

2 ej.
49

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LA CIRCULACION EN LA ZONA SUR DEL GOLFO DE
CALIFORNIA MEDIANTE EL METODO INVERSO

TESIS PROFESIONAL
FISICA

JORGE ZAVALA HIDALGO

MEXICO, D. F.

1986



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

A partir de datos hidrográficos de CTD se calcula con método inverso el campo de velocidad absoluta en la boca del Golfo de California. Se encuentra que al aplicar el método inverso minimizando el campo de velocidad en una isobata, como se ha venido haciendo, la solución que se obtiene depende de la isobata que se escoge. Se hace una revisión del método inverso aplicado a la oceanografía y se propone considerar los criterios de mínima energía total y mínima energía cinética total como información para completar el problema geostrofico. Los resultados obtenidos para el campo de velocidad con estos criterios, son numéricamente similares e independientes del campo de velocidad geostrofico con que se inicia.

Con el criterio de mínima energía cinética total se obtuvo un flujo de 5.7 Sv. entre Altata y Punta Arena en los primeros 1000 mts. de profundidad.

En el trabajo se exponen las bases teóricas en que se apoya el método, los algoritmos utilizados y se evalúan los errores.

INDICE

	PAG.
INTRODUCCION	1
CAPITULO 1	
CIRCULACION GEOSTROFICA DE GRAN ESCALA	4
1.1 INTRODUCCION	4
1.2 METODOS PARA EL CALCULO DE LA VELOCIDAD ABSOLUTA	7
CAPITULO 2	
METODO INVERSO EN LA OCEANOGRAFIA	13
2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	13
2.2 DESCRIPCIÓN MATEMATICA	17
2.2.1 SOLUCIONES EN SISTEMAS $Ac = b$ EN DONDE 'A' ES UNA MATRIZ $M \times N$ Y $M \neq N$	17
2.2.2 EXISTENCIA DE SOLUCIONES	21
2.2.3 DESCOMPOSICION EN VALORES SINGULARES	21
2.3 APLICACIONES EN LA OCEANOGRAFIA	25
CAPITULO 3	
ALGORITMOS Y ANALISIS DE ERRORES	30
3.1 PROCEDIMIENTO QUE SE SIGUE CON LOS DATOS HASTA OBTENER EL CAMPO DE VELOCIDAD GEOSTROFICA RELATIVA	30
3.2 DISCUSION Y EVALUACION DE ERRORES	32
3.3 EXTRAPOLACION DE DATOS	37
3.4 METODOLOGIA PARA LA DETERMINACION DE AREAS	42
3.5 INTERPRETACION DE LA VELOCIDAD GEOSTROFICA COMO UNA VELOCIDAD PROMEDIO	43
CAPITULO 4	
CIRCULACION EN EL GOLFO DE CALIFORNIA	45
4.1 ANTECEDENTES	45
4.1.1 INFORMACION GENERAL	45
4.1.2 CARACTERISTICAS CLIMATICAS	45
4.1.3 CIRCULACION	47
4.2 CAMPAÑA BERMEJO I	55
4.2.1 INFORMACION GENERAL	55
4.2.2 CAPA SUPERFICIAL	55
4.2.3 CAPAS SUBSUPERFICIALES	69
4.2.4 ALGUNOS ASPECTOS DE LA CIRCULACION	70

CAPITULO 5

UN EJEMPLO APLICANDO EL CRITERIO DE MINIMA NORMA	73
5.1 INTRODUCCION	73
5.2 PRESENTACION DE RESULTADOS	75
5.3 DISCUSION GENERAL DE RESULTADOS	90

CAPITULO 6

REVISION DEL METODO INVERSO EN LA OCEANOGRAFIA. CRITERIOS ALTERNATIVOS. APLICACION Y DISCUSION.....	95
6.1 INTRODUCCION	95
6.2 REVISION DEL METODO INVERSO EN LA OCEANOGRAFIA	96
6.2.1 NOTACION Y DEFINICIONES	96
6.2.2 CARACTERIZACION DE SISTEMAS $A_c = b$ EN LA OCEANOGRAFIA	97
6.2.3 ALGUNOS CRITERIOS PARA INTRODUCIR INFORMACION A PRIORI. SOLUCIONES A ESTOS CRITERIOS	99
SOLUCIONES PARTICULARES EN LOS CASOS PROPUESTOS	103
OBJETIVIDAD DE LAS SOLUCIONES	105
EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES	106
6.3 CIRCULACION EN LA PARTE SUR DEL GOLFO DE CALIFORNIA. UN EJEMPLO CON EL CRITERIO DE M.E.C.T.	107
6.3.1 OBJETIVOS GENERALES	107
6.3.2 ALGORITMO	107
6.3.3 INTERPRETACION DE TERMINOS	108
6.3.4 PRESENTACION DE RESULTADOS	109
6.3.5 DISCUSION DE RESULTADOS	122
6.4 CONCLUSIONES	127

APENDICE 6.1

CRITERIO DE MINIMA ENERGIA TOTAL	129
REFERENCIAS	133

INTRODUCCION

De los varios problemas en el terreno de la descripción dinámica del sistema océano-atmósfera, el de la circulación oceánica media de gran escala, ha recibido una atención permanente durante los últimos cien años y aún puede considerarse como un problema cuya solución completa está lejana.

El campo de la circulación media y sus oscilaciones de baja frecuencia determinan la redistribución permanente de energía en el sistema y con ésta, la de los diversos componentes químicos y biológicos asociados al océano.

Hoy se acepta universalmente que el océano, memoria energética del sistema océano-atmósfera, juega un papel dominante en la evolución de las oscilaciones climáticas del planeta. Del total de la energía solar absorbida por la tierra, 57% (65 PW, 1 PW = 10^{15} W) es captada directamente por los océanos. Esta cantidad es el doble de la absorbida por la atmósfera y cuatro veces mayor que la captada por los continentes. Como parte del proceso de recirculación energética en el interior del sistema, el océano recibe 108 PW adicionales en forma de energía de onda larga como producto de la reradiación atmosférica. Esta energía es retenida y posteriormente reemitida para mantener un estado medio estacionario. El papel oceánico como memoria energética del sistema está definido, en parte, por su gran capacidad para almacenar calor. Su calor específico es de $4000 \text{ KJm}^{-3}\text{°K}^{-1}$ mientras que el del aire es sólo de $1 \text{ KJm}^{-3}\text{°K}^{-1}$ y el de la corteza continental de $1300 \text{ KJm}^{-3}\text{°K}^{-1}$. Pero de esta última, sólo una delgada capa superficial participa en el intercambio energético, mientras que el océano lo hace con toda la columna de agua (de 4 a 5 kms. de profundidad). Que toda la columna de agua oceánica participe en el ciclo energético del sistema, aunque a muy diferentes escalas temporales, es parte de un complejo patrón de circulación que incluye hundimientos, afloramientos, difusión turbulenta y la relativamente rápida circulación horizontal. La parte superficial de esta circulación es responsable, en primera instancia y en escala de semanas, de la redistribución hacia los polos de una parte del calor recibido en los trópicos. En esta redistribución, atmósfera y océano producen flujos meridionales similares de 2 a 4 PW. Oscilaciones en estos flujos están asociados directamente a cambios climáticos interestacionales, e indirectamente a través de procesos de retroalimentación (como los cambios de albedo por modificaciones en la cubierta de nieve), a cambios interanuales.

Una fracción mucho menor, pero no menos importante, de la energía recibi-

da penetra en aguas más profundas y es transportada por ellas. La cantidad de calor cuyo tiempo de residencia oceánico es mayor de un año es del orden de 3 GJ/m^2 ($1 \text{ GJ} = 10^9 \text{ J}$). Las variaciones de los flujos de esta energía definen la manera de actuar de la memoria oceánica y su efecto de control sobre el clima en escalas de años a décadas. La evolución precisa de estos flujos y sus variaciones dependa, sobre todo, del conocimiento preciso del campo tridimensional de velocidad en los océanos.

Este conocimiento se debe derivar de una combinación de modelos analíticos, modelos numéricos y mediciones directas e indirectas.

Entre los métodos directos de medición, existen instrumentos eulerianos y lagrangianos (que miden las corrientes en un lugar o bien viajan con ellas). El desarrollo de estos instrumentos se remonta al presente siglo. En 1905, Ekman desarrolló un corrientómetro de hélice y veleta que con algunas modificaciones se utilizó durante varias décadas. De los instrumentos que viajan con las corrientes, existen cuerpos de deriva, de superficie o neutros (que se mantienen a una densidad determinada), a los que se registra su posición como función del tiempo.

Un método indirecto para evaluar el campo de velocidad, que se ha utilizado desde finales del siglo pasado, se basa en la medición de la densidad del agua con botellas Nansen y termómetros reversibles y utilizando la ecuación geostrofica desarrollada por Henrik Mohn en 1885. Este método se sigue utilizando hasta la fecha y forma parte de las bases en que se apoya este trabajo. Como en el océano existen superpuestos, movimientos de distinta escala, este método tiene la ventaja de evaluar el flujo de gran escala, a diferencia de los corrientómetros, boyas, etc., con los que directamente no es posible evaluarlo.

Recientemente, gracias a la electrónica, se ha venido dando un desarrollo en la evaluación de las corrientes con tecnología más moderna. Se han desarrollado nuevos corrientómetros capaces de registrar y promediar corrientes por largos periodos de tiempo. También existen instrumentos con los cuales, desde un buque oceanográfico, es posible medir un perfil de temperatura y contenido de sales y oxígeno en forma casi continua (\sim cada 5 cm.) y con gran precisión (milésimos de grado y millonésimos de fracción del peso en sales).

Otro nuevo instrumento es el perfilador doppler que permite obtener perfiles verticales de corriente mediante el estudio de la reflexión del sonido por parte de las partículas en suspensión en el océano. Se está desarrollando también la tomografía acústica oceánica, que promete obtener el campo de densidad en toda una cuenca oceánica.

Otra rama que se ha venido desarrollando es la oceanografía de satélite,

con la que se podrán medir para finales de esta década, las variaciones del nivel del mar con respecto al geopotencial con una precisión de 1 cm. También será posible medir la temperatura en la superficie oceánica. Este panorama de evolución tecnológica se completa con la presencia de gigantescas computadoras y el desarrollo de modelos numéricos con mayor resolución.

Por supuesto, no todo es tecnología, pues el desarrollo teórico que permite asimilar las nuevas posibilidades de medición se está dando.

Dentro de esta línea, en 1977 se incorpora a la Oceanografía el método inverso desarrollado por Gilbert y Backus en la Geofísica, y que a partir de entonces, se ha venido aplicando y discutiendo en la Oceanografía.

La ecuación geostrofica permite conocer sólo el cambio de la velocidad en la vertical ($\partial \bar{u} / \partial z$), quedando sin determinar la constante de integración para poder conocer \bar{u} . El método inverso propone un criterio para determinar esa constante incluyendo condiciones de conservación. Otra alternativa a largo plazo para resolver este problema son los satélites que miden la topografía de superficie y darán los elementos para determinar esta constante. Sin embargo, es necesario contar con otros elementos para su determinación por razones de consistencia y sobre todo porque existen 50 años de mediciones que deben explotarse al máximo. Esto tiene gran importancia, pues para fines climáticos es necesario considerar datos de varias décadas, y estos satélites empezarán a funcionar a fines de esta década o a principios de la próxima. En ese sentido, en términos climáticos, los satélites son una alternativa de mediano o largo plazo.

En este trabajo se propuso inicialmente aplicar el método inverso, como se ha venido haciendo en la Oceanografía, a una zona geográfica, el Golfo de California, para determinar los flujos y tiempo de residencia del agua del Golfo en distintas latitudes: El Golfo de California, por ser una cuenca cerrada, presenta grandes posibilidades para imponer condiciones de conservación.

Durante el desarrollo del trabajo se encontraron algunas inconsistencias en los resultados que lo reorientaron hacia una revisión del método inverso en la Oceanografía y de los problemas que presenta, pasando de ser un estudio de una zona geográfica a un trabajo más teórico. Sin embargo, se optó por mantener toda la discusión y exposición original de la circulación geostrofica, del método inverso, del análisis general de la dinámica del Golfo de California, así como los resultados que llevaron a su revisión. Se tomó esta decisión por considerar que representa la secuencia histórica del trabajo.

Una vez presentados los resultados que llevaron a reorientar el trabajo se hace una exposición de la revisión del método inverso en la Oceanografía, se propone una alternativa complementaria al método y se ejemplifica en la boca del Golfo de California.

CAPITULO 1

CIRCULACION GEOSTROFICA DE GRAN ESCALA

1.1 INTRODUCCION.

En el marco de la oceanografía física, la determinación del campo de circulación y sus variaciones es un problema central pues de ese campo depende la distribución espacial de la energía y de los diversos componentes químicos y biológicos asociados al agua oceánica.

La circulación se mide o estima en la actualidad por métodos que directamente miden la corriente ó mediante distintos métodos indirectos. De entre los métodos indirectos destaca por su relativa factibilidad el método dinámico o geostrofico; los resultados que se obtienen por este método son para el flujo de gran escala. Este método tiene además la ventaja de ser uno de los menos costosos en la actualidad y el más accesible para México si se considera la infraestructura con que se cuenta en el país. El método dinámico parte de datos hidrográficos de temperatura, presión y salinidad (ver Capítulo 3), que tienen en sí mismos, su valor propio para estudios oceanográficos. Por estas razones se justifica revisar el método geostrofico a la luz de las nuevas posibilidades en instrumentación y procesamiento de datos.

A partir de la ecuación de movimiento promediada para un fluido geofísico, que se obtiene como aproximación a un fluido newtoniano, en un marco de referencia no inercial sobre el planeta (ec. (1)), se obtienen las ecuaciones de movimiento geostrofico analizando el tamaño relativo de sus términos en condiciones oceánicas (lejos de las fronteras).

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}}_A + \underbrace{\bar{u} \cdot \nabla \bar{u}}_B = - \underbrace{\frac{1}{\rho}}_C \underbrace{\nabla \bar{p}}_D + 2\Omega \times \bar{u} - \underbrace{\bar{g}}_E + A_H \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}}_F + \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}}_F \right) + A_V \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}}_G \quad \dots (1)$$

En la ecuación (1):

\bar{u} representa el campo de velocidad promedio y ρ la densidad.

(A) representa la aceleración promedio del fluido.

(B) representa los movimientos advectivos y es un término no lineal.

(C) es el término debido a los gradientes de presión (p).

(D) es el término debido a que la tierra no es un marco inercial de referencia. Ω es la velocidad angular de la tierra. Este es el llamado parámetro de Coriolis (f).

$$10^{-5} + 10^{-3} + \dots = -? + 1 - 10^{-3} + 10^{-3} + 10^{-3} .$$

Para que esta ecuación se satisfaga, el término horizontal de presión debe de ser del mismo orden que el término de Coriolis. De manera análoga se obtienen los resultados para la ecuación en y.

En este balance, los términos más grandes son al menos dos ordenes de magnitud menores que el término del gradiente de presión. El segundo término de Coriolis es pequeño debido a que w es pequeña. Los términos no lineales resultan despreciables incluso considerando velocidades del orden de 1 m/s, y de igual forma los términos de fricción, siempre y cuando no existan fronteras cercanas. En síntesis, con una aproximación del 1 % en océano abierto pueden aplicarse las ecuaciones geostróficas:

$$\propto \frac{dp}{dy} + f \cdot u = 0 \quad \dots \dots (2b)$$

$$\propto \frac{dp}{dx} + f \cdot v = 0 \quad ,$$

que junto con la ecuación de balance hidrostático para la vertical, constituyen la base para el método geostrófico de estimación del movimiento oceánico.

Bajo la aproximación geostrófica, la precisión de las mediciones no permite obtener ninguna conclusión sobre las velocidades en la vertical, por lo que el método geostrófico sólo permite estimaciones de la velocidad en la horizontal.

En las ecuaciones (2b) aparecen los términos dp/dy y dp/dx , los cuales no es posible medir directamente. Su presencia en el océano se debe a dos causas distintas pero no independientes: la inclinación de la superficie del océano con respecto al geopotencial* y la diferente densidad del agua en superficies isobáricas**.

En realidad ambos fenómenos aparecen combinados en la naturaleza. Los principales fenómenos que provocan gradientes horizontales de presión son: el esfuerzo del viento, la inhomogeneidad climática y los procesos advectivos. Aunque estrictamente todos estos fenómenos son climáticos, se separan el esfuerzo del viento y los gradientes producidos por fenómenos advectivos de los procesos climáticos que directamente producen gradientes horizontales alterando la densidad por diferencias de flujo de flotación (evaporación, radiación, etc.).

El esfuerzo del viento, que es considerado como la causa principal de las corrientes oceánicas superficiales, provoca una inclinación de la superficie del

* Una superficie geopotencial es aquella en la que g tiene la misma magnitud.

** Una superficie isobárica es aquella en la que p toma el mismo valor.

océano y una redistribución de las superficies isopícnas* (P. S. Lineikien 1955, citado en Fomin, L. 1964), generando un sistema de corrientes que en principio se extiende hasta el fondo y que produce, por la redistribución de las isopícnas, un sistema de corrientes que compensan el efecto anterior restringiendo la influencia de las corrientes de viento.

El flujo de flotación y sus diferencias son producidos por la inhomogénea distribución del efecto de radiación, precipitación, evaporación, albedo, etc., que producen cambios de densidad en las capas superficiales del océano. Estos dos fenómenos, el flujo de flotación y las variaciones del nivel medio del mar, son la causa del gradiente horizontal de presión que genera la circulación geostrofica.

A la circulación producida por las desviaciones del nivel medio del mar se le llama componente barotrópica de la circulación. Las variaciones horizontales de densidad causan la circulación baroclínica. Al efecto combinado de estos fenómenos se le conoce como circulación geostrofica. Estos fenómenos no son necesariamente independientes, pues la presencia de uno de ellos produce el otro.

Ambas componentes se sobreponen en la circulación real, y en principio sólo podemos calcular la componente baroclínica de la circulación y obtener un campo relativo de la velocidad, pero sin conocer la velocidad absoluta; es decir, si escribimos la velocidad como $v(z) = u(z) + c$, sólo se conoce $u(z)$ y se desconoce c . La velocidad barotrópica es independiente de z y se desconoce mientras las desviaciones del nivel medio del mar sean desconocidas. Sólo en las capas donde hay fricción (superficie y fondo), se conoce la velocidad, pero ésta no es geostrofica.

1.2 METODOS PARA EL CALCULO DE LA VELOCIDAD ABSOLUTA

Históricamente el problema de encontrar el campo de velocidad absoluta se ha asociado a buscar una superficie isobárica de cero movimiento. Se habla, por ejemplo, de velocidad geostrofica referida a alguna determinada profundidad. En general tampoco puede afirmarse que exista una zona horizontal intermedia o profunda de velocidad cero, por lo que este concepto no es del todo sólido.

Los argumentos a favor de trabajar con una superficie de cero movimiento se basan en observaciones que muestran que las velocidades en la superficie son mas fuertes y tienden a disminuir en el fondo; también se apoyan en el hecho de que

* Una superficie isopícnica es aquella en la que ρ toma el mismo valor.

se encuentran masas de agua de distinto origen, lo que hace pensar que el movimiento de esas masas de agua tiene distinta magnitud y dirección. El argumento más fuerte es el hecho de que al suponer una superficie de cero movimiento en profundidades medias (~1000 a 2000 m.) se encuentran resultados coherentes con las observaciones.

El gradiente horizontal de presión tiene dos componentes, la debida a los cambios horizontales de densidad y la debida al efecto barotrópico:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g \int_{\xi}^{z_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} dz + g \rho(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3)$$

En esta ecuación, el primer término de la derecha se debe a las variaciones horizontales de densidad y en general observa variaciones en la vertical. El segundo término es el debido a la inclinación de la superficie oceánica y tiene un valor constante para toda la columna de agua. En caso de existir una profundidad de cero movimiento (z_0), ambos términos son iguales a esa profundidad:

$$- g \int_{\xi}^{z_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} dz = g \rho(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Esta es la condición para la existencia de una profundidad sin movimiento en una dirección normal a x y z.

En general se ha aceptado la existencia de una superficie sin movimiento para el cálculo de velocidades geostróficas, pero desde que se ha buscado un nivel de referencia, ya sea fijo o variable, ha sido un problema su determinación que equivale a conocer el segundo término de la derecha en la ecuación (3).

Idealmente se podría medir la desviación del nivel medio del mar con respecto al geopotencial y de esa manera evaluar este término. En realidad esto no ha sido técnicamente posible, y solo recientemente se trabaja en la posibilidad de hacer estas mediciones utilizando satélites con una resolución de ± 1 cm. Esto no está aún sistematizado y es necesario explorar otros caminos.

Entre los criterios más antiguos se encuentran: el método de Dietrich, que estudia el mínimo de oxígeno; el método de Parr, que estudia las variaciones en el grueso de las isopicnas; el método de Hidaka, que estudia la distribución de salinidad y aplica condiciones de conservación; y el método de Defant que estudia las variaciones de la velocidad en la vertical.

Método de Dietrich.

El método de Dietrich de 1936 (Fomin, L), propone que el mínimo intermedio de oxígeno que se observa en casi todos los océanos es debido a una zona de poco

movimiento, y propone que la superficie sin movimiento coincide con el mínimo de oxígeno, sugiriendo una explicación de este mínimo asociada a los procesos de mezcla y circulación. Sin embargo, al aclararse los procesos que dan origen al mínimo de oxígeno y la poca consistencia de los resultados que se obtienen al aplicar este criterio para definir el nivel de referencia, quedó descartado este método.

Método de Parr. (Fomin, L. 1964).

El método de Parr analiza la variación del grueso entre isopícnas y encuentra que en muchos casos existe una zona profunda en que aumenta la estabilidad y propone que es debido a que existe ahí una zona en que se separan dos capas y hay menos mezcla por no existir movimiento. Parr propone ubicar ahí la superficie de referencia. La argumentación es muy débil, pues en la zona en que se separan dos capas, los gradientes de velocidad pueden ser grandes aunque existan velocidades pequeñas. Otro argumento en contra consiste en que en muchos casos se encuentra más de una zona donde aumenta la estabilidad y en otros no se da una zona con esas características. En general Parr encontró que para el Atlántico, esa zona corresponde a la zona de mínimo oxígeno, pero sus argumentos no necesariamente implican una superficie de cero movimiento y sus resultados no corresponden con lo observado.

Método de Hidaka. (Fomin, L. 1964).

Este método se basa en un análisis de la distribución de sal. Hidaka parte de la ecuación de difusión de sal:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = K_1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + K_3 \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$$

donde S es la salinidad y K_1 es el coeficiente de difusión. Asumiendo el caso estacionario:

$$K_1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + K_3 \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0$$

Suponiendo $K_1 = K_2$ y que la difusión vertical y la horizontal pueden ser de distinto tamaño, propone dos ecuaciones:

$$K_H \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) = 0$$

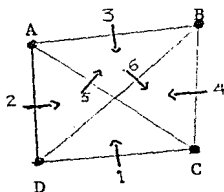
y

$$K_3 \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0$$

y busca que se cumpla alguna de las dos. La primera de estas expresiones fué utilizada por Hidaka en el Atlántico y encontró que nunca era igual a cero. Probó entonces la segunda ecuación y construyó una superficie de cero movimiento a partir de estos supuestos. En realidad la suposición de que la difusión vertical es mayor que la horizontal es poco sólida, y el supuesto fundamental, solo implica que no hay acumulación o pérdida de sal en la capa, lo cual estaba supuesto al asumir el caso estacionario. Otra objeción resulta de que en ausencia de movimiento, el coeficiente de difusión turbulento puede considerarse igual a cero. Por último, el hecho de que la segunda derivada sea cero, significa que la salinidad varía linealmente o que existe un punto de inflexión, y en ninguno de estos casos está claro porqué la velocidad deba de ser cero ahí.

Segundo método de Hidaka. (Fomin, L. 1964).

Otro método, también debido a Hidaka, plantea utilizar las ecuaciones de continuidad junto con los datos de velocidad relativa. Lo que Hidaka hace es formar un prisma con cuatro estaciones:



En esta figura, en los puntos A-D, se localizan las estaciones hidrogáficas. Las flechas indican flujos entre cada pareja de estaciones.

Con este sistema plantea ecuaciones de la forma:

$$y \quad \sum_{i=1}^3 L_i \int_0^{h_i} v_i(z) dz = 0 \quad , \quad v_i \equiv \text{velocidad geostrofica.}$$

$$\sum_{i=1}^3 L_i \int_0^{h_i} v_i(z) S_i(z) dz = 0 \quad , \quad S_i \equiv \text{salinidad.}$$

para cada prisma triangular. Aquí L es la distancia entre cada pareja de estaciones y h_i es la profundidad que define el límite de integración, que en principio puede ser hasta el fondo oceánico o hasta alguna superficie isobara o isopicna. Hidaka propone utilizar seis ecuaciones y tener seis incógnitas. Suponiendo que la velocidad en la superficie de referencia es cero, construye las ecuaciones:

$$A_1 c_1 + A_2 c_2 - A_5 c_5 + M_1 + M_2 - M_5 = 0$$

y

$$H_1 c_1 + H_2 c_2 - H_5 c_5 + N_1 + N_2 - N_5 = 0 \quad ,$$

y en forma análoga con cada tercia hasta completar 6 ecuaciones. En estas ecuaciones:

$$A_i = L_i h_i \quad ; \quad H_i = L_i \int_0^{h_i} S_i(z) dz \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

$$M_i = L_i \int_0^{h_i} u_i(z) dz \quad ; \quad N_i = L_i \int_0^{h_i} u_i(z) S_i(z) dz .$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se determina la velocidad.

Las objeciones que se hacen a este método son: conservar volumen y no masa en su sistema, lo cual es fácil de solucionar; otra crítica señala que el determinante asociado al sistema es muy cercano a cero; y la última se refiere a que la precisión de los datos y la densidad del muestreo en la vertical no permitan obtener el error máximo tolerable al realizar las integrales.

En realidad la situación ha cambiado pues ahora es posible tener un muestreo casi continuo en la vertical y con una mayor precisión. También ha mejorado la técnica de posicionamiento y por lo tanto es posible conocer con mayor precisión L_i . Por último, se debe señalar que el sistema de ecuaciones puede replantearse de muchas maneras y atacarse con nuevos métodos. El método inverso que se describe en el siguiente capítulo plantea una generalización de este problema.

Método de Defant. (Fomin, L. 1964).

Mediante el análisis de las diferencias en las alturas geopotenciales de un gran número de parejas de estaciones, Defant observó (1914 citado en Fomin) una capa relativamente gruesa en la que la velocidad relativa en la vertical se mantiene constante, y propuso tomar esa zona como nivel de referencia. El grueso de esa capa en el Atlántico varía entre 300 y 800 metros y con una profundidad que varía uniformemente en todas las direcciones de la horizontal, entre 1000 y 2000 metros. En la práctica se encuentra que para muchos casos (en el Atlántico), el método de Defant da buenos resultados al compararlos con las observaciones. En el Pacífico los resultados obtenidos no son igualmente satisfactorios y se encuentra que en general esa zona es más profunda que en el Atlántico. Al analizar este método, vemos que una capa en la que $dv/dz = 0$, sólo significa que en esa capa la velocidad no varía, y no es claro que pueda concluirse que no exista movimiento. Los buenos resultados que obtuvo Defant al aplicar su método le dieron cierta aceptación.

Otra idea que se ha experimentado consiste en realizar mediciones directas de corriente en algún punto y tomarlas como referencia. Esto tiene el inconveniente de ser necesario filtrar los movimientos de meso-escala y pequeña escala, lo

que resulta ser complicado en la práctica y hace necesario muestreos en tiempos largos y con varios puntos.

Métodos recientes.

Recientemente, en Wunsch (1978), se volvió a atacar el problema del nivel de referencia mediante una reformulación y generalización del método de Hidaka en términos del método inverso que se ha venido utilizando en problemas de geofísica. Wunsch no introduce mas conceptos físicos de los que habían venido utilizándose desde principios de siglo. Este método es el que se planteó utilizar en este trabajo para el Golfo de California y se describe en el siguiente capítulo.

Otro método, debido a Schott y Stommel (1978) conocido como Beta-spiral, ha venido utilizándose recientemente, aunque al parecer y según sus propios autores, necesita una base de datos más completa que las que existen. Este método utiliza conservación de masa y de vorticidad potencial, encontrando que debe existir un movimiento que decae en la vertical y varía su dirección en forma similar al flujo de Ekman, pero con mucho mayor penetración. Utilizando datos de densidad, presión y las ecuaciones en que se apoya el método, se construye un sistema de ecuaciones sobredeterminado que se resuelve por una variación al método inverso. Para el método de Stommel es necesario un muestreo en dos o más direcciones y sus principios son equivalentes al método de Wunsch, según Davis (1978). La discusión profunda de este método es extensa y no se desarrolla aquí.

CAPITULO 2

METODO INVERSO EN OCEANOGRAFIA

2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Como se describió en el capítulo anterior, uno de los caminos que se han seguido para encontrar un campo de velocidad absoluta partiendo de datos de velocidad geostrofica referidos a alguna superficie, es el debido a Wunsch (1977) y que ha sido discutido o aplicado en varios artículos (Wunsch & Grant 1982, Wunsch & Minister 1982, Veronis 1980-1982, Roemmich 1980, entre otros).

La idea general del método parte de los siguientes supuestos:

- a) El océano se encuentra en balance geostrofico.
- b) Existe conservación de algunos parámetros en determinadas condiciones, como pueden ser: masa, contenido de calor y sal o cualquier trazador factible de medir.
- c) El intercambio entre isopícnas de los parámetros que se utilizan en b) es despreciable, al menos para isopícnas fuera de la zona superficial de mezcla.
- d) Las secciones hidrográficas representan el flujo promedio dentro del área en un periodo de tiempo dado.

Analizando cada uno de los supuestos, se observa que éstos varían según el caso en que se aplique el método. En términos generales se discuten a continuación cada uno de estos supuestos:

El supuesto a), como se analiza en el capítulo anterior, tiene validez lejos de las fronteras, obteniéndose el flujo de gran escala. Lo propuesto en b) es consecuencia de las ecuaciones de conservación, y dependiendo del parámetro que se utilice, la aproximación puede o no ser buena. En general, existen problemas de conservación de sal y calor en las capas que están en contacto con la atmósfera, aunque en muchos casos este problema puede manejarse con estimaciones de radiación, evaporación o precipitación. La suposición que encierra c) es quizás la más polémica, pues por un lado depende de cómo se escojan las isopícnas (y es fundamental hacerlo en forma adecuada para obtener buenos resultados), y por otro, no existe acuerdo sobre los valores de la mezcla vertical. Por último, la interpretación y validez del supuesto d) puede ser muy variable, pues pueden utilizarse tanto datos de periodos de tiempo largos (interanuales), como datos con diferencias de tiempo relativamente pequeñas (del orden de días). Siempre existe una componente de ruido en este supuesto ocasionada por ondas internas, no estacionalidad y variación temporal. Para cada caso debe trabajarse con cuidado, dependiendo de la zona geográfica y de los periodos de tiempo de muestreo.

En este trabajo se utilizan solamente datos de una campaña con un tiempo de muestreo de aproximadamente dos semanas y, si se considera el tiempo de muestreo en cada transecto o sección, éste es aproximadamente de dos días.

En general, los problemas que encierran estos supuestos son puntos polémicos en la oceanografía física contemporánea y esto debe tenerse muy presente al aplicar el método. En algunos casos puede ser posible evaluar estas suposiciones a partir de los resultados que se obtienen por este método.

El método de Wunsch puede aplicarse cuando se tienen condiciones cerradas y es posible aplicar conservación de algún parámetro. Pongamos como ejemplo el Golfo de California en el que se tiene una cuenca cerrada y supongamos que se cuenta con un muestreo este-oeste que cierra la cuenca (ver fig. 1).

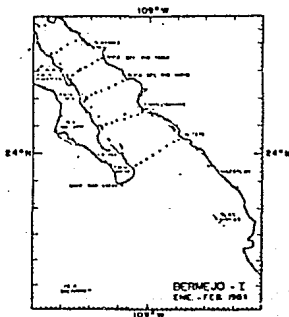


fig. 1 .- Ejemplo de un muestreo cerrado adecuado para aplicar método inverso.

En este caso, por cada pareja de estaciones es posible tener un perfil de velocidad geostrofica. Sólo para simplificar la explicación, imaginemos que se tiene una topografía rectangular (fig. 2). En la fig. 2 se representa con línea continua la zona muestreada y con línea segmentada los puntos en los que se cuenta con una estimación de la velocidad geostrofica entre dos puntos muestreados.

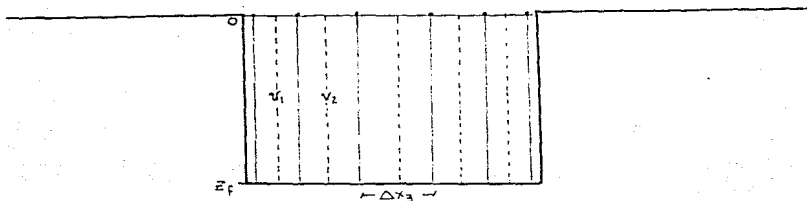


fig. 2 .- Ejemplo de muestreo cerrado en una cuenca rectangular.

El transporte para toda la cuenca está dado por:

$$T = \sum_j \Delta x_j \int_0^{z_f} \rho_j(z) (v_j(z) + c_j) dz \quad \dots \dots (1a)$$

donde z_f es la profundidad de la cuenca, ρ_j es la densidad entre la pareja l , Δx_j es la distancia entre estaciones, $v_j(z)$ es la velocidad geostrofica referida a alguna superficie y c_j es una constante desconocida que deberá ajustar la velocidad geostrofica relativa a la velocidad geostrofica absoluta.

La ecuación (1a) puede reescribirse como:

$$T = \sum_j \Delta x_j \left[c_j \int_0^{z_f} \rho_j(z) dz + \int_0^{z_f} \rho_j v_j(z) dz \right] \quad \dots \dots (1b)$$

y $T=0$ para una cuenca cerrada en donde se conserva la masa.

Si definimos

$$A_j = \Delta x_j \int_0^{z_f} \rho_j dz$$

y

$$b = - \sum_j \Delta x_j \int_0^{z_f} \rho_j v_j(z) dz$$

con $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ y $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

entonces podemos plantear el problema mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Ac = b \quad \dots \dots (2)$$

que en principio tiene una infinidad de soluciones.

Esta representación matricial puede generalizarse al caso más realista en que la cuenca no sea rectangular y, de acuerdo con el supuesto c) (que señala que el intercambio entre isopícnas es mucho más pequeño que los transportes horizontales), pueden definirse varias capas en las que el transporte neto en la capa puede estimarse como cero. Aquí los elementos de A tienen dos subíndices: el primero indica la capa, y el segundo, la pareja de estaciones correspondiente:

$$A_{ij} = \Delta x_j \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \rho_j(z) dz \quad \dots \dots (3)$$

y al aceptar conservación, se cumple que

$$\sum_j A_{ij} c_j = \sum_j \Delta x_j \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} v_j \rho_j dz \quad \dots \dots (4)$$

Esto puede entenderse con ayuda de la fig. 3.

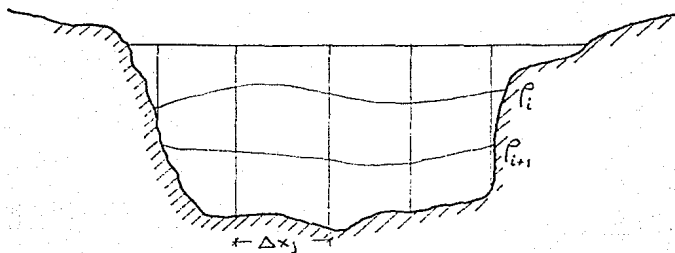


fig. 3

$$\text{Si llamamos } b_i = - \sum_j \Delta x_j \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} v_j(z) \rho_j(z) dz \quad \dots \quad (5)$$

nos queda A con m renglones determinados por el número de capas y n columnas determinadas por el número de parejas de estaciones.

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{compuesto por m elementos}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{compuesto por n elementos}$$

lo que puede representarse mediante el sistema $Ac = b \dots (2)$, donde podemos conocer A y b, y debemos determinar c.

El problema de determinar la velocidad absoluta queda representado por un sistema de ecuaciones, aunque falta determinar cuándo pueden obtenerse soluciones a este sistema y que tipo de soluciones.

Antes de discutir las soluciones al sistema $Ac = b$, cabe aclarar que no es necesaria una cuenca cerrada, pues ésta puede formarse en cualquier lugar en donde sean válidas las suposiciones enunciadas al principio de este capítulo y siempre y cuando se tenga el muestreo adecuado.

2.2 DESCRIPCION MATEMATICA DEL PROBLEMA.

2.2.1 SOLUCION A SISTEMAS $Ac=b$ EN DONDE 'A' ES UNA MATRIZ $M \times N$ Y $M \neq N$.

Como se describe en los párrafos anteriores, es posible construir un sistema de ecuaciones que represente el problema de evaluar la velocidad geostrofica absoluta. En general, el sistema de ecuaciones $Ac = b$ no está undeterminado y en problemas oceanográficos generalmente se encuentra subdeterminado. Es un resultado conocido del álgebra lineal que un sistema de ecuaciones subdeterminado tiene una infinidad de soluciones, y uno sobredeterminado en general no tiene solución. Sin embargo, puede plantearse el problema de escoger alguna solución que tenga ciertas características. En términos matemáticos, este problema fue abordado por Lanczos (1961) y posteriormente desarrollado por Gilbert y Backus (1967, 1968, 1970), y ha venido aplicándose en la geofísica y más recientemente en diversos problemas como: tomografía médica, localización de terremotos, determinación de la estructura de las capas de la tierra, y en el análisis de es-

estructuras moleculares a partir de difracción de rayos X. Una buena descripción del método se encuentra en Menke 1984.

CASO SOBREDETERMINADO. El tipo de solución que se busca al sistema representado por la ecuación (2) para el caso sobredeterminado, puede ser la solución que mejor se ajuste al problema en el sentido de minimizar su desviación. Esto es, buscar que $\|Ac - b\|$ sea mínima, donde $\| \cdot \|$ representa alguna norma y es común usar una norma cuadrática. En el caso subdeterminado se puede buscar que la solución se desvíe lo menos posible de alguna solución propuesta o que cumpla con una o varias constricciones.

Para el caso sobredeterminado ($M > N$), esta solución puede buscarse explorando la ecuación que representa el tamaño de la desviación y encontrando donde ésta se hace mínima. La ecuación que representa la desviación o el error en términos de norma cuadrática es:

$$E = (b - Ac)^T (b - Ac) = e^T e \quad \dots (6)$$

y en este caso queremos minimizar E, al cual podemos escribir como:

$$E = \sum_i^M \left[b_i - \sum_j^N A_{ij} c_j \right] \left[b_i - \sum_k^N A_{ik} c_k \right] \dots (7)$$

desarrollando el producto:

$$E = \sum_j^N \sum_k^N c_j c_k \sum_i^M A_{ij} A_{ik} - 2 \sum_j^N c_j \sum_i^M A_{ij} b_i + \sum_i^M b_i b_i$$

Tomando las derivadas $\partial E / \partial c_q$ término por término se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_q} \left[\sum_j^N \sum_k^N c_j c_k \sum_i^M A_{ij} A_{ik} \right] &= \sum_j^N \sum_k^N [\delta_{jq} c_k + c_j \delta_{kq}] \sum_i^M A_{ij} A_{ik} \\ &= 2 \sum_k^N c_k \sum_i^M A_{iq} A_{ik} \end{aligned}$$

donde $\partial c_i / \partial c_j = \delta_{ij}$, y c_i y c_j son variables independientes si $i \neq j$.

Calculando la derivada del segundo término:

$$\frac{\partial}{\partial c_q} \left[-2 \sum_j^N c_j \sum_i^M A_{ij} b_i \right] = -2 \sum_j^N \delta_{jq} \sum_i^M A_{ij} b_i = -2 \sum_i^M A_{iq} b_i$$

Como el tercer término no depende de c su derivada es cero:

$$\frac{\partial}{\partial c_q} \left[\sum_i^M b_i b_i \right] = 0$$

Entonces, al incluir todos los términos e igualar a cero se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial E}{\partial c_q} = 2 \sum_k^M c_k \sum_i^N A_{iq} A_{ik} - 2 \sum_i^N A_{iq} b_i = 0$$

o reescribiendo esta ecuación en notación matricial tenemos:

$$A^t A c - A^t b = 0 \quad \dots (8a)$$

con $A^t A$ una matriz cuadrada $N \times N$, c un vector $N \times 1$ y $A^t b$ un vector $N \times 1$.

Despejando c de la ecuación (8a), se llega a la siguiente relación:

$$c = (A^t A)^{-1} A^t b \quad \dots (8b)$$

La ecuación (8b) es conocida como la solución de mínimos cuadrados para un problema sobredeterminado ó solución de Moore-Penrose. Esta solución existe siempre que pueda calcularse la inversa de $A^t A$. La existencia de $(A^t A)^{-1}$ se discute más adelante.

CASO SUBDETERMINADO. En general para encontrar el campo de velocidad absoluta a partir de velocidad geostrofica, se obtiene un sistema subdeterminado formado por la matriz A de M renglones y N columnas con $N > M$. Este problema obliga a escoger una solución entre una infinidad. Para esto es necesario imponer ciertas constricciones al sistema o pedir que la solución cumpla con ciertas características. Esta información es llamada información a priori.

Una condición que puede pedirsele a la solución es que sea pequeña. Esto es, minimizar L dada por la ecuación:

$$L = c^t c = \sum_j c_j^2$$

y entonces puede plantearse el problema de encontrar c tal que $b - Ac = 0$.

Este es un problema que se puede resolver por el método de multiplicadores de Lagrange. Veamos:

Sea la función $f = c^t c = \sum_j c_j^2$, y la restricción $g = b - Ac = 0$ que podemos escribir como:

$$g_i = b_i - \sum_j^N A_{ij} c_j = 0, \quad i = 1, \dots, M \quad \dots (9)$$

$$\nabla f = (2c_1, 2c_2, \dots, 2c_N) \quad \dots (10)$$

$$\nabla g_i = (-A_{i1}, -A_{i2}, \dots, -A_{iN}) \quad \dots (11)$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\nabla f_j = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 + \dots + \lambda_N \nabla g_N \dots \dots (12)$$

Utilizando las ecuaciones (11) y (12) para determinar las componentes de ∇f , se obtiene:

$$\begin{aligned} 2 c_j &= -\lambda_1 A_{1j} - \lambda_2 A_{2j} - \dots - \lambda_M A_{Mj} \\ &= \sum_i^M -\lambda_i A_{ij} \dots \dots (13) \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (13) en la (9) e igualando a cero:

$$g_i = b_i - \sum_{j=1}^N A_{ij} \sum_{i=1}^M (-\frac{1}{2} \lambda_i A_{ij}) = 0$$

y despejando b_i :

$$b_i = -\frac{1}{2} \sum_j A_{ij} \sum_i \lambda_i A_{ij}, \quad i = 1, \dots, M \dots (14a)$$

Escribiendo la ecuación (14a) en términos matriciales, se tiene:

$$b = -\frac{1}{2} AA^T \lambda \dots \dots (14b)$$

$$\delta \quad \lambda = (AA^T)^{-1} 2b \dots \dots (15)$$

Es posible reescribir la ecuación (13) como:

$$2c = A^T \lambda \dots \dots (16)$$

y sustituyendo (15) en (16):

$$c = A^T (AA^T)^{-1} b \dots \dots (17)$$

que es la solución para c con mínima norma, es decir, $\sum c_i^2$ es mínima y sujeta a $Ac - b = 0$. En nuestro problema equivale a minimizar el campo de velocidad en un lugar predeterminado. Nótese que la restricción podría cambiarse por $Ac - b = h$ con h una constante. Esto tendría sentido, si por alguna razón conociéramos que el transporte en una zona fuese h .

Por otro lado, debe subrayarse que la solución dada por la ecuación (17) requiere que AA^T tenga inversa.

2.2.2 EXISTENCIA DE SOLUCIONES.

Para que puedan utilizarse las soluciones de mínimos cuadrados y de mínima norma, es necesario que existan $(A^t A)^{-1}$ y $(A A^t)^{-1}$ respectivamente, y esto se cumple si el determinante de estos productos matriciales es distinto de cero. En el caso sobredeterminado, $M > N$ y $A^t A$ una matriz de dimensión $N \times N$. Si la dimensión del espacio generado por A es N , es decir, que sus columnas son linealmente independientes, entonces la dimensión del espacio generado por $A^t A$ es N y $(A^t A)^{-1}$ existe. En el caso subdeterminado, $N > M$ y $A A^t$ es una matriz $M \times M$. Si A tiene M renglones linealmente independientes, entonces $A A^t$ es no singular y $(A A^t)^{-1}$ existe.

En muchos casos el determinante de la matriz $A A^t$ (o $A^t A$ según el caso) puede ser cero o muy cercano a cero. Para el caso en que esto sucede (o aunque no sea así), existe una forma de atacar el problema (Lanczos 1961 y otros) mediante la descomposición de la matriz A , conocida en la literatura como descomposición de A en valores singulares, y que consiste en expresar A como el producto de tres matrices. Esta alternativa también es importante para eliminar el ruido, pues de otro modo se puede dar el caso de obtener un determinante distinto de cero utilizando datos ruidosos sin que esto signifique independencia lineal.

2.2.3 DESCOMPOSICION EN VALORES SINGULARES.

Partiendo del sistema $Ac = b$ y definiendo el sistema transpuesto $A^t e = d$ es posible construir el sistema compuesto $Sh = f$, que se estructura según se muestra en la fig. 5:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ e \\ \uparrow \\ c \end{matrix} = \begin{matrix} \uparrow \\ b \\ \uparrow \\ d \end{matrix}$$

fig. 5

con los vectores compuestos $h = [e, c]$ y $f = [b, d]$.

S es una matriz simétrica por lo que siempre es posible resolver su problema de eigenvalores

$$S w = \lambda w$$

es decir:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

fig. 6

donde $w = [u, v]$ es un vector compuesto.

Escribir la ecuación $Sw = \lambda w$ es equivalente a escribir las ecuaciones de eigenvalores

$$Av = \lambda u \quad \dots \dots (18)$$

$$y \quad A^t u = \lambda v \quad \dots \dots (19)$$

Multiplicando la ecuación (18) por la izquierda por A^t y la ecuación (19) por A también por la izquierda, y sustituyendo los términos comunes se obtiene:

$$A^t Av = A^t \lambda u = \lambda A^t u = \lambda \lambda v = \lambda^2 v \quad \dots (20)$$

$$y \quad AA^t u = \lambda^2 u \quad \dots (21)$$

Estas dos ecuaciones pueden resolverse siempre, pues $A^t A$ y AA^t son matrices cuadradas y simétricas.

Por otro lado, retomando la ecuación $Av = \lambda u$ y escribiendo el conjunto de λ 's como una matriz diagonal (que denotamos por Λ)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

donde p es el número de eigenvalores distintos de cero, y denotando por V a la matriz compuesta por vectores columna v y por U a la compuesta por vectores columna u :

$$V_{N \times p} = (v_1, v_2, \dots, v_p), \quad i = 1, \dots, p \text{ y } p \leq N, M$$

$$U_{M \times p} = (u_1, u_2, \dots, u_p),$$

donde U y V son matrices con vectores columna ortonormales.

Reescribiendo la ecuación (18) en términos de estas matrices, obtenemos:

$$\delta \quad \begin{aligned} AV &= U \Lambda \\ A &= U \Lambda V^{-1} = U \Lambda V^t \end{aligned} \quad \dots (22)$$

Esta ecuación expresa a la matriz A como el producto de tres matrices y es llamada la descomposición en valores singulares (DVS) de A.

La inversa de A en términos de las matrices U, Λ y V es:

$$A^{-1} = V \Lambda^{-1} U^t \quad \dots (23)$$

En caso de que A no sea una matriz cuadrada, o que siendo una matriz cuadrada sea singular, entonces puede representarse por la matriz A_p con

$$A_p = U_p \Lambda_p V_p^t \quad \dots (24)$$

donde p es el rango de la matriz A y es igual al número de columnas de U y de renglones de V, con Λ una matriz p x p. Análogamente se puede definir una inversa:

$$A_p^{-1} = V_p \Lambda_p^{-1} U_p^t \quad \dots (25)$$

donde p puede ser menor o igual que M y N. La matriz A_p^{-1} tiene la característica o deficiencia de no cumplir estrictamente con $AA_p^{-1} = I$, y de hecho AA_p^{-1} es una medida de la calidad de la inversa, dependiendo de la dispersión que observan los datos en comparación con I que puede considerarse con varianza cero.

La descomposición en valores singulares y el algoritmo para obtener U, Λ y V pueden aplicarse a cualquier matriz, sea cuadrada o no y sin importar si la dimensión del espacio generado por A es menor que el más pequeño de M y N.

Las ecuaciones (8b) y (17) representan las soluciones para c de mínimos cuadrados y de mínima norma respectivamente. Si se consideran como inversas a los productos de matrices que afectan a b y se denotan éstas por:

$$A_m^+ = (A^t A)^{-1} A^t \quad \dots (26)$$

$$A_k^+ = A^t (A A^t)^{-1}$$

al sustituir (22) en (26) se llega a:

$$\begin{aligned} A_m^+ &= [(U \Lambda V^t)^t (U \Lambda V^t)]^{-1} (U \Lambda V^t)^t \\ &= (V \Lambda^t U^t U \Lambda V^t)^{-1} V \Lambda^t U^t = V^{t-1} \Lambda^{-1} U^t \\ &= V \Lambda^{-1} U^t \end{aligned}$$

que es la inversa propuesta en la ecuación (23) obtenida por DVS. Análogamente:

$$A_{\lambda}^+ = (U \wedge v^t)^t [(U \wedge v^t) (U \wedge v^t)^t]^{-1} = v \wedge^{-1} u^t$$

Pero hasta aquí hemos supuesto que $M = p$ ó $N = p$. Cuando no es este el caso, no existe solución en (8b) y (17) pero sí una solución aproximada dada por (25).

Al resolver las ecuaciones (20) y (21) se encuentra que el número de eigenvalores distintos de cero puede ó no estar bien definido, pues en ocasiones se encuentra uno con valores que son cercanos a cero y pueden o no tomarse en cuenta. Un criterio que puede seguirse en lugar de analizar los valores absolutos de λ_i es analizar el cociente

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \geq \alpha$$

donde λ_i es el i -ésimo eigenvalor en orden decreciente y λ_1 el mayor eigenvalor.

Definir el valor de α depende de la varianza de los datos que componen la matriz A y del tamaño del error numérico. Ambas incertidumbres varían según el problema particular.

2.3 APLICACIONES EN LA OCEANOGRAFIA.

Al principio de este capítulo se describe cómo se puede formar un sistema de ecuaciones $M \times N$ a partir de datos oceanográficos. En esta sección se discuten los problemas que pueden presentarse y su relación con el muestreo.

En el caso en que se tenga una cuenca cerrada y un cierto número de capas, vimos que los elementos de A están dados por:

$$A_{ij} = \Delta x_j \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \rho_j(z) dz \quad \dots (3)$$

Si observamos de nuevo la figura que muestra las áreas

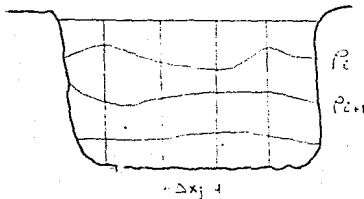


fig. 4

puede notarse que éstas dependen del espaciamiento en el muestreo y de la forma de las isopícnas. Si las isopícnas que definen las capas son cercanas a paralelas u horizontales, entonces dos ó más renglones de la matriz son semejantes salvo por una constante, es decir:

$$A_{ij} \approx \alpha_i A_{i+1,j} \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

y esto significa que los vectores i e $i+1$ son paralelos ó casi paralelos, y por lo tanto no definen bien dos dimensiones (ó más, según sea el caso). Esto se traduce en que el rango de A es menor que M (suponiendo el caso sobredeterminado) y no es posible aplicar el primer método (ec. (17)), teniendo que recurrir a la descomposición en valores singulares. En este caso, se encuentra que el número de eigenvalores para el que λ_i/λ_{i+1} es mayor que una cierta constante es menor que M y la información con que se cuenta es menor que la que a primera vista se supuso.

La primera objeción que puede ponerse a lo descrito en el párrafo anterior es que los elementos de la matriz A están dados por la ecuación (3) y el área es distinta de la integral de ρ sobre esa área, esto es:

$$\Delta x_i \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} dz \neq \Delta x_j \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \rho_j(z) dz$$

Sin embargo, al integrar ρ sobre el intervalo $[\rho_i, \rho_{i+1}]$ se obtiene un promedio de ρ multiplicado por Δz . El valor promedio de ρ es casi idéntico para secciones en la misma capa (renglón) y distinta columna. Esto muestra que el problema es el mismo que en el caso en que sólo se considera volumen.

En el caso de "isopicnas planas", el campo de velocidades es pequeño, pues éste depende de la inclinación de aquéllas (ver capítulo anterior). Esto nos deja ver que el rango de A depende de lo poco claro que sea la señal (inclinación de las isopicnas), y esto deberá notarse en que los cocientes λ_i / λ_1 crecen rápidamente. Resulta lógico proponer, en el caso en que las isopicnas sean "bastante antiparalelas", que se trabaje con mas capas esperando obtener más información que en el caso en que las isopicnas sean "paralelas" (todo esto siempre que sea válido el supuesto c) enunciado al principio de este capítulo).

De todo esto se concluye que el espacio generado por A es determinante en la calidad de la solución obtenida. Esto sugiere que la evaluación de los elementos A_{ij} debe realizarse con la mayor precisión posible, por lo que debe procurarse tener la mayor información posible de ρ y de sus variaciones en la horizontal y en la vertical. Otro factor que aparece en A_{ij} es Δx_j que depende de la calidad del posicionamiento. La otra componente que aparece en la solución es la estimación del vector b:

$$c = A^* b$$

Vimos que el vector b está compuesto por:

$$b_i = \sum_j \Delta x_j \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \rho_j(z) v_j(z) dz$$

lo que indica que también depende de ρ y de Δx_j , pero aparece el factor $v_j(z)$ dentro de la integral que también depende de las estimaciones de ρ y Δx_j y del parámetro de Coriolis. Las estimaciones de los errores en estos parámetros se discuten en el Capítulo 3.

De lo que se discute en el párrafo anterior se concluye que la calidad de la solución depende de que tan buena es la estimación de ρ , del posicionamiento y de la topografía de las isopicnas. De esto surgen las preguntas: ¿se puede hacer algo para mejorar la calidad de los resultados?, ¿qué se puede hacer si la cuenca no es cerrada?.

La primera pregunta puede responderse analizando una vez más la estructura

de la matriz A. Esto sugiere aumentar el espacio generado por A, lo que equivale a un aumento en la información.

Imaginemos que además del muestreo que cierra la cuenca se cuenta con datos en algunos otros puntos cercanos a la sección inicial (ver fig. 5):



fig. 5

Esta información puede incorporarse a la matriz A usando $\nabla \rho \bar{u} = 0$ y formando secciones cerradas entre los nuevos puntos y la primera sección que contenía a A (que podrían ser, por ejemplo, las secciones marcadas por la línea punteada y la marcada con línea de punto y raya en la fig. 6):

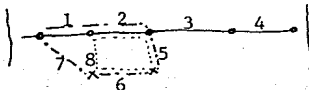


fig. 6

Supongamos que inicialmente se consideran 5 puntos del muestreo y 3 capas, entonces se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

y al incorporar las nuevas secciones, la matriz A queda de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & -a_{15} & -a_{16} & -a_{17} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & -a_{25} & -a_{26} & -a_{27} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & -a_{35} & -a_{36} & -a_{37} & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 & 0 & -a_{15} & -a_{16} & 0 & a_{18} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & -a_{25} & -a_{26} & 0 & a_{28} \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 & -a_{35} & -a_{36} & 0 & a_{38} \end{pmatrix}$$

en esta nueva matriz A se agregaron seis ecuaciones y cuatro incógnitas. En cada caso particular, puede buscarse agregar más ecuaciones que incógnitas, cuidando que en realidad se agregue más información al sistema, lo que está ligado a la inclinación de las isopícnas y a la geometría del muestreo.

En la zona del Golfo, objetivo de este trabajo, el muestreo no permite explorar esta posibilidad.

La segunda pregunta que se hizo antes del comentario anterior se refiere a qué se puede hacer en caso de no tener una cuenca cerrada. De lo discutido en el párrafo anterior, se puede extrapolar al caso en que se tenga una malla de muestreo en dos dimensiones en la horizontal, como las mostradas en la fig. 7. Con este tipo de muestreo el método inverso puede aplicarse en cualquier situación, siempre y cuando sean válidos los supuestos enunciados al principio del capítulo.

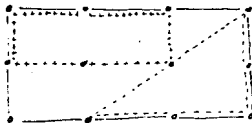


fig. 7.- En esta figura se observa un ejemplo de muestreo en dos dimensiones con el que puede formarse un sistema $Ac = b$ con tres o más zonas cerradas.

Existen otras variables que pueden utilizarse e incluirse en la información antes de calcular A^+ , como por ejemplo el conocimiento del transporte neto en una sección o la fricción en las fronteras. Otra variable que puede manejarse consiste en trabajar la conservación de algún otro parámetro distinto de la masa, como por ejemplo el contenido de sal. Esto permite comparar resultados y, controlando el error, estimar el intercambio entre isopicnas. Esto es particularmente interesante, pues es uno de los supuestos enunciados al principio del capítulo y su estimación es de mucho interés en la oceanografía.

En síntesis, existen varias posibilidades de aplicación del método inverso en la oceanografía, ligadas al muestreo, a la incorporación de información adicional, a la evaluación de transportes, mezcla, etc., que deben explorarse con detenimiento.

CAPITULO 3

ALGORITMOS Y ANALISIS DE ERRORES.

3.1 PROCEDIMIENTO QUE SE SIGUE CON LOS DATOS HASTA OBTENER EL CAMPO DE VELOCIDAD GEOSTROFICA RELATIVA.

La recopilación de los datos que se analizan en este trabajo se realizó con un CTD ó CTP-O Niel Brown, que es un instrumento equipado con sensores que miden presión, temperatura, conductividad y oxígeno. Este instrumento toma lecturas en la vertical con intervalos de 1/32 de seg. Estos datos son recopilados por una computadora a través de un cable y almacenados en cinta magnética y/o discos flexibles, y son utilizados para calcular otros parámetros como densidad, salinidad, frecuencia de Brünt-Väisälä, etc.

El agua de mar es conductora debido a la presencia de sales, por lo que al medir la conductividad puede evaluarse el contenido de sales. Esto hace a la salinidad una función

$$S = S(C, T, P) \quad (1)$$

donde C es la conductividad, T la temperatura y P la presión. Se han desarrollado tablas y algoritmos para el cálculo de la salinidad a partir de datos de C, T y P. En este caso se utilizaron los algoritmos publicados por la UNESCO en el Reporte Técnico #37 sobre Ciencias del Mar (R. T. #37, UNESCO). En general, una vez obtenida la salinidad, se manejan datos P, T y S y se calcula la ecuación de estado en distintas formas.

En las siguientes ecuaciones:

$$\rho_t = \rho_t(P, T, S) \quad (2a)$$

$$\rho_t = \rho_t(P, T, S) \quad (2b)$$

$$\rho_\theta = \rho_\theta(P, T, S) \quad (2c)$$

ρ_t es la densidad in-situ que es por definición la densidad en las condiciones determinadas por P, T y S; ρ_t (densidad-T) es la densidad que tendría una masa de agua si isotérmicamente se le lleva a la presión de una atmósfera; ρ_θ es la densidad esperada para una masa de agua que se lleve adiabáticamente a una presión de una atmósfera. ρ usualmente se da en g/cm³ o en Kg/m³.

De manera similar se definen las ecuaciones de estado:

$$\sigma_i = \sigma_i (P, T, S) \quad \dots \quad (3a)$$

$$\sigma_t = \sigma_t (P, T, S) \quad \dots \quad (3b)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta (P, T, S) \quad \dots \quad (3c)$$

donde σ_i , σ_t y σ_θ son llamadas sigma in-situ, sigma-T y sigma- θ respectivamente. Si ρ está dada en g/cm³, la relación entre ρ_i y σ_i se define como:

$$\sigma_i = (\rho_i - 1) 1000 \quad \dots \quad (4)$$

y en forma análoga para σ_t y σ_θ . Estos cálculos se realizaron utilizando el algoritmo publicado en R.T. #37 UNESCO, y se llevaron a cabo en el Laboratorio de Oceanografía Física del ICMyL, UNAM.

Para el cálculo de velocidad geostrofica es necesario conocer los gradientes horizontales de presión, esto hace necesario el cálculo de la anomalía de volumen que usualmente se denota con σ y se define como:

$$\sigma = \frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho_i} \quad \dots \quad (5)$$

donde ρ_o es una densidad de referencia definida como:

$$\rho_o = \rho (35, 0, p) \quad \dots \quad (6)$$

que indica la densidad in-situ del agua con salinidad de 35*, temperatura 0°C, y p indica la presión (igual a la presión en ρ_i).

Usualmente la anomalía de volumen está dada en unidades de 10⁻⁸ m³/kg.

La anomalía geopotencial o altura dinámica se define como:

$$\phi = \int \sigma \, dp \quad \dots \quad (7)$$

y ésta es una cantidad útil para calcular la velocidad geostrofica relativa.

Por otro lado, si en las ecuaciones de movimiento se desprecian los términos de fricción y aceleración (cap. de geostrofia), al realizar un balance entre el término de Coriolis y el gradiente horizontal de presión se obtiene:

$$\phi_2 - \phi_1 = g(z_2 - z_1) = L v 2 \Omega \sin \varphi$$

* Anteriormente la salinidad se daba en cantidad de sales disueltas en partes por mil de la masa total. Actualmente, debido al aumento en la precisión de las mediciones vía conductividad, se definió la escala de Salinidad Práctica que no tiene unidades, y en principio se apega a la escala en que se estima el contenido

donde Φ es la anomalía geopotencial, g la gravedad, z la profundidad, L la distancia entre estaciones, Ω la velocidad angular de la tierra y v la velocidad geostrófica. Entonces:

$$v = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{L \cdot 2\Omega \sin \psi} \quad (8)$$

Esta es la ecuación que se utilizó para el cálculo de velocidad geostrófica relativa a algún nivel de referencia, que depende del punto a partir del cual se integra para calcular Φ .

3.2 DISCUSION Y EVALUACION DE ERRORES.

Los errores que están presentes en la evaluación de los transportes, el campo de velocidad, y la estimación del campo de velocidad absoluto, a partir de las ecuaciones geostróficas (Cap. 2), son diversos:

- 1) Errores originados por no considerar todos los términos en las ecuaciones de movimiento.
- 2) Errores debidos a los instrumentos de medición.
- 3) Errores causados por los procesos numéricos.
- 4) Errores debidos a la aplicación del método inverso.

Cada uno de estos errores debe discutirse por separado.

El error (1) fué discutido en el Capítulo 2 encontrando para océano abierto y lejos de las fronteras un error del orden del 1%.

Los errores debidos a los instrumentos de medición se obtienen de las especificaciones de los instrumentos. En este caso, los datos de presión, temperatura y conductividad (P, T y C) del CTP-0 Niel Brown tienen asociados un error en temperatura de 3×10^{-3} °C, en presión de ± 3.2 db, y en salinidad de 3×10^{-3} p.p.m. Sin embargo, dado el estado de los sensores en esta campaña se evaluó un error de 1×10^{-2} °C para la temperatura y de 1×10^{-2} p.p.m. para la salinidad, (Gallegos, A. et. al. 1985).

A partir de estos datos se hacen los cálculos para obtener el campo de velocidad geostrófica relativa.

(*cont.)
do de sales en partes por mil (p.p.m.). La nueva definición está orientada básicamente a estimar con mayor precisión la densidad del agua.

Los parámetros que aparecen en la ecuación (8) son: el parámetro de Coriolis ($f = 2\Omega \text{sen } \varphi$), la distancia L y la diferencia de altura geopotencial entre los puntos en que se calcula la velocidad ($\Phi_2 - \Phi_1$).

La calidad de los datos de L y f dependen del posicionamiento. En la campaña Bermejo I, el posicionamiento se realizó mediante el sistema de satélites Transit y el uso de la corredera del Buque. La precisión del satélite es de ± 150 mts. (al momento de recibir la señal). En general, al momento de realizar una estación no se cuenta con el posicionamiento óptimo que da el satélite, debido al tiempo que transcurre entre una señal de satélite y otra. La deriva del Buque en estos periodos provoca un error de posicionamiento que sobre la base de las condiciones medias de recepción y deriva en la zona del Golfo, puede estimarse en 600 mts. Considerando como errores independientes el debido al satélite (150 mts.) y a la deriva (600 mts.), el error en la distancia por posicionamiento puede estimarse como:

$$E_p = \sqrt{E_s^2 + E_d^2} = \sqrt{(150)^2 + (600)^2} \approx 620 \text{ mts.} \quad \dots (9)$$

donde E_p es el error por posicionamiento, E_s es el error de satélite y E_d el error por deriva.

La distancia entre estaciones (L) se calculó con el algoritmo para distancias sobre una esfera:

$$L_o = R \cos^{-1}[\text{sen}(\text{lat}_1)\text{sen}(\text{lat}_2) + \cos(\text{lat}_1)\cos(\text{lat}_2)\cos(\text{lon}_2 - \text{lon}_1)] \quad \dots (10)$$

donde R es el radio de la tierra, lat es la latitud, lon es la longitud y el subíndice corresponde a cada una de las estaciones.

La distancia tiene un error debido a que la tierra no es esférica, un error numérico y un error debido al posicionamiento. Si se introducen los términos de error en la ecuación (10), el error en la distancia ' L ' no es lineal con el error en el posicionamiento. Sin embargo, considerando una aproximación lineal, la distancia está dada por la siguiente ecuación:

$$L = (P_1 \pm P_1^e) - (P_2 \pm P_2^e) \quad \dots (11)$$

donde P es la posición y P^e el error en la posición, lo que da una estimación para L de:

$$L = P_1 - P_2 \pm \sqrt{2} P^e \quad \dots (12)$$

en donde se ha considerado que los errores son independientes e iguales (en general son sistemáticos y por lo tanto menores). Sustituyendo el error de posiciona-

miento obtenido en (9) se tiene:

$$L = L_0 \pm \sqrt{2} \cdot 620 \text{ m} \approx L_0 \pm 850 \text{ mts.} \quad \dots (13)$$

donde L_0 es evaluada por la ecuación (10) y L es la distancia estimada entre dos estaciones.

El otro término que depende del posicionamiento es el parámetro de Coriolis, $f = 2\Omega \sin \varphi$, que tiene un error debido a la estimación en la latitud. El error en latitud de acuerdo con la ecuación (9) es de unos 425 mts. (considerando igual peso al error en longitud), que corresponde a unos 20". Si escribimos f como:

$$f = 2\Omega \sin(\varphi \pm \varphi_e) \quad \dots (14)$$

donde φ_e es el error en la latitud, y sustituyendo valores típicos de la región ($\varphi \approx 23^\circ$, $2\Omega \approx 1.4544 \times 10^{-4}$ rad/s) podemos aproximar el error como:

$$\begin{aligned} f &\approx 2\Omega \sin \varphi \pm (2\Omega \sin \varphi - 2\Omega \sin(\varphi \pm \varphi_e)) \\ f &\approx 1.4544 \times 10^{-4} (.39073) \pm (1.4544 \times 10^{-4} (.39073 - .39082)) \\ f &\approx 5.68 \times 10^{-5} \pm 1.29 \times 10^{-8} \\ f &\approx 2\Omega \sin \varphi \pm 1.29 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

esta ecuación da una estimación del error máximo esperado para f ; este error es del orden del 0.02%.

En la ecuación (8) aparece un término de la diferencia de altura geopotencial ($\Phi_2 - \Phi_1$). En la primera sección de este capítulo se mostró que Φ está dada por:

$$\Phi = \int \delta \, dz \quad \dots (7)$$

donde δ es la anomalía de volumen definida como:

$$\delta = \frac{1}{\rho_{35,0,p}} - \frac{1}{\rho_{S,T,P}} \quad \dots (5b)$$

El término de la anomalía volumétrica tiene un error como producto del error en ρ . Esto se ve al desarrollar ρ como la suma de un término principal y un error:

$$\rho = \rho \pm \rho_e$$

con ρ el término principal y ρ_e el término de error.

Esto implica que:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho \pm \rho_e} \\ &= \frac{\rho}{(\rho \pm \rho_e) \rho_0} - \frac{\rho_0}{(\rho \pm \rho_e) \rho_0} \pm \frac{\rho_e}{(\rho \pm \rho_e) \rho_0} \\ &\approx \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \pm \frac{\rho_e}{\rho \rho_0}\end{aligned}$$

Si se considera que en esta campaña la estimación de la temperatura alcanza centésimos de grado y la de la salinidad de 1×10^{-2} , se obtiene (utilizando los algoritmos antes mencionados y valores de T y S en la región) un ρ_e (rms) de $6.6 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^{-3}$, que produce un error en σ de:

$$\sigma_e \approx 6.28 \times 10^{-9} \text{ m}^3 \text{Kg}^{-1}$$

Sin embargo, el CTD permite conocer variaciones en la temperatura y en la salinidad del orden de 1×10^{-3} acarreando un error sistemático, y es posible considerar errores de $3 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$ en temperatura y de 3×10^{-3} en salinidad. Dados estos valores se obtiene:

$$\begin{aligned}\rho_{e(\text{rms})} &\approx 1.8 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^{-3} \\ \text{y } \sigma_e &\approx 1.7 \times 10^{-9} \text{ m}^3 \text{Kg}^{-1}\end{aligned}$$

En la ecuación (7) se vió que $\Phi = \int \sigma \, dp$. La integral se evaluó numéricamente como:

$$\Phi = \sum_i (\sigma_i + \sigma_{i+1}) \frac{\Delta p_i}{2}$$

que es una integración trapezoidal, la cual se llevó a cabo con doble densidad (16 dígitos). Esto introduce un error numérico y un error por la aproximación trapezoidal. Para una estación oceanográfica de 1000 mts. existen alrededor de 1800 datos, lo que da más de un dato por metro, aunque la densidad de muestreo es mayor en los primeros 250 mts. Con esto se logra un muestreo casi continuo y así el error debido a la aproximación trapezoidal y el error numérico son mucho menores que el debido a σ_e .

El error en Φ , Φ_E , puede aproximarse entonces como:

$$\Phi_E = \frac{\sigma_e}{\sqrt{N}} \Delta p$$

donde $N \approx 600$ es el número de niveles muestreados para profundidades medias ($\Delta p \approx 500$ decibares) y $\int_e = 1.7 \times 10^{-9} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$, obteniéndose:

$$\phi_E \approx 3.4 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

de donde el término $\phi_1 - \phi_2$ puede escribirse como:

$$\phi_1 - \phi_2 = \Delta\phi = (\phi_{1p} \pm \phi_{1E}) - (\phi_{2p} \pm \phi_{2E})$$

donde ϕ_p es el término principal (el valor estimado para ϕ), y ϕ_E es el error esperado. Entonces la diferencia de altura geopotencial ($\Delta\phi$) puede escribirse como:

$$\Delta\phi = \phi_{1p} - \phi_{2p} \pm \sqrt{\phi_{1E}^2 + \phi_{2E}^2}$$

Sustituyendo los valores para N y ϕ_E se obtiene:

$$\Delta\phi = \phi_{1p} - \phi_{2p} \pm 4.8 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

Considerando todos los términos que introducen un error en la ecuación (8) se obtiene:

$$v = \frac{\Delta\phi}{Lf} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\phi_E}{Lf}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\phi}{Lf} - \frac{\Delta\phi}{(L+L_E)f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\phi}{Lf} - \frac{\Delta\phi}{L(f+f_E)}\right)^2} \dots (15a)$$

donde el subíndice E indica que el término es el error estimado. Sustituyendo numéricamente los valores típicos obtenidos para los errores y considerando $L = 20 \text{ Km}$ obtenemos:

$$v = \frac{\Delta\phi}{Lf} \pm 4.10 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1} \dots (15b)$$

Cabe observar que el error en el parámetro de Coriolis depende de la latitud, siendo mayor a menor latitud. Para la estimación del error en la ecuación (15b) se tomó la latitud media en el área muestreada. El error debido a la distancia depende de la relación entre ésta y su error ($\Delta L/L$), siendo mayor cuando L es más pequeña, puesto que ΔL es independiente del tamaño de L . En L se sustituyó una distancia (20 Km) menor al promedio de las utilizadas en el área de estudio.

Las distancias estimadas se presentan en el siguiente capítulo. El error debido al término $\Delta\Phi$ depende del número de niveles en el cálculo de Φ y al error en σ . En síntesis, el error en la velocidad geostrofica depende de la distancia entre las estaciones, de la latitud y del número de niveles en el cálculo de Φ .

Es importante anotar que el error en la velocidad es independiente de su magnitud; esto quiere decir que si la señal en velocidad es débil, el porcentaje de error es mayor que en el caso en que existan velocidades relativas grandes. La estimación de la velocidad relativa tendrá un mayor error al alejarse del nivel de referencia. Aquí domina el segundo término dentro de la raíz en la ecuación (15a) y puede hablarse de un error aproximado del 4% en v .

El otro error mencionado al principio de esta sección es el debido a la aplicación del método inverso. Estos errores fueron parcialmente analizados en el Capítulo 2 y se volverá a tocar este problema en los siguientes capítulos.

Cabe mencionar que el error en (15b) es una sobre-estimación pues en todos los casos se tomaron las cuotas máximas de error y dominan los términos de distancia e integración numérica.

3.3 EXTRAPOLACION DE DATOS.

Uno de los problemas más comunes cuando se realiza el cálculo de velocidad geostrofica o el cálculo de transportes, es debido a que algunas estaciones tienen muestreos menos profundos que otras debido a la existencia de barreras físicas o porque en los objetivos no estaba contemplado el cálculo de transporte geostrofico.

El problema de la extrapolación de datos es distinto cuando en la zona en que no existen datos hay agua ó cuando existe una barrera física como el talud, una isla o una montaña. En el caso en que exista una barrera física, no tiene sentido suponer que existen corrientes a través de ésta, y esto puede resolverse de distinta forma. Un criterio consiste en suponer que en la barrera las líneas de altura geopotencial son planas a través de ésta (fig. 1).

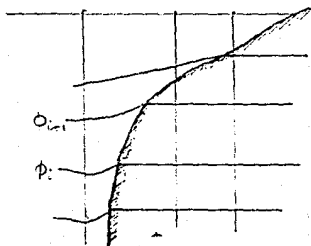


fig. 1

El otro criterio consiste en suponer (al menos para la zona involucrada) el nivel de referencia en la interfase entre el océano y la barrera. Ambos criterios son equivalentes, pues al suponer que las líneas de altura dinámica son planas, la velocidad a partir de la interfase se mantendrá constante y al suponer cero la velocidad en un nivel por debajo de la interfase, ésta será constante hasta ese nivel.

Este criterio fué el que siguió Roden (1972), con la ventaja de tener una malla de muestreo horizontal muy cerrada.

El problema surge en muchos casos, cuando a causa del talud se tiene un área considerable en la que no puede suponerse un transporte cero, sobre todo porque en muchos casos es ahí donde se observan las corrientes más intensas. En este caso, la solución correcta es aumentar la densidad de muestreo en esas zonas, pero esto por diversas razones (como el riesgo de golpear los instrumentos al derivar el buque) no siempre es posible. Más adelante se continúa con la discusión de este problema.

Otro caso que también se presenta con frecuencia, representado en la fig. 2, es aquel en que el muestreo se realiza a distintas profundidades y se busca homogeneizar una base de datos. Este problema fué abordado por Veronis (1982) haciendo decaer el sisayamiento (gradiente de la velocidad) linealmente hasta cero en el fondo a partir del último nivel de muestreo. Esto le da continuidad a la velocidad y a la derivada de la velocidad. Se ha observado que la derivada de la velocidad disminuye al aumentar la profundidad, por lo que tiene sentido este ajuste.

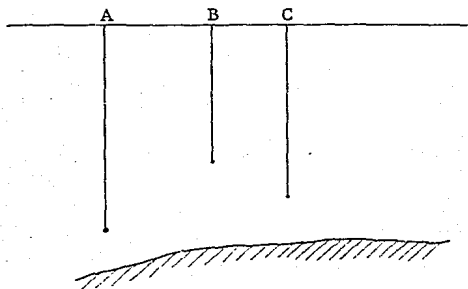


fig. 2.- En esta figura, se esquematiza el caso de muestreo a distintas profundidades en una zona sin barreras físicas.

Este procedimiento puede generalizarse al caso representado en la fig. 2 en el que coexisten una barrera y un área considerada importante por su transporte. Este criterio fué el que se aplicó en los casos en que fué necesario extrapolar datos, aunque en general los datos en la campaña Bermejo I son bastante completos (ver Tabla 4.1). El problema de extrapolación sólo se presentó cerca de las fronteras.

El desarrollo para obtener el algoritmo es el siguiente:

Consideremos que se tienen dos estaciones A y B, donde A tiene un muestreo hasta la profundidad z_0 , y B hasta la profundidad h . $\Delta_0 = \phi_1 - \phi_2$ y $\partial\Delta/\partial z_0$ evaluados en z_0 , son conocidos (fig. 3).

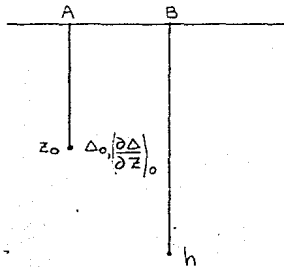


fig. 3.- Esquema de relleno de calas donde z_0 es la estación menos profunda y h el punto hasta el cual se extrapola el campo de velocidad geostrofico.

Se desarrolla $\partial\Delta/\partial z$ linealmente a partir de z_0 hasta h , pidiendo que $\partial\Delta/\partial z = 0$ en $z = h$, esto es:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial z} = \left(\frac{\partial\Delta}{\partial z}\right)_0 - \frac{z - z_0}{h - z_0} \left(\frac{\partial\Delta}{\partial z}\right)_0 \quad \text{para } z_0 \leq z \leq h \quad \dots (16)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\Delta}{\partial z} = \left(\frac{\partial\Delta}{\partial z}\right)_0 \left(\frac{h - z}{h - z_0}\right)$$

Integrando a partir de z_0 se obtiene:

$$\Delta = \Delta_0 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial z} \right)_0 \frac{1}{h - z_0} \int_{z_0}^z (h - z) dz$$

$$= \Delta_0 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial z} \right)_0 \frac{z - z_0}{2(h - z_0)} (2h - z_0 - z) \dots (17a)$$

que cumple con $\Delta(z_0) = \Delta_0$ y $\Delta(h) = \Delta_0 + (\partial \Delta / \partial z)_0 (h - z_0/2) \dots (17b)$

En la ecuación (17b) el segundo término de la derecha es el término de incremento o corrección en $z = h$.

La ec. (17a) representa el algoritmo que se utilizó para extrapolar datos en las estaciones incompletas. $(\partial \Delta / \partial z)_0$ se calculó a partir de los últimos 20 datos mediante un ajuste de mínimos cuadrados. Δ_0 se igualó a $(\Phi_2 - \Phi_1)_{z_0}$.

Con la ecuación (17a) se realizaron pruebas para observar el comportamiento de la velocidad con este ajuste y se observó que cuando $|(\partial \Delta / \partial z)_0|$ es relativamente grande y el intervalo $(h - z_0)$ también lo es, se obtienen velocidades irrealmente grandes, por lo que se optó por imponer una cota máxima a $(h - z_0)$, exigiendo que $h - z_0 \leq 50$ mts., observándose con esta condición un comportamiento muy similar al caso en que se tienen datos.

Es importante subrayar, que cualquier criterio que se utilice tiene una componente subjetiva muy grande, pero este ajuste tiene la ventaja de preservar la continuidad en la velocidad y en la derivada de la velocidad, además de hacer tender a cero la derivada de la velocidad al aumentar la profundidad de acuerdo a lo que se observa en los datos reales. Este ajuste es mejor cuando se tienen datos por debajo de la zona de gradientes de velocidad fuertes en las primeras capas superficiales y cuando la extrapolación no se lleva a cabo en un intervalo grande. La zona de gradientes y la evaluación de que es "grande" depende del caso particular. Como muestra del comportamiento de la velocidad con datos reales, la figura 4 representa la gráfica de velocidad geostrofica referida a superficie para las parejas de estaciones en el transecto A-B (ver Cap. 4).

En esta figura se observa que los gradientes de velocidad relativamente grandes se localizan en los primeros 200 mts. Por debajo de los 500 mts., no se observan cambios de signo en la derivada de la velocidad. Estas gráficas sugieren que el intervalo de extrapolación no debe exceder unos 50 mts., debiéndose tener cuidado cuando se aplica a datos que no rebasan los primeros 250 mts.

Como observación final de esta sección, puede sugerirse que al realizar un muestreo cerca del talud, la batimetría de la zona debe tomarse muy en cuenta para evitar en lo posible este problema.

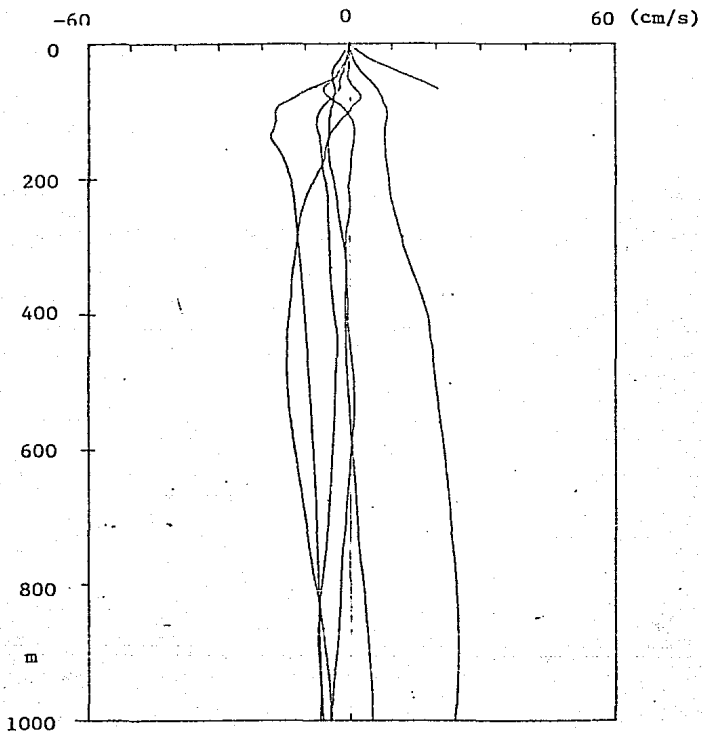


fig. 4.- Gráficas de velocidad vs, profundidad de las primeras siete parejas de estaciones de la Campaña Oceanográfica Bermejo I (ver Cap. 4).

3.4 METODOLOGIA PARA LA DETERMINACION DE AREAS DEL SISTEMA.

En el capítulo anterior se discutió la importancia de estimar los elementos de la matriz A con la mayor precisión posible. Estos elementos están dados por:

$$A_{ij} = \int_j^{j+1} \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \rho(x,z) dz dx \quad \dots (18)$$

en esta ecuación los límites de integración en x están definidos por la posición de las estaciones j y j + 1; los límites de integración en z están definidos por ρ y ρ_{i+1} y son función de x.

Para calcular esta integral se sustituyó por:

$$A_{ij} \approx \int_j^{j+1} [S_{i+1}(x) - S_i(x)] dx \quad \dots (19)$$

haciendo una aproximación conservando volumen y no masa, donde $S_i(x)$ es la función que sigue a la isopícnica i. Esta función se estimó de la siguiente manera: una vez definidas las isopícnas que delimitan las distintas capas, se encontró la profundidad a la cual estas isopícnas cruzan cada estación; posteriormente, junto con los datos de distancia entre estaciones, se ajustó una cúbica por esos puntos y con derivada cero en los extremos. El algoritmo se tomó de Burden y Fairer. El polinomio $S(x)$ que se obtiene se integró y evaluó para cada intervalo entre estaciones. Cuando se tienen varias capas, a cada integral se le restaron las anteriores para obtener el área de esa capa.

Esta opción es distinta a la encontrada en la literatura revisada, en donde no se señala nada al respecto, salvo en Veronis y Fiadeiro (1982), quienes apuntan que hacen una interpolación lineal.

En forma análoga, se realizó el cálculo de transportes que aparecen en la ecuación matricial $Ac = b$. Estos quedan determinados por:

$$-b_i = \int_j^{j+1} \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \rho(x,z) v(x,z) dz dx \quad \dots (20)$$

donde $-b_i$ es el transporte total entre las isopícnas i e i + 1; v es la velocidad geostrofica relativa a alguna superficie y ρ es la densidad. Este término se calculó como:

$$-b_i = \sum_j \int_j^{j+1} [S_{i+1}(x) - S_i(x)] dx \sum_k (v_{kj} - v_{k+1,j}) \frac{\Delta z}{2} \quad \dots (21)$$

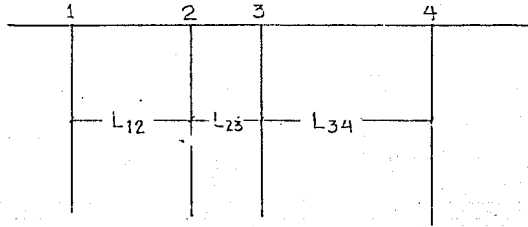
El término dentro de la suma sobre k es una integración numérica trapezoidal en z,

en el intervalo en que se cumple $\rho_i \leq \rho_{kj} \leq \rho_{i+1}$.

La velocidad v_j ó v_{kj} se tomó directamente de las ecuaciones geostroficas y equivale a considerar una velocidad constante en la horizontal en toda la sección comprendida entre las estaciones j y $j+1$. Esto genera aparentemente una discontinuidad en la velocidad, pero al analizar las ecuaciones, esta aproximación puede interpretarse como la velocidad promedio entre las estaciones j y $j+1$.

3.5 INTERPRETACION DE LA VELOCIDAD GEOSTROFICA COMO UNA VELOCIDAD PROMEDIO.

Esto puede demostrarse al calcular el transporte entre dos puntos. Considere mos el caso en que se desea conocer el transporte (o la velocidad promedio) entre dos puntos. Supongamos que tenemos un muestreo con cuatro estaciones colineales y a la misma latitud:



El transporte entre los puntos 1 y 4 calculado utilizando todos los puntos es:

$$T = \frac{v_{12}L_{12} + v_{23}L_{23} + v_{34}L_{34}}{L_{12} + L_{23} + L_{34}} \Delta z$$

T es el transporte total, v_{12} es la velocidad entre las estaciones 1 y 2, L_{12} es la distancia entre los puntos 1 y 2 y en forma análoga para los demás elementos; Δz es el intervalo en que se desea conocer el transporte.

Utilizando la ecuación (8) para sustituir la velocidad geostrofica, se obtiene:

$$T = \frac{\Delta z}{2\Omega \sin \varphi} \left[\frac{\frac{\phi_2 - \phi_1}{L_{12}} L_{12} + \frac{\phi_3 - \phi_2}{L_{23}} L_{23} + \frac{\phi_4 - \phi_3}{L_{34}} L_{34}}{L_{12} + L_{23} + L_{34}} \right]$$

Con un poco de álgebra se llega a la expresión:

$$T = \frac{\Delta z}{2\Omega \sin \varphi} \frac{\phi_4 - \phi_1}{L_{14}}$$

que es exactamente la expresión que se obtiene si se calcula el transporte utilizando el muestreo en 1 y 4. Esto permite reinterpretar el campo de velocidad geostrofico como la velocidad promedio entre dos puntos. En teoría, la velocidad puntual se obtendría al hacer tender a cero el intervalo de muestreo. Este caso puede generalizarse a n puntos de muestreo y su única inexactitud es la no linealidad del término de Coriolis con la latitud.

CAPITULO 4

CIRCULACION EN EL GOLFO DE CALIFORNIA.

4.1 ANTECEDENTES.

4.1.1 INFORMACION GENERAL.

El Golfo de California es la única cuenca de evaporación en el Océano Pacífico. Se encuentra entre 22° 50' y 32° 00' de latitud norte y entre 104° y 115° de longitud oeste, con una orientación sureste-noroeste y tiene una longitud de alrededor de 1,100 Km y un ancho promedio de 150 Km. Está limitado al oeste por la Península de Baja California y al este, en el sur, por el Estado de Sinaloa, y al norte, por el Estado de Sonora. El Golfo de California, a diferencia de otros mares con alta evaporación como el Mediterráneo, tiene una boca profunda y ancha (fig.1). La profundidad en el Golfo es variable, pero en términos generales disminuye hacia el norte presentando varias fosas a lo largo de su eje.

4.1.2 CARACTERISTICAS CLIMATICAS.

El Golfo de California presenta un clima de tipo monsonico, pues está fuertemente influenciado por el continente. Los vientos dominantes en el área del Golfo son del noroeste en invierno y parte de la primavera (de noviembre a mayo), y del sureste el resto del año. La Península de Baja California tiene una alta cordillera longitudinal de entre 1000 y 3000 mts. de altura que relativamente lo aísla de la influencia climática del Océano Pacífico. Los estados de Sonora y Sinaloa tienen un clima muy seco y la precipitación en la costa este varía de 950 mm por año en Cabo Corrientes, Sin. a sólo 100 mm por año en el norte de Sonora. En la Península de Baja California el clima es árido con mayor precipitación en el sur que en el norte, pero menor que en las costas de Sonora y Sinaloa (ver fig. 2).

La radiación en el área es alta, calculada de 200 w m^{-2} a 380 w m^{-2} , siendo más intensa en verano, antes y después de la temporada de lluvias, y teniendo un mínimo en invierno. Durante los meses de septiembre y octubre, ocasionalmente entran al Golfo huracanes que se originan en el sur de México y penetran en el Golfo con vientos que llegan a alcanzar más de 30 m/s.

Como producto de vientos, radiación y precipitación en el Golfo, resulta una cuenca en la que predomina la evaporación sobre la precipitación, incluso en la temporada de lluvias. Se han realizado mediciones en tinas de evaporación ubicadas en estaciones costeras con las que se ha calculado una evaporación promedio de entre 200 y 300 cm por año (Roden 1964). Barberán y Zavala (1985), a partir de datos

fig. 1
Golfo de California.
Ubicación.

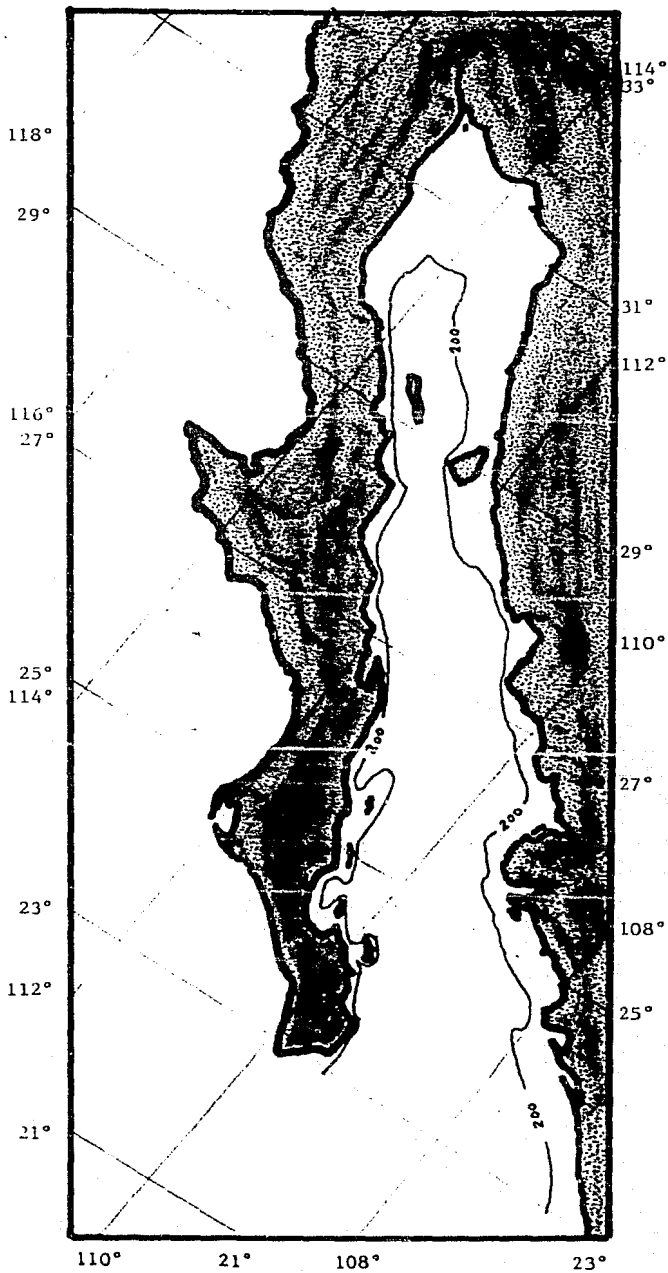
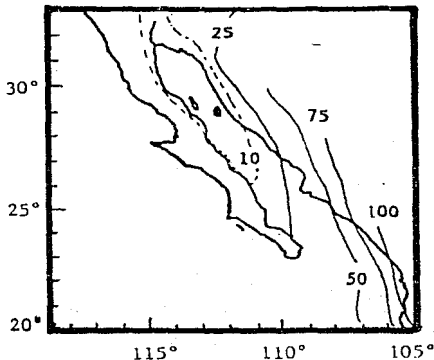


fig. 2.- Precipitación media anual en cm. Tomado de Roden 1958.



de la campaña Bermejo I (los mismos utilizados en este trabajo), estimaron la evaporación en la zona sur del Golfo para el invierno de '84 en 7 mm por día. Esta característica hace del Golfo una zona de producción de agua salada, relativamente caliente.

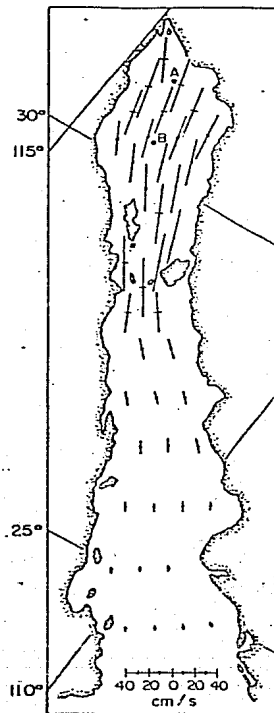
4.1.3 CIRCULACION.

La batimetría del Golfo, su configuración geográfica y su clima, afectan al Golfo de tal forma que su circulación puede dividirse en dos zonas características: una zona delimitada al norte por Punta Centoral con alta influencia de la marea en su circulación, y una zona sur caracterizada por una circulación de tipo oceánico (fig. 3).

Los altos rangos de marea en la parte norte hacen que esa zona se caracterice por su alta mezcla vertical producida por las corrientes de marea. En el delta del Río Colorado, la marea alcanza hasta 10 mts. en zizigias (Roden y Emilsson). En el Canal de Ballenas, entre Isla Angel de la Guarda y la Península se han encontrado corrientes de marea de hasta 35 cm/s y señales de una intensa mezcla vertical (que se ha observado por la distribución vertical de temperatura y oxígeno). Más al norte, el Golfo es más somero, lo que contribuye a una intensa mezcla vertical.

En la parte sur del Golfo (considerada al sur de Punta San Carlos en 28° N), las corrientes y mezcla por marea son mucho menores (fig. 3), predominando aspectos de tipo oceánico en la circulación. Emilsson y Alatorre (1980) han señalado que la circulación en esta área está determinada por la circulación del océano ..

fig. 3 .- Rangos de marea M_2 .
 Modelados por Stock 1976,
 presentado por Alvarez-
 Borrego.



adyacente, aunque hoy es más o menos claro que existen otras componentes importantes en la circulación de esa área. Los vientos predominantes del noroeste en invierno producen un afloramiento en la costa oriental del Golfo, estudiados por Mee (1985). Este afloramiento es importante para las pesquerías en la zona, debido a que existen varias lagunas costeras en Sinaloa en las que pasan parte de su vida especies de crustáceos y moluscos, que pueden ser afectados por la variación inter anual del clima oceánico.

Otra componente de la circulación es debida a la alta evaporación en la cuenca, que provoca cambios significativos de densidad en la capa superficial y que in cide en la circulación geostrofica. Estos fenómenos, el flujo de momento producido por los vientos y la evaporación, junto con la circulación adyacente, determinan el patrón de circulación en la parte sur del Golfo de California. La estimación de

los flujos en el Golfo está parcialmente resuelta (ver Tabla 1).

TABLA 1.- ESTIMACIONES DEL FLUJO EN LA BOCA DEL GOLFO DE CALIFORNIA.

AUTOR	FECHA	FLUJOS ESTIMADOS	LIMITES DE INTEGRACION
Roden	1958	1.17 a 1.19 Sv	0 - 500 mts.
	Julio 1967	3.25 a 3.65 Sv	0 - 1100 mts.
Warsh & Warsh (1971)	Feb. 1957	2.5 a 3.5 Sv	0 - 1100 mts.
	Mayo 1959	2.5 a 3.5 Sv	0 - 1100 mts.
Roden (1972)	1969	10 a 12 Sv	0 - 1500 mts.
Santiago (1980)	Julio 1977	5.5 Sv	0 - 900 mts.
	Ago. 1977	2.87 Sv	0 - 900 mts.

$$1 \text{ Sv} = 1 \times 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Sv = Sverdrup

El análisis de las masas de agua en la zona sur del Golfo de California ha sido realizado con bastante precisión. En esta zona se han detectado tres tipos de agua: agua caliente del Pacífico tropical oriental con salinidades de 34.65 a 34.85; agua fría de la corriente de California con salinidad menor de 34.60, y agua del Golfo de California con salinidad mayor de 34.90.

Existe un análisis muy fino de la distribución de las masas de agua a partir de datos de nov-dic de 1969 debido a Roden (1972). Este análisis es reproducido en Alvarez-Borrego y Roden y Emilsson (en prensa), (fig. 4). Roden distingue varias capas en la boca del Golfo a partir del análisis de la salinidad. En la superficie señala la presencia de agua caliente y salada de hasta 35.20 originada en el Golfo y con mayor presencia en la costa occidental; esta agua se encuentra entre la superficie y los 150 mts. de profundidad. Por debajo de esta capa se encuentran alternados máximos y mínimos de sal, y a partir de los 900 mts. se nota un crecimiento muy lento y homogéneo de sal hacia el fondo (fig. 4).

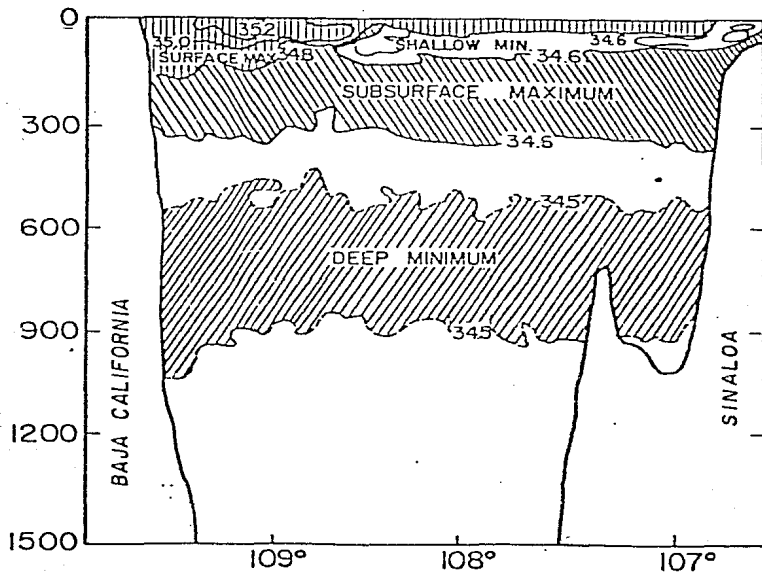


fig. 4.- Salinidad entre Arroyo de Vinorama y Mazatlán. Roden 1969.

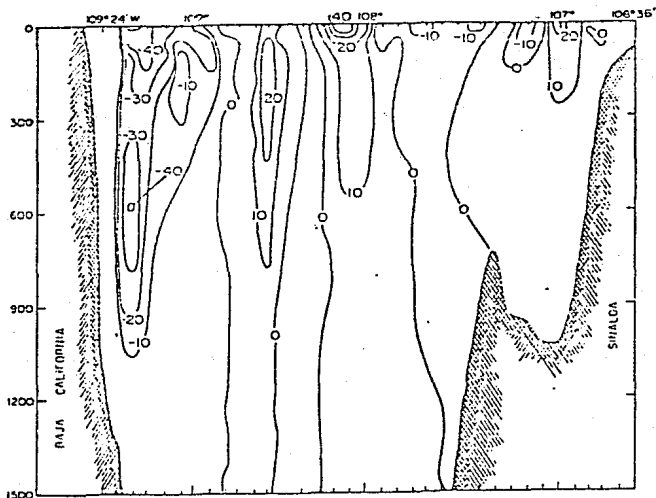


fig. 5.- Campo de velocidad geostrofica referida a 1500 mts. correspondiente a la fig. 4.

Se ha encontrado un frente termohalino en aguas superficiales bien definido cerca de Cabo San Lucas que se prolonga en dirección suroeste. Este frente presenta cambios en su posición, variando en dirección este-oeste, y su ubicación está ligada a la penetración de agua de la corriente de California.

Roden (1972) hizo un estudio de la circulación geostrófica con nivel de referencia en los 1500 mts., entre Arroyo de Vinorama, Baja California y Mazatlán. En este estudio (fig. 5) se observa un flujo hacia el sur en la costa occidental de superficie a fondo y con velocidades de hasta 55 cm/s en la superficie. Este flujo se extiende hasta unos 40 Km de la costa hacia el este y después se observan flujos alternados predominantemente hacia el norte y con velocidades menores, aunque muy localmente se alcanzan velocidades de 40 cm/s. Es sobresaliente que se observan velocidades de 20 cm/s a profundidades de 900 mts. Roden estima en este estudio un transporte hacia el norte de $10 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{s}$ y de $12 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{s}$ hacia el sur con un imbalance de $2 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{s}$, y supone que el imbalance puede compensarse con el transporte por debajo de los 1500 mts.

Warsh y Warsh (W & W, 1971) hacen un análisis de transporte geostrófico, utilizando datos de tres campañas distintas. Parten interpolando los datos a profundidades standard*; forman una serie de cajas determinadas en la vertical por las profundidades standard, y en la horizontal por la posición de las estaciones oceanográficas y con éstas realizan permutaciones variando el nivel de referencia en las distintas cajas (una por cada columna). W & W escogen de entre las permutaciones, aquéllas que presentan un imbalance neto menor de 10%. De entre estas posibilidades escogieron las que tenían un transporte neto mayor de 2 Sv. Eliminaron las que tenían un nivel de referencia por encima de los 75 mts., y de éstas escogieron las que concordaron con el criterio de Defant. En algunos casos partieron de 42000 permutaciones y en otros de más, en los que también pidieron un balance de sal.

Sus resultados, a pesar de todo, muestran un flujo más o menos coherente (figs. 6, 7 y 8).

En 1980, Santiago evaluó la circulación en la boca del Golfo de California, aplicando inicialmente un nivel de cero movimiento en el fondo. Posteriormente planteó hacer un balance por capas delimitadas por isobaras y aumentó una constante en la velocidad en cada capa para igualar el flujo de entrada al de salida. Con este criterio y datos de julio de 1977 de la campaña CIMACO I, obtuvo flujo hacia el sur en la costa occidental con velocidades superficiales de hasta 30 cm/s y flu

* La UNESCO recomienda tomar datos con botellas y termómetros reversibles en una serie de niveles denominados profundidades standard.

fig. 6 .-
 Velocidad geostró-
 fica en julio de
 1967. W & W.
 Altata-Punta Arena

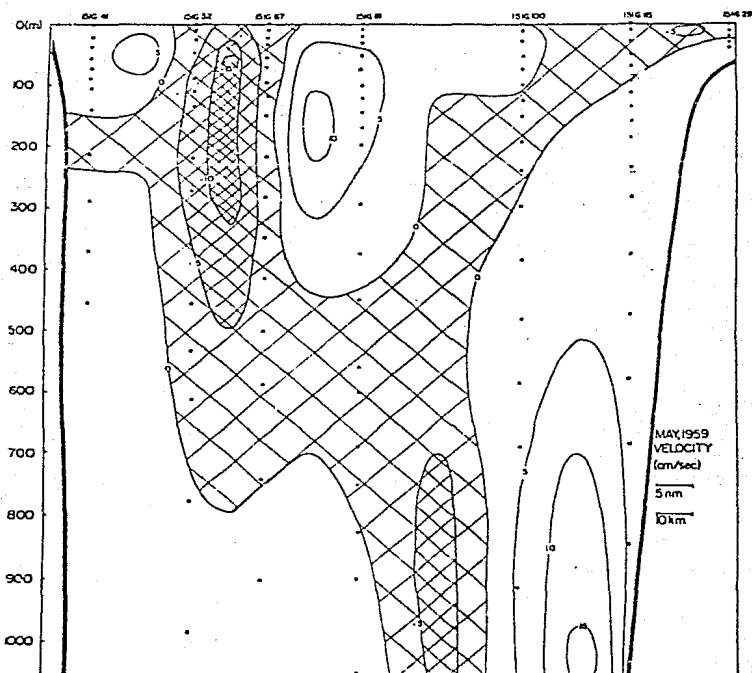
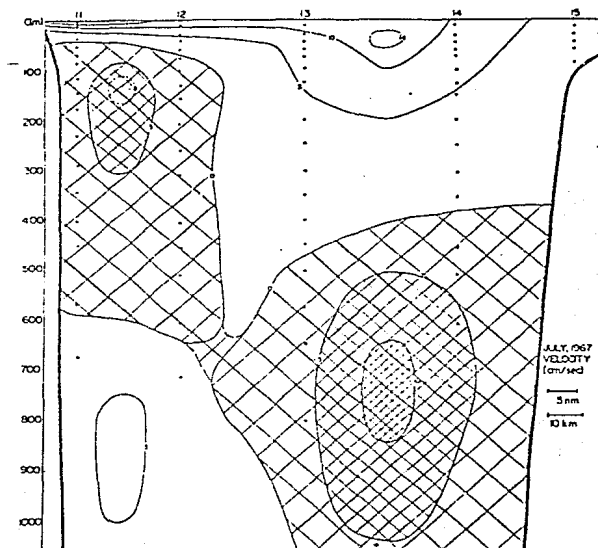
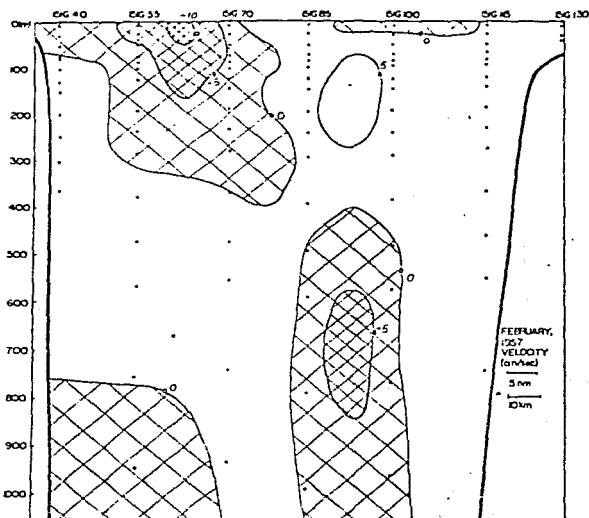


fig. 7.- Velocidad geostrófica en mayo de 1959. W&W. Altata- Punta Arena.



jos alternados de entrada y salida hacia la costa oriental con velocidades de hasta 20 cm/s (fig. 9).

Estimaciones de velocidad geostrofica para otras zonas distintas de la boca del Golfo se encuentran en Emilsson y Alatorre (1980) e incluyen corrientometría directa. En la tesis profesional de Galicia existe una discusión entre resultados obtenidos por corrientometría y método dinámico, pero inexplicablemente no presenta las figuras que representan el flujo por método dinámico. Galicia señala que encontró concordancia entre transportes calculados por corrientometría y los del método dinámico (geostrofia).

En resumen, la parte más estudiada del Golfo de California es la boca o zona de transición. Existe un esquema general de la circulación en esa zona aunque no es así para otras zonas. Se ha detectado la producción de agua del Golfo y existen evaluaciones de la evaporación en el área. Se conocen los principales mecanismos que regulan la dinámica del Golfo de California. En la zona sur se conocen circulación adyacente, vientos y evaporación, y en la zona norte, evaporación, vientos y mareas. Los problemas más importantes por resolver son: entender la circulación en la parte media (aunque se tienen algunas ideas sobre giros superficiales), y evaluar en forma más precisa los transportes, el campo de velocidad geos-

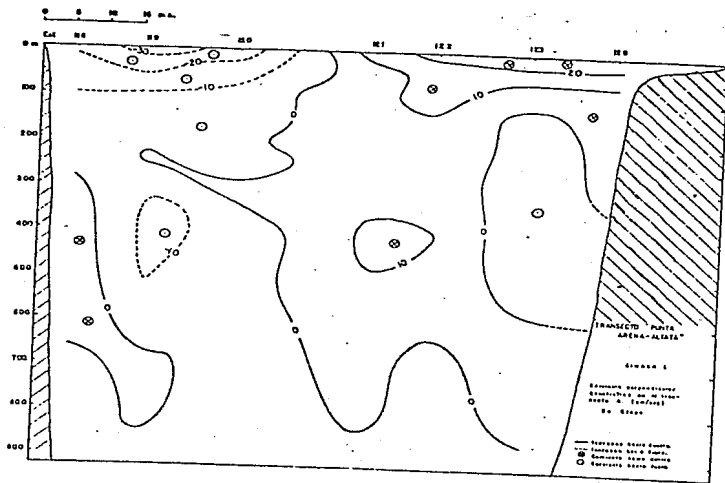


fig. 9 .- Campo de velocidad geostrófica entre Altata y Punta Arena obtenido por Santiago con datos de agosto de 1977 (Campana CIMACO I)

⊙ flujo hacia el sur

⊗ flujo hacia el norte

trófica absoluto, y conocer las variaciones estacionales e interanuales, sus causas y su relación con la variación en el clima regional.

4.2 CAMPAÑA BERMEJO I.

4.2.1 INFORMACION GENERAL.

La Campaña Oceanográfica Bermejo I se llevó a cabo entre el 21 de enero y el 10 de febrero de 1984 a bordo del B/O "El Puma" de la Universidad Nacional Autónoma de México cubriendo la parte sur del Golfo de California, la zona exterior del Golfo y un estudio en la vecindad de Isla Socorro (en el Archipiélago de Revillagigedo).

En esta campaña, dentro de los estudios de física del océano, se lanzaron 93 calas con CTP-O (conductividad, temperatura, presión y oxígeno disuelto), botellas Niskin, termómetros reversibles, y se tiraron cuerpos de deriva. La red de estaciones se muestra en la fig. 10 y en la Tabla 2.

Los estudios físicos de la campaña quedan enmarcados dentro del Proyecto COAMEX (Climatología Oceánica de las Aguas Mexicanas). Con el objeto de analizar algunos procesos físicos notorios en esta campaña, se presentan las gráficas que mejor ilustran el proceso y los datos de mayor interés. Las figuras con # han sido tomadas de Gallegos, A. et. al, 1985.

4.2.2 CAPA SUPERFICIAL.

En un análisis del perfil* de salinidad que incluye todas las estaciones, correspondiente al transecto* A-B, se observa en la superficie (entre 0 y 40 mts.) agua con salinidad entre 34.85 y 34.92 (figs. 13, 16), subsuperficialmente (entre 40 y 120 mts.) se observan dos tipos de agua: agua de alta salinidad de más de 34.95, y agua de baja salinidad (menor de 34.7). Por debajo de los 120 mts. y hasta los 250 mts. se observan gradientes horizontales de sal significativos. Más abajo de esta profundidad, el rango de salinidad en la horizontal es menor de .05 y la salinidad siempre es menor de 34.75 (figs. 16, 18). Al analizar la salinidad en transectos más al norte (C-D, E-F, G-H, I-J) (figs. 19-22), se observa en la capa superficial mayor salinidad conforme crece la latitud, alcanzando valores mayores de 35.15 en el transecto I-J. En este transecto, por debajo de los primeros 250 mts., el rango de variación horizontal en la salinidad es muy pequeño (menos de 0.05) y no se observa una variación significativa norte-sur (fig. 22). Todo esto muestra el proceso de evaporación que sufre el agua superficial del que pueden subrayarse los siguientes puntos:

*Se llama transecto a los cortes en dos dimensiones que muestran la distribución vertical y horizontal de algún parámetro en una zona geográfica (fig. 11), y perfiles a las gráficas de un parámetro contra otro para alguna zona o grupo de estaciones (fig. 15).

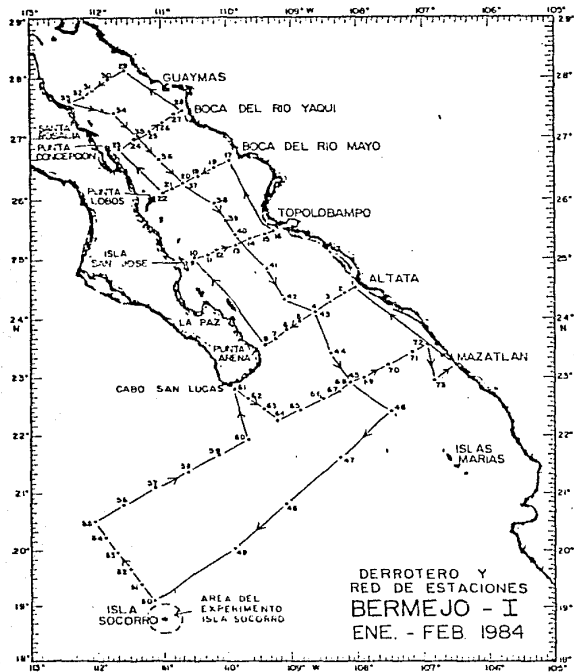


fig. 10.- Derrotero y red de estaciones de la
Campana Oceanográfica Bermejo I.

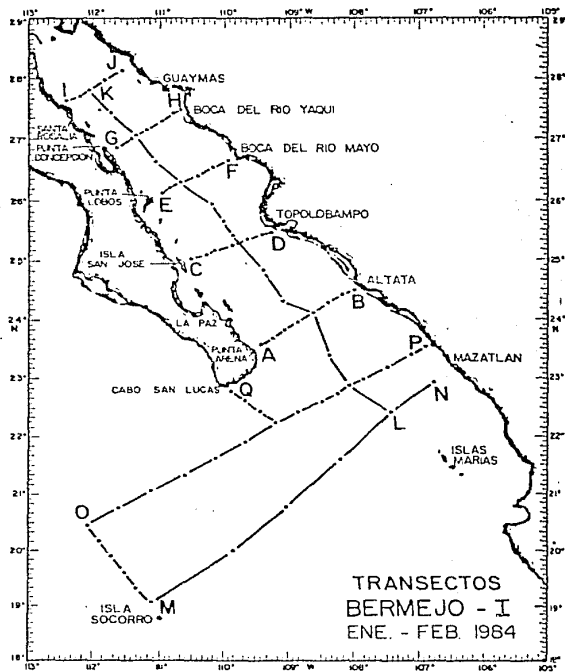


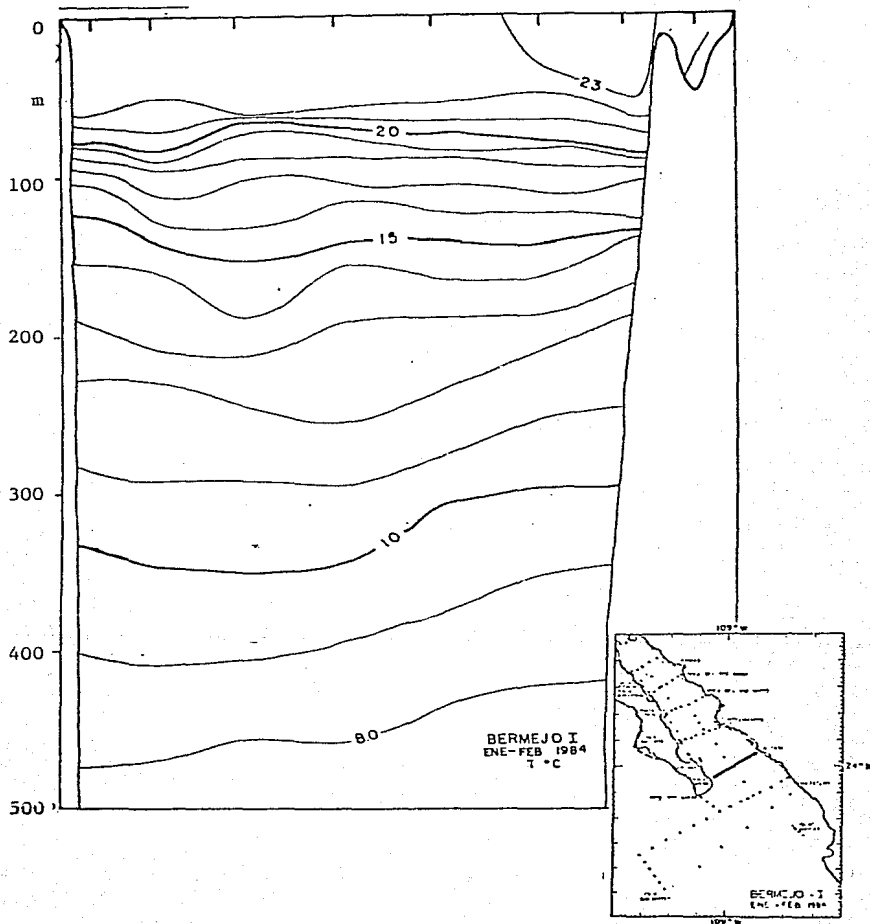
fig. 11.- Transectos de la Campana Oceanográfica
Bermejo I.

No. EST.	No. CALA	POSICION		FECHA	HORA LOCAL	PROF. MAX. CTP-O.
		LAT.	LONG.			
1	1	24°31.0	107°59'.4	22/Ene/84	12:00	30
2	2	24 26.9	108 10.2	22/Ene/84	14:00	201
3	3	24 18.8	108 23.2	22/Ene/84	18:30	1005
4	4	24 09.1	108 36.7	22/Ene/84	23:00	1006
5	5	23 58.4	108 51.1	23/Ene/84	02:30	1005
6	6	23 50.4	109 04.2	23/Ene/84	06:00	1002
7	7	23 41.8	109 15.5	23/Ene/84	10:00	1005
8	8	23 35.9	109 25.2	23/Ene/84	12:30	1002
9	9	25 03.1	110 28.4	23/Ene/84	23:00	405
10	10	25 03.1	110 28.4	24/Ene/84	02:00	250
11	11	25 06.6	110 17.8	24/Ene/84	03:00	1001
12	12	25 10.2	110 07.8	24/Ene/84	09:00	1002
13	13	25 15.6	109 52.6	24/Ene/84	14:00	1001
14	14	25 21.1	109 37.3	24/Ene/84	19:00	1002
15	15	25 25.1	109 26.5	24/Ene/84	23:00	1005
16	16	25 28.1	109 16.5	25/Ene/84	02:00	19
17	17	26 39.5	109 55.6	25/Ene/84	12:30	27
18	18	26°31'.8	110°10'.1	25/Ene/84	15:00	752
19	19	26 23.5	110 26.3	25/Ene/84	21:00	999
20	20	26 15.5	110 42.5	26/Ene/84	03:00	997
21	21	26 10.0	110 52.0	26/Ene/84	09:30	804
22	22	26 06.4	110 59.3	26/Ene/84	11:00	501
23	23	26 50.8	111 38.9	26/Ene/84	18:00	502
24	24	27 00.6	111 25.5	26/Ene/84	22:00	1002
25	25	27 07.0	111 12.5	27/Ene/84	02:30	1000
26	26	27 16.9	110 57.0	27/Ene/84	07:00	1002
27	27	27 25.1	110 47.0	27/Ene/84	11:00	750
28	28	27 28.0	110 42.5	27/Ene/84	16:00	299
29	29	28 06.0	111 35.5	27/Ene/84	21:30	200
30	30	27 58.1	111 50.7	27/Ene/84	23:30	401
31	31	27 47.8	112 04.2	28/Ene/84	02:00	998
32	32	27.43.3	112 14.7	28/Ene/84	07:00	1003
33	33	27 36.5	112 26.3	28/Ene/84	09:00	101

TABLA 2.- Datos sobre las calas con CTP-O en la Campaña Bermejo I.

No. EST.	No. CALA	POSICION		FECHA	HORA LOCAL	PROF. MAX. CTP-0
		LAT.	LONG.			
34	34	27°22'0	111°43'9	28/Ene/84	12:00	1002
35	35	27 02.7	111 22.9	28/Ene/84	18:00	1624
36	36	26 38.0	111 03.5	29/Ene/84	04:00	1002
37	37	26 15.5	110 47.3	30/Ene/84	11:00	1624
38	38	25 57.0	110 12.0	30/Ene/84	15:00	1001
39	39	25 40.2	110 00.1	30/Ene/84	22:00	1624
40	40	25 26.5	109 52.9	31/Ene/84	05:00	1589
41	41	24 52.3	109 23.3	31/Ene/84	15:00	1003
42	42	24 20.0	109 07.2	31/Ene/84	22:00	1624
43	43	24 09.0	108 36.5	1/Feb/84	07:00	1400
44	44	23 26.0	108 23.5	1/Feb/84	14:00	1624
45	45	22 56.8	108 07.5	2/Feb/84	02:00	1537
46	46	22 27.9	107 28.1	2/Feb/84	12:00	1624
47	47	21 39.5	108 15.8	2/Feb/84	21:00	1622
48	48	20 50.0	109 05.0	3/Feb/84	05:00	1622
49	49	20 05.1	109 51.2	3/Feb/84	21:00	1624
50	50	19 09.7	111 02.9	6/Feb/84	05:00	1008
51	51	19°26'0	111°17'5	6/Feb/84	13:00	1624
52	52	19 42.5	111 20.8	6/Feb/84	16:00	1003
53	53	19 59.8	111 39.1	6/Feb/84	18:30	1004
54	54	20 16.2	111 50.0	6/Feb/84	21:00	1001
55	55	20 32.2	112 01.6	7/Feb/84	02:00	1624
56	56	20 48.9	111 34.5	7/Feb/84	07:30	1005
57	57	21 07.7	111 04.8	7/Feb/84	11:00	1001
58	58	21 23.2	110 35.9	7/Feb/84	15:30	999
59	59	21 41.0	110 06.0	7/Feb/84	18:00	1623
60	60	21 58.3	109 36.7	8/Feb/84	03:00	998
61	61	22 50.5	109 53.0	8/Feb/84	09:00	400
62	62	22 40.6	109 38.0	8/Feb/84	11:00	1005
63	63	22 29.9	109 23.9	8/Feb/84	13:30	1000
64	64	22 17.9	109 15.4	8/Feb/84	20:00	1623
65	65	22 29.1	108 51.4	9/Feb/84	00:30	1003
66	66	22 40.9	108 28.4	9/Feb/84	04:00	999
67	67	22 47.4	108 16.1	9/Feb/84	08:00	1007
68	68	22°54'5	108°05'8	9/Feb/84	15:00	1624
69	69	23 02.0	107 52.2	9/Feb/84	17:00	1003
70	70	23 15.0	107 30.4	9/Feb/84	20:30	1010
71	71	23 27.9	107 08.4	9/Feb/84	22:30	350
72	72	23 36.6	106 55.1	9/Feb/84	01:30	30
73	73	23 01.2	106 48.9	10/Feb/84	06:00	784

TABLA 2 (Continuación)



#fig. 12.- Distribución vertical de temperatura ($^{\circ}\text{C}$),
Transecto A-B. 22-23/ENE/84.

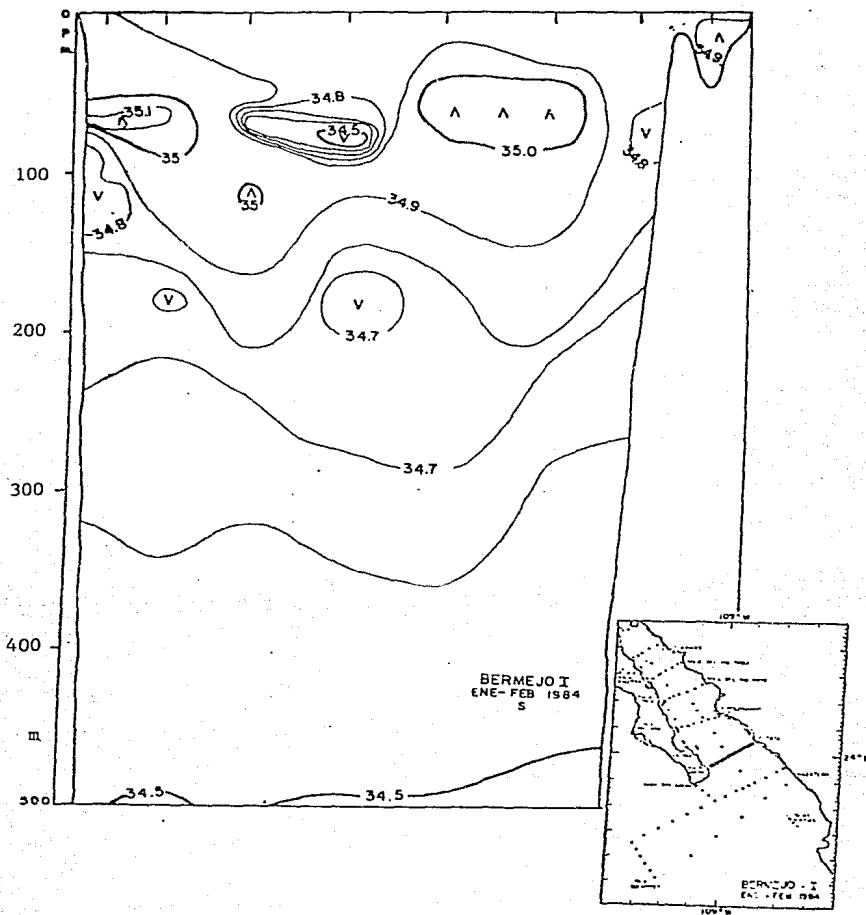
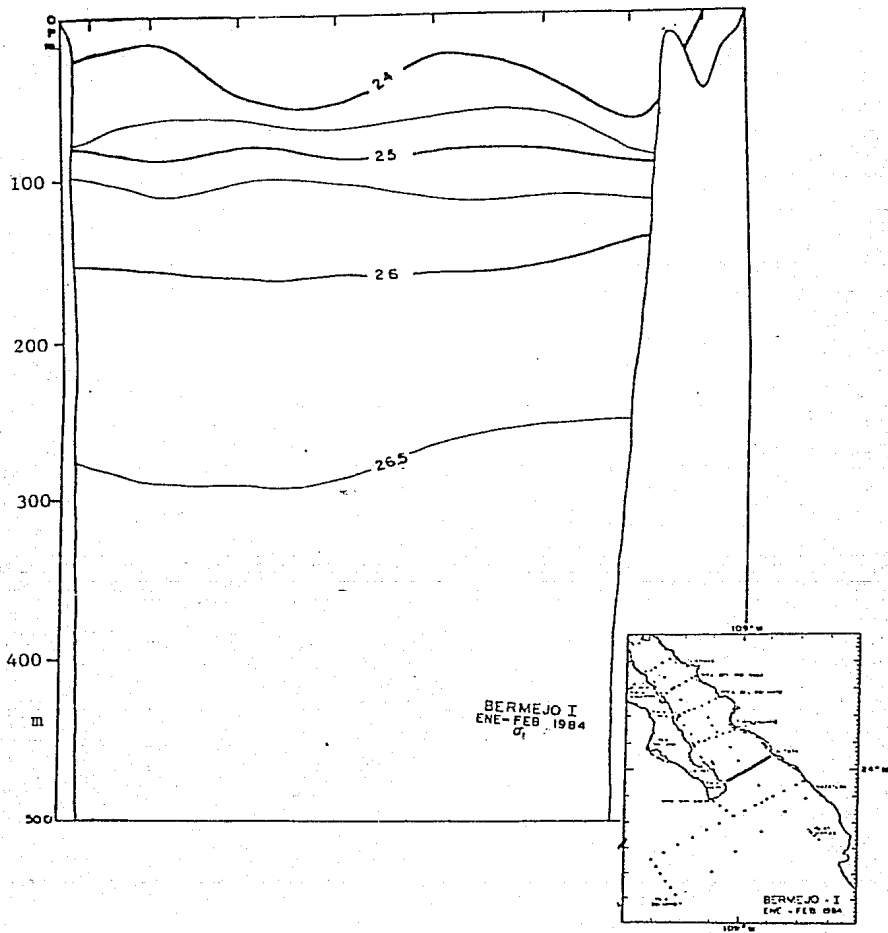
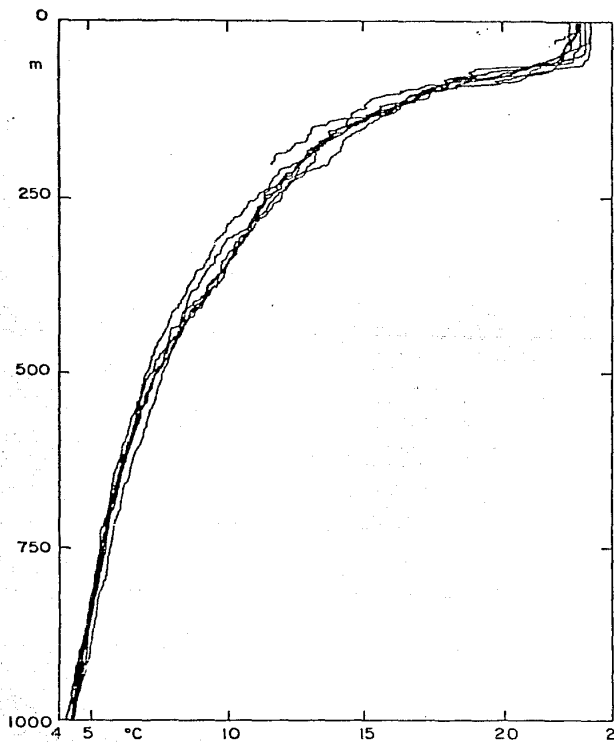


fig. 13.- Distribución vertical de salinidad (salinidad práctica).

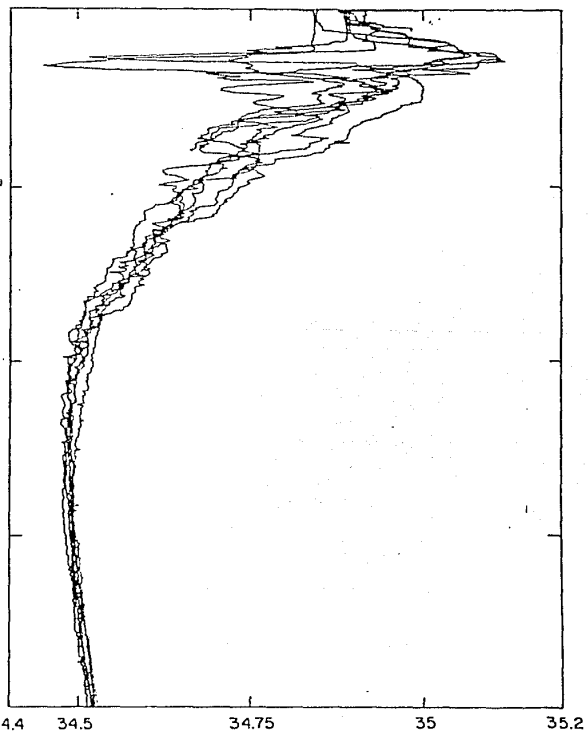
Transecto A-B.



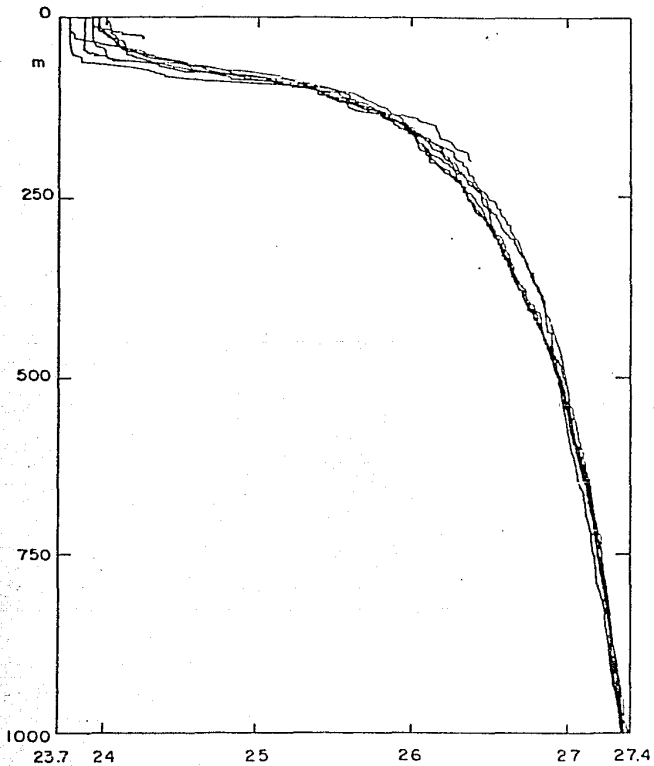
#fig. 14.- Distribución vertical de densidad (σ_t).
Transecto A-B.



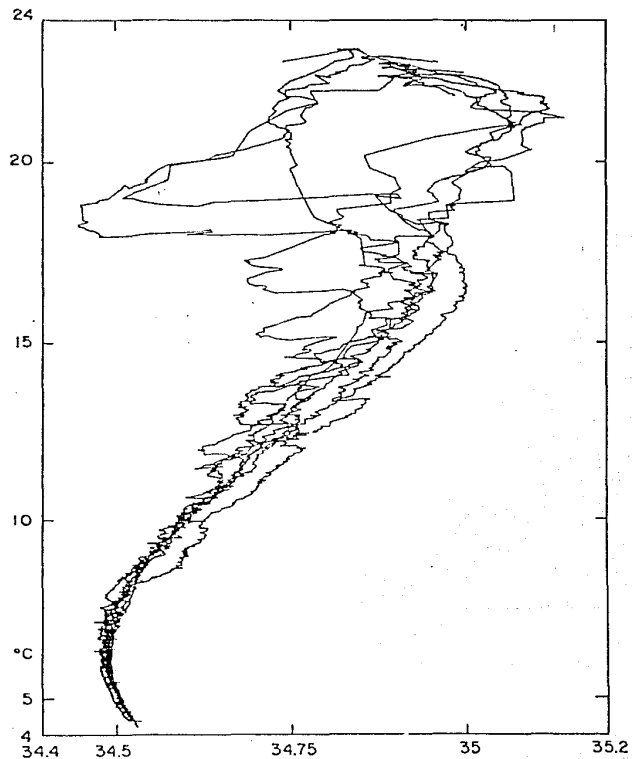
#fig. 15.- Perfil de temperatura. Transecto A-B.



#fig. 16.- Perfil de salinidad. Transecto A-B (en salinidad práctica).



#fig. 17.- Perfil de σ_t en el transecto A-B.



#fig. 18.- Diagrama T-S en el transecto A-B.

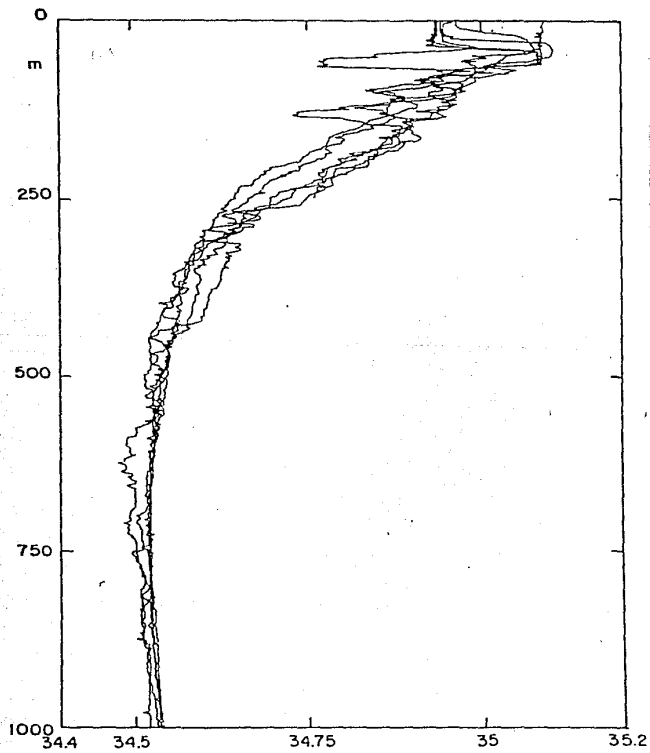


fig. 19.- Perfil de salinidad en el transecto C-D.

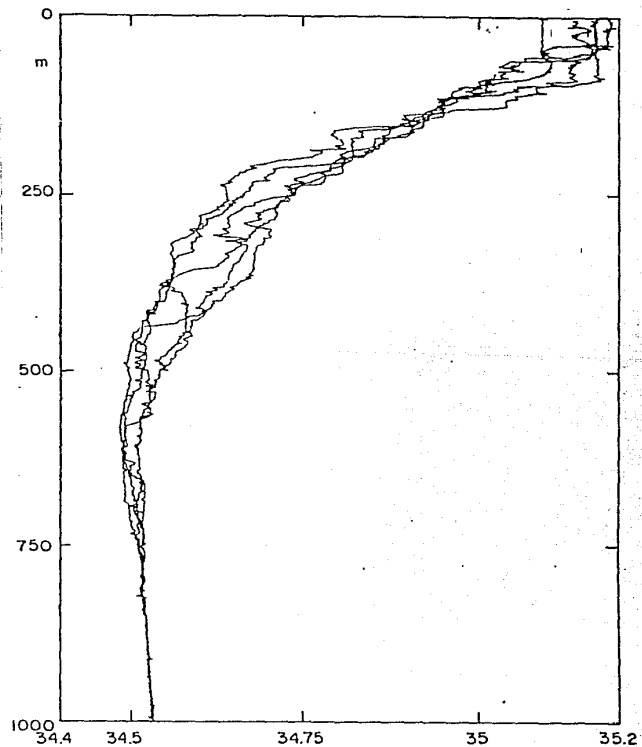


fig. 20.- Perfil de salinidad en el transecto E-F.

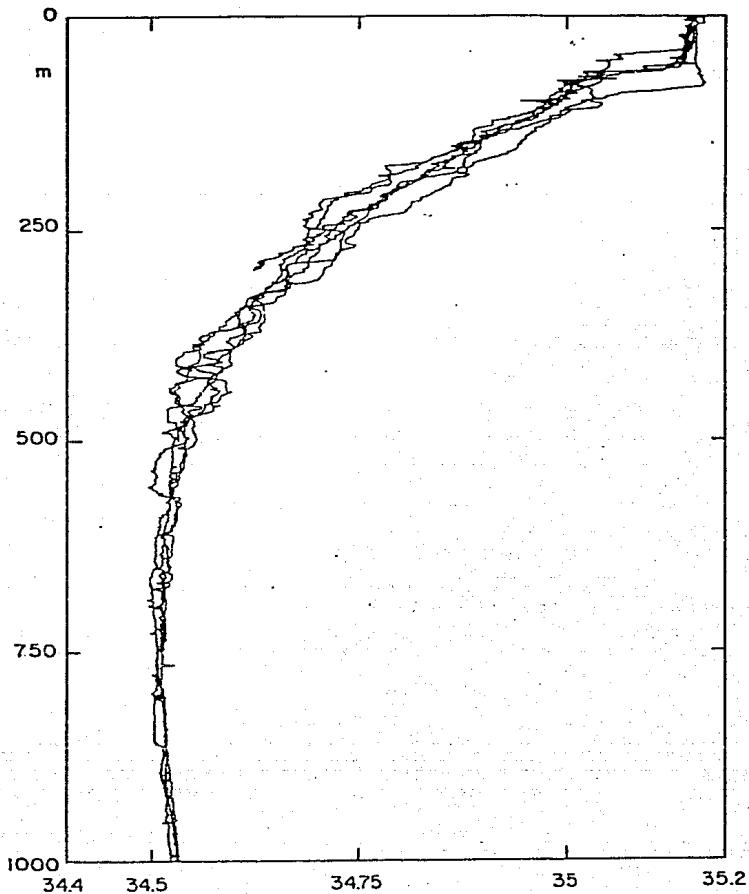


fig. 21.- Perfil de salinidad en el transecto G-H.

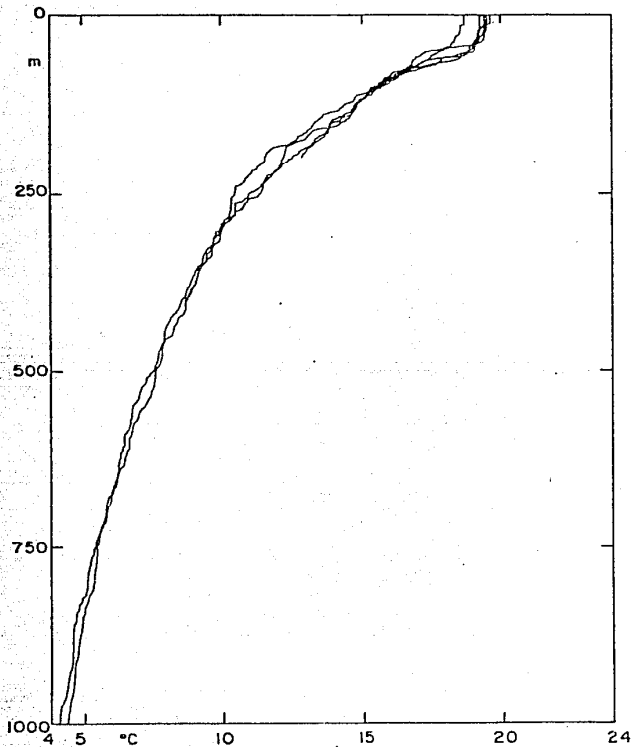


fig. 23.- Perfil de temperatura en el transecto I-J.

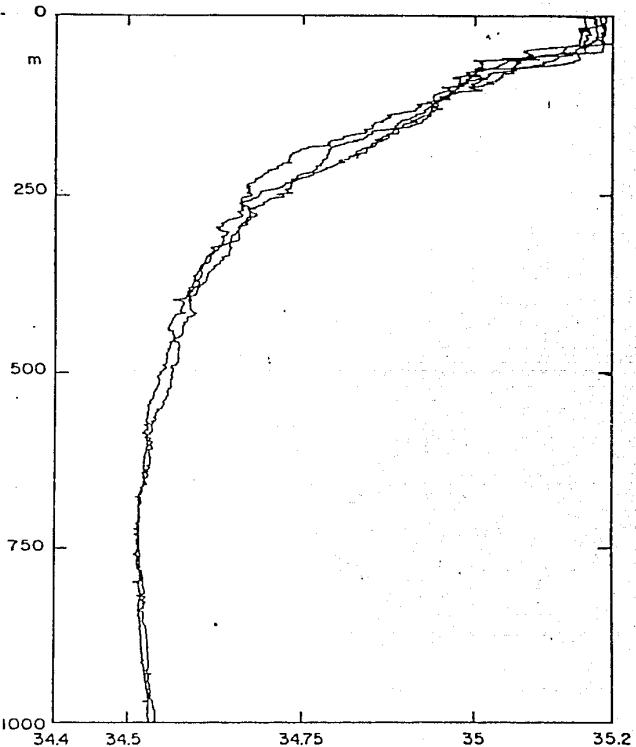


fig. 22.- Perfil de salinidad en el transecto I-J.

- a) El aumento de la salinidad hacia el norte indica que esa agua ha sufrido una mayor evaporación.
- b) La influencia de la evaporación en el Golfo no se nota por debajo de los 250 mts. en la boca (transecto A-B), presentando una influencia clara só lo en los primeros 120 mts.

En el punto a) se señala que el agua ha sufrido mayor evaporación en la parte norte, pero esto en principio puede deberse a que la tasa de evaporación es mayor en esa zona, ó a que el agua ha estado expuesta por más tiempo a este proceso. El análisis de los perfiles T-S para el agua de superficie en toda el área, muestra que existe una relación lineal entre estos parámetros (Barberán y Zavala 1985), lo que indica que el agua sufrió una tasa de evaporación constante en el tiempo (suponiendo una radiación constante). En ese sentido, esto implica que el agua superficial más al norte tiene una salinidad más alta porque ha estado más tiempo en contacto con la atmósfera y no debido a que la tasa de evaporación sea mayor en el norte. Esto sugiere que para la capa superficial el agua entra al Golfo por la superficie, gana densidad y sale subsuperficialmente. A partir de este análisis es posible calcular el tiempo de residencia, la velocidad media y la cantidad de agua que se produce por este proceso. Los perfiles de densidad en el Golfo (figs. 17 y 24) muestran una menor estratificación hacia el norte, lo que refuerza esta hipótesis.

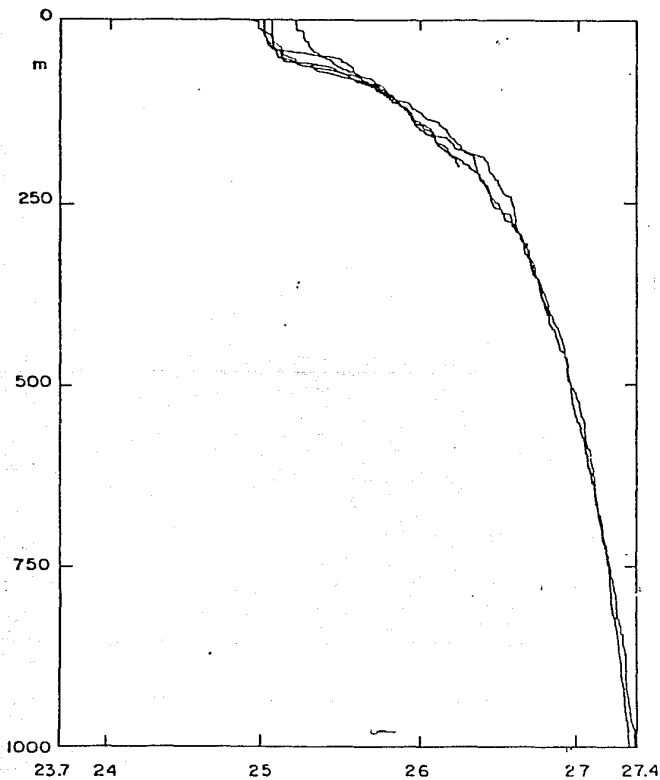
Otra confirmación la constituye la topografía de la isopícnica de $\sigma_t = 25.0$ (fig. 25) en que se observa un cambio en la profundidad, desde la superficie en el transecto I-J, hasta unos 120 mts. en la boca del Golfo (transecto A-B).

El punto b) señala que la influencia de la evaporación no se nota por debajo de los 250 mts. Esto se deduce de los perfiles de densidad y de las propiedades T-S del agua en la boca (figs. 13-18). En el transecto I-J, σ_t varía en la superficie entre 24.95 y 25.2, la salinidad toma valores entre 35.1 y 35.2, y la temperatura entre 19 y 20° C (figs. 22-24). Estas características se observan en agua subsuperficial en la boca a una profundidad menor de 120 mts.

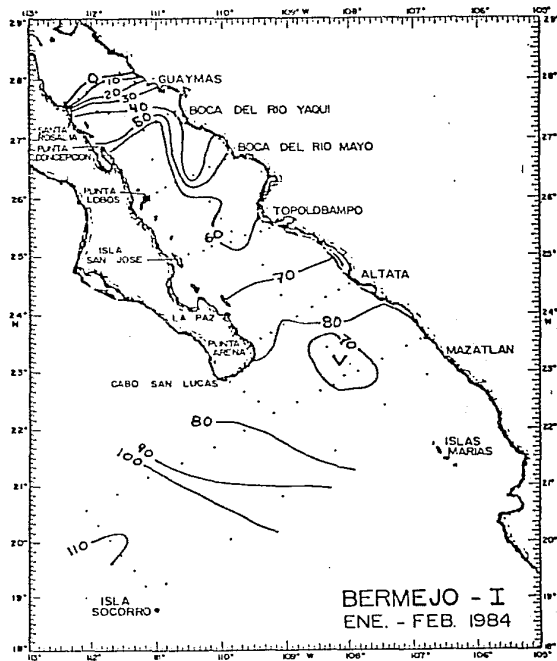
En el transecto A-B (fig. 13) se observa que el agua de alta salinidad se localiza en zonas definidas entre 40 y 110 mts. de profundidad, preferentemente cerca de la costa entre las estaciones 7 y 8 y entre las estaciones 2 y 3. En este mismo transecto, se observa un núcleo de agua de baja salinidad (≤ 34.5) a la misma profundidad (entre 40 y 100 mts.)

La penetración del agua de superficie resulta muy importante para definir la profundidad de la primera capa al utilizar método inverso y cumplir con las condiciones del método.

En resumen, en la capa superficial el flujo promedio tiene una velocidad ha-



#fig. 24.- Perfil de densidad (σ_t) en el transecto l-J.



#fig. 25.- Topografía de la superficie donde $\sigma_t = 25.0$

cia el norte, gana salinidad y densidad hasta que por pérdida de flotación se sumerge y fluye en promedio hacia el sur detectándose en la boca como agua subsuperficial de alta salinidad, incluso con mayor salinidad que el agua en la superficie en esa latitud (transecto A-B, fig. 13).

Sin embargo, esta apreciación no es estable, pues la relación evaporación-radiación-precipitación varía estacionalmente. Barberán y Zavala (1985) calcularon el tiempo típico para el proceso de superficie en 3 meses. Esto indica que el agua subsuperficial de alta salinidad que se observa en A-B no estuvo expuesta a las condiciones de invierno que sufrió el agua de superficie de esta campaña.

4.2.3 CAPAS SUBSUPERFICIALES.

Parece importante señalar que el agua subsuperficial (de $\sigma_t > 25.0$) es esencialmente la misma en los distintos transectos salvo en la boca, en donde se nota la presencia de agua de menor salinidad con esa densidad, pero que por alguna razón que no está clara no penetra al norte del transecto C-D (fig. 19). Esta agua de baja salinidad no parece sufrir un proceso de intemperización o mezcla que le haga perder sus propiedades y al parecer entra y sale del Golfo sin perder sus características (el agua superficial en el transecto C-D tiene una σ_t menor de 24.50 y el agua subsuperficial de baja salinidad tiene $\sigma_t \approx 25.2$). Los resultados de circulación geostrofica obtenidos con método inverso para esta campaña y que se presentan en los últimos capítulos, corroboran la hipótesis de recirculación del agua de baja salinidad.

Como se señaló en la primera parte de este capítulo, uno de los procesos importantes en el Golfo de California es la intensa mezcla producida por corrientes de marea en la parte norte del Golfo. De esto resulta que uno de los puntos interesantes consiste en buscar una huella de este proceso. Las características esperadas de esta agua corresponden a las de su origen: se forma en una zona somera menor de 300 mts. y en la fosa de Salsipuedes que tiene una profundidad de más de 1000 mts. y se encuentra aislada de la parte sur del Golfo por una barrera a 300 mts. de la superficie que impide el intercambio de agua por debajo de esa profundidad. Esto determina el tipo de agua que puede esperarse. Aunque desgraciadamente en esta campaña no se recabaron datos de esa área, de acuerdo con datos en Alvarez-Borrego, el agua entre la superficie y los 350 mts. en la fosa de Salsipuedes varía entre 16 y 12° C, pero en una época en que el Golfo se encontró a mayor temperatura en la superficie (uno ó dos grados centígrados). La

salinidad (en esos datos) entre 100 y 350 mts. de profundidad varía entre 35.0 y 34.9 respectivamente. Esto nos hace suponer que para esta época del año (febrero) es de esperarse que el agua aportada por esa zona está entre 12 y 14° C y con salinidad entre 34.9 y 35.0.

Al observar los perfiles de presión (P) contra temperatura (T), los de presión contra salinidad (S) y los T-S, no parece haber una señal clara de esta agua. En particular, en los perfiles correspondientes a la sección más al norte de esta campaña (I-J) y de acuerdo con la temperatura, esta agua se encontraría entre 130 y 250 mts. Sin embargo la salinidad en ese rango varía entre 34.7 y 34.9, sin mostrar una perturbación significativa en su gradiente, lo que hace pensar que el agua producida por mezcla es relativamente poca (figs. 22 y 23). Esto podría checarse con una evaluación de las características del agua en la zona (T-S) y calcular el tiempo de residencia de esta agua si suponemos que la tasa de evaporación es similar a la evaluada en la parte sur.

4.2.4 ALGUNOS ASPECTOS DE LA CIRCULACION.

Uno de los aspectos más importantes para la biología es la mezcla vertical porque incorpora a la zona fótica agua subsuperficial rica en nutrientes. El análisis del transecto G-H de P vs σ_t muestra, en la Bahía de Guaymas, un levantamiento de las isopícnas. Otros procesos similares no son claros en los demás transectos, por lo que de haber existido en esta época, su influencia es muy local. El origen de este proceso puede ser debido a los vientos dominantes o a la circulación general en el área. Esto no es claro y es un punto en el que considero debe profundizarse en otros trabajos más específicos.

Evolución de las masas de agua.

Otro análisis que puede dar información importante es estudiar el comportamiento de las lenguas de alta y baja salinidad. La fig. 27 muestra el comportamiento del máximo de sal en la capa determinada por las superficies de 13 y 25°C. En esta figura se observa que la salinidad es mayor al norte, así como los procesos de erosión que sufre el agua y la zona por la que el agua, en su movimiento hacia el sur, abandona el Golfo. Es importante anotar, que en el transecto exterior (Q-P) ya no se observa agua de alta salinidad, salvo muy localmente en la vecindad de Cabo San Lucas. Esto corrobora la afirmación de Emilsson y Roden en el sentido de que el agua del Golfo (de alta salinidad) no se ha detectado a

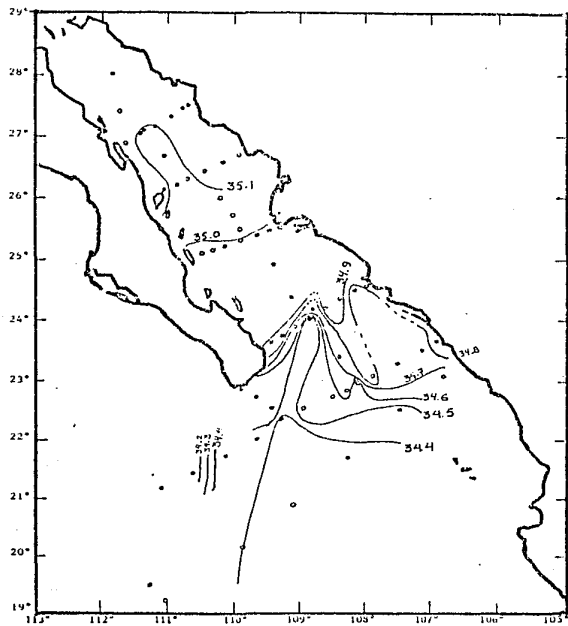


fig. 26.- Líneas de salinidad mínima en la capa determinada por las superficies de 13°C y 25°C (o la superficie).

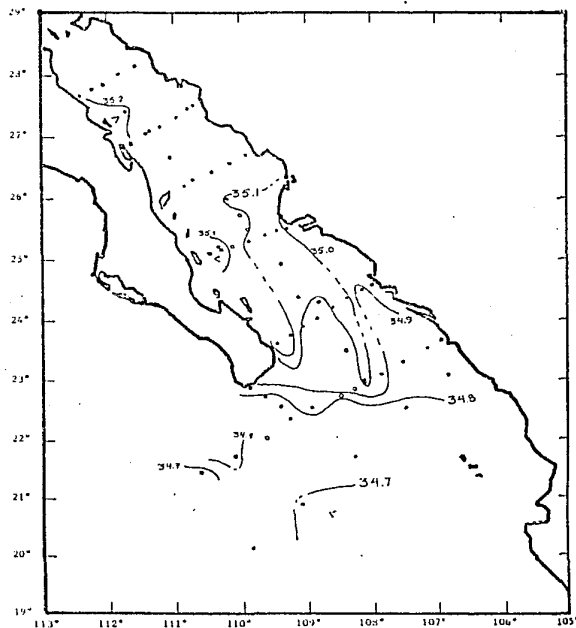


fig. 27.- Líneas de salinidad máxima en la capa determinada por las superficies de 13°C y 25°C (o la superficie).

300 Km de la boca.

La fig. 26 que muestra el comportamiento del mínimo de sal, complementa la fig. 27 que se describe en el párrafo anterior. El mínimo de sal está acotado por la capa determinada por las superficies de 13 y 25° C. Esta figura muestra que la penetración del agua de baja salinidad no va más allá del transecto C-D y que su origen puede situarse en agua norecuatorial y no en agua de la Corriente de California.

Masas de agua.

En la primera parte de este capítulo se señala que se han detectado tres tipos de agua que caracterizan al Golfo: agua nor-ecuatorial, agua de la Corriente de California y agua del Golfo. Al revisar los perfiles y transectos, no se encuentra agua de la Corriente de California en esta época, y se observa que el frente de Cabo San Lucas se encuentra hacia el sur-oeste de la Península (fig. 26).

Circulación.

En las páginas anteriores se da una visión cualitativa de lo que se observa en la campaña Bermejo I y se ha inferido cualitativamente el proceso de circulación hasta unos 250 mts. de profundidad. Para evaluar cuantitativamente la circulación se aplicaron el método inverso y las ecuaciones geostróficas; estos resultados se presentan en los Capítulos 5 y 6.

CAPITULO 5

UN EJEMPLO APLICANDO EL CRITERIO DE MINIMA NORMA

5.1 INTRODUCCION.

El método de Wunsch consiste en formar un sistema de ecuaciones $Ac = -T$ en el que los elementos de la matriz A están formados por áreas ó áreas multiplicadas por la densidad promedio correspondiente (ver Capítulo 2). En este caso se trabajó sólo con áreas. T son los transportes residuales para el campo de velocidad relativo a algún nivel de referencia, y c el vector que representa las velocidades de corrección.

Con el objeto de evaluar experimentalmente el método de Wunsch, se procede a estudiar los resultados que se obtienen para el campo de velocidad absoluta al variar:

- a) el número y configuración de capas (renglones que forman la matriz del sistema)
- b) el número de eigenvalores que son considerados para la evaluación del campo de velocidad, y
- c) el comportamiento de los resultados al variar el nivel de referencia que se usa en los cálculos.

El número y configuración de las capas resulta importante porque el balance por capas (conservación de masa o volumen) representa las constricciones adicionales a la velocidad geostrofica relativa que se piden al sistema. La información que es posible extraer mediante condiciones de conservación, depende del campo de densidad y del nivel de ruido para cada problema particular.

El número de eigenvalores considerados, permite mediante el análisis de su tamaño relativo, discriminar el ruido de la información. Esto necesariamente interacciona con el número de capas que conforman el sistema.

El otro punto anotado, se refiere al comportamiento de los resultados al variar el nivel de referencia. Este es el problema central que pretende resolver el método de Wunsch; la bondad del método depende fundamentalmente de como resuelve esta dependencia.

Para realizar la evaluación planteada en los párrafos anteriores, se formaron varios sistemas de ecuaciones con distintas combinaciones de capas (límites de densidad) para datos obtenidos en la Campaña Oceanográfica Bermejo I (ene-feb 1984). El transecto utilizado en este estudio está situado en la boca del Golfo de Cali-

fornia entre Altata y Punta Arena (fig. 1). En este transecto se realizaron 8 estaciones oceanográficas (fig. 1) hasta una profundidad de 1000 mts., ó en los casos en que la profundidad es menor de 1000 mts., se muestreó hasta cerca del fondo. La estructura de densidad de este transecto está representada en la fig. 2.

Para estudiar la posibilidad de un "mejor nivel de referencia inicial" se procedió a calcular los transportes geostroficados referidos a 5 niveles distintos, sin introducir ninguna corrección. Estos resultados están representados en la fig. 4.

Como primer paso para evaluar el campo de velocidad geostrofica absoluta enfocado a resolver el problema enunciado en el inciso a), se probaron seis combinaciones de capas (renglones que conforman la matriz A), buscando analizar el comportamiento del método de Wunsch con estos cambios. Estas distintas configuraciones permiten también analizar el problema enunciado en el inciso c).

Debido a que en el cálculo de la matriz inversa (o pseudo-inversa) se utilizó el método de descomposición en valores singulares (DVS) (expuesto en el Cap. 2), para cada sistema se obtiene un número de resultados parciales igual al número de capas que lo forman. Esto es, se obtiene un resultado para 1, 2, hasta n eigenvalores.

Para evaluar la velocidad de corrección se procede a partir de datos de velocidad geostrofica referida a superficie, por considerar éste el caso más general. Los resultados que se obtuvieron con estas condiciones se muestran en la fig. 3.

Para cada una de las configuraciones se calculó el transporte residual que se obtiene al introducir la corrección y estos transportes se muestran en la fig. 5. Se calculó también el residual de las cinco capas que conforman el sistema mas general (su importancia se discute más adelante). Estos resultados también están incluidos en la fig. 5. En la Tabla 5 se presentan los valores que toman los eigenvalores en cada combinación de capas. Del análisis de los resultados de las figuras 3, 4 y 5 y de la Tabla 5 se escogió el sistema de cuatro capas para analizar el comportamiento del método al variar el nivel inicial de referencia. Finalmente se presenta un transecto de velocidad geostrofica absoluta obtenido con el método de Wunsch (o de mínima norma en el nivel de referencia).

5.2 PRESENTACION DE RESULTADOS.

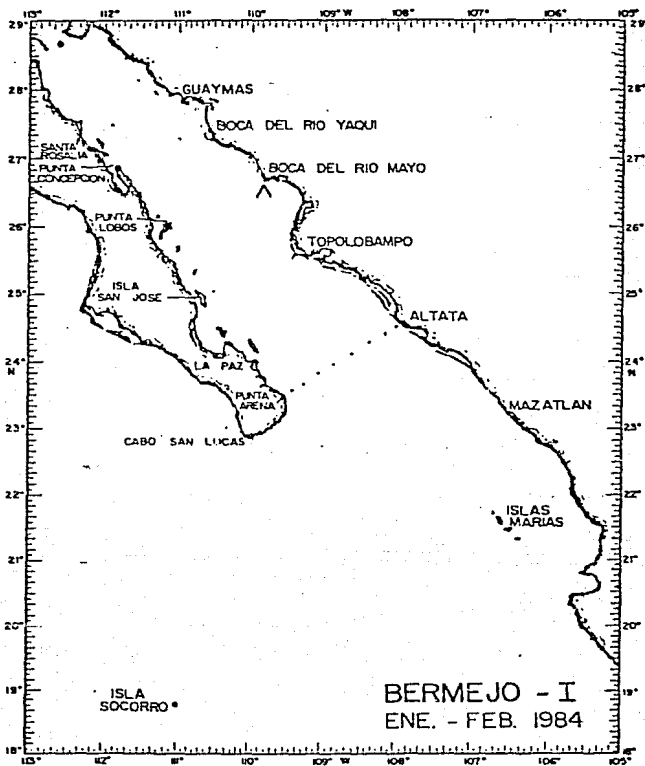


fig. 1.- Esta figura muestra la zona de estudio en este ejemplo. Los puntos entre Altata y Punta-Arena señalan las zonas de muestreo utilizadas.

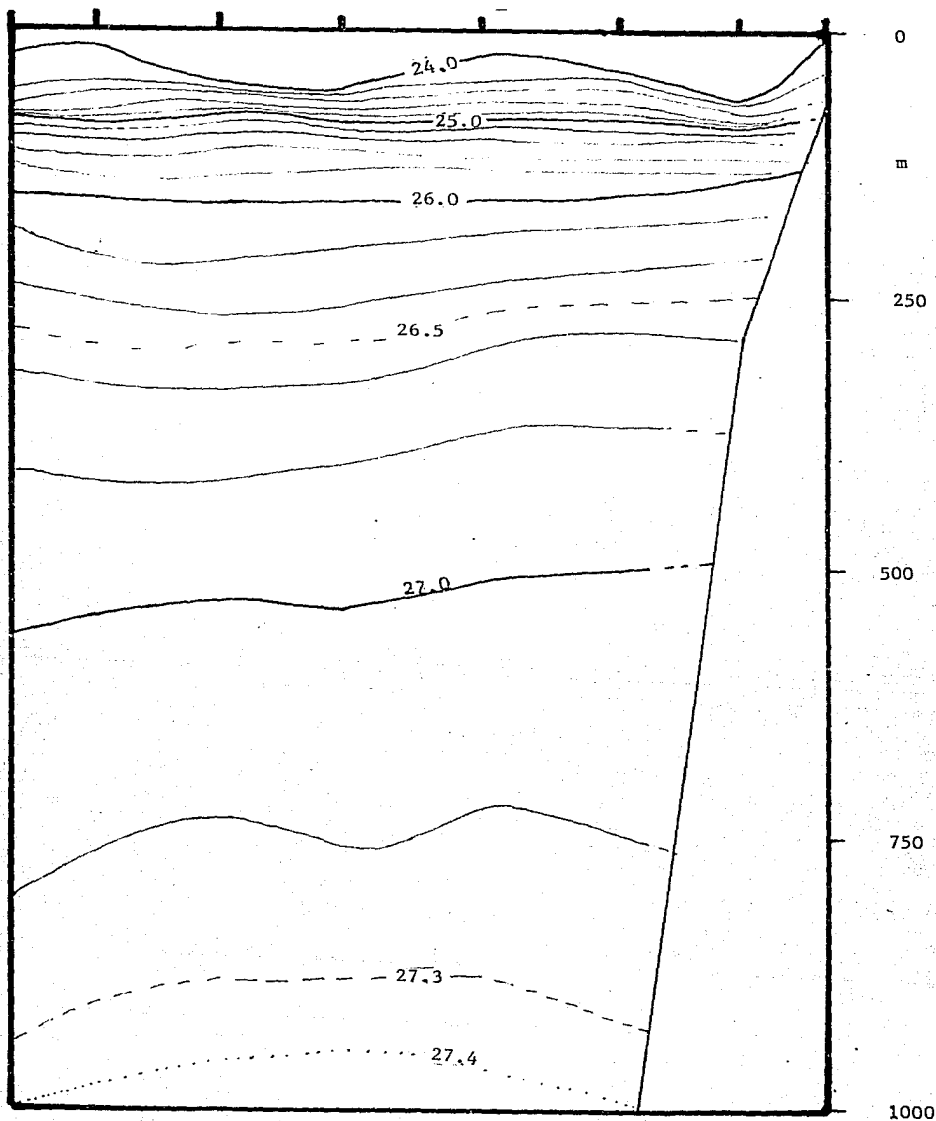


fig. 2.- Densidad (σ_t) en el transecto A-B (0-1000mts)

TABLA 1 .- ESTRUCTURA DE CAPAS

Superficie	ESTACION	DIST. (m)						
	8	20635						
CAPA 1	7	24691						
25.50	6	26578						
CAPA 2	5	31418						
26.00	4	29347						
CAPA 3	3	25550						
26.50	2	19551						
CAPA 4	1							
27.00								
CAPA 5								
27.34								

Esta figura muestra los límites que se utilizaron para determinar las capas. En la columna izquierda se señalan los límites de cada capa (con densidad en G_r), y en la parte superior la distancia entre estaciones.

CONFIGURACION	CAPAS QUE FORMAN CADA RENGLON				
	RENGLON 1	RENGLON 2	RENGLON 3	RENGLON 4	RENGLON 5
1	1,2,3 y 4				
2-A	1	2,3,4 y 5			
2-B	1,2 y 3	4,5			
3	1	2,3	4,5		
4	1	2	3	4,5	
5	1	2	3	4	5

Esta tabla muestra las capas componentes de las distintas configuraciones.

TABLA 2

AREAS DE LAS MATRICES EN LAS DISTINTAS CONFIGURACIONES DE LA
 TABLA 1 (AJUSTADAS DE ACUERDO A LAS ISOPICNAS Y FRONTERAS FI-
 SICAS). (UNIDADES EN 10^6 m^2).

ESTACION	8	7	6	5	4	3	2	1
CAPA								
1	2.213	2.648	2.706	3.468	3.327	2.896	1.994	
2	0.999	1.316	1.618	1.560	1.402	0.9250	0.4924	
3	2.698	3.254	3.408	3.682	2.874	2.555	0.4411	
4	8.369	6.006	6.477	7.775	7.155	5.584	0.5484	
5	8.784	10.561	10.673	12.637	13.461	5.119	0	

TABLA 3 .

VELOCIDAD GEOSTROFICA PROMEDIO REFERIDA A SUPERFICIE EN CADA SECCION (en cm/s).

CAPA							
1	-0.39	2.24	2.34	-4.58	3.22	7.31	-10.88
2	3.89	-0.78	6.92	-8.09	4.67	17.45	-14.52
3	9.15	0.15	5.16	-9.74	3.50	13.73	-14.51
4	13.8	0.68	3.60	-16.84	-0.38	12.2	-14.51
5	8.56	-2.43	5.35	-23.17	1.16	12.26	0

TABLA 4

VELOCIDAD EN CINCO NIVELES QUE SE UTILIZARON COMO REFERENCIA.

NIVEL (m)							
0	0	0	0	0	0	0	0
250	11.1	0	4.8	-10.6	2.5	12.4	-14.6
500	14.3	0.4	3.2	-19.7	-1.0	12.3	-14.6
750	8.9	-2.3	5.4	-23.9	1.6	12.3	-14.6
1000	4.3	-5.2	5.9	-24.2	4.1	12.3	-14.6 *

* En los casos en que no hay datos hasta el nivel de referencia se tomó el del fondo.

La fig. 3 muestra los resultados que se obtienen para el campo de velocidad en superficie calculados a partir del campo de velocidad geostrófica relativa. Los resultados se dividen en 6 gráficas, una para cada configuración de la Tabla 1, e incluyen los resultados para distinto número de eigenvalores.

La línea continua incluye el primer eigenvalor.

La línea punteada los dos primeros eigenvalores.

La línea segmentada los tres primeros eigenvalores.

La línea de cruces los cuatro primeros eigenvalores.

La línea de punto y raya los cinco primeros eigenvalores.

La escala de velocidad está en cm/s y las marcas en el eje horizontal indican el lugar en que hay datos de velocidad promedio.

0 50 km

fig. 3a.- Configuración 1

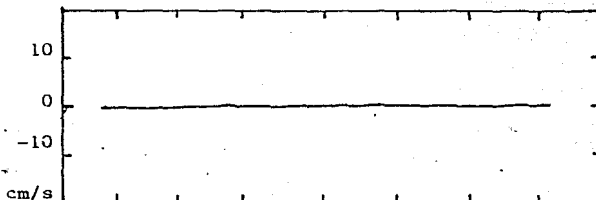


fig. 3b.- Configuración 2-A

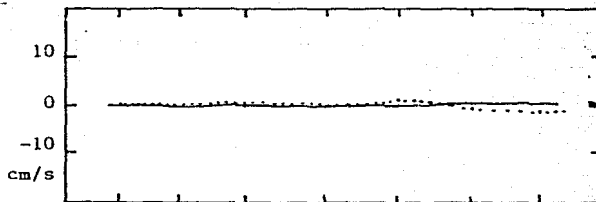


fig. 3c.- Configuración 2-B

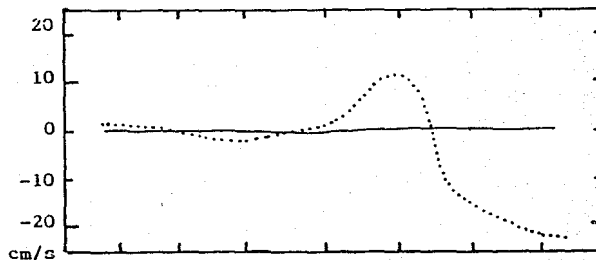


fig. 3d .-
Configuración 3.

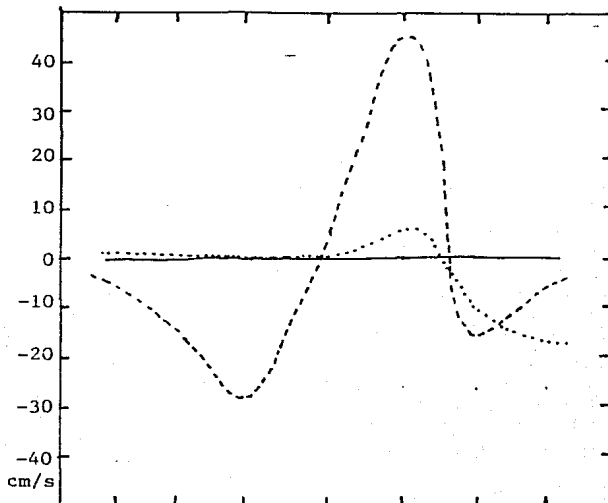
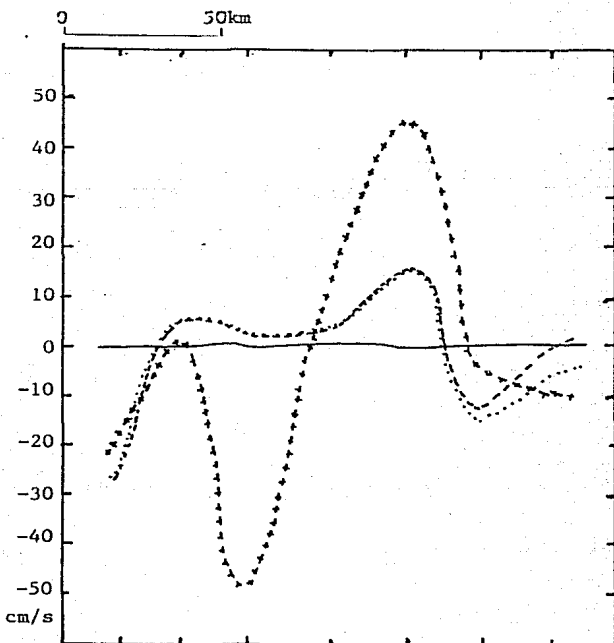


fig. 3e .-
Configuración 4.



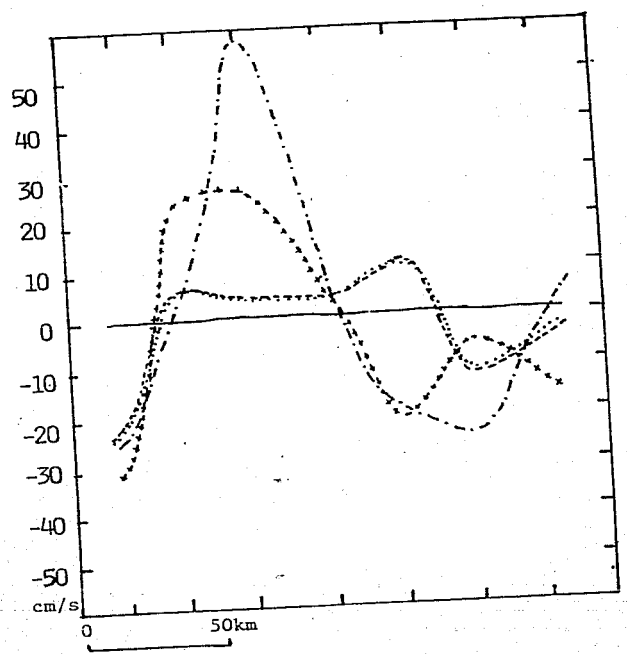


fig. 3f .- Configuración 5.

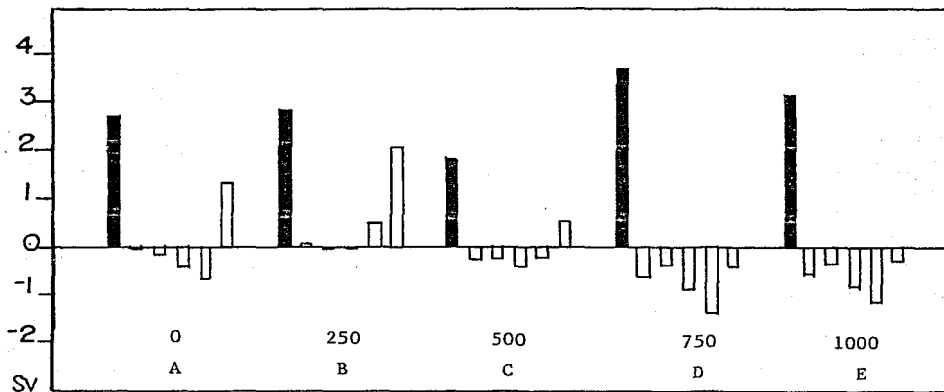


fig. 4 .- Esta figura muestra los transportes para la configuración de cinco capas, sin corrección, en cinco niveles de referencia distintos: A - superficie , B - 250 mts. , C - 500 mts. , D - 750 mts. , E - 1000 mts.

Esta gráfica muestra que no es posible decidir a priori un nivel de referencia. Los transportes están dados en Sverdrups ($1 \text{ Sv} = 10^6 \text{ m}^3/\text{s}$).

En negro la suma de los valores absolutos de las distintas capas, y en blanco el transporte de cada capa, iniciando por la izquierda con la capa 1 de acuerdo con la Tabla 1.

fig. 5.- Se muestran los transportes para distintas configuraciones. En negro aparece el valor absoluto de la suma de los transportes de cada capa. En blanco los transportes de cada capa. Estas figuras presentan en la parte superior los transportes de la configuración marcada al pie de cada una de ellas, y en la parte inferior los transportes del sistema más general (de 5 capas) como diagnóstico auxiliar. Cada figura muestra los balances al incluir de 1 a n eigenvalores, lo que muestra la variación de los transportes al incluir más información.

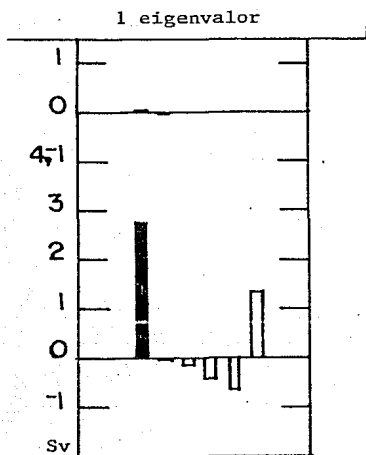


fig. 5a.- Configuración 1.

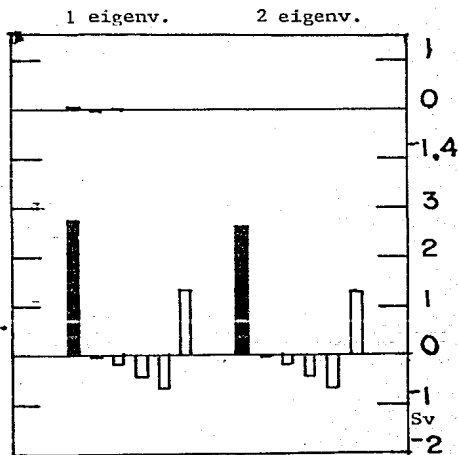


fig. 5b.- Configuración 2-A.

fig. 5c.-
Configuración 2-B

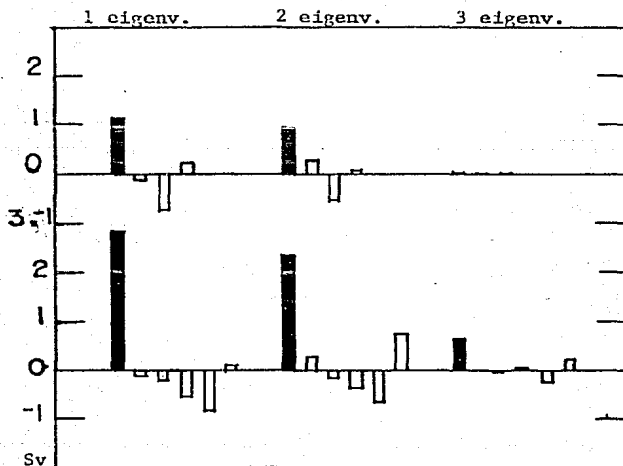
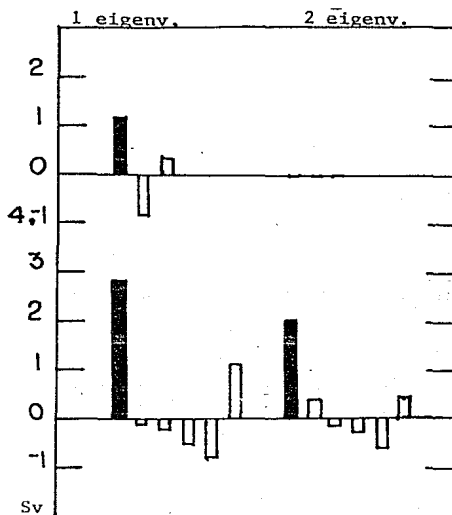


fig. 5d.-
Configuración 3.

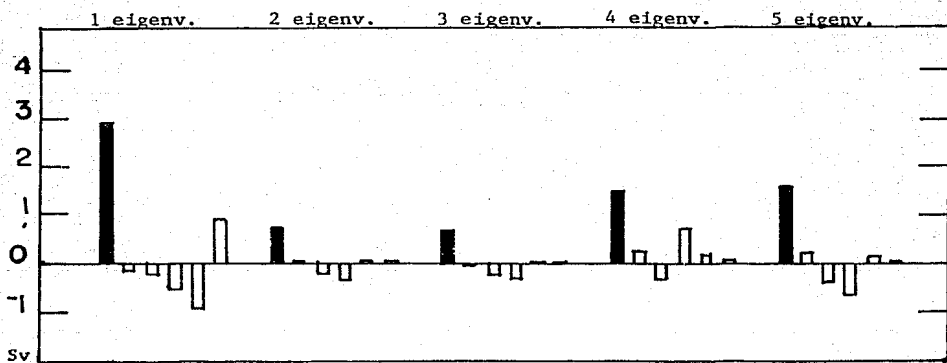
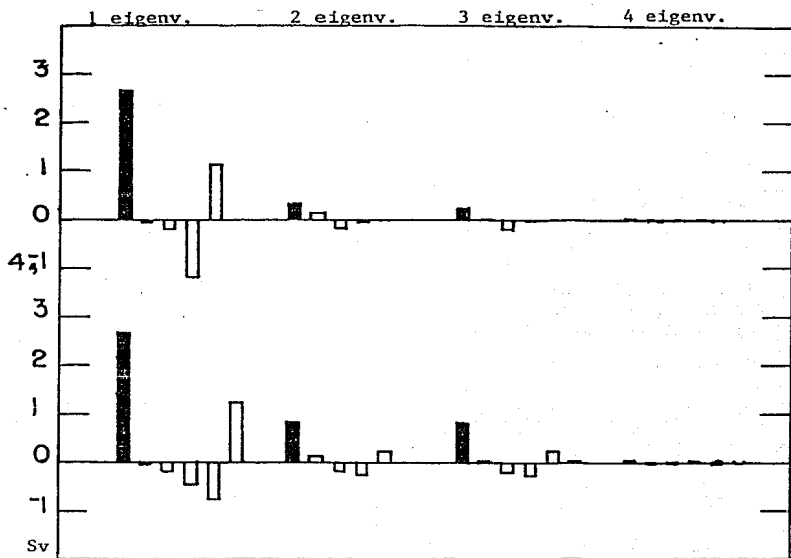


TABLA 5

NUMERO DE CAPAS	EIGENVALORES
5	1.0099×10^{15} 2.3409×10^{13} 4.3187×10^{12} 8.1764×10^{11} 5.0035×10^{10}
4	1.2621×10^{15} 2.8117×10^{13} 3.9992×10^{12} 1.1440×10^{11}
3	1.8862×10^{15} 5.5735×10^{12} 1.3396×10^{12}
2-B	2.0395×10^{15} 9.4941×10^{12}
2-A	2.7751×10^{15} 5.2112×10^{12}

fig. 6.- Velocidad en superficie al variar el nivel de referencia para una misma configuración (4 capas, 2 y 3 eigenvalores)

En esta figura se observa claramente la dependencia de la solución con el nivel inicial de referencia. Como la velocidad varía más en los primeros 500 mts., esto se refleja en los resultados.

- Nivel: superficie.
- Nivel: 500 mts.
- + + + Nivel: 1000 mts.

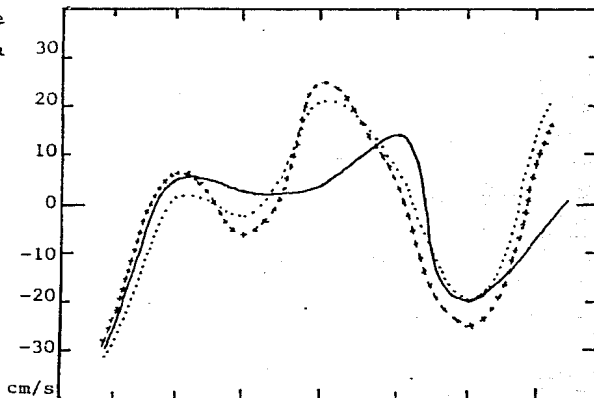


fig. 6a.- 4 capas, 2 eigenvalores.

fig. 6b.- 4 capas, 3 eigenv.

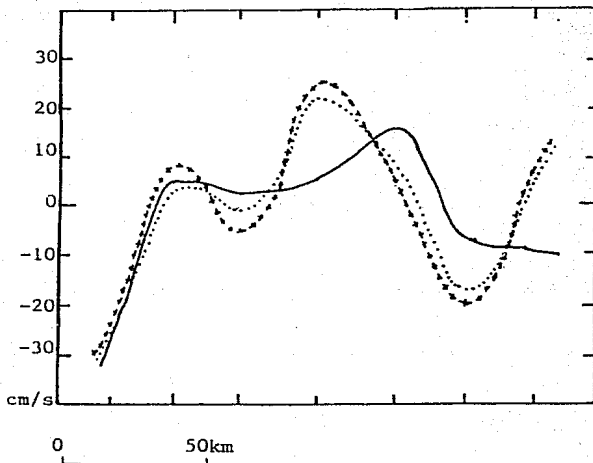
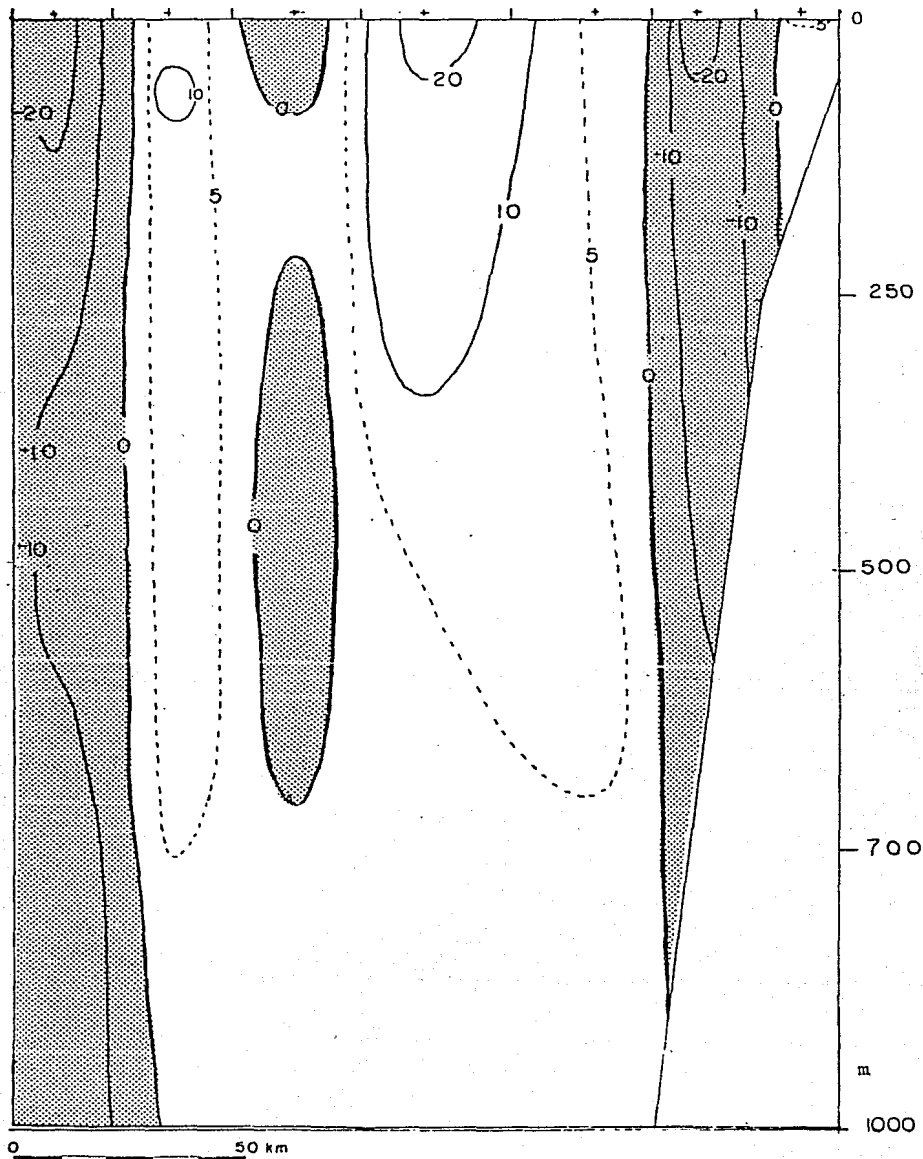


fig. 7.- Velocidad en el transecto A-B obtenida con el criterio de Wunsch con nivel de referencia inicial en 1000 mts. Bermejo I, 22-23/ENE/84. _



5.3 DISCUSION GENERAL DE RESULTADOS

Uno de los problemas que se plantean al aplicar el método de Wunsch consiste en escoger a priori un nivel de referencia, del que se espera que sólo sea necesario hacer modificaciones relativamente pequeñas para alcanzar las condiciones de balance de masa o volumen. El criterio que se escogió para abordar este problema fué calcular los transportes geostróficos para el sistema mas general (de 5 capas) referidos a distintos niveles de referencia. Los resultados que se obtuvieron están representados en la fig. 4: con barras negras se representa la suma de los valores absolutos de las capas que conforman el sistema, y con barras blancas los transportes parciales de cada una de las capas. Estos resultados muestran que no hay manera de decidir a priori cual es el mejor nivel de referencia para usar el método de Wunsch. Esto se concluye porque la suma de los valores absolutos de los transportes no difiere entre los distintos casos por un factor mayor de 2. Otra objeción se debe al signo que presentan los imbalances por capas, que hacen imposible una interpolación lineal entre algunos de los niveles propuestos. Esto llevó a decidir trabajar inicialmente con la superficie como nivel de referencia por ser éste el caso más general.

Para evaluar los problemas planteados en los incisos a) y b) al principio del capítulo, se analizan primero los resultados que se obtienen para distintas configuraciones y cómo se relacionan unos con otros. El criterio para analizar estos resultados se basa en los datos de velocidad en superficie de la fig. 3 y en los datos de los imbalances en los transportes de la fig. 5. Para corroborar la validez de algunas conclusiones se recurre al análisis del tamaño relativo de los eigenvalores en la Tabla 5.

Se eligió este criterio por estar basado en datos objetivos y no uno basado en criterios subjetivos como la correspondencia con lo que "se espera" al analizar algún parámetro como la temperatura o la sal.

Al analizar los transportes residuales de las capas que conforman cada sistema (que se denotan por T_i), se observa como patron general, que la suma de los valores absolutos de los imbalances por capas ($\sum |T_i|$) disminuye al aumentar el número de eigenvalores incluidos en el cálculo de la velocidad de corrección. Cuando el número de eigenvalores es igual al número de capas, $\sum |T_i| < 0.1 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{s}$ equivale a .05 cm/s, que puede considerarse como un balance perfecto. Esto es válido para todos los casos excepto para el sistema formado por cinco capas en que los imbalances alcanzan un mínimo al considerar solo los tres primeros eigenvalores en el cálculo de los resultados de velocidad de corrección. Esto indica que para el caso de 5 capas, los errores de tipo numérico son considerables, pues producen imbalances en los transportes mayores que la corrección deseada. De esto puede concluirse que al aumentar el número de capas, hasta cierto límite, se gana informa-

ción; esto está de acuerdo con lo que se esperaba. Debe señalarse que en el caso en el que el rango de la matriz A fuera menor que M (no todos los renglones linealmente independientes), la solución que se obtiene es aquella que minimice la suma del cuadrado de los transportes. Al observar la fig. 5, se concluye que este no es el caso y se refuerza el argumento de un error numérico.

Si se analizan los transportes de las capas definidas por el sistema más grande (5 capas), que se denotan por τ_i , se observa un comportamiento consistente con los transportes T_i , disminuyendo los transportes τ_i al aumentar el número de capas. De esto se concluye, de manera consistente con los transportes T_i , que se alcanza un máximo de información en el sistema compuesto por cuatro capas.

Otro criterio complementario al anterior, consiste en analizar la estabilidad de las soluciones obtenidas al buscar que éstas converjan al aumentar la información (número de eigenvalores y capas).

Con este criterio se concluye que al aumentar el número de eigenvalores y de capas se gana información hasta cierto límite, pues en el caso de tres capas tres eigenvalores, 4 capas 4 eigenvalores y 5 capas 5 y 4 eigenvalores, los datos se disparan y difieren totalmente de una configuración a otra (este problema ha sido señalado y discutido por Wunsch (1978)). Esto puede explicarse como producto del límite en que los errores en la estimación de áreas y velocidades geostroficadas relativa tiene una componente grande en relación a la corrección. Cuando los eigenvalores decrecen mucho, el error porcentual que contienen aumenta. Esto es claro del algoritmo de estimación por el método de DVS expuesto en el Capítulo II.

Para corroborar esta hipótesis, se revisan los eigenvalores para cada una de las distintas configuraciones. Se observa como regla general que los datos en que $\lambda_1 / \lambda_i > 500$, (λ_i es el i -ésimo eigenvalor), presentan problemas de ruido, no así para los casos en que $\lambda_1 / \lambda_n < 500$. Si se pide un relativo balance del sistema general (de 5 capas), estabilidad ó $\lambda_1 / \lambda_i < 500$, y buscar aprovechar la mayor información posible de los resultados entre las distintas combinaciones de capas, las opciones posibles quedan reducidas a los casos de 2 y 3 eigenvalores para 4 y 5 capas. Al profundizar en el análisis se observa que en el caso de 5 capas, 2 y 3 eigenvalores, el imbalance se encuentra concentrado en las capas 2 y 3. Para los casos de 4 capas, 2 y 3 eigenvalores, en los transportes τ_i , el imbalance está distribuido principalmente entre las capas 2, 3 y 4 del sistema, por lo que se le considera una mejor aproximación. Sin embargo, el valor absoluto del imbalance total ($\sum |\tau_i|$) es ligeramente menor en los casos de 5 capas.

El otro problema de carácter fundamental que debe discutirse, es la independencia del esquema de velocidad absoluta con respecto al marco de referencia (nivel de referencia). Para estudiar este problema se obtuvieron campos de velocidad de corrección a partir de distintos niveles de referencia para la configuración de

cuatro capas; estos resultados se muestran en la fig. 6. En esta figura se observa que la solución que se obtiene para las velocidades en superficie es diferente cuando se parte de datos de distintos niveles de referencia. Esta variación es comparable a las diferencias de velocidad entre un nivel de referencia y otro. En este caso, los gradientes grandes de velocidad están en los primeros 250 mts. y por lo tanto, la diferencia en los resultados al calcular los campos de velocidad a partir de 500 y 1000 mts. es pequeña en relación a las diferencias que se observan con los resultados referidos a superficie.

Dependencia en Wunsch.

La dependencia de los resultados del nivel inicial de referencia es el principal problema en el método de Wunsch (criterio de mínima norma en un nivel de referencia). En la fig. 6 se observa que cuando la señal barotrópica es más intensa (magnitud de 'c'), la diferencia en el campo tiende a disminuir. Esta dependencia está ligada al número de capas y eigenvalores considerados, como puede observarse en la fig. 3. Como caso extremo, cuando se considera solo una capa o un eigenvalor, el campo de velocidad resultante se ve alterado mínimamente y esencialmente persiste el campo de velocidad referido al nivel inicial de referencia.

Las causas de la dependencia del nivel inicial de referencia en el método de Wunsch son:

- a) El método minimiza el contenido de información de la solución por la vía de minimizar $\|c\|$, donde c es la velocidad en el nivel inicial de referencia, y $\| \cdot \|$ es la norma euclidiana.
- b) Físicamente esto equivale a minimizar $\|v_{\text{absoluta}}\|$ en el nivel de referencia.
- c) Esto necesariamente produce campos $v(x, z)$ diferentes para cada nivel de referencia, excepto en el caso muy particular y poco probable en que la solución del sistema de ecuaciones es única.

Por otra parte, al revisar la fig. 4, no se observa ninguna indicación a priori de cual es el mejor nivel inicial de referencia, y tampoco puede concluirse que la elección de algún nivel inicial de referencia horizontal sea óptima.

En síntesis, si bien con el método de Wunsch se logra una mejoría sustancial en los transportes, no se puede considerar que se ha alcanzado una solución completa al problema de geostrofia absoluta, debido a que persiste la dependencia del nivel inicial de referencia, además de otras incertidumbres producto de que el sis-

tema de ecuaciones es subdeterminado y de los errores que fueron discutidos en los capítulos anteriores.

Todo esto sugiere varias preguntas:

- ¿Es ésta la mejor aproximación al campo de velocidad absoluta que puede obtenerse a partir de conocer el campo de densidad y de consideraciones de conservación?
- ¿Qué tan dependiente del nivel de referencia inicial es la solución de Wunsch?

Estas preguntas constituyen un tema de revisión del método inverso en la oceanografía y merecen un espacio aparte; en el capítulo siguiente se analizan con profundidad. Su importancia es fundamental en el avance del estudio de la circulación y los transportes en la oceanografía.

Sin embargo, resulta interesante escoger alguno de los resultados obtenidos por el método de Wunsch y analizar el campo de circulación que se obtiene. De acuerdo con la costumbre, y reconociendo un alto grado de subjetividad en la decisión, se presenta el transecto de velocidad geostrofica absoluta (criterio de Wunsch) contra presión, que se obtiene si inicialmente se refiere el campo geostrofico a 1000 mts. de profundidad, para el caso de cuatro capas y tres eigenvalores. Este resultado se presenta en la fig. 7.

De los resultados de esta figura se subraya lo siguiente:

a) En correspondencia con las descripciones anteriores de la circulación para esta zona y para esta época del año (Cap. 4) , se observa un intenso flujo de salida en la costa occidental que corresponde a la alta salinidad que se observa en esta zona (ver fig. 4.15). Se observa también superficialmente un flujo intenso de entrada entre las estaciones 4 y 5, que puede asociarse al flujo de agua dulce sub superficial en la estación 5. También debe señalarse que entre las estaciones 3 y 4 el flujo que se obtiene es hacia el norte y no se explica el agua subsuperficial de alta salinidad, aunque entre las estaciones 2 y 3 aparece un intenso flujo hacia el sur. Esta incongruencia puede explicarse relativamente si consideramos que el flujo que se obtiene es el flujo promedio en la sección, de acuerdo con lo expuesto en el capítulo anterior. Esto explica algunos pequeños defasamientos en la horizontal si no son mayores de una sección. Recuérdese que los datos de presión, temperatura y salinidad no coinciden con el lugar intermedio que se le asigna a la velocidad.

b) El campo de velocidad en esta sección no muestra ninguna isobata en que la velocidad sea cero o constante.

c) La velocidad en la profundidad de 1000 mts. en algunas secciones es grande en relación con el campo de velocidad, por lo que la aproximación de velocidad ce-

ro a esa profundidad es bastante cuestionable.

d) Se calcularon los flujos netos de entrada y salida con este campo de velocidad, entre 0 y 1000 mts., obteniéndose los siguientes resultados:

Flujo de salida $5.9 \pm .6$ Sv

Flujo de entrada $5.8 \pm .6$ Sv

que son resultados que pueden considerarse como intermedios entre los calculados por otros autores mencionados en el capítulo anterior.

CAPITULO 6

REVISION DEL METODO INVERSO EN LA OCEANOGRAFIA.CRITERIOS ALTERNATIVOS. APLICACION Y DISCUSION.

6.1 INTRODUCCION.

En el capítulo anterior se mostró que los resultados obtenidos por el método de Wunsch presentan una dependencia del nivel de referencia. Este problema ha sido atacado por el mismo Wunsch (1984), planteando introducir "información adicional" al sistema de ecuaciones. Esto incluye condiciones de conservación, estimación de velocidades verticales, estimación de mezcla y concordancia con observaciones de otros parámetros, etc. Wunsch deja abierta la posibilidad de incluir más datos (ecuaciones en el sistema) o rectificar los ya incluidos. En este artículo, Wunsch forma una matriz con 425 000 elementos que resuelve con el Método Simplex, en el que introduce rangos sobre los valores esperados para cada uno de los parámetros e incluye en el sistema de ecuaciones la condición de velocidades esperadas en un nivel dado; esto provocará una dependencia de la solución en ese nivel, de la misma manera que cuando se utiliza el método inverso. El peso de esta condición depende de los rangos que se pidan. Esto puede considerarse como resolver un sistema con el método inverso en que el sistema de ecuaciones es multiplicado por una matriz de peso que introduce condiciones equivalentes a los rangos en el sentido de hacer tender la solución a un nivel de referencia. En esta elección subyace la debilidad del criterio.

Resulta necesario revisar las posibilidades del método inverso en la oceanografía y el tipo de información que se incorpora. Wunsch (1978) reconoce la posibilidad de elegir una regla variacional que pueda incorporarse al sistema, pero señala la no haberse decidido por ninguna, y menciona la posibilidad de incluir la condición de mínima energía cinética total, pero la descarta por razones que se discuten más adelante.

En este capítulo se revisa en forma más general el método inverso en la oceanografía y se explora una de las alternativas que da resultados interesantes (coherentes con lo que se conoce o estima), y permite eliminar la dependencia del nivel inicial de referencia; de hecho en este caso es innecesario este concepto que no hay razones físicas sólidas para sostener, y se propone integrar condiciones físicamente interesantes que hacen completo el problema de geostrofia. Esta es una pro

posición y desde luego habrá que explorarla con más profundidad.

6.2 REVISION DEL METODO INVERSO EN LA OCEANOGRAFIA. *

6.2.1 NOTACION Y DEFINICIONES.

Existen dos matrices de datos: 'A' es una matriz $M \times N$ con elementos A_{ij} que representan el área delimitada por isopicnas en la capa i y en el intervalo j determinado por dos estaciones oceanográficas; 'V' es una matriz $M \times N$ con elementos v_{ij} que representan la velocidad geostrofica promedio en el área A_{ij} . Las v_{ij} 's están determinadas hasta una a_j tal que $u_{ij} = v_{ij} + c_j$ es la velocidad total en un modelo.

Se dice que c_j depende objetivamente de v_{ij} si dado el sistema $Ac = b$ para dos campos (con distinto nivel inicial de referencia) v_{ij}' y v_{ij}'' , tales que $v_{ij}' - v_{ij}'' = a_j$, entonces $c_j' - c_j'' = -a_j$ y por lo tanto:

$$u_{ij}' = v_{ij}' + c_j' = v_{ij}'' + c_j'' = u_{ij}''$$

no depende de la velocidad geostrofica inicial v_{ij} .

Los siguientes términos aparecen frecuentemente en el desarrollo posterior por lo que se definen aquí:

$$A_j^c \equiv \sum_i A_{ij} \equiv Z_{jj}, \text{ es el área de la columna } j \quad (j=1, \dots, N).$$

$$D_j \equiv Q_{jj}, \text{ es la distancia entre dos estaciones que delimitan la columna } j.$$

$$Z_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j; Z_{N \times N} \text{ es una matriz diagonal y cuadrada.}$$

$$Q_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j; Q_{N \times N} \text{ es una matriz diagonal y cuadrada.}$$

$$A_i^r \equiv \sum_j A_{ij}, \text{ es el área de la capa } i \quad (i=1, \dots, M).$$

$$T_j^c \equiv \sum_i A_{ij} v_{ij}, \text{ es el transporte de la columna } j.$$

$$T_i^r \equiv \sum_j A_{ij} v_{ij}, \text{ es el transporte de la capa } i.$$

$$T \equiv \sum_j T_j^c = \sum_i T_i^r, \text{ es el transporte total. **}$$

* La mayor parte de esta sección está tomada de las notas del artículo en preparación de Barberán y Zavala (1986).

** Por simplicidad, en este caso se trabaja con transporte de volumen, pero puede generalizarse a otros parámetros.

$E_i = \frac{\rho_i}{2} \sum_j A_{ij} (v_{ij} + c_j)^2$ es la energía cinética de la capa i .

$E_j = \frac{1}{2} \sum_i \rho_i A_{ij} (v_{ij} + c_j)^2$ es la energía cinética de la columna j .

$E = \sum_i E_i = \sum_j E_j$ es la energía cinética total.

$K = \frac{1}{2} \sum_j c_j^2$ es la pseudo-energía cinética en el nivel inicial de referencia.

$L = \frac{1}{2} \sum_j D_j c_j^2$ es la energía cinética en el nivel de referencia. En el caso en que v_{ij} es baroclínica (referida a superficie), L coincide con la energía cinética barotrópica.

6.2.2 CARACTERIZACION DE SISTEMAS $Ac = b$ EN OCEANOGRAFIA.

En una zona oceánica, cerrada por costas y/o estaciones oceanográficas, para determinar un campo de velocidad geostrofica absoluta normal a la sección de las estaciones, pueden considerarse distintos criterios junto con la condición de conservación de volumen entre isopicnas. Es decir: es posible abordar el problema inverso de extraer información sobre el vector c en el sistema $Ac = b$ de distintas formas.

La condición de cero flujo puede escribirse como:

$$e_i = 0, \quad i=1, \dots, N, \quad \text{donde} \quad e_i = \sum_j A_{ij} (v_{ij} + c_j)$$

que es equivalente al sistema $Ac = b$ donde $b = -T^t$.

Si R es el rango de la matriz A , en general se tiene que $R \leq M \leq N$, y en el problema que estamos estudiando casi siempre $R < N$, y en muchos casos $R < M$.

Caso en que $R < M$.- El sistema es de rango deficiente y b puede no estar en el subespacio generado por A (de dimensión R) y el sistema ser inconsistente, en cuyo caso, aparentemente solo tiene sentido abordar el problema minimizando el residual cuadrático total, que es equivalente a sustituir b (desde un principio) por su proyección b^P en el subespacio generado por A .

Si U_i son M vectores ortonormales (que constituyen una base del espacio de b) entonces:

$$b^P = U_1 (U_1^t b)$$

donde la suma es sólo sobre los R vectores U_i que están en el espacio generado por A . Una selección cómoda de la base proviene de la DVS de A y resulta mejor empezar siempre con b^P en vez de b ; b^P sigue siendo de M componentes.

Revisando esta proyección se anota lo siguiente:

1) Una primera medida del nivel de inconsistencia es:

$$I = \left(\frac{\|b^p - b\|}{\|b\|} \right)^{1/2}$$

Otra medida que puede ser útil es:

$$I^e = \frac{\sum e_i}{A}$$

2) Sea U la matriz $M \times M$ cuyas columnas son los vectores U_i ($i=1, \dots, N$) de la descomposición en valores singulares y solo los primeros R tienen eigenvalores distintos de cero y son suficientes para generar el espacio de A . Cuando en una ecuación aparezca el término $UR^t b$ se construye la matriz U :

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1N} \\ U_{21} & U_{22} & \dots & U_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N1} & U_{N2} & \dots & U_{NN} \end{pmatrix}$$

donde las columnas son los vectores U_i de la base:

$$U_i = \begin{pmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ \vdots \\ U_{Ni} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} UU^t b &= \left(U_1 \ U_2 \ \dots \ U_N \right) \begin{pmatrix} U_1 \cdot b \\ U_2 \cdot b \\ \vdots \\ U_N \cdot b \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^N U_i U_i^t b = b^p \end{aligned}$$

donde $UR = \left(U_1 \ U_2 \ \dots \ U_R \right)$.

Entonces: $URUR^t \neq I_{N \times N}$ si $R \neq N$, y $UR^t UR = I_{R \times R}$.

Por lo tanto: $UR^t b^p = UR^t URUR^t b = UR^t b$. q.e.d.

Haciendo la sustitución $b^P - b = U^R U^{R^t} b - b$, el índice de inconsistencia es:

$$I = \frac{\| (U^R U^{R^t} - I) b \|}{\| b \|}$$

Con estos resultados, al sustituir $b^P = U^R U^{R^t} b$ en lugar de b en el problema original ($Ac=b$), se ha hecho lo mejor que se puede hacer con el problema de inconsistencia y se ha eliminado. Es posible suponer a partir de aquí que el problema es consistente.

De aquí en adelante, al escribir $Ac = b$, consideraremos $b \equiv b^P$ y se entenderá que b es la proyección de la b original sobre el espacio generado por A .

Caso en que $R < N$ (también de rango deficiente).- En este caso el problema es subdeterminado (hay menos ecuaciones independientes que incógnitas). El espacio nulo de A ($S_0(A)$) tiene dimensión $N-R > 0$ y las soluciones están determinadas hasta una combinación lineal arbitraria de los vectores de una base de $S_0(A)$. Así, en principio hay $N-R$ constantes arbitrarias (α_i) que se introducen a priori con algún criterio ("información a priori") y:

$$c = c_0 + \sum_{i=1}^{M-R} \alpha_i V_i$$

donde c_0 es la parte de la solución que está fuera de $S_0(A)$ y V_i es una base de $S_0(A)$.

6.2.3 ALGUNOS CRITERIOS PARA INTRODUCIR INFORMACION A PRIORI.

1) Nivel de referencia a priori.

En este caso aparentemente no se introduce información; sin embargo, c depende de b , donde las b_i son los transportes de capas (T_i^j) calculados considerando una constante de integración a_j en v_{ij} . Entonces, escoger $\alpha_i = 0$ ($i=1, \dots, M-R$) implica escoger la solución más cercana a v_{ij} y que satisfaga las restricciones de minimizar el flujo residual. Esto es, la información a priori está contenida en las v_{ij} . Si para la integración inicial se toma una cierta isopícnica o isobara, esta solución busca mantener cercanas a cero cada una de las velocidades ahí (busca minimizar la pseudo-energía cinética en ese nivel). Con este criterio el sistema $Ac = b$ se resuelve minimizando $\frac{1}{2} \|c\| = \frac{1}{2} \sum c_j^2$ sujeto a la restricción $e_i = 0$. Este criterio es el que se utilizó en el capítulo anterior, y que se ha venido llamando método de Wunsch.

2) Energía cinética mínima en un nivel propuesto a priori.

Aquí el criterio significa minimizar

$$L = \frac{1}{2} \sum_j D_j c_j^2$$

sujeto a las constricciones $e_i = 0$.

Los criterios 1 y 2 (esencialmente iguales), son de naturaleza local, y presuponen un conocimiento a priori concentrado en una zona cercana a la horizontal o la aceptación de un concepto histórico.

Las constricciones $e_i = 0$ implican que en cada capa existen zonas en que el campo de velocidad es mayor que cero y otras en que es menor que cero y, por lo tanto, líneas en que $u_{ij} = v_{ij} + c_j = 0$. Estas en principio pueden tomar distintas pendientes, pero el hecho de minimizar L implica una condición muy fuerte sobre la geometría de las líneas en que $u(x,z) = 0$ (cerca de la horizontal en un nivel dado: el nivel de referencia). Los campos de velocidad generados al utilizar este criterio (Wunsch, Fiadeiro y Veronis, etc.), muestran que las líneas de velocidad igual a cero son esencialmente verticales en todas las capas, lo que hace cuestionable la proposición inicial de cero velocidad en cierto nivel. Fiadeiro y Veronis hacen flexible este problema escogiendo el nivel de referencia por la vía de seleccionar el "mejor de los mejores" niveles (the best best), en el sentido de una menor corrección, pero mantienen la condición de cercanía a la horizontal de una superficie de velocidad igual a cero en algún lugar.

3) Minimizar la energía cinética total.

Entre los posibles criterios alternativos, Wunsch (1978) menciona la posibilidad de minimizar la energía cinética total (MECT), pero parece descartarla pues comenta que "...Si tratamos de minimizar la energía cinética total del flujo, entonces en regiones como el Estrecho de Florida el resultado debería diferir radicalmente de los valores conocidos. Ahí el nivel de referencia tendería a migrar cerca de la superficie de manera que baje la alta energía cinética total."

Este párrafo es polémico, pues no queda claro si Wunsch obtuvo los resultados que menciona o supuso que obtendría un campo de velocidad con bajas velocidades en superficie. Se considera polémico porque haciendo consideraciones sobre este criterio puede concluirse algo distinto. Veamos:

Si se acepta que en general la magnitud de la velocidad y sus gradientes son mayores en las capas superficiales (ver figura A), entonces al pedir el criterio de MECT para una columna y una capa se obtiene lo siguiente:

La energía está dada por $E = \frac{1}{2} \int_0^H \rho (v(z) + c)^2 dz$; derivando la energía con respecto a c , aproximando $\rho = \text{cte.}$ y encontrando el mínimo, se obtiene:

$$c = \frac{1}{H} \int_0^H v(z) dz$$

que es la velocidad promedio inicial.

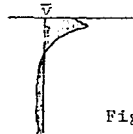


Fig. A

Esta c divide en áreas iguales el perfil de velocidad. Si se acepta que en general las velocidades y los gradientes verticales grandes se localizan en las capas superficiales, como en la figura A, entonces este criterio, en primera aproximación, mantiene velocidades grandes en las capas superficiales y bajas en las profundas. Esto es claramente distinto a lo que Wunsch plantea. Si se considera a ρ (función de peso), el nivel de referencia tiende a bajar ligeramente porque siempre crece con z .

Justificaciones a este criterio.

- a) En la misma línea de pensamiento en que se propone minimizar la energía cinética en una zona, puede pensarse en MECT del campo de velocidad.
- b) Para un campo de densidad dado, gran parte de la información de la energía potencial del sistema está determinada (excepto la topografía de la superficie oceánica), y parte de la información del campo de velocidad es fija ($\partial u / \partial z$). Añadir mínima información a priori puede interpretarse como minimizar la energía cinética que es consistente con el campo de densidad dado.
- c) El método de Defant encontró que la velocidad es cercana a cero en zonas en que $\partial u / \partial z$ es pequeña sobre intervalos grandes. El criterio de MECT, necesariamente produce perfiles de velocidad con velocidades cercanas a cero donde $\partial u / \partial z \sim 0$ sobre intervalos grandes. Para estas zonas domina el criterio de MECT, sin añadir criterios debilmente justificados como pedir que la velocidad sea cercana a cero en isobaras.

4) Minimizar la energía total del sistema.

Para este sistema, la energía total está compuesta de tres términos: energía potencial baroclínica, determinada por el campo de densidad; energía potencial barotrópica, determinada por la topografía de superficie, y energía cinética total ($\int \frac{1}{2} \rho u^2 dv$). Para un campo de densidad dado, el primer término está fijo, los dos últimos están relacionados y el segundo representa una pequeña fracción del tercero. Entonces, el minimizar la energía total para un campo de densidad dado, significa minimizar la energía barotrópica más la energía cinética. Esto es numéricamente muy similar a minimizar la energía cinética (Apéndice 6.1), pero añadiendo

una justificación física: Si para un campo de densidad dado existe sólo un estado (consistente con las restricciones $e_i=0$), en que la energía total toma un valor extremo (mínimo), cualquier otro posible estado con mayor energía será inestable y tenderá a relajarse al estado base por la vía de pequeñas perturbaciones que extraen energía mediante disipación por fricción u ondas viajeras. Es de esperarse que el estado de mínima energía sea el único estable a perturbaciones que no cambian el campo de densidad.

Soluciones a estos criterios.

En el Capítulo 2 se obtuvo la solución para el criterio de Wunsch utilizando multiplicadores de Lagrange; ahora se utiliza este método para resolver el caso general de un sistema subdeterminado y consistente sujeto a condiciones externas.

Sea $\Phi(c)$ la cantidad que se desea minimizar y $\nabla_c \Phi$ lineal en c (como es el caso de los ejemplos mencionados):

$$\nabla_c \Phi = Bc + d$$

Se busca encontrar un valor extremo de Φ que cumpla con las restricciones lineales impuestas, es decir:

$$e_i = \sum_j A_{ij} c_j - T_i^1 = 0 \quad \delta \quad Ac = b$$

Minimizando $\tilde{\Phi} = \Phi + \sum_j \lambda_j e_j$ se obtiene:

$$\nabla_c \tilde{\Phi} = Bc + A^t \lambda + d = 0$$

sujeto a cumplir $Ac = b$, $b = -T^1$, que puede plantearse como el sistema:

$$\begin{pmatrix} B & A^t \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ b \end{pmatrix}$$

cuya solución está dada por:

$$\begin{pmatrix} c \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B^{-1} A^t (AB^{-1} A^t)^{-1} AB^{-1} + B^{-1} & B^{-1} A^t (AB^{-1} A^t)^{-1} \\ (AB^{-1} A)^{-1} AB^{-1} & -(AB^{-1} A^t)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d \\ b \end{pmatrix}$$

La solución de este sistema depende de la existencia de $(AB^{-1}A^t)^{-1}$ y B^{-1} .
La parte interesante de este problema es:

$$c = [B^{-1} A^t (AB^{-1}A^t)^{-1} AB^{-1} - B^{-1}] d + [B^{-1} A^t (AB^{-1}A^t)^{-1}] b \quad \dots (1)$$

Soluciones particulares en los casos propuestos.

En cada uno de los criterios propuestos hay una funcional $\Phi(c)$ a minimizar.
La solución depende solo del gradiente de Φ a través de B y d (ec. (1)).

Las soluciones a los casos propuestos en la sección anterior (6.2.3) son:

1) Mínima $\|c\|$.

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \sum c_j^2 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c_i} &= \sum c_j \delta_{ij} = c_i \end{aligned}$$

$$B = I, \quad d = 0$$

y la solución se reduce a:

$$c = A^t (A A^t)^{-1} b$$

que es la solución que se obtuvo en el Capítulo 2 y que corresponde a la de Wunsch.

2) Energía cinética mínima en un nivel dado.

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \sum_j D_j c_j^2 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c_i} &= \sum_j D_j c_j \delta_{ij} = D_i c_i \end{aligned}$$

$$\nabla \Phi = Qc, \quad B = Q, \quad d = 0$$

donde Q es una matriz diagonal $N \times N$ con $Q_{jj} = D_j$, ($j=1, \dots, N$).

La solución corresponde a la solución de Wunsch pesada por las distancias entre las estaciones; por lo tanto, minimiza la energía cinética en el nivel de referencia (considerando $\rho \sim cte$). La solución es:

$$c = Q^{-1} A^t (A Q^{-1} A^t)^{-1} b$$

3) Energía cinética total mínima.

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij} (v_{ij} + c_j)^2$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial c_i} = A_i^c c_i + \sum_l \bar{A}_{il} v_{il} = (Zc)_i + T_i^c$$

$$\nabla \bar{\Phi} = Zc + T^c, \quad B = Z, \quad d = T^c$$

y la solución es:

$$c = [Z^{-1} A^t (AZ^{-1} A^t)^{-1} AZ^{-1} - Z^{-1}] T^c + [Z^{-1} A^t (AZ^{-1} A^t)^{-1}] b$$

Al comparar esta solución con la solución previa de Wunsch se observa que contiene una corrección proporcional al transporte de columnas. Ambas soluciones coinciden cuando se escoge un nivel de referencia (no isobárico) de tal manera que cada transporte de columna sea cero, esto es, en el nivel en que el transporte de cada columna alcanzaría un balance. Esto da un criterio para escoger un nivel inicial de referencia; queda por contestar si tiene sentido y cabe preguntar si tiene una relación con "el mejor de los mejores" niveles de referencia propuesto por Fiadeiro-Veronis.

4) Energía total mínima.

La energía total consta de 3 partes: energía potencial baroclínica, energía potencial barotrópica, y energía cinética total. La primera parte es constante para soluciones consistentes con el campo de densidad dado. La segunda parte se evalua en el Apéndice 6.1 y su valor es:

$$V_B = \frac{f^2}{2\rho g} \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^j (v_{lj}^s + c_j) D_l - \frac{1}{2} (v_{lj}^s + c_j) D_j \right]^2$$

donde V_B es la energía potencial barotrópica, f es el parámetro de Coriolis, $(v_{lj}^s + c_j)$ es la velocidad en superficie en la j -ésima columna, correspondientes al modelo y su corrección.

Minimizar la energía total equivale entonces a minimizar:

$$\bar{\Phi} = E + V_B = \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij} (v_{ij} + c_j)^2 + \frac{f^2}{2\rho g} \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^j (v_{lj}^s + c_j) D_l - \frac{1}{2} (v_{lj}^s + c_j) D_j \right]^2$$

donde E es la energía cinética total.

$$\nabla \bar{\Phi} = (Y + Z)c + (W + T^c), \quad B = Z + Y, \quad d = W + T^c$$

donde Y es una matriz diagonal y W es un vector con j elementos. Ambos se definen en el Apéndice 6.1.

La solución en este caso es:

$$c = [(Z + Y)^{-1} A^t (A(Z + Y)^{-1} A^t)^{-1} A(Z + Y)^{-1} - (Z + Y)^{-1}] (Tc + W) \\ + [(Z + Y)^{-1} A^t (A(Z + Y)^{-1} A^t)^{-1}] b$$

Para valores comunes de η (desviación del nivel medio del mar) en el océano, la diferencia entre B y d calculados en este caso y aquellos obtenidos en el caso anterior son del orden de 1 % lo cual produce resultados numéricos muy similares para ambos criterios, reforzando así su aparente validez como criterios apropiados para resolver el problema de la subdeterminación del sistema.

Objetividad de las soluciones.

Al principio de este capítulo se definió una solución objetiva como aquella en que no existe dependencia del nivel inicial de referencia. Se definió como 'a' al vector con elementos a_j dados por:

$$a_j = v_{ij}' - v_{ij}'' \quad (j=1, \dots, N)$$

de donde $b'' = b' - Aa$, con b'' los transportes referidos a un distinto nivel de referencia.

1) Mínima $\|c\|$.

Se encontró que la solución está dada por:

$$c = A^t (AA^t)^{-1} b$$

entonces

$$c' = A^t (AA^t)^{-1} (b - Aa) \\ = A^t (AA^t)^{-1} b - A^t (AA^t)^{-1} Aa \\ = c - A^t (AA^t)^{-1} Aa$$

y $A^t (AA^t)^{-1} A = I$ sólo en el caso en que A^{-1} exista, y en este caso A es no singular. En los casos interesantes c depende del nivel inicial de referencia. Este resultado explica analíticamente los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

2) Energía cinética mínima en un nivel.

Para este caso

$$c' = Q^{-1} A^t (AQ^{-1} A^t)^{-1} (b - Aa)$$

6

$$c' = c - Q^{-1} A^t (A Q^{-1} A^t) A a$$

donde Q es una matriz cuadrada y diagonal con $Q_{jj} \neq 0$ para toda j , por lo tanto siempre existe Q^{-1} . En forma análoga al caso anterior, $Q^{-1} A^t (A Q^{-1} A^t)^{-1} A = I$ sólo si existe A^{-1} , por lo que en los casos interesantes la solución no es objetiva.

3) Mínima energía cinética total.

En este caso:

$$\begin{aligned} c' &= [Z^{-1} A^t (A Z^{-1} A^t)^{-1} A Z^{-1} - Z^{-1}] (T^c - Z a) + [Z^{-1} A^t (A Z^{-1} A^t)^{-1}] (b - A a) \\ &= c - [Z^{-1} A^t (A Z^{-1} A^t)^{-1} A Z^{-1} - Z^{-1}] Z a + [Z^{-1} A^t (A Z^{-1} A^t)^{-1}] A a \\ &= c - Z^{-1} A^t (A Z^{-1} A^t)^{-1} A Z^{-1} Z a - Z^{-1} Z a + Z^{-1} A^t (A Z^{-1} A^t)^{-1} A a \end{aligned}$$

como Z es cuadrada, diagonal y con $Z_{jj} \neq 0$ para toda j , entonces:

$$Z^{-1} Z = Z Z^{-1} = I$$

y el segundo y cuarto términos se anulan, resultando:

$$c' = c - a$$

y por lo tanto c es una solución objetiva, lo que hace innecesario plantearse el conflictivo problema del nivel de referencia.

En el caso de mínima energía total, se puede demostrar que la solución tampoco depende del nivel inicial de referencia (Barberán y Zavala) (1986).

Existencia y unicidad de las soluciones.

En todos los casos discutidos aparecen matrices ó productos de matrices inversos, que en general involucran a las matrices A , A^t y Z . La matriz Z siempre tiene inversa pero no así A y A^t ó los productos entre estas matrices y la matriz Z . En caso de que no existan las matrices inversas, siempre es posible recurrir a la DVS que permite obtener una inversa que recupera el máximo de la información contenida en el problema en el mismo sentido en que se definió b^p . Esta inversa se discute en el Capítulo 2.

La unicidad de las soluciones depende de que $\nabla \Phi = 0$ tenga una solución única. En los casos en que el sistema es lineal y aceptando la DVS como la inversa con mayor información, la solución siempre es única.

6.3 CIRCULACION EN LA PARTE SUR DEL GOLFO DE CALIFORNIA. UN EJEMPLO OBTENIDO CON EL CRITERIO DE MECT.

6.3.1 OBJETIVOS GENERALES.

De acuerdo a lo arriba expuesto, la diferencia numérica entre la solución de MECT y la de mínima energía total, es mínima. Para este caso se optó por la solución de MECT por ser menos engorrosos los cálculos, y puede considerarse que los resultados y conclusiones son válidos para los dos casos pues la diferencia numérica entre ambos resultados es del orden del ruido en el sistema.

La zona de estudio en este trabajo es la parte sur del Golfo de California, con datos de la Campaña Oceanográfica Bermejo I, que se llevó a cabo en ene-feb de 1984 (Cap. 4). El transecto de estudio comprende la sección entre Altata y Punta Arena. Los datos son los mismos que se utilizan en el Capítulo 5 para examinar los resultados que se obtienen con el método de Wunsch. Esto permite un punto de comparación.

El camino que se siguió para este estudio es similar al utilizado con el método de Wunsch en el capítulo anterior. Este está enfocado a revisar:

- a) La evolución de los resultados al aumentar el número de eigenvalores involucrados en la solución de la matriz inversa $(AZ^{-1}A^t)^{-1}$.
- b) La evolución de los resultados al cambiar la configuración del sistema y aumentar el número de capas.
- c) Las diferencias y similitudes entre los resultados obtenidos con el criterio de MECT y con los del método de Wunsch.
- d) La concordancia del campo de velocidad obtenido con el criterio de MECT y lo que se observa en el transecto de salinidad y otros estudios.

6.3.2 ALGORITMO.

La solución que se obtiene con el criterio de MECT es:

$$c = [Z^{-1}A^t(AZ^{-1}A^t)^{-1}AZ - Z^{-1}] T^c + [Z^{-1}A^t(AZ^{-1}A^t)^{-1}] b$$

que puede escribirse como:

$$c = -Z^{-1}T^c + Z^{-1}A^t(AZ^{-1}A^t)^{-1}[AZ^{-1}T^c - T] \quad \dots \quad (2)$$

La matriz Z es diagonal, $Z_{jj} \neq 0$ y siempre existe Z^{-1} . Para obtener la inversa de $AZ^{-1}A^t$, puede optarse por dos caminos equivalentes; uno consiste en calcular $B = AZ^{-1}A^t$ y obtener por DVS B^{-1} , y el otro consiste en definir $D = Z^{-1}A$ y re-

escribir el producto $Z^{-1}A^t(AZ^{-1}A^t)^{-1}$ en términos de D como sigue:

$$Z^{-1}A^t(AZ^{-1}A^t)^{-1} = Z^{-1/2}D^t(DD^t)^{-1}$$

pero $D^t(DD^t)^{-1}$ es la inversa de Moore-Penrose para la matriz D en casos subdeterminados (Cap. 2). Se demostró en ese capítulo que esta inversa y la que se obtiene por DVS son iguales cuando $R = M$. Esto permite resolver el problema obteniendo la inversa de la matriz D ó calculando la inversa de B. De acuerdo con la DVS, ambos caminos son equivalentes, pero se optó por explorar ambos para evaluar los errores numéricos (de truncación) en uno y otro caso. Cuando se obtiene la inversa de B la llamamos B^{-1} y de manera análoga para D.

6.3.3 INTERPRETACION DE TERMINOS.

Al principio del capítulo se definieron T^q , T^c y Z. Utilizando estas definiciones, el primer término de la ecuación (2) se interpreta como:

$$Z^{-1}T^c = \frac{\text{Transporte de columnas}}{\text{Area de columnas}} = \text{Velocidad media de columnas}$$

En el segundo término de la ec. (2), el primer término dentro del paréntesis cuadrado $(AZ^{-1}T^c)$ puede interpretarse como:

$$AZ^{-1}T^c = \text{Transporte de capas si las columnas se movieran con la velocidad media por columna.}$$

Resulta interesante señalar que en el caso de una sola capa, el segundo término de la ec. (2) se anula porque $AZ^{-1}T^c = T^1$. Al sumar el primer término de la ec. (2) al campo de velocidad inicial, se anula la velocidad ahí donde toma el valor promedio. Por lo tanto en primera aproximación (una capa), el criterio de MECT lleva el nivel de cero movimiento cerca de las zonas en que $\partial u / \partial Z \sim 0$ en rangos grandes (en general zonas profundas), lo que en principio difiere de la suposición de Wunsch para el criterio de MECT.

6.3.4 PRESENTACION DE RESULTADOS.

Para analizar los problemas enlistados al principio de la sección 6.3 se trabajaron 5 configuraciones distintas (las mismas del capítulo anterior, definidas en la Tabla 5.1). Cada una de ellas se trabajó con B^{-1} y D^{-1} . Se graficaron los resultados de velocidad en superficie para cada uno de estos casos y se muestran en la fig. 1. También, de manera análoga a los resultados presentados en el capítulo anterior, se calcularon los residuales de los transportes para cada configuración (fig. 2). Los eigenvalores que se obtuvieron para cada una de las configuraciones se presentan en la Tabla 1. Los elementos de la matriz A son los mismos del capítulo anterior, presentados en la Tabla 5.2. De manera análoga los elementos de $V(v_{ij})$ son los de la Tabla 5.3. Del análisis de los resultados obtenidos con distintas configuraciones y número de eigenvalores involucrados en la solución, se eligió uno como el óptimo para elaborar un transecto (corte bidimensional de velocidad vs. posición) en la zona de estudio. Este se presenta en la fig. 3. Se calcularon los flujos netos en la sección de estudio y los resultados se presentan en la Tabla 2.

TABLA 1

NUMERO DE CAPAS	EIGENVALORES PARA EL ALGORITMO D^{-1}	EIGENVALORES PARA EL ALGORITMO E^{-1}
5	4.075×10^7	1.660×10^{15}
	1.568×10^6	2.461×10^{12}
	7.357×10^5	5.413×10^{11}
	3.304×10^4	1.091×10^{10}
	2.463×10^3	6.067×10^8
4	5.152×10^7	2.655×10^{15}
	1.754×10^6	3.079×10^{12}
	7.362×10^5	5.420×10^{11}
	4.463×10^4	2.156×10^7
3	7.644×10^7	5.844×10^{15}
	1.227×10^6	1.507×10^{12}
	5.573×10^5	3.106×10^9

TABLA 1 (cont.)

NUMERO DE CAPAS	EIGENVALORES PARA EL ALGORITMO D ⁻¹	EIGENVALORES PARA EL ALGORITMO B ⁻¹
2-B	8.322 x 10 ⁷ 1.801 x 10 ⁶	6.926 x 10 ¹⁵ 3.246 x 10 ¹²
2-A	1.134 x 10 ⁸ 1.032 x 10 ⁶	1.286 x 10 ¹⁶ 1.066 x 10 ¹²

TABLA 2

FLUJOS NETOS EN LA BOCA DEL GOLFO DE CALIFORNIA
EVALUADOS CON EL CRITERIO DE M.E.C.T.

Flujo total de entrada	5.63 ± 0.6 x 10 ⁶ m ³ /s
Flujo total de salida	5.87 ± 0.6 x 10 ⁶ m ³ /s

Flujos de entrada y salida en la boca del Golfo de California en el transecto comprendido entre Altata y Punta Arena entre 0 y 1000 mts de profundidad.

La fig. 1 muestra la velocidad en superficie en el transecto A-B obtenida con el criterio de M.E.C.T. Primero se presentan los resultados obtenidos con el algoritmo basado en D^{-1} (figs. 1a-1f), y posteriormente los resultados obtenidos con el algoritmo basado en B^{-1} (figs. 1g-1l).

- representa los resultados que incluyen el primer eigenvalor.
- representa los que incluyen los dos primeros eigenvalores.
- representa los que incluyen los tres primeros eigenvalores.
- +++++ representa los que incluyen los cuatro primeros eigenvalores.
- representa los que incluyen los cinco primeros eigenvalores.

fig. 1a

Configuración 1

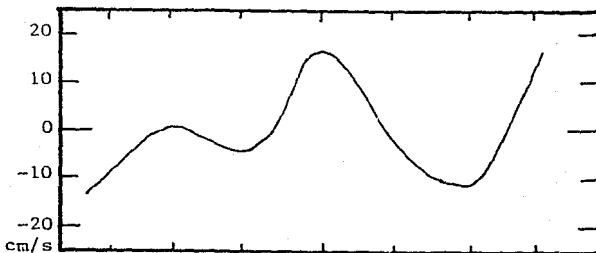


fig. 1b

Configuración 2-A

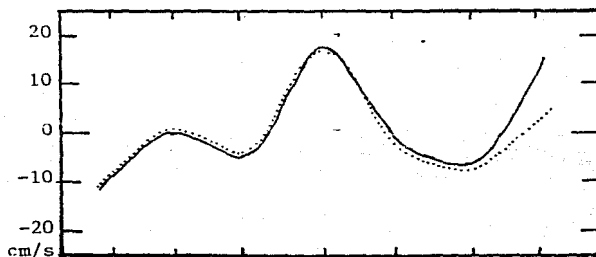


fig. 1c

Configuración 2-B

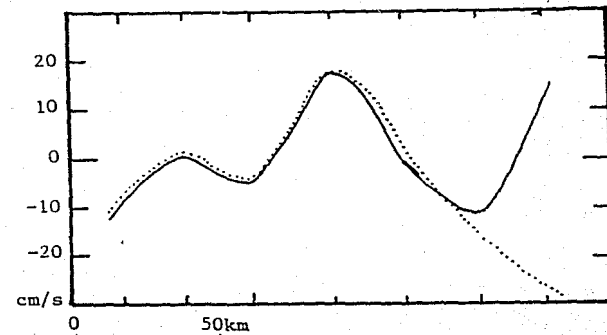


fig. 1d
Configuración 3

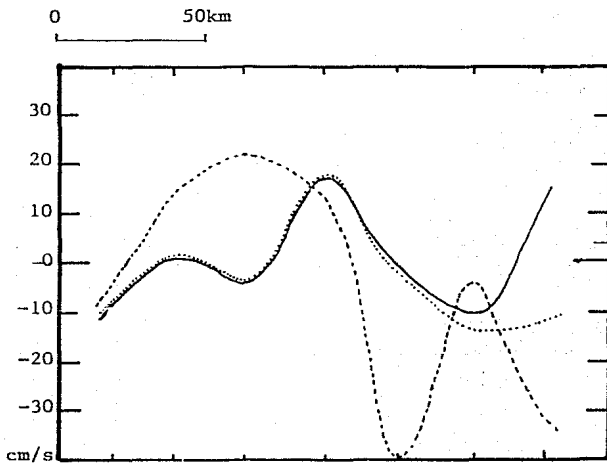


fig. 1e
Configuración 4

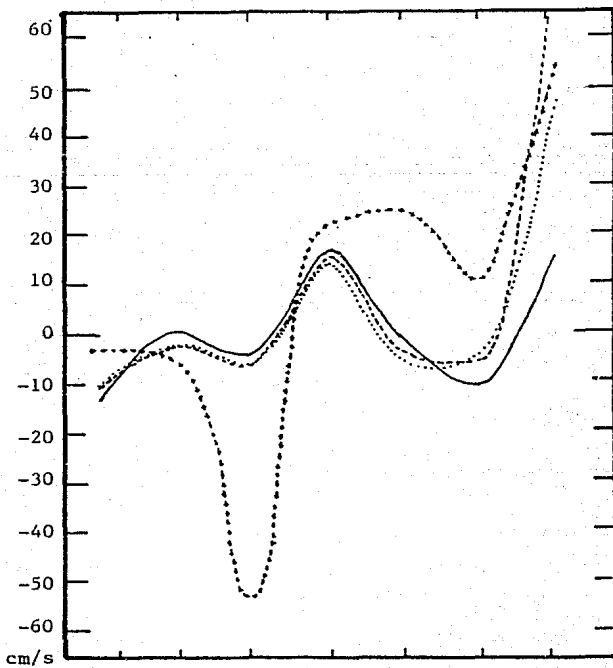


fig. 1f
Configuración 5

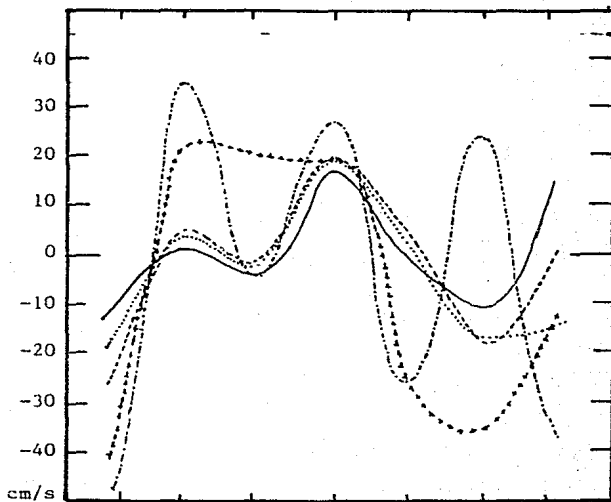


fig. 1g
Configuración 1

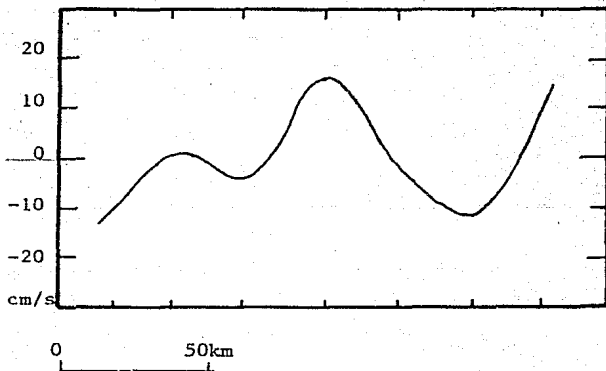


fig. 1h
Configuración 2-A

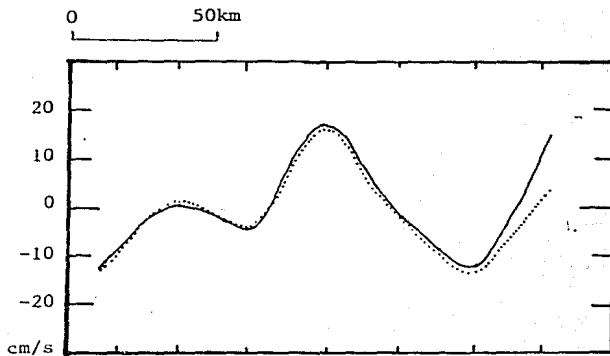


fig. 1i
Configuración 2-B

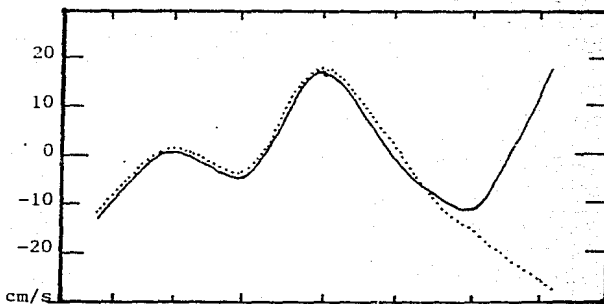


fig. 1j
Configuración 3

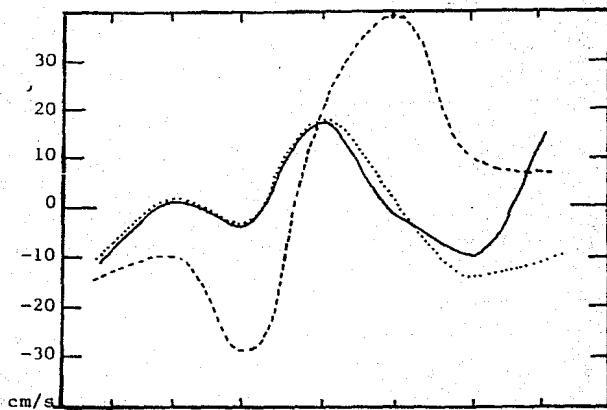


fig. 1k
Configuración 4

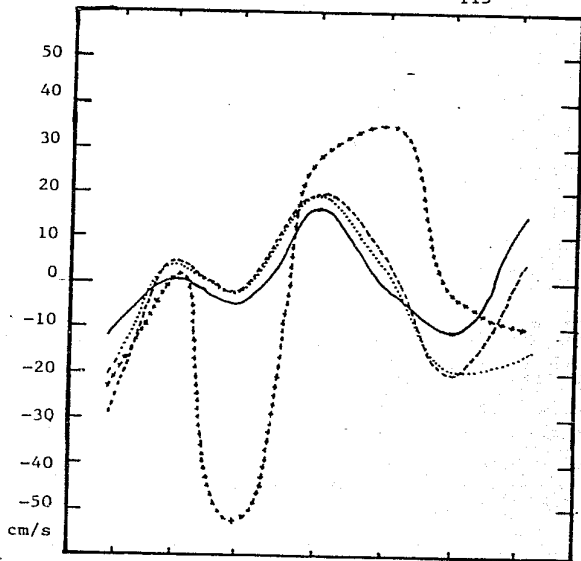


fig. 1l
Configuración 5

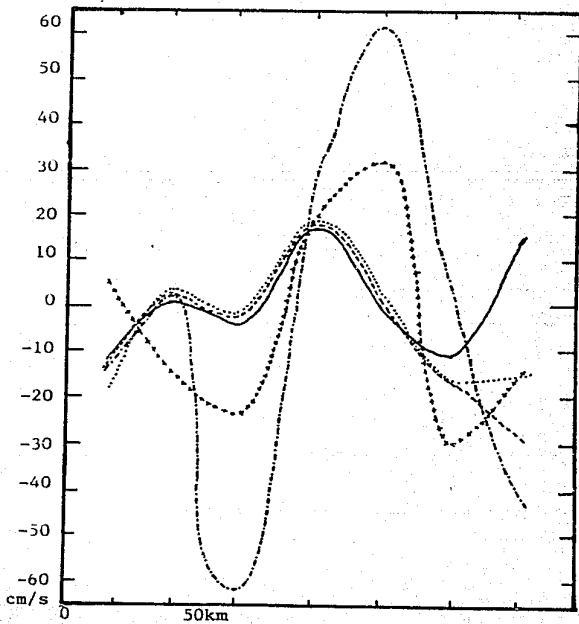


fig. 2.- Transportes.

La figura 2 muestra los transportes para las distintas configuraciones. En la parte superior de las gráficas se muestran los transportes para las capas que conforman el sistema calculados con los resultados obtenidos al aplicar el criterio de MECT en esa configuración. En la parte inferior de cada gráfica se muestran los transportes σ_i del sistema más general de 5 capas. Esta parte de la gráfica es de gran utilidad, pues muestra como se gana información al cambiar la configuración.

Con barras negras se representa la suma de los valores absolutos de los imbalances en las distintas capas, y con barras blancas el imbalance en cada una de las capas.

Las figuras 1a-1f muestran los transportes calculados con los resultados obtenidos con el algoritmo D^{-1} , y las figuras 1g-1l los transportes calculados con los resultados obtenidos con el algoritmo B^{-1} .

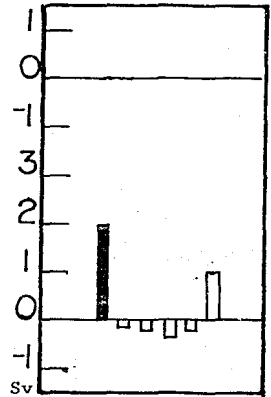


fig. 2a. - Configuración 1.

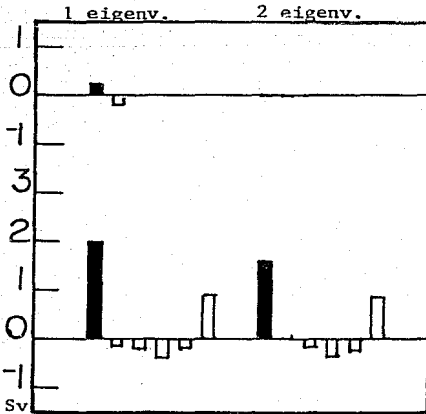


fig. 2b. - Configuración 2-A.

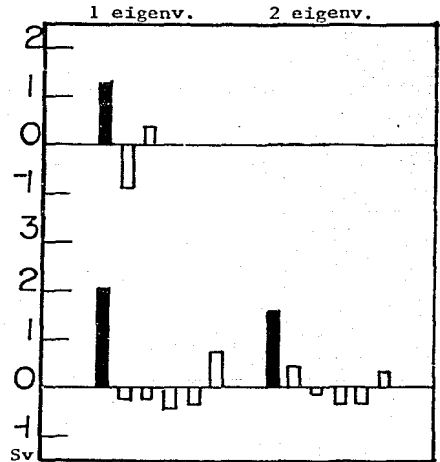


fig. 2c. - Configuración 2-B.

fig. 2d.- Configuración 3

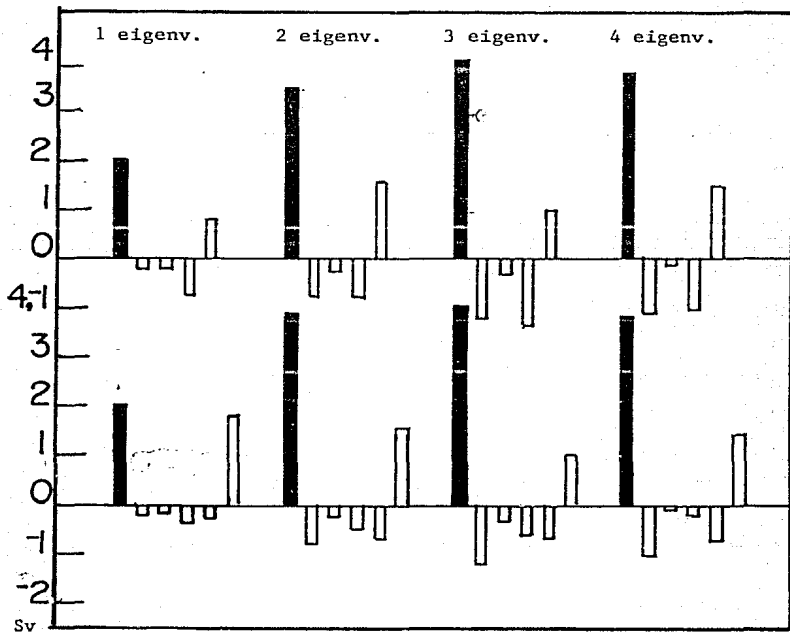
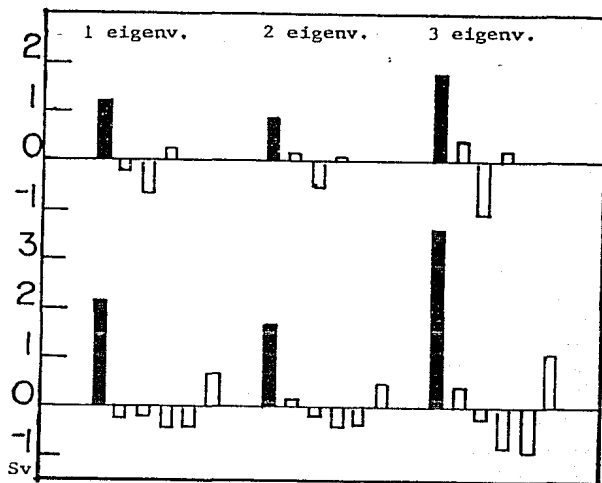


fig. 2e.- Configuración 4.

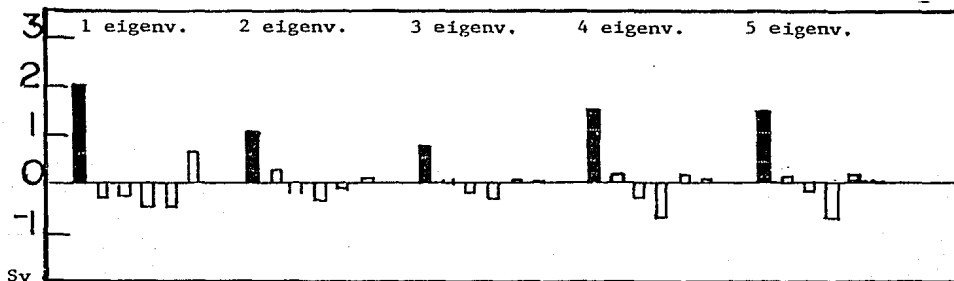


fig. 2f .- Configuración 5.

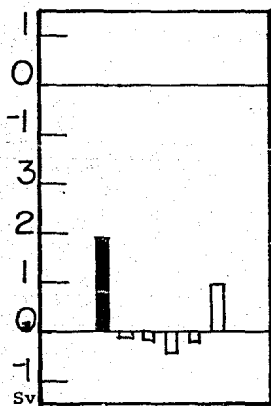


fig. 2g.- Configuración 1.

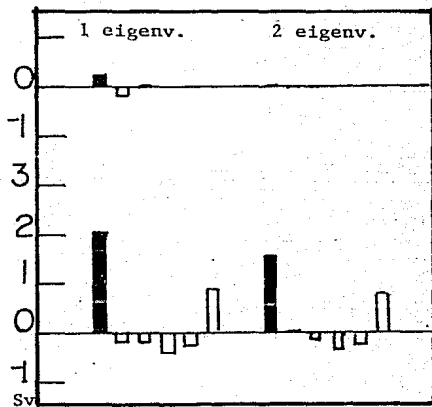
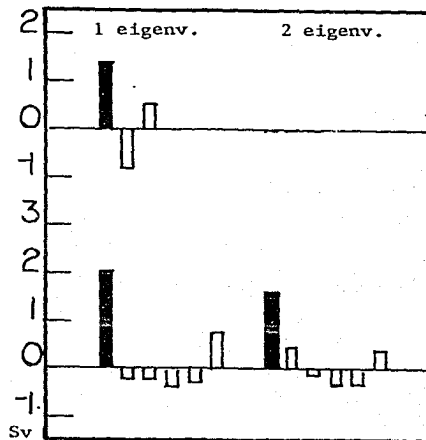
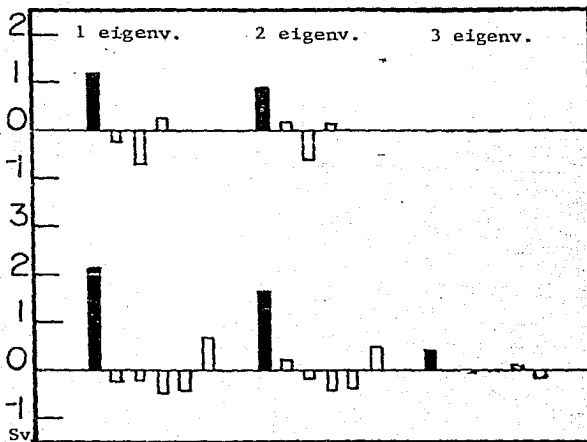


fig. 2h.- Configuración 2-A.

fig.2i .- Configuración 2-B.

fig. 2j.-
Configuración 3.

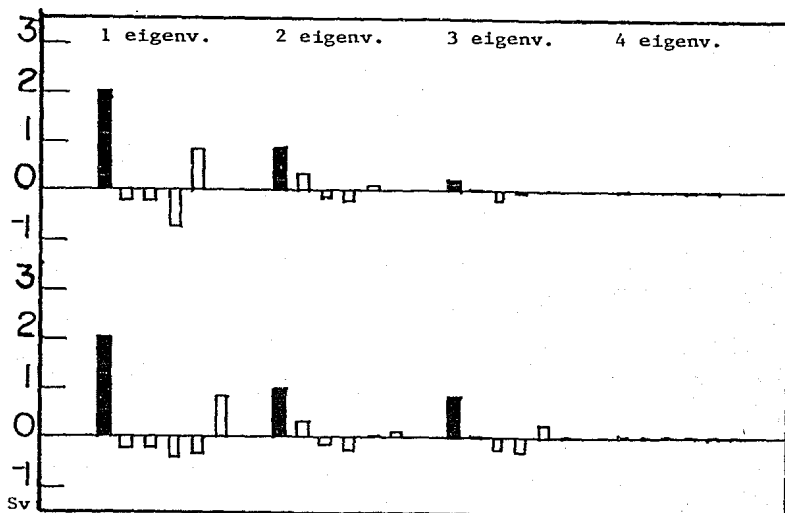


fig. 2k.- Configuración 4.

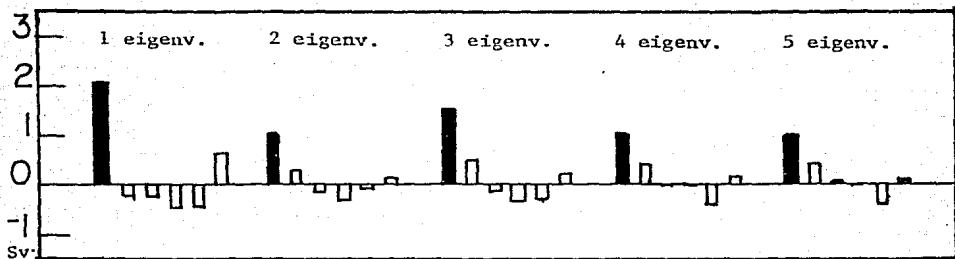
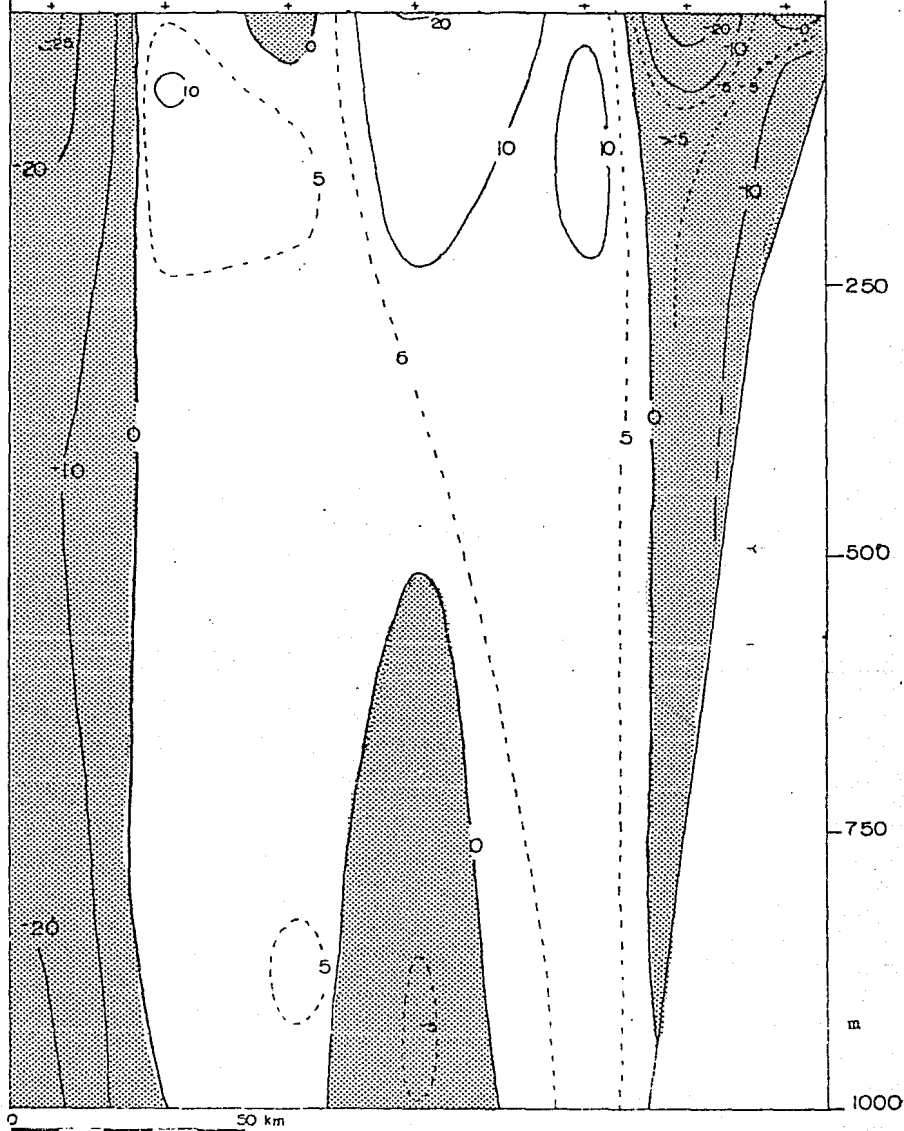


fig. 2l.- Configuración 5.

fig. 3.- Velocidad (cm/s) en el transecto A-B calculada con el criterio de MECT.



6.3.5 DISCUSION DE RESULTADOS.

Un problema colateral es el producido por los errores numéricos de truncación. Como es posible realizar los cálculos con dos opciones, B^{-1} y D^{-1} , se analizan los errores en cada uno de estos casos antes de discutir los resultados en sí mismos.

Cuando los resultados para el campo de velocidad en superficie evaluados con las opciones B^{-1} y D^{-1} coinciden, (con una aproximación de al menos un milímetro/segundo), en el siguiente esquema se marcan con una c, cuando no es así, con una x.

# de capas	1 eigenv.	2 eigenv.	3 eigenv.	4 eigenv.	5 eigenv.
1	c				
2-A	c	c			
2-B	c	c			
3	c	c	x		
4	c	x	x	x	
5	c	c	x	x	x

Los resultados del campo de velocidad en superficie se muestran en la fig. 1. La no coincidencia se atribuye a los errores de truncación, que son del mismo tipo de los señalados en el capítulo anterior para la configuración de cinco capas. El análisis profundo de este problema no se hace aquí, por no ser fundamental para este trabajo.

Un criterio para elegir entre una y otra opción resulta del análisis de los transportes residuales (fig. 2). En esta figura se observa que para B^{-1} se alcanza prácticamente un balance perfecto ($\sum |T_i^c| \leq 0.1 \times 10^6$ Sv) en las capas que forman el sistema, para todas las configuraciones excepto para el caso de 5 capas. Para D^{-1} , esto sólo se logra en los casos de una y dos capas. Esto obligó a optar por B^{-1} y permite además confiar en que no existen errores numéricos considerables en las configuraciones en que se alcanza un balance casi perfecto. De aquí en adelante al referirnos a los resultados debe entenderse a los obtenidos con B^{-1} .

Objetividad de los resultados.

Se revisó, como prueba de consistencia, que los resultados obtenidos no dependan del nivel de referencia inicial. Para esto se calculó la velocidad en superficie a partir de los niveles de referencia en 0 y 1000 mts. para la configuración de cuatro capas y todos sus eigenvalores posibles obteniéndose concordancia

en todos los casos, con diferencias entre ellos siempre menores de 2 mm/s.

Campo de velocidad al variar el número de capas y eigenvalores.

Al igual que en el capítulo anterior, se espera que al aumentar el número de capas se gane información por imponer condiciones de conservación más rígidas. Esto es válido hasta que los errores por truncación o de los datos, sean considerables. Para evaluar este problema se utilizan los transportes residuales, tanto los de las capas que conforman el sistema, como los de la configuración más general (de 5 capas). Los primeros son un indicador del tamaño de los errores de truncación y los segundos tienen gran importancia para conocer que tanta información se gana al cambiar la configuración del sistema.

En este estudio se observa que los residuales en las capas que forman el sistema disminuyen al incorporar más eigenvalores en la solución; cuando el número de eigenvalores que se incorpora en la solución es igual al número de capas que conforman el sistema, los residuales alcanzan la solución óptima (fig.2). Este comportamiento se presenta en todos los casos excepto en la configuración de cinco capas en que no se observa una mejoría para más de 2 ó 3 eigenvalores, y nunca se alcanzan a eliminar los residuales.

En base al criterio de buscar minimizar los transportes residuales, tanto para las capas que conforman el sistema como para las del sistema más general, puede optarse por los casos de 3 capas 3 eigenvalores, y los casos de 4 capas con 2, 3 y 4 eigenvalores.

Otra condición que se espera de la solución consiste en su estabilidad, es decir, que al incorporar más información (capas y/o eigenvalores), la solución debe variar relativamente poco y presentar un esquema que "converja" hacia una solución. En los casos en que no es así, puede considerarse que esta desviación es producto de los errores en los datos, entre los que se incluyen: áreas, geostrofia relativa, relleno de calas, etc. Esta condición permite discriminar los resultados en que no se observa estabilidad con los resultados de otras configuraciones o número de eigenvalores incorporados en la solución por DVS.

Aplicando estos criterios para eliminar soluciones a los casos antes seleccionados, los resultados obtenidos con 3 capas y 3 eigenvalores y los de 4 capas y 4 eigenvalores no cumplen con la condición de estabilidad ni son similares a otros resultados. Estos criterios de selección dejan los casos de 4 capas con 2 y 3 eigenvalores como los que contienen mayor información sin que el ruido sea significativo. Debe subrayarse que en el capítulo anterior se llegó a seleccionar la misma configuración con igual número de eigenvalores. Esto resulta de que en aquel caso la matriz a la que se calcula la inversa es (AA^T) y en este caso es

$(AZ^{-1}A^t)$, donde Z es una matriz diagonal.

Observaciones.

Con este método, en la configuración de una capa se obtiene un campo de velocidad igual al que se obtiene si se pide hacer cero el transporte de cada columna. Esta es la primera aproximación con el criterio de MECT. Al aumentar el número de capas que conforman el sistema, se pide que se cumplan condiciones de conservación más finas que provocan ajustes a la primera aproximación.

Los elementos de la matriz tienen errores debidos a ondas internas, error en la distancia entre estaciones, etc. Cuando estas variaciones son comparables a la información que se incorpora en el sistema (al aumentar capas y/o eigenvalores), se obtiene una solución que con pequeñas variaciones en los elementos de A observa grandes variaciones en el campo de velocidad. Como lo que buscamos son soluciones estables (geostróficas y de MECT), esto le da sentido a descartar las soluciones inestables.

Validación de resultados.

Como se discutió en el Capítulo 3, en las zonas en que el muestreo no cubrió el área de estudio se procedió a extrapolar los datos de acuerdo a los criterios y algoritmos expuestos en dicho capítulo. Este problema únicamente se presentó en la sección comprendida entre las estaciones 1-2 y 3-4 debido a la presencia del talud continental. En las otras secciones el muestreo original es completo.

Los resultados elegidos son estables y con alta correlación con otros de distintas configuraciones (como la de 5 capas con 2 y 3 eigenvalores), presentando diferencias considerables sólo en la estación 1 (costa oriental) y en la sección 7 (costa occidental), aunque menores en esta última (ver fig. 1). El resto de las secciones muestra gran estabilidad. Este problema, junto con la fricción debida al talud, sugiere tomar con cautela los datos de las dos secciones mas al oriente y relativamente los de la costa occidental.

Líneas en donde se anula la velocidad.

Uno de los problemas que se han venido discutiendo en este trabajo es el "nivel de cero movimiento" y el nivel inicial de referencia. Este último no es necesario con este método y resulta interesante preguntar: ¿qué tan isobárico es el nivel inicial de referencia que coincide con este resultado?.

La fig. 3 muestra que el nivel de cero movimiento resultante no tiene nada que ver con líneas isobáricas (de igual presión) o isopicnas (de igual densidad),

sino que por el contrario, son esencialmente perpendiculares a las líneas isobaras e isopícnas.

Otro problema relacionado con el nivel de referencia es el de la magnitud de la velocidad general en aguas profundas. En este transecto (fig. 3) se observan en aguas superficiales mayores gradientes horizontales de velocidad que los observados en aguas profundas, pero en éstas existen gradientes horizontales considerables, lo que también cuestiona el "nivel de referencia". El campo de velocidad muestra velocidades relativamente altas en aguas profundas, principalmente en la zona occidental del transecto.

Todo esto lleva a concluir que hablar de un nivel de referencia más ó menos horizontal no tiene sentido, por lo menos en este caso.

Correspondencia con observaciones anteriores.

En el Capítulo 4, se señaló que otros autores han detectado una corriente hacia el sur bien definida en la parte occidental de la boca del Golfo para esta época del año. Este campo de velocidad (fig. 3) muestra esta corriente, con la característica de ser muy profunda y relativamente intensa.

Cerca de la costa oriental (entre las estaciones 2 y 3) existe también una intensa corriente superficial hacia el sur. Esta no ha sido reportada con la consistencia de la corriente en la parte occidental de la boca.

La magnitud de las velocidades son del orden de las reportadas anteriormente. En términos generales existe una correspondencia cualitativa entre este campo de velocidad y las observaciones anteriores. Los flujos netos de entrada y salida en el área de estudio se exponen más adelante.

Correspondencia con otros parámetros observados.

Como se señaló en el Capítulo 4, la salinidad del agua es un parámetro significativo en el Golfo. La comparación que pueda realizarse con este parámetro es de tipo cualitativo, pero puede ser útil para comprender la dinámica del Golfo.

Los flujos hacia el sur están localizados en la zona occidental, entre las estaciones 7 y 8 principalmente, y entre las estaciones 2 y 3. En estas secciones se observan subsuperficialmente las zonas de alta salinidad, excepto una bien definida entre las estaciones 3 y 4 (ver fig. 4.13). Esta zona puede explicarse en parte si consideramos que la velocidad resultante corresponde a la velocidad promedio en la sección. Sin embargo, no toda esta zona puede explicarse así, y es posible que existan reflujos (agua que sale y entra) que expliquen este problema. En la vecindad de la estación cinco, subsuperficialmente se observa una zona de baja salinidad (menor de 34.8), que encuentra correspondencia con el núcleo del

flujo hacia el norte ubicado en esa zona. Por todo esto, puede considerarse que en términos generales existe correspondencia entre el campo de velocidad obtenido con el criterio de MECT y la salinidad observada.

Flujos en la boca del Golfo.

Uno de los datos importantes para la climatología oceánica son los transportes. En este trabajo se calcularon los flujos totales de entrada y salida. Para este cálculo se utilizaron todos los datos, separando las zonas con flujo positivo de las zonas con flujo negativo. Se consideró el campo de velocidad geostrofica absoluta obtenido con el criterio de MECT como velocidad promedio a lo ancho de cada sección. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 2.

Comparación entre los campos de velocidad resultantes con el criterio de mínima energía cinética total y el criterio de mínima norma de la velocidad en una superficie (Wunsch).

Los resultados obtenidos para la misma zona y con la misma base de datos, pero con distintos criterios, presentan algunas características diferentes y otras similares.

La energía cinética en la isobata de 1000 mts. ($\sum_j D_j v_j^{(1000)}$) es ligeramente menor con el método de Wunsch. En superficie, con el método de Wunsch, la energía cinética es ligeramente mayor. Estas diferencias en el campo de velocidad son debidas a los distintos criterios y pueden considerarse como fundamentales en estudios climáticos.

El flujo neto es ligeramente menor en el caso de MECT, pero dentro del rango de error considerado en estos flujos. En términos cualitativos, ambos campos son similares presentando flujo hacia el sur cerca de la costa occidental y sobre la plataforma continental y hacia el norte en la parte central de la cuenca, hasta donde se presenta el talud. Esto da consistencia al esquema general de la circulación.

6.4 CONCLUSIONES.

Al aplicar el método inverso en la oceanografía para obtener un campo de velocidad geostrofica absoluta, se introducen las condiciones de conservación por la vía de hacer cero los transportes residuales y algún criterio a priori que dé información sobre la solución. Estos criterios a priori pueden ser condiciones físicas sobre el sistema, como por ejemplo minimizar la energía cinética total ó minimizar la energía total del sistema, minimizar la energía en una superficie, etc. De entre estos criterios, con algunos se obtienen soluciones dependientes del campo de velocidad inicial y con otros soluciones independientes.

Con el criterio de mínima energía total o el criterio de MECT (entre éstos las soluciones numéricas son casi idénticas), se obtienen campos de velocidad in dependientes del campo de velocidad geostrofica inicial.

Si se hacen consideraciones sobre estabilidad, resulta razonable suponer que dada la energía potencial baroclínica, sólo existe una solución estable para el campo de velocidad, y se propone que esta sea la de energía total mínima. Este es otro argumento en favor de este criterio y sugiere seguir estudiándolo.

Al revisar el campo de velocidad resultante con distintos criterios a priori, se observa que las superficies en que la velocidad se hace cero son esencialmente perpendiculares a las isobaras, lo que hace cuestionable a los criterios dependientes del nivel de referencia, sobre todo cuando se parte de un nivel isobárico o isopícnico.

En general el concepto del nivel de cero movimiento isobárico resulta questionable y debe procurar eliminarse como un elemento necesario para la estimación del campo de velocidad absoluto, buscando criterios alternativos que tengan mayor solidez física.

Los resultados de velocidad en superficie obtenidos para la boca del Golfo de California con el criterio de MECT, son cualitativamente similares a observaciones anteriores, presentando un flujo neto hacia el sur en la costa occidental y hacia el norte en la parte central. Difieren considerablemente en la parte profunda, pues se observan velocidades cuya magnitud es relativamente alta, debido a que no se impone ninguna restricción que minimice las velocidades en una zona respecto a otra. Sin embargo, los gradientes horizontales de velocidad y su magnitud son mayores en general en aguas superficiales, de acuerdo con las características generales observadas en aguas oceánicas.

El campo de velocidad que se obtiene utilizando el criterio de MECT, produce resultados coherentes con otros parámetros, con estudios anteriores en el área y con las restricciones de conservación. Difiere del método de Wunsch en que permite mayores velocidades en zonas profundas y disminuye las de superficie. Esto no sig-

nifica que no se observen velocidades relativamente grandes en superficie como cuestionó Wunsch (1978), pues por el contrario, los flujos más intensos se mantienen en superficie y las zonas con velocidades relativamente bajas, en aguas profundas. Por todo esto el criterio de MECT es una opción para el estudio de la circulación oceánica que debe seguir explorándose en sus fundamentos y experimentándose en otras zonas geográficas.

APENDICE 6.1

CRITERIO DE MINIMA ENERGIA TOTAL.

De acuerdo con lo señalado en la sección 6.2.4, la energía total del sistema está compuesta por la energía potencial baroclínica (asociada al campo de densidad), la energía potencial barotrópica (v^B) debida a las desviaciones de la superficie con respecto al geopotencial, y la energía cinética total. Entonces, al minimizar la energía potencial debe minimizarse sólo la energía potencial barotrópica ya que la baroclínica permanece fija con el campo de densidad.

Dada una distribución de ρ (densidad) fija, busquemos soluciones consistentes con esta distribución para la energía potencial barotrópica dada por:

$$v^B = \frac{1}{2} \int_x \rho g \eta^2 \quad \dots \quad (1a)$$

donde η^2 es la desviación del nivel medio del mar; δ expresada en forma discreta:

$$v_j^B = \frac{1}{2} \rho_j g \eta_j^2, \quad (\rho_j = \rho \text{ de superficie}) \dots \quad (1b)$$

De la ecuación geostrofica se tiene que:

$$\rho_j g \frac{\Delta \eta_j}{\Delta x_j} = f_j v_j, \quad ,$$

de donde:

$$\Delta \eta_j = \frac{f_j v_j}{\rho_j g} \Delta x_j \quad \dots \quad (2)$$

con f el parámetro de Coriolis y Δx la distancia entre estaciones.

Iniciando con $\eta = 0$ en $x = 0$, tenemos:

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{j-1} \Delta \eta_k + \frac{1}{2} \Delta \eta_j \quad \dots \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (3) y aproximando ρ y f como constantes en toda la sección, obtenemos:

$$\eta_j = \frac{f}{\rho g} \left[\sum_{k=1}^{j-1} v_k \Delta x_k + \frac{1}{2} v_j \Delta x_j \right] \quad \dots \quad (4)$$

Sustituyendo la ecuación (4) en la (1b), obtenemos:

$$v_j^B = \frac{f^2}{2 \rho g} \sum_{j=1}^N \left[v_l \Delta x_l - \frac{1}{2} v_j \Delta x_j \right]^2,$$

y la energía total barotrópica $v^B = \sum_j v_j^B$ está dada por:

$$v^B = \frac{f^2}{2 \rho g} \sum_{l=1}^N \left[\sum_{l=1}^j (v_{1l}^S + c_l) \Delta x_l - \frac{1}{2} (v_{1j}^S + c_j) \Delta x_j \right]^2,$$

donde v_{1l}^S es la velocidad en superficie del modelo inicial y c_l es la velocidad de corrección.

De acuerdo con lo expuesto en la sección 6.2.4 es necesario encontrar $\nabla \phi$.

Entonces:

$$\frac{\partial v^B}{\partial c_k} = \frac{f^2}{\rho g} \sum_{j=1}^N \left\{ \left[\sum_{l=1}^j (v_{1l}^S + c_l) \Delta x_l - \frac{1}{2} (v_{1j}^S + c_j) \Delta x_j \right] \left[\sum_{l=1}^j \Delta x_l \delta_{lk} - \frac{1}{2} \Delta x_j \delta_{jk} \right] \right\}.$$

Desarrollando este producto y utilizando $\sum_{l=1}^j \delta_{lk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < k \\ 1 & \text{si } j \geq k \end{cases}$ se obtiene:

$$\frac{\partial v^B}{\partial c_k} = \frac{f^2}{\rho g} \left\{ \Delta x_k \sum_{l=k}^N \left[\sum_{l=1}^j (v_{1l}^S + c_l) \Delta x_l \right] - \Delta x_k \sum_{j=k}^N \left[\frac{1}{2} (v_{1j}^S + c_j) \Delta x_j \right] - \frac{1}{2} \Delta x_k \sum_{l=1}^k (v_{1l}^S + c_l) \Delta x_l + \frac{1}{2} \Delta x_k \frac{1}{2} (v_{1k}^S + c_k) \Delta x_k \right\}.$$

Definiendo $a_l = (v_{1l}^S + c_l) \Delta x_l$, reagrupando términos, haciendo álgebra y realizando la contracción de j , se obtiene:

$$\frac{\partial v^B}{\partial c_k} = \frac{f^2 \Delta x_k}{\rho g} \left\{ (N+1) \sum_{h=1}^N a_h - (k + \frac{1}{2}) \sum_{h=1}^k a_h - \sum_{h=k+1}^N (h - \frac{1}{2}) a_h + \frac{1}{2} a_k \right\}.$$

Todos estos términos pueden expresarse matricialmente (con matrices $N \times N$).

Veamos:

$$\sum_{h=1}^N a_h \rightarrow J^a a \quad \text{con} \quad J_{N \times N}^a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{h=1}^N a_h \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{pmatrix} = J^b a$$

matriz triangular
inferior

$$\sum_{h=k+1}^N a_h \rightarrow (J^a - J^b)a, \text{ donde } J^a - J^b \text{ es una matriz triangular superior sin la diagonal.}$$

$$a_k \rightarrow I a$$

$$\sum_{h=k+1}^N a_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & N-1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{pmatrix} = J^c a$$

pero puede definirse J^c como $J^c = J^d(J^a - J^b)$, donde $J^d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & N \end{pmatrix}$

Sea X la matriz diagonal definida como:

$$X = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \Delta x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \Delta x_N \end{pmatrix}$$

Entonces en términos de matrices, el gradiente de la energía barotrópica puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \nabla_{cV} &= \frac{f^2}{\rho g} X \left\{ (N+1)J^a a - J^d J^b a - \frac{1}{2} J^b a - J^d (J^a - J^b) a + \frac{1}{2} (J^a - J^b) a + \frac{1}{2} I a \right\} \\ &= \frac{f^2}{\rho g} X \left\{ (N+3/2)J^a - J^b - J^d J^a + \frac{1}{2} I \right\} a \end{aligned}$$

pero utilizando $a_{ij} = (v_{ij}^s + c_{ij}) \Delta x_j \rightarrow Xc + XV$, puede reescribirse:

$$\nabla cV = \frac{f^2}{\rho g} X \left\{ (N + 3/2)J^a - J^b - J^d J^a + \frac{1}{2} I \right\} X(c + V).$$

El término entre corchetes depende de N y por lo tanto:

$$\nabla cV = Y(c + V) = Yc + W$$

Al sumar el término del gradiente de la energía baroclínica ∇cV al del gradiente de la energía cinética ∇E (sec. 6.2.4), se obtiene el gradiente de la energía total dado el campo de densidad:

$$\nabla c \phi = (Y + Z)c + (W + T^c)$$

donde $Y = \frac{f^2}{\rho g} X \left\{ (N + 3/2)J^a - J^b - J^d J^a + \frac{1}{2} I \right\} X$ y $W = YV$; con lo cual:

$$B = (Y + Z) \quad y \quad d = (W + T^c),$$

y la solución para el criterio de energía total mínima es:

$$c = [(Z + Y)^{-1} A^t (A(Z + Y)^{-1} A^t)^{-1} A(Z + Y)^{-1} - (Z + Y)^{-1}] (T^c + W) \\ + [(Z + Y)^{-1} A^t (A(Z + Y)^{-1} A^t)^{-1}] b.$$

REFERENCIAS

- ALVAREZ-BORREGO, S. (1980). Gulf of California. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, B.C. México.
- BACKUS, G. & GILBERT, J. (1967). Numerical application of a formalism for geophysical inverse problem. Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 13, 247-276. (Citado en Menke).
- BACKUS, G. & GILBERT, J. (1968). The resolving power of gross earth data. Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 16, 169-205. (Citado en Menke).
- BACKUS, G. & GILBERT, J. (1970). Uniqueness in the inversion of gross earth data. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 266, 123-192. (Citado en Menke).
- BARBERAN, J. & ZAVALA, J. (1985). Evaporación en el Golfo de California durante el invierno de 1983-84. Reunión Nacional de Geofísica. Noviembre.
- BARBERAN, J. & ZAVALA, J. (1986). Sobre el método inverso en la oceanografía. (Artículo en preparación).
- BURDEN, R. & FAIRES, D. (1984). Análisis numérico. Grupo Editorial Interamericana. Cap. 3, Sec. 6.
- DAVIS, E. (1978). On estimating velocity from hydrographic data. Geophy. Res. 63, 5507-5509.
- EMILSSON, I. & ALATORRE, M. (Sin fecha). Investigaciones recientes sobre la circulación en la parte exterior del Golfo de California. Contribución No. 210 del CCMYL.
- FIADEIRO, M. & VERONIS, G. (1982). On the determination of absolute velocities in the ocean. J. Mar. Res. ____, 160-182.
- FILLOUX, J. (1973). Tidal patterns and energy balance in the Gulf of California. Nature. 243, 217-221.
- FOMIN, L. (1964). The dynamic method in oceanography. Elseiver Publishing Comp.
- GALICIA, M. (1981). Circulación de las aguas en la porción central del Golfo de California. Tesis Profesional. UNAM.
- GALLEGOS, A. et. al. (1985). Observaciones oceanográficas en el Golfo de California y áreas adyacentes (ene-feb de 1984). Laboratorio de Oceanografía Física. Instituto de Ciencias del Mar y Limnología. UNAM.

- LANCZOS, C. (1961). Linear differential operators. Van Nostrand - Reinhold. Princeton New Jersey.
- MEE, L. (1985). Coastal upwelling and fertility of the southern Gulf of California: impact on the 1982-83 ENSO event. Newsletter.
- MENKE, W. (1984). Geophysical data analysis: discrete inverse theory. Academic Press.
- POND, S. & PICKARD, G. (1978). Introductory dynamic oceanography. Pergamon International Library.
- RIPA, P. (1986). Oceanografía física ó física del océano. Conferencia en la Escuela Superior de Ciencias Marinas de la Universidad Autónoma de Baja California en la Semana del Oceanógrafo. Memorias.
- RODEN, G. (1958). Oceanographic and meteorological aspects of the Gulf of California. Pacific Science, 12.
- RODEN, G. & GROVES, G. (1959). Recent oceanographic investigations in the Gulf of California. J. Mar. Res. 18, 10-35.
- RODEN, G. (1972). Thermohaline structure and baroclinic flow across the Gulf of California entrance and the Revillagigedo Islands region. J. Phys. Oc. 2, 177-183.
- RODEN, G. & EMILSSON, I. (1980). Oceanografía física del Golfo de California. (En prensa).
- ROEMMICH, D. (1980). Estimation of meridional heat flux in the North Atlantic by inverse methods. J. Phys. Oc. 10, 1972-1983.
- SANTIAGO, F. (1980). Aplicación del método dinámico y análisis de correntometría directa para el estudio de la circulación y el transporte de agua en la boca del Golfo de California. Tesis Profesional. UNAM.
- STRANG, G. (1980). Linear algebra and its applications. Academic Press. Second Edition.
- SCHOTT, F. & STOMMEL, H. (1978). Beta Spirals and absolute velocities in different oceans. Deep Sea Research. 25, 961-1010.
- UNESCO. Reporte Técnico #37.
- WARSH, C. & WARSH, K. (1971). Water exchange at the mouth of the Gulf of California. J. Geophy. Res. 76, 8098-8106.

- WIGGINGS, R. A. (1972). The general inverse problem: implication of surface and free oscillations for earth structure. Rev. Geophys. Space Phys. 10, 251-285.
- WOODS, J. D. (1984). The upper ocean and air-sea interaction in global climate. The Global Climate, (preprint).
- WUNSCH, C. (1978). The North Atlantic general circulation west of 50° W determined by inverse methods. Rev. of Geophys. and Space Phys. 583-620.
- WUNSCH, C. & GRANT, B. (1982). Towards the general circulation of the North Atlantic Ocean. Pergamon Press.
- WUNSCH, C. & MINISTER, J. F. (1982). Methods for box models and ocean circulation tracers: mathematical programming and non-linear inverse theory. J. Geophys. Res. 87, 5647-5662.
- WUNSCH, C. (1984). An eclectic Atlantic Ocean circulation model. Part 1. The Meridional flux of heat. J. Phy. Oc. 14.