_2$				
38	24 06	RCL 06	$V_1$	$m^2n^2 - (m^2+n^2+1)$	$V_3 \times V_2$			

DISPLAY		TECLA A OPRIMIR	STACK				COMENTARIOS	REGISTROS
LINEA	CLAVE		X	Y	Z	T		
39	21	$x \geq y$	$m^2 n^2 - (m^2 + n^2 + 1)$	$V_1$	$V_3 \times V_2$			
40	71	$\div$	$V_4$	$V_3 \times V_2$			$V_4 = \frac{V_1}{m^2 n^2 - (m^2 + n^2 + 1)}$	
41	15 06	$g \tan^{-1}$	$\tan^{-1} V_4$	$V_3 \times V_2$				
42	15 51	$g \times \geq 0$	$\tan^{-1} V_4$	$V_3 \times V_2$				
43	13 47	GTØ 46	$\tan^{-1} V_4$	$V_3 \times V_2$				
44	15 73	$g \pi$	$\pi$	$\tan^{-1} V_4$	$V_3 \times V_2$			
45	51	$+$	$\pi + \tan^{-1} V_4$	$V_3 \times V_2$				
46	51	$+$	$\tan^{-1} V_4 + V_3 \times V_2$				Si el programa pasa de la línea 43 a la 46	
			$\pi + \tan^{-1} V_4 + V_3 \times V_2$				Si el programa pasa de la línea 42 a la 44	
47	24 00	RCL 00	$4\pi$	$\tan^{-1} V_4 + V_3 \times V_2$ $\pi + \tan^{-1} V_4 + V_3 \times V_2$				
48	71	$\div$	if					

Es conveniente tener en mente las indicaciones siguientes:

- Para cargar el programa en la calculadora, ésta debe encontrarse en modo de programación, lo cual se logra deslizando el botón correspondiente a PRGM.
- Una vez que el programa ha terminado de cargarse, el botón del que hablamos en el punto a. debe correrse a modo de ejecución (RUN) y en seguida deben oprimirse las teclas  $GT\theta 00$  para que la calculadora inicie la ejecución en la primera instrucción.
- Luego se proporcionan los datos, a saber: primero debe guardarse el valor  $4\pi$  en el registro 0 ( $R_0$ ) y después deben teclarse las distancias  $x$  y darle entrada,  $y$  y darle entrada y la profundidad  $z$ .
- Finalmente, para correr el programa debe oprimirse la tecla marcada con R/S (RUN/STOP) y esperar a que aparezca en el DISPLAY el valor  $if$  relativo a los datos alimentados. Llamando los registros 2 y 3 ( $R_2$  y  $R_3$ ), podemos también conocer las magnitudes de los parámetros  $m$  y  $n$  respectivamente.
- Para calcular un nuevo  $if$ , basta pasar al punto c teniendo en cuenta que  $4\pi$  ya se encuentra almacenado en  $R_0$ .

Una vez realizado el cambio de variables y conocidos los valores de influencia, procedemos a aplicar la ecuación de hundimientos (111.42) tantas veces como puntos  $i$  haya, tal como se indica a continuación:

Para  $i=1$  (punto bajo el eje de columna 1):

$$\eta_1 = \sum_{j=1}^2 m_{v_{1,j}} H_j \sum_{k=1}^3 I_{1,j,k} \frac{q_k}{b}$$

$$\eta_1 = m_{v_{1,1}} H_1 \left( I_{1,1,1} \frac{q_1}{b} + I_{1,1,2} \frac{q_2}{b} + I_{1,1,3} \frac{q_3}{b} \right) + m_{v_{1,2}} H_2 \left( I_{1,2,1} \frac{q_1}{b} + \right.$$

$$+ I_{1,2,2} \frac{q_2}{b} + I_{1,2,3} \frac{q_3}{b})$$

$$\eta_1 = \frac{0.0154 \times 2.4}{8} \left[ 0.465922q_1 + 0.027934q_2 + 0.000635q_3 \right] +$$

$$+ \frac{0.0222 \times 2}{8} \left[ 0.281221q_1 + 0.13617q_2 + 0.0092q_3 \right]$$

$$\eta_1 = 0.003713q_1 + 0.000885q_2 + 0.000054q_3$$

Recurriendo nuevamente al cambio de variables, la expresión anterior queda como:

$$\delta_1 = 0.003713r_1 + 0.000885t_1 + 0.000054r_2 \quad (IV.8)$$

Para  $i=2$  (punto bajo el centro de la cruz  $\bar{1}$  y única):

$$\eta_2 = \sum_{j=1}^2 mv_{2,j} H_j \sum_{k=1}^3 I_{2,j,k} \frac{q_k}{b}$$

$$\eta_2 = mv_{2,1} H_1 \left( I_{2,1,1} \frac{q_1}{b} + I_{2,1,2} \frac{q_2}{b} + I_{2,1,3} \frac{q_3}{b} \right) +$$

$$+ mv_{2,2} H_2 \left( I_{2,2,1} \frac{q_1}{b} + I_{2,2,2} \frac{q_2}{b} + I_{2,2,3} \frac{q_3}{b} \right)$$

$$\eta_2 = \frac{0.0154 \times 2.4}{8} (0.025019q_1 + 0.931844q_2 + 0.025019q_3) +$$

$$+ \frac{0.0222 \times 2}{8} (0.106337q_1 + 0.562442q_2 + 0.106337q_3)$$

$$\eta_2 = 0.000706q_1 + 0.007427q_2 + 0.000706q_3$$

Utilizando el cambio de variables una vez más llegamos a:

$$\zeta_1 = 0.000706r_1 + 0.007427t_1 + 0.000706r_2 \quad (IV.9)$$

Para  $i=3$  (punto bajo el eje de columna 2):

$$\eta_3 = \sum_{j=1}^2 mv_{3,j} H_j \sum_{k=1}^3 I_{3,j,k} \frac{q_k}{b}$$

$$\begin{aligned} \eta_3 &= mv_{3,1} H_1 \left( I_{3,1,1} \frac{q_1}{b} + I_{3,1,2} \frac{q_2}{b} + I_{3,1,3} \frac{q_3}{b} \right) + \\ &+ mv_{3,2} H_2 \left( I_{3,2,1} \frac{q_1}{b} + I_{3,2,2} \frac{q_2}{b} + I_{3,2,3} \frac{q_3}{b} \right) \\ \eta_3 &= \frac{0.0154 \times 2.4}{8} (0.000635q_1 + 0.027934q_2 + 0.465922q_3) + \\ &+ \frac{0.0222 \times 2}{8} (0.0092q_1 + 0.136172q_2 + 0.28122q_3) \\ \eta_3 &= 0.000054q_1 + 0.000885q_2 + 0.003713q_3 \end{aligned}$$

Con el cambio de variables, la expresión anterior se transforma en:

$$\delta_2 = 0.000054r_1 + 0.000885t_1 + 0.003713r_2 \quad (IV.10)$$

#### IV.2.9 SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

Repasando rápidamente los puntos anteriores, resulta que hemos llegado a establecer un sistema de diez ecuaciones (ecuaciones IV.1 a IV.10) con 10 incógnitas ( $\phi_{(1,1)d}$ ,  $\phi_{2,1}$ ,  $\phi_{1,2}$ ,  $\phi_{2,2}$ ,  $r_1$ ,  $t_1$ ,  $r_2$ ,  $\delta_1$ ,  $\zeta_1$  y  $\delta_2$ ) que resolveremos a continuación:

El sistema de  $10 \times 10$  puede reducirse rápidamente a uno de  $7 \times 7$  sustituyendo las ecuaciones IV.8 a IV.10 en las IV.1 a IV.7. Como se verá en seguida, el nuevo sistema no presenta los desplazamientos como incógnitas. Aplicando la sustitución en la ecuación IV.1 tenemos:

$$\begin{aligned} 4936.5 \phi_{2,1} + 534 \phi_{2,2} - 967.13 (0.003713r_1 + 0.000885t_1 + 0.000054r_2) + \\ + 967.13 (0.000054r_1 + 0.000885t_1 + 0.003713r_2) + 0.97r_1 + 1.53r_2 + \\ + 5.5t_1 = 51.2 \end{aligned}$$

Sumando términos semejantes y dejando a  $\phi_{2,1}$  con coeficiente unitario:

$$\phi_{2,1} + 0.108174 \phi_{2,2} - 0.00052r_1 + 0.001027r_2 + 0.001114t_1 = 0.010372 \quad (IV.11)$$

La ecuación IV.2 queda:

$$5959 \phi_{1,2} + 2579 \phi_{2,2} - 1934.25 (0.003713r_1 + 0.000885t_1 + 0.000054r_2) + \\ + 1934.25 (0.000054r_1 + 0.000885t_1 + 0.003713r_2) = - 21.33$$

Reduciendo y dejando  $\phi_{1,2}$  con coeficiente unitario:

$$\phi_{1,2} + 0.432791 \phi_{2,2} - 0.001188r_1 + 0.001188r_2 = - 0.003579 \quad (IV.12)$$

Tomando ahora la ecuación IV.3, resulta que:

$$6226 \phi_{2,2} + 2579 \phi_{1,2} + 534 \phi_{2,1} - 1934.25 (0.003713r_1 + 0.000885t_1 + \\ + 0.000054r_2) + 1934.25 (0.000054r_1 + 0.000885t_1 + 0.003713r_2) = 21.33$$

Simplificando:

$$\phi_{1,2} + 0.207057 \phi_{2,1} + 2.414114 \phi_{2,2} - 0.002744r_1 + 0.002744r_2 = 0.008271 \quad (IV.13)$$

Ecuación IV.4:

$$7737 \phi_{1,2} + 3868.5 \phi_{2,1} + 7737 \phi_{2,2} - 4835.63 (0.003713r_1 + 0.000885t_1 + \\ + 0.000054r_2) + 4835.63 (0.000054r_1 + 0.000885t_1 + 0.003713r_2) - 13.03r_1 - \\ - 0.47r_2 - 10.50t_1 = - 281.6$$

Reduciendo como en los casos anteriores:

$$\phi_{1,2} + 0.5 \phi_{2,1} + \phi_{2,2} - 0.003971r_1 + 0.002226r_2 - 0.001357t_1 = - 0.036397 \quad (IV.14)$$

Ecuación IV.5:

$$2579 \phi_{(1,1)d} + 322.38 \phi_{2,1} - 1370.09 (0.003713r_1 + 0.000885t_1 + 0.000054r_2) +$$

$$+ 80.59 (0.000054r_1 + 0.000885t_1 + 0.003713r_2) - 0.46r_1 - 0.04r_2 - 0.83t_1 +$$

$$+ 1289.5 (0.000706r_1 + 0.007427t_1 + 0.000706r_2) = - 8.53$$

Sumando términos semejantes y dejando  $\phi_{(1,1)d}$  con coeficiente unitario:

$$\phi_{(1,1)d} + 0.125002 \phi_{2,1} - 0.001796r_1 + 0.000425r_2 + 0.002949t_1 = - 0.003307$$

(IV.15)

Despejando  $t_1$  de la ecuación IV.6:

$$t_1 = 20.8 - 0.5r_1 - 0.5r_2$$

(IV.16)

Finalmente para la ecuación IV.7 tenemos:

$$2579 \phi_{(1,1)d} + 1289.5 \phi_{2,1} - 967.13 (0.003713r_1 + 0.000885t_1 + 0.000054r_2) +$$

$$+ 967.13 (0.000054r_1 + 0.000885t_1 + 0.003713r_2) - 0.7r_1 - 0.14r_2 - 1.83t_1 =$$

$$= - 17.07$$

Reduciendo y dejando  $\phi_{(1,1)d}$  con coeficiente igual a uno:

$$\phi_{(1,1)d} + 0.5 \phi_{2,1} - 0.001643r_1 + 0.001320r_2 - 0.000711t_1 = - 0.006618$$

(IV.17)

Restando IV.17 de IV.15 para eliminar  $\phi_{(1,1)d}$  y dividiendo la expresión resultante por el coeficiente de  $\phi_{2,1}$ :

$$\phi_{2,1} + 0.000408r_1 + 0.002387r_2 - 0.009760t_1 = - 0.008829$$

(IV.18)

Sustituyendo ahora IV.16 en:

$$IV.11: \phi_{2,1} + 0.108174 \phi_{2,2} - 0.000520r_1 + 0.001027r_2 + 0.001114 (20.8 -$$

$$- 0.5r_1 - 0.5r_2) = 0.010372$$

y reduciendo:

$$\phi_{2,1} + 0.108174 \phi_{2,2} - 0.001077r_1 + 0.000470r_2 = - 0.012799 \quad (IV.19)$$

$$IV.14: \phi_{1,2} + 0.5 \phi_{2,1} + \phi_{2,2} = 0.003971r_1 + 0.002226r_2 - 0.001357 \quad (20.8 - 0.5r_1 - 0.5r_2) = - 0.036397$$

y reduciendo:

$$\phi_{1,2} + 0.5 \phi_{2,1} + \phi_{2,2} - 0.003293r_1 + 0.002905r_2 = - 0.008171 \quad (IV.20)$$

$$y \text{ IV.18: } \phi_{2,1} + 0.000408r_1 + 0.002387r_2 - 0.009760 (20.8 - 0.5r_1 - 0.5r_2) = - 0.008829$$

reduciendo y despejando  $\phi_{2,1}$ :

$$\phi_{2,1} = - 0.005288r_1 - 0.007267r_2 + 0.194179 \quad (IV.21)$$

llegamos a un sistema de  $5 \times 5$  formado por las ecuaciones IV.12, IV.13, IV.19, IV.20 y IV.21 y en el que las incógnitas son  $\phi_{2,1}$ ,  $\phi_{1,2}$ ,  $\phi_{2,2}$ ,  $r_1$  y  $r_2$ .

A continuación sustituimos IV.21 en:

$$IV.13: \phi_{1,2} + 0.207057 (- 0.005288r_1 - 0.007267r_2 + 0.194179) + 2.414114 \phi_{2,2} - 0.002744r_1 + 0.002744r_2 = 0.008271$$

y reducimos:

$$\phi_{1,2} + 2.414114 \phi_{2,2} - 0.003839r_1 + 0.001239r_2 = - 0.031935 \quad (IV.22)$$

$$IV.19: - 0.005288r_1 - 0.007267r_2 + 0.194179 + 0.108174 \phi_{2,2} - 0.001077r_1 + 0.000470r_2 = - 0.012799$$

reducimos y despejamos  $\phi_{2,2}$ :

$$\phi_{2,2} = 0.058840r_1 + 0.062834r_2 - 1.913380 \quad (IV.23)$$

$$\begin{aligned} \text{y IV.20: } \phi_{1,2} + 0.5 (-0.005288r_1 - 0.007267r_2 + 0.194179) + \phi_{2,2} - \\ - 0.003293r_1 + 0.002905r_2 = -0.008171 \end{aligned}$$

y reducimos:

$$\phi_{1,2} + \phi_{2,2} - 0.005937r_1 - 0.000729r_2 = -0.105261 \quad (IV.24)$$

Sustituyendo IV.23 en IV.12, IV.22 y IV.24 tenemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} \phi_{1,2} + 0.432791 (0.058840r_1 + 0.062834r_2 - 1.913380) - 0.001188r_1 + \\ + 0.001188r_2 = -0.003579 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{1,2} + 2.414114 (0.058840r_1 + 0.062834r_2 - 1.913380) - 0.003839r_1 + \\ + 0.001239r_2 = -0.031935 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{1,2} + (0.058840r_1 + 0.062834r_2 - 1.913380) - 0.005937r_1 - 0.000729r_2 = \\ = -0.105261 \end{aligned}$$

Reduciendo términos semejantes y conservando el mismo orden:

$$\phi_{1,2} + 0.024277r_1 + 0.028382r_2 = 0.824515 \quad (IV.25)$$

$$\phi_{1,2} + 0.138207r_1 + 0.152927r_2 = 4.587182 \quad (IV.26)$$

$$\phi_{1,2} + 0.052903r_1 + 0.062105r_2 = 1.808119 \quad (IV.27)$$

Restando IV.25 de IV.26 y IV.25 de IV.27 y dividiendo cada ecuación resultante por el coeficiente de su término  $r_1$ :

$$r_1 + 1.093171r_2 = 33.026130 \quad (\text{IV.28})$$

$$r_1 + 1.178055r_2 = 34.360511 \quad (\text{IV.29})$$

Restando ahora IV.28 de IV.29:

$$\begin{aligned} 0.084884r_2 &= 1.334381 \rightarrow \\ \rightarrow r_2 &= 15.720058 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

Sustituyendo IV.30 en IV.28:

$$\begin{aligned} r_1 + 1.093171 (15.720058) &= 33.026130 \rightarrow \\ \rightarrow r_1 &= 15.841418 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

Sustituyendo IV.30 y IV.31 en IV.16:

$$\begin{aligned} t_1 &= 20.8 - 0.5 (15.841418) - 0.5 (15.720058) \rightarrow \\ \rightarrow t_1 &= 5.019262 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

Sustituyendo IV.30 y IV.31 en IV.27:

$$\begin{aligned} \phi_{1,2} + 0.052903 (15.841418) + 0.062105 (15.720058) &= 1.808119 \rightarrow \\ \rightarrow \phi_{1,2} &= -0.006234 \text{ rad} \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

Sustituyendo IV.30 y IV.31 en IV.23:

$$\begin{aligned} \phi_{2,2} = 0.058840 (15.841418) + 0.062834 (15.720058) - 1.913380 &\rightarrow \\ \rightarrow \phi_{2,2} &= 0.006483 \text{ rad} \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

Sustituyendo IV.30 y IV.31 en IV.21:

$$\phi_{2,1} = - 0.005288 (15.841418) - 0.007267 (15.720058) + 0.19417 +$$

$$\rightarrow \phi_{2,1} = - 0.003828 \text{ rad} \quad (\text{IV.35})$$

Sustituyendo IV.30, IV.31, IV.32 y IV.35 en IV.17:

$$\phi_{(1,1)d} + 0.5 (- 0.003828) - 0.001643 (15.841418) + 0.001320 (15.720058) -$$

$$- 0.000711 (5.019262) = - 0.006618 +$$

$$\rightarrow \phi_{(1,1)d} = 0.004142 \text{ rad} \quad (\text{IV.36})$$

Finalmente, sustituyendo IV.30 a IV.32 en IV.8 a IV.10, la magnitud de los hundimientos es:

$$\delta_1 = 0.003713 (15.841418) + 0.000885 (5.019262) + 0.000054 (15.720058) +$$

$$\rightarrow \delta_1 = 0.064110 \text{ m} \quad (\text{IV.37})$$

$$\zeta_1 = 0.000706 (15.841418) + 0.007427 (5.019262) + 0.000706 (15.720058) +$$

$$\rightarrow \zeta_1 = 0.059560 \text{ m} \quad (\text{IV.38})$$

$$\delta_2 = 0.000054 (15.841418) + 0.000885 (5.019262) + 0.003713 (15.720058) +$$

$$\rightarrow \delta_2 = 0.063666 \text{ m} \quad (\text{IV.39})$$

Refiriéndonos de la ecuación IV.30 a la IV.39, observamos que las incógnitas han dejado de serlo.

#### IV.2.10 DETERMINACION DE ELEMENTOS MECANICOS

Para calcular los momentos en los extremos de las barras que constituyen la estructura, basta recurrir a las expresiones III.9 y/o III.10 si se trata de traveses y III.11 y/o III.12 en el caso de columnas. Todas las variables que forman parte de estas ecuaciones poseen ya un valor en nuestro problema, por lo que el cálculo de los momentos se reducirá a una mera sustitución y ejecución aritmética. Es necesario mencionar, sin embargo, que las expresiones III.9 a III.12 se aplicarán habiendo premultiplicado sus segundos miembros por  $-1$ , esto con objeto de que el signo con que resulten los momentos una vez efectuado el cálculo, indique automáticamente el sentido con que actúan sobre las barras. Si hacemos un poco de memoria, recordaremos que las ecuaciones a que nos estamos refiriendo en este punto fueron originalmente planteadas considerando los efectos de barra sobre nudo, de ahí el deseo de cambiar el signo.

La finalidad del cambio que introduciremos se resume entonces en hacer un poco más sencilla la labor del diseñador, al proporcionarle la magnitud y sentido de los momentos sobre las barras directamente. Finalmente, no debemos olvidar que la convención de momentos que rige desde un inicio es la que los considera positivos siempre que su sentido coincida con el de las manecillas del reloj.

A continuación procedemos a hacer el cálculo de momentos en los extremos de las barras:

##### Trabe (1,1)

Extremo izquierdo: no toma momento por ser articulado.

Extremo derecho: aplicamos la ecuación III.10 referida al nudo (2,1) ( $i=2, j=1$ ), con el coeficiente  $\sigma_j=1$  por tratarse del nivel de la cimentación ( $j=1$ ):

$$\begin{aligned}
 M_{(2,1)}(1,1) &= 1.5 \left[ \frac{(6.4)(8)^2}{12} \right] - (1) \left[ \left( \frac{67}{3072} \right) \left( \frac{147}{134} \right) (15.720058)(8)^2 + \right. \\
 &+ \left. \left( \frac{13}{3072} \right) \left( \frac{93}{26} \right) (15.841418)(8)^2 + \left( \frac{11}{192} \right) (1.5)(5.019262)(8)^2 \right] - \\
 &- 2(0.75)(2579)(-0.003828) - 0(2579)(0.004192) + \\
 &+ 6(0.5) \left( \frac{2579}{8} \right) (0.064110) - 6(0.5) \left( \frac{2579}{8} \right) (0.063666) \rightarrow \\
 \rightarrow M_{(2,1)}(1,1) &= -0.59 \text{ ton}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

#### Trabe (1,2)

Extremo izquierdo: aplicamos la ecuación III.9 referida al nudo (1,2) ( $i=1, j=2$ ), con el coeficiente  $\sigma_j=0$  por ser  $j>1$ :

$$\begin{aligned}
 M_{(1,2)}(2,2) &= - (1) \left[ \frac{4(8)^2}{12} \right] - 2(1)(2579)(-0.006234) - \\
 &- (1)(2579)(0.006483) + 6(1) \left( \frac{2579}{8} \right) (0.064110) - 6(1) \left( \frac{2579}{8} \right) (0.063666) \rightarrow \\
 \rightarrow M_{(1,2)}(2,2) &= -5.04 \text{ ton}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

Extremo derecho: aplicamos la ecuación III.10 referida al nudo (2,2) ( $i=j=2$ ) con  $\sigma_j=0$ :

$$\begin{aligned}
 M_{(2,2)}(1,1) &= (1) \left[ \frac{4(8)^2}{12} \right] - 2(1)(2579)(0.006483) - \\
 &- (1)(2579)(-0.006234) + 6(1) \left( \frac{2579}{8} \right) (0.064110) - 6(1) \left( \frac{2579}{8} \right) (0.063666) \rightarrow \\
 \rightarrow M_{(2,2)}(1,1) &= 4.83 \text{ ton}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

Columna (1,1)

Extremo inferior: no toma momento por ser articulado.

Extremo superior: aplicamos la ecuación III.12 referida al nudo (1,2)

-(i=1, j=2):

$$M_{(1,2)(1,1)} = - 2 (0.75) (534) (- 0.006234) - 0 (534) (0.004142) \rightarrow$$

$$\rightarrow M_{(1,2)(1,1)} = 4.99 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

Columna (2,1)

Extremo inferior: aplicamos la ecuación III.11 referida al nudo (2,1)

(i=2, j=1):

$$M_{(2,1)(2,2)} = - 2 (1) (534) (- 0.003828) - (1) (534) (0.006483) \rightarrow$$

$$\rightarrow M_{(2,1)(2,2)} = 0.63 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

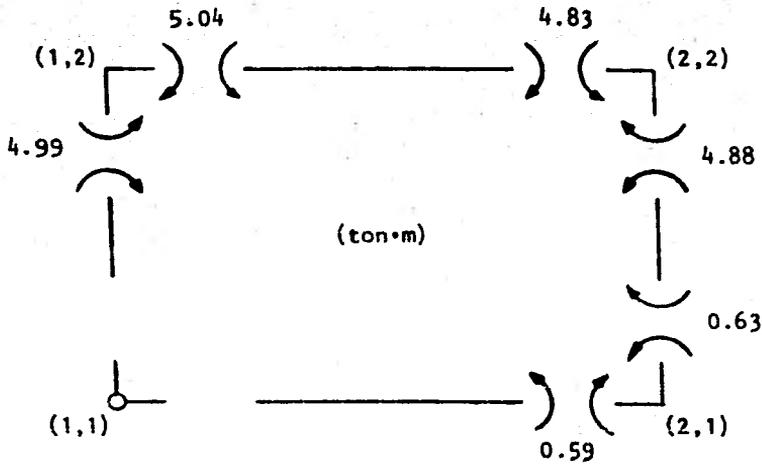
Extremo superior: aplicamos la ecuación III.12 referida al nudo (2,2)

(i=j=2):

$$M_{(2,2)(2,1)} = - 2 (1) (534) (0.006483) - (1) (534) (- 0.003829) \rightarrow$$

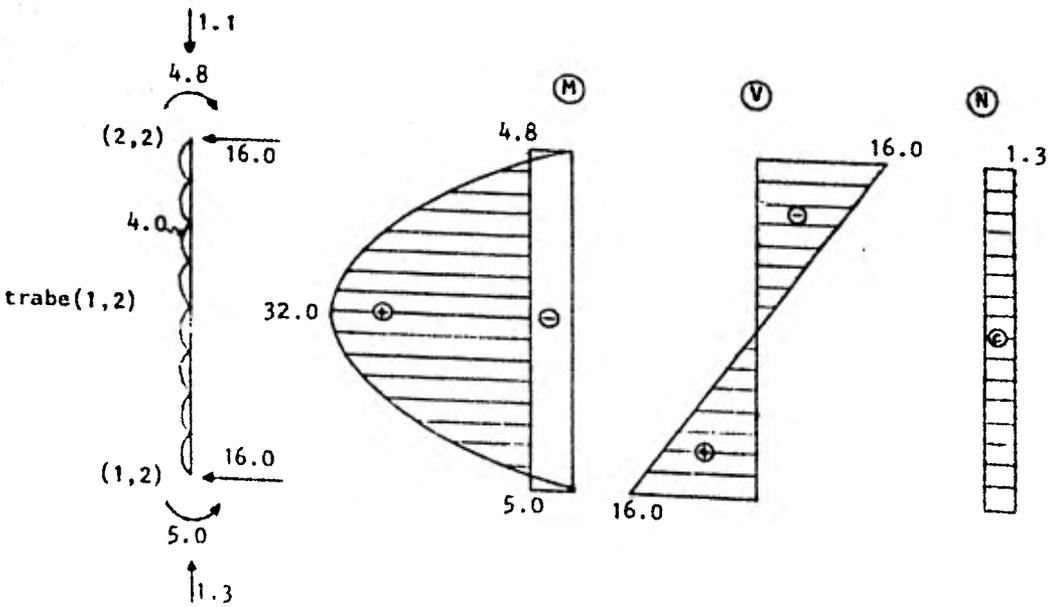
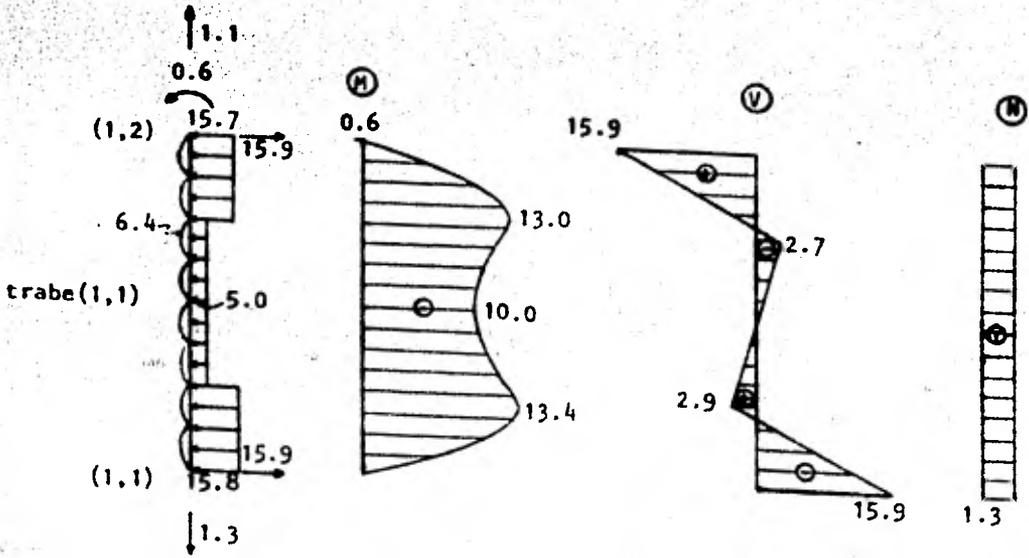
$$\rightarrow M_{(2,2)(2,1)} = - 4.88 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

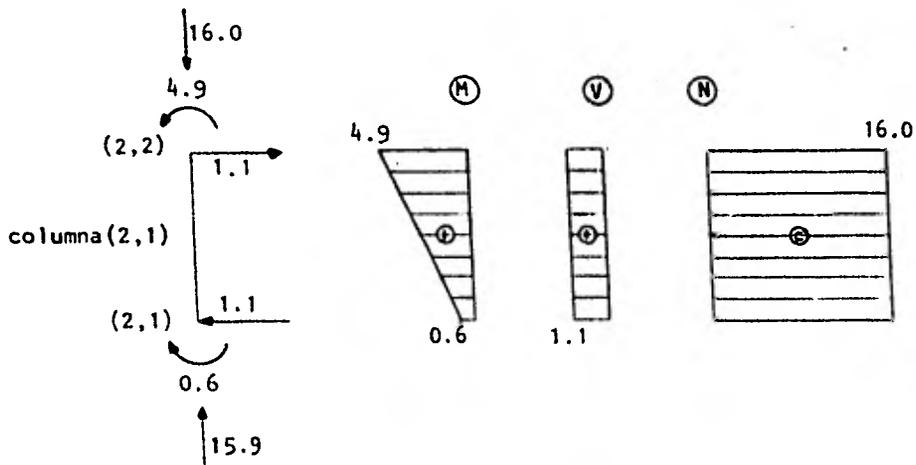
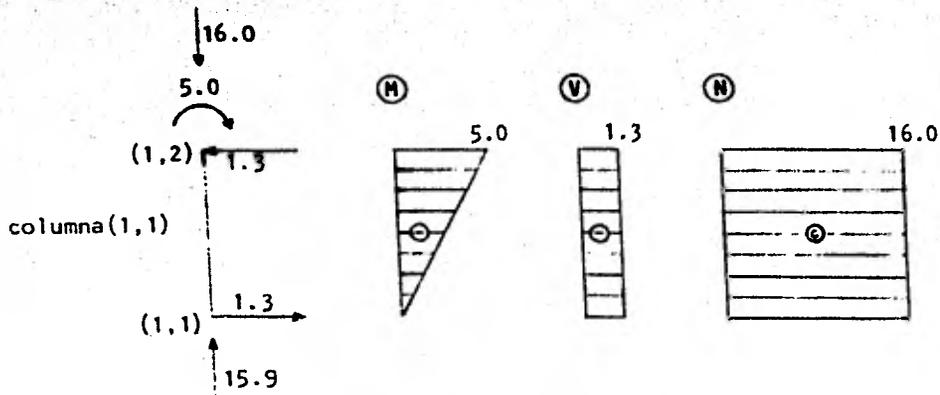
Verificando el equilibrio de momentos en los nudos:



Los errores que se presentan en el equilibrio de momentos son cuando más del 6%, aceptables sin lugar a dudas desde un punto de vista práctico y atribuibles en gran medida al redondeo a enteros que se hizo de los valores de las rigideces.

En seguida determinaremos los cortantes y las fuerzas normales actuando sobre los elementos estructurales, así como los diagramas correspondientes a cada uno de los elementos mecánicos. Redondearemos a un solo decimal y las unidades serán ton y m.





#### IV.2.11 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

El cálculo de elementos mecánicos y trazado de diagramas asociados que acabamos de realizar, revela que el equilibrio de fuerzas normales en las trabes no se cumple satisfactoriamente, pues se presenta una diferencia de hasta un 15% entre sus valores, aproximadamente. La explicación a este hecho se da en las líneas siguientes.

La introducción de una articulación en uno de los apoyos de la estructura, da lugar a una asimetría que se traduce en un hundimiento ligeramente mayor en dicho apoyo. Tal hundimiento diferencial provoca un cierto desplazamiento lateral a la estructura y a su vez acarrea la aparición de elementos mecánicos que se oponen a ese movimiento. En el capítulo II establecimos que el método de interacción no toma en cuenta los desplazamientos laterales ni sus efectos, pues se plantea para estudiar estructuras sin fuerte asimetría en geometría y cargas y sujetas exclusivamente a cargas verticales. En consecuencia, cualquier desplazamiento lateral que se presente en una estructura, por pequeño que éste sea, ocasionará la aparición de un desequilibrio del mismo orden en las fuerzas normales de sus trabes, tal y como ha sucedido en nuestro problema.

El ejemplo que acabamos de resolver no presenta una asimetría geométrica muy fuerte y puede analizarse con el método de interacción. La utilidad de los resultados que se obtienen es otra razón a favor de la aplicación del método, aún en el caso de estructuras con mayor asimetría. No debemos olvidar que en estos casos, sin embargo, tal proceder da lugar a una incongruencia, si bien poco significativa, en el equilibrio de las fuerzas

normales en las trabes. Decimos poco significativa porque, en general, los valores de esas fuerzas son pequeños comparados con las magnitudes relativas al resto de los elementos mecánicos y por tanto tienen poca influencia en el diseño de los elementos estructurales correspondientes.

## V

PROGRAMA DE COMPUTADORA

Este capítulo presenta el programa de computadora del método de análisis Interacción Suelo-Estructura con la Presencia de Nudos Articulados, codificado en lenguaje de programación BASIC.

La razón por la cual se realizó la programación en lenguaje BASIC y no en FORTRAN, como hubiera podido esperarse, fue la de hacer accesible el programa a aquellos despachos de ingeniería, cada vez más numerosos, que disponen de una microcomputadora. Por su sencillez, el lenguaje común en tales aparatos es precisamente el BASIC.

De hecho, el programa de que es objeto este capítulo fue desarrollado y probado en una microcomputadora Radio-Shack Modelo II, dotada con 64K bytes de memoria.

Conviene mencionar, sin embargo, que una desventaja grande de estos aparatos, es la de que ven agotada su capacidad de memoria rápidamente y en consecuencia están imposibilitados de analizar estructuras demasiado grandes. Así por ejemplo, en el caso de la citada computadora Radio Shack II, 28 de sus 64K bytes de almacenaje están destinados al sistema operativo y al traductor del lenguaje BASIC, quedando los restantes 36 como memoria principal de la máquina. De esos 36K bytes libres, alrededor de 25 son consumidos al cargar el programa de Interacción suelo-estructura,

sobrando finalmente unos 11 para alojar los arreglos requeridos para la solución de algún problema.

En concreto, esta capacidad tan reducida permite analizar exclusivamente estructuras en las que el producto  $N \times NQ$  sea menor o igual que 18, donde  $N$  representa el número de ejes de columnas y  $NQ$  el número de niveles, incluida la cimentación. En el subcapítulo V.1, sin embargo, se presenta una alternativa para estudiar estructuras más grandes, para las que el producto mencionado exceda la cantidad especificada.

#### V.1. ADAPTACION DEL METODO DE INTERACCION A UNA MICROCOMPUTADORA

En vista de la escasa capacidad de almacenaje que nos brinda una microcomputadora, pretendemos aquí describir un procedimiento que permite "reducir" el tamaño de una estructura y por extensión el número de incógnitas a ella asociada, hasta un punto en el que el problema completo sea aceptado en la memoria de la máquina. El procedimiento consiste en eliminar los niveles superiores de una estructura "grande" (de acuerdo con la pauta que nos da el producto  $N \times NQ$  y sobre la cual abundaremos más después), transformar en cargas concentradas las cargas repartidas asociadas a esos niveles y finalmente, aplicar las cargas concentradas resultantes en los ejes de columna a nivel del último piso que se considere para el análisis. Las cargas concentradas que se asignan a cada eje de columna  $i$  son calculadas multiplicando las longitudes tributarias a ambos lados de ellos ( $l_{i-1}/2$  y  $l_i/2$ ), por los valores correspondientes a las cargas

repartidas ( $\omega_{i-1}$  y  $\omega_i$ , respectivamente). Evidentemente, este proceso se repite para cada uno de los niveles que vayan a cancelarse y al final se suman en una sola todas las cargas concentradas ligadas al eje de columna  $i$ .

Por otra parte, la eliminación de varios de los niveles superiores de una estructura, impide que la parte de la solución que se refiere al análisis estructural pueda considerarse como correcta. Surge entonces la pregunta de si la reducción nos reditúa algún resultado de utilidad, pues por lo pronto hemos dicho que el relativo al análisis estructural no es utilizable. La respuesta a esta pregunta es afirmativa teniendo en cuenta lo siguiente: en sus estudios sobre el análisis conjunto de la estructura y el suelo, Zeevaert<sup>6</sup> ha considerado con buen éxito que solamente los primeros niveles de una estructura influyen con su rigidez en la interacción con el suelo; el resto de los niveles son eliminados y las cargas repartidas que les corresponden idealizadas como fuerzas concentradas aplicadas sobre los ejes de columna respectivos, tal y como fue comentado líneas arriba; ésto significa que las magnitudes de las reacciones del terreno y de los hundimientos que resultan de hacer las consideraciones anteriores pueden calificarse como correctas. Si tomamos en cuenta que uno de los problemas principales del ingeniero civil que realiza en análisis de una estructura es el conocimiento de tales magnitudes, concluimos que la condición simplificatoria que hemos descrito no solo nos ayuda a resolver el problema de capacidad de memoria que nos aqueja, sino que también nos permite conocer valores que pueden aplicarse a cualquier otro programa de análisis estructural, propio de alguna máquina de mayor capacidad, con objeto de resolver la estructura completa habiendo integrado en el análisis su interacción con el suelo.

Asumiendo que el número mínimo de niveles de una estructura cuya rigidez influye en la interacción con el suelo es de cuatro (valor ni muy grande ni muy pequeño y que justifica la reducción simplificatoria y teniendo en mente que el producto del número de ejes de columnas  $N$  por el número de niveles  $NQ$  debe ser menor o igual que 18, entonces, podemos decir que las estructuras que pueden estudiarse con el programa de interacción adaptado a una microcomputadora como la Radio Shack II, deben caer en una de las siguientes categorías:

a. Aquellas estructuras en las que el número de ejes de columna  $N$  valga 2 y el número de niveles  $NQ$  sea menor o igual que 9, podrán analizarse en forma completa porque el producto  $N \times NQ$  será igual que el límite superior de 18 que hemos establecido. En los casos en los que  $N$  sea igual a 2 y  $NQ$  sea mayor que 9, los niveles en exceso serán transformados como ya hemos descrito y el análisis estructural resultará incompleto.

b. Cuando para una estructura  $N=3$  y  $NQ \leq 6$ , el producto  $N \times NQ$  será igual al límite superior que hemos fijado y el análisis estructural correspondiente podrá ejecutarse de manera completa. Sin embargo, si  $N=3$  y  $NQ > 6$ , el resultado del producto  $N \times NQ$  excederá 18 y la estructura en cuestión se sujetará a una reducción y a un análisis incompleto.

c. Podrá estudiarse en forma completa una estructura en la que  $N=4$  y  $NQ \leq 4$ , pues  $N \times NQ < 18$ . Cuando  $N=4$  pero  $NQ > 4$ , la estructura bajo análisis será sometida a las condiciones simplificadorias ya conocidas, con los resultados consecuentes.

d. Finalmente, no será posible para la microcomputadora analizar estructuras cuyas  $N$  y  $NQ$  excedan cuatro y tres, respectiva y simultáneamente.

En efecto, a fin de no violar la hipótesis original de utilizar cuatro niveles como mínimo en el análisis con interacción,  $NQ$  siempre deberá ser mayor o igual que cuatro. Si a eso añadimos que las estructuras que caen en este caso tienen una  $N$  que puede ser cinco o mayor, concluimos que el resultado de ejecutar el producto de  $N$  y  $NQ$  para tales estructuras siempre sobrepasará el límite superior de dieciocho que ha sido marcado.

Hasta este punto, hemos terminado de describir en lo que consiste la adaptación del método de interacción a una microcomputadora. Sin embargo, para hacer efectiva tal adaptación en el programa en cuestión, es necesario introducir ciertas modificaciones en algunas de las ecuaciones catalogadas como definitivas en el capítulo III. Si llamamos  $P_w$  a las cargas concentradas en que se transforman las cargas repartidas asociadas a los niveles superiores a cancelar en una estructura "grande", entonces  $P_w(i)$  es la carga concentrada aplicada sobre el eje de columna  $i$ . Esta variable deja sentir su presencia en las ecuaciones III.21 y III.22, correspondientes a la condición de equilibrio de fuerza cortante en la cruzja  $i$  y en la ecuación III.39, relativa al equilibrio de fuerzas verticales. Por lo que se refiere al resto de las ecuaciones calificadas como definitivas en el capítulo III, podemos decir lo siguiente: puesto que las cargas concentradas  $P_w$  actúan precisamente en los nudos del último nivel, no producen momento alguno sobre éstos y por tanto no influyen en las ecuaciones concernientes a la condición de equilibrio de momentos en el nudo  $i, j$  de la estructura de interés; las cargas  $P_w$  tampoco afectan las ecuaciones ligadas a la obtención del desplazamiento  $\zeta_j$  a la mitad de la cruzja  $i$  y al equilibrio de momentos en las vigas conjugadas de la cimentación, porque mientras que

dichas cargas están aplicadas en el último nivel de la estructura en cuestión, las ecuaciones de que hablamos han sido planteadas aislando justamente las traveses de la cimentación; finalmente, las ecuaciones que resultan del análisis de hundimientos relacionan elementos propios del suelo y en consecuencia no involucran las cargas  $P\omega$  que son netamente estructurales.

Si aplicamos la condición de equilibrio de fuerza cortante en la cruz  $i$  tal como lo hicimos en el subcapítulo III.3 (fig. III.1), pero teniendo ahora en mente la presencia de las cargas  $P\omega$ , las ecuaciones III.21 y III.22 ven aumentado su término independiente con la adición de un término que contiene a la variable  $P\omega$  y se transforman respectivamente en las ecuaciones V.III.21 y V.III.22, a saber:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^q \left[ 2\alpha r_{(1,j)} + \beta l_{(i+1,j)} \right] K_{t_{i,j}} \phi_{1,j} + \sum_{j=1}^q \left[ 2\alpha l_{(i+1,j)} + \right. \\
 & + \beta r_{(i,j)} \left. \right] K_{t_{i,j}} \phi_{i+1,j} - \frac{6}{l_i} \sum_{j=1}^q \left[ \gamma^r_{(i,j)} + \gamma^l_{(i+1,j)} \right] K_{t_{i,j}} \delta_i + \\
 & + \frac{6}{l_i} \sum_{j=1}^q \left[ \gamma^r_{(i,j)} + \gamma^l_{(i+1,j)} \right] K_{t_{i,j}} \delta_{i+1} - \frac{l_1 l_i}{4} r_i - \frac{l_i}{4} \sum_{k=2}^{i-1} (l_{k-1} + l_k) r_k - \\
 & - \left[ \frac{l_{i-1} l_i}{4} + \frac{l_i^2}{3072} (67 \rho r_{(i)} - 13 \mu l_{(i+1)} + 672) \right] r_i - \frac{l_i^2}{3072} \left[ 96 + 13 \mu r_{(i)} - \right. \\
 & - 67 \rho l_{(i+1)} \left. \right] r_{i+1} - \frac{l_i}{2} \sum_{k=1}^{i-1} l_k t_k - \frac{l_i^2}{192} \left[ 48 + 11 \nu r_{(i)} - 11 \nu l_{(i+1)} \right] t_i = \\
 & = \frac{l_i^2}{12} \sum_{j=1}^q \left[ \Omega^l_{(i+1,j)} - \Omega^r_{(i,j)} \right] \omega_{i,j} - l_i \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^q \omega_{k,j} l_k - \frac{l_i^2}{2} \sum_{j=1}^q \omega_{1,j} - \\
 & - l_i \sum_{k=1}^q P\omega_k \tag{V.III.21}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^q \left[ 2\alpha r_{(1,j)} + \beta l_{(2,j)} \right] K_{t_{1,j}} \phi_{1,j} + \sum_{j=1}^q \left[ 2\alpha l_{(2,j)} + \beta r_{(1,j)} \right] K_{t_{1,j}} \phi_{2,j} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{6}{l_1} \sum_{j=1}^q \left[ \gamma r_{(1,j)} + \gamma l_{(2,j)} \right] \kappa t_{1,j} \delta_1 + \frac{6}{l_1} \sum_{j=1}^q \left[ \gamma r_{(1,j)} + \right. \\
& \left. + \gamma l_{(2,j)} \right] \kappa t_{1,j} \delta_2 - \frac{l_i^2}{3072} \left[ 67 \rho r_{(1)} - 13 \mu l_{(2)} + 672 \right] r_1 - \frac{l_i^2}{3072} \left[ 96 + \right. \\
& \left. + 13 \mu r_{(1)} - 67 \rho l_{(2)} \right] r_2 - \frac{l_i^2}{192} \left[ 48 + 11 \nu r_{(1)} - 11 \nu l_{(2)} \right] t_1 = \\
& - \frac{l_i^2}{12} \sum_{j=1}^q \left[ \Omega l_{(2,j)} - \Omega r_{(1,j)} \right] \omega_{1,j} - \frac{l_i^2}{2} \sum_{j=1}^q \omega_{1,j} - l_1 P \omega_1 \quad (V.111.22)
\end{aligned}$$

Al plantear el equilibrio de fuerzas verticales en una estructura en la que están presentes las cargas  $P\omega$ , la ecuación 111.39, planteada en el subcapítulo 111.5 ve aumentado su término independiente con el término que contiene a la variable  $P\omega$ . La nueva ecuación queda como sigue:

$$\begin{aligned}
& l_1 r_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (l_{i-1} + l_i) r_i + l_{n-1} r_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} l_i t_i = \\
& = 4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^q l_i \omega_{i,j} + 4 \sum_{i=1}^n P \omega_i \quad (V.111.39)
\end{aligned}$$

## V.2 EL METODO DE INTERACCION Y LOS MARCOS ESBELTOS

En términos generales, se considera que un marco es esbelto cuando la razón de su altura total a su distancia entre ejes de columna excede de tres. La deformación axial que experimentan las columnas de estos marcos, sobre todo cuando la estructura de que forman parte se ve sujeta a fuerzas horizontales, alcanza valores considerables que deben tomarse en cuenta al realizar el análisis estructural correspondiente.

El método de interacción objeto de este trabajo, tal como se mencionó en el subcapítulo 11.3, no ha sido planteado para estudiar estructuras esbeltas, pues no considera la deformación axial que ocurre en las columnas. Sin embargo, si una estructura de este tipo se analiza solamente por cargas verticales con el método de interacción, los acortamientos que sufren las columnas son en general poco significativos y los resultados que se obtienen pueden aprovecharse para tener una idea preliminar de la magnitud de las fuerzas y momentos que actuarán sobre la estructura o, en el caso exclusivo de las reacciones del terreno, como datos para un programa de análisis estructural que tome en cuenta la deformación axial en las columnas.

### V.3 ELABORACION DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL METODO DE INTERACCION

Ante todo, debemos tener en mente que el programa de computadora para el método de interacción fue desarrollado y probado en una microcomputadora Radio Shack II. Desde el punto de vista de la capacidad de memoria, esta microcomputadora, tal como la mayoría de los aparatos de naturaleza semejante, tiene las desventajas de poseerla escasa, y de procesar los programas como traductor y no como compilador. Para el caso de programas que en un momento dado puedan llegar a exceder la capacidad de la máquina, es conveniente tomar medidas que nos permitan lograr un cierto ahorro de memoria, y por tanto reducir la magnitud de las dos desventajas arriba citadas.

En concreto, el problema de escasez de capacidad puede tratar de superarse colocando el mayor número posible de instrucciones en una sola línea de impresión (la cual puede abarcar varios renglones del listado), separando instrucciones sucesivas mediante el uso del carácter "dos puntos" (:); la máquina "entiende" que este símbolo marca la terminación de una instrucción y el inicio de otra completamente nueva. El uso de los dos puntos permite reducir el número de etiquetas que se emplean para identificar líneas de instrucción que inician, y en consecuencia, contar con una cierta cantidad de memoria extra para el momento de la ejecución.

Por otra parte, el proceso traductor de la microcomputadora se refiere a que la máquina cuenta con un programa integrado a ella, el cual está formado por una serie de instrucciones especiales, creadas específicamente para que la computadora pueda interpretar el lenguaje BASIC. El inconveniente de este sistema radica en que, cuando el aparato traduce un programa cualquiera suministrado en BASIC, lo hace respetando los espacios en blanco que encuentra entre los comandos. Estos espacios no tienen significado alguno para la máquina, pero son empleados por el programador a fin de dar mayor claridad a su codificación; evidentemente, cada espacio en blanco que respete el traductor irá en detrimento de la capacidad de la computadora. En contraposición, un compilador no solo procesa programas sin necesidad de contar con instrucciones especiales para interpretar lenguajes de programación, sino que, además, realiza el paso intermedio de descartar los espacios en blanco que encuentra entre los comandos característicos de cada lenguaje, con objeto de conservar en la memoria únicamente la forma sintética de los mismos. Para el caso que nos atañe, sin embargo, el programador puede hacer las veces de "compilador" con el simple hecho de teclear los comandos BASIC

de corrido, sin dejar espacios en blanco. Cabe hacer notar que para un programa de tamaño mediano, la utilización de este sistema permite un ahorro de capacidad considerable.

El anexo II contiene el listado del programa para el método de interacción suelo-estructura, codificado en lenguaje BASIC. El listado muestra la manera de aplicar los dos métodos para el ahorro de capacidad que fueron descritos en las líneas anteriores. Evidentemente, la consecuencia inmediata de este proceder es una disminución en la claridad de la codificación. Es fácil entender, sin embargo, que el sacrificio de claridad en favor de capacidad, para este caso, es uno de lo menos por lo más. De cualquier modo, el listado es autoexplicable gracias a los comentarios que existen intercalados entre los diversos bloques de instrucciones de que consta el programa, pues aquellos resumen brevemente el objeto y significado de cada uno de estos últimos.

La tabla V.1 indica de manera general, la forma en que está estructurado el programa de computadora en cuestión, el cual, como ya se mencionó, está contenido en el anexo II.

TABLA V.1

INSTRUCCION		CONTENIDO DE LA SECCION CORRESPONDIENTE DEL PROGRAMA
DE LA	A LA	
10	60	Letreros que identifican el programa, y que, a manera de encabezado, se imprimen en la primera hoja de cualquier corrida.
70	330	Lectura de datos. En caso de que el tamaño de la estructura bajo análisis exceda el valor asignado como capacidad de la máquina (consultar el subcapítulo V.1 y el inciso V.4.1), la computadora recurre a un proceso que se encuentra intercalado entre el grupo de instrucciones en cuestión, y que tiene por objeto reducir el número de niveles NQ de la estructura. Si después de la reducción, el nuevo tamaño de la estructura es

TABLA V.1

INSTRUCCION		CONTENIDO DE LA SECCION CORRESPONDIENTE DEL PROGRAMA
DE LA	A LA	
		menor que el valor de la capacidad de la máquina, el programa sigue adelante pero ejecutando un análisis incompleto. En caso contrario, la instrucción 150 se encarga de hacernos la indicación de que "se excede la capacidad de memoria de la máquina", y a continuación transfiere el control del programa a 11000, donde se da por terminada la ejecución.
340	380	En caso de análisis incompleto, el programa recurre a este bloque de instrucciones para transformar las cargas repartidas asociadas a los niveles de la estructura que han sido cancelados, en cargas concentradas (consultar el subcapítulo V.1).
390	1170	Impresión de datos recurriendo a las subrutinas comprendidas entre las instrucciones 51000 y 55060.
1180	1480	Cálculo de los valores de influencia aplicando la expresión de Bousinesq. Esta expresión está codificada en la subrutina que se encuentra entre las instrucciones 56000 y 56030.
1490	1520	Aplicación de la ecuación III.42 relativa a los hundimientos del terreno, a fin de valuar los coeficientes asociados a las incógnitas que aparecen en aquélla (reacciones del terreno).
1530	1580	Aplicación de las ecuaciones III.43 y III.44, a fin de asignar nuevas variables a los valores que resultan de aplicar la ecuación III.42.
1590	1710	Impresión de los valores de influencia recurriendo a las subrutinas comprendidas entre las instrucciones 51000 y 51040, y 53000 y 53010.
1720	2000	Asignación de coeficientes a los nudos de la estructura, de acuerdo con la naturaleza continua o articulada de los mismos. En este punto se recurre a las subrutinas que se encuentran entre las instrucciones 57000 y 60040.
2010	2180	Cálculo de las rigideces de traveses y columnas, y de nudo.
2190	2610	Aplicación de la ecuación III.16 referente a la suma de momentos en el nudo (i,1), a fin de valuar tanto los coeficientes asociados a las incógnitas que aparecen en aquélla (giros, desplazamientos y reacciones del terreno), como su término independiente.
2620	3370	Aplicación de la ecuación III.18 referente a la suma de momentos en el nudo (i,j), a fin de valuar tanto los coeficientes

TABLA V.1

INSTRUCCION		CONTENIDO DE LA SECCION CORRESPONDIENTE DEL PROGRAMA
DE LA	A LA	
		asociados a las incógnitas que aparecen en dicha ecuación (giros y desplazamientos), como su término independiente.
3380	3530	Aplicación de la ecuación V.III.22 referente al equilibrio de fuerza cortante en la crujía (1), con objeto de valuar tanto los coeficientes asociados a las incógnitas que intervienen en aquella (giros, desplazamientos y reacciones del terreno), como su término independiente.
3540	3760	Aplicación de la ecuación V.III.21 referente al equilibrio de fuerza cortante en la crujía (i), a fin de valuar lo siguiente: los coeficientes asociados a las incógnitas que intervienen en la ecuación citada (giros, desplazamientos y reacciones del terreno), y el término independiente de la misma.
3770	4280	Aplicación de la ecuación relativa al desplazamiento $\zeta_j$ en la cimentación a la mitad de la crujía (i) (III.28, III.32, III.36 ó III.38, según el tipo de apoyos en las trabes), con objeto de valuar tanto los coeficientes asociados a las incógnitas que aparecen en dicha ecuación (giros, desplazamientos y reacciones del terreno), como su término independiente.
4290	4350	Aplicación de la ecuación V.III.39 relativa al equilibrio de fuerzas verticales, a fin de valuar tanto los coeficientes asociados a las incógnitas que intervienen en aquella (reacciones del terreno), como su término independiente.
4360	4600	Aplicación de la ecuación auxiliar de equilibrio de momentos en las vigas conjugadas de la cimentación (III.44 ó III.45, según el tipo de apoyos), con objeto de valuar tanto los coeficientes asociados a las incógnitas que intervienen en dicha ecuación (giros, desplazamientos y reacciones del terreno), como su término independiente.
4610	4720	Sustitución del sistema de ecuaciones que se obtiene del cálculo de hundimientos, en el que resulta de aplicar el método de las rigideces. La sustitución anterior hace desaparecer a los desplazamientos como incógnitas, y provoca que los coeficientes asociados a las reacciones del terreno modifiquen su magnitud. Las ecuaciones que se ven afectadas por estos cambios, son las referentes a las condiciones siguientes: suma de momentos en el nudo (i,1) (ec. III.16), suma de momentos en el nudo (i,j) (ec. III.18), equilibrio de fuerza cortante en la crujía (1) (ec. V.III.22), equilibrio de fuerza cortante en la crujía (i) (ec. V.III.21), desplazamiento $\zeta_j$ en la cimentación a la mitad de la crujía (i) (ecs. III.28, III.32, III.36

TABLA V.1

INSTRUCCION		CONTENIDO DE LA SECCION CORRESPONDIENTE DEL PROGRAMA
DE LA	A LA	
		6 III.38, según el tipo de apoyos en las trabes), equilibrio de fuerzas verticales (ec. V.III.39), y equilibrio de momentos en las vigas conjugadas de la cimentación (ecs. III.44 ó III.45, según el tipo de apoyos). Este grupo de ecuaciones es el que dará lugar a la matriz del sistema y al vector de términos independientes.
4730	4790	El contador de ecuaciones y la bandera para identificar nudos que se generan en este grupo de instrucciones, son elementos que se requieren para la formación de la matriz del sistema y del vector de términos independientes.
4800	4890	Formación de la matriz del sistema y del vector de términos independientes. Este proceso recurre a las subrutinas comprendidas entre las instrucciones 61000 y 64010.
4900	5070	Impresión de la matriz de coeficientes y del vector de términos independientes, recurriendo a las subrutinas codificadas entre las instrucciones 51000 y 51040, y 53000 y 54010.
5080	5230	Solución del sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.
5240	5390	Impresión de resultados, a saber: magnitud de los doblegiros en los nudos, y reacciones del terreno sobre la estructura.
5400	5530	Este grupo de instrucciones tiene por objeto el desglosamiento del vector solución, de modo que los grupos de resultados representados por las magnitudes de los doblegiros en los nudos, y por las reacciones del terreno bajo los ejes de columnas y crujías, queden cada uno en arreglos independientes.
5540	5630	Cálculo de la magnitud de los hundimientos del terreno.
5640	5720	Impresión de los valores de los hundimientos del terreno.
5730	5880	Aplicación de las ecuaciones III.9, III.10, III.11 y III.12, a fin de valuar la magnitud de los momentos de nudo sobre barra. Puesto que las ecuaciones anteriores fueron desarrolladas originalmente para calcular momentos de barra sobre nudo, la codificación de las mismas dentro del grupo de instrucciones en cuestión, fue hecha premultiplicando sus segundos miembros por - 1.
5890	6120	Impresión de los valores de los momentos de nudo sobre barra.

TABLA V.1

INSTRUCCION		CONTENIDO EN LA SECCION CORRESPONDIENTE DEL PROGRAMA
DE LA	A LA	
10000	10999	Intervalo reservado para alojar los datos que requiere una corrida. El subcapítulo V.4 se refiere al instructivo de uso del programa, y en él puede consultarse la manera de suministrar los datos.
51000	55060	Subrutinas empleadas en la impresión de datos y resultados.
56000	56030	Subrutina que contiene la expresión de Boussinesq para área rectangular uniformemente cargada.
57000	50040	Subrutinas en donde se asignan los coeficientes a los nudos de la estructura, según sean estos continuos o articulados.
61000	64010	Subrutinas empleadas para el arreglo de los coeficientes de los giros y de las reacciones del terreno en la matriz correspondiente, y para el arreglo de los términos independientes en el vector del mismo nombre.

Una parte del programa en cuestión fue desarrollada por el ingeniero Agustín Deméneghi Colina, y por los señores César Hernández Cruz y Manuel Flores Djeda. Una palabra de agradecimiento a ellos por su valiosa colaboración.

Las tablas V.2 y V.3 presentan, respectivamente, y por orden alfabético, las relaciones de los arreglos y las variables unidimensionales que aparecen en el listado del programa que se incluye en el anexo II. Dichas tablas presentan también la información relativa a la utilización que se les da a los elementos de cada arreglo, y a cada variable.

TABLA V.2

ARREGLO	ELEMENTO	UTILIZACION
A	$A(i,j)$	Empleado primeramente en una de las subrutinas de impresión para imprimir el elemento $(i,j)$ de arreglos conocidos, y posteriormente, como elemento $(i,j)$ de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones.
AD	$AD(i,j)$	Coefficiente $\alpha$ hacia abajo del nudo $(i,j)$ , ésto es, relativo al nudo $(i,j-1)$ .
AL	$AL(i,j)$	Coefficiente $\alpha$ a la izquierda del nudo $(i,j)$ , ésto es, relativo al nudo $(i-1,j)$ .
AR	$AR(i,j)$	Coefficiente $\alpha$ a la derecha del nudo $(i,j)$ , ésto es, relativo al nudo $(i+1,j)$ .
AU	$AU(i,j)$	Coefficiente $\alpha$ hacia arriba del nudo $(i,j)$ , ésto es, relativo al nudo $(i,j+1)$ .
B	$B(j)$	Empleado primeramente en una de las subrutinas de impresión para imprimir el elemento $j$ de un cierto arreglo, y posteriormente, como término independiente de la ecuación $j$ del sistema.
BC	$BC(i)$	Ancho de la cimentación asociado a la reacción del terreno $i$ .
BD	$BD(i,j)$	Coefficiente $\beta$ hacia abajo del nudo $(i,j)$ , ésto es, relativo al nudo $(i,j-1)$ .
BL	$BL(i,j)$	Coefficiente $\beta$ a la izquierda del nudo $(i,j)$ , ésto es, relativo al nudo $(i-1,j)$ .
BR	$BR(i,j)$	Coefficiente $\beta$ a la derecha del nudo $(i,j)$ , ésto es, relativo al nudo $(i+1,j)$ .
BU	$BU(i,j)$	Coefficiente $\beta$ hacia arriba del nudo $(i,j)$ , ésto es, relativo al nudo $(i,j+1)$ .
C	$C(j)$	Término independiente de la ecuación $j$ , y a partir del cual se genera $B(j)$ .
CI	$CI(i,j)$	Momento de Inercia de la columna $(i,j)$ .
CK	$CK(i,j)$	Rigidez relativa de la columna $(i,j)$ .

TABLA V.2

ARREGLO	ELEMENTO	UTILIZACION
CL	CL(J)	Altura del entrepiso j.
D	D(I,J)	Coefficiente asociado a la incógnita que representa el desplazamiento de la cimentación bajo el eje de columna i, en la ecuación j del sistema.
DS	DS(I,J)	Magnitud del desplazamiento de la cimentación bajo el eje de columna i.
EC	EC(I,J)	Módulo de elasticidad de la columna (i,j).
ET	ET(I,J)	Módulo de elasticidad de la trabe (i,j).
F	F(I,J,K)	Coefficiente asociado a la incógnita que representa el giro en el nudo (i,j), en la ecuación del sistema.
FG	FG(K)	Bandera que indica si el nudo k, contado respectiva y simultáneamente de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba en la estructura, es continuo o articulado.
FL	FL(I,J)	Bandera que indica si el nudo (i,j) es continuo o articulado.
F1	F1(I,J,K)	Valor de influencia en el elemento (i,j) del suelo, provocado por la carga situada en el punto k.
GL	GL(I,J)	Coefficiente y a la izquierda del nudo (i,j), esto es, relativo al nudo (i-1,j).
GR	GR(I,J)	Coefficiente y a la derecha del nudo (i,j), esto es, relativo al nudo (i+1,j).
GS	GS(I,J)	Magnitud del giro en el nudo (i,j),
H	H(J)	Espesor del estrato j del suelo.
HA	HA(J)	Profundidad acumulada hasta la mitad del estrato j del suelo.
KN	KN(I,J)	Rigidez del nudo (i,j).
LA	LA(K)	Longitud acumulada hasta la reacción del terreno k inclusive, medida de izquierda a derecha a partir del primer eje de columnas.

TABLA V.2

ARREGLO	ELEMENTO	UTILIZACION
LR	LR(I,J)	Longitud relativa entre los centros de carga de las reacciones del terreno i y j.
ML	ML(I,J)	Coefficiente $\mu$ a la izquierda del nudo (i,j), ésto es, relativo al nudo (i-1,j).
MR	MR(I,J)	Coefficiente $\mu$ a la derecha del nudo (i,j), ésto es, relativo al nudo (i+1,j).
MV	MV(I,J)	Módulo de variación volumétrica asociada al elemento (i,j) del suelo.
NL	NL(I,J)	Coefficiente $\nu$ a la izquierda del nudo (i,j), ésto es, relativo al nudo (i-1,j).
NR	NR(I,J)	Coefficiente $\nu$ a la izquierda del nudo (i,j), ésto es, relativo al nudo (i+1,j).
OD	OD(I,J)	Coefficiente $\Omega$ a la derecha del nudo (i,j), ésto es, relativo al nudo (i+1,j).
OL	OL(I,J)	Coefficiente $\Omega$ a la izquierda del nudo (i,j), ésto es, relativo al nudo (i-1,i).
P	P(K)	Valor que a manera de contador, se asocia a cada una de las ecuaciones de que está formado el sistema a resolver.
PD	PD(I,J)	Magnitud del momento en el nudo (i,j) debido a la barra (i,j-1).
PL	PL(I,J)	Magnitud del momento en el nudo (i,j) debido a la barra (i-1,j).
PR	PR(I,J)	Magnitud del momento en el nudo (i,j) debido a la barra (i+1,j).
PU	PU(I,J)	Magnitud del momento en el nudo (i,j) debido a la barra (i,j+1).
PW	PW(I)	Carga concentrada en el extremo superior del eje de columnas i.
Q	Q(I,J)	Coefficiente asociado a la incógnita que representa la reacción del terreno i, en la ecuación j del análisis de hundimientos.

TABLA V.2

ARREGLO	ELEMENTO	UTILIZACION
R	$R(i,j)$	Coefficiente asociado a la incógnita que representa la reacción del terreno sobre la estructura bajo el eje de columnas $i$ , en la ecuación $j$ del sistema.
RD	$RD(i,j)$	Coefficiente asociado a la incógnita que representa la reacción del terreno sobre la estructura bajo el eje de columnas $i$ , en la ecuación del análisis de hundimientos que valúa el desplazamiento en la cimentación bajo el eje de columnas $j$ ; RD contiene valores extraídos de $Q$ , lo que a nivel de elementos se manifiesta como un cambio de variable.
RL	$RL(i,j)$	Coefficiente $p$ a la izquierda del nudo $(i,j)$ , esto es, relativo al nudo $(i-1,j)$ .
RR	$RR(i,j)$	Coefficiente $p$ a la derecha del nudo $(i,j)$ , esto es, relativo al nudo $(i+1,j)$ .
RS	$RS(i)$	Magnitud de la reacción del terreno asociada al eje de columnas $i$ de la estructura.
RZ	$RZ(i,j)$	Coefficiente asociado a la incógnita que representa la reacción del terreno sobre la estructura bajo el eje de columnas $i$ , en la ecuación del análisis de hundimientos que valúa el desplazamiento en la cimentación bajo el centro de la cruzja $j$ ; RZ contiene valores extraídos de $Q$ , lo que a nivel de elementos se manifiesta como un cambio de variable.
SI	$SI(j)$	Coefficiente $\sigma$ que indica si el nivel $j$ es o no el primero de la estructura.
T	$T(i,j)$	Coefficiente asociado a la incógnita que representa la reacción del terreno sobre la estructura bajo el centro de la cruzja $i$ , en la ecuación $j$ del sistema.
TD	$TD(i,j)$	Coefficiente asociado a la incógnita que representa la reacción del terreno sobre la estructura bajo el centro de la cruzja $i$ , en la ecuación del análisis de hundimientos que valúa el desplazamiento en la cimentación bajo el eje de columnas $j$ ; TD contiene valores extraídos de $Q$ , lo que a nivel de elementos se manifiesta como un cambio de variable.
TI	$TI(i,j)$	Momento de inercia de la trabe $(i,j)$ .

TABLA V.2

ARREGLO	ELEMENTO	UTILIZACION
TK	TK(I,J)	Rigidez relativa de la trabe (i,j)
TL	TL(I)	Distancia entre los ejes de columnas que limitan la crujía i de la estructura.
TS	TS(I)	Magnitud de la reacción del terreno asociada al centro de la crujía i de la estructura.
TZ	TZ(I,J)	Coefficiente asociado a la incógnita que representa la reacción del terreno sobre la estructura bajo el centro de la crujía i, en la ecuación del análisis de hundimientos que valúa el desplazamiento en la cimentación bajo el centro de la crujía j; TZ contiene valores extraídos de Q, lo que a nivel de elementos se manifiesta como un cambio de variable.
W	W(I,J)	Carga repartida en la trabe (i,j)
Y	Y(I)	Longitud de la reacción del terreno i.
YZ	YZ(I)	Empleado en una de las subrutinas de impresión para imprimir el elemento i de un cierto arreglo unidimensional conocido; YZ es impreso horizontalmente.
Z	Z(I,J)	Coefficiente asociado a la incógnita que representa el desplazamiento de la cimentación a la mitad de la crujía i, en la ecuación j del sistema.
ZS	ZS	Magnitud del desplazamiento de la cimentación bajo el centro de la crujía i.

TABLA V.3

VARIABLE	UTILIZACION
A	En las subrutinas de impresión de arreglos de datos, se emplea para generar el valor final de un sólo índice que varía; en la impresión de momentos, indica el número de trabes de que consta la estructura analizada.
AC	Contador de nudos articulados de la estructura.

TABLA V.3

VARIABLE	UTILIZACION
AE	Puede valer 0 ó 1, dependiendo de si el análisis estructural va a ser completo o incompleto, respectivamente.
AX	Durante la solución del sistema de ecuaciones, actúa como auxiliar en el intercambio de renglones, a fin de lograr una matriz de coeficientes con diagonal pesada.
B	En las subrutinas de impresión de arreglos de datos, se emplea como valor inicial de un subíndice que varía; en la impresión de momentos, indica el número de traves de que consta la estructura analizada.
BC	Ancho de la cimentación en una zona determinada de la subestructura requerida para entrar a la expresión de Boussinesq a calcular el valor correspondiente.
D1	En la multiplicación de matrices que lleva a determinar la magnitud de los hundimientos bajo los ejes de columnas, guarda la suma de una parte de los productos parciales correspondientes.
D2	En la multiplicación de matrices que lleva a determinar la magnitud de los hundimientos bajo los ejes de columnas, guarda la suma de una parte de los productos parciales correspondientes.
HA	Profundidad acumulada hasta la mitad de un determinado estrato del suelo, requerida para entrar a la expresión de Boussinesq a calcular el valor correspondiente.
I	Empleada como subíndice en la lectura, cálculo e impresión de múltiples arreglos.
IX	En la impresión de arreglos, se emplea como valor límite máximo de un subíndice que varía.
IZ	Contador de las traves que forman parte de la estructura, desplazándose de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba de la misma.
I1	Empleada como subíndice en la impresión de momentos asociados a las traves.
I2	Empleada como subíndice en la impresión de momentos asociados a las columnas.

TABLA V.3

VARIABLE	UTILIZACION
J	Empleada como subíndice en la lectura, cálculo e impresión de múltiples arreglos.
JA	Contador del número de columnas de la matriz de coeficientes asociado a los giros que intervienen como incógnitas.
JB	Empleada como subíndice en la impresión de los doblegiros correspondientes a los nudos que se encuentran del segundo nivel de la estructura, inclusive, hacia arriba.
JL	Durante la impresión, se emplea como subíndice para dejar renglones en blanco; en el cálculo de los valores de influencia, también se utiliza como subíndice para determinar longitudes asociadas a las reacciones del terreno.
JO	Empleada como contador para desglosar el vector solución, de modo que los doblegiros y las reacciones queden en arreglos diferentes.
JX	En la impresión de arreglos, se emplea como valor límite máximo de un subíndice que varía.
JZ	Contador de las columnas que forman parte de la estructura, desplazándose de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba de la misma.
J1	Empleada como subíndice en la impresión de momentos asociados a las trabes.
J2	Empleada como subíndice en la impresión de momentos asociados a las columnas.
K	Empleada como subíndice para identificar la ecuación del sistema a la que pertenecen los coeficientes que se van valuando; también se utiliza como subíndice en el cálculo e impresión de varios arreglos.
KR	Durante la aplicación de la expresión de Boussinesq, se usa como subíndice en el cálculo de longitudes por carga, anchos de cimentación y valores de influencia.
KX	En la impresión de los valores de influencia, se usa como valor límite máximo de un subíndice que varía.
L	Longitud asociada a una determinada reacción del terreno, requerida para entrar a la expresión de Boussinesq a calcular

TABLA V.3

VARIABLE	UTILIZACION
	el valor correspondiente; empleada también como subíndice auxiliar durante la aplicación del método de Gauss-Jordan para dar solución al sistema de ecuaciones.
LE	Durante el cálculo de los valores de influencia, se emplea como longitud parcial asociada a una determinada reacción del terreno, y es valuada a partir de las distancias relativas entre centros de carga.
LI	Durante el cálculo de los valores de influencia, se emplea como longitud parcial asociada a una determinada reacción del terreno, y es valuada a partir de las distancias relativas entre centros de carga.
LJ	Durante el cálculo de valores de influencia, se utiliza como subíndice en la determinación de longitudes acumuladas y parciales.
LS	Indica el tamaño máximo de estructura que puede analizarse en la computadora que se esté utilizando, de acuerdo con la capacidad de memoria de esta última; el tamaño se determina en base al producto $N \times NQ$ .
M	Es igual a $2N-1$ y representa el número total de reacciones del terreno que actúan sobre la estructura.
N	Representa el número de ejes de columnas de que consta la estructura.
NM	En caso de análisis incompleto, indica el número de niveles de la estructura que serán tomados en cuenta en aquel.
NP	Representa el número de estratos del suelo que serán considerados en el análisis.
NQ	En caso de análisis completo, representa el número real de niveles de la estructura; si se trata de análisis incompletos, indica el número de niveles de que se considerará formada la estructura después de reducirla.
NT	Representa la suma del total de nudos de que consta la estructura y del conjunto de reacciones del terreno que actúan sobre la estructura; se emplea para generar la matriz de coeficientes, sin considerar los nudos cuyos giros no intervienen como incógnitas.

TABLA V.3

VARIABLE	UTILIZACION
P	Valor parcial que arroja la expresión de Boussinesq cuando se entra a ella con $L = L_1$ .
PE	A ella se iguala el valor parcial que arroja la expresión de Boussinesq cuando se entra a esta última con $L = L_E$ .
PW	En caso de análisis incompleto, guarda, sucesivamente, las sumatorias que permiten calcular las cargas concentradas que se aplican sobre los ejes de columnas.
Q1	En caso de análisis completo, es igual a NQ; en caso de análisis incompleto, representa el número de niveles real de la estructura bajo estudio.
SA	Sumatoria empleada para valuar los coeficientes asociados a las incógnitas que representan las reacciones del terreno, en las ecuaciones del análisis de hundimientos.
SD	Sumatoria empleada para integrar el efecto de las cargas repartidas, a la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales; esta sumatoria aparece en el término independiente de la ecuación citada.
SK	Cuando se aplica la ecuación de equilibrio de fuerza cortante en alguna crujía, esta variable representa la sumatoria de las rigideces relativas de las trabes que forman parte de esa misma crujía.
SL	Cuando se aplica la ecuación de equilibrio de fuerza cortante en alguna crujía, esta variable representa la sumatoria que integra el efecto de las cargas repartidas situadas a la izquierda de dicha crujía, al término independiente de la ecuación citada.
SO	Cuando se aplica la ecuación de equilibrio de fuerza cortante en alguna crujía, esta variable representa la sumatoria de las cargas repartidas situadas a la izquierda de dicha crujía y forma parte del término independiente de la ecuación citada.
SP	Sumatoria empleada para integrar el efecto de las cargas concentradas, a las ecuaciones de equilibrio de fuerza cortante en cada crujía y de fuerzas verticales; la sumatoria en cuestión forma parte de los términos independientes de las ecuaciones mencionadas.
SW	Cuando se aplica la ecuación de equilibrio de fuerza cortante en alguna crujía, esta variable representa la sumatoria de las

TABLA V.3

VARIABLE	UTILIZACION
	cargas repartidas de dicha crujía y forma parte del término independiente de la ecuación citada.
S1	Al sustituir las ecuaciones del análisis de hundimientos en las que resultan de aplicar el método de las rigideces, se emplea como sumatoria para determinar el valor final de los coeficientes asociados a las reacciones del terreno que actúan bajo los ejes de columnas.
S2	Al sustituir las ecuaciones del análisis de hundimientos en las que resultan de aplicar el método de las rigideces, se emplea como sumatoria para determinar el valor final de los coeficientes asociados a las reacciones del terreno que actúan bajo el punto medio de las crujías.
V1	Se emplea para sintetizar la expresión de Boussinesq y así facilitar su aplicación.
V2	Se emplea para sintetizar la expresión de Boussinesq y así facilitar su aplicación.
V3	Se emplea para sintetizar la expresión de Boussinesq y así facilitar su aplicación.
V4	Se emplea para sintetizar la expresión de Boussinesq y así facilitar su aplicación.
V5	Se emplea para sintetizar la expresión de Boussinesq y así facilitar su aplicación.
V6	Se emplea para sintetizar la expresión de Boussinesq y así facilitar su aplicación.
WA	Es igual a NT-AC y se emplea para dimensionar la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes.
Z1	En la multiplicación de matrices que lleva a determinar la magnitud de los hundimientos bajo el punto medio de las crujías, guarda la suma de una parte de los productos parciales correspondientes.
Z2	En la multiplicación de matrices que lleva a determinar la magnitud de los hundimientos bajo el punto medio de las crujías, guarda la suma de una parte de los productos parciales correspondientes.

## V.4 INSTRUCTIVO PARA EL USO DEL PROGRAMA DE INTERACCION

### SUELO-ESTRUCTURA

En este subcapítulo se indicará, en forma detallada, cuales son los datos que es necesario proporcionar a la computadora y la manera de hacerlo, a fin de que el programa de interacción opere adecuadamente.

#### V.4.1 DETERMINACION DEL TAMAÑO DE LA ESTRUCTURA

Si se utiliza una computadora en la que la falta de capacidad no presente un problema inmediato, la determinación del tamaño de la estructura puede omitirse. Sin embargo, si se emplea una microcomputadora, hablando en general, y una Radio Shack II, hablando en particular, la determinación del tamaño de la estructura es el primer paso a dar en el uso del programa. Esto se hace en función del número de ejes de columna  $N$  y del número de niveles (incluida la cimentación)  $NQ$  de que aquella esté formada. Al efectuar el producto  $N \times NQ$ , tendremos una pauta para saber si la estructura en cuestión podrá ser analizada o no, y en caso afirmativo, si dicho análisis será completo o incompleto, todo ello dependiendo de la capacidad de memoria de la máquina:

- cuando el producto  $N \times NQ$  sea menor o igual que 18, la estructura asociada a esos valores podrá ser analizada en forma íntegra por la microcomputadora.
- si el producto  $N \times NQ$  excede de 18, entonces  $NQ$  deberá reducirse hasta un valor que permita el cumplimiento de la condición establecida, pero cuidando que dicho valor sea mayor o igual que 4; en efecto,  $NQ$  deberá ser siempre

mayor o igual que 4, porque se acepta que la rigidez de los cuatro primeros niveles de una estructura es la que fundamentalmente influye en la interacción con el suelo. Al efectuarse la reducción, los niveles en exceso serán desechados por la computadora y las cargas repartidas asociadas a cada uno de ellos ( $w_{i,j}$  con  $i$  variando de 1 a  $N-1$  y  $j > 4$ ), serán multiplicadas por sus respectivas longitudes tributarias a ambos lados del eje de columna  $i$  ( $l_{i-1}/2$  y  $l_i/2$ ,  $i$  variando de 1 a  $N-1$ ), a fin de transformar dichas cargas en cargas concentradas. Estas últimas se supondrán entonces aplicadas sobre los nudos que les corresponden en el último nivel que vaya a considerarse. Aunque la simplificación que acabamos de describir nos permitirá ajustar el tamaño de la estructura a la capacidad de la microcomputadora, es evidente que el análisis estructural resultará incompleto y que los únicos valores de utilidad serán los relativos a las reacciones del terreno, pues podrán emplearse como datos en cualquier programa convencional de análisis estructural, propio de alguna computadora con suficiente capacidad.

\* finalmente, en caso de que el producto  $N \times NQ$  exceda 18 aún después de asignar el valor de cuatro a  $NQ$ , la estructura en cuestión no podrá ser analizada en la microcomputadora por falta de capacidad de la misma. Conviene aclarar que el valor de  $N$  no deberá modificarse en ningún caso.

La tabla V.4 muestra la situación de cada tamaño de estructura respecto a las ideas que acabamos de plantear.

	ANALISIS COMPLETO $N \times NQ \leq 18$	ANALISIS INCOMPLETO $N \times NQ > 18$	ANALISIS NULO $N \times NQ > 18$
N	NQ	NQ	Nivel hasta el que se toma la estructura. La capacidad de la microcomputadora se excede.
2	$\leq 9$	$> 9$	9
3	$\leq 6$	$> 6$	6
4	$\leq 4$	$> 4$	4
5	$\leq 3$	-	-
6	$\leq 3$	-	-
7	$\leq 2$	-	-
8	$\leq 2$	-	-
9	$\leq 2$	-	-

Tabla V.4

En el caso de análisis incompleto, la capacidad de la microcomputadora puede ser aumentada ligeramente, aceptando que NQ puede reducirse a un valor menor que 4. Esto implica que el número de niveles que va a considerarse que influyen con su rigidez en la interacción con el suelo será igualmente menor que 4. En consecuencia, los valores que se obtengan en la solución para las reacciones del terreno también sufrirán una modificación, alejándose de los que se consideran correctos para este tipo de análisis. Las estructuras reducidas que resultarían de hacer la consideración anterior, encontrarían cabida en los espacios de la tabla V.4 marcados con una raya horizontal.

El límite superior de 18 indicado en la tabla V.4, fue determinada para una microcomputadora Radio Shack II a base de sondear su capacidad de

memoria con estructuras de diferentes tamaños. Para otros tipos de microcomputadoras con mayor o menor capacidad, dicho límite puede variar y para conocerlo habrá que proceder de la misma manera.

#### V.4.2 FORMA DE PROPORCIONAR LOS DATOS

Los datos que requiere el programa son los que se indican en el siguiente listado y deberán ordenarse en esa misma secuencia:

1. Valor que indica el tamaño máximo de estructura que podrá analizarse en la computadora dependiendo de la capacidad de esta última.
2. Número de ejes de columnas, número de pisos y número mínimo de niveles que se aceptará que tienen influencia con su rigidez en la interacción con el suelo, este último dato únicamente en el caso de análisis incompleto.
3. Distancia entre cada eje de columnas, en metros.
4. Altura de cada entrepiso, en metros.
5. Carga uniforme en cada una de las trabes, en ton/m.
6. Módulo de elasticidad de cada trabe, en  $\text{Kg/cm}^2$ .
7. Módulo de elasticidad de cada columna, en  $\text{Kg/cm}^2$ .
8. Momento de inercia de cada trabe, en  $\text{cm}^4$ .
9. Momento de inercia de cada columna, en  $\text{cm}^4$ .
10. Ancho de la cimentación bajo cada eje de columnas y bajo el centro de cada crujía, en metros.
11. Etiqueta asociada a cada nudo para identificar si éste es continuo o articulado.
12. La magnitud del algoritmo  $2N-1$  y el número de estratos del suelo que vayan a utilizarse en el análisis.

13. Espesor de cada uno de los estratos del suelo considerados, en metros.
14. Módulo de variación volumétrica de cada estrato del suelo considerado, en  $m^2/ton$ .

A reserva de que más adelante se abundará sobre cada uno de los catorce puntos anteriores, conviene citar aquí varios lineamientos generales aplicables a todos ellos. En efecto, dentro del programa que nos atañe, el intervalo que comprende de las instrucciones 10000 a 10999 inclusive, se ha reservado para alojar en él los datos; esto significa que, mientras los grupos de datos se suministren en el orden establecido y con número de instrucción creciente, puede asignárseles cualquier cifra comprendida en el intervalo mencionado. Se recomienda, sin embargo, que las instrucciones correspondientes a los datos se etiqueten de diez en diez e iniciando en 10000, a fin de mantener una secuencia lógica y una limpieza en el programa. Las etiquetas ligadas a las instrucciones en cuestión deben seguirse siempre de la palabra "DATA", a fin de que los valores que se encuentren a continuación de esta última, sean identificados como datos por la máquina.

En caso de que alguna lista de datos llegue a exceder el número de caracteres disponible en una línea de instrucción - la cual abarca de hecho varios renglones del video - entonces, dicha lista tendrá que cortarse hasta un cierto dato, y continuarse en una nueva línea de instrucción, pero cuidando que la etiqueta correspondiente guarde un orden lógico respecto a las etiquetas que vayan a asignarse a instrucciones posteriores. Así por ejemplo, supongamos que los valores de los momentos de inercia de las trabes se teclan en la instrucción 10070 y que la lista que forman excede la capacidad de la línea; respetando una numeración de diez en diez, el siguiente grupo de datos, correspondiente a los momentos de inercia de las columnas, deberá

teclearse en la instrucción 10080. La situación anterior nos obligará a cortar la lista de momentos de inercia de las trabes hasta un cierto dato y a continuarla en cualquier instrucción comprendida en el intervalo 10070-10080, excluyendo los extremos.

Finalmente, cabe añadir que los valores de una lista de datos deben separarse por comas, y que el último valor de una lista, haya ésta sido cortada o no, no debe seguirse de coma.

A continuación, se detalle cada uno de los catorce puntos enumerados líneas arriba.

#### V.4.2.1 Valor que indica el tamaño máximo de estructura que podrá analizarse en la computadora

Para una microcomputadora Radio-Shack II, el valor en cuestión es de 18. Para otros tipos de microcomputadoras, dicho valor se determinará investigando la capacidad de la máquina con estructuras de tamaños diversos. Una vez que llegue a conocerse el tamaño máximo de estructura que podrá analizarse en la microcomputadora utilizada, el valor límite vendrá dado por el resultado del producto  $N \times NQ$ , calculado con el número de ejes de columnas  $N$  y el número de niveles  $NQ$ , incluida la cimentación, propios de la misma estructura.

Finalmente, si se utiliza una computadora en la que se sepa de antemano que la falta de capacidad no representará una limitación, entonces, para satisfacer este punto, bastará proporcionar un valor que exceda la dimensión  $N \times NQ$  de la estructura particular que vaya a analizarse. Así por ejemplo, si necesitamos analizar un marco de  $15 \times 10$ , el valor que alimentemos como dato deberá ser mayor o igual que 150.

Después de establecer la magnitud del límite superior en atención a las ideas anteriores, se proceden a teclear, separándolas por un espacio en

blanco, la cifra 10000 (que representa la instrucción del mismo número), la palabra "DATA", y la magnitud del límite superior.

Ejemplo: si el límite superior fuera 18, teclearíamos entonces lo siguiente:

10000 DATA 18

#### V.4.2.2 Número de ejes de columnas, número de pisos y número mínimo de niveles que se aceptará que tienen influencia con su rigidez en la interacción con el suelo

Estos datos se proporcionan después de teclear la instrucción 10010 y la palabra "DATA" y deben ir separados por comas. El primer valor que se da es el número de ejes de columnas N y el segundo el número de pisos NQ. El tercer valor se suministrará únicamente en el caso de análisis incompleto (ver tabla V.4, cuarta columna) y se aceptará como generalidad, que su valor mínimo no deberá ser menor que 4 (para mayor detalle, consultar el subcapítulo V.1 y el inciso V.4.1).

Ejemplo: si el límite superior es de 18 y se requiere analizar una estructura de 4x4 teclearíamos así:

10010 DATA 4,4

Sin embargo, si la estructura en cuestión es de 4x6, entonces la instrucción anterior quedaría como:

10010 DATA 4,6,4

#### V.4.2.3 Distancia entre cada eje de columnas

Las distancias se dan en metros y procediendo de izquierda a derecha de la estructura; deben proporcionarse después de teclear "10020 DATA" y separarse con comas.

Ejemplo: si nos refiriéramos a la estructura que se muestra en la figura V.1, las distancias entre sus ejes de columnas tendrían que teclearse así:

10020 DATA 8,6

#### V.4.2.4 Altura de cada entrepiso

Dichas alturas se dan en metros, de abajo hacia arriba de la estructura, a continuación de haber escrito en la pantalla "10030 DATA" y separadas por comas.

Debemos tener en mente que si la estructura bajo estudio tiene unos  $N$  y  $NQ$  (número de ejes de columnas y número de niveles, respectivamente) tales que  $N \times NQ > 18$ , el análisis será incompleto o nulo. Ahora bien, si al cancelar algunos de los niveles superiores de la estructura caemos en el caso de análisis incompleto (ver tabla V.4, cuarta columna), bastará proporcionar como datos las alturas de los entrepisos que queden formando parte de la estructura una vez que ésta haya sido reducida.

Ejemplo: para la estructura de la figura V.1, los datos relativos a este punto quedarían como sigue:

10030 DATA 4,3

#### V.4.2.5 Carga uniforme en cada una de las trabes

La carga uniforme en cada una de las trabes se da en ton/m. En conjunto, estas cargas se suministran recorriendo la estructura de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, respectiva

y simultáneamente. Para alimentarlas en la computadora, las cargas se escriben después de "10040 DATA", separadas por comas.

Ejemplo: si consideráramos el marco de la figura V.1, los datos de las cargas se proporcionarían de la manera siguiente:

10040 DATA 4,5,3,4,1.5,2.5

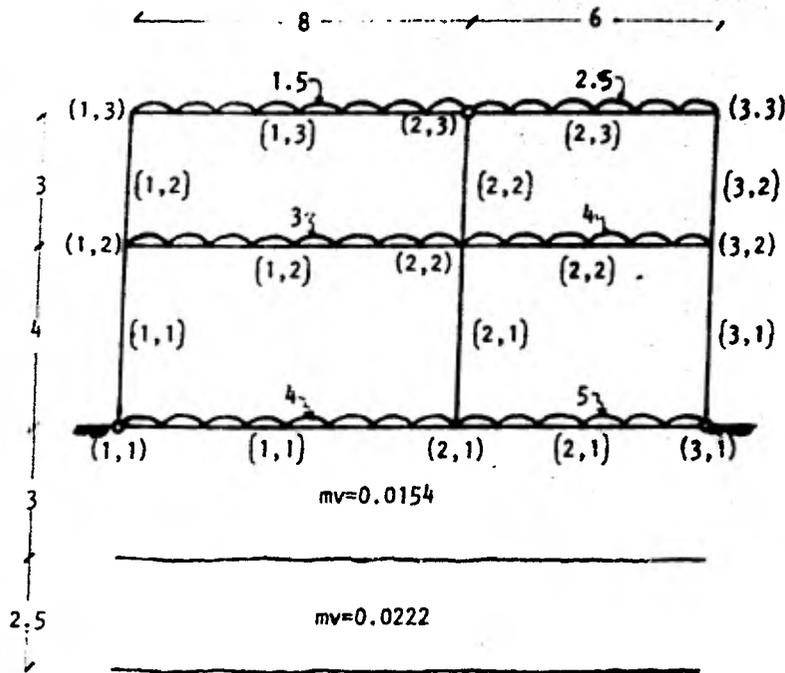
#### V.4.2.6 Módulo de elasticidad de cada trabe

Los módulos de elasticidad de las trabes, en  $\text{Kg/cm}^2$ , se van proporcionando conforme se recorre la estructura de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, se escriben en la pantalla en seguida de "10050 DATA" y se separan por comas.

En caso de análisis incompleto, se deberán proporcionar únicamente los módulos de elasticidad correspondientes a las trabes de los niveles que vayan a tomarse en cuenta (ver tabla V.4, cuarta columna). En otras palabras, deberán omitirse los valores en cuestión de las trabes que formen parte de los niveles que vayan a cancelarse, pues datos bajo tales circunstancias no son considerados en el programa.

Ejemplo: para la estructura de la figura V.1, esta instrucción quedaría así:

10050 DATA 180000,180000,170000,170000,160000,160000



Distancias en m.  
 Cargas en ton/m  
 t = trabe  
 c = columna  
 E = módulo de elasticidad en Kg/cm<sup>2</sup>  
 I = momento de inercia en cm<sup>4</sup>  
 mv = módulo de variación volumétrica del suelo en m<sup>2</sup>/ton  
 El ancho de la cimentación es constante e igual a 6m.

$$\begin{aligned}
 Et_{(1,1)} &= Et_{(2,1)} = 180000 & ; & \quad Et_{(1,2)} = Et_{(2,2)} = 170000 & ; & \quad Et_{(1,3)} = Et_{(2,3)} = 160000 \\
 Ec_{(1,1)} &= Ec_{(1,2)} = 200000 & ; & \quad Ec_{(2,1)} = Ec_{(2,2)} = 195000 & ; & \quad Ec_{(3,1)} = Ec_{(3,2)} = 190000 \\
 It_{(1,1)} &= It_{(1,2)} = It_{(1,3)} = 1300000 & ; & \quad It_{(2,1)} = It_{(2,2)} = It_{(2,3)} = 1250000 \\
 Ic_{(1,1)} &= Ic_{(2,1)} = Ic_{(3,1)} = 150000 & ; & \quad Ic_{(1,2)} = Ic_{(2,2)} = Ic_{(3,2)} = 140000
 \end{aligned}$$

FIGURA V.1

#### V.4.2.7 Módulo de elasticidad de cada columna

Estos datos se proporcionan en  $\text{Kg/cm}^2$  y recorriendo la estructura de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba como en los casos anteriores; se incluyen en la computadora a continuación "10060 DATA", separados por comas.

Si el análisis va a ser incompleto, solo deberán darse como datos los valores de los módulos de elasticidad de las columnas que queden por debajo del nivel hasta el que vaya a ser tomada la estructura (tabla V.4, cuarta columna). El resto de estos valores, asociados a las columnas que se encuentren por encima del nivel citado, deberán omitirse como datos.

Ejemplo: utilizando la figura V.1, podríamos establecer lo siguiente:

10060 DATA 200000,195000,190000,200000,195000,190000

#### V.4.2.8 Momento de inercia de cada trabe

Los momentos de inercia de las trabes se dan en  $\text{cm}^4$  y al movernos de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba a través de la estructura. Separados por comas, sus valores se teclean a continuación de "10070 DATA".

Si ocurre que tendremos un análisis incompleto, se darán como datos únicamente los momentos de inercia de las trabes que formen parte de los niveles que vayan a conservarse en la estructura bajo estudio (tabla V.4, cuarta columna).

Ejemplo: aplicando lo anterior a la figura V.1:

10070 DATA 1300000,1250000,1300000,1250000,1300000,1250000

#### V.4.2.9 Momento de inercia de cada columna

Los momentos de inercia de las columnas se alimentan a la computadora después de "10080 DATA", en forma enteramente similar a como se hace con los momentos de inercia de las trabes. Cuando el tamaño de la estructura de pie a un análisis incompleto, se consultará la tabla V.4 (cuarta columna) para saber hasta qué nivel será considerada la estructura. De acuerdo con lo anterior, solo se proporcionarán como datos los momentos de inercia asociados a las columnas que se localicen por debajo del nivel en cuestión.

Ejemplo: de la figura V.1, estos datos quedarían así:

10080 DATA 150000,150000,150000,140000,140000,140000

#### V.4.2.10 Ancho de la cimentación bajo cada eje de columna y bajo cada crujía

Estos datos se proporcionan en m, comenzando por el extremo izquierdo de la estructura y continuando hacia la derecha. Se dan  $2N-1$  valores, separados por comas, donde el primer valor corresponde al primer eje de columnas, el segundo al centro de la primera crujía, el tercero al segundo eje de columnas y así sucesivamente hasta el valor  $2N-1$  que corresponde al enésimo eje de columnas. Los valores citados se suministran después de "10090 DATA".

Ejemplo: utilizando nuevamente la figura V.1, tendríamos lo siguiente:

10090 DATA 6,6,6,6,6

#### V.4.2.11 Etiqueta asociada a cada nudo para identificar si éste es continuo o articulado

La etiqueta que se menciona en este punto consiste en un 0 para marcar nudos articulados y en un 1 para marcar nudos continuos. Los nudos deben recorrerse de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, asignándoles al mismo tiempo el número que les vaya correspondiendo de acuerdo con la regla que acabamos de describir. La combinación de unos y ceros que resulte deberá separarse por comas y escribirse en la pantalla inmediatamente después de "10100 DATA".

Si se presenta el caso de análisis incompleto, se recurrirá a la tabla V.4 (cuarta columna) a fin de determinar el nivel hasta el que será tomada la estructura. Evidentemente, solo se darán como datos las etiquetas de los nudos que formen parte de la estructura así reducida.

Ejemplo: si se tratara de la estructura de la figura V.1, escribiríamos como se indica a continuación:

10100 DATA 0,1,0,1,1,1,1,0,1

#### V.4.2.12 La magnitud del algoritmo 2N-1 y el número de estratos del suelo a utilizarse en el análisis

Primero que nada se teclea "10110 DATA". A continuación y separadas por comas, se escriben el resultado de la operación 2N-1 y el número de estratos del suelo que vayan a utilizarse en el análisis, en ese mismo orden.

Ejemplo: para el caso presentado en la figura V.1, los datos en cuestión serían los siguientes:

10110 DATA 5,2

#### V.4.2.13 Espesor de cada uno de los estratos del suelo considerados

Estas magnitudes se dan en metros, principiando por el estrato más superficial y continuando luego hacia abajo; los valores de los espesores se colocan en seguida de "10120 DATA", separados por comas.

Ejemplo: recurriendo de nueva cuenta a la estructura de la figura V.1, llegaríamos a establecer que:

10120 DATA 3,2.5

#### V.4.2.14 Módulo de variación volumétrica mv de cada estrato del suelo considerado

Los datos relativos a este punto, en  $m^2/ton$ , se escriben en la pantalla siguiendo a "10130 DATA" y mediando comas entre ellos. Se proporcionarán  $2N-1$  valores para cada estrato del suelo, comenzando en el extremo izquierdo de la estructura y prosiguiendo hacia la derecha y variando desde el estrato más superficial hasta el más profundo. De esta manera, los primeros  $2N-1$  valores de mv corresponden al primer estrato del suelo, los segundos  $2N-1$  valores al segundo estrato, etc. En particular, los grupos de  $2N-1$  valores están distribuidos en la forma siguiente: el primer valor de cada grupo está asociado al primer eje de columnas, el segundo al centro de la primera cruz, el tercero al segundo eje de columnas, el cuarto al centro de la segunda cruz y así sucesivamente hasta el valor  $2N-1$ , asociado al enésimo eje de columnas.

Ejemplo: recurriendo por última vez a la estructura de la figura V.1, tendríamos:

10130 DATA 0.0154,0.0154,0.0154,0.0154,0.0154,0.0222,0.0222,0.0222,0.0222,  
0.0222

## V.5 INDICACIONES SOBRE LA IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS EN

### EL LISTADO DE UNA CORRIDA

Una vez que el programa de interacción suelo-estructura es ejecutado por una computadora, la máquina imprime un listado que contiene la información relativa a los datos que le fueron proporcionados según las indicaciones del inciso V.4.2, así como lo referente a los resultados. Para facilitar la identificación de cada grupo de datos o resultados, se ha tenido buen cuidado de encabezarlos con los títulos adecuados, y de presentarlos en forma de arreglos ordenados. Esta disposición permite, además, localizar rápidamente cualquier valor particular, y en el caso de los datos, verificar que todos ellos hayan sido suministrados en forma correcta.

La primera parte del listado corresponde a los datos, los cuales vienen impresos en la misma secuencia en la que deben ser alimentados a la computadora (ver el inciso V.4.2).

Terminada la impresión de los valores dados, el listado que arroja la máquina continúa con la información concerniente a los resultados. Estos últimos comprenden lo siguiente y aparecen en el orden en que se enumeran a continuación: valores de influencia en las diversas secciones en que fue dividido el subsuelo, requeridos aquellos por la presencia de las reacciones del terreno sobre la estructura; matriz de coeficientes de las variables que actúan como incógnitas y vector de términos independientes, arreglos que se forman a partir de las ecuaciones generadas para resolver una cierta estructura y que constituyen el paso anterior a la solución propiamente dicha; vector solución con los valores de los giros y de las

reacciones del terreno sobre la estructura (incógnitas primarias); magnitudes de los hundimientos totales (incógnitas secundarias), en base a las cuales pueden conocerse fácilmente los hundimientos diferenciales; momentos flexionantes en los extremos de las barras que forman la estructura y a partir de los cuales llegan a determinarse los elementos mecánicos restantes.

Durante la impresión del listado que contiene los datos y resultados, pueden presentarse las situaciones particulares que se desglosan a continuación:

- \* Si se da el caso de una estructura que para poder ser analizada requiera que algunos de sus niveles sean eliminados, la computadora mandará imprimir un letrero con el número de pisos de que se considerará formada la estructura reducida y que explicará que el análisis estructural será incompleto; el letrero en cuestión aparecerá inmediatamente después de que se impriman, el número de ejes de columnas y el número de niveles reales de la estructura en estudio.
- \* Para el caso extremo de que el tamaño de la estructura exceda la capacidad de memoria de la computadora que se esté utilizando y que, por tanto, la estructura en cuestión no pueda ser analizada, la máquina mandará imprimir un letrero ratificando lo anterior e inmediatamente después dará por terminada la ejecución.

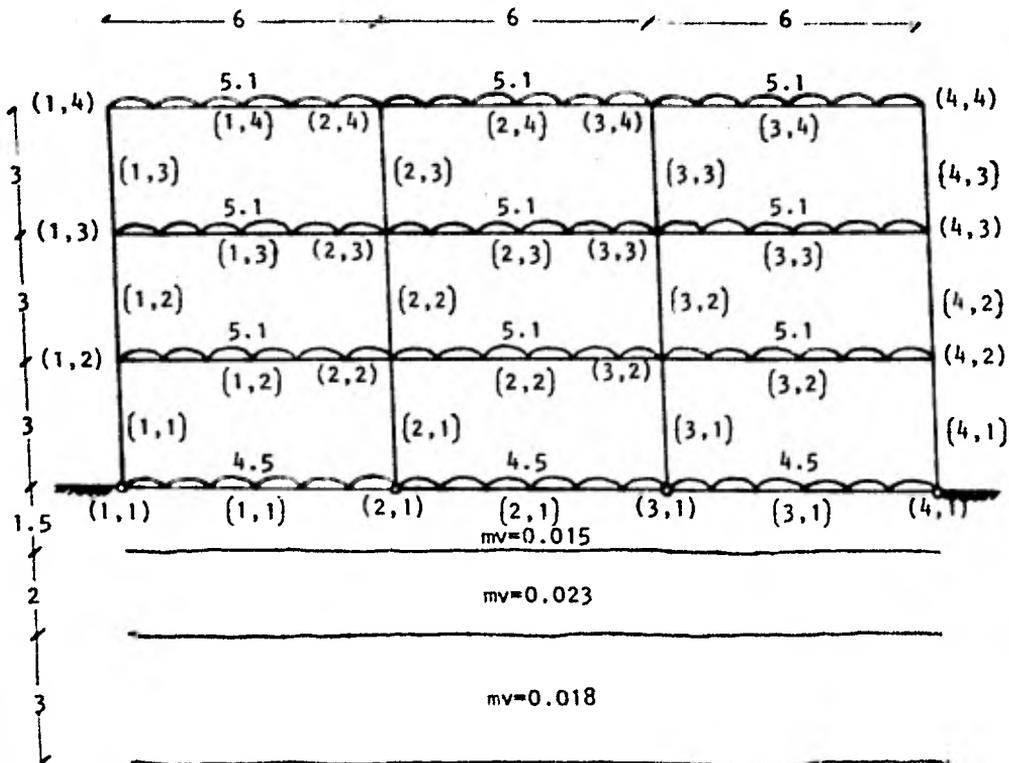
## V.6 PROBLEMAS

En este inciso se presentan dos problemas de estructuras que se resuelven empleando el programa de computadora. El primero se refiere a una

estructura de cuatro ejes de columnas y cuatro niveles, y sirve para ejemplificar un análisis completo. El segundo corresponde a una estructura de cuatro ejes de columnas y siete niveles, que cae en el caso de análisis incompleto.

A continuación, se indican la notación y los datos correspondientes a cada problema, y la manera de suministrar los datos a la computadora. Los listados con las soluciones a los problemas 1 y 2, se localizan en los anexos III y IV, respectivamente.

### Problema 1



$$f'c=250 ; E=3000 \sqrt{f'c}=4.7434 \times 10^4 ; I_t=2.84 \times 10^6 ; I_c=6.4 \times 10^5 ; b=12$$

## TABLA EXPLICATIVA

- + Los nudos, las trabes y las columnas, se identifican con pares ordenados cuyos primero y segundo elementos crecen conforme nos movemos de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba en la estructura, respectivamente.
- + El número de ejes de columnas  $N$  y el número de niveles  $NQ$  de la estructura, son ambos iguales a 4.
- + Los nudos de la subestructura son articulados y los de la superestructura continuos
- + Las cotas están en m.
- + Las cargas uniformes están en ton/m.
- + El módulo de variación volumétrica del suelo  $m_v$  está en  $m^2/\text{ton}$ .
- + La resistencia especificada del concreto a compresión  $f'_c$  está en  $\text{Kg}/\text{cm}^2$ .
- + El módulo de elasticidad  $E$  de los elementos estructurales está en  $\text{Kg}/\text{cm}^2$  y es igual a  $3000 \sqrt{f'_c}$ . El valor de 3000 se emplea cuando se pretende hacer la determinación de los asentamientos a largo plazo, tal como ocurre en este caso.
- + El momento de inercia  $I$  de las trabes  $t$  y de las columnas  $c$  está en  $\text{cm}^4$ .
- + El ancho de la cimentación  $b$  está en m y es constante.

Antes de proporcionar los datos a la computadora, debemos tener en mente que el tamaño de la estructura bajo estudio, dado por el producto  $N \times NQ$ , es de 16. Suponiendo que el tamaño máximo de estructura que admite la memoria de la máquina que vamos a emplear es de 18, tendremos entonces un análisis completo ( $18 > 16$ ).

La manera de teclear los datos, de acuerdo con lo establecido en el instructivo de uso del programa (subcapítulo V.4), es la siguiente:

10000 DATA 18

10010 DATA 4,4

10020 DATA 6,6,6

10030 DATA 3,3,3

10040 DATA 4.5,4.5,4.5,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1

10050 DATA 47434,47434,47434,47434,47434,47434,47434,47434,47434,47  
434,47434,47434

10060 DATA 47434,47434,47434,47434,47434,47434,47434,47434,47434,47  
434,47434,47434

10070 DATA 2840000,2840000,2840000,2840000,2840000,2840000,2840000,  
2840000,2840000,2840000,2840000,2840000

10080 DATA 640000,640000,640000,640000,640000,640000,640000,640000,  
640000,640000,640000,640000

10090 DATA 12,12,12,12,12,12,12,

10100 DATA 0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1

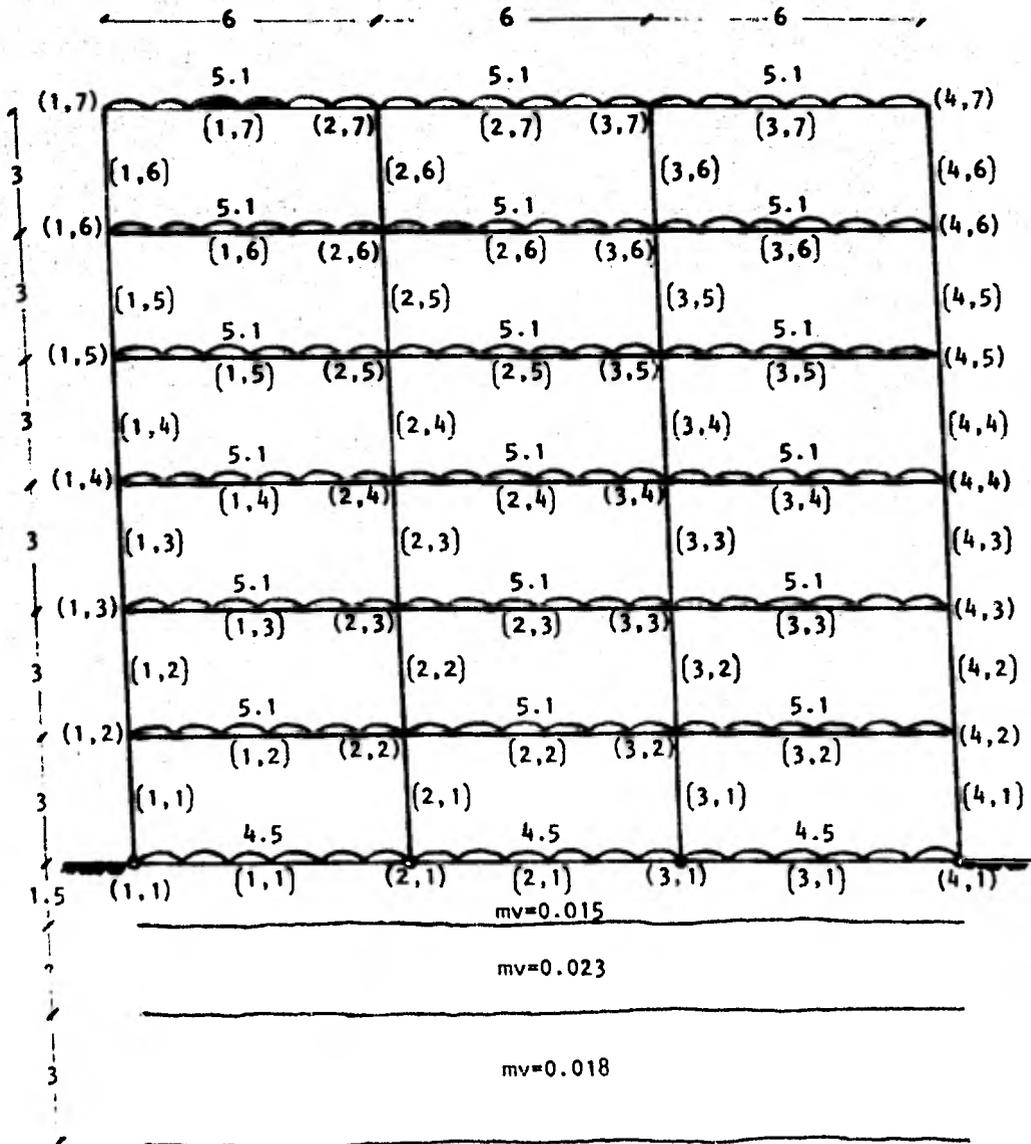
10110 DATA 7,3

10120 DATA 1.5,2,3

10130 DATA 0.015,0.015,0.015,0.015,0.015,0.015,0.015,0.023,0.023,0.  
023,0.023,0.023,0.023,0.023,0.018,0.018,0.018,0.018,0.018,0.018,0.0

18

Problema 2



$f'c=250$  ;  $E=3000 \sqrt{f'c} = 4.7434 \times 10^4$  ;  $I_t=2.84 \times 10^6$  ;  $I_c=6.4 \times 10^5$  ;  $b = 12$

La tabla explicativa del problema 1 es enteramente aplicable al problema 2, salvo por el hecho de que aquí el número de niveles  $NQ$  de la estructura es igual a 7. Esto también significa que el tamaño de la estructura  $N \times NQ$  es igual a 28, valor que supera al tamaño máximo de 18 establecido para la máquina que vamos a emplear. Sin embargo, la tabla V.4 indica que si tomamos en cuenta únicamente los cuatro primeros niveles de la estructura, ésta puede ser sometida a un análisis incompleto. En efecto, al proceder de esta manera, la estructura reducida llega a constar de cuatro ejes de columnas y cuatro niveles, y tiene en consecuencia un tamaño igual a 16, que es menor que el tamaño máximo de 18. Por lo que respecta a las cargas repartidas de los niveles que se cancelan, ya hemos dicho varias veces que se transforman en cargas concentradas que se suponen aplicadas en los ejes de columnas, a nivel del último piso que se considera.

Recurriendo al instructivo de uso del programa (subcapítulo V.4), los datos relativos a la estructura del problema 2 deben teclearse de la siguiente manera:

10000 DATA 18

10010 DATA 4,7,4

10020 DATA 6,6,6

10030 DATA 3,3,3

10040 DATA 4.5,4.5,4.5,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,  
5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1,5.1

10050 DATA 47434,47434,47434,47434,47434,47434,47434,47434,47434,47  
434,47434,47434

10060 DATA 47434,47434,47434,47434,47434,47434,47434,47434,47434,47  
434,47434,47434

10070 DATA 2840000,2840000,2840000,2840000,2840000,2840000,2840000,  
2840000,2840000,2840000,2840000,2840000

10080 DATA 640000,640000,640000,640000,640000,640000,640000,640000,  
640000,640000,640000,640000

10090 DATA 12,12,12,12,12,12,12

10100 DATA 0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1

10110 DATA 7,3

10120 DATA 1.5,2,3

10130 DATA 0.015,0.015,0.015,0.015,0.015,0.015,0.015,0.023,0.023,0.  
023,0.023,0.023,0.023,0.018,0.018,0.018,0.018,0.018,0.018,0.0

## VI

CONCLUSIONES

Este capítulo tiene por objeto la exposición de las conclusiones a las que se llegó durante el desarrollo de este trabajo. Dichas conclusiones se indican a continuación.

- a. El método de análisis con interacción que se presenta constituye un intento por adentrarse en el estudio del comportamiento conjunto de la estructura y el suelo.

Estos dos medios, si bien de naturaleza óferente, quedan íntimamente ligados al entrar en contacto, condición que indica la conveniencia de someter a ambos a un análisis de conjunto. Un análisis de este tipo no solo se apega más a la situación real que viven la estructura y el suelo como unidad, sino que además, a través de los resultados que arroja permite un diseño más adecuado de los elementos estructurales que vayan a requerirse.

- b. El método que se propone tiene limitaciones evidentes, pues el planteamiento que se ofrece no toma en cuenta los efectos de los desplazamientos laterales y en consecuencia es preferentemente aplicable a estructuras sin fuerte asimetría en geometría y cargas. De no cumplirse esto último, los desplazamientos laterales que ocurren en la estructura, por pequeños que resulten, provocan la aparición de un desequilibrio del

mismo orden entre algunos de sus elementos mecánicos, específicamente entre las fuerzas normales de las trabes. Sin embargo, para el tipo de estructuras que se estudian, el desequilibrio en cuestión es poco importante, porque, en general, las magnitudes de tales fuerzas son pequeñas comparadas con las del resto de los elementos mecánicos y por tanto tienen poca influencia en el diseño de los elementos estructurales correspondientes.

Por otro lado, siendo el planteamiento novedoso, las simplificaciones que se hacen se justifican como una medida para no complicar demasiado la exposición del método y para hacer el planteamiento accesible a cualquier persona interesada. Además, si bien es cierto que las condiciones a que se supone sujeta la unidad estructura-suelo son las más simples, también es verdad que son las más generales.

- c. El método con interacción que se presenta en esta tesis se desarrolla en base a un análisis plano o bidimensional. Aunque para cierto tipo de estructuras y desde el punto de vista del análisis estructural, la condición anterior pone al método en desventaja respecto de los sistemas convencionales, los resultados que aquel nos proporciona para el suelo lo convierten en una herramienta útil para el ingeniero civil. Baste recordar que uno de los problemas principales a que se enfrenta el ingeniero estructurista al realizar sus análisis, es el del desconocimiento de los efectos del terreno sobre la estructura.

Por otro lado, aunque un análisis tridimensional de la unidad estructura-suelo es ciertamente factible, la complejidad del mismo y el número tan grande de incógnitas que tendría que manejarse, hacen su planteamiento cuestionable.

En resumen, lo más recomendable por el momento es lo siguiente: emplear el método con interacción para realizar el análisis bidimensional del conjunto estructura-suelo; calibrar los resultados que se obtengan para el terreno con mediciones de campo; y, aplicar dichos resultados como datos en los métodos convencionales de análisis, a fin de lograr la solución completa de la estructura.

- d. El método objeto de este trabajo puede aplicarse a estructuras que presenten algunos de sus nudos articulados. Sin embargo, un número excesivo de nudos articulados o una incorrecta disposición de los mismos dentro de una cierta estructuración, pueden ocasionar la aparición de mecanismos que conducirían a la falla inmediata de la estructura bajo estudio. Así mismo, conviene señalar que a medida que el tamaño de una estructura aumenta, resulta más difícil visualizar las combinaciones de nudos articulados que pueden dar lugar a mecanismos. La moraleja asociada a las ideas anteriores puede resumirse en lo siguiente: a pesar de que el método en cuestión nos da la opción a considerar nudos articulados, esto no significa que en un momento dado podamos estructurar con ellos colocándolos al azar; más bien, esa ventaja debemos aprovecharla aplicando el método a casos reales ya utilizados, como puede ser el de una estructura de acero con los nudos de la cimentación articulados.
- e. Por su misma naturaleza, la mayoría de las juntas que se emplean en las estructuras de acero para ligar dos o más miembros estructurales, no son ni totalmente continuas ni ciento por ciento articuladas. Un estudio de las mismas puede llevarnos a establecer coeficientes que nos permitan valuar las rigideces angular y lineal y los momentos de empotramiento

que deben asignárseles a los elementos estructurales conectados a través de ellas. Es indudable que la utilización de este tipo de coeficientes es conveniente, porque no solo conduce hacia análisis y diseños estructurales más apegados a la realidad, sino que además otorga una mayor generalidad a los métodos de análisis en sí.

Así por ejemplo, el método que se presenta en esta tesis recurre al empleo de coeficientes similares a los anteriores, a fin de hacer posible la consideración simultánea de nudos continuos y articulados. Evidentemente, esta particularidad contribuye a incrementar el ámbito de aplicación del método en cuestión.

f. El número de incógnitas a que da lugar la aplicación del método de análisis con interacción suelo-estructura, es mayor que el que resulta de emplear los métodos de análisis convencionales. En efecto, la incorporación de las reacciones del terreno, desconocidas sin duda, al análisis de la estructura, no solo incrementa el orden del sistema de ecuaciones que debe resolverse, sino que, además, provoca que el planteamiento del mismo involucre la ejecución de diversos cálculos adicionales. Lo anterior significa que, de no ser por el auxilio que nos brindan las máquinas computadoras, el método de interacción quedaría en evidente desventaja respecto a los métodos tradicionales de análisis y en consecuencia, su concepción y formulación permanecerían en un nivel puramente teórico. Afortunadamente, la existencia de las computadoras permite llevar el planteamiento en cuestión a la forma de programa, y utilizarlo para resolver problemas reales de Ingeniería civil.

- g. El programa del método de interacción está codificado en lenguaje BASIC y fue desarrollado y probado en una microcomputadora. La idea que se tuvo con este proceder, fue la de hacer el programa accesible a los cada vez más frecuentes despachos de ingeniería que cuentan con microcomputadoras, aparatos que, además, operan comúnmente en BASIC. Por otro lado, el lenguaje de programación BASIC posee dos ventajas importantes, a saber: es sencillo y rápido de comprender, y sus comandos son fácilmente transformables a FORTRAN, que es el lenguaje usualmente empleado para implementar programas relacionados con problemas de ingeniería civil. A este último respecto, conviene añadir que, puesto que el programa del método en cuestión está resuelto a base de los comandos BASIC elementales, su traducción a FORTRAN, si así se desea o requiere, es doblemente simple.
- h. El análisis estructural a través de microcomputadoras, tiene como desventaja importante el que la capacidad de tales máquinas se agota rápidamente. A fin de aprovechar al máximo la capacidad de estos aparatos, el presente trabajo propone un análisis incompleto para estructuras muy grandes, que consiste en la cancelación de los niveles superiores y transformación de las cargas repartidas asociadas a ellos en cargas concentradas aplicadas en los ejes de columnas. Teniendo en cuenta que solamente los primeros niveles de una estructura son los que verdaderamente influyen con su rigidez en la interacción con el suelo, resulta que si sometemos a una misma estructura a análisis completo e incompleto simultáneamente, los valores de las reacciones del terreno que arrojen las dos soluciones serán prácticamente iguales, respectivamente.

La utilidad de esta situación radica en que, para el caso de análisis incompleto, el programa de interacción puede aprovecharse para valuar las reacciones del terreno, y posteriormente utilizar esas magnitudes como datos en algún programa convencional de análisis, propio de una computadora con capacidad suficiente. Este procedimiento, si bien poco ortodoxo, permite a cambio un análisis estructural completo que considera también el fenómeno de interacción suelo-estructura.

Evidentemente, para lograr un análisis con interacción completo y directo a la vez, sea cual sea el tamaño de la estructura, bastará cargar el programa correspondiente en una computadora que no de lugar a problemas de memoria insuficiente.

## VII

REFERENCIAS

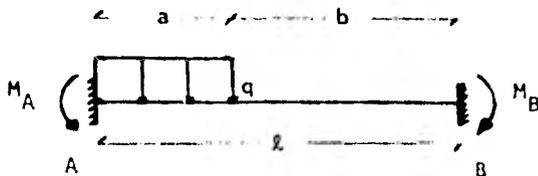
1. DEMENEGHI A.: *Apuntes del Ing. Agustín Deméneghi Colina*; México, D.F., 1979
2. DEMENEGHI A.: *Un Método para el Análisis Conjunto de la Estructura y el Suelo*; Revista Ingeniería, Nueva Epoca; México, D.F., 1979; Vol. XLIX, No. 3.
3. JUAREZ E. Y RICO A.: *Mecánica de Suelos; Teoría y Aplicaciones de la Mecánica de Suelos*; Editorial Limusa; Sexta Reimpresión, México, D.F., 1978; Tomo II, Capítulo II.
4. LUTHE R.: *Análisis Estructural; Representaciones y Servicios de Ingeniería*; Primera Edición; México, D.F., 1971; Capítulos 2 y 5.
5. REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL: *Requisitos de Seguridad y Servicio para las Estructuras; Título IV*; Universidad Nacional Autónoma de México; México, D.F., 1977; Capítulo XXXII.
6. ZEEVAERT L.: *Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions*; Van Nostrand Reinhold, 1973; Chapters II and V.

## ANEXO I

Este anexo tiene por objeto presentar en forma detallada la obtención de los momentos de empotramiento debidos a la reacción del terreno sobre los elementos estructurales de la cimentación. Se abarca tanto el caso de una trabe con nudos continuos, como el caso de una trabe con un nudo continuo y otro articulado. Para cada una de las trabes se desglosan los tres tramos de carga repartida que las afectan (fig. 11.1.a) y el análisis se efectúa para las tres posiciones independientes de carga uniformemente distribuida resultantes. El método utilizado es el de las flexibilidades.

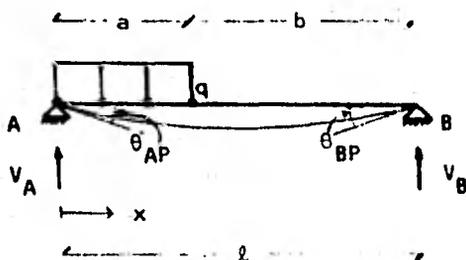
### 1. VIGA CON NUDOS CONTINUOS

#### 1.1 CARGA UNIFORME A LA IZQUIERDA



La convención para momentos y giros será: positivo en el sentido de las manecillas del reloj (+).

El grado de hiperestaticidad de la estructura es dos. Eligiendo como grados de libertad los giros en los extremos, la estructura primaria es:



Cálculo de reacciones:

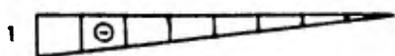
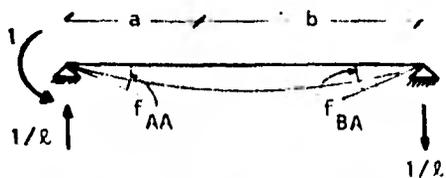
$$\sum M_A = 0 \rightarrow qa \frac{a}{2} - V_B l = 0 \rightarrow V_B = \frac{qa^2}{2l}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -qa \left( l - \frac{a}{2} \right) + V_A l = 0 \rightarrow V_A = \frac{qa \left( l - \frac{a}{2} \right)}{l}$$

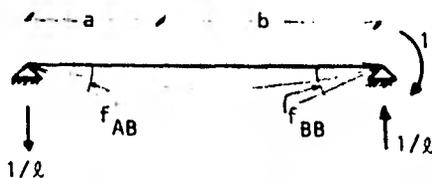
Determinación de momentos:

$$0 \leq x \leq a \rightarrow M = \frac{qa \left( l - \frac{a}{2} \right)}{l} x - \frac{qx^2}{2}; \quad a < x \leq l \rightarrow M = \frac{qa \left( l - \frac{a}{2} \right)}{l} x - qa \left( x - \frac{a}{2} \right)$$

Para resolver, nos auxiliamos de las siguientes estructuras:



$$0 \leq x \leq l \rightarrow m_1 = \frac{x}{l} - 1$$



$$0 \leq x \leq l \rightarrow m_2 = -\frac{x}{l}$$

A continuación procedemos a calcular los giros en A y en B de la estructura primaria debidos a la carga:

$$\begin{aligned} \theta_{AP} &= \int_0^l \frac{m_1 M}{EI} dx = \int_0^a \frac{m_1 M}{EI} dx + \int_a^l \frac{m_1 M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^a \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \left( \frac{qa(l - \frac{a}{2})}{l} x - \right. \\ &\quad \left. - \frac{qx^2}{2} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_a^l \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \left( \frac{qa(l - \frac{a}{2})}{l} x - qa \left( x - \frac{a}{2} \right) \right) dx = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^a \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \left( qax - \frac{qa^2 x}{2l} - \frac{qx^2}{2} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_a^l \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \left( qax - \frac{qa^2}{2l} x - \right. \\ &\quad \left. - qax + \frac{qa^2}{2} \right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^a \left( \frac{qax^2}{l} - \frac{qa^2 x^2}{2l^2} - \frac{qx^3}{2} - qax + \frac{qa^2 x}{2l} + \frac{qx^2}{2} \right) dx + \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_a^l \left( -\frac{qa^2 x^2}{2l^2} + \frac{qa^2 x}{2l} + \frac{qa^2 x}{2l} - \frac{qa^2}{2} \right) dx = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{qa}{3l} (x^3)_0^a - \frac{qa^2}{6l^2} (x^3)_0^a - \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{8l} (x^4)_0^a - \frac{qa}{2} (x^2)_0^a + \frac{qa^2}{4l} (x^2)_0^a + \frac{q}{6} (x^3)_0^a - \frac{qa^2}{6l^2} (x^3)_a^l + \right. \\ &\quad \left. + \frac{qa^2}{2l} (x^2)_a^l - \frac{qa^2}{2} (x)_a^l \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{qa^4}{3l} - \frac{qa^5}{6l^2} - \frac{qa^4}{8l} - \frac{qa^3}{2} + \frac{qa^4}{4l} + \frac{qa^3}{6} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{qa^2}{6l^2} (l^3 - a^3) + \frac{qa^2}{2l} (l^2 - a^2) - \frac{qa^2}{2} (l - a) \right\} = \frac{q}{EI} \left\{ \frac{11a^4}{24l} - \frac{a^5}{6l^2} - \frac{a^3}{3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2 l}{6} + \frac{a^5}{6l^2} + \frac{a^2 l}{2} - \frac{a^4}{2l} - \frac{a^2 l}{2} + \frac{a^3}{2} \right\} = \frac{q}{EI} \left\{ -\frac{a^4}{24l} + \frac{a^3}{6} - \frac{a^2 l}{6} \right\} = \\ &= \frac{qa^2}{6EI} \left( -\frac{a^2}{4l} + a - l \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{BP} &= \int_0^l \frac{m_2 M}{EI} dx = \int_0^a \frac{m_2 M}{EI} dx + \int_a^l \frac{m_2 M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^a \left( -\frac{x}{l} \right) \left( \frac{qa(l - \frac{a}{2})}{l} x - \right. \\ &\quad \left. - \frac{qx^2}{2} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_a^l \left( -\frac{x}{l} \right) \left( \frac{qa(l - \frac{a}{2})}{l} x - qa \left( x - \frac{a}{2} \right) \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{EI} \int_0^a \left(-\frac{x}{l}\right) \left(qax - \frac{qa^2x}{2l} - \frac{qx^2}{2}\right) dx + \frac{1}{EI} \int_a^l \left(-\frac{x}{l}\right) \left(qax - \frac{qa^2}{2l}x - qax + \right. \\
& \left. + \frac{qa^2}{2}\right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^a \left(-\frac{qax^2}{l} + \frac{qa^2x^2}{2l^2} + \frac{qx^3}{2}\right) dx + \frac{1}{EI} \int_a^l \left(-\frac{qax^2}{l} + \frac{qa^2x^2}{2l^2} + \right. \\
& \left. + \frac{qax^2}{l} - \frac{qa^2x}{2l}\right) dx = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qa}{3l} (x^3)_0^a + \frac{qa^2}{6l^2} (x^3)_0^a + \frac{q}{8l} (x^4)_0^a + \right. \\
& \left. + \frac{qa^2}{6l^2} (x^3)_a^l - \frac{qa^2}{4l} (x^2)_a^l \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qa^4}{3l} + \frac{qa^5}{6l^2} + \frac{qa^4}{8l} + \frac{qa^2}{6l^2} (l^3 - a^3) - \right. \\
& \left. - \frac{qa^2}{4l} (l^2 - a^2) \right\} = \frac{q}{EI} \left\{ -\frac{5a^4}{24l} + \frac{a^5}{6l^2} + \frac{a^2l}{6} - \frac{a^5}{6l^2} - \frac{a^2l}{4} + \frac{a^4}{4l} \right\} = \frac{q}{EI} \left\{ \frac{a^4}{24l} - \right. \\
& \left. - \frac{a^2l}{12} \right\} = \frac{qa^2}{24EI} \left(\frac{a^2}{l} - 2l\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{AA} &= \int_0^l \frac{m_1 m_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{x}{l} - 1\right)^2 dx = \frac{l}{EI} \int_0^l \frac{1}{l} \left(\frac{x}{l} - 1\right)^2 dx = \\
&= \frac{l}{EI} \left(\frac{\left(\frac{x}{l} - 1\right)^3}{3}\right)_0^l = \frac{l}{3EI} \left(\left(\frac{l}{l} - 1\right)^3 - \left(\frac{0}{l} - 1\right)^3\right) = \frac{l}{3EI} (1) = \frac{l}{3EI}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{AB} &= f_{BA} = \int_0^l \frac{m_1 m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{x}{l} - 1\right) \left(-\frac{x}{l}\right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x}{l}\right) dx = \\
&= \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{x}{l} dx - \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{x^2}{l^2} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2l} (x^2)_0^l - \frac{1}{3l^2} (x^3)_0^l \right\} = \\
&= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{l^2}{2l} - \frac{l^3}{3l^2} \right\} = \frac{1}{EI} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right) = \frac{l}{6EI}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{BB} &= \int_0^l \frac{m_2 m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(-\frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{x^2}{l^2} dx = \frac{1}{3EI l^2} (x^3)_0^l = \\
&= \frac{l^3}{3EI l^2} = \frac{l}{3EI}
\end{aligned}$$

Planteando las ecuaciones de compatibilidad:

$$\theta_{AP} + f_{AA} M_A + f_{AB} M_B = 0 \rightarrow \frac{qa^2}{6EI} \left( -\frac{a^2}{4l} + a - l \right) + \frac{l}{3EI} M_A + \frac{l}{6EI} M_B = 0$$

$$\theta_{BP} + f_{BA} M_A + f_{BB} M_B = 0 \rightarrow \frac{qa^2}{24EI} \left( \frac{a^2}{l} - 2l \right) + \frac{l}{6EI} M_A + \frac{l}{3EI} M_B = 0$$

Resolviendo simultáneamente por suma y resta:

$$\frac{qa^2}{6EI} \left( -\frac{a^2}{4l} + a - l \right) + \frac{l}{3EI} M_A + \frac{l}{6EI} M_B = 0$$

$$-\frac{qa^2}{12EI} \left( \frac{a^2}{l} - 2l \right) - \frac{l}{3EI} M_A - \frac{2l}{3EI} M_B = 0$$

---


$$\frac{qa^2}{6EI} \left( -\frac{a^2}{4l} + a - l - \frac{a^2}{2l} + l \right) - \frac{l}{2EI} M_B = 0$$

$$\frac{qa^2}{3} \left( -\frac{3a^2}{4l} + a \right) = 2l M_B \rightarrow M_B = \frac{qa^3}{3l} \left( -\frac{3a}{4l} + 1 \right) = \frac{qa^3}{12l^2} (-3a + 4l) =$$

$$= \frac{qa^3}{12l^2} (4l - 3a) \rightarrow \boxed{M_B = \frac{qa^3}{12l^2} (4l - 3a)}$$

Sustituyendo  $M_B$  en la segunda ecuación simultánea:

$$\frac{qa^2}{24EI} \left( \frac{a^2}{l} - 2l \right) + \frac{l}{6EI} M_A + \frac{l}{3EI} \left( \frac{qa^3}{12l^2} (4l - 3a) \right) = 0 \rightarrow \frac{qa^2}{8} \left( \frac{a^2}{l} - 2l \right) +$$

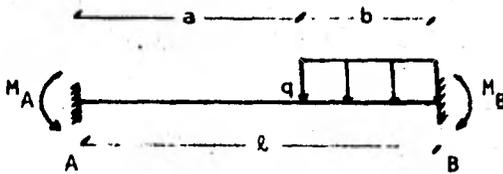
$$+ \frac{qa^2}{12l} (4la - 3a^2) + \frac{lM_A}{2} = 0 \rightarrow \frac{qa^2}{4} \left( \frac{a^2}{2l} - l + \frac{4la}{3l} - \frac{3a^2}{3l} \right) = -\frac{l}{2} M_A \rightarrow$$

$$\rightarrow M_A = -\frac{qa^2}{2l} \left( \frac{a^2}{2l} - l + \frac{4a}{3} - \frac{a^2}{l} \right) = -\frac{qa^2}{4} \left( \frac{a^2}{l^2} - 2 + \frac{8a}{3l} - \frac{2a^2}{l^2} \right) =$$

$$= \frac{qa^2}{4} \left( \frac{a^2}{l^2} - \frac{8}{3} \frac{a}{l} + 2 \right) = \frac{qa^2}{4} \left( 2 - \frac{a}{l} \left( \frac{8}{3} - \frac{a}{l} \right) \right) \rightarrow$$

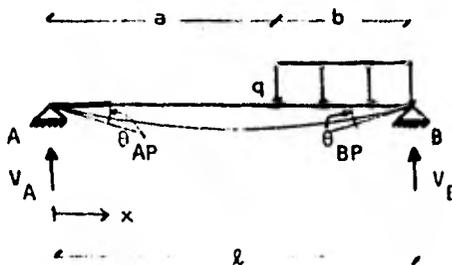
$$\rightarrow \boxed{M_A = \frac{qa^2}{4} \left( 2 - \frac{a}{l} \left( \frac{8}{3} - \frac{a}{l} \right) \right)}$$

## 1.2 CARGA UNIFORME A LA DERECHA



Procederemos de manera enteramente similar que para el caso 1.1.

Estructura primaria y cálculo de reacciones:



$$\sum M_B = 0 \rightarrow lV_A - \frac{qb}{2}b = 0 \rightarrow V_A = \frac{qb^2}{2l}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -lV_B + qb\left(l - \frac{b}{2}\right) = 0 \rightarrow V_B = \frac{qb\left(l - \frac{b}{2}\right)}{l}$$

Determinación de momentos:

$$0 \leq x \leq a \rightarrow M = \frac{qb^2}{2l}x \quad ; \quad a \leq x \leq l \rightarrow M = \frac{qb^2}{2l}x - \frac{q(x-a)^2}{2}$$

Las estructuras auxiliares son idénticas a las del caso 1.1, por lo que a continuación procedemos a utilizar el método de las flexibilidades:

$$\begin{aligned}
\theta_{AP} &= \int_0^{\ell} \frac{m_1 M}{EI} dx = \int_0^a \frac{m_1 M}{EI} dx + \int_a^{\ell} \frac{m_1 M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^a \left( \frac{x}{\ell} - 1 \right) \left( \frac{qb^2}{2\ell} x \right) dx + \\
&+ \frac{1}{EI} \int_a^{\ell} \left( \frac{x}{\ell} - 1 \right) \left\{ \frac{qb^2}{2\ell} x - \frac{q(x-a)^2}{2} \right\} dx = \frac{1}{EI} \int_0^a \left( \frac{qb^2 x^2}{2\ell^2} - \frac{qb^2 x}{2\ell} \right) dx + \\
&+ \frac{1}{EI} \int_a^{\ell} \left( \frac{x}{\ell} - 1 \right) \left\{ \frac{qb^2}{2\ell} x - \frac{q(x^2 - 2ax + a^2)}{2} \right\} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{qb^2}{6\ell^2} (x^3) \right\}_0^a - \\
&- \frac{qb^2}{4\ell} (x^2) \Big|_0^a + \frac{1}{EI} \int_0^a \left( \frac{x}{\ell} - 1 \right) \left\{ \frac{qb^2}{2\ell} x - \frac{qx^2 - 2qax + qa^2}{2} \right\} dx = \\
&= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{qb^2}{6\ell^2} a^3 - \frac{qb^2}{4\ell} a^2 \right\} + \frac{1}{EI} \int_a^{\ell} \left( \frac{x}{\ell} - 1 \right) \left\{ \frac{qb^2}{2\ell} x - \frac{qx^2}{2} + qax - \right. \\
&- \left. \frac{qa^2}{2} \right\} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{qb^2}{6\ell^2} a^3 - \frac{qb^2}{4\ell} a^2 \right\} + \frac{1}{EI} \int_a^{\ell} \left( \frac{qb^2 x^2}{2\ell^2} - \frac{qx^3}{2\ell} + \frac{qax^2}{\ell} - \frac{qa^2 x}{2\ell} \right. \\
&- \left. \frac{qb^2}{2\ell} x + \frac{qx^2}{2} - qax + \frac{qa^2}{2} \right) dx = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{qb^2}{6\ell^2} a^3 - \frac{qb^2}{4\ell} a^2 \right\} + \\
&+ \frac{1}{EI} \left\{ \frac{qb^2}{6\ell^2} (x^3) \right\}_a^{\ell} - \frac{q}{8\ell} (x^4) \Big|_a^{\ell} + \frac{qa}{3\ell} (x^3) \Big|_a^{\ell} - \frac{qa^2}{4\ell} (x^2) \Big|_a^{\ell} - \frac{qb^2}{4\ell} (x^2) \Big|_a^{\ell} + \\
&+ \frac{q}{6} (x^3) \Big|_a^{\ell} - \frac{qa}{2} (x^2) \Big|_a^{\ell} + \frac{qa^2}{2} (x) \Big|_a^{\ell} \Big\} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{qb^2 a^3}{6\ell^2} - \frac{qb^2 a^2}{4\ell} + \frac{qb^2 \ell^3}{6\ell^2} - \right. \\
&- \frac{qb^2 a^3}{6\ell^2} - \frac{q\ell^4}{8\ell} + \frac{qa^4}{8\ell} + \frac{qa\ell^3}{3\ell} - \frac{qa^3}{3\ell} - \frac{qa^2 \ell^2}{4\ell} + \frac{qa^2 a^2}{4\ell} - \frac{qb^2 \ell^2}{4\ell} + \frac{qb^2 a^2}{4\ell} + \frac{q\ell^3}{6} - \\
&- \frac{qa^3}{6} - \frac{qa\ell^2}{2} + \frac{qaa^2}{2} + \frac{qa^2 \ell}{2} - \frac{qa^2 a}{2} \Big\} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{qb^2 a^3}{6\ell^2} - \frac{qb^2 a^2}{4\ell} + \frac{qb^2 \ell}{6} - \frac{qb^2 \ell}{4} - \right. \\
&- \frac{qb^2 a^3}{6\ell^2} - \frac{q\ell^3}{8} + \frac{q\ell^3}{6} + \frac{qa^4}{8\ell} - \frac{qa^4}{3\ell} + \frac{qa^4}{4\ell} + \frac{qa\ell^2}{3} - \frac{qa\ell^2}{2} - \frac{qa^2 \ell}{4} + \frac{qa^2 \ell}{2} + \frac{qb^2 a^2}{4\ell} - \\
&- \frac{qa^3}{6} + \frac{qa^3}{2} - \frac{qa^3}{2} \Big\} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{qb^2 a^3}{6\ell^2} - \frac{qb^2 a^2}{4\ell} - \frac{qb^2 \ell}{12} - \frac{qb^2 a^3}{6\ell^2} + \frac{q\ell^3}{24} + \frac{qa^4}{24\ell} - \right. \\
&- \left. \frac{qa\ell^2}{6} + \frac{qa^2 \ell}{4} + \frac{qb^2 a^2}{4\ell} - \frac{qa^3}{6} \right\}
\end{aligned}$$

$$\theta_{BP} = \int_0^{\ell} \frac{m_2 M}{EI} dx = \int_0^a \frac{m_2 M}{EI} dx + \int_a^{\ell} \frac{m_2 M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^a \left( -\frac{x}{\ell} \right) \left( \frac{qb^2}{2\ell} x \right) dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{EI} \int_a^l \left( -\frac{x}{l} \right) \left\{ \frac{qb^2}{2l} x - \frac{q(x-a)^2}{2} \right\} dx = \frac{1}{EI} \int_0^a \left( -\frac{qb^2 x^2}{2l^2} \right) dx + \\
& + \frac{1}{EI} \int_a^l \left( -\frac{qb^2 x^2}{2l^2} + \frac{q(x-a)^2 x}{2l} \right) dx = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qb^2}{6l^2} (x^3) \Big|_0^a + \frac{1}{EI} \int_a^l \left( -\frac{qb^2 x^2}{2l^2} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{qx^3}{2l} - \frac{q2ax^2}{2l} + \frac{qa^2 x}{2l} \right) dx = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qb^2 a^3}{6l^2} - \frac{qb^2}{6l^2} (x^3) \Big|_a^l + \frac{q}{8l} (x^4) \Big|_a^l - \right. \\
& - \left. \frac{qa}{3l} (x^3) \Big|_a^l + \frac{qa^2}{4l} (x^2) \Big|_a^l \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qb^2 a^3}{6l^2} - \frac{qb^2 l^3}{6l^2} + \frac{qb^2 a^3}{6l^2} + \frac{ql^4}{8l} - \frac{qa^4}{8l} - \right. \\
& - \left. \frac{qa^3}{3l} + \frac{qa^3}{3l} + \frac{qa^2 l^2}{4l} - \frac{qa^2 a^2}{4l} \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qb^2 a^3}{6l^2} + \frac{qb^2 a^3}{6l^2} - \frac{qb^2 l}{6} + \frac{ql^3}{8} - \right. \\
& - \left. \frac{qa^4}{8l} + \frac{qa^4}{3l} - \frac{qa^4}{4l} - \frac{qa^2 l^2}{3} + \frac{qa^2 l}{4} \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qb^2 l}{6} + \frac{ql^3}{8} - \frac{qa^4}{24l} - \frac{qa^2 l^2}{3} + \right. \\
& \left. + \frac{qa^2 l}{4} \right\}
\end{aligned}$$

Sabiendo que  $a = l - b$ :

$$\begin{aligned}
\theta_{AP} &= \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qb^2 l}{12} + \frac{ql^3}{24} + \frac{q}{24l} (l^4 - 4l^3 b + 6l^2 b^2 - 4lb^3 + b^4) - \frac{ql^2}{6} (l - b) + \right. \\
& + \frac{ql}{4} (l^2 - 2lb + b^2) - \frac{q}{6} (l^3 - 3l^2 b + 3lb^2 - b^3) \left. \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qb^2 l}{12} + \frac{ql^3}{24} + \right. \\
& + \frac{ql^3}{24} - \frac{qbl^2}{6} + \frac{qb^2 l}{4} - \frac{qb^3}{6} + \frac{qb^4}{24l} - \frac{ql^3}{6} + \frac{qbl^2}{6} + \frac{ql^3}{4} - \frac{qbl^2}{2} + \frac{qb^2 l}{4} - \frac{ql^3}{6} + \\
& + \frac{qbl^2}{2} - \frac{qb^2 l}{2} + \frac{qb^3}{6} \left. \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qb^2 l}{12} + \frac{qb^2 l}{4} + \frac{qb^2 l}{4} - \frac{qb^2 l}{2} + \frac{ql^3}{24} + \frac{ql^3}{24} - \right. \\
& - \frac{ql^3}{6} + \frac{ql^3}{4} - \frac{ql^3}{6} - \frac{qbl^2}{6} + \frac{qbl^2}{6} - \frac{qbl^2}{2} + \frac{qbl^2}{2} - \frac{qb^3}{6} + \frac{qb^3}{6} + \frac{qb^4}{24l} \left. \right\} = \\
& = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{1}{12} qb^2 l + \frac{qb^4}{24l} \right\} = \frac{qb^2}{24EI} \left\{ \frac{b^2}{l} - 2l \right\} \\
\theta_{BP} &= \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qb^2 l}{6} + \frac{ql^3}{8} - \frac{q}{24l} (l^4 - 4l^3 b + 6l^2 b^2 - 4lb^3 + b^4) - \frac{ql^2}{3} (l - b) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{q\ell}{4} (\ell^2 - 2\ell b + b^2) \} = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qb^2\ell}{6} + \frac{q\ell^3}{8} - \frac{q\ell^3}{24} + \frac{qbl^2}{6} - \frac{1}{4} qb^2\ell + \frac{1}{6} qb^3 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{24} \frac{qb^4}{\ell} - \frac{q\ell^3}{3} + \frac{qbl^2}{3} + \frac{q\ell^3}{4} - \frac{qbl^2}{2} + \frac{qb^2\ell}{4} \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qb^2\ell}{6} + \frac{qb^3}{6} - \frac{qb^4}{24\ell} \right\} = \\
 & = \frac{qb^2}{6EI} \left( -\frac{b^2}{4\ell} + b - \ell \right)
 \end{aligned}$$

Los coeficientes de flexibilidad son:

$$f_{AA} = f_{BB} = \frac{\ell}{3EI} \quad ; \quad f_{AB} = f_{BA} = \frac{\ell}{6EI}$$

Estos coeficientes se obtienen de la misma manera que para el caso 1.1

Planteando las ecuaciones de compatibilidad:

$$\theta_{AP} + f_{AA} M_A + f_{AB} M_B = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{qb^2}{24EI} \left( \frac{b^2}{\ell} - 2\ell \right) + \frac{\ell}{3EI} M_A + \frac{\ell}{6EI} M_B = 0$$

$$\theta_{BP} + f_{BA} M_A + f_{BB} M_B = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{qb^2}{6EI} \left( -\frac{b^2}{4\ell} + b - \ell \right) + \frac{\ell}{6EI} M_A + \frac{\ell}{3EI} M_B = 0$$

Resolviendo por suma y resta:

$$\frac{qb^2}{24} \left( \frac{b^2}{\ell} - 2\ell \right) + \frac{\ell}{3} M_A + \frac{\ell}{6} M_B = 0$$

$$-\frac{qb^2}{3} \left( -\frac{b^2}{4\ell} + b - \ell \right) - \frac{\ell}{3} M_A - \frac{2}{3}\ell M_B = 0$$

---


$$\frac{qb^2}{3} \left( \frac{b^2}{8\ell} - \frac{\ell}{4} + \frac{b^2}{4\ell} - b + \ell \right) - \frac{\ell M_B}{2} = 0$$

$$\frac{qb^2}{4} \left( \frac{b^2}{6\ell} - \frac{\ell}{3} + \frac{b^2}{3\ell} - \frac{4}{3}b + \frac{4}{3}\ell \right) = \frac{\ell M_B}{2}$$

$$\frac{qb^2}{4} \left( \frac{b^2}{\ell^2} + 2 - \frac{8}{3} \frac{b}{\ell} \right) = M_B \quad \rightarrow \quad M_B = \frac{qb^2}{4} \left( 2 - \frac{b}{\ell} \left( \frac{8}{3} - \frac{b}{\ell} \right) \right)$$

Sustituyendo  $M_B$  en la primera ecuación simultánea:

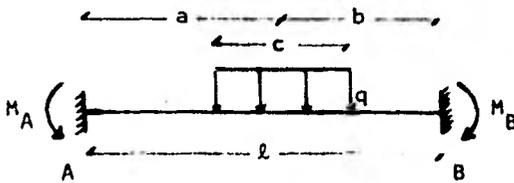
$$\frac{qb^2}{24} \left( \frac{b^2}{l} - 2l \right) + \frac{l}{3} M_A + \frac{l}{6} \left\{ \frac{qb^2}{4} \left( 2 - \frac{b}{l} \left( \frac{8}{3} - \frac{b}{l} \right) \right) \right\} = 0 \quad + \frac{qb^4}{8l} -$$

$$- \frac{qb^2 l}{4} + \frac{qb^2 l}{4} - \frac{qb^3}{3} + \frac{qb^4}{8l} = -l M_A \rightarrow M_A = \frac{qb^3}{3l} - \frac{qb^4}{4l^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_A = \frac{qb^3}{12l^2} (4l - 3b)$$

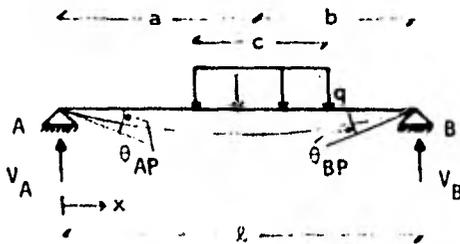
Los resultados que hemos obtenido para el caso 1.2 eran de esperarse si tomamos en cuenta los del caso 1.1.

### 1.3 CARGA UNIFORME AL CENTRO



Procederemos como en los casos anteriores.

Estructura primaria y cálculo de reacciones:



$$\odot \sum M_B = 0 \rightarrow 2V_A - qbc = 0 \rightarrow V_A = \frac{qbc}{2}$$

$$\odot \sum M_A = 0 \rightarrow -2V_B + qac = 0 \rightarrow V_B = \frac{qac}{2}$$

Determinación de momentos:

$$0 \leq x \leq (a - \frac{c}{2}) \rightarrow M = \frac{qbc}{l} x ; \quad (a - \frac{c}{2}) < x \leq (a + \frac{c}{2}) \rightarrow M = \frac{qbc}{l} x - \frac{q(x - (a - \frac{c}{2}))^2}{2}$$

$$(a + \frac{c}{2}) < x \leq l \rightarrow M = \frac{qbc}{l} x - qc(x - a)$$

$$\text{Sean } \alpha = a - \frac{c}{2} \text{ y } \beta = a + \frac{c}{2}$$

Siendo las estructuras primarias idénticas a las de los casos anteriores, procedemos a aplicar el método de las flexibilidades:

$$\begin{aligned} \theta_{AP} = & \int_0^l \frac{m_1 M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^\alpha (\frac{x}{l} - 1) (\frac{qbc}{l} x) dx + \frac{1}{EI} \int_\alpha^\beta (\frac{x}{l} - 1) (\frac{qbc}{l} x - \frac{q(x-\alpha)^2}{2}) dx \\ & + \frac{1}{EI} \int_\beta^l (\frac{x}{l} - 1) (\frac{qbc}{l} x - qc(x-a)) dx = \frac{1}{EI} \int_0^\alpha (\frac{qbc x^2}{l^2}) dx - \frac{qbcx}{l} dx \\ & + \frac{1}{EI} \int_\alpha^\beta (\frac{x}{l} - 1) (\frac{qbcx}{l} - \frac{qx^2}{2} + qax - \frac{q\alpha^2}{2}) dx + \frac{1}{EI} \int_\beta^l (\frac{x}{l} - 1) (\frac{qbcx}{l} - qc x + qca) dx \\ & = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{qbc}{3l^2} (x^3)_0^\alpha - \frac{qbc}{2l} (x^2)_0^\alpha + \frac{1}{EI} \int_\alpha^\beta (\frac{qbcx^2}{l^2} - \frac{qx^3}{2l} + \frac{q\alpha x^2}{l} - \frac{q\alpha^2 x}{2l} - \frac{qbcx}{l} + \frac{qx^2}{2} - q\alpha x + \frac{q\alpha^2}{2}) dx \right. \\ & + \frac{1}{EI} \int_\beta^l (\frac{qbcx^2}{l^2} - \frac{qcx^2}{l} + \frac{qcax}{l} - \frac{qbcx}{l} + qc x - qca) dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{qbc\alpha^3}{3l^2} - \frac{qbc\alpha^2}{2l} + \frac{qbc}{3l^2} (x^3)_\alpha^\beta - \frac{q}{8l} (x^4)_\alpha^\beta + \frac{q\alpha}{3l} (x^3)_\alpha^\beta - \frac{q\alpha^2}{4l} (x^2)_\alpha^\beta - \frac{qbc}{2l} (x^2)_\alpha^\beta \right. \\ & + \frac{q}{6} (x^3)_\alpha^\beta - \frac{q\alpha}{2} (x^2)_\alpha^\beta + \frac{q\alpha^2}{2} (x)_\alpha^\beta + \frac{qbc}{3l^2} (x^3)_\beta^l - \frac{qc}{3l} (x^3)_\beta^l + \frac{qca}{2l} (x^2)_\beta^l - \frac{qbc}{2l} (x^2)_\beta^l + \frac{qc}{2} (x^2)_\beta^l - qca (x)_\beta^l \left. \right\} = \frac{q}{EI} \left\{ \frac{bc\alpha^3}{3l^2} - \frac{bc\alpha^2}{2l} + \frac{bc}{3l^2} \beta^3 - \frac{bc}{3l^2} \alpha^3 - \frac{\beta^4}{8l} + \frac{\alpha^4}{8l} + \frac{\alpha}{3l} \beta^3 - \frac{\alpha}{3l} \alpha^3 - \frac{\alpha^2}{4l} \beta^2 + \frac{\alpha^2}{4l} \alpha^2 - \frac{bc}{2l} \beta^2 + \frac{bc}{2l} \alpha^2 + \frac{\beta^3}{6} - \frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha\beta^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2} + \frac{\alpha^2\beta}{2} - \frac{\alpha^3}{2} + \frac{bc}{3l^2} \beta^3 - \frac{bc}{3l^2} \alpha^3 - \frac{c}{3l} \beta^3 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c}{3l} \beta^3 + \frac{ca}{2l} l^2 - \frac{ca}{2l} \beta^2 - \frac{bc}{2l} l^2 + \frac{bc}{2l} \beta^2 + \frac{cl^2}{2} - \frac{c\beta^2}{2} - ca\alpha + ca\beta \} = \\
& = \frac{q}{EI} \left\{ \frac{bc\alpha^3}{3l^2} - \frac{bc\alpha^3}{3l^2} - \frac{bc\alpha^2}{2l} + \frac{bc\alpha^2}{2l} - \frac{bc}{3l^2} \beta^3 - \frac{bc\beta^3}{3l^2} - \frac{\beta^4}{8l} + \frac{\alpha^4}{8l} - \frac{\alpha^4}{3l} + \frac{\alpha\beta^3}{3l} - \right. \\
& - \frac{\alpha^2\beta^2}{4l} + \frac{\alpha^4}{4l} - \frac{bc}{2l} \beta^2 + \frac{bc}{2l} \beta^2 + \frac{\beta^3}{6} - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^3}{2} - \frac{\alpha^3}{2} - \frac{\alpha\beta^2}{2} + \frac{\alpha^2\beta}{2} + \frac{bc\alpha}{3} - \frac{bc\alpha}{2} - \\
& - \frac{cl^2}{3} + \frac{cl^2}{2} + \frac{c\beta^3}{3l} + \frac{ca\alpha}{2} - ca\alpha - \frac{ca\beta^2}{2l} - \frac{c\beta^2}{2} + ca\beta \} = \frac{q}{EI} \left\{ - \frac{\beta^4}{8l} + \frac{\alpha^4}{24l} + \right. \\
& + \frac{\alpha\beta^3}{3l} - \frac{\alpha^2\beta^2}{4l} + \frac{\beta^3}{6} - \frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha\beta^2}{2} + \frac{\alpha^2\beta}{2} - \frac{bc\alpha}{6} + \frac{cl^2}{6} + \frac{c\beta^3}{3l} - \frac{ca\alpha}{2} - \frac{ca\beta^2}{2l} - \frac{c\beta^2}{2} + \\
& \left. + ca\beta \right\} =
\end{aligned}$$

Sustituyendo  $\alpha = a - \frac{c}{2}$ ,  $\beta = a + \frac{c}{2}$  y  $l = a + b$  (solo en el numerador):

$$\begin{aligned}
& = \frac{q}{EI} \left\{ - \frac{a^4}{8l} - \frac{4a^3c}{16l} - \frac{6a^2c^2}{32l} - \frac{4ac^3}{64l} - \frac{c^4}{8l \times 16} + \frac{a^4}{24l} - \frac{a^3c}{12l} + \frac{6a^2c^2}{4 \times 24l} - \frac{4ac^3}{24 \times 8l} + \right. \\
& + \frac{c^4}{16 \times 24l} + \frac{(a - \frac{c}{2})(a^3 + 3a^2\frac{c}{2} + 3a\frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{8})}{3l} - \frac{(a^2 - ac + \frac{c^2}{4})(a^2 + ac + \frac{c^2}{4})}{4l} + \\
& + \frac{a^3 + 3a^2\frac{c}{2} + 3a\frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{8}}{6} - \frac{(a^3 - 3a^2\frac{c}{2} + 3a\frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{8})}{6} - \frac{(a - \frac{c}{2})(a^2 + ac + \frac{c^2}{4})}{2} + \\
& + \frac{(a^2 - ac + \frac{c^2}{4})(a + \frac{c}{2})}{2} - \frac{bc(a+b)}{6} + \frac{c(a^2 + 2ab + b^2)}{6} + \frac{c(a^3 + 3a^2\frac{c}{2} + 3a\frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{8})}{3l} - \\
& - \frac{ca(a+b)}{2} - \frac{ca(a^2 + ac + \frac{c^2}{4})}{2l} - \frac{c(a^2 + ac + \frac{c^2}{4})}{2} + ca(a + \frac{c}{2}) \} = \frac{q}{EI} \left\{ - \frac{a^4}{8l} - \frac{a^3c}{4l} - \right. \\
& - \frac{3a^2c^2}{16l} - \frac{ac^3}{16l} - \frac{c^4}{128l} + \frac{a^4}{24l} - \frac{a^3c}{12l} + \frac{a^2c^2}{16l} - \frac{ac^3}{48l} + \frac{c^4}{384l} + \frac{a^4}{3l} + \frac{a^3c}{2l} + \frac{a^2c^2}{4l} + \\
& + \frac{ac^3}{24l} - \frac{a^3c}{6l} - \frac{a^2c^2}{4l} - \frac{ac^3}{8l} - \frac{c^4}{48l} - \frac{a^4}{4l} - \frac{a^3c}{4l} - \frac{a^2c^2}{16l} + \frac{a^3c}{4l} + \frac{a^2c^2}{4l} + \frac{ac^3}{16l} - \\
& - \frac{a^2c^2}{16l} - \frac{ac^3}{16l} - \frac{c^4}{64l} + \frac{a^3}{6} + \frac{a^2c}{4} + \frac{ac^2}{8} + \frac{c^3}{48} - \frac{a^3}{6} + \frac{a^2c}{4} - \frac{ac^2}{8} + \frac{c^3}{48} - \frac{a^3}{2} - \frac{a^2c}{2} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{ac^2}{8} + \frac{a^2c}{4} + \frac{ac^2}{4} + \frac{c^3}{16} + \frac{a^3}{2} - \frac{a^2c}{2} + \frac{ac^2}{8} + \frac{a^2c}{4} - \frac{ac^2}{4} + \frac{c^3}{16} - \frac{abc}{6} - \frac{b^2c}{6} + \\
& + \frac{a^2c}{6} + \frac{2abc}{6} + \frac{b^2c}{6} + \frac{a^3c}{3l} + \frac{a^2c^2}{2l} + \frac{ac^3}{4l} + \frac{c^4}{24l} + \frac{a^2c}{2} - \frac{abc}{2} - \frac{a^3c}{2l} - \frac{a^2c^2}{2l} - \\
& - \frac{ac^3}{8l} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} - \frac{c^3}{8} + a^2c + \frac{ac^2}{2} \} = \frac{q}{EI} \left\{ \frac{a^4}{l} - \frac{a^3c}{6l} + \frac{a^2c}{l} - \frac{ac^3}{24l} + \frac{c^4}{l} + a^3 + \right. \\
& \left. + \frac{a^2c}{6} + ac^2 + \frac{c^3}{24} - \frac{abc}{3} + b^2c \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{AP} &= \frac{q}{EI} \left\{ -\frac{a^3c}{6l} - \frac{ac^3}{24l} + \frac{a^2c}{6} + \frac{c^3}{24} - \frac{abc}{3} \right\} = \frac{qc}{3lEI} \left\{ -\frac{a^3}{2} - \frac{ac^2}{8} + \frac{a^2l}{2} + \right. \\
& \left. + \frac{c^2l}{8} - abl \right\} = \frac{qc}{3lEI} \left\{ -\frac{a^3}{2} - \frac{ac^2}{8} + \frac{a^2}{2}(a+b) + \frac{c^2}{8}(a+b) - ab(a+b) \right\} = \\
& = \frac{qc}{3lEI} \left\{ -\frac{a^3}{2} - \frac{ac^2}{8} + \frac{a^3}{2} + \frac{a^2b}{2} + \frac{ac^2}{8} + \frac{bc^2}{8} - a^2b - ab^2 \right\} = \frac{qc}{3lEI} \left\{ -\frac{a^2b}{2} + \right. \\
& \left. + \frac{bc^2}{8} - ab^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{BP} &= \int_0^l \frac{m_2 M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^\alpha \left(-\frac{x}{l}\right) \left(\frac{qbc}{l}x\right) dx + \frac{1}{EI} \int_\alpha^\beta \left(-\frac{x}{l}\right) \left(\frac{qbcx}{l} - \right. \\
& \left. - \frac{q(x-\alpha)^2}{2}\right) dx + \frac{1}{EI} \int_\beta^l \left(-\frac{x}{l}\right) \left(\frac{qbc}{l}x - qc(x-\alpha)\right) dx = \\
& = \frac{1}{EI} \int_0^\alpha \left(-\frac{qbcx^2}{l^2}\right) dx + \frac{1}{EI} \int_\alpha^\beta \left(-\frac{qbcx^2}{l^2} + \frac{qx^3}{2l} - \frac{q\alpha x^2}{l} + \frac{q\alpha^2 x}{2l}\right) dx + \\
& + \frac{1}{EI} \int_\beta^l \left(-\frac{qbcx^2}{l^2} + \frac{qcx^2}{l} - \frac{qcax}{l}\right) dx = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qbc}{3l^2} (x^3)_0^\alpha - \frac{qbc}{3l^2} (x^3)_\alpha^\beta + \right. \\
& + \frac{q}{8l} (x^4)_\alpha^\beta - \frac{q\alpha}{3l} (x^3)_\alpha^\beta + \frac{q\alpha^2}{4l} (x^2)_\alpha^\beta - \frac{qbc}{3l^2} (x^3)_\beta^l + \frac{qc}{3l} (x^3)_\beta^l - \\
& - \frac{qca}{2l} (x^2)_\beta^l \left. \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qbc\alpha^3}{3l^2} - \frac{qbc}{3l^2} \beta^3 + \frac{qbc}{3l} \alpha^3 + \frac{q\beta^4}{8l} - \frac{q\alpha^4}{8l} - \frac{q\alpha\beta^3}{3l} + \right. \\
& \left. + \frac{q\alpha\alpha^3}{3l} + \frac{q\alpha^2\beta^2}{4l} - \frac{q\alpha^2\alpha^2}{4l} - \frac{qbc}{3l^2} l^3 + \frac{qbc}{3l^2} \beta^3 + \frac{qc l^3}{3l} - \frac{qc\beta^3}{3l} - \frac{qca l^2}{2l} + \frac{qca\beta^2}{2l} \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{q\beta^4}{8\ell} - \frac{q\alpha^4}{8\ell} - \frac{q\alpha\beta^3}{3\ell} + \frac{q\alpha^3}{3\ell} - \frac{q\alpha^4}{4\ell} + \frac{q\alpha^2\beta^2}{4\ell} - \frac{qbc\ell}{3} + \frac{qc\ell^2}{3} - \frac{qc\beta^3}{3\ell} - \frac{qca\ell}{2} + \frac{qca\beta^2}{2\ell} \right\} =$$

Sustituyendo  $\alpha = a - \frac{c}{2}$ ,  $\beta = a + \frac{c}{2}$  y  $\ell = a+b$  (solo en el numerador):

$$= \frac{q}{EI} \left\{ \frac{(a^4 + 4a^3 \frac{c}{2} + 6a^2 \frac{c^2}{4} + 4a \frac{c^3}{8} + \frac{c^4}{16})}{8\ell} - \frac{(a^4 - 4a^3 \frac{c}{2} + 6a^2 \frac{c^2}{4} - 4a \frac{c^3}{8} + \frac{c^4}{16})}{8\ell} - \frac{(a - \frac{c}{2})(a^3 + 3a^2 \frac{c}{2} + 3a \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{8})}{3\ell} + \frac{(a^4 - 4a^3 \frac{c}{2} + 6a^2 \frac{c^2}{4} - 4a \frac{c^3}{8} + \frac{c^4}{16})}{12\ell} + \frac{(a^2 - ac + \frac{c^2}{4})(a^2 + ac + \frac{c^2}{4})}{4\ell} - \frac{bc(a+b)}{3} + \frac{c(a^2 + 2ab + b^2)}{3} - \frac{c(a^3 + 3a^2 \frac{c}{2} + 3a \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{8})}{3\ell} - \frac{ca(a+b)}{2} + \frac{ca(a^2 + ac + \frac{c^2}{4})}{2\ell} \right\} = \frac{q}{EI} \left\{ \frac{a^4}{8\ell} + \frac{a^3c}{4\ell} + \frac{3a^2c^2}{16\ell} + \frac{ac^3}{16\ell} + \frac{c^4}{128\ell} - \frac{a^4}{8\ell} + \frac{a^3c}{4\ell} - \frac{3a^2c^2}{16\ell} + \frac{ac^3}{16\ell} - \frac{c^4}{128\ell} - \frac{a^4}{3\ell} - \frac{a^3c}{2\ell} - \frac{a^2c^2}{4\ell} - \frac{ac^3}{24\ell} + \frac{a^3c}{6\ell} + \frac{a^2c^2}{4\ell} + \frac{ac^3}{8\ell} + \frac{c^4}{48\ell} + \frac{a^4}{12\ell} - \frac{a^3c}{6\ell} + \frac{a^2c^2}{8\ell} - \frac{ac^3}{24\ell} + \frac{c^4}{192} + \frac{a^4}{4\ell} + \frac{a^3c}{4\ell} + \frac{a^2c^2}{16\ell} - \frac{a^3c}{4\ell} - \frac{a^2c^2}{4\ell} - \frac{ac^3}{16\ell} + \frac{a^2c^2}{16\ell} + \frac{ac^3}{16\ell} + \frac{c^4}{64\ell} - \frac{abc}{3} - \frac{b^2c}{3} + \frac{a^2c}{3} + \frac{2abc}{3} + \frac{b^2c}{3} - \frac{a^3c}{3\ell} - \frac{a^2c^2}{2\ell} - \frac{ac^3}{4\ell} - \frac{c^4}{24\ell} - \frac{a^2c}{2} - \frac{abc}{2} + \frac{a^3c}{2\ell} + \frac{a^2c^2}{2\ell} + \frac{ac^3}{8\ell} \right\} = \frac{q}{EI} \left\{ \frac{a^4}{\ell} + \frac{a^3c}{6\ell} + \frac{a^2c^2}{\ell} + \frac{ac^3}{24\ell} + \frac{c^4}{\ell} - \frac{abc}{6} + b^2c - \frac{a^2c}{6} \right\} = \frac{q}{EI} \left\{ \frac{a^3c}{6\ell} + \frac{ac^3}{24\ell} - \frac{abc}{6} - \frac{a^2c}{6} \right\} = \frac{qc}{6EI\ell} \left\{ a^3 + \frac{ac^2}{4} - ab(a+b) - a^2(a+b) \right\} = \frac{qc}{6EI\ell} \left\{ a^3 + \frac{ac^2}{4} - a^2b - ab^2 - a^3 - a^2b \right\} = \frac{qc}{6EI\ell} \left\{ \frac{ac^2}{4} - 2a^2b - ab^2 \right\}$$

Coefficientes de flexibilidad:

$$f_{AA} = f_{BB} = \frac{\ell}{3EI} \quad \text{y} \quad f_{AB} = f_{BA} = \frac{\ell}{6EI}, \quad \text{como en los casos anteriores.}$$

Ecuaciones de compatibilidad:

$$\theta_{AP} + f_{AA} M_A + f_{AB} M_B = 0 \rightarrow \frac{qc}{3\ell EI} \left\{ -\frac{a^2b}{2} + \frac{bc^2}{8} - ab^2 \right\} + \frac{\ell}{3EI} M_A + \frac{\ell}{6EI} M_B = 0$$

$$\theta_{BP} + f_{BA} M_A + f_{BB} M_B = 0 \rightarrow \frac{qc}{6\ell EI} \left\{ \frac{ac^2}{4} - 2a^2b - ab^2 \right\} + \frac{\ell}{6EI} M_A + \frac{\ell}{3EI} M_B = 0$$

Resolviendo por suma y resta:

$$\frac{qc}{\ell} \left( -\frac{a^2b}{2} + \frac{bc^2}{8} - ab^2 \right) + \ell M_A + \frac{\ell}{2} M_B = 0$$

$$- \frac{qc}{\ell} \left( \frac{ac^2}{4} - 2a^2b - ab^2 \right) - \ell M_A - 2\ell M_B = 0$$

$$\frac{qc}{\ell} \left( -\frac{a^2b}{2} + \frac{bc^2}{8} - ab^2 - \frac{ac^2}{4} + 2a^2b + ab^2 \right) - \frac{3}{2} \ell M_B = 0$$

$$\frac{qc}{\ell} \left( \frac{3}{2} a^2b + \frac{bc^2}{8} - \frac{ac^2}{4} \right) = \frac{3}{2} \ell M_B$$

$$\frac{3}{2} \frac{qc}{\ell^2} \left( a^2b + \frac{bc^2}{12} - \frac{ac^2}{6} \right) = \frac{3}{2} M_B$$

$$M_B = \frac{qc}{\ell^2} \left( a^2b - \frac{c^2}{6} \left( a - \frac{b}{2} \right) \right)$$

Sustituyendo  $M_B$  en la primera ecuación simultánea:

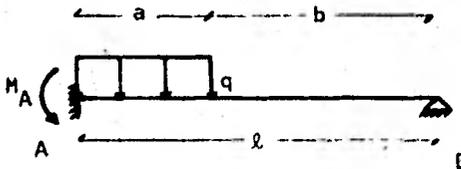
$$\frac{qc}{\ell} \left( -\frac{a^2b}{2} + \frac{bc^2}{8} - ab^2 \right) + \ell M_A + \frac{qc}{2\ell} \left( a^2b - \frac{c^2}{6} a + \frac{bc^2}{12} \right) = 0$$

$$-\frac{a^2b}{2} + \frac{bc^2}{8} - ab^2 + \frac{a^2b}{2} - \frac{ac^2}{12} + \frac{bc^2}{24} = -\frac{\ell^2 M_A}{qc}$$

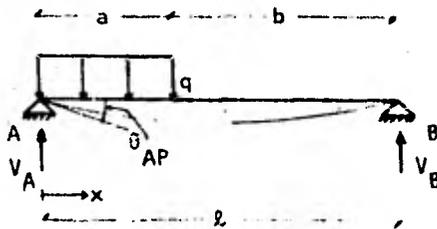
$$-\frac{bc^2}{6} + ab^2 + \frac{ac^2}{12} = \frac{\ell^2 M_A}{qc} \rightarrow M_A = \frac{qc}{\ell^2} \left( ab^2 - \frac{c^2}{6} \left( b - \frac{a}{2} \right) \right)$$

## 2. VIGA CON UN NUDO CONTINUO Y OTRO ARTICULADO

### 2.1 CARGA UNIFORME A LA IZQUIERDA



El grado de hiperestaticidad de la estructura es uno. Si elegimos como grado de libertad el giro en A, la estructura primaria queda:



Cálculo de reacciones:

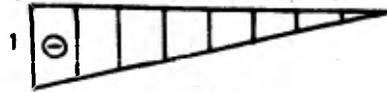
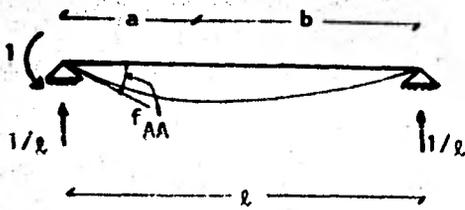
$$\odot \sum M_A = 0 \rightarrow qa \frac{a}{2} - V_B l = 0 \rightarrow V_B = \frac{qa^2}{2l}$$

$$\odot \sum M_B = 0 \rightarrow -qa(l - \frac{a}{2}) + V_A l = 0 \rightarrow V_A = \frac{qa(l - \frac{a}{2})}{l}$$

Determinación de momentos flexionantes:

$$0 \leq x \leq a \rightarrow M = \frac{qa(l - \frac{a}{2})}{l} x - \frac{qx^2}{2}; \quad a < x \leq l \rightarrow M = \frac{qa(l - \frac{a}{2})}{l} x - qa(x - \frac{a}{2})$$

## Estructura Auxiliar:



$$0 \leq x \leq l \rightarrow m = \frac{x}{l} - 1$$

A continuación procedemos a determinar el giro en A de la estructura primaria debido a la carga:

$$\theta_{AP} = \int_0^l \frac{mM}{EI} dx = \int_0^a \frac{mM}{EI} dx + \int_a^l \frac{mM}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^a \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \left( \frac{qa(l - \frac{a}{2})}{l} x - \frac{qx^2}{2} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_a^l \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \left( \frac{qa(l - \frac{a}{2})}{l} x - qa(x - \frac{a}{2}) \right) dx = \frac{qa^2}{6EI} \left( -\frac{a^2}{4l} + a - l \right)$$

El coeficiente de flexibilidad  $f_{AA}$  es:

$$f_{AA} = \int_0^l \frac{mm}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left( \frac{x}{l} - 1 \right)^2 dx = \frac{l}{3EI}$$

La solución de estas integrales es idéntica a las correspondientes al caso a para viga con nudos continuos.

Planteando la ecuación de compatibilidad:

$$\theta_{AP} + f_{AA} M_A = 0 \rightarrow \frac{qa^2}{6EI} \left( -\frac{a^2}{4l} + a - l \right) + \frac{l}{3EI} M_A = 0 \rightarrow \frac{qa^2}{2l} \left( -\frac{a^2}{4} + a - l \right) = -l M_A + M_A = \frac{qa^2}{2l^2} \left( l^2 - a^2 + \frac{a^2}{4} \right) \rightarrow M_A = \frac{qa^2}{2l^2} \left( l - \frac{a}{2} \right)^2$$

## 2.2 CARGA UNIFORME A LA DERECHA

El giro en A de la estructura primaria bajo las cargas ( $\theta_{AP}$ ) y el coeficiente de flexibilidad ( $f_{AA}$ ) son los mismos que ya determinamos para el mismo caso de carga, aplicado a una viga con nudos continuos. A continuación utilizamos esos valores para plantear la ecuación de compatibilidad:

$$\theta_{AP} + f_{AA} M_A = 0 \rightarrow \frac{qb^2}{24EI} \left\{ \frac{b^2}{l} - 2l \right\} + \frac{l}{3EI} M_A = 0 \rightarrow \frac{qb^2}{8} \left( \frac{b^2}{l} - 2l \right) = - 2M_A \rightarrow M_A = \frac{qb^2}{8l^2} (-b^2 + 2l^2) \rightarrow \boxed{M_A = \frac{qb^2}{8l^2} (2l^2 - b^2)}$$

## 2.3 CARGA UNIFORME AL CENTRO

Utilizando las expresiones determinadas en el inciso 1.3 para viga con nudos continuos:

$$\theta_{AP} = \frac{qc}{3lEI} \left\{ -\frac{a^2b}{2} + \frac{bc^2}{8} - ab^2 \right\} \quad \text{y} \quad f_{AA} = \frac{l}{3EI}$$

La ecuación de compatibilidad queda:

$$\theta_{AP} + f_{AA} M_A = 0 \rightarrow \frac{qc}{3lEI} \left\{ -\frac{a^2b}{2} + \frac{bc^2}{8} - ab^2 \right\} + \frac{l}{3EI} M_A = 0 \rightarrow \frac{qc}{l^2} \left( \frac{a^2b}{2} - \frac{bc^2}{8} + ab^2 \right) = M_A \rightarrow \boxed{M_A = \frac{qbc}{8l^2} (4a^2 - c^2 + 8ab)}$$

**ANEXO II**

**LISTADO DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL METODO DE ANALISIS CON  
INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA**

```

10 PRINTCHR0(26)::CLS:PRINT0990,CHR0(25)* PROGRAMA ISENA "CHR0(25)CHR0(2)::ILPRINTCHR0(12):FORJL=1T024:LPRI:INEXTJL
20 PRINTCHR0(31):SPC(17)::U.N.A.M., FACULTAD DE INGENIERIA"ILPRINT
30 LPRINTSPC(4)*TESIS PROFESIONAL, INGENIERO CIVIL, SALVADOR ALVAREZ GOMEZ"ILPRINT
40 LPRINTSPC(10)*INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA CON LA PRESENCIA"
50 LPRINTSPC(23)*DE NUDOS ARTICULADOS"ILPRINT
60 LPRINTSPC(11)* PROGRAMA DE COMPUTADORA EN LENGUAJE BASIC"ILPRINTCHR0(30)
70 REM LECTURA DEL LIMITE SUPERIOR QUE INDICA LA CAPACIDAD DE LA COMPUTADORA
90 READLS
93 REM LECTURA DE DATOS
100 READN1,N2
110 Q1=N2
120 IFN=NQ<=LSTHEN100
130 REM REDUCCION DE NQ
140 READM1
150 IFN<N1THENILPRINT*SE EXCEDE LA CAPACIDAD DE MEMORIA DE LA MAGUINA"(GOTO)1000
160 IFN=NQ<=LSTHEN100
170 NQ=NQ-1:GOTO100
180 IF0=N0THENAE=0:GOTO200
190 AE=1
200 DIMB(NQ),BC(2*N-1),C1(N,NQ-1),CL(NQ-1),EC(N,NQ-1),ET(N-1,NQ),FL(N,NQ),PW(N),TI(N-1,NQ),TL(N),W(N-1,Q1)
210 FORI=1TON-1:READTL(I):NEXTI
220 FORI=1TONQ-1:READCL(I):NEXTI
230 FORJ=1TOQ1:FORI=1TON-1:READW(I,J):NEXTI,J
240 FORJ=1TONQ:FORI=1TON-1:READET(I,J):NEXTI,J
250 FORJ=1TONQ-1:FORI=1TON:READEC(I,J):NEXTI,J
260 FORJ=1TONQ:FORI=1TON-1:READTI(I,J):NEXTI,J
270 FORJ=1TONQ-1:FORI=1TON:READCI(I,J):NEXTI,J
280 FORI=1TO2*N-1:READBC(I):NEXTI
290 FORJ=1TONQ:FORI=1TON:READFL(I,J):NEXTI,J
300 READM,NP
310 DIMA(M,NQ),FI(M+1,NP,M),H(NP),H0(NP),LA(M),LR(M+1,M),MVM(M,NP),Q(M,M),Y(M),YZ(M)
320 FORJ=1TONP:READM(J):NEXTJ
330 FORJ=1TONP:FORI=1TON:READMV(I,J):NEXTI,J
340 IFAE=@THEN400
350 REM TRANSFORMACION DE LAS CARGAS REPARTIDAS DE LOS NIVELES SUPERIORES EN CARGAS CONCENTRADAS
360 PW=0:1=1:FORJ=NQ-1TOQ1:PW=W(I,J)*TL(I)/2+PW:NEXTJ:PW(I)=PW
370 PW=0:1=N:FORJ=NQ-1TOQ1:PW=W(I-1,J)*TL(I-1)/2+PW:NEXTJ:PW(I)=PW:IFN=2THEN400
380 FORI=2TON-1:PW=0:FORJ=NQ-1TOQ1:PW=W(I-1,J)*TL(I-1)+W(I,J)*TL(I)/2+PW:NEXTJ:PW(I)=PW:NEXTI
390 REM IMPRESION DE DATOS
400 LPRINTCHR0(12)::ILPRINTCHR0(31):SPC(16)::I M P R E S I O N   D E   D A T O S"
410 LPRINTSPC(16)*..... *
420 FORJL=1TO8:LPRI:INEXTJL
430 LPRINTSPC(4)*NUMERO DE EJES DE COLUMNAS = "N1:SPC(6)*NUMERO DE PISOS = "I0:
440 IFAE=@THEN400
450 LPRINT:LPRI:ILPRINT:ILPRINT:ILPRINTCHR0(30):SPC(34)*PARA NO EXCEDER LA CAPACIDAD DE LA MAGUINA, EL ANALISIS ESTRUCTURAL"ILPRINTSPC(33)*S
E HARA CONSIDERANDO UNICAMENTE "N1Q1" PISOS Y POR TANTO SERA INCOMPLETO"
460 FORJL=1TO8:LPRI:INEXTJL
470 LPRINTCHR0(31):SPC(15)*DISTANCIA ENTRE EJES DE COLUMNA (M)"(LPRINTCHR0(30):ILPRINT:ILPRINT
480 A=1:1=0:1Y=N-1:FORJ=1TOIX:YZ(I)=TL(I):NEXTI
490 LPRINTSPC(4)*CRUJIA"ISPC(9):
500 GOSUB51000:LPRI:IGOSUB52000:IFI=1YTHEN520
510 GOSUB53000:GOTO490
520 FORJL=1TO7:LPRI:INEXTJL
530 LPRINTCHR0(31):SPC(21)*ALURA DE ENTREPIOS (M)"ILPRINTCHR0(30):ILPRINT:ILPRINT
540 LPRINTSPC(52)*ENTREPISO"ILPRINT
550 JX=NQ-1:FORJ=1TOJXB(J)=CL(J):NEXTJ:GOSUB54000:FORJL=1TO7:LPRI:INEXTJL
560 LPRINTCHR0(31):SPC(14)*CARGAS UNIFORMES EN LAS TRABES (TON/M)"(LPRINTCHR0(30):ILPRINT:ILPRINT
570 A=1:1=1:1Y=N-1:JY=NQ:FORJ=1TOJX:FORI=1TOIX:1(I,J)=W(I,J):NEXTI,J
580 LPRINTSPC(6)*CRUJIA"ISPC(7):

```

```

598 GOSUBS1000: LPRINTSPC(2)*PISO*(GOSUBS5000: IFI>IXTHEN618
600 GOSUBS3000: GOT0600
610 FORJL=1TO7: LPRINT: NEXTJL
620 IFAE=0THEN690
630 LPRINTCHR(31)SPC(6)*CARGAS CONCENTRADAS EN LOS NUDOS DEL ULTIMO NIVEL (TON)*: LPRINTCHR(30): LPRINT: LPRINT
640 A=1: B=1: IX=N: FORI=1TOIX: VZ(I)=PW(I): NEXTI
650 LPRINT"EJE DE COLUMNA": SPC(5):
660 GOSUBS1000: LPRINT: GOSUBS2000: IFI>IXTHEN680
670 GOSUBS3000: GOT0650
680 FORJL=1TO7: LPRINT: NEXTJL
690 LPRINTCHR(31)SPC(11)*MODULO DE ELASTICIDAD DE LAS TRABES (KG/CM2)*: LPRINTCHR(30): LPRINT: LPRINT
700 A=1: B=1: IX=N-1: JX=N0: FORJ=1TOJX: FORI=1TOIX: A(I, J)=ET(I, J): NEXTI, J
710 LPRINTSPC(6)*CRUJIA*: SPC(7):
720 GOSUBS1000: LPRINTSPC(2)*PISO*(GOSUBS5000: IFI>IXTHEN740
730 GOSUBS3000: GOT0710
740 FORJL=1TO7: LPRINT: NEXTJL
750 LPRINTCHR(31)SPC(10)*MODULO DE ELASTICIDAD DE LAS COLUMNAS (KG/CM2)*: LPRINTCHR(30): LPRINT: LPRINT
760 A=1: B=1: IX=N: JX=N0-1: FORJ=1TOJX: FORI=1TOIX: A(I, J)=EC(I, J): NEXTI, J
770 LPRINT"EJE DE COLUMNA": SPC(5):
780 GOSUBS1000: LPRINT"ENTREPISO": GOSUBS3000: IFI>IXTHEN800
790 GOSUBS3000: GOT0770
800 FORJL=1TO7: LPRINT: NEXTJL
810 LPRINTCHR(31)SPC(14)*MOMENTO DE INERCIA DE LAS TRABES (CM4)*: LPRINTCHR(30): LPRINT: LPRINT
820 A=1: B=1: IX=N-1: JX=N0: FORJ=1TOJX: FORI=1TOIX: A(I, J)=TI(I, J): NEXTI, J
830 LPRINTSPC(6)*CRUJIA*: SPC(7):
840 GOSUBS1000: LPRINTSPC(2)*PISO*(GOSUBS5000: IFI>IXTHEN860
850 GOSUBS3000: GOT0830
860 FORJL=1TO7: LPRINT: NEXTJL
870 LPRINTCHR(31)SPC(13)*MOMENTO DE INERCIA DE LAS COLUMNAS (CM4)*: LPRINTCHR(30): LPRINT: LPRINT
880 A=1: B=1: IX=N: JX=N0-1: FORJ=1TOJX: FORI=1TOIX: A(I, J)=CI(I, J): NEXTI, J
890 LPRINT"EJE DE COLUMNA": SPC(5):
900 GOSUBS1000: LPRINT"ENTREPISO": GOSUBS5000: IFI>IXTHEN920
910 GOSUBS3000: GOT0890
920 FORJL=1TO7: LPRINT: NEXTJL
930 LPRINTCHR(31)SPC(2)*ANCHO DE LA CIMENTACION A NIVEL DE CADA REACCION DEL SUELO (M)*: LPRINTCHR(30): LPRINT: LPRINT
940 A=1: B=1: IX=N: FORI=1TOIX: VZ(I)=BC(I): NEXTI
950 LPRINTSPC(1)*REACCION*: LPRINTSPC(1)*DEL SUELO*: SPC(9):
960 GOSUBS1000: LPRINT: GOSUBS2000: IFI>IXTHEN980
970 GOSUBS3000: GOT0950
980 FORJL=1TO7: LPRINT: NEXTJL
990 LPRINTCHR(31)SPC(2)*BANDERA QUE IDENTIFICA EL TIPO DE NUDO: CONTINUO=1, ARTICULADO=0*: LPRINTCHR(30): LPRINT: LPRINT
1000 A=1: B=1: IX=N: JX=N0: FORJ=1TOJX: FORI=1TOIX: A(I, J)=FL(I, J): NEXTI, J
1010 LPRINT"EJE DE COLUMNA": SPC(5):
1020 GOSUBS1000: LPRINTSPC(2)*PISO*(GOSUBS5000: IFI>IXTHEN1040
1030 GOSUBS3000: GOT01010
1040 FORJL=1TO7: LPRINT: NEXTJL
1050 LPRINTCHR(31)SPC(1)*NUMERO DE CARGAS SOBRE*: SPC(15)*NUMERO DE ESTRATOS DEL*
1060 LPRINTSPC(1)*LA ESTRUCTURA DEBIDAS*: SPC(16)*SUELO A CONSIDERARSE = *INP
1070 LPRINTSPC(1)*A LA REACCION DEL SUELO = *IN: FORJL=1TO8: LPRINT: NEXTJL
1080 LPRINTSPC(15)*ESPESOR DE LOS ESTRATOS DEL SUELO (M)*: LPRINTCHR(30): LPRINT: LPRINT
1090 LPRINTSPC(53)*ESTRATO*: LPRINT
1100 JI=PI: FORJ=1TOJX: B(I, J)=H(I, J): NEXTJ: GOSUBS4000: FORJL=1TO7: LPRINT: NEXTJL
1110 LPRINTCHR(31)SPC(14)*MODULO DE VARIACION VOLUMETRICA EN LA*
1120 LPRINTSPC(13)*SECCIONES DEL SUELO CONSIDERADAS (M2/TON)*: LPRINTCHR(30): LPRINT: LPRINT
1130 A=1: B=1: IX=N: JX=NPI: FORJ=1TOJX: FORI=1TOIX: A(I, J)=MV(I, J): NEXTI, J
1140 LPRINTSPC(7)*CARGA*: SPC(7):
1150 GOSUBS1000: LPRINTSPC(1)*ESTRATO*: GOSUBS5000: IFI>IXTHEN1170
1160 GOSUBS3000: GOT01140
1170 FORJL=1TO7: LPRINT: NEXTJL: ERASEA, B, VZ
1180 REM CALCULO DE LOS VALORES DE INFLUENCIA

```

```

1190 REM LONGITUDES DE LAS CARGAS DE LA REACCION DEL TERRENO
1200 I=1:Y(I)=TL(I)/4:I=H:Y(I)=TL(N-1)/4
1210 J=0:FORI=2TOM-1STEP2:J=J+1:Y(I)=TL(J)/2:NEXTJ
1220 J=0:FORI=3TOM-2STEP2:J=J+1:Y(I)=TL(J)/4+TL(J+1)/4:NEXTJ
1230 REM LONGITUDES Y PROFUNDIDADES ACUMULADAS
1240 I=1:LA(I)=Y(I)
1250 FORI=2TOMSTEP2:IFI=2THENI200
1260 IFI>M-1THENI300
1270 LA(I)=LA(I-2)+.5*Y(I-2)+.5*Y(I)+Y(I-1):GOTO1290
1280 LA(I)=LA(I-1)+.5*Y(I)
1290 NEXTI
1300 I=H:LA(I)=LA(I-1)+.5*Y(I-1)+Y(I)
1310 JL=0:FORI=3TOM-2STEP2:LJ=LJ+1:JL=JL+2:LA(I)=LA(JL)+.5*Y(JL)+TL(LJ)/4:NEXTJ
1320 J=I:HA(J)=H(J)/2
1330 IFNP=1THENI370
1340 FORJ=2TOM:HA(J)=HA(J-1)+.5*H(J-1)+.5*H(J):NEXTJ
1350 REM LONGITUDES RELATIVAS ENTRE CENTROS DE CARGAS
1360 I=1:FORJ=1:TOM:LR(J,I)=LA(J):NEXTJ
1370 FORI=2TOM-1:FORJ=1:TOM:LR(J,I)=LA(J)-LA(I):NEXTJ,I
1380 REM APLICACION DE LA EXPRESION DE BOUSSINESQ
1390 LJ=0:FORK=3TOM-2STEP2:LJ=LJ+1:FORI=1TOM:R=1:FORJ=1TOM:(LE=LR(KR,I)+TL(LJ+1))/4:LI=LR(KR,I)-TL(LJ)/4:BC=BC(KR)/2:HA=HA(J):LE=LEIG
OSUB5600:PE=PIL-LI:GOSUB5600:FI(I,J,KR)=ABS((PE-P)*2):NEXTJ,I,KR
1400 FORK=2TOM-1STEP2:FORI=1TOM:R=1:FORJ=1TOM:LE=LR(KR,I)+.5*Y(KR):LI=LR(KR,I)-.5*Y(KR):BC=BC(KR)/2:HA=HA(J):LE=LEIGOSUB5600:PE=PIL
L-LI:GOSUB5600:FI(I,J,KR)=ABS((PE-P)*2):NEXTJ,I,KR
1410 FORK=2TOM-1STEP2:FORI=KR+1TOM:FORJ=1TOM:LE=LR(I,KR)+.5*Y(KR):LI=LR(I,KR)-.5*Y(KR):BC=BC(KR)/2:HA=HA(J):LE=LEIGOSUB5600:PE=PIL
L-LI:GOSUB5600:FI(I,J,KR)=ABS((PE-P)*2):NEXTJ,I,KR
1420 LJ=0:FORK=3TOM-2STEP2:LJ=LJ+1:FORI=KR+1TOM:FORJ=1TOM:LE=LR(I,KR)+TL(LJ)/4:LI=LR(I,KR)-TL(LJ+1)/4:BC=BC(KR)/2:HA=HA(J):LE=LEIG
OSUB5600:PE=PIL-LI:GOSUB5600:FI(I,J,KR)=ABS((PE-P)*2):NEXTJ,I,KR
1430 FORK=2TOM-1STEP2:FORI=1TOM:P=1:KR=L+Y(KR)/2:BC=BC(KR)/2:HA=HA(J):GOSUB5600:FI(I,J,KR)=ABS(P+2):NEXTJ,KR
1440 LJ=0:FORK=3TOM-2STEP2:LJ=LJ+1:FORJ=1TOM:P=1:KR=L+Y(KR)/2:BC=BC(KR)/2:HA=HA(J):LE=LEIGOSUB5600:PE=P+2:LI=LEIG
OSUB5600:FI(I,J,KR)=ABS(PE-(P+2)):NEXTJ,KR
1450 KR=1:FORI=2TOM:FORJ=1TOM:LE=LA(I):LI=LA(I)-LA(I):BC=BC(KR)/2:HA=HA(J):LE=LEIGOSUB5600:PE=PIL-LI:GOSUB5600:FI(I,J,KR)=ABS((PE
-P)*2):NEXTJ,I
1460 KR=H:FORI=1TOM-1:FORJ=1TOM:LE=LR(KR,I):LI=LR(KR,I)-Y(KR):BC=BC(KR)/2:HA=HA(J):LE=LEIGOSUB5600:PE=PIL-LI:GOSUB5600:FI(I,J,KR)
=ABS((PE-P)*2):NEXTJ,I
1470 FORJ=1TOM:P=1:KR=L+Y(KR):BC=BC(KR)/2:HA=HA(J):GOSUB5600:FI(I,J,KR)=ABS(P+2):NEXTJ
1480 FORJ=1TOM:P=H:KR=H+Y(KR):BC=BC(KR)/2:HA=HA(J):GOSUB5600:FI(I,J,KR)=ABS(P+2):NEXTJ
1490 REM EC. III.42: HUNDIMIENTOS DEL TERRENO
1500 FORI=1TOM:FORK=1TOM:SA=0:FORJ=1TOM
1510 SA=NV(I,J)+H(J)+FI(I,J,KR)+SA:NEXTJ
1520 Q(KR,I)=SA/BC(KR):NEXTKR,I:ERASEBC,H,MA,LA,LR,NV,Y
1530 REM ECS. III.43 Y III.44: CAMBIO DE VARIABLES
1540 DIMRD(N,N),RZ(N,N),TD(N,N),TZ(N,N)
1550 FORK=1TOM:FORI=1TOM:RD(I,K)=0(2*I-1,2*K-1):NEXTI
1560 FORI=1TOM-1:TD(I,K)=0(2*I,2*K-1):NEXTI,K
1570 FORK=1TOM-1:FORI=1TOM:RZ(I,K)=0(2*I-1,2*K):NEXTI
1580 FORI=1TOM-1:TZ(I,K)=0(2*I,2*K):NEXTI,K:ERASE Q
1590 REM IMPRESION DE RESULTADOS
1600 LPRINTCHR(32)SPC(11)*IMPRESION DE RESULTADOS*
1610 LPRINTSPC(11)******
1620 LPRINTSPC(23)*VALORES DE INFLUENCIA* LPRINTCHR(32):LPRINTLPRINT
1630 A=1:B=1:IX=H:JX=NP:KY=M
1640 LPRINTSPC(7)*CARGA*SPC(7):IGOSUB5100:LPRINTLPRINT*PUNTO/ESTRATO*
1650 FORK=1TOM:FORJ=1TOM:ILPRINTSPC(11)USING'00':IK:LPRINTSPC(5)USING'00':J:LPRINTSPC(4)
1660 FORI=2TOM-1:IFI>1THENI=7:A:GOTO1680
1670 LPRINTUSING'00,0000000000':FI(K,J,I):LPRINTSPC(4)
1680 NEXTI:LPRINTLPRINT:NEXTJ,K
1690 IFI>1THENI710
1700 GOSUB5300:GOTO1640
1710 FORJL=1TOM:LPRINT:NEXTJL:ERASEFI

```

```

1720 REM ASIGNACION DE COEFICIENTES A LOS NUDOS
1730 DIMAD(N,NQ):AL(N,NQ):AR(N,NQ):AU(N,NQ):BD(N,NQ):BL(N,NQ):BR(N,NQ):BU(N,NQ):GL(N,NQ):GR(N,NQ):PL(N):MR(N):NL(N):NR(N):OD(N,NQ),
OL(N,NQ):RL(N):RR(N)
1740 I=1:J=1:IFFL(I,J)=0THEN1760
1750 GOSUB57000:GOSUB58000
1760 I=N:J=1:IFFL(I,J)=0THEN1780
1770 GOSUB58000:GOSUB59000
1780 I=1:J=NQ:IFFL(I,J)=0THEN1800
1790 GOSUB57000:GOSUB60000
1800 I=N:J=NQ:IFFL(I,J)=0THEN1820
1810 GOSUB59000:GOSUB61000
1820 IFN=2THEN1870
1830 J=1:FORI=2TON-1:IFFL(I,J)=0THEN1850
1840 GOSUB57000:GOSUB58000:GOSUB59000
1850 NEXTI
1860 J=NQ:FORI=2TON-1:IFFL(I,J)=0THEN1890
1870 GOSUB57000:GOSUB59000:GOSUB60000
1880 NEXTI
1890 IFNG=2THEN1940
1900 I=1:FORJ=2TON-1:IFFL(I,J)=0THEN1920
1910 GOSUB57000:GOSUB58000:GOSUB60000
1920 NEXTJ
1930 I=N:FORJ=2TON-1:IFFL(I,J)=0THEN1950
1940 GOSUB58000:GOSUB59000:GOSUB60000
1950 NEXTJ
1960 IFN=2THEN2020
1970 IFNG=2THEN2020
1980 FORJ=2TON-1:FORI=2TON-1:IFFL(I,J)=0THEN2000
1990 GOSUB57000:GOSUB58000:GOSUB59000:GOSUB60000
2000 NEXTI,J
2010 REM RIGIDEZES DE TRABES Y COLUMNAS Y DE NUDO
2020 DIMCK(N,NQ-1):KN(N,NQ):TK(N-1,NQ)
2030 FORJ=1TONQ:FORI=1TON-1:TK(I,J)=(ET(I,J)+TI(I,J)+E-7)/TL(I):NEXTI,J
2040 FORI=1TON:FORJ=1TONQ-1:CK(I,J)=(EC(I,J)+CI(I,J)+E-7)/CL(J):NEXTJ,I
2050 ERASECI,EC,ET,TI
2060 I=1:J=1:KN(I,J)=AR(I,J)+TK(I,J)+AU(I,J)+CK(I,J)
2070 I=N:J=1:KN(I,J)=AL(I,J)+TK(I-1,J)+AU(I,J)+CK(I,J)
2080 I=1:J=NQ:KN(I,J)=AD(I,J)+CK(I,J-1)+AR(I,J)+TK(I,J)
2090 I=N:J=NQ:N(I,J)=AL(I,J)+TK(I-1,J)+AD(I,J)+CK(I,J-1)
2100 IFN=2THEN2130
2110 J=1:FORI=2TON-1:KN(I,J)=AL(I,J)+TK(I-1,J)+AR(I,J)+TK(I,J)+AU(I,J)+CK(I,J):NEXTI
2120 J=NQ:FORI=2TON-1:KN(I,J)=AL(I,J)+TK(I-1,J)+AR(I,J)+TK(I,J)+AD(I,J)+CK(I,J-1):NEXTI
2130 IFNG=2THEN2160
2140 I=1:FORJ=2TONQ-1:KN(I,J)=AR(I,J)+TK(I,J)+AU(I,J)+CK(I,J)+AD(I,J)+CK(I,J-1):NEXTJ
2150 I=N:FORJ=2TONQ-1:KN(I,J)=AL(I,J)+TK(I-1,J)+AD(I,J)+CK(I,J-1)+AU(I,J)+CK(I,J):NEXTJ
2160 IFN=2THEN2200
2170 IFNG=2THEN2200
2180 FORJ=2TONQ-1:FORI=2TON-1:KN(I,J)=AL(I,J)+TK(I-1,J)+AR(I,J)+TK(I,J)+AD(I,J)+CK(I,J-1)+AU(I,J)+CK(I,J):NEXTI,J
2190 REM EC, III.16: SUMA DE MOMENTOS EN EL NUDO I,1
2200 WA=N*NQ=J*N-2
2210 DIMC:MM1,D(N,MB),F(N,NQ,MM),R(N,MM),T(N,MM)
2220 REM I=1 Y J=1
2230 IFFL(1,1)=0THEN2340
2240 F(1,1,1)=2*KN(1,1)
2250 F(2,1,1)=BR(1,1)+TK(1,1)
2260 F(1,2,1)=BU(1,1)+CK(1,1)
2270 D(1,1)=(-6*GR(1,1)+TK(1,1))/TL(1)
2280 D(2,1)=(4*GR(1,1)+TK(1,1))/TL(1)
2290 R(1,1)=(-67*RR(1,1)+TL(1)*2)/3072
2300 R(2,1)=(-13*MR(1,1)+TL(1)*2)/3072

```

```

2310 T(I,1)=(-11*NR(I))*(TL(I)+2)/192
2320 C(I)=(-OD(I,1)*W(I,1))*(TL(I)+2)/12
2330 REM J=1, I VARIANDO DE 2 A N-1
2340 IFN=2*OTHEM2520
2350 FORI=2TON-1
2360 IFFL(I,1)=OTHEM2580
2370 F(I-1,1)=EL(I,1)*TK(I-1,1)
2380 F(I,1)=2*KN(I,1)
2390 F(I+1,1)=BR(I,1)*TK(I,1)
2400 F(I,2)=BU(I,1)*CK(I,1)
2410 D(I-1,1)=-6*GL(I,1)*TK(I-1,1)/TL(I-1)
2420 D(I,1)=6*(GL(I,1)*TK(I-1,1)/TL(I-1))-(GR(I,1)*TK(I,1)/TL(I))
2430 D(I+1,1)=6*GR(I,1)*TK(I,1)/TL(I)
2440 R(I-1,1)=13*ML(I,1)*(TL(I-1)+2)/3072
2450 R(I,1)=67*OL(I,1)*(TL(I-1)+2)-RF(I,1)*(TL(I)+2)/3072
2460 R(I+1,1)=-13*MR(I,1)*(TL(I)+2)/3072
2470 T(I-1,1)=11*ML(I,1)*(TL(I-1)+2)/192
2480 T(I,1)=-11*NR(I,1)*(TL(I)+2)/192
2490 C(I)=(OL(I,1)*W(I-1,1))*(TL(I-1)+2)-OD(I,1)*W(I,1)*(TL(I)+2)/12
2500 NEXTI
2510 REM I=N Y J=1
2520 IFFL(N,1)=OTHEM2630
2530 F(N-1,1,N)=EL(N,1)*TK(N-1,1)
2540 F(N,1,N)=2*KN(N,1)
2550 F(N,2,N)=BU(N,1)*CK(N,1)
2560 D(N-1,N)=-6*GL(N,1)*TK(N-1,1)/TL(N-1)
2570 D(N,N)=6*GL(N,1)*TK(N-1,1)/TL(N-1)
2580 R(N-1,N)=13*ML(N,1)*(TL(N-1)+2)/3072
2590 R(N,N)=67*RL(N,1)*(TL(N-1)+2)/3072
2600 T(N-1,N)=11*ML(N,1)*(TL(N-1)+2)/192
2610 C(N)=OL(N,1)*W(N-1,1)*(TL(N-1)+2)/12
2620 REM EC. III.18: SUMA DE MOMENTOS EN EL NUDO I,J
2630 IFN=2*OTHEM2880
2640 REM I=1, J VARIANDO DE 2 A N-1
2650 FORJ=2TON-1
2660 IFFL(I,J)=OTHEM2750
2670 K=(J-1)*N+1
2680 F(I,J,K)=2*KN(I,J)
2690 F(I,J,K)=BR(I,J)*TK(I,J)
2700 F(I,J-1,K)=BD(I,J)*CK(I,J-1)
2710 F(I,J+1,K)=BU(I,J)*CK(I,J)
2720 D(I,K)=-6*GR(I,J)*TK(I,J)/TL(I)
2730 D(I,K)=6*GR(I,J)*TK(I,J)/TL(I)
2740 C(K)=(-OD(I,J)*W(I,J))*(TL(I)+2)/12
2750 NEXTJ
2760 REM I=N, J VARIANDO DE 2 A N-1
2770 FORJ=2TON-1
2780 IFFL(N,J)=OTHEM2870
2790 K=(J-1)*N+1
2800 F(N-1,J,K)=EL(N,J)*TK(N-1,J)
2810 F(N,J,K)=2*KN(N,J)
2820 F(N,J-1,K)=BD(N,J)*CK(N,J-1)
2830 F(N,J+1,K)=BU(N,J)*CK(N,J)
2840 D(N-1,K)=-6*GL(N,J)*TK(N-1,J)/TL(N-1)
2850 D(N,K)=6*GL(N,J)*TK(N-1,J)/TL(N-1)
2860 C(K)=(OL(N,J)*W(N-1,J))*(TL(N-1)+2)/12
2870 NEXTJ
2880 IFN=2*OTHEM2900
2890 REM J=N-1 VARIANDO DE 2 A N-1
2900 FORI=2TON-1

```

```

2910 IFFL(I,NQ)=0THENJ010
2920 K=(NQ-1)*N+1
2930 F(I-1,NQ,K)=BL(I,NQ)*TK(I-1,NQ)
2940 F(I,NQ,K)=2*HN(I,NQ)
2950 F(I+1,NQ,K)=BR(I,NQ)*TK(I,NQ)
2960 F(I,NQ-1,K)=BD(I,NQ)*CK(I,NQ-1)
2970 D(I-1,K)=-6*GL(I,NQ)*TK(I-1,NQ)/TL(I-1)
2980 D(I,K)=6*(GL(I,NQ)*TK(I-1,NQ)/TL(I-1))-(GR(I,NQ)*TK(I,NQ)/TL(I))
2990 D(I+1,K)=6*GR(I,NQ)*TK(I,NQ)/TL(I)
3000 C(K)=(OL(I,NQ)*W(I-1,NQ)*TL(I-1)+2)-(OD(I,NQ)*W(I,NQ)*TL(I)+2))/12
3010 NEXTI
3020 IF NQ-2=0 THEN 3020
3030 REM I VARIANDO DE 2 A N-1 Y J DE 2 A NQ-1
3040 FOR J=2 TO NQ-1
3050 FOR I=2 TO N-1
3060 IF FL(I,J)=0 THEN 3170
3070 K=(J-1)*N+1
3080 F(I-1,J,K)=BL(I,J)*TK(I-1,J)
3090 F(I,J,K)=2*FN(I,J)
3100 F(I+1,J,K)=BR(I,J)*TK(I,J)
3110 F(I,J-1,K)=BD(I,J)*CK(I,J-1)
3120 F(I,J-1,K)=BU(I,J)*CK(I,J)
3130 D(I-1,K)=-6*GL(I,J)*TK(I-1,J)/TL(I-1)
3140 D(I,K)=6*(GL(I,J)*TK(I-1,J)/TL(I-1))-6GR(I,J)*TK(I,J)/TL(I))
3150 D(I+1,K)=6*GR(I,J)*TK(I,J)/TL(I)
3160 C(K)=(OL(I,J)*W(I-1,J)*TL(I-1)+2)-(OD(I,J)*W(I,J)*TL(I)+2))/12
3170 NEXTI
3180 NEXTJ
3190 REM I=1 Y J=NQ
3200 IFFL(I,NQ)=0THEN3290
3210 K=(NQ-1)*N+1
3220 F(1,NQ,K)=2*KN(1,NQ)
3230 F(2,NQ,K)=BR(1,NQ)*TK(1,NQ)
3240 F(1,NQ-1,K)=BD(1,NQ)*CK(1,NQ-1)
3250 D(1,K)=-6*GR(1,NQ)*TK(1,NQ)/TL(1)
3260 D(2,K)=6*GR(1,NQ)*TK(1,NQ)/TL(1)
3270 C(K)=-OD(1,NQ)*W(1,NQ)*TL(1)+2)/12
3280 REM I=N Y J=NQ
3290 IFFL(N,NQ)=0THEN3400
3300 K=(NQ-1)*N+1
3310 F(N-1,NQ,K)=BL(N,NQ)*TK(N-1,NQ)
3320 F(N,NQ,K)=2*KN(N,NQ)
3330 F(N,NQ-1,K)=BD(N,NQ)*CK(N,NQ-1)
3340 D(N-1,K)=-6*GL(N,NQ)*TK(N-1,NQ)/TL(N-1)
3350 D(N,K)=6*GL(N,NQ)*TK(N-1,NQ)/TL(N-1)
3360 C(K)=(OL(N,NQ)*W(N-1,NQ)*TL(N-1)+2)/12
3370 ERASEN
3380 REM EC. V.III.22: EQUILIBRIO DE FUERZA CORTANTE EN LA CRUJIA 1
3390 REM I=1 Y J VARIANDO DE 1 A NQ
3400 K=N*NQ
3410 S=0:SN=0:K=K-1
3420 FORJ=1TONQ
3430 F(1,J,K)=2*AR(1,J)+BL(2,J)*TK(1,J)
3440 F(2,J,K)=2*AL(2,J)+BR(1,J)*TK(1,J)
3450 SN=SN+GR(1,J)+GL(2,J)*TK(1,J)
3460 S=S+(OL(2,J)-OD(1,J)-6)/6)*N(1,J)
3470 NEXTJ
3480 D(1,K)=-6*SN/TL(1)
3490 D(2,K)=6*SN/TL(1)
3500 R(1,K)=-((TL(1)+2)*(67*RR(1)-13*PL(2)+672))/3072

```

```

3518 R(1,K)=-((TL(1)+2)*(96+13*NR(1)-67*RL(2)))/3872
3520 T(1,K)=-((TL(1)+2)*(48+11*NR(1)-11*RL(2)))/192
3530 C(K)=(TL(1)+2)*SW/2-TL(1)*PW(1)
3540 REM EC. V. III.21: EQUILIBRIO DE FUERZA CORTANTE EN LA CRUJIA I
3550 REM I VARIANDO DE 2 A N-1 Y J DE 1 A N
3560 IFN=2THEN3800
3570 FORI=2TON-1
3580 SA=CISW=CISL=BTH=K+1
3590 FORJ=1TON0
3600 F(1+J,K)=(2*AR(1,J)+BL(1+J))*TK(1,J)
3610 F(2+J,K)=(2*AL(1+J)+BR(1,J))*TK(1,J)
3620 S=5*(GR(1,J)+GL(1+J))*TK(1,J)
3630 SW=SW+(OL(1+J)-OD(1,J)-6)/6)*W(1,J)
3640 NEXTJ
3650 FORK=1TO1-1SO=CIFORJ=1TON0S0=S0+K(KC,J)INEXTJ:SL=TL(KC)+S0*SL:(TK(K)-TL(1))*TL(KC)/2:INEXTKC
3660 SP=S:FORK=1TO1:SP=SP+PW(KC)INEXTK
3670 C(K)=-((TL(1)+2)*SW/2)-TL(1)*SL-TL(1)*SP
3680 IFI=2THEN3720
3690 FORK=2TO1-1:RI(K,K)=-TL(1)*(TL(KC-1)+TL(KC))/4:INEXTK
3700 D(1,K)=-6*SK/TL(1)
3710 D(1+K,K)=6*SK/TL(1)
3720 R(1,K)=-TL(1)*TL(1)/4
3730 R(1+K,K)=-((TL(1)-1)*TL(1)/4)-((TL(1)+2)*(67*RR(1)-13*ML(1+1)+672)/3872)
3740 R(1+K,K)=-((TL(1)+2)*(96+13*NR(1)-67*RL(1+1))/3872
3750 T(1,K)=-((TL(1)+2)*(48+11*NR(1)-11*NL(1+1))/192
3760 NEXTI
3770 REM DESPLAZAMIENTO Z(I) EN LA CIMENTACION A LA MITAD DE LA CRUJIA I
3780 DIMZ(N,M)
3790 REM J=1 E I VARIANDO DE 1 A N-1
3800 FORI=1TON-1
3810 IFFL(1+I,1)=0THEN3950
3820 IFFL(1,1)=0THEN4200
3830 REM EC. III.28: TRABE CON APOYOS CONTINUOS
3840 K=K+1
3850 F(1+I,K)=TK(1,1)
3860 F(1+1+K,K)=-TK(1,1)
3870 D(1,K)=-8*TK(1,1)/TL(1)
3880 D(1+1,K)=-8*TK(1,1)/TL(1)
3890 Z(1,K)=16*TK(1,1)/TL(1)
3900 R(1,K)=TL(1)+2/256
3910 R(1+1,K)=TL(1)+2/256
3920 T(1,K)=13*(TL(1)+2)/384
3930 C(K)=W(1,1)*(TL(1)+2)/24
3940 GOTO4200
3950 IFFL(1,1)=0THEN4200
3960 REM EC. III.32: APOYO I CONTINUO E I+1 ARTICULADO
3970 K=K+1
3980 F(1+1,K)=3*TK(1,1)
3990 D(1,K)=-22*TK(1,1)/TL(1)
4000 D(1+1,K)=-18*TK(1,1)/TL(1)
4010 Z(1,K)=3*TK(1,1)/TL(1)
4020 R(1,K)=37*(TL(1)+2)/3872
4030 R(1+1,K)=91*(TL(1)+2)/3872
4040 T(1,K)=TL(1)+2/8
4050 C(K)=W(1,1)*(TL(1)+2)/6
4060 GOTO4200
4070 REM EC. III.35: APOYO I ARTICULADO E I+1 CONTINUO
4080 K=K+1
4090 F(1+1,K)=TK(1,1)
4100 F(1+1+K,K)=TK(1,1)/8

```

```

4110 D(I,K)=-17*TK(I,1)/TL(I)/4
4120 D(I+1,K)=TK(I,1)/TL(I)/4
4130 Z(I,K)=4*TK(I,1)/TL(I)
4140 R(I,K)=-59*(TL(I)+2)/8192
4150 R(I+1,K)=-5*(TL(I)+2)/8192
4160 T(I,K)=-5*(TL(I)+2)/384
4170 C(K)=-W(I,1)*(TL(I)+2)/48
4180 GOTO4250
4190 REM EC. III.39: TRABE CON APOYOS ARTICULADOS
4200 K=K+1
4210 F(I,1,K)=T(I,1)
4220 D(I,K)=-4*TK(I,1)/TL(I)
4230 Z(I,K)=4*TK(I,1)/TL(I)
4240 R(I,K)=-13*(TL(I)+2)/1536
4250 R(I+1,K)=-4*(TL(I)+2)/384
4260 T(I,K)=-31*(TL(I)+2)/1536
4270 C(K)=-W(I,1)*(TL(I)+2)/32
4280 NEXTI
4290 REM EC. V.III.39: EQUILIBRIO DE FUERZAS VERTICALES
4300 K=K+1
4310 R(I,K)=TL(I)*R(N,K)=TL(N-1)
4320 IFN=2THEN4340
4330 FORI=2TON-1:R(I,K)=TL(I-1)+TL(I):NEXTI
4340 FORI=1TON-1:T(I,K)=2*TL(I):NEXTI
4350 SD=0:FORI=1TON-1:SW=0:FORJ=1TON:SW=SW+W(I,J):NEXTJ:SD=TL(I)*SW:SD:NEXTI:SP=0:FORI=1TON:SP=SP+P(W(I)):NEXTI:C(K)=4*(SD+BP)
4360 REM EC. AUXILIAR DE EQUILIBRIO DE MOMENTOS EN LAS VIGAS CONJUGADAS DE LA CIMENTACION
4370 FORI=1TON-1
4380 IFFL(I,1)=1THEN4600
4390 IFFL(I+1,1)=0THEN4520
4400 REM EC. III.44: APOYO I ARTICULADO E I+1 CONTINUO
4410 K=K+1
4420 F(I,1,K)=TK(I,1)
4430 F(I+1,1,K)=.5*TK(I,1)
4440 D(I,K)=-3*TK(I,1)/TL(I)
4450 D(I+1,K)=3*TK(I,1)/TL(I)
4460 R(I,K)=-57*(TL(I)+2)/6144
4470 R(I+1,K)=-13*(TL(I)+2)/6144
4480 T(I,K)=-11*(TL(I)+2)/384
4490 C(K)=-4*(I,1)*(TL(I)+2)/24
4500 GOTO4520
4510 REM EC. III.45: AMBOS APOYOS ARTICULADOS
4520 K=K+1
4530 F(I,1,K)=TK(I,1)
4540 D(I,K)=-2*TK(I,1)/TL(I)
4550 D(I+1,K)=2*TK(I,1)/TL(I)
4560 R(I,K)=-49*(TL(I)+2)/3072
4570 R(I+1,K)=-31*(TL(I)+2)/3072
4580 T(I,K)=-11*(TL(I)+2)/192
4590 C(K)=-W(I,1)*(TL(I)+2)/12
4600 NEXTI:ERASECL*PW
4610 REM SUSTITUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES DEL CALCULO DE MUNDIEMENTOS, EN EL QUE RESULTA DE APLICAR EL METODO DE RIGIDECES
4620 HT=0:FORI=1TON:FORJ=1TON:FORKC=1TON-1
4630 S1=PD(I,KC)*D(KC,K)+RZ(I,KC)*Z(KC,K)
4640 R(I,K)=R(I,K)+S1:NEXTKC
4650 S1=PD(I,N)*D(N,K)
4660 R(I,K)=R(I,K)+S1:NEXTI
4670 FORI=1TON-1:FORKC=1TON-1
4680 S2=TD(I,KC)*D(KC,K)+T(I,KC)*Z(KC,K)
4690 T(I,K)=T(I,K)+S2:NEXTKC
4700 S2=TD(I,N)*D(N,K)

```

```

4710 T(I,K)=T(I,K)+S2
4720 NEXT I:KIERASED:Z
4730 REM CONTADOR DE ECUACIONES PI(K) Y BANDERA F(K) PARA IDENTIFICAR NUDOS
4740 DIMP(NM),FG(N,M)
4750 AC=B:F0RJ=1:TONK=I:FORI=1:TONI=K-(J-1)*N+1:IFFL(I,J)=0:THEN4770
4760 GOTO4780
4770 AC=AC+I
4780 P(K)=AC:NETTI,J
4790 K=0:F0RJ=1:TONH=I:FORI=1:TONI=K+1:FG(K)=FL(I,J):NETTI,J
4800 REM FORMACION DE LA MATRIZ A Y DEL VECTOR B
4810 HA=I:TA=AC
4820 DIMA(HA,HA+1):B(HA)
4830 FORH=1:TONH
4840 IFFG(H)=0:THEN4860
4850 GOSUB61000:GOSUB62000:GOSUB63000:GOSUB64000
4860 NEXT K
4870 FORK=N*N+1:TONI
4880 P(K)=K-AC
4890 GOSUB61000:GOSUB62000:GOSUB63000:GOSUB64000:NEXTKIERASEC,F,P,R,T
4900 REM IMPRESION DE RESULTADOS
4910 LPRINTCHR(31)SPC(20)*MATRIZ DE COEFICIENTES*:LPRINTCHR(30):LPRINT:LPRINT
4920 A=I:B=I:I=JA:J=N-1:JX=HA
4930 LPRINTSPC(5)*COLUMNA*SPC(7):
4940 GOSUB31000
4950 LPRINTSPC(1)*RENGLON*
4960 FORJ=1:TOJX
4970 LPRINTSPC(3)X+SING*+*J:;LPRINTSPC(9):
4980 FORI=8:TO7*A
4990 IFI>I:THENI=7+AI:GOTO5010
5000 LPRINTUSING"00.00000000"*(A(J,I)):LPRINTSPC(4):
5010 NETTI:LPRINT:LPRINT:NETJ
5020 IFI<I:THENB=0
5030 GOSUB3000:GOTO4930
5040 FORJL=1:TOJ:LPRINT:NETJL
5050 LPRINTCHR(31)SPC(17)*VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES*:LPRINTCHR(30):LPRINT:LPRINT
5060 LPRINTSPC(53)*RENGLON*:LPRINT
5070 JX=HA:GOSUB64000:F0RJL=1:TOJ:LPRINT:NETJL
5080 REM SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES AX=B POR GAUSS-JORDAN
5090 I1=HA:J1=JA:K1=I:FORI=1:TOI:K1(I,JX)=R(I):NETTI
5100 FORJ=1:TOJ
5110 L=AI:IFL=I:GOTO5150
5120 FORI=K+1:TOI
5130 IFABS(A(L,K))/ABS(A(I,K))>L:THEN L=I
5140 NETTI
5150 IFL=AGOTO5170
5160 FORJ=1:TOJ:AK=A(L,J):AL(J)=A(L,J)-AK(J):A(K,J)=AX:NETJ
5170 IFA(K,N)=0:GOTO5230
5180 FORI=K+1:TOI:A(K,J)=A(K,J)-AK(J):NETJIA(K,N)=I
5190 FORI=1:TOI
5200 IFI=AGOTO5220
5210 FORJ=K+1:TOJ:A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)*A(K,J):NETJIA(I,K)=0
5220 NETTI
5230 NETJ
5240 REM IMPRESION DE RESULTADOS
5250 LPRINTCHR(31)SPC(2)*VECTOR SOLUCION (DOBLEGIROS EN RADIANES Y REACCIONES EN TON/M):LPRINTCHR(30):LPRINT:LPRINT
5260 J=J:J=JA:K=N:F0RJ=1:TON=I:JO=J+1:IFFG(J)=0:THEN5280
5270 LPRINTSPC(27)*DOBLEGIRO EN EL NUDO (*:USING"00":J):LPRINT*, 1) *SPC(20)*= FI(*:USING"00":J):LPRINT*, 1) = *:USING"00.000
000000":A(JO,JX):GOTO5290
5280 LPRINTSPC(27)*DOBLEGIRO EN EL NUDO (*:USING"00":J):LPRINT*, 1) DERECHA*SPC(13)*= FI(*:USING"00":J):LPRINT*, 1) DER = *:USING
"00.00000000":A(JO,JY)

```

```

5290 LPRINT:NEXTJ
5300 IFFG(N)=@THEN5320
5310 JO=JO+1:LPRINT:SPC(27)*"DOBLEGIRO EN EL NUDO (" :USING"##":N):LPRINT", 1) *SPC(20)**= F1(" :USING"##":N):LPRINT", 1) = :USING
6*##.#####":A(JO,JX):LPRINT
5320 FORJB=2TON9:FORJ=1TON:IFFL(J,JR)=@THEN5340
5330 JO=JO+1:LPRINT:SPC(27)*"DOBLEGIRO EN EL NUDO (" :USING"##":J):LPRINT", " :USING"##":JB):LPRINT") *SPC(20)**= F1(" :USING"##":J):LPR
INT", " :USING"##":JB):LPRINT") = *USING"##.#####":A(JO,JX):LPRINT
5340 NEXTJ:JB
5350 FORJ=1TON
5360 LPRINT:SPC(27)*"REACCION DEL TERRENO BAJO EL EJE DE COLUMNA (" :USING"##":J):LPRINT") = R (" :USING"##":J):LPRINT") = :USI
N5*##.#####":A(JO,J,JY):LPRINT
5370 IFJ=@THEN5390
5380 LPRINT:SPC(27)*"REACCION DEL TERRENO BAJO LA CRUJIA (" :USING"##":J):LPRINT")*SPC(9)**= T (" :USING"##":J):LPRINT") = :USI
N6*##.#####":A(JO+N+J,JY):LPRINT
5390 NEXTJ:FORJL=1TO7:LPRINT:NEXTJL:ERASEFG
5400 REM DESGLOSAMIENTO DEL VECTOR SOLUCION
5410 DIMS(N),GS(N),RS(N),TS(N),ZS(N)
5420 JI=JA+2*N:J0=FORI=JO+1TOJO+(J0+1)*RS(J)+A(I,JY):NEXTI
5430 J0=FORI=JO+N+1TOJO+2*N-1:J0+1:TS(J)+A(I,JX):NEXTI
5440 JX=JA+2*N:JL=1:FORI=1TON:1*GS(I,JL)+A(I,J):NEXTI:IFFL(N,1)=@THEN5460
5450 GS(N,JL)=A(N,JX):JL=N:GOTOS470
5460 J=N-1
5470 JL=JL-1:IFOL=@THEN5500
5480 FORI=1TON:IFFL(I,JL)=@THEN5510
5490 J=J-1
5500 GS(I,JL)=A(I,JY):IFJO=@THEN5550
5510 NEXTI
5520 GOTOS470
5530 ERASEA:B
5540 REM CALCULO DE MUNDIEMENTOS
5550 JL=0:FORJ=1TON:D1=0:D2=0
5560 FORI=1TON:D1=RD(I,J)+RS(I)+D1:NEXTI
5570 FORI=1TON:D2=TD(I,J)+TS(I)+D2:NEXTI
5580 JL=JL+1:DS(JL)=(D1+D2)/100:NEXTJ
5590 JL=0:FORJ=1TON:1*Z1=0:Z2=0
5600 FORI=1TON:Z1=RZ(I,J)+RS(I)+Z1:NEXTI
5610 FORI=1TON:1*Z2=TZ(I,J)+TS(I)+Z2:NEXTI
5620 JL=JL+1:ZS(JL)=(Z1+Z2)/100:NEXTJ
5630 ERASED,RZ,TD,TZ
5640 REM IMPRESION DE RESULTADOS
5650 LPRINT:CHR(13):SPC(25)*"MUNDIEMENTOS (CM)":LPRINT:CHR(13):LPRINT:LPRINT
5660 FORJ=1TON
5670 LPRINT:SPC(35)*"MUNDIEMENTO BAJO EL EJE DE COLUMNA (" :USING"##":J):LPRINT") = D (" :USING"##":J):LPRINT") = *USING"###.##":
DS(J):LPRINT
5680 IFJ=@THEN5700
5690 LPRINT:SPC(35)*"MUNDIEMENTO BAJO EL CENTRO DE LA CRUJIA (" :USING"##":J):LPRINT") = Z (" :USING"##":J):LPRINT") = *USING"###.##":
ZS(J):LPRINT
5700 NEXTJ:FORJL=1TO7:LPRINT:NEXTJL
5710 FORJ=1TON:DS(J)=DS(J)/100:NEXTJ
5720 FORJ=1TON:ZS(J)=ZS(J)/100:NEXTJ
5730 REM ECUACIONES III.9, III.10, III.11 Y III.12: MOMENTOS DE NUDO SOBRE BARRA
5740 DIMPD(N),PL(N),PN,PR(N),PUN(N),SIN(N)
5750 SI(1)=1:FORJ=1TON:FORI=1TON-1:IFFL(I,J)=@THEN5770
5760 PR(I,J)=-GD(I,J)+W(I,J)*(TL(I)+2)/12-SI(J)*(67*RR(I)+RS(I)*(TL(I)+2)/3072+13*RR(I)+RS(I)+1)*(TL(I)+2)/3072+11*NR(I)+TS(I)*(TL(I
)+2)/192-2*GR(I,J)+TK(I,J)+5S(I,J)-BR(I,J)+TK(I,J)+6S(I+1,J)+6*GR(I,J)+TK(I,J)+5DS(I)/TL(I)-3*GR(I,J)+TK(I,J)+DS(I+1)/TL(I)
5770 NEXTI
5780 FORI=2TON:IFFL(I,J)=@THEN5810
5790 PL(I,J)=PL(I,J)+W(I-1,J)*(TL(I-1)+2)/12-SI(J)*(67*RL(I)+RS(I)*(TL(I-1)+2)/3072+13*RL(I)+RS(I+1)*(TL(I-1)+2)/3072+11*NL(I)+TS(I
+1)*FL(I-1)+2)/192-2*AL(I-1,J)+TK(I-1,J)+5S(I,J)-BL(I,J)+TK(I-1,J)+6S(I+1,J)
5800 PL(I,J)=PL(I,J)+6*GL(I,J)+TK(I-1,J)+DS(I-1)/TL(I-1)-6*GL(I,J)+TK(I-1,J)+DS(I)/TL(I-1)

```

```

5810 NEXT I,J
5820 FOR I=1 TO 1:FOR J=1 TO N-1:IF FL(I,J)=0 THEN 5840
5830 PU(I,J)=-2*AU(I,J)+CK(I,J)+GS(I,J)-BU(I,J)+CK(I,J)+GS(I,J)+1
5840 NEXT J
5850 FOR J=2 TO N:IF FL(I,J)=0 THEN 5870
5860 PD(I,J)=-2*AD(I,J)+CK(I,J)+1+GS(I,J)-PD(I,J)+CK(I,J)-1+GS(I,J)-1
5870 NEXT J,I
5880 ERASE AD,AL,AR,AU,BD,BL,BR,BU,CK,FL,GL,GR,HL,MR,NL,NR,OD,OL,RL,RR,TK,TL,W
5890 REM IMPRESION DE RESULTADOS
5900 LPRINT CHR$(31);SPC(15)*MOMENTOS DE MUJO SOBRE BARRA (TON*H)*LPRINT CHR$(30);LPRINT SPC(33)*(CONVENCION: POSITIVOS EN EL SENTIDO
DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ)**LPRINT:LPRINT
5910 LPRINT SPC(9)*TRABE+SPC(15)*MOMENTO EN SU EXTREMO*SPC(23)*COLUMNA*SPC(14)*MOMENTO EN SU EXTREMO*
5920 LPRINT SPC(25)*IZQUIERDO*SPC(13)*DEPECHO*SPC(36)*INFERIOR*SPC(13)*SUPERIOR*LPRINT
5930 A=(N-1)*N+1;B=N*(N-1);I2=3*I2+0;I1=0;I2=0;J1=0;J2=1
5940 J1=J1+1;GOTO 5960
5950 J2=J2+1;GOTO 5990
5960 I1=I1+1;IF I1=N THEN I1=0;GOTO 5940
5970 I2=I2+1;IF I2=ATHEN 6050
5980 LPRINT SPC(9);USING"##";I1;LPRINT";";USING"##";J1;LPRINT SPC(9);USING"##.#####";PR(I1,J1);LPRINT SPC(9);USING"##.#####";
*PL(I1+1,J1)
5990 I2=I2+1;IF I2=N THEN I2=0;GOTO 5950
6000 J2=J2+1;IF J2=B THEN 6090
6010 LPRINT SPC(19);
6020 LPRINT USING"##";I2;LPRINT";";USING"##";J2;LPRINT SPC(9);USING"##.#####";PU(I2,J2);LPRINT SPC(9);USING"##.#####";PD(I2
,J2+1);LPRINT
6030 GOTO 5960
6040 J2=J2+1
6050 I2=I2+1;IF I2=N THEN I2=0;GOTO 6040
6060 J2=J2+1;IF J2=B THEN 6120
6070 LPRINT SPC(74);GOTO 6020
6080 J1=J1+1
6090 I1=I1+1;IF I1=N THEN I1=0;GOTO 6080
6100 I2=I2+1;IF I2=ATHEN 6120
6110 LPRINT:LPRINT;GOTO 5980
6120 LPRINT:LPRINT CHR$(12);LPRINT CHR$(12)
9999 REM DATOS
11000 CLS:END
50000 REM SUBROUTINAS
51000 REM IMPRIME NO. DE COLUMNA
51010 FOR I=0 TO 7*A
51020 IF I\X THEN I=7*A;GOTO 51040
51030 LPRINT USING"##";I;LPRINT SPC(14);
51040 NEXT I:LPRINT:RETURN
52000 REM IMPRIME MAGNITUDES EN UN SOLO NIVEL
52010 LPRINT SPC(14)
52020 FOR I=0 TO 7*A
52030 IF I\X THEN I=7*A;GOTO 52050
52040 LPRINT USING"##.#####";YZ(I);LPRINT SPC(4);
52050 NEXT I:LPRINT:LPRINT:RETURN
53000 REM INCREMENTA A Y B
53010 A=A+1;B=B+7:LPRINT:LPRINT:RETURN
54000 REM IMPRIME NO. DE RENGLON Y MAGNITUD PARA ARREGLO UNIDIMENSIONAL
54010 FOR Z=1 TO 1:LPRINT SPC(35);USING"##";J1;LPRINT SPC(11);LPRINT USING"##.#####";B(J);LPRINT:NEXT J:RETURN
55000 REM IMPRIME NO. DE RENGLON Y BLOQUE DE DATOS
55010 FOR J=1 TO 1
55020 LPRINT SPC(3);USING"##";J;LPRINT SPC(9);
55030 FOR I=0 TO 7*A
55040 IF I\X THEN I=7*A;GOTO 55060
55050 LPRINT USING"##.#####";A(I,J);LPRINT SPC(4);
55060 NEXT I:LPRINT:LPRINT:NEXT J:RETURN

```

```

56200 REM EC. III.40: EXPRESION DE BOUSSINESQ
56210 V1=BC*2+L*2+HA*2+V2+50R(V1)+V3+BC*2+L*2+V4+2*BC*L+HA*V5+BC*2+L*2+2*HA*2+V6+ATN((V4+V2)/(HA*2+V1-V3)):IFV6>=0 THEN56230
56220 V6=V6+3.1415927
56230 P=2.079577*((1+(V4+V2)/(HA*2+V1+V3))*(V5/V1))+V6:RETURN
57200 REM NUDO I,J CONTINUO, COEFS. PARA EL NUDO I+1,J
57010 IFFL(I+1,J)=1 THEN57040
57020 AR(I,J)=.75*BR(I,J)+0*GR(I,J)=.5*OR(I,J)=1.5*IFJ:1 THEN57060
57030 RR(I)=147/134*MR(I)=93/26*NR(I)=1.5*GOTO57060
57040 AR(I,J)=1*BR(I,J)=1*GR(I,J)=1*OR(I,J)=1*IFJ:1 THEN57060
57050 RR(I)=1*MR(I)=1*NR(I)=1
57060 RETURN
58000 REM NUDO I,J CONTINUO, COEFS. PARA EL NUDO I,J+1
58010 IFFL(I,J+1)=1 THEN58040
58020 AU(I,J)=.75*BU(I,J)=0
58030 GOTO58050
58040 AU(I,J)=1*BU(I,J)=1
58050 RETURN
59000 REM NUDO I,J CONTINUO, COEFS. PARA EL NUDO I-1,J
59010 IFFL(I-1,J)=1 THEN59040
59020 AL(I,J)=.75*BL(I,J)=0*GL(I,J)=.5*OL(I,J)=1.5*IFJ:1 THEN59060
59030 RL(I)=147/134*ML(I)=93/26*NL(I)=1.5*GOTO59060
59040 AL(I,J)=1*BL(I,J)=1*GL(I,J)=1*OL(I,J)=1*IFJ:1 THEN59060
59050 RL(I)=1*ML(I)=1*NL(I)=1
59060 RETURN
60000 REM NUDO I,J CONTINUO, COEFS. PARA EL NUDO I,J-1
60010 IFFL(I,J-1)=1 THEN60030
60020 AD(I,J)=.75*BD(I,J)=0*GOTO60040
60030 AD(I,J)=1*BD(I,J)=1
60040 RETURN
61000 REM ARREGLO COEFS. DE LOS GIROS
61010 JA=0:FORJ=1:TOJ-1:JA=JA+1*(P/(J+1)+F(J,J)):NEXTJ
61020 IFFG(N)=0 THEN61040
61030 JA=JA+1*(P/(K)+JA)=F(N,I,K)
61040 FORJB=1:TOJ:FORS=1:TON:IFFL(J,JP)=0 THEN61060
61050 JA=JA+1*(P/(S)+JA)=F(J,JB,K)
61060 NEXTJ,JB:RETURN
62000 REM ARREGLO COEFS. DE R
62010 FORJ=1:TOJ:(P(K)+JA)=R(J,K):NEXTJ:RETURN
63000 REM ARREGLO COEFS. DE T
63010 FORI=1:TON:1*(P(N)+JA)=T(I):NEXTI:RETURN
64000 REM ARREGLO TERNAS INDEPENDIENTES
64010 B(P(N))=0:RETURN

```

**ANEXO III**

LISTADO PARA LA CORRIDA DEL PROBLEMA 1.

U.N.A.M., FACULTAD DE INGENIERIA  
TESIS PROFESIONAL, INGENIERO CIVIL, SALVADOR ALVAREZ GOMEZ  
INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA CON LA PRESENCIA  
DE NUDOS ARTICULADOS  
PROGRAMA DE COMPUTADORA EN LENGUAJE BASIC

I M P R E S I O N    D E    D A T O S  
 \*\*\*\*\*

NUMERO DE EJES DE COLUMNAS = 4

NUMERO DE PISOS = 4

D I S T A N C I A   E N T R E   E J E S   D E   C O L U M N A   ( M )

CRUJIA	1	2	3
	6.00000E+00	6.00000E+00	6.00000E+00

A L T U R A   D E   E N T R E P I S O S   ( M )

ENTREPISO	
1	3.00000E+00
2	3.00000E+00
3	3.00000E+00

C A R G A S   U N I F O R M E S   E N   L A S   T R A B E S   ( T O N / M )

CRUJIA	1	2	3
PISO			

1	4.50000E+00	4.50000E+00	4.50000E+00
2	5.10000E+00	5.10000E+00	5.10000E+00
3	5.10000E+00	5.10000E+00	5.10000E+00
4	5.10000E+00	5.10000E+00	5.10000E+00

MODULO DE ELASTICIDAD DE LAS TRABES (KG/CM<sup>2</sup>)

PISO	CRUJIA	1	2	3
1		4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04
2		4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04
3		4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04
4		4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04

MODULO DE ELASTICIDAD DE LAS COLUMNAS (KG/CM<sup>2</sup>)

EJE DE COLUMNA	1	2	3	4
ENTREPISO				
1	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04
2	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04
3	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04

MOMENTO DE INERCIA DE LAS TRABES (CM<sup>4</sup>)

CRUJIA	1	2	3
--------	---	---	---

PISO	1	2	3	4
1	2.84000E+05	2.84000E+06	2.84000E+05	2.84000E+05
2	2.84000E+06	2.84000E+06	2.84000E+06	2.84000E+06
3	2.84000E+05	2.84000E+06	2.84000E+06	2.84000E+06
4	2.84000E+05	2.84000E+06	2.84000E+06	2.84000E+06

MOMENTO DE INERCIA DE LAS COLUMNAS (CM<sup>4</sup>)

EJE DE COLUMNA ENTREPISO	1	2	3	4
1	6.40000E+05	6.40000E+05	6.40000E+05	6.40000E+05
2	6.40000E+05	6.40000E+05	6.40000E+05	6.40000E+05
3	6.40000E+05	6.40000E+05	6.40000E+05	6.40000E+05

ANCHO DE LA CIMENTACION A NIVEL DE CADA REACCION DEL SUELO (M)

REACCION DEL SUELO	1	2	3	4	5	6	7
	1.20000E+01						

BANDERA QUE IDENTIFICA EL TIPO DE NUDO: CONTINUO=1, ARTICULADO=0

EJE DE COLUMNA PISO	1	2	3	4
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	1.00000E+00	1.00000E+00	1.00000E+00	1.00000E+00



I M P R E S I O N   D E   R E S U L T A D O S  
\*\*\*\*\*

VALORES DE INFLUENCIA

CARGA		1	2	3	4	5	6	7
PUNTO/ESTRATO								
1	1	4.79628E-01	1.91517E-02	6.67691E-04	1.01000E-04	2.58088E-05	8.79169E-06	2.17557E-06
1	2	3.09241E-01	1.56504E-01	1.69870E-02	3.16229E-03	8.68142E-04	3.06308E-04	7.67410E-05
1	3	1.66469E-01	1.88841E-01	5.52565E-02	1.56651E-02	5.19312E-03	2.01964E-03	5.30039E-04
2	1	1.70857E-02	9.59255E-01	1.91517E-02	6.67691E-04	1.01000E-04	2.58088E-05	5.42402E-06
2	2	1.20229E-01	6.18482E-01	1.56504E-01	1.69870E-02	3.16229E-03	8.68142E-04	1.00291E-04
2	3	1.19711E-01	3.32938E-01	1.88841E-01	5.52565E-02	1.56651E-02	5.19312E-03	1.22514E-03
3	1	4.99547E-04	1.91517E-02	9.59255E-01	1.91517E-02	6.67691E-04	1.01000E-04	1.65999E-05
3	2	1.22097E-02	1.56504E-01	6.18482E-01	1.56504E-01	1.69870E-02	3.16229E-03	5.53757E-04
3	3	3.63629E-02	1.88841E-01	3.32938E-01	1.88841E-01	5.52565E-02	1.56651E-02	3.23844E-03
4	1	6.88434E-05	6.67691E-04	1.91517E-02	9.59255E-01	1.91517E-02	6.67691E-04	6.88434E-05
4	2	2.12106E-03	1.69870E-02	1.56504E-01	6.18482E-01	1.56504E-01	1.69870E-02	2.12106E-03
4	3	1.00743E-02	5.52565E-02	1.88841E-01	3.32938E-01	1.88841E-01	5.52565E-02	1.00743E-02
5	1	1.65999E-05	1.01000E-04	6.67691E-04	1.91517E-02	9.59255E-01	1.91517E-02	4.99547E-04
5	2	5.53757E-04	3.16229E-03	1.69870E-02	1.56504E-01	6.18482E-01	1.56504E-01	1.22097E-02
5	3	3.23844E-03	1.56651E-02	5.52565E-02	1.88841E-01	3.32938E-01	1.88841E-01	3.63629E-02
6	1	5.42402E-06	2.58088E-05	1.01000E-04	6.67691E-04	1.91517E-02	9.59255E-01	1.70857E-02
6	2	1.88291E-04	8.68142E-04	3.16229E-03	1.69870E-02	1.56504E-01	6.18482E-01	1.20229E-01
6	3	1.22514E-03	5.19312E-03	1.56651E-02	5.52565E-02	1.88841E-01	3.32938E-01	1.19711E-01
7	1	2.17557E-06	8.79169E-06	2.58088E-05	1.01000E-04	6.67691E-04	1.91517E-02	4.79628E-01
7	2	7.67410E-05	3.06308E-04	8.68142E-04	3.16229E-03	1.69870E-02	1.56504E-01	3.09241E-01
7	3	5.30039E-04	2.01964E-03	5.19312E-03	1.56651E-02	5.52565E-02	1.88841E-01	1.66469E-01

MATRIZ DE COEFICIENTES

COLUMNA RENGLON	1	2	3	4	5	6	7
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.03216E+03	2.24521E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.24521E+03	1.25226E+04	2.24521E+03	0.00000E+00
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.24521E+03	1.25226E+04	2.24521E+03
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.24521E+03	0.03216E+03
5	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
6	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03	0.00000E+00
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03
9	0.00000E+00						
10	0.00000E+00						
11	0.00000E+00						
12	0.00000E+00						
13	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	6.73563E+03	6.73563E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
14	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	6.73563E+03	6.73563E+03	0.00000E+00
15	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	6.73563E+03	6.73563E+03
16	2.24521E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
17	0.00000E+00	2.24521E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
18	0.00000E+00	0.00000E+00	2.24521E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
19	0.00000E+00						
20	2.24521E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
21	0.00000E+00	2.24521E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
22	0.00000E+00	0.00000E+00	2.24521E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

COLUMNA RENGLON	8	9	10	11	12	13	14
1	1.01193E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	1.01193E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01197E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5	0.53012E+03	2.24521E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
6	2.24521E+03	1.30205E+04	2.24521E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03	0.00000E+00
7	0.00000E+00	2.24521E+03	1.30205E+04	2.24521E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03
8	0.00000E+00	0.00000E+00	2.24521E+03	0.53012E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9	1.01193E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	6.51427E+03	2.24521E+03	0.00000E+00
10	0.00000E+00	1.01193E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	2.24521E+03	1.0047E+04	2.24521E+03
11	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	2.24521E+03	1.0047E+04
12	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	2.24521E+03
13	6.73563E+03	6.73563E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	6.73563E+03	6.73563E+03	0.00000E+00
14	0.00000E+00	6.73563E+03	6.73563E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	6.73563E+03	6.73563E+03
15	0.00000E+00	0.00000E+00	6.73563E+03	6.73563E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	6.73563E+03
16	0.00000E+00						
17	0.00000E+00						
18	0.00000E+00						
19	0.00000E+00						
20	0.00000E+00						
21	0.00000E+00						
22	0.00000E+00						

COLUMN	15	16	17	18	19	20	21
REVISION							
1	0.00000E+00	-5.88798E+00	1.20178E+01	6.47243E-01	3.15223E-02	0.00000E+00	3.14963E+00
2	0.00000E+00	-6.32500E+00	0.00000E+00	1.26651E+01	4.68545E-01	-3.14963E+00	3.14963E+00
3	0.00000E+00	-4.68545E-01	-1.26651E+01	0.00000E+00	6.32500E+00	-3.31246E+00	-3.14963E+00
4	0.00000E+00	-3.15223E-02	-6.47243E-01	-1.20178E+01	5.88798E+00	-1.62035E-01	-3.14963E+00
5	0.00000E+00	-5.88798E+00	1.20178E+01	6.47243E-01	3.15223E-02	0.00000E+00	3.14963E+00
6	0.00000E+00	-6.32500E+00	0.00000E+00	1.26651E+01	4.68545E-01	-3.14963E+00	3.14963E+00
7	0.00000E+00	-4.68545E-01	-1.26651E+01	0.00000E+00	6.32500E+00	-3.31246E+00	-3.14963E+00
8	1.01193E+03	-3.15223E-02	-6.47243E-01	-1.20178E+01	5.88798E+00	-1.62035E-01	-3.14963E+00
9	0.00000E+00	-5.88798E+00	1.20178E+01	6.47243E-01	3.15223E-02	0.00000E+00	3.14963E+00

10	0.00000E+00	-6.32500E+00	0.00000E+00	1.26651E+01	4.68545E-01	-3.14963E+00	3.14963E+00
11	7.24521E+03	-4.68545E-01	-1.26651E+01	0.00000E+00	6.32500E+00	-3.31246E+00	-3.14963E+00
12	6.51427E+03	-3.15223E-02	-6.47243E-01	-1.20178E+01	5.88798E+00	-1.62835E-01	-3.14963E+00
13	0.00000E+00	-4.32029E+01	7.09919E+01	3.89346E+00	1.89134E-01	-9.00000E+00	1.88978E+01
14	0.00000E+00	-1.16221E+01	-0.89919E+01	7.09919E+01	2.62214E+00	-3.68978E+01	-9.00000E+00
15	6.77563E+03	-9.18913E+00	-2.18035E+01	-0.89919E+01	3.42029E+01	-1.89778E+01	-3.68978E+01
16	0.00000E+00	-3.00227E+00	1.65841E+00	8.39078E-02	5.32574E-03	5.53315E+00	3.47586E-01
17	0.00000E+00	-2.36166E-01	-6.56440E+00	1.65841E+00	5.51830E-02	-1.75216E+00	5.53315E+00
18	0.00000E+00	-1.56891E-02	-3.47086E-01	-6.56440E+00	1.13399E+00	-8.39078E-02	-1.75216E+00
19	0.00220E+00	6.00000E+00	1.20030E+01	1.20000E+01	6.00000E+00	1.20000E+01	1.20000E+01
20	0.00000E+00	-2.53688E+00	3.64266E+00	2.15748E-01	1.05074E-02	-2.06250E+00	1.04988E+00
21	0.00000E+00	-1.45674E-01	-4.58016E+00	3.64266E+00	1.45674E-01	-1.04988E+00	-2.06250E+00
22	0.00000E+00	-1.05074E-02	-2.15748E-01	-4.58016E+00	1.59938E+00	-5.42783E-02	-1.04988E+00

COLUMN	22
RENGLON	
1	1.62835E-01
2	3.31246E+00
3	3.14963E+00
4	0.00000E+00
5	1.62835E-01
6	3.31246E+00
7	3.14963E+00
8	0.00000E+00
9	1.62835E-01
10	3.31246E+00
11	3.14963E+00
12	0.00000E+00
13	9.77037E-01
14	1.88978E+01
15	-9.00000E+00

16	2.46467E-02
17	3.47586E-01
18	5.53315E+00
19	1.20000E+01
20	5.42783E-02
21	1.0-988E-03
22	-2.06250E+00

### VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES

#### RENGLON

1	-1.53000E+01
2	0.00000E+00
3	0.00000E+00
4	1.53000E+01
5	-1.53000E+01
6	0.00000E+00
7	0.00000E+00
8	1.53000E+01
9	-1.53000E+01
10	0.00000E+00
11	0.00000E+00
12	1.53000E+01
13	-3.56400E+02
14	-1.06920E+03
15	-1.78000E+03
16	-5.06250E+00
17	-5.06250E+00

18	-5.86259E+03
19	1.42560E+03
20	-1.35000E+01
21	-1.35000E+01
22	-1.35000E+01

VECTOR SOLUCION (DOBLEGIROS EN RADIANES Y REACCIONES EN TON/M)

DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 1, 1) DERECHA	= F1( 1, 1) DER =	1.87669E-02
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 2, 1) DERECHA	= F1( 2, 1) DER =	1.56780E-02
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 3, 1) DERECHA	= F1( 3, 1) DER =	2.31468E-02
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 1, 2)	= F1( 1, 2)	= -6.51011E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 2, 2)	= F1( 2, 2)	= -3.85574E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 3, 2)	= F1( 3, 2)	= 3.85574E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 4, 2)	= F1( 4, 2)	= 6.51011E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 1, 3)	= F1( 1, 3)	= -5.84639E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 2, 3)	= F1( 2, 3)	= -2.98148E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 3, 3)	= F1( 3, 3)	= 2.98141E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 4, 3)	= F1( 4, 3)	= 5.84639E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 1, 4)	= F1( 1, 4)	= -7.97383E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 2, 4)	= F1( 2, 4)	= -3.21888E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 3, 4)	= F1( 3, 4)	= 3.21888E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 4, 4)	= F1( 4, 4)	= 7.97384E-03
REACCION DEL TERRENO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 1) = R ( 1)		= 4.29155E+01
REACCION DEL TERRENO BAJO LA CRUJIA ( 1)	= T ( 1)	= 1.87155E+01
REACCION DEL TERRENO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 2) = R ( 2)		= 1.99561E+01
REACCION DEL TERRENO BAJO LA CRUJIA ( 2)	= T ( 2)	= 1.45413E+01
REACCION DEL TERRENO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 3) = R ( 3)		= 1.99561E+01

REACCIÓN DEL TERRENO BAJO LA CRUJIA ( 3 ) = T ( 3 ) = 1.07155E+01  
 REACCIÓN DEL TERRENO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 4 ) = R ( 4 ) = 4.29155E+01

### HUNDIMIENTOS ( CM )

HUNDIMIENTO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 1 ) = D ( 1 ) = 14.58  
 HUNDIMIENTO BAJO EL CENTRO DE LA CRUJIA ( 1 ) = Z ( 1 ) = 14.14  
 HUNDIMIENTO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 2 ) = D ( 2 ) = 16.76  
 HUNDIMIENTO BAJO EL CENTRO DE LA CRUJIA ( 2 ) = Z ( 2 ) = 15.31  
 HUNDIMIENTO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 3 ) = D ( 3 ) = 16.76  
 HUNDIMIENTO BAJO EL CENTRO DE LA CRUJIA ( 3 ) = Z ( 3 ) = 14.14  
 HUNDIMIENTO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 4 ) = D ( 4 ) = 14.58

### MOMENTOS DE NUDO SOBRE BARRA ( TON\*M )

( CONVENCION: POSITIVOS EN EL SENTIDO DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ )

TRABE	MOMENTO EN SU EXTREMO		COLUMNA	MOMENTO EN SU EXTREMO	
	IZQUIERDO	DERECHO		INFERIOR	SUPERIOR
1. 1	0.00000E+00	0.00000E+00	1. 1	0.00000E+00	9.88161E+00
2. 1	0.00000E+00	0.00000E+00	2. 1	0.00000E+00	4.63827E+00
3. 1	0.00000E+00	0.00000E+00	3. 1	0.00000E+00	-4.63828E+00
1. 2	-2.81637E+01	-5.31944E+00	4. 1	0.00000E+00	-9.88161E+00
2. 2	-8.43916E+00	8.43927E+00	1. 2	1.82828E+01	1.68009E+01
3. 2	5.31952E+00	2.81638E+01	2. 2	9.12837E+00	8.56419E+00
1. 3	-3.50829E+01	-9.29883E+00	3. 2	-9.12838E+00	-8.96428E+00
2. 3	-8.78571E+00	8.78588E+00	4. 2	-1.82821E+01	-1.68009E+01

3. 3	9.29889E+00	3.50830E+01	1. 3	1.82821E+01	2.12444E+01
1. 4	-2.12444E+01	-1.34807E+03	2. 3	9.12836E+00	9.43272E+00
2. 4	-8.09265E+00	8.09277E+00	3. 3	-9.12838E+00	-9.43273E+00
3. 4	1.34809E+00	2.12445E+01	4. 3	-1.82821E+01	-2.12444E+01

**ANEXO IV**

**LISTADO PARA LA CORRIDA DEL PROBLEMA 2.**

U.N.A.M. • FACULTAD DE INGENIERIA  
TESIS PROFESIONAL, INGENIERO CIVIL, SALVADOR ALVAREZ GOMEZ  
INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA CON LA PRESENCIA  
DE NUDOS ARTICULADOS  
PROGRAMA DE COMPUTADORA EN LENGUAJE BASIC

IMPRESION DE DATOS  
\*\*\*\*\*

NUMERO DE EJES DE COLUMNAS = 4

NUMERO DE PISOS = 7

PARA NO EXCEDER LA CAPACIDAD DE LA MAQUINA, EL ANALISIS ESTRUCTURAL  
SE HARA CONSIDERANDO UNICAMENTE 4 PISOS Y POR TANTO SERA INCOMPLETO

DISTANCIA ENTRE EJES DE COLUMNA (M)

CRUJIA	1	2	3
	6.00000E+00	6.00000E+00	6.00000E+00

ALTURA DE ENTREPISOS (M)

ENTREPISO	
1	3.00000E+00
2	3.00000E+00
3	3.00000E+00

CARGAS UNIFORMES EN LAS TRABES (TON/M)

CRUJIA	1	2	3
PISO			
1	4.50000E+00	4.50000E+00	4.50000E+00
2	5.10000E+00	5.10000E+00	5.10000E+00
3	5.10000E+00	5.10000E+00	5.10000E+00
4	5.10000E+00	5.10000E+00	5.10000E+00

CARGAS CONCENTRADAS EN LOS NUDOS DEL ULTIMO NIVEL (TON)

EJE DE COLUMNA	1	2	3	4
	4.59000E+01	9.18000E+01	9.18000E+01	4.59000E+01

MODULO DE ELASTICIDAD DE LAS TRABES (KG/CM<sup>2</sup>)

CRUJIA	1	2	3
PISO			
1	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04
2	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04
3	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04
4	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04

MODULO DE ELASTICIDAD DE LAS COLUMNAS (KG/CM<sup>2</sup>)

EJE DE COLUMNA ENTREPISO	1	2	3	4
1	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04
2	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04
3	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04	4.74340E+04

MOMENTO DE INERCIA DE LAS TRABES (CM<sup>4</sup>)

PISO	CRUJIA	1	2	3
1		2.84000E+06	2.84000E+06	2.84000E+06
2		2.84000E+06	2.84000E+06	2.84000E+06
3		2.84000E+06	2.84000E+06	2.84000E+06
4		2.84000E+06	2.84000E+06	2.84000E+06

MOMENTO DE INERCIA DE LAS COLUMNAS (CM<sup>4</sup>)

EJE DE COLUMNA ENTREPISO	1	2	3	4
1	6.40000E+05	6.40000E+05	6.40000E+05	6.40000E+05
2	6.40000E+05	6.40000E+05	6.40000E+05	6.40000E+05
3	6.40000E+05	6.40000E+05	6.40000E+05	6.40000E+05

ANCHO DE LA CIMENTACION A NIVEL DE CADA REACCION DEL SUELO (M)

REACCION

DEL SUELO	1	2	3	4	5	6	7
	1.20000E+01						

BANDERA QUE IDENTIFICA EL TIPO DE NUDO: CONTINUO=1, ARTICULADO=0

EJE DE COLUMNA	1	2	3	4
PISO				
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	1.00000E+00	1.00000E+00	1.00000E+00	1.00000E+00
3	1.00000E+00	1.00000E+00	1.00000E+00	1.00000E+00
4	1.00000E+00	1.00000E+00	1.00000E+00	1.00000E+00

NUMERO DE CARGAS SOBRE  
LA ESTRUCTURA DEBIDAS  
A LA REACCION DEL SUELO = 7

NUMERO DE ESTRATOS DEL  
SUELO A CONSIDERARSE = 3

ESPESOR DE LOS ESTRATOS DEL SUELO (M)

ESTRATO	
1	1.50000E+00
2	2.00000E+00
3	3.00000E+00

MODULO DE VARIACION VOLUMETRICA EN LAS SECCIONES DEL SUELO CONSIDERADAS (M2/TON)

CARGA	1	2	3	4	5	6	7
ESTRATO 1	1.50000E-02						
2	2.30000E-02						
3	1.80000E-02						

IMPRESION DE RESULTADOS

VALORES DE INFLUENCIA

CARGA		1	2	3	4	5	6	7
PUNTO/ESTRATO								
1	1	4.79628E-01	1.91517E-02	6.67691E-04	1.81800E-04	2.58888E-05	8.79169E-06	2.17337E-06
1	2	3.09241E-01	1.56584E-01	1.69870E-02	3.16229E-03	8.68142E-04	3.86380E-04	7.67418E-05
1	3	1.66469E-01	1.88841E-01	3.52565E-02	1.56651E-02	5.19312E-03	2.81944E-03	5.38839E-04
2	1	1.78857E-02	9.59233E-01	1.91517E-02	6.67691E-04	1.81800E-04	2.58888E-05	5.42482E-06
2	2	1.28229E-01	6.18482E-01	1.56584E-01	1.69870E-02	3.16229E-03	8.68142E-04	1.88291E-04
2	3	1.19711E-01	3.32938E-01	1.88841E-01	3.52565E-02	1.56651E-02	5.19312E-03	1.22514E-03
3	1	4.99547E-04	1.91517E-02	9.59233E-01	1.91517E-02	6.67691E-04	1.81800E-04	1.65999E-05
3	2	1.22897E-02	1.56584E-01	6.18482E-01	1.56584E-01	1.69870E-02	3.16229E-03	5.53737E-04
3	3	3.53629E-02	1.88841E-01	3.32938E-01	1.88841E-01	3.52565E-02	1.56651E-02	3.23844E-03
4	1	6.88434E-05	6.67691E-04	1.91517E-02	9.59233E-01	1.91517E-02	6.67691E-04	6.88434E-05
4	2	2.12186E-03	1.69870E-02	1.56584E-01	6.18482E-01	1.56584E-01	1.69870E-02	2.12186E-03
4	3	1.08743E-02	5.52565E-02	1.88841E-01	3.32938E-01	1.68841E-01	5.52565E-02	1.88743E-02

5	1	1.65999E-05	1.81000E-04	6.67691E-04	1.91517E-02	9.59255E-01	1.91517E-02	4.99347E-04
5	2	5.53757E-04	3.16229E-03	1.69870E-02	1.56504E-01	6.18482E-01	1.56504E-01	1.22897E-02
5	3	3.23844E-03	1.56651E-02	5.52565E-02	1.88841E-01	3.32938E-01	1.88841E-01	3.63429E-02
6	1	5.42402E-06	2.58088E-05	1.01000E-04	6.67691E-04	1.91517E-02	9.59255E-01	1.78857E-02
6	2	1.88291E-04	8.68142E-04	3.16229E-03	1.69870E-02	1.56504E-01	6.18482E-01	1.22297E-01
6	3	1.12514E-03	5.19312E-03	1.56651E-02	5.52565E-02	1.88841E-01	3.32938E-01	1.19711E-01
7	1	2.17557E-06	8.79169E-06	2.58088E-05	1.01000E-04	6.67691E-04	1.91517E-02	4.79628E-01
7	2	7.67410E-05	3.06302E-04	8.68142E-04	3.16229E-03	1.69870E-02	1.56504E-01	3.89241E-01
7	3	5.38839E-04	2.01964E-03	5.19312E-03	1.56651E-02	5.52565E-02	1.88841E-01	1.66469E-01

### MATRIZ DE COEFICIENTES

COLUMNA RENSL. CM	1	2	3	4	5	6	7
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.03216E+03	2.24521E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.24521E+03	1.25226E+04	2.24521E+03	0.00000E+00
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.24521E+03	1.25226E+04	2.24521E+03
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.24521E+03	0.03216E+03
5	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
6	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03	0.00000E+00
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.01193E+03
9	0.00000E+00						
10	0.00000E+00						
11	0.00000E+00						
12	0.00000E+00						
13	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	6.73563E+03	6.73563E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
14	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	6.73563E+03	6.73563E+03	0.00000E+00
15	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	6.73563E+03	6.73563E+03



	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
COLUMBIA RENGLOW	15	16	17	18	19	20	21
1	0.00000E+00	-5.89798E+00	1.20178E+01	6.47243E-01	3.15223E-02	0.00000E+00	3.14963E+00
2	0.00000E+00	-6.32500E+00	0.00000E+00	1.26651E+01	4.68545E-01	-3.14963E+00	3.14963E+00
3	0.00000E+00	-4.68545E-01	-1.26651E+01	0.00000E+00	6.32500E+00	-3.31246E+00	-3.14963E+00
4	0.00000E+00	-3.15223E-02	-6.47243E-01	-1.20178E+01	5.89798E+00	-1.62835E-01	-3.14963E+00
5	0.00000E+00	-5.89798E+00	1.20178E+01	6.47243E-01	3.15223E-02	0.00000E+00	3.14963E+00
6	0.00000E+00	-6.32500E+00	0.00000E+00	1.26651E+01	4.68545E-01	-3.14963E+00	3.14963E+00
7	0.00000E+00	-4.68545E-01	-1.26651E+01	0.00000E+00	6.32500E+00	-3.31246E+00	-3.14963E+00
8	1.01193E+03	-3.15223E-02	-6.47243E-01	-1.20178E+01	5.89798E+00	-1.62835E-01	-3.14963E+00
9	0.00000E+00	-5.89798E+00	1.20178E+01	6.47243E-01	3.15223E-02	0.00000E+00	3.14963E+00
10	0.00000E+00	-6.32500E+00	0.00000E+00	1.26651E+01	4.68545E-01	-3.14963E+00	3.14963E+00
11	2.24521E+03	-4.68545E-01	-1.26651E+01	0.00000E+00	6.32500E+00	-3.31246E+00	-3.14963E+00
12	6.51427E+03	-3.15223E-02	-6.47243E-01	-1.20178E+01	5.89798E+00	-1.62835E-01	-3.14963E+00
13	0.00000E+00	-4.32029E+01	7.09819E+01	3.83346E+00	1.89134E-01	-9.00000E+00	1.88978E+01
14	0.00000E+00	-1.16221E+01	-8.89819E+01	7.09819E+01	2.62214E+00	-3.68978E+01	-9.00000E+00
15	6.73563E+03	-9.18913E+00	-2.10935E+01	-8.89819E+01	3.42029E+01	-1.89770E+01	-3.68978E+01
16	0.00000E+00	-3.00227E+00	1.65841E+00	8.39098E-02	5.32574E-03	5.53315E+00	3.47504E-01
17	0.00000E+00	-2.36166E-01	-6.56440E+00	1.65841E+00	5.51850E-02	-1.75216E+00	5.53315E+00
18	0.00000E+00	-1.55891E-02	-3.47504E-01	-6.56440E+00	1.13399E+00	-8.39098E-02	-1.75216E+00
19	0.00000E+00	6.00000E+00	1.50000E+01	1.20000E+01	6.00000E+00	1.20000E+01	1.20000E+01
20	0.00000E+00	-2.53688E+00	3.64266E+00	2.15748E-01	1.05074E-02	-2.84258E+00	1.84988E+00
21	0.00000E+00	-1.45674E-01	-4.58816E+00	3.64266E+00	1.45674E-01	-1.04988E+00	-2.84258E+00
22	0.00000E+00	-1.05074E-02	-2.15748E-01	-4.58816E+00	1.59938E+00	-5.42783E-02	-1.84988E+00

COLUMBIA RENGLOW	22
1	1.62835E-01
2	3.31246E+00
3	3.14963E+00

4	0.00000E+00
5	1.62835E-01
6	3.31246E+00
7	3.14963E+00
8	0.00000E+00
9	1.52835E-01
10	3.31244E+00
11	3.14963E+00
12	0.00000E+00
13	9.77009E-01
14	1.88978E+01
15	-9.00000E+00
16	2.46467E-02
17	3.47586E-01
18	3.53315E+00
19	1.20000E+01
20	3.42783E-02
21	1.04989E+00
22	-2.06250E+00

VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES

RENGLON

1	-1.53000E+01
2	0.00000E+00
3	0.00000E+00
4	1.53000E+01
5	-1.53000E+01

6	0.00000E+00
7	0.00000E+00
8	1.53000E+01
9	-1.53000E+01
10	0.00000E+00
11	0.00000E+00
12	1.53000E+01
13	-6.31000E+02
14	-1.89540E+03
15	-3.15900E+03
16	-5.06250E+03
17	-5.06250E+03
18	-5.06250E+03
19	2.52720E+03
20	-1.35000E+01
21	-1.35000E+01
22	-1.35000E+01

VECTOR SOLUCION (DOBLEGIROS EN RADIANES Y REACCIONES EN TON/M)

DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 1. 1) DERECHA	= F1( 1. 1) DER =	2.44640E-02
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 2. 1) DERECHA	= F1( 2. 1) DER =	3.18935E-02
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 3. 1) DERECHA	= F1( 3. 1) DER =	4.43741E-02
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 1. 2)	= F1( 1. 2)	= -9.49674E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 2. 2)	= F1( 2. 2)	= -5.25658E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 3. 2)	= F1( 3. 2)	= 5.25658E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 4. 2)	= F1( 4. 2)	= 9.49674E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 1. 3)	= F1( 1. 3)	= -7.41385E-03

DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 2, 3)	= FI( 2, 3)	= -4.87957E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 3, 3)	= FI( 3, 3)	= 4.87958E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 4, 3)	= FI( 4, 3)	= 7.41387E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 1, 4)	= FI( 1, 4)	= -1.15796E-02
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 2, 4)	= FI( 2, 4)	= -5.63358E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 3, 4)	= FI( 3, 4)	= 5.63358E-03
DOBLEGIRO EN EL NUDO ( 4, 4)	= FI( 4, 4)	= 1.15797E-02
REACCION DEL TERRENO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 1)	= R ( 1)	= 7.75651E+01
REACCION DEL TERRENO BAJO LA CRUJIA ( 1)	= T ( 1)	= 1.82608E+01
REACCION DEL TERRENO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 2)	= R ( 2)	= 3.57505E+01
REACCION DEL TERRENO BAJO LA CRUJIA ( 2)	= T ( 2)	= 2.58141E+01
REACCION DEL TERRENO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 3)	= R ( 3)	= 3.57505E+01
REACCION DEL TERRENO BAJO LA CRUJIA ( 3)	= T ( 3)	= 1.82608E+01
REACCION DEL TERRENO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 4)	= R ( 4)	= 7.75651E+01

#### HUNDIMIENTOS (CM)

HUNDIMIENTO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 1)	= D ( 1)	= 26.16
HUNDIMIENTO BAJO EL CENTRO DE LA CRUJIA ( 1)	= Z ( 1)	= 24.84
HUNDIMIENTO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 2)	= D ( 2)	= 29.74
HUNDIMIENTO BAJO EL CENTRO DE LA CRUJIA ( 2)	= Z ( 2)	= 26.78
HUNDIMIENTO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 3)	= D ( 3)	= 29.74
HUNDIMIENTO BAJO EL CENTRO DE LA CRUJIA ( 3)	= Z ( 3)	= 24.84
HUNDIMIENTO BAJO EL EJE DE COLUMNA ( 4)	= D ( 4)	= 26.16

MOMENTOS DE NUDO SOBRE BARRA (TON\*M)

(CONVENCION: POSITIVOS EN EL SENTIDO DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ)

TRABE	MOMENTO EN SU EXTREMO		COLUMNA	MOMENTO EN SU EXTREMO	
	IZQUIERDO	DERECHO		INFERIOR	SUPERIOR
1. 1	0.00000E+00	0.00000E+00	1. 1	0.00000E+00	1.44150E+01
2. 1	0.00000E+00	0.00000E+00	2. 1	0.00000E+00	7.97899E+00
3. 1	0.00000E+00	0.00000E+00	3. 1	0.00000E+00	-7.97899E+00
1. 2	-4.11373E+01	-2.00574E+01	4. 1	0.00000E+00	-1.44150E+01
2. 2	-3.49793E+00	3.49786E+00	1. 2	2.67223E+01	2.46146E+01
3. 2	2.00574E+01	4.11373E+01	2. 2	1.55763E+01	1.63393E+01
1. 3	-5.13368E+01	-2.64268E+01	3. 2	-1.55763E+01	-1.51948E+01
2. 3	-4.34436E+00	4.34430E+00	4. 2	-2.67223E+01	-2.46146E+01
3. 3	2.64268E+01	5.13368E+01	1. 3	2.67223E+01	3.09378E+01
1. 4	-3.09377E+01	-1.36879E+01	2. 3	1.55763E+01	1.63393E+01
2. 4	-2.65143E+00	2.65143E+00	3. 3	-1.55763E+01	-1.63393E+01
3. 4	1.36879E+01	3.09377E+01	4. 3	-2.67223E+01	-3.09378E+01