



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE
MEXICO



FACULTAD DE INGENIERIA

ELEMENTOS DE ANALISIS MULTICANAL
UTILIZADOS EN EL PROCESAMIENTO
DE DATOS SISMICOS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO GEOFISICO
P R E S E N T A N

ANGEL PARRA BARRERA

HECTOR ALEJANDRO CALOCA GALINDO

MEXICO, D. F.

1986



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ELEMENTOS DE ANALISIS MULTICANAL UTILIZADOS
EN EL PROCESAMIENTO DE DATOS SISMICOS**

TESIS PROFESIONAL

ANGEL PARRA BARRERA

HÉCTOR A. CALOCA GALINDO

MÉXICO, D. F.

-1986



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVIATION

FACULTAD DE INGENIERIA

Dirección
60-I-154

Señores CALOCA GALINDO HECTOR ALEJANDRO Y
PARRA BARRERA ANGEL.
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección, propuso el Prof. Ing. - Marco A. Flores Flores, para que lo desarrollen como tesis para su Examen Profesional de la carrera de INGENIERO GEOFISICO.

"ELEMENTOS DE ANALISIS MULTICANAL UTILIZADOS EN EL PROCESAMIENTO DE DATOS SISMICOS"

- I INTRODUCCION.
- II ELEMENTOS DE PROCESADO BASICO EN FORMA UNICANAL.
- III ALGEBRA DE MATRICES POLINOMIALES.
- IV FILTRADO DIGITAL MULTICANAL Y ANALISIS ESPECTRAL.
- V FILTRO DIGITAL WIENER MULTICANAL.
- VI CONCLUSIONES.
- APENDICE.
- BIBLIOGRAFIA.

Ruego a ustedes se sirvan tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberán prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como - - requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así - como de la disposición de la Coordinación de la Administración - Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente.
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, D.F., Julio 25 de 1985.
EL DIRECTOR

Dr. Octavio A. Rascón Chávez

526
OARCH'MRV'gtg

INDICE

	PAG.
I INTRODUCCION	1
1.1.-Generalidades	1
1.2.-Objetivo y estructura de la tesis	1
II ELEMENTOS DE PROCESADO BASICO EN FORMA UNICANAL	4
2.1.-Convolución	4
2.2.-Correlación o crosscorrelación	11
2.3.-Autocorrelación	14
2.4.-Transformada Z	16
2.5.-Transformada de Fourier	19
2.5.1.-Programa SISMICA	22
2.6.-Características de filtros	24
2.6.1.-Estabilidad de Filtros Digitales de Retraso	24
2.6.2.-Características de amplitud y Fase de filtros Digitales	33
III ALGEBRA DE MATRICES POLINOMIALES	65
3.1.-Notación matricial	65
3.2.-Valores y vectores característicos de una matriz	66
3.3.-Matrices polinomiales o polinomios matriciales	68
3.3.1.-Programa MATRIXPOL	69
3.4.-Inversa de un polinomio matricial	70
3.4.1.-Programa MATPOLIN	74
3.5.-La ecuación del Determinante y la Adjunta	76
3.6.-Eigenvectores y Eigenvalores de un polinomio matricial	77
3.7.-Factorización de polinomios matriciales en productos de binomios	82
3.7.1.-Programa FACTORIZ	85

IV	FILTRADO DIGITAL MULTICANAL Y ANALISIS ESPECTRAL	92
	4.1.-Operadores multicanales	92
	4.2.-Operador multicanal <u>in</u> - verso	96
	4.3.-Autocorrelación del ope- rador multicanal inverso	101
	4.4.-Factorización del espec- tro multicanal de fase <u>mí</u> nima	104
	4.5.-Autocorrelación y Cross- correlación de series -- multicanales de tiempo	108
	4.6.-Análisis espectral de se- ries multicanales de <u>tiem</u> po	110
	4.7.-Coherencia y fase	115
V	FILTRO DIGITAL WIENER MULTICA NAL	117
	5.1.-Introducción	117
	5.2.-Diseño de filtros digita les Wiener Multicanales	118
	5.3.-Solución recursiva de- - las ecuaciones normales- multicanales	127
	5.3.1.-Programa que resuelve- las ecuaciones norma - les multicanales	129
	5.3.2.-Programa para el filtro multicanal Wiener Multi canal	131
VI	CONCLUSIONES	140
	APENDICE	142
	BIBLIOGRAFIA	153

1.- INTRODUCCION

1.1.-Generalidades

Dentro de las diversas actividades que se desarrollan en la prospección geofísica, se registra una gran cantidad de información, la cual se debe procesar e interpretar posteriormente. Durante la etapa de procesamiento a dicha información o señales, se les deben aplicar ciertas operaciones con el fin de eliminar efectos no deseados (ruido), y de esta manera lograr una mejor resolución del problema considerado. Debido a que cada señal debe tratarse por separado, la cantidad de información que se debe procesar es lo suficientemente grande, entonces surge la necesidad de crear técnicas de análisis que faciliten el manejo de esa gran cantidad de datos al mismo tiempo; tal tratamiento se puede efectuar con el análisis multicanal el cual se basa en el álgebra matricial. Debido al gran avance que ha habido de las computadoras digitales, el trabajo se reduce aun más ya que la información se maneja en forma digitizada y se puede procesar en la computadora. Por otro lado, el procesamiento de señales unicanales generalmente se basa en el álgebra escalar y puesto que en el análisis multicanal, como se dijo anteriormente, se maneja mucha información entonces debe hacerse un cambio del álgebra escalar al álgebra matricial en cuyo dominio se facilita mas el análisis.

1.2.-Objetivo y estructura de la tesis

Uno de los principales motivos a desarrollar la presente tesis fue el de introducirnos un poco en el análisis multicanal de señales, debido a su aplicación a la sismolo-

gía, por lo cual el presente trabajo tiene como objetivo-principal el de analizar las señales de eventos registrados en la sismología de reflexión, con la técnica multicanal debido a las ventajas que nos da respecto al análisis unicanal, así como también que los alumnos cuenten con -- programas referentes al análisis multicanal de señales, - con el cual puedan manejar información en los programas y de esta forma aprovechar las ventajas que esto representa. Al mismo tiempo despertar el interés del alumno por el tema, el cual parece ser poco conocido en nuestro medio.

El desarrollo de la tesis está estructurado de la siguiente forma: En primer lugar se presenta el análisis en forma unicanal de las señales, por medio de las operaciones básicas que se llevan a cabo en el procesado de datos sísmicos.

En los siguientes capítulos se exponen las bases del análisis multicanal, por medio de las mismas operaciones básicas, considerando ahora el álgebra matricial y en cada capítulo se presentan programas referentes a las principales operaciones. Posteriormente, en las conclusiones se habla de lo más relevante de la tesis.

Finalmente en el apéndice se presentan las subrutinas empleadas en los programas de los capítulos III al V las -- cuales fueron tomadas del libro: MULTICHANNEL TIME SERIES-ANALYSIS WITH DIGITAL COMPUTER PROGRAMS (ver bibliografía). Cabe mencionar, que fue necesario elaborar los programas principales que hacen uso de las subrutinas del apéndice, así como también el programa que aparece en el capítulo -- 11 y sus subrutinas.

Todos los programas presentados en esta tesis están en el lenguaje FORTRAN y fueron procesados en la computadora VAX 11/780 del centro de cálculo de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M.

II.- ELEMENTOS DE PROCESADO BASICO EN FORMA UNICANAL

2.1.-Convolución

Toda señal que es registrada en un experimento científico ha sido modificada de alguna manera por procesos físicos-naturales y por los instrumentos con los que se hace la medición. Se puede considerar que el efecto que produce el medio físico en el que se transmite la señal actúa como un filtro y se puede describir matemáticamente por medio de la convolución.

Para explicar el concepto de la convolución hay que considerar, que a un tiempo $t=0$, se aplica un impulso unitario como señal de entrada a un filtro. Este impulso o delta de Dirac se puede representar como un pulso rectangular con un ancho dt infinitesimal y área unitaria.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Fuera del intervalo dt , la amplitud del pulso es cero.

La respuesta del sistema al impulso unitario se denotará por $h(t)$, la cual recibe el nombre de "respuesta al impulso unitario".

Para un filtro con parámetros constantes, la aplicación de un impulso unitario en un tiempo $t=\tau$ producirá una respuesta retrasada el mismo intervalo de tiempo; es decir, para un pulso unitario $\delta(t-\tau)$ como entrada, el filtro dará una salida $h(t-\tau)$. Fig. 2.1.1.

Para ilustrar lo anterior véase el siguiente ejemplo. La respuesta de un sistema lineal en el dominio de las frecuencias está dado por la siguiente expresión.

$$R(\omega) = H(\omega)E(\omega)$$

Donde: $R(\omega)$ = Respuesta del sistema $R(t)$
 $H(\omega)$ = Función de transferencia $h(t)$
 $E(\omega)$ = Función de entrada o excitación $e(t)$

para este caso se considerará que: $e(t) = \delta(t)$, que define al impulso unitario, por lo cual $R(\omega) = 1H(\omega)$, y actúa como un filtro ideal pasabajas:

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-i\omega t_0} & ; |\omega| < \omega_c \\ 0 & ; |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Por consiguiente, la respuesta al impulso unitario será:

$$r(t) = h(t) = \mathcal{F}^{-1} [H(\omega)]$$

Desarrollando e integrando tenemos:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-i\omega t_0} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega$$

$$h(t) = \frac{1\omega_c}{\pi} \frac{\text{sen}[\omega_c(t-t_0)]}{\omega_c(t-t_0)}$$

Graficando el filtro ideal pasabajas y su respuesta al impulso unitario se tiene. (ver Fig. 2.1.2).

Definase una función de tiempo arbitraria $x(t)$, que va a actuar como entrada a un filtro. Dicha función se puede considerar que está formada por un gran número de pulsos rectangulares cada uno con un ancho infinitesimal y amplitud uniforme.

Cuando todos los pulsos individuales pasen a través del filtro, actuarán como pulsos de entrada individuales produciendo cada uno su propia salida. La respuesta formada por las diferentes salidas de los pulsos, respetando la relación de los tiempos entre ellas, está dada por la superposición de éstas.

Por ejemplo, para un tiempo $t=\tau$, el pulso de entrada con un ancho $d\tau$ y amplitud $x(\tau)$, tendrá un área $x(\tau) d\tau$. Por consiguiente la salida será

$$dy(t) = x(\tau) d\tau h(t-\tau)$$

integrando

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

La cual define la convolución o integral de superposición.

Por la propiedad de causalidad¹ se tiene que $h(t-\tau)=0$ para $t<\tau$, y no habrá contribución al valor de la integral en el intervalo $t<\tau<\infty$ por lo tanto, se extiende el límite superior de la integral a ∞ sin alterar la respuesta.

¹ En la mayoría de los sistemas, se hace la suposición de que la entrada y la salida al sistema están dadas por funciones causales. La propiedad de causalidad implica que el sistema no dará respuesta antes de aplicar la entrada. Señales y Sistemas Lineales. Robert A. Gabel, Richard A. Roberts, 1975.

$$x(t) * h(t) = y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad 2.1.1$$

En la práctica la operación de convolución generalmente se utiliza en forma digital, este proceso se describe de la siguiente manera.

Sean los valores muestreados de las señales a y b

$$a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \quad 2.1.2$$

$$b = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m)$$

La convolución de estas dos señales será:

$$d = a * b = (d_0, d_1, d_2, \dots, d_n)$$

El asterisco representa el operador de convolución y los coeficientes están dados por:

$$d_t = \sum_{s=0}^t a_s b_{t-s} \quad 2.1.3$$

La operación mencionada se puede visualizar si se mantiene fija una de las señales y la otra se invierte y desplaza sobre la primera. Para mayor facilidad considérese -- que $n=m=2$.

$$a = (a_0, a_1, a_2)$$

$$b = (b_0, b_1, b_2)$$

entonces:

$$\begin{array}{rcl}
 & a_0 & a_1 & a_2 \\
 b_2 & b_1 & b_0 & = a_0 b_0 \\
 & b_2 & b_1 & b_0 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \\
 & & b_2 & b_1 & b_0 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\
 \text{luego:} & & b_2 & b_1 & = a_1 b_2 + a_2 b_1 \\
 & & & b_2 & = a_2 b_2
 \end{array}$$

$$d = a * b = (d_0, \dots, d_5) = (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, a_1 b_2 + a_2 b_1, a_2 b_2) \quad 2.1.4$$

Las propiedades que se cumplen para la convolución son²

a).-Conmutatividad

$$a * b = b * a$$

b).-Asociatividad

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

c).-Distributividad con respecto a la suma

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

Aplicando la transformada directa de Fourier³ a la ecuación 2.1.1. se obtiene la convolución en el dominio de la frecuencia

$$Y(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt \quad 2.1.5$$

Sustituyendo en 2.1.5 el valor de 2.1.1.

$$Y(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) h(t-\tau) d\tau e^{-i\omega t} dt$$

²En cualquier texto de análisis de señales se podrá encontrar la demostración de las propiedades que se mencionan.

³La transformada de Fourier se analiza en la sección 2.5 de este --trabajo.

La ecuación anterior se puede expresar también como: (Propiedad de Simetría de la Transformada)

$$Y(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-i\omega t} dt d\tau \quad 2.1.6$$

De acuerdo al teorema del desplazamiento en el tiempo⁴, - la transformada de Fourier de $h(t-\tau)$ es $H(i\omega)e^{-i\omega\tau}$

Por consiguiente la ecuación 2.1.6 toma la siguiente forma:

$$Y(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) H(i\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$Y(i\omega) = H(i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Finalmente tendremos:

$$Y(i\omega) = H(i\omega) X(i\omega) \quad 2.1.7$$

La expresión 2.1.7 nos dice que la convolución en el dominio de la frecuencia es una simple multiplicación. Cabe -- mencionar que la ec. 2.1.7 es una cantidad compleja, entonces:

$$H(i\omega) = R_1 + iM_1 = M_1 e^{i\theta_1} = M_1 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$$

$$X(i\omega) = R_2 + iM_2 = M_2 e^{i\theta_2} = M_2 (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

Por lo cual

$$Y(i\omega) = H(i\omega) X(i\omega) = M_1 M_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

En donde se puede apreciar que la convolución suma las fases $(\theta_1 + \theta_2)$ y multiplica las amplitudes $(M_1 M_2)$ de las dos-

⁴ Este teorema establece que si una función $f(t)$ se transforma en $F(i\omega)$, entonces la transformada de la función $f(t)$ desplazada en un tiempo t_0 , $[f(t-t_0)]$, estará afectada por un factor $e^{-i\omega t_0}$. La comprobación de esta propiedad se puede encontrar en libros de la bibliografía.

señales $[x(t), h(t)]$ para cualquier frecuencia ω . (Ver fig. 2.1.3).

Las secuencias de números definidos en la expresión 2.1.2, pueden tratarse cada una de ellas, como polinomios en Z - obtenidos al aplicar la transformada Z^s a esa secuencia, luego:

$$a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \longrightarrow A(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_n Z^n$$

$$b = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m) \longrightarrow B(Z) = b_0 + b_1 Z + b_2 Z^2 + \dots + b_m Z^m$$

donde \longrightarrow indica que a se transforma en $A(Z)$ - multiplicando $A(Z)$ por $B(Z)$ se obtiene:

$$[A(Z) B(Z)] = (a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_n Z^n)(b_0 + b_1 Z + b_2 Z^2 + \dots + b_m Z^m)$$

Para mayor claridad en lo que se quiere demostrar hágase $n=m=2$, multiplicando y asociando los términos semejantes, se tiene:

$$[A(Z) B(Z)] = [a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)Z + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)Z^2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2)Z^3 + (a_2 b_2)Z^4]$$

Si se comparan los coeficientes de cada uno de los términos del polinomio anterior con los valores de la secuencia 2.1.4 se observará que:

$$A(Z) B(Z) = a * b = d$$

⁵ Para aclarar el concepto de transformada Z pasar a la sección 2.4 de este trabajo.

Entonces se dice que existe una equivalencia entre la transformada Z y la operación de convolución.

2.2.-Correlación ó crosscorrelación

La correlación de dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ cualesquiera, está definida por la siguiente expresión:

$$\gamma_{1,2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-\tau) dt \quad 2.2.1$$

Así, si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son señales incoherentes; es decir que no presentan continuidad y sus características físicas son aleatorias, entonces la correlación de estas funciones en un intervalo de tiempo t_1 , es:

$$\gamma_{1,2}(\tau) = \int_0^{t_1} f_1(t) f_2(t-\tau) dt \quad 2.2.2$$

Por otro lado, para funciones periódicas con período T, la función de crosscorrelación se define como:

$$\gamma_{1,2}(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t-\tau) dt \quad 2.2.3$$

La función de correlación $\gamma_{1,2}(\tau)$ de las señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$, es una medida de la similitud entre éstas en función de un desplazamiento τ .

Existe relación entre las operaciones de convolución y correlación, lo cual es importante en el procesado de datos, ya que en el cómputo de alguna de ellas se puede obtener la otra mediante una modificación sencilla. En el dominio del tiempo estas operaciones son idénticas, excepto que una de las funciones se invierte (convolución), lo cual no se hace con la otra (correlación). Analíticamente esto

se puede comprobar a partir de la integral de convolución.

$$y(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

Si en la ecuación anterior (convolución) se hace un intercambio de variables y luego se invierte la función, resulta lo siguiente:

$$\gamma_{2,1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(\tau+t) dt$$

que es la ecuación 2.2.1 y con esto se comprueba lo mencionado anteriormente sobre la relación convolución-correlación. (Fig. 2.2.1).

Aplicando la transformada de Fourier a la expresión que define a la correlación

$$\begin{aligned} F[\gamma_{1,2}(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) f_2(t-\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau dt \end{aligned}$$

haciendo $X = (t-\tau)$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(X+\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(X) e^{-i\omega t} e^{i\omega X} d\tau dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(X+\tau) e^{-i\omega t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(X) e^{i\omega X} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(X+\tau) e^{-i\omega(\tau+X)} d\tau F_2(-i\omega) \end{aligned}$$

$$F[\gamma_{1,2}(\tau)] = F_1(i\omega) F_2(-i\omega)$$

La ecuación anterior es compleja, entonces sus términos-

se pueden expresar como:

$$F_1(j\omega) = F_1 e^{\theta_1 j}$$

$$F_2(-j\omega) = F_2 e^{-\theta_2 j}$$

Por lo tanto:

$$F[\gamma_{1,2}(\tau)] = F_1 F_2 e^{(\theta_1 - \theta_2) j} \quad 2.2.4$$

Con ésto se demuestra que la correlación en el dominio de la frecuencia es idéntica a la convolución en lo que se refiere al espectro de amplitudes; mientras que para el espectro de fase como se ve no son iguales, ya que en la convolución se suman las fases y en la crosscorrelación se restan.

De lo anterior es evidente que la crosscorrelación no es conmutativa; es decir:

$$F_1 F_2 e^{(\theta_1 - \theta_2) j} \neq F_1 F_2 e^{(\theta_2 - \theta_1) j}$$

La crosscorrelación de las funciones f_1 y f_2 extraerá - - aquellas componentes de frecuencia que estén contenidas - en ambas funciones. La información relativa a cualesquiera otras componentes de frecuencia de la señal, se perderá en la salida.

Al igual que la convolución, la crosscorrelación o correlación cruzada también es muy útil expresarla en forma -- discreta:

$$g_t = \sum_{s=0}^t a_s b_{s+t}$$

0

$$g_{kt} = \sum_{\lambda=0}^{N-1} f_1(\lambda t) f_2[(k+\lambda)t] \quad \text{Para } kt = -N+1, \dots, 0, \dots, N-1$$

2.3.- Autocorrelación

La autocorrelación es un caso particular de la crosscorrelación, en la cual la señal $f_1(t)$ es correlacionada consigo misma, es decir:

$$\gamma_{1,1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t-\tau) dt \quad 2.3.1$$

Con lo que se ha mencionado, se deduce que la función de autocorrelación eleva al cuadrado cada componente del espectro de amplitud y resta las fases, las cuales siempre darán la fase de salida igual a cero. Por esta razón las autocorrelaciones de todas las señales que tengan el mismo espectro de amplitud (espectro de potencia) serán idénticas en lo que respecta a su contenido de frecuencias.

Frecuentemente son revelados fenómenos característicos -- asociados con registros sismológicos, cuando el espectro de fase es eliminado de éstos (en el dominio de frecuencias) por medio de la autocorrelación se tiene bien controlada la información de amplitud.

Puesto que la autocorrelación obliga a que todas las componentes de frecuencia se encuentren en fase, la autocorrelación de una señal con un ancho de banda será un impulso o spike.

El espectro de potencias, es el espectro de amplitud de la señal -- elevado al cuadrado.

Esto resulta cierto, si la señal de entrada es por si misma un impulso, ruido aleatorio o un registro sísmico de banda limitada con excelentes reflexiones. Pero la autocorrelación y el espectro de potencias no podrán distinguir entre la señal y el ruido formados por componentes de frecuencias similares.

La ecuación en su forma discreta se define como:

$$r_k = \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+k} b_j^*$$

La cual, dá los coeficientes de la autocorrelación r_k para cada valor entero K . Si es una señal de longitud finita (b_0, b_1, \dots, b_n) , la ecuación anterior se transforma en:

$$r_k = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-k} b_{j+k} b_j^* & \text{para } k=0, 1, \dots, n \\ r_{-k} & \text{para } k=-n, n+1, \dots, -1 \\ 0 & \text{para } k < -n \text{ y } > n \end{cases}$$

donde el asterisco indica el complejo conjugado.

Si (b_0, b_1, \dots, b_n) es una señal finita, entonces $(b_n^*, \dots, b_1^*, b_0^*)$ se le conoce como señal invertida de la primera. Para efectuar la autocorrelación simplemente involucramos las dos señales antes mencionadas. La operación mencionada aquí (con $n=2$), al tiempo cero, es igual a la suma de la diagonal principal $(r_0 = b_0 b_0^* + b_1 b_1^* + b_2 b_2^*)$, cuyo valor es conocido como energía de la onda considerada.

Los coeficientes restantes serán los términos que se localizan arriba y abajo de la diagonal principal

$$r_{-1} = b_0 b_1^* + b_1 b_2^*$$

$$r_{-2} = b_0 b_2^*$$

y

$$r_1 = b_2 b_1^* + b_1 b_0^*$$

$$r_2 = b_2 b_0^*$$

respectivamente. Por consiguiente, la autocorrelación de la señal será:

$$r_{1,r} = (r_{-2}, r_{-1}, r_{-0}, r_1, r_2)$$

puesto que: $b_i b_j^* = b_j b_i^*$. Entonces se puede afirmar lo siguiente: (Ver figura 2.3.1).

- a) La función definida presenta la mayor amplitud al tiempo cero.
- b) Siempre es simétrica.

2.4.- Transformada Z

Una señal continua puede tratarse como una secuencia (serie) de números, $X_n = X(\Delta t n)$ discretos, donde n es un entero. Los números generados X_n están dados a partir de la discretización de la señal continua a intervalos de tiempo Δt . Esta aproximación es necesaria cuando se considera un proceso digital de los datos en la computadora. Aplicando la transformada de Fourier a la serie antes mencionada, se tiene:

$$X_S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{-i\omega n \Delta t}$$

Haciendo la sustitución de $Z=e^{-i\omega\Delta t}$ es evidente que se llega a:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n Z^{-n} \quad 2.4.1$$

Aquí, mientras $X_s(\omega)$ es una función de variable real (frecuencia angular), $X(Z)$ es una función de variable compleja $Z=e^{-i\omega\Delta t}=\cos(\omega\Delta t)-isen(\omega\Delta t)$; cuya magnitud es la unidad para cualquier frecuencia. La ecuación 2.4.1 define lo que se conoce como transformada Z bajo la restricción de que su variable independiente Z cae sobre el círculo unitario. Debido a que ω varía desde $-\infty$ hasta $+\infty$, la variable compleja Z gira a lo largo del círculo unitario en el plano complejo Z , produciendo duplicación de los valores de X , ésta (duplicación) es una consecuencia directa del proceso de digitación.

Una serie del tiempo discretizada

$$X = (\dots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \dots)$$

Se puede representar como un polinomio en Z , cuyos coeficientes serán los mismos del muestreo, así de acuerdo con 2.4.1 se obtiene:

$$\begin{aligned} X(Z) &= \dots + X_{-2}Z^2 + X_{-1}Z^1 + X_0 + X_1Z^{-1} + X_2Z^{-2} + \dots & 2.4.2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n Z^{-n} \end{aligned}$$

La multiplicación de la transformada por un factor de Z^{-1} físicamente no significa más que un desplazamiento de la serie por un período de muestreo en la dirección del incremento del tiempo. Algunas veces, el polinomio

en la ecuación 2.4.2 se puede expresar en forma finita y también puede derivarse en forma analítica.

Se considera que la expresión 2.4.1 es la más común. Otra definición de la serie X_n esta basada en la transformada de Laplace

$$\bar{X}(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n Z^n \quad 2.4.3$$

No debe existir confusión entre las ecuaciones 2.4.1 y -- 2.4.3, lo que se ha hecho solamente es, una sustitución de Z por Z^{-1} y se deben considerar las dos posibilidades.

En la mayoría de los casos la serie de pulsos en el tiempo esta definida solamente para valores no negativos del tiempo, en este caso la transformada es conocida lateral (de un sólo lado), en cambio si la serie tiene valores tanto positivos como negativos entonces se llama transformada bilateral.

Para la definición 2.4.3 de transformada Z , es claro que no está limitada al círculo unitario como se hace en la ecuación 2.4.1, sino que se extiende en todo el plano complejo. De acuerdo a esto considérese ahora una señal analógica causal $X(t)$. Cuya forma muestreada es:

$$X_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \delta(t-n\Delta t) \quad 2.4.4$$

En lugar de utilizar la transformada de Fourier como en el caso 2.4.1 ahora se aplicará la transformada de Laplace en ambos lados de 2.4.4

$$X_s(P) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \{\delta(t-n\Delta t)\}$$

debido a que $\delta(t)=1$, y aplicando el teorema de desplazamiento

$$\{X(t-n\Delta t)\} = e^{-n\Delta t} X(t)$$

la función $X_s(P)$ se transforma en

$$X_s(P) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n e^{-Pn\Delta t}$$

donde $P = \sigma + i\omega$ y es una variable compleja. Introduciendo ahora

$$Z = e^{P\Delta t} = e^{\sigma\Delta t} e^{i\omega\Delta t} \quad 2.4.5$$

se tiene que $X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n Z^{-n} \quad 2.4.6$

La ecuación 2.4.6 describe una operación matemática la cual es también comúnmente conocida como la transformada-Z y esta definida en la región del plano complejo (Ver figura 2.4.1) en donde ésta es convergente.

Puesto que la serie converge a lo menos para $Z = Z_0$, se dice que la serie X_n es transformable. A parte del límite inferior en la sumatoria 2.4.6, ésta formalmente corresponde al caso 2.4.1, la diferencia está en que el módulo de 2.4.6 se puede extender para cualquier valor de la variable Z .

2.5.- Transformada de Fourier

Una herramienta principal en el análisis de muchos campos

científicos hoy en día es la transformada de Fourier, ésta es una técnica universal que se aplica en el análisis de sistemas lineales invariantes con el tiempo. Su importancia está basada en que uno puede examinar una relación particular desde un punto de vista diferente; es decir, se puede hacer la visualización de una función y su transformada.

La integral de Fourier está definida por la expresión:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad 2.5.1$$

si la integral existe para cada valor del parámetro f , entonces 2.5.1, define la transformada de Fourier $H(\omega)$ de $h(t)$, la función $h(t)$ es una función del tiempo y $H(\omega)$ es función de la frecuencia $\omega = 2\pi f$, $j = \sqrt{-1}$

La transformada de Fourier T.F. es entonces una presentación de la función en el dominio de la frecuencia, ésta contiene la misma información que la función original.

La T.F. indentifica o distingue las diferentes frecuencias senusoidales (sus amplitudes y fases respectivas) -- las cuales se combinan para formar la señal considerada.

En general la T.F. es una cantidad compleja:

$$H(\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(f)}$$

donde $R(\omega)$ es la parte real de la T.F.

$I(\omega)$ es la parte imaginaria

$|H(\omega)|$ es el espectro de amplitud de $h(t)$ dado por:

$$|H(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

y $\theta(\omega)$ es el espectro de fase de $h(t)$, el cual se calcula por la relación siguiente:

$$|\theta(\omega)| = \tan^{-1} \left[\frac{I(\omega)}{R(\omega)} \right]$$

Existencia de la integral de Fourier.

Condición 1. - Si $h(t)$ es integrable en el sentido de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad 2.5.2$$

entonces, su transformada de Fourier, $H(\omega)$ existe y satisface a la transformada inversa, definida por:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j2\pi ft} d\omega \cdot [1/2\pi] \quad 2.5.3$$

esta condición es necesaria pero no suficiente para la existencia de la T.F.

Condición 2. - Si $h(t) = B(t) \sin(2\pi ft + \alpha)$, si $B(t+k)$ es menor que $B(t)$ y además $|t| > \lambda > 0$, la función $h(t)/t$, es absolutamente integrable, según la ecuación 2.5.2, entonces $H(\omega)$ existe y satisface a 2.5.3.

Condición 3. - Las condiciones 1 y 2 son consideradas de variación limitada; esto es, ellas se pueden representar, por una curva de longitud finita en cualquier intervalo de tiempo. Esta condición se extiende para incluir funcio

nes singulares (impulsivas).

Si $h(t)$ es una función periódica o impulsiva, entonces -- $H(\omega)$ existe si y sólo si se introduce la teoría de distri**bu**ciones para las funciones singulares. Para ello se defi**ni**ne

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) X(t) dt = X(t_0)$$

donde $X(t)$ es una función continua arbitraria al tiempo - $t \neq t_0$.

2.5.1 Programa SISMICA

Este programa obtiene la correlación, autocorrelación, -- convolución de dos señales A y B (en ese orden); estas -- operaciones se efectúan en el dominio de la transformada - Z.

Datos de entrada:

L1= Número de muestras que se desean en los espectros.

HIM=Intervalo de muestreo de las señales en el tiempo.

F1= Intervalo de muestreo en el dominio de las frecuen**ci**as.

NEA=Número de muestras de la señal A.

NEB=Número de muestras de la señal B.

NC1 y NC2 son claves, tales que:

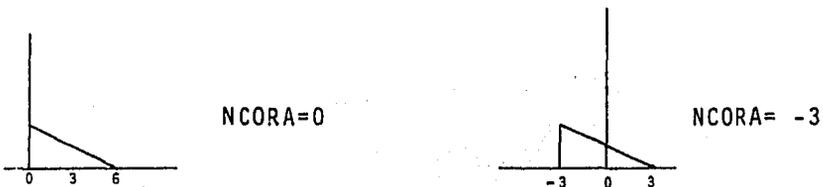
$$NC1 = \begin{cases} 0 & A \neq B \\ 1 & A = B \end{cases}$$

$$NC2 = \begin{cases} 3 & \text{convolución} \\ 4 & \text{correlación} \end{cases}$$

Así por ejemplo, si deseamos calcular una autocorrelación, entonces hacemos $NC1 = 1$ y $NC2 = 4$, y como las señales en este caso son iguales, no es necesario dar los datos de la señal B.

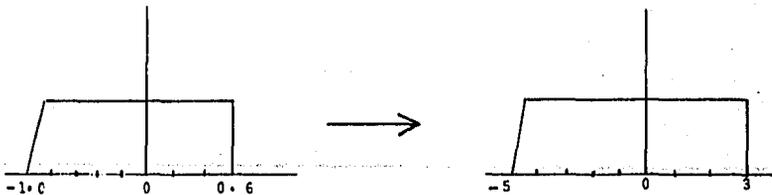
$NCORA$ y $NCORB$ son los corrimientos (con respecto al origen) de las señales A y B, respectivamente.

Ejemplo:



Es importante hacer notar que los corrimientos $NCORA$ y $NCORB$, siempre se van a leer como números enteros, múltiplos del intervalo de muestreo.

Ejemplo:



el corrimiento que se debe dar como dato es $NCORA = -5$ y no $NCORA = -1.0$.

A = Muestras de la señal A (leídas en forma vector)

B = Muestras de la señal B (Leídas en forma de vector)

El programa SISMICA utiliza las subrutinas TRANS y GRF.

Datos de Salida

Los resultados del programa son:

C = Señal obtenida de acuerdo a la operación asignada.

Gráficas de los espectros de Amplitud y Fase de las señales de entrada y salida.

2.6 Características de filtros

2.6.1.-Estabilidad de filtros digitales de retraso

Uno de los problemas fundamentales en el análisis de trazas sísmicas es el de mejorar la resolución de eventos - que se traslapan, empleando filtros digitales "inversos" se puede lograr tal mejoramiento. Frecuentemente estos filtros tienen una característica no deseable, la cual - consiste en que su función de memoria crece sin límite - con el incremento del tiempo, por lo cual son llamados - "inestables".

Considérese un filtro digital de retraso, de enésimo - orden:

$$a(t) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$$

donde los elementos a_t , ($t=0,1,\dots,n$) son los coefi - cientes de peso del filtro. Graficando éstos contra la - variable de tiempo (discreto) "t", se obtiene un resulta -

do conocido como función de memoria del filtro de retraso o respuesta al impulso unitario.

Las condiciones para el análisis de las trazas mediante - filtros son tres:

Retraso: Mínimo, Máximo y Mixto

Esta parte se analiza usando funciones de memoria de longitud finita lo cual se puede expresar como $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ cuya función invertida (según 2.3) es $(a_n^*, \dots, a_2^*, a_1^*, a_0^*)$ - en donde los elementos a_i pueden ser o no complejos y los asteriscos representan el complejo conjugado de ellos. Al par de funciones de memoria anterior se le llama dipolo; - para distinguir entre los dos miembros que forman a éste, se llamará a uno función de memoria de retraso mínimo y - el otro función de memoria de retraso máximo.

Para esclarecer lo anterior, definamos dos funciones de - memoria de longitud 2; $(2,1)$, $(0.5, -i)$ cuyas funciones -- invertidas serán $(1,2)$, $(i, 0.5)$ respectivamente, los dipo - los estarán dados como:

$(2,1)$ y $(1,2)$

y

$(0.5, -i)$ y $(i, 0.5)$

La clasificación de las funciones de retraso mínimo y má - ximo se hace en base a:

Si el primer coeficiente es mayor que el segundo en cua - lesquiera de los dos miembros que forman al dipolo, en - tonces la función de memoria es de retraso mínimo y el - otro será de retraso máximo y viceversa, así $(2,1)$ y - $(i, 0.5)$ son de retraso mínimo, ya que $|+i| = 1 > 0.5$.

De igual forma

$(1,2)$ y $(0,5,-i)$ son de retraso máximo, ya que $|-i|=1 > 0.5$. Cualquier combinación en serie de un cierto número de funciones de memoria de longitud 2 define una función de memoria de conjunto, ésta se clasifica de acuerdo al tipo de funciones que forman la combinación y se calcula por medio de la convolución, por lo cual:

$$(2,1)*(i,0.5)*(-i,0.5) = (2,1,0.5,0.25)$$

[Convolución de funciones de memoria de retraso m <u>i</u> nimo]	[Función de memoria de conjunto de re- traso m <u>i</u> nimo]
--	---

mientras que, el resultado de la combinación de los otros miembros de cada uno de los dipolos dará una función de memoria de retraso máximo.

$$(1,2)*(0.5,-i)*(0.5,i)=(0.25,0.5,1,2)$$

se observa que una de las funciones de conjunto es la in-vertida de la otra.

De la combinación de funciones de memoria de retraso mi-nimo y máximo se obtiene la función de memoria de retraso mixto de conjunto.

$$(1,2)*(i,0.5)*(-i,0.5)=(1,2,0.25,0.5)$$

El filtro inverso.-Considérese una serie de muestras - - - X_0, X_1, \dots, X_m como entrada, se tratará de encontrar un filtro digital a_t , tal que transforme a la serie X_t en un impulso unitario al tiempo $t=0$, para ello se debe usar la operación de convolución y considerar que el filtro está-

formado por una función de memoria con un número infinito de coeficientes. El filtro digital deseado de la función de memoria con longitud infinita (a_0, a_1, a_2, \dots) es el inverso⁷ de la serie de entrada (X_0, X_1, X_2, \dots) .

Una función cualquiera se dice que es estable si la energía de ésta es finita, para el presente caso debe cumplir se:

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + = < \infty$$

Si los coeficientes son complejos, la energía se calculará como:

$$a_0 a_0^* + a_1 a_1^* + a_2 a_2^* + \dots + = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots = < \infty$$

Otra condición para que la función considerada sea estable es que las magnitudes de sus coeficientes tiendan a cero conforme el tiempo se incrementa, es decir $|a_t| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

La salida (convolución del filtro y la serie) en el dominio de la transformada Z es:

$$Y(Z) = y_0 + y_1 z + y_2 z^2 + \dots + y_{m+n} z^{m+n}$$

Como se sabe, el filtro se puede expresar por la división de la salida sobre la entrada.

$$a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_n Z^n = \frac{Y(Z)}{X_0 + X_1 Z + X_2 Z^2 + \dots + X_m Z^m}$$

⁷ No debe haber confusión entre función inversa y función invertida.

Debido a que el resultado que se busca es su impulso unitario; entonces $Y(Z)=1$ y la ecuación anterior se transforma en:

$$a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_n Z^n = \frac{1}{X_0 + X_1 Z + X_2 Z^2 + \dots + X_m Z^m}$$

La serie de potencias del segundo miembro se puede expandir en una serie de potencias alternada; los coeficientes de esta última serán los coeficientes del filtro.

Lo anterior se visualiza mejor si la entrada se forma por dos coeficientes, es decir, $(X_0, X_1) = (1, k)$, el proceso de filtrado se expresa entonces como:

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) * (1, k) = (1, 0, 0, \dots)$$

o en transformada Z

$$(a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots) (1 + kZ) = 1$$

Por lo que el filtro será

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) = (1, -k, k^2, -k^3, \dots)$$

En general esta expresión será estable cuando $|k| < 1$, e inestable para $|k| > 1$. En otras palabras:

Si $(1, k)$ es de retraso mínimo, entonces su inverso $(1, -k, k^2, \dots)$ es estable, pero si $(1, k)$ es de retraso máximo, entonces su inverso $(1, -k, k^2, \dots)$ es inestable.

El problema de inestabilidad no se puede evitar si se utilizan sólo funciones de memoria, por lo cual es necesario

recurrir a funciones de anticipación las cuales tienen la forma siguiente:

$$(\dots, a_{-4}, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1})$$

Donde a_{-1} es el coeficiente al tiempo -1 , a_{-2} al tiempo -2 , etc., y los coeficientes para $t \geq 0$ tienen valor cero.

Las condiciones de estabilidad para las funciones de anticipación de longitud infinita son las mismas que las funciones de memoria; es decir:

- La energía de $a_{-1}^2 + a_{-2}^2 + \dots$ debe ser finita.
- Los coeficientes del filtro deben aproximarse a ce ro a medida que el tiempo disminuye.

La serie, con este tipo de funciones, se le escribirá como:

$$(\dots, a_{-3}Z^{-3} + a_{-2}Z^{-2} + a_{-1}Z^{-1}) = \frac{1}{1+kZ}$$

y los coeficientes del filtro serán ahora:

$$a_t = \begin{cases} -(-k)^t & t = -1, -2, -3, \dots \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

o bien

$$(\dots, a_{-5}, a_{-4}, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}) = (\dots, k^{-5}, -k^{-4}, k^{-3}, -k^{-2}, k^{-1})$$

Por lo tanto, si la función es de retraso máximo, el fil-

tro inverso encontrado cumple con la condición de estabilidad, y la convolución de éste con la entrada dará el pulso deseado.

Para calcular el filtro inverso de una entrada arbitraria (X_0, X_1, \dots, X_m) , se obtiene la transformada Z de ella y se descompone en factores; entonces

$$X(Z) = X_0 + X_1 Z + X_2 Z^2 + \dots + X_m Z^m \\ = (\alpha_0 + \alpha_1 Z)(\beta_0 + \beta_1 Z) \dots (\omega_0 + \omega_1 Z)$$

Donde cada factor es la transformada Z de una función de memoria de longitud 2. Debido a que la multiplicación de polinomios (en Z) equivale a la convolución de sus coeficientes, se cumple que

$$(X_0, X_1, \dots, X_m) = (\alpha_0, \alpha_1) * (\beta_0, \beta_1) * \dots * (\omega_0, \omega_1)$$

Por lo cual se puede establecer la igualdad antes vista,

$$X_0 + X_1 Z + \dots + X_m Z^m = (\alpha_0 + \alpha_1 Z)(\beta_0 + \beta_1 Z) \dots (\omega_0 + \omega_1 Z)$$

de esta manera el inverso será

$$\frac{1}{X_0 + X_1 Z + \dots + X_m Z^m} = \left(\frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 Z} \right) \left(\frac{1}{\beta_0 + \beta_1 Z} \right) \dots \left(\frac{1}{\omega_0 + \omega_1 Z} \right)$$

Enseguida debe considerarse que la entrada puede ser:

- 1) Fase mínima
- 2) Fase máxima
- 3) Fase mixta

En el primer caso, el inverso estable es la función de memoria (a_0, a_1, a_2, \dots) de conjunto, cuyos coeficientes se obtienen por medio de la división de polinomios, o también calculando el inverso de cada serie de fase mínima de longitud 2, $[(\alpha_0, \alpha_1), (\beta_0, \beta_1), \dots, (\omega_0, \omega_1)]$ por separado y después efectuar la convolución de éstos, para así determinar la función de memoria de conjunto.

En el caso 2), el inverso estable es la función de anticipación estable, entonces $(a_{-m}, a_{-m-1}, a_{-m-2}, \dots)$, cuyos coeficientes se calculan por la división.

$$\frac{1}{\chi_m Z^m + \chi_{m-1} Z^{m-1} + \dots + \chi_1 Z + \chi_0} = a_m Z^{-m} + a_{m-1} Z^{-m-1} + a_{m-2} Z^{-m-2} + \dots$$

Este resultado, es el inverso estable de una función de anticipación pura, entonces $a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-m+1}$ y a_0, a_1, a_2, \dots tienen valor cero. Una forma alternativa de calcular el inverso para el mismo caso es, encontrar los inversos estables de las m series de fase máxima de longitud 2 - $[(\alpha_0, \alpha_1), (\beta_0, \beta_1), \dots, (\omega_0, \omega_1)]$ y convolucionar estos inversos para obtener

$$\begin{array}{cccccccc} (\dots, a_{-m-2}, a_{-m-1}, a_{-m}, 0, & 0, \dots, 0) \\ & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & a_{-m+1} & & a_{-m+2} & & a_{-1} \end{array}$$

Caso 3).- Una función de fase mixta es una mezcla de las componentes de funciones con fase mínima y fase máxima de longitud dos. El inverso estable de cada componente se puede calcular por separado, de acuerdo a que si la entrada es de fase mínima o fase máxima, como se dijo arriba.

La inversa estable de conjunto, es la convolución de las m componentes inversas estables y tendrá forma de serie -

bilateral; es decir

$$\underbrace{(\dots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)}_{\substack{\text{Componentes} \\ \text{de} \\ \text{anticipación}}} \quad \underbrace{(\dots, a_1, a_2, a_3, \dots)}_{\substack{\text{Componentes} \\ \text{de} \\ \text{memoria}}}$$

Ejemplo:

Consideremos dos series de entrada, de longitud dos, como las que a continuación aparecen:

$(X_0, X_1) = (1, 2)$ es de fase máxima	1
$(X_0, X_1) = (1, 0.2)$ es de fase mínima	2
$(X_{-1}, X_0, X_1) = (1, 2.2, 0.4)$ es de fase mixta	3

El inverso estable de 1 es una función de anticipación estable

$$(\dots, a_{-4}, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}) = (\dots, -0.0625, 0.125, -0.25, 0.5)$$

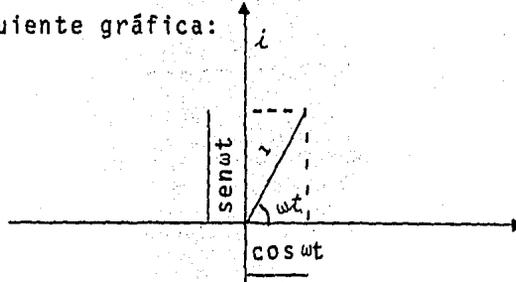
El inverso estable de 3, es el inverso estable de conjunto, dado por la convolución de los inversos estables de 1 y 2.

$$\begin{aligned} & (\dots, -0.0625, 0.125, -0.25, 0.5) * (1, -0.2, 0.04, -0.008, \dots) \\ & = (\dots, -0.0625, 0.138, -0.278, 0.556, -0.111, 0.022, -0.004, \dots) \end{aligned}$$

La serie bilateral como podrá observarse, se extiende -- por un lado hasta $-\infty$, y por otro a $+\infty$, entonces al -- truncar las series, el resultado se considera sólo como una aproximación satisfactoria, ya que ambos lados de la serie tienden a cero.

2.6.2.-Características de amplitud y fase de filtros digitales

Considérese un vector que gira sobre el origen de un sistema coordenado, a un velocidad constante ω , como se muestra en la siguiente gráfica:

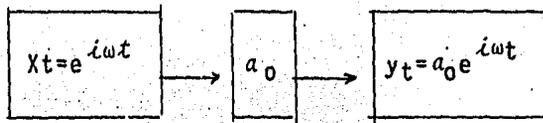


el vector de magnitud unitaria, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\text{vector (al tiempo } t) = \cos \omega t + i \text{sen } \omega t = e^{i\omega t}$$

El cual representa un movimiento armónico simple.

Considerando al vector como entrada a un filtro digital constante a_0 :

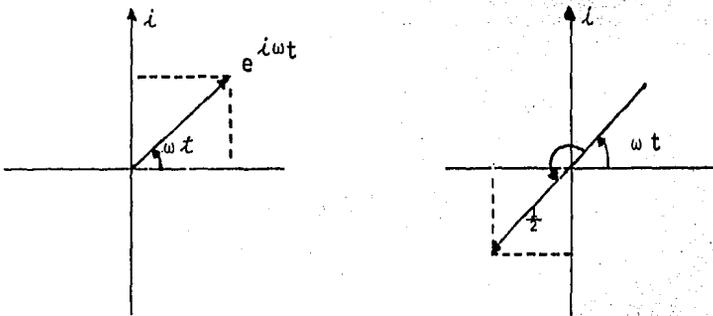


Se tiene una salida $y_t = a_0 e^{i\omega t} = a_0 \cos \omega t + i a_0 \text{sen } \omega t$, ésta representa a un vector con longitud a_0 que gira a una velocidad

Si el filtro a_0 es una cantidad positiva, entonces el vector de entrada y el de salida al tiempo t , formarán el mis

mo ángulo ωt con el eje horizontal, por lo cual, se dice que la entrada y la salida están en fase.

Mientras que si el filtro es una constante negativa; digamos $a_0 = -1/2$, entonces la salida será: Ver figura siguiente:



un vector que se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}e^{i\omega t} &= \frac{1}{2}e^{i\pi} e^{i\omega t} = \frac{1}{2}e^{i(\omega t + \pi)} \\
 &= \frac{1}{2}[\cos(\omega t + \pi) + i\sin(\omega t + \pi)]
 \end{aligned}$$

Por lo que se observa que, el vector de salida, tiene amplitud de $\frac{1}{2}$ y fase de π radianes.

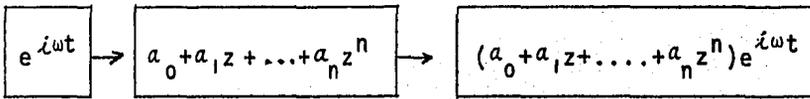
Al dividir la salida y entrada, se obtiene la función de transferencia del filtro, para el caso propuesto se obtiene:

$$\frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{1}{2} e^{i\pi}$$

La magnitud ($1/2$) de ésta, se conoce como característica de amplitud del filtro, mientras que su ángulo (π) es

la característica de fase del mismo. Debido a que las -- características mencionadas (para este caso) son independientes de la velocidad angular ω y la fase es constante, entonces se dice que la entrada y salida del filtro -- están defasados π radianes para toda ω .

De todo lo anterior, la función de transferencia del filtro de orden "n" será:



$$\frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{a_0 e^{i\omega t} + a_1 e^{i\omega(t-1)} + \dots + a_n e^{i\omega(t-n)}}{e^{i\omega t}}$$

$$= a_0 + a_1 e^{-i\omega} + \dots + a_n e^{-i\omega n}$$

Así, vemos que la función de transferencia de cada elemento que forman a ésta, se obtiene por la substitución directa de $Z=e^{-i\omega}$ en el filtro, cabe mencionar que, en este caso las características de amplitud y fase dependen -- de ω , excepto a_0 . Estas, se calculan a partir de la forma polar de la función de transferencia, entonces:

$$A(\omega) = \left| A(\omega) \right| e^{i\phi(\omega)}$$

Donde:

$$\left| A(\omega) \right| = \sqrt{a_0^2 + (a_1 e^{-i\omega})^2 + \dots + (a_n e^{-i\omega n})^2}$$

es la característica de amplitud.

$$y \quad \phi(\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im} [a_1 e^{-i\omega} + \dots + a_n e^{-i\omega n}]}{\text{Re} [a_0 + a_1 e^{-i\omega} + \dots + a_n e^{-i\omega n}]} \right]$$

es la característica de fase.

debido a que la parte imaginaria es negativa, entonces la ecuación anterior se puede expresar:

$$-\phi(\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{I_m(a_1 e^{i\omega} + \dots + a_n e^{i\omega n})}{a_0 + R_e(a_1 e^{i\omega} + \dots + a_n e^{i\omega n})} \right]$$

La cual recibe el nombre de retraso de fase y sirve para determinar la fase del filtro, cuando existen varios de éstos con la misma característica de amplitud.

PROGRAMA "SISHICA"

37

```

C   TESIS PROFESIONAL
C   PROGRAMA PRINCIPAL.
C   PROGRAMA QUE OBTIENE LA CORRELACION, AUTOCORRELACION,
C   CONVOLUCION O AUTOCONVOLUCION DE DOS SENALES A Y B
C   (EN ESTE ORDEN.)
C   ESTE PROGRAMA FUE ELABORADOR POR LOS ALUMNOS:
C   ANGEL PARRA BARRERA
C   HECTOR A. CALOCA GALINDO
DIMENSION I(500,500),A(500),B(500),C(500),D(500)
60  READ(5,*) L1,HIM,F1
    IF(L1.EQ.0) GO TO 61
    READ(5,*) NEA,NEB,NC1,NC2,NCORA,NCORB
    READ(5,*) (A(I),I=1,NEA)
    IF(NC1.NE.1) GO TO 1000
    DO 1050 I=1,NEA
      B(I)=A(I)
1050 CONTINUE
    GO TO 1100
1000 READ(5,*) (B(I),I=1,NEB)
1100 NOTA=0
    WRITE(6,100) (A(I),I=1,NEA)
100  FORMAT(1H1,21//),41X,38HLAS SENALES QUE SE VAN A PROCESAR
150N1,///,4X,3HA=(,5(5X,F14.8,1H,)//,7X)
    IF(NC1.EQ.1) GO TO 120
    WRITE(6,101) (B(I),I=1,NEB)
101  FORMAT(10(//),4X,3HB=(,5(5X,F14.8,1H,)//,7X)
120  WRITE(6,102)
102  FORMAT(///,33X,53HLA GRAFICA DE LA SENAL A EN EL DOMINIO
1DEL TIEMPO ES:)
    D1=NEA
    H=1.0
    CALL GRF(NCORA,D1,NEA,HIM,H,A)
    CALL TRANS(NEA,L1,F1,HIM,A,NCORA)
    IF(NC1.EQ.1) GO TO 121
    WRITE(6,103)
103  FORMAT(5(//),33X,53HLA GRAFICA DE LA SENAL B EN EL DOMINIO
1DEL TIEMPO ES:)
    D2=NEB
    CALL GRF(NCORB,D2,NEB,HIM,H,B)
    CALL TRANS(NEB,L1,F1,HIM,B,NCORB)
121  IF(NC2.EQ.3) GO TO 4
    NBM=NEB+1
    DO 5 I=1,NCB
      NB=NBM-I
      G(I)=B(NB)
5    CONTINUE
    DO 6 I=1,NCB
      B(I)=G(I)
6    CONTINUE
7    CONTINUE
    DO 10 I=1,NEB
    DO 11 J=1,NEA
      K=I4-J-1
      D(I,K)=B(I)*A(J)
11  CONTINUE
10  CONTINUE
    /CMC=K
    DO 12 I=1,NCMC
    CONT=0.0
    DO 13 J=1,NCB

```

```

CONT=CONT+D(J,I)
13 CONTINUE
C(I)=CONT
12 CONTINUE
IF(NC2.EQ.3) GO TO 15
NFI2=NCORB+(NEB-1)
NOTA=NCORA-NFI2
IF(NC1.EQ.1) GO TO 16
WRITE(6,50)
50 FORMAT(10(/),31X,57HLOS ELEMENTOS DE LA CORRELACION DE LAS
1SENALES A Y B SON:,,/)
GO TO 17
16 WRITE(6,51)
51 FORMAT(10(/),32X,54HLOS ELEMENTOS DE LA AUTOCORRELACION DE
1LA SENAL A SON:,,/)
GO TO 17
15 NOTA=NCORA+NCORB
IF(NC1.EQ.1) GO TO 18
WRITE(6,52)
52 FORMAT(10(/),31X,57HLOS ELEMENTOS DE LA CONVOLUCION DE LAS
1SENALES A Y B SON:,,/,56X,7HA * B =,/)
GO TO 17
18 WRITE(6,53)
53 FORMAT(10(/),32X,55HLOS ELEMENTOS DE LA RETROCORRELACION DE
1LA SENAL A SON:,,/,56X,7HA * A =,/)
17 WRITE(6,57)(C(I),I=1,NCMC)
57 FORMAT(/,4X,3HC=(,5(5X,F14.8),/))
WRITE(6,58)
58 FORMAT(/,44X,32HLA GRAFICA DE ESTA FUNCION C ES:)
BB=NCMC
CALL GRF(NOTA,BB,NCMC,HIM,H,C)
CALL TRANS(NCMC,L1,F1,HIM,C,NOTA)
DO 54 I=1,NCMC
C(I)=0.0
54 CONTINUE
DO 55 I=1,NEB
DO 56 J=1,NEA
K=I+J-1
D(I,K)=0.0
56 CONTINUE
55 CONTINUE
GO TO 60
61 STOP
END

```

```

SUBROUTINE TRANS(I,L,F,T,FO,NOTA)
C   ESTA SUBROUTINA CALCULA LA TRANSFORMADA DE FOURIER
C   DE NUESTRA SENAL PARA PASARLA AL DOMINIO DE LAS
C   FRECUENCIAS.
C   F:INTERVALO DE FRECUENCIA EN EL DOMINIO DE LAS FRECUENCIAS
C   T:INTERVALO DE MUESTREO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO
C   L:NUMERO DE PUNTOS QUE TIENE EL ESPECTRO
C   FF:FRECUENCIA MAXIMA HASTA DONDE SE GRAFICA EL ESPECTRO
C   EDA:ESPECTRO DE AMPLITUD
C   EDF:ESPECTRO DE FASE
C   FN:FRECUENCIA DE NYQUIST
DIMENSION EDA(800),FO(800),G(800),EDF(800),FUN(800)
HT=1.0
NTA=NOTA
III=I
FN=1./(2*T)
FF=L+1
WRITE(6,500) L,F,T,FN
500 FORMAT(1H1,6(/),35X,'LOS VALORES DE LAS VARIABLES PARA
ESTA SENAL SON',///,50X,'L=',I3,5X,'F=',F4,2,5X,'T=',
2F8,3,///,45X,'LA FRECUENCIA DE NYQUIST ES FN=',F8,3)
WRITE(6,501)
501 FORMAT(///,41X,'ESPECTRO DE AMPLITUD',15X,'ESPECTRO DE FASE')
IF(NOTA.GE.0) GO TO 2000
NOTA=NOTA-1
2000 CONTINUE
DO 5 K=1,L+1
N=K-1
SUMR=0.0
SUMI=0.0
DO 10 N2=1,I
G(N2)=FO(N2)
IF(NOTA.GE.0) GO TO 300
NOTAM=ABS(NOTA)
MN2=N2-NOTAM
325 ARG=6.2832*M*F*MN2*T
GO TO 320
300 MN2=N2-1+NOTA
GO TO 325
320 FR=G(N2)*COS(ARG)
FI=G(N2)*SIN(ARG)
SUMR=SUMR+FR
SUMI=SUMI+FI
10 CONTINUE
FUN(K)=SUMR+SUMI
EDA(K)=SQRT(SUMR**2+SUMI**2)
SUMIN=SUMI
IF(SUMR.EQ.0.0) GO TO 31
COC=-SUMI/SUMR
EDF(K)=ATAN(COC)
IF(SUMIN.EQ.0.0) GO TO 33
IF(SUMIN.GT.0.0) GO TO 34
IF(SUMR.GT.0.0) GO TO 15
EDF(K)=-3.1416+ABS(EDF(K))
GO TO 15
34 IF(SUMR.GT.0.0) GO TO 15
EDF(K)=3.1416-ABS(EDF(K))
GO TO 15
33 IF(SUMR.GT.0.0) GO TO 15
EDF(K)=3.1416

```

```

      GO TO 15
31 IF(SUMIN.GT.0.0) GO TO 32
   EDF(K)=-3.1416/2.0
      GO TO 15
32 EDF(K)=3.1416/2.
15 IF(K.EQ.1) GO TO 52
   WRITE(6,3) M,EDA(K),M,EDF(K)
      GO TO 5
52 KA=K-1
   WRITE(6,3) KA,EDA(K),KA,EDF(K)
5 CONTINUE
   I=FF
   NOTA=0
   WRITE(6,250)
   CALL GRF(NOTA,FF,I,F,HT,EDA)
   WRITE(6,255)
   CALL GRF(NOTA,FF,I,F,HT,EDF)
   I=III
   NOTA=NTA
1 FORMAT(I3,F6.2,F6.4,F2.0)
3 FORMAT(/,41X,'EDA('I3,')='F10.5,14X,'EDF('I3,')='F12.7)
250 FORMAT(7(/),15X,'LA GRAFICA DEL ESPECTRO DE AMPLITUD ES ')
255 FORMAT(7(/),15X,'LA GRAFICA DEL ESPECTRO DE FASE ES ')
      RETURN
      END

```

```

      SUBROUTINE GRF(NCD,B,N,DELTAX,H,Y)
      DIMENSION Y(500),EX(30),LINE(120)
C      A:VALOR DE LA ABCISA DE LA PRIMERA MUESTRA
C      B=N=NUMERO DE MUESTRAS DE LA FUNCION QUE SE VA A GRAFICAR
C      H: NUMERO DE HOJAS EN LAS QUE SE QUIERE IMPRIMIR LA GRAFICA
C      DELTAX: INTERVALO DE MUESTREO
C      Y:FUNCION
      DATA IBLAN,IPUN,IAST/1H ,1H.,1H*/
      WRITE(6,995)
995 FORMAT(5(/))
      A=1.0
      CLAVE=0.0
      DX=DELTAX
      HN=57.*H-2.
      NNCD=NCD
      HHN=N
      INT=HN/(HHN-1)-1.5
      IF(INT.GT.0) GO TO 5
      INT=1
5 J=A
      CON=J
      M=J+1
      BMEN=Y(J)
      DO 20 I=M,N
      IF(Y(I)-BMEN) 1,20,20
1 BMEN=Y(I)
20 CONTINUE
      BMAY=Y(J)
      DO 21 I=M,N
      IF(Y(I)-BMAY) 21,21,3
3 BMAY=Y(I)
21 CONTINUE
      IF(BMEN.NE.BMAY) GO TO 50

```

```

BMEN=0.0
IF(BMAY.NE.0.0) GO TO 50
DIFER=1.0
GO TO 55
50 DIFER=ABS(BMAY-BMEN)
55 HINX=DIFER/110
AUM=0.
DO 22 I=1,11
EX(I)=BMEN+AUM
AUM=AUM+11.*HINX
22 CONTINUE
WRITE(6,200) (EX(I),I=1,11)
200 FORMAT(7X,31HLOS VALORES DE LA ORDENADA SON:,,,11(7X,E15.7
1/),7X,10(1HV,10X),1HV,/,1X,11B(1H+))
DO 23 I=1,111
LINE(I)=IBLAN
23 CONTINUE
IF(BMEN.LT.0.0.AND.BMAY.GT.0.0) GO TO 7
GO TO 8
7 V=ABS(BMEN)
K=V*110./DIFER+1.5
LINE(K)=IPUN
FOC=1.0
GO TO 9
8 FOC=0.0
9 CONTINUE
NEG=0
IF(NCO) 30,31,32
30 NEG=1
NCO=ABS(NCO)+1
GO TO 31
32 NEG=2
31 SEL=0.0
12 CONTINUE
FEC=0.0
X=1.+(A-1.0)*DELTA
A=X
15 CONTINUE
IF(FOC.NE.1.) GO TO 13
LINE(K)=IPUN
13 CONTINUE
IF(SEL.NE.1.) GO TO 14
IF(FEC.GE.1.) GO TO 14
IF(ABS(X).GT.(DELTA/2.)) GO TO 14
DD=ABS(X)/DELTA
IF(DD.GT.0.5) GO TO 14
DO 24 I=1,111
LINE(I)=IPUN
FEC=1.0
24 CONTINUE
14 CONTINUE
IF(DELTA.GE.1.) GO TO 205
CLAVE=1.0
DELTA=1.0
205 I=(X-A)/DELTA+J
III=I
V=Y(I)-BMEN
IF(NEG.NE.1) GO TO 1000
IF(I.NE.NCO) GO TO 1000
DO 1100 LN=1,111
LINE(LN)=IPUN
1100 CONTINUE

```

```

1000 I=V*110./DIFER+1.5
      LINE(I)=IAST
      IF(FOC.NE.1.0) GO TO 3000
      IF(I.GT.K) GO TO 3500
      IF(I.EQ.K) GO TO 7000
      DO 4100 LMN=I,K-1
4100  LINE(LMN)=IAST
      GO TO 7000
3500  DO 3600 LMN=K+1,I
3600  LINE(LMN)=IAST
      GO TO 7000
3000  IF(BMAY.LE.0.0) GO TO 3050
      DO 3100 LMN=1,I
3100  LINE(LMN)=IAST
      GO TO 7000
3050  DO 3200 LMN=I,111
3200  LINE(LMN)=IAST
7000  XZ=X-1.0
      IF(CLAVE.NE.1.0) GO TO 207
      XZ=XZ*IX
207   IF(NEG.NE.1) GO TO 1200
      XZ=(III-NCO)*DX
      GO TO 1300
1200  IF(NEG.NE.2) GO TO 1300
      XZ=XZ+NCO*IX
1300  WRITE(6,300) XZ,(LINE(I),I=1,111)
300   FORMAT(1X,F7.3,111A1,1H+)
      DO 25 I=1,111
      LINE(I)=IBLAN
25    CONTINUE
      X=X+DELTA X
      CON=CON+1.0
      IF(CON.GT.B) GO TO 16
      GO TO 15
16    WRITE(6,400)
400   FORMAT(1X,11B(1H+))
      DELTA X=IX
      NCO=NNCO
      RETURN
      END

```

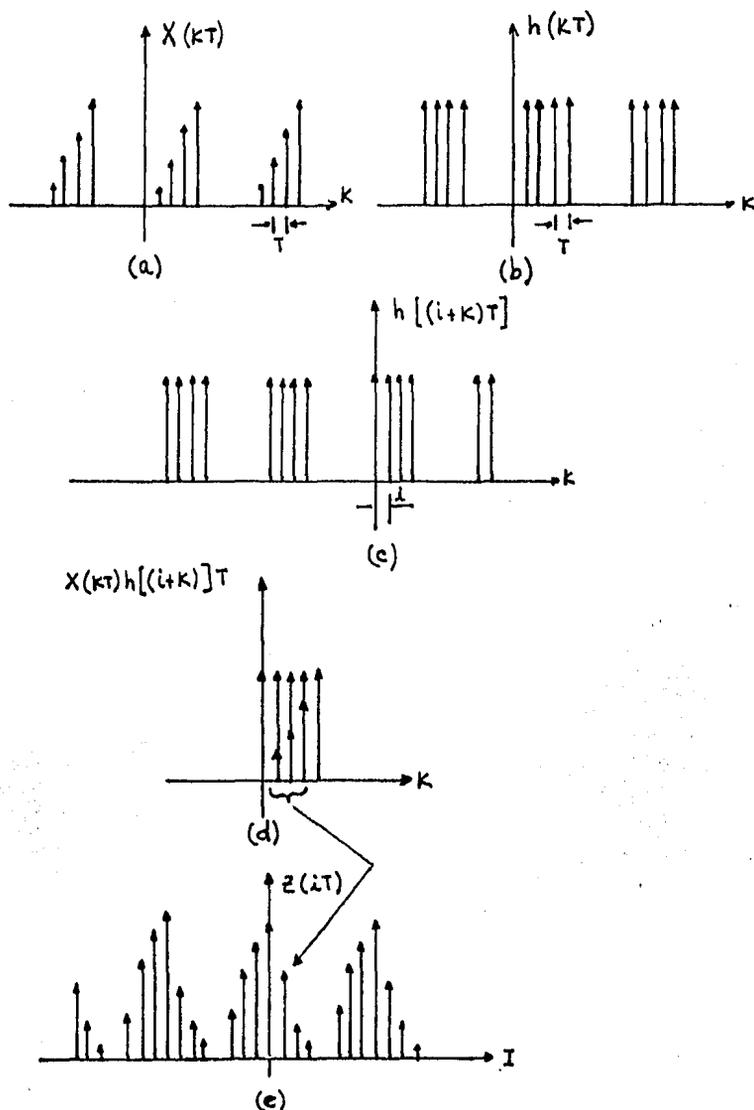


Fig. 2.1.1

En los incisos (a) y (b) se presentan las señales discretizadas a un intervalo de tiempo T . En (c) tenemos la señal (a) desplazada una cantidad $i=T$. En (d) se presenta la multiplicación de las señales (a) y (b) desplazada; para cada i se multiplica y suman los valores de ambas señales. Finalmente en (e) el resultado de la multiplicación, obsérvese que para $i=1$ se deberá multiplicar las señales $X(kT)$, con $k=1,2,3,4$, y $h[(i+k)T]$ con $k=2,3,4$, $i=$ respectivamente y sumar éstas.

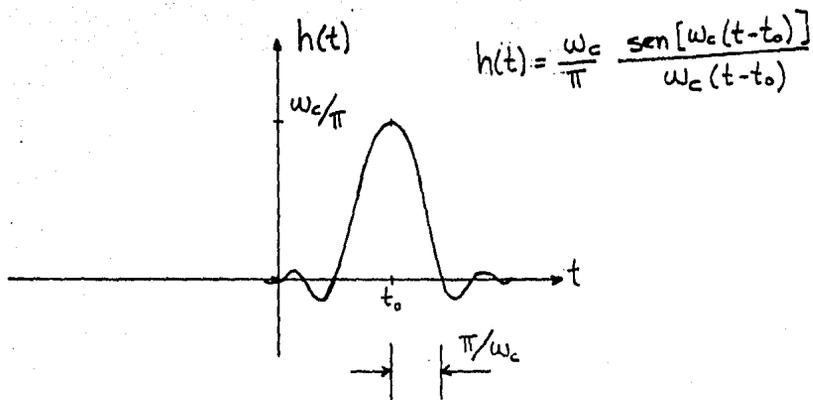
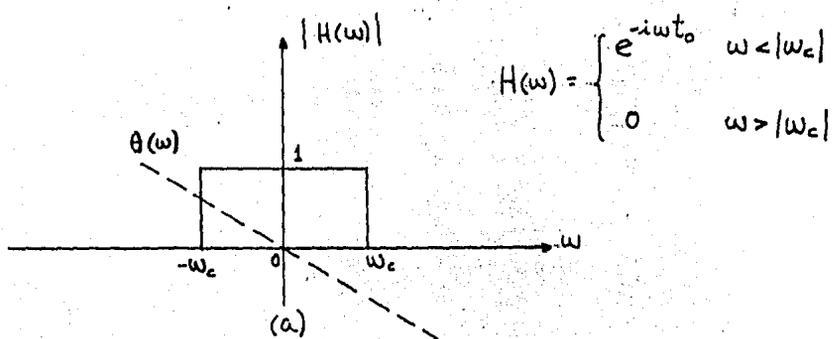


Fig. 2.1.2

- (a) Espectro de amplitud y fase del filtro ideal pasabajas.
- (b) Transformada inversa del inciso (a), función en el dominio del tiempo (respuesta al impulso unitario), función Sampling.

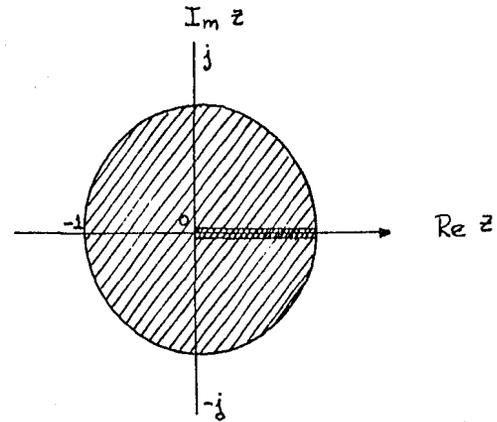
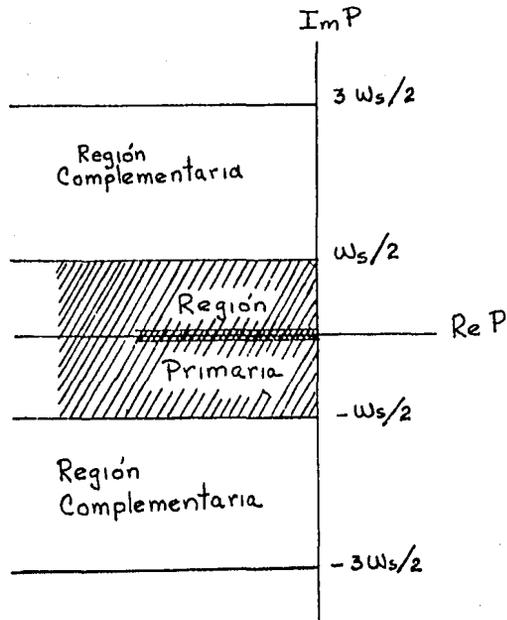


Fig. 2.4.1

La substitución de $Z=e^{P\Delta t}$, se considera como una función de mapeo; del plano P al plano Z , para cualquier $r=constante$ en el plano P se mapea en círculos con centro en $Z=0$ y radio $e^{r\Delta t}$ en el plano Z [$r < 0$, $e^{r\Delta t} < |z| < 1$, luego $-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2$ cae dentro del círculo unitario]

PROGRAMA "SISICA"

LAS SEÑALES QUE SE VAN A PROCESAR SON

A=1	.00003000,	.01614070,	.02712000,	.03107000,	.02974000,
	.01075000,	-.00360000,	-.03215000,	-.06079000,	-.07945000,
	-.00094000,	-.06101000,	-.02308000,	.02469000,	.07167000,
	.10009000,	.11270000,	.09461000,	.05457000,	.00347000,
	-.04503000,	-.07868000,	-.09044000,	-.08005000,	-.05357000,
	-.07078000,	.00133000,	.02680000,	.03241000,	.02765000,
	.01709000,	.00492000,	.00463000,	.00589000,	.01047000,
	.01948000,	-.01675000,	.03249000,	.00666000,	-.00581000,
	-.01576000,	-.02101000,	-.00101000,	-.01810000,	-.01158000,
	-.00445000,	.00145000,	.00515000,	.00665000,	.00640000,
	.00547000,	.00534000,	.00668000,	.00443000,	.00411000,
	.00740000,	.00247000,	.00118000,	-.00013000,	-.00119000,
	-.00190000,	-.00191000,	-.00157000,	-.00096000,	-.00031000,
	.00020000,	.00644000,	.00042000,	.00027000,	.00014000,
	.00006000,				

B=1	.00346000,	.00230000,	.00200000,	-.00130000,	-.00920000,
	-.01044000,	-.01980000,	-.00760000,	.00940000,	.01556000,
	.00870000,	.00800000,	.03130000,	.05570000,	.03480000,
	-.04040000,	-.03800000,	-.03440000,	-.02996000,	.05146000,
	.02610000,	.01840000,	-.02580000,	-.01741000,	-.01608000,
	-.01504000,	.03480000,	.05970000,	.03300000,	.00980000,
	.00970000,	.01750000,	.01940000,	-.00860000,	-.02780000,
	-.01940000,	-.01920000,	-.00140000,	.00270000,	.00290000,
	.00260000,	.00000000,	.00010000,	.00000000,	.00000000,
	.00000000,	.00000000,	.00000000,	.00000000,	

L= 40 F=5.00 F= .002

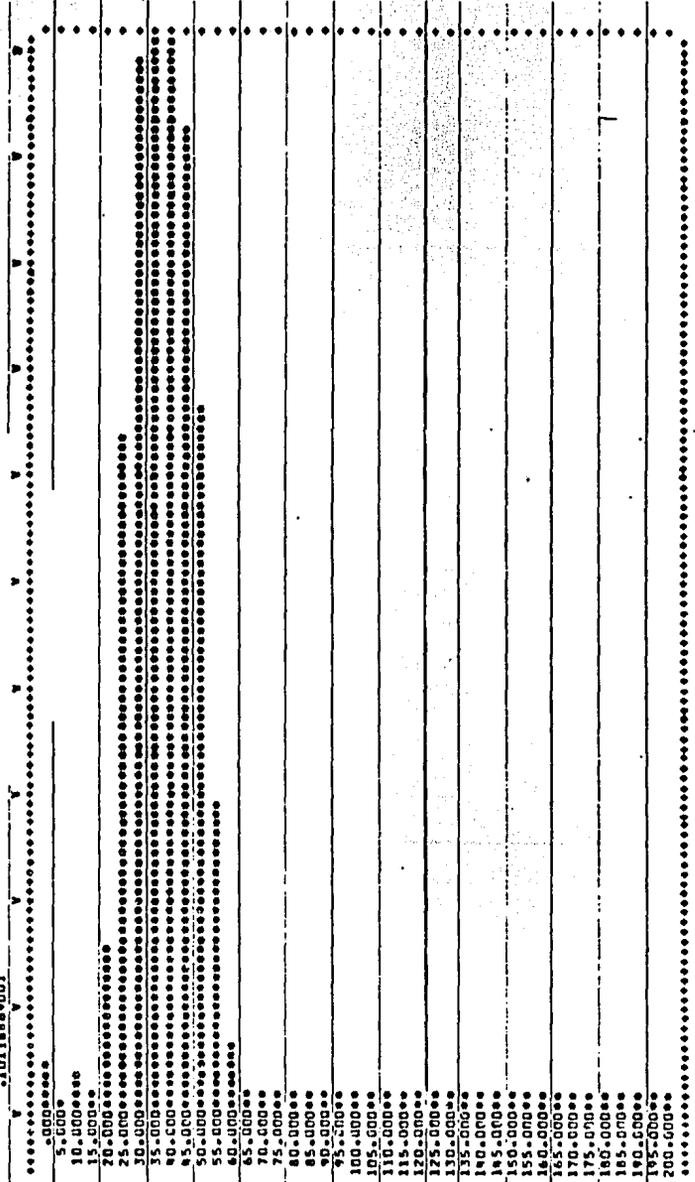
LA FRECUENCIA NYQUIST ES FN= 250.000

ESPECTRO DE AMPLITUD		ESPECTRO DE FASE	
EDA1 01=	.04434	EDF1 01=	.0000000
EDA1 11=	.01159	EDF1 11=	2.9512557
EDA1 21=	.03543	EDF1 21=	.7111013
EDA1 31=	.01932	EDF1 31=	1.6536249
EDA1 41=	.15508	EDF1 41=	2.7810075
EDA1 51=	.64039	EDF1 51=	1.5201777
EDA1 61=	.99512	EDF1 61=	.7464175
EDA1 71=	1.01109	EDF1 71=	-.7416359
EDA1 81=	1.01138	EDF1 81=	-1.5901099
EDA1 91=	.93645	EDF1 91=	-2.5562451
EDA1 101=	.66480	EDF1 101=	2.5833350
EDA1 111=	.28498	EDF1 111=	1.3405169
EDA1 121=	.06172	EDF1 121=	.0600324
EDA1 131=	.02179	EDF1 131=	3.0471976
EDA1 141=	.01946	EDF1 141=	.8988051
EDA1 151=	.02077	EDF1 151=	-2.0633737
EDA1 161=	.01938	EDF1 161=	1.9457323
EDA1 171=	.02059	EDF1 171=	-1.0336309
EDA1 181=	.02088	EDF1 181=	2.9064849
EDA1 191=	.01859	EDF1 191=	-.0287910
EDA1 201=	.02239	EDF1 201=	-2.4111709
EDA1 211=	.01718	EDF1 211=	1.0636864
EDA1 221=	.02320	EDF1 221=	-1.5079592
EDA1 231=	.01703	EDF1 231=	2.2023895
EDA1 241=	.02233	EDF1 241=	-.6006210
EDA1 251=	.01910	EDF1 251=	-2.4866821
EDA1 261=	.02015	EDF1 261=	.3426321
EDA1 271=	.02159	EDF1 271=	-2.0055101
EDA1 281=	.01762	EDF1 281=	1.3999609
EDA1 291=	.02313	EDF1 291=	-1.1010371
EDA1 301=	.01696	EDF1 301=	2.5500088
EDA1 311=	.02250	EDF1 311=	-.2104484
EDA1 321=	.01882	EDF1 321=	-2.6139973
EDA1 331=	.02034	EDF1 331=	.7249957
EDA1 341=	.02153	EDF1 341=	-1.6281623
EDA1 351=	.01768	EDF1 351=	1.7750698
EDA1 361=	.02306	EDF1 361=	-.7241801
EDA1 371=	.01699	EDF1 371=	2.9314259
EDA1 381=	.02246	EDF1 381=	.1628240
EDA1 391=	.01846	EDF1 391=	-2.2359163
EDA1 401=	.02010	EDF1 401=	1.3094306

ESPECTRO DE AMPLITUD (SEÑAL "A")

LOS VALORES DE LA ORDENADA SON

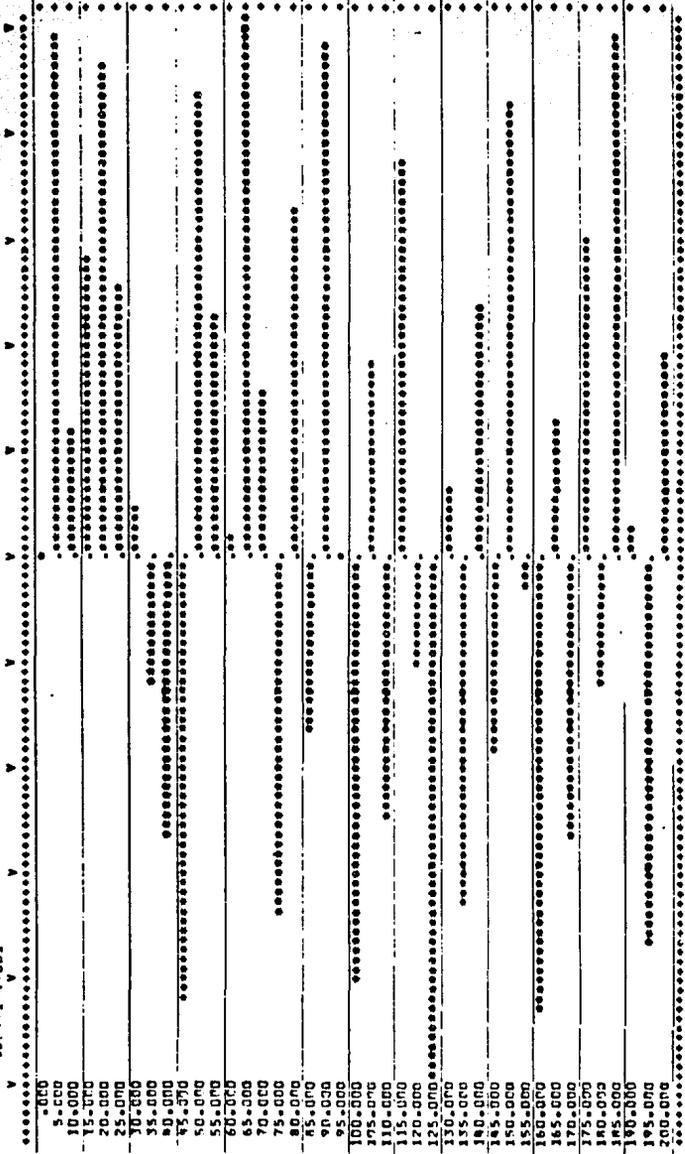
- 1159832-001
- 1161811-000
- 2116579-000
- 1116774-000
- 4117074-000
- 5117374-000
- 4117674-000
- 7117970-000
- 8118268-000
- 9118568-000
- 1011884-001



ESPECTRO DE FASE (SEÑAL "A")

LOS VALORES DE LA ORDENADA SON

- 298482+001
- 2238274+001
- 3177908+001
- 2111518+001
- 3024761+001
- 6336854+000
- 1237033+001
- 1240214+001
- 2403808+001
- 3746719+001

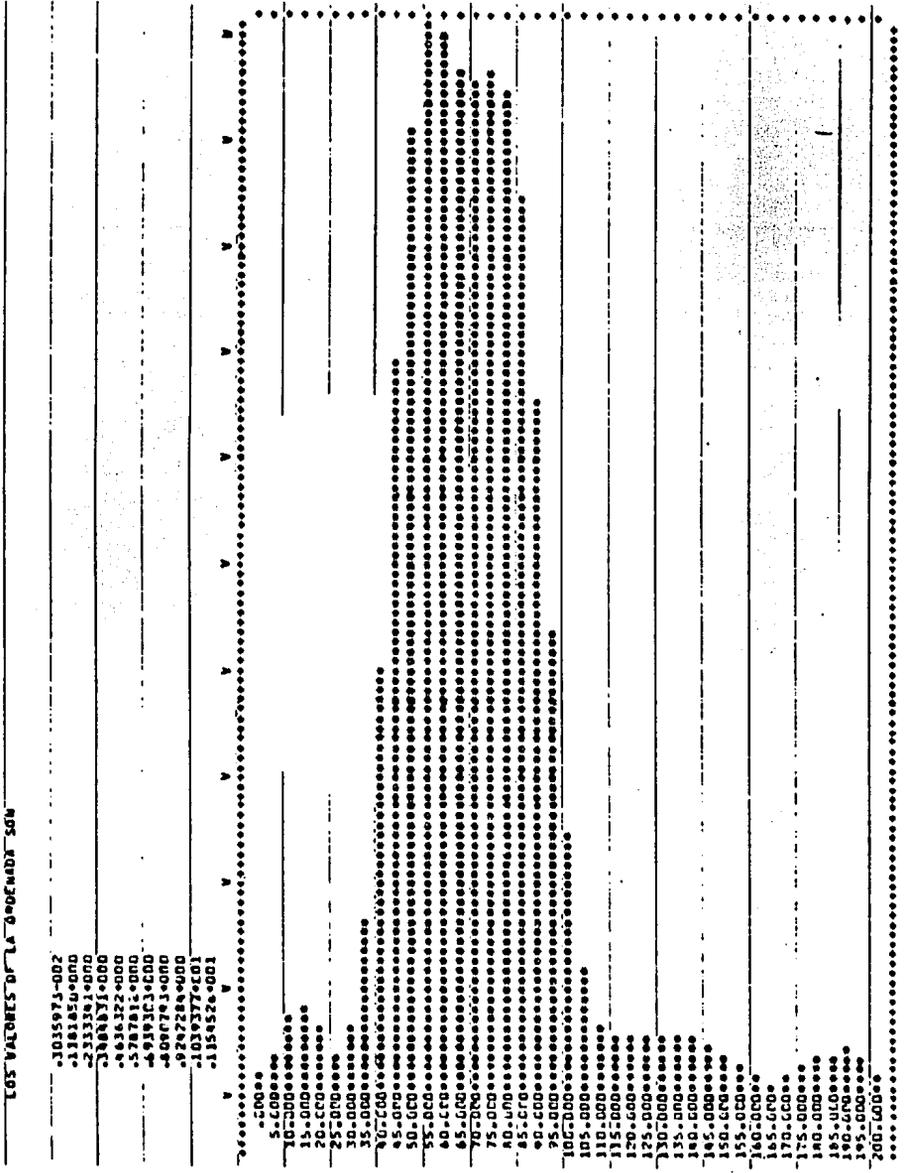


L= 40 F=5.00 I= .002

LA FRECUENCIA NYQUIST ES FN= 250.000

ESPECTRO DE AMPLITUD		ESPECTRO DE FASE	
EDA(0)=	.01279	EDF(0)=	.0000000
EDA(1)=	.03596	EDF(1)=	-.5163750
EDA(2)=	-.07362	EDF(2)=	.3020116
EDA(3)=	-.08998	EDF(3)=	.3234548
EDA(4)=	-.06498	EDF(4)=	-.0521704
EDA(5)=	-.03857	EDF(5)=	1.2251400
EDA(6)=	-.06177	EDF(6)=	1.1428389
EDA(7)=	-.18556	EDF(7)=	-.4284384
EDA(8)=	-.45717	EDF(8)=	-.1654427
EDA(9)=	-.78514	EDF(9)=	-.0867170
EDA(10)=	1.04297	EDF(10)=	.0333392
EDA(11)=	1.15453	EDF(11)=	.0024463
EDA(12)=	1.14318	EDF(12)=	-.0114688
EDA(13)=	1.09612	EDF(13)=	-.0123956
EDA(14)=	1.08872	EDF(14)=	-.0118359
EDA(15)=	1.10661	EDF(15)=	-.0223989
EDA(16)=	1.08463	EDF(16)=	-.0466719
EDA(17)=	-.96515	EDF(17)=	-.0820841
EDA(18)=	-.75066	EDF(18)=	-.1298003
EDA(19)=	-.49858	EDF(19)=	-.2009486
EDA(20)=	-.27782	EDF(20)=	-.3313756
EDA(21)=	-.13186	EDF(21)=	-.4295121
EDA(22)=	-.07070	EDF(22)=	-1.2321385
EDA(23)=	-.05947	EDF(23)=	-1.6645985
EDA(24)=	-.05532	EDF(24)=	-1.6732752
EDA(25)=	-.05371	EDF(25)=	-1.5465828
EDA(26)=	-.05412	EDF(26)=	-1.5440254
EDA(27)=	-.05432	EDF(27)=	-1.7249925
EDA(28)=	-.05361	EDF(28)=	-1.9912233
EDA(29)=	-.04898	EDF(29)=	-2.2850157
EDA(30)=	-.03827	EDF(30)=	-2.6024687
EDA(31)=	-.02534	EDF(31)=	-3.0220769
EDA(32)=	-.01401	EDF(32)=	2.7686199
EDA(33)=	-.00304	EDF(33)=	2.8049945
EDA(34)=	-.01071	EDF(34)=	-1.7165066
EDA(35)=	-.02209	EDF(35)=	-2.1550359
EDA(36)=	-.03186	EDF(36)=	-2.7123197
EDA(37)=	-.03964	EDF(37)=	3.0491678
EDA(38)=	-.04048	EDF(38)=	2.6107971
EDA(39)=	-.03140	EDF(39)=	2.2483470
EDA(40)=	-.01504	EDF(40)=	2.1647753

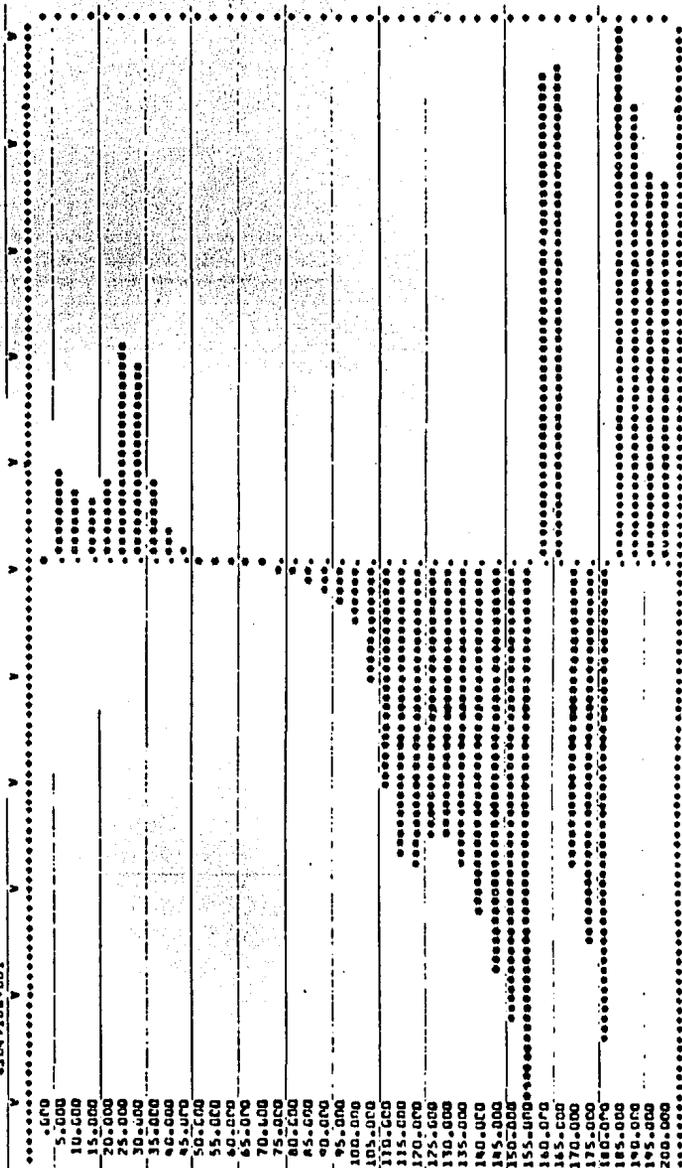
ESPECTRO DE AMPLITUD (SEÑAL "B")



ESPECTRO DE FASE (SEÑAL "B")

LOS VALORES DE LA GRUPEADA SON

-3027077+001
 -241495+001
 -1807828+001
 -1200704+001
 -5935740+000
 -1358542+001
 -6208688+000
 -1727798+001
 -1038919+001
 -2882083+001
 -3087158+001



051	03031413	00004790	00000870	00013323	00007316
00017607	00006438	00011461	00018891	00015683	
00007633	00002958	00022441	00046331	00062129	
00077622	00070314	00027211	00000743	00147516	
00165125	00124237	00026477	00011491	00214621	
00045331	00003631	00084278	00001444	00234186	
00023337	00165375	00019710	00023661	00274670	
00051129	00172964	00010417	00102731	00184192	
00010441	00000689	00026391	00176367	00050029	
00010251	00007821	00087170	00018578	00014973	
00073641	00043891	00076121	00017029	00077150	
00010471	00170226	00062631	00068594	00010779	
00011241	00071991	00056616	00026139	00011079	
00000800	00026311	00044659	00014461	00014347	
00021199	00000557	00033702	00010134	00003283	
00122537	00014306	00142650	00064304	00015894	
00038861	00060445	00034421	00000113	00024467	
00017701	00003612	00000442	00024633	00047090	
00030010	00003681	00031984	00000189	00010123	
00016361	00016441	00001821	00067332	00001403	
00001567	00000547	00000377	00000764	00000952	
00000147	00000387	00000214	00000127	00000194	
00000001	00000000	00000000	00000000	00000000	
00000000	00000000	00000000	00000000	00000000	

L= 40 F=5.00 T= .002

LA FRACCION NYQUIST ES FN= 250.000

ESPECTRO DE AMPLITUD	ESPECTRO DE FASE
EDA1 01= .00007	EDF1 01= .0000000
EDA1 11= .00042	EDF1 11= -2.8155923
EDA1 21= .00262	EDF1 21= 1.0939636
EDA1 31= .00174	EDF1 31= -1.9770801
EDA1 41= .01000	EDF1 41= -3.0500222
EDA1 51= .02470	EDF1 51= 2.7453326
EDA1 61= .06057	EDF1 61= -1.3892662
EDA1 71= .16776	EDF1 71= -.3131975
EDA1 81= .46237	EDF1 81= -1.4046598
EDA1 91= .73654	EDF1 91= -2.4716281
EDA1 101= .69336	EDF1 101= 2.6166743
EDA1 111= .33479	EDF1 111= 1.3429312
EDA1 121= .07056	EDF1 121= .0485637
EDA1 131= .02392	EDF1 131= -3.0340020
EDA1 141= .02120	EDF1 141= .8869691
EDA1 151= .02298	EDF1 151= -2.0657730
EDA1 161= .02102	EDF1 161= -1.8990610
EDA1 171= .01587	EDF1 171= -1.1157150
EDA1 181= .01567	EDF1 181= 2.7766847
EDA1 191= .00927	EDF1 191= -.2297101
EDA1 201= .00422	EDF1 201= -2.7425453
EDA1 211= .00227	EDF1 211= .4341851
EDA1 221= .00164	EDF1 221= -2.7401080
EDA1 231= .00101	EDF1 231= .5377710
EDA1 241= .00124	EDF1 241= -2.2738923
EDA1 251= .00103	EDF1 251= -1.7499349
EDA1 261= .00109	EDF1 261= -1.2013779
EDA1 271= .00117	EDF1 271= 2.5526892
EDA1 281= .00094	EDF1 281= .5991983
EDA1 291= .00113	EDF1 291= 2.8971385
EDA1 301= .00065	EDF1 301= -.0524735
EDA1 311= .00057	EDF1 311= 3.0506011
EDA1 321= .00026	EDF1 321= .1545891
EDA1 331= .00006	EDF1 331= -2.7528194
EDA1 341= .00023	EDF1 341= 2.9359131
EDA1 351= .00039	EDF1 351= -.3799007
EDA1 361= .00073	EDF1 361= 2.8467269
EDA1 371= .00067	EDF1 371= -3.026509
EDA1 381= .00091	EDF1 381= 2.7736194
EDA1 391= .00060	EDF1 391= .0123321
EDA1 401= .00072	EDF1 401= -3.0181293

ESPECTRO DE AMPLITUD (CONVOLUCION)

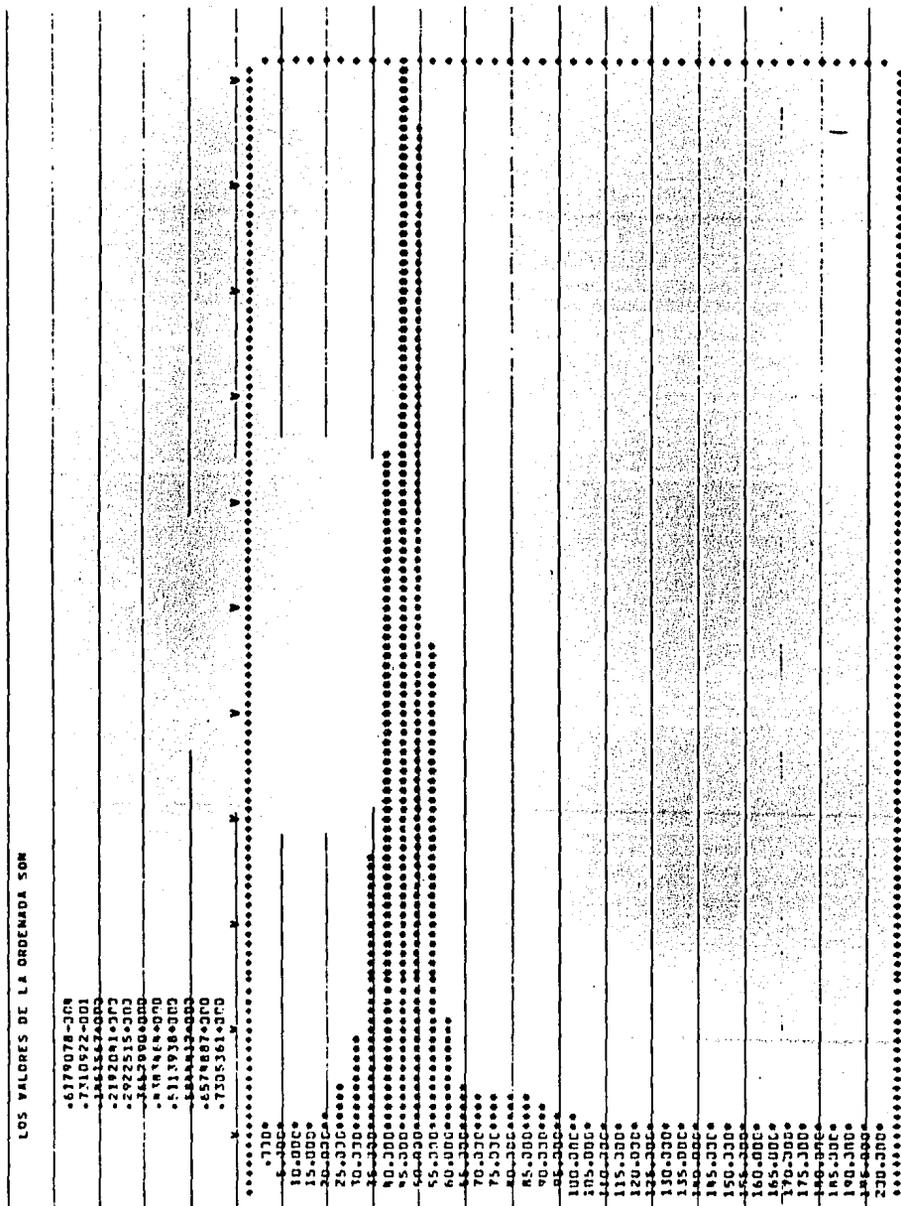


FIG. 2.1.3

LOS ELEMENTOS DE LA CORRELACION DE LAS SEÑALES A V R SON

C21	•00000000	•00000000	•00000000	•00000000	•00000000
•00000000	•00000000	•00000000	•00000000	•00000000	•00000000
•00013796	•00180306	•00003490	•00011134	•00009363	
•00174119	•00218324	•00006076	•00112420	•00047740	
•00376429	•00619678	•00653583	•00071026	•00532613	
•00019635	•001057973	•01055532	•02122561	•01644290	
•00045531	•01142435	•02637469	•03469051	•03227155	
•01877019	•00358197	•02649876	•04290497	•04953839	
•00375265	•01004601	•01776590	•04017483	•04995020	
•04216711	•02153301	•00572005	•02466187	•04274533	
•04013567	•02467461	•00178136	•01468266	•03210466	
•03256497	•02091943	•00377115	•01277346	•02325981	
•02475230	•01657404	•00333423	•00947344	•01664604	
•01561714	•00816497	•00014692	•00009370	•00513632	
•00508747	•00330681	•00001050	•00024264	•00235408	
•00340267	•00322533	•00077460	•00192400	•00322265	
•00264444	•00100064	•00005543	•00144063	•00163475	
•00175612	•00077862	•00009806	•00043778	•00063284	
•00061421	•00013527	•00026212	•00042281	•00034960	
•00029447	•00018942	•00007332	•00013993	•00009976	
•00014064	•00000134	•00009281	•00011003	•00012432	
•00004140	•00014453	•00000993	•00001705	•00000264	
•00002341	•00001544	•00000441	•00000046	•00000156	
•00001111	•00000000	•00000000	•00000000	•00000000	

CORRELACION

LISTA DE NUMEROS DE LA TABLA

-207619-001
 -207619-002
 -207619-003
 -207619-004
 -207619-005
 -207619-006
 -207619-007
 -207619-008
 -207619-009
 -207619-010
 -207619-011
 -207619-012
 -207619-013
 -207619-014
 -207619-015
 -207619-016
 -207619-017
 -207619-018
 -207619-019
 -207619-020
 -207619-021
 -207619-022
 -207619-023
 -207619-024
 -207619-025
 -207619-026
 -207619-027
 -207619-028
 -207619-029
 -207619-030
 -207619-031
 -207619-032
 -207619-033
 -207619-034
 -207619-035
 -207619-036
 -207619-037
 -207619-038
 -207619-039
 -207619-040
 -207619-041
 -207619-042
 -207619-043
 -207619-044
 -207619-045
 -207619-046
 -207619-047
 -207619-048
 -207619-049
 -207619-050
 -207619-051
 -207619-052
 -207619-053
 -207619-054
 -207619-055
 -207619-056
 -207619-057
 -207619-058
 -207619-059
 -207619-060
 -207619-061
 -207619-062
 -207619-063
 -207619-064
 -207619-065
 -207619-066
 -207619-067
 -207619-068
 -207619-069
 -207619-070
 -207619-071
 -207619-072
 -207619-073
 -207619-074
 -207619-075
 -207619-076
 -207619-077
 -207619-078
 -207619-079
 -207619-080
 -207619-081
 -207619-082
 -207619-083
 -207619-084
 -207619-085
 -207619-086
 -207619-087
 -207619-088
 -207619-089
 -207619-090
 -207619-091
 -207619-092
 -207619-093
 -207619-094
 -207619-095
 -207619-096
 -207619-097
 -207619-098
 -207619-099
 -207619-100

CORRELACION

LOS VALORES DE LAS VARIABLES PARA ESTA SEÑAL SON

L= 10 F=1.00 T= .001

LA FRECUENCIA ADQUIRIDA ES FN= 250.000

ESPECTRO DE AMPLITUD		ESPECTRO DE FASE	
EDA1 01=	.00057	EDF1 01=	.0000000
EDA1 11=	.00042	EDF1 11=	2.4146628
EDA1 21=	.00262	EDF1 21=	.7242400
EDA1 31=	.00174	EDF1 31=	1.7301641
EDA1 41=	.01000	EDF1 41=	2.7240676
EDA1 51=	.02670	EDF1 51=	.7950300
EDA1 61=	.08097	EDF1 61=	-.8968274
EDA1 71=	.10276	EDF1 71=	-1.7700741
EDA1 81=	.06237	EDF1 81=	-1.7755926
EDA1 91=	.13054	EDF1 91=	-2.8449626
EDA1 101=	.69376	EDF1 101=	2.1699959
EDA1 111=	.35479	EDF1 111=	1.3391028
EDA1 121=	.07056	EDF1 121=	.0715012
EDA1 131=	.02192	EDF1 131=	1.0598433
EDA1 141=	.02120	EDF1 141=	.9106614
EDA1 151=	.02298	EDF1 151=	-2.0009752
EDA1 161=	.07102	EDF1 161=	1.9924964
EDA1 171=	.01907	EDF1 171=	-.9515660
EDA1 181=	.01867	EDF1 181=	3.0362054
EDA1 191=	.00929	EDF1 191=	.1721793
EDA1 201=	.00622	EDF1 201=	-2.0797943
EDA1 210=	.00227	EDF1 211=	1.6932134
EDA1 221=	.00186	EDF1 221=	-.7733124
EDA1 231=	.00101	EDF1 231=	-2.4183042
EDA1 241=	.00374	EDF1 241=	1.0726400
EDA1 251=	.00103	EDF1 251=	-1.6400917
EDA1 261=	.00109	EDF1 261=	1.0004050
EDA1 271=	.00117	EDF1 271=	-2.0050279
EDA1 281=	.00094	EDF1 281=	-2.7610167
EDA1 291=	.00113	EDF1 291=	1.1819656
EDA1 301=	.00665	EDF1 301=	-1.1307210
EDA1 311=	.00057	EDF1 311=	2.0116241
EDA1 321=	.00076	EDF1 321=	.9005763
EDA1 331=	.00606	EDF1 331=	-2.0001162
EDA1 341=	.00073	EDF1 341=	.0449156
EDA1 351=	.00010	EDF1 351=	-2.7511633
EDA1 361=	.00073	EDF1 361=	1.4001549
EDA1 371=	.00047	EDF1 371=	-.1174646
EDA1 381=	.00091	EDF1 381=	-2.0479627
EDA1 391=	.00060	EDF1 391=	1.7990140
EDA1 401=	.00072	EDF1 401=	-1.0491616

ESPECTRO DE AMPLITUD (CORRELACION)

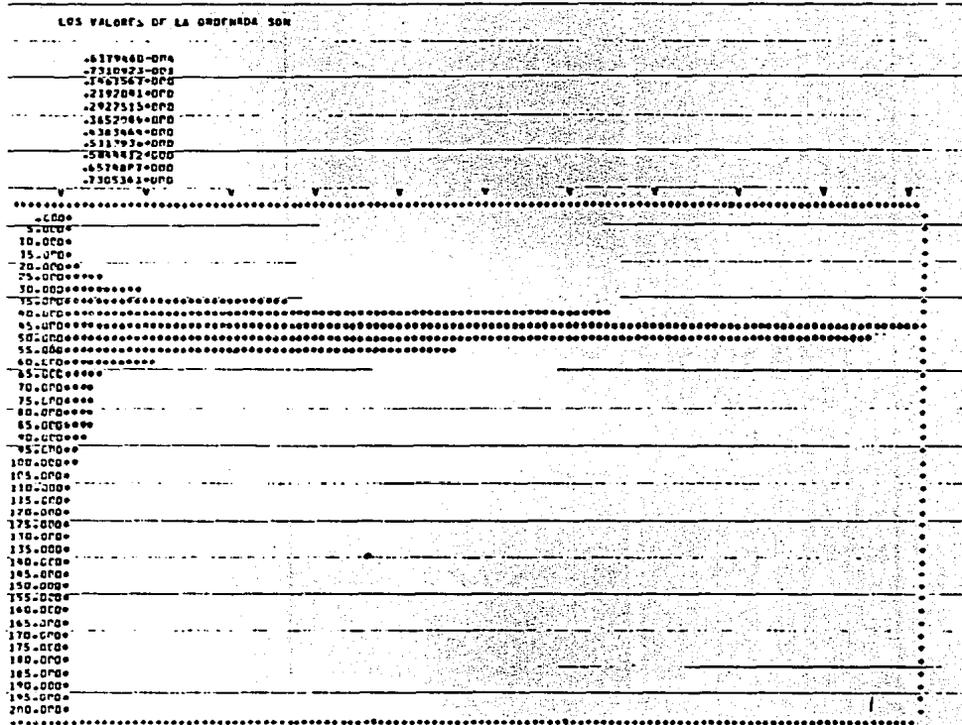


Fig. 2.2.1

ESPECTRO DE FASE (CORRELACION)

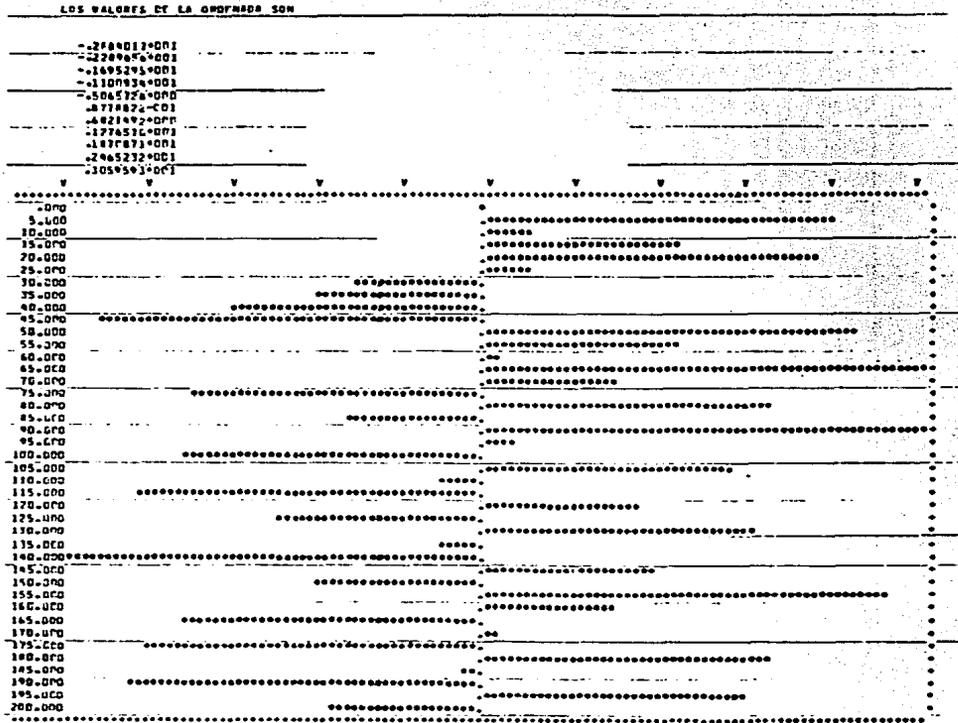


FIG. 2.2.1

III.-ALGEBRA DE MATRICES POLINOMIALES

3.1. Notación matricial

Es conveniente que antes de proceder con nuestro estudio de análisis multicanal, se defina la notación que se va a emplear:

Supóngase que a es una matriz. Entonces:

a^T representa la traspuesta de a
 a^* es el complejo conjugado de a
 a^{*T} es la traspuesta del complejo conjugado de a
 a^{-1} representa la inversa de una matriz cuadrada a
 $\det a$ es el determinante de una matriz cuadrada a
 $\text{adj } a$ es la adjunta de una matriz cuadrada a
 I_n representa a la matriz identidad de orden $N \times N$
 $D = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n]$ es una matriz diagonal.

En el presente estudio, se hará uso esencial de arreglos de datos. Existen dos formas en las cuales se pueden almacenar las series de tiempo multicanal; éstas son, en forma de traza y en forma multiplexada.

Imaginemos una serie de dos canales;

Canal 1 :	3	-2	4	5
Canal 2 :	1	7	-3	2
Tiempo :	1	2	3	4

Como matriz; se podría escribir de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

En el almacenamiento en forma de traza, se ordenan los -- valores por canal; es decir, se toman los valores del pri mer canal seguidos por los del segundo, etc., o en otras -- palabras, se escriben los renglones de la matriz multica -- nal en serie.

En este caso, el almacenamiento en forma de traza sería:

$$X = (3, -2, 4, 5, 1, 7, -3, 2)$$

En la forma multiplexada se guardan los valores según el tiempo de registro; es decir, los valores de todos los - canales al tiempo 1 seguidos por los valores de todos -- los canales al tiempo 2, etc., dicho de otro modo, se -- construye la serie (considerando la matriz) por columnas.

La forma multiplexada sería:

$$X = (3, 1, -2, 7, 4, -3, 5, 2)$$

Esta última forma de arreglo, es la que se utilizará con más frecuencia.

3.2.-Valores y vectores característicos de una matriz.

El motivo por el cual se introducirá el concepto de ecua ción característica de una matriz cuadrada a , de orden n , se puede describir de la siguiente forma: considérese que $Y = aX$ es una transformación lineal que convierte al - vector X en un vector Y . Se quiere investigar la posibi lidad, de que ciertos vectores X sean transformados en - λX , donde λ es un escalar. El vector X que cumple con la siguiente expresión:

$$aX = \lambda X \quad 3.2.1$$

Se llama vector invariante, vector característico, o - eigenvalor bajo la transformación.

De 3.2.1 se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda X - aX &= 0 \\ (\lambda I - a)X &= 0 \end{aligned} \quad 3.2.2$$

La expresión $(\lambda I - a)$ es la matriz característica de a . El sistema homogéneo de ecuaciones 3.2.2 tiene solución no trivial si y sólo si:

$$\det (\lambda I - a) = 0 \quad 3.2.3$$

Desarrollando el determinante antes mencionado, da como resultado un polinomio $\phi(\lambda)$ de grado n , donde n es el orden de la matriz a . Por lo tanto:

$$\det (\lambda I - a) = \phi(\lambda) = 0$$

recibe el nombre de ecuación característica de a , y sus raíces $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son las raíces características, eigenraíces, o eigenvalores de a . Si $\lambda = \lambda_i$ es una eigenraíz, entonces la ecuación 3.2.2 tiene una solución no trivial X_i , el cual es el eigenvector asociado con la eigenraíz λ_i ; ésto es:

$$(\lambda_i I - a)X_i = 0$$

3.3.-Matrices polinomiales o polinomios matriciales.

A continuación se verá qué es un polinomio matricial y -- algunas características importantes de éstos. Definamos - "z" como un símbolo abstracto, el cual es conmutativo con -- sígo mismo y con las matrices. Así si a es una matriz, - entonces:

$$zaz = z^2a = az^2$$

Ahora supóngase que $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_p$ son matrices cua-- dradas de orden n . Entonces $A(z)$ definido como:

$$A(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{p-1}z^{p-1} + a_pz^p$$

es un polinomio matricial o una matriz polinomial. Un po-- linomio matricial $A(z)$ es singular o no singular de -- acuerdo a que si el $\det A(z)$ es o no cero.

Sean $A(z)$ y $B(z)$ dos polinomios matriciales:

$$A(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{p-1}z^{p-1} + a_pz^p$$

$$B(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_{q-1}z^{q-1} + b_qz^q$$

Se dice que estos dos polinomios matriciales son iguales si $p=q$ y $a_i = b_i$ para $i=0, 1, 2, \dots, p$.

La suma de dos polinomios matriciales $A(z)$ y $B(z)$ es un polinomio matricial $C(z) = A(z) + B(z)$ cuyos coeficientes - son la suma de los coeficientes correspondientes de - - $A(z)$ y $B(z)$. El producto de dos polinomios matriciales $A(z)$ y $B(z)$ es un polinomio matricial $C(z) = A(z)B(z)$ cu--

Los coeficientes se obtienen efectuando la convolución de los coeficientes de $A(z)$ con los de $B(z)$; por lo tanto, - en esta operación los polinomios matriciales no son conmutativos. El producto $A(z) B(z)$ es un polinomio matricial cuyo grado máximo es $p+q$.

3.3.1.-Programa que efectúa la convolución de dos polinomios matriciales.

El programa MATRIXPOL calcula la multiplicación de dos polinomios matriciales o la convolución entre dos señales multicanales.

El programa MATRIXPOL hace uso de las subrutinas BRAINY-- y ZERO (ver Apéndice).

Los datos del programa son los siguientes:

NRA: Número de renglones de $A=P$

NCA: Número de columnas de $A=q$

LA: Longitud de la señal multicanal $A=m+1$

A: Polinomio matricial A (dado en forma multiplexada)

NRB: Número de renglones de $B=q$

NCB: Número de columnas de $B=r$

LB: Longitud de la señal multicanal $B=n+1$

B: Polinomio matricial B (en forma multiplexada)

RESULTADOS:

C: Convolución de los polinomios matriciales (en forma multiplexada).

La proposición DIMENSION de este programa debe satisfacer las siguientes condiciones para cada ejemplo o corrida:

DIMENSION A(NRA, NCA, LA), B(NCA, NCB, LB), C(NRA, NCB, LC) en donde: $LC=LA+LB-1$.

NOTA: Si se quieren correr datos complejos, sólo es necesario quitar los comentarios de las proposiciones complejas de las subrutinas que intervengan.

3.4.-Inversa de un polinomio matricial

El determinante, adjunta e inversa de un polinomio matricial se define de la misma manera que para una matriz. - Por ejemplo, el determinante del polinomio matricial.

$$C(Z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} 2+z & z \\ 1 & 6+z \end{bmatrix}$$

es el polinomio:

$$\det C(z) = (2+z)(6+z) - (1)(z) = 12 + 7z + z^2$$

Sean A(z) y B(z) polinomios matriciales, entonces:

$$\det[A(z) B(z)] = [\det A(z)][\det B(z)] = \det[B(z)A(z)]$$

La adjunta de una matriz de elementos a_{ij} es la transpuesta de la matriz de cofactores de la matriz A y se tiene que:

$$[a_{ij}][\text{adj}(a_{ij})] = [\text{adj}(a_{ij})][a_{ij}] = [\det(a_{ij})] \quad I$$

Esta propiedad también se aplica cuando los elementos a_{ij} son polinomios en z ; es decir para los polinomios matriciales.

$$A(z)[\text{adj } A(z)] = [\text{adj } A(z)]A(z) = [\det A(z)] \quad I$$

Cabe señalar aquí que I representa a la matriz identidad. Por lo tanto, la inversa de $A(z)$ se puede expresar como:

$$A^{-1}(z) \equiv [A(z)]^{-1} = \frac{\text{adj } A(z)}{\det A(z)}$$

Dado un polinomio matricial $A(z)$ se pueden presentar dos casos:

El primero es cuando el $\det A(z)$ es un polinomio de grado mayor que cero, entonces $A^{-1}(z)$ no es un polinomio matricial, sino una matriz cuyos elementos son funciones racionales.

El segundo caso es cuando el $\det A(z)$ es una constante (independiente de z) diferente de cero, por lo cual la inversa $A^{-1}(z)$ es un polinomio matricial; en este caso $A(z)$ recibe el nombre de polinomio matricial elemental.

Ahora calculemos el determinante, la matriz adjunta y los coeficientes de un polinomio matricial. El determi -

nante y los coeficientes son polinomios escalares en Z , mientras que la matriz adjunta es un polinomio matricial; todos estos se calculan en la subrutina POMAIN no importa si el polinomio matricial es singular para algunos o todos los valores de z .

El método empleado calcula la inversa como una relación de polinomios y no efectúa la división debido a que esta sería una serie infinita a menos de que el determinante fuera una constante. Si el determinante es un polinomio de fase mínima, entonces las funciones racionales deben ser desarrolladas en una serie infinita de potencias positivas de z . Cuando el determinante es un polinomio de fase máxima, entonces las funciones racionales se desarrollan en una serie infinita de potencias negativas de z ; mientras que si el determinante es un polinomio de fase mixta, entonces las funciones se desarrollan en una serie estable, involucrando potencias positivas y negativas de z .

Cada elemento de la matriz polinomial es un polinomio en z de grado m representado por sus coeficientes. Las operaciones de suma, resta y multiplicación de los polinomios se desarrollan en base a sus coeficientes y como un polinomio matricial se puede considerar como una matriz cuyos elementos son polinomios o bien un polinomio cuyos coeficientes son matrices, entonces la multiplicación de polinomios matriciales se puede efectuar por medio de cualesquiera de los dos algoritmos siguientes:

- 1).-Un algoritmo que efectúa multiplicación de polinomios cuyos coeficientes son matrices.

2).-Un algoritmo de multiplicación matricial donde los elementos de las matrices son los coeficientes de los polinomios.

Así, el producto $C(z)=A(z)B(z)$ estará representado por un loop en la siguiente forma:

$$C_{pq}^{k+j} = C_{pq}^{k+j} + a_{pi}^k \cdot b_{iq}^j$$

El algoritmo de la subrutina esta basado en un método dado por Gantmacher⁸ y es el siguiente:

Si $A(z)$ es un polinomio matricial, entonces su ecuación característica esta dada por la expresión que sigue a continuación

$$\det(\mu I - A) = 0$$

Que se puede escribir como:

$$\mu^n - p_1 \mu^{n-1} - p_2 \mu^{n-2} - \dots - p_{n-1} \mu - p_n = 0$$

A la ecuación del lado izquierdo se le conoce como polinomio característico; en este caso p_k son polinomios en Z . Por el teorema de Cayley - Hamilton, una matriz satisface su ecuación característica.

$$0 = A^n - p_1 A^{n-1} - p_2 A^{n-2} - \dots - p_{n-1} A - p_n I$$

Si multiplicamos esta ecuación por

⁸ Gantmacher, F.R., The Theory of matrices, chelsea, New York, - - 1959 Vol. 1

$$A^{-1} = (-1)^{n-1} (\text{adj } A) / P_n$$

Obtenemos:

$$(-1)^{n-1} \text{adj } A = A^{n-1} - P_1 A^{n-2} - \dots - P_{n-2} A - P_{n-1} I$$

Que se puede escribir como:

$$(-1)^{n-1} \text{adj } A = (\dots (A - P_1 I) A - P_2 I) A - \dots - P_{n-2} I) A - P_{n-1} I$$

El primer paso en los cálculos es encontrar

$$P_1 = \text{tr} A$$

$$B_1 = A - P_1 I$$

Debido a que P_1 está dada por la traza de $A(z)$ [$\text{tr} A$]; entonces P_1 y los elementos de B_1 son polinomios escalares de grado m .

Los cálculos subsiguientes son:

$$A_2 = B_1 A$$

$$\vdots$$

$$A_n = B_{n-1} A$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \text{tr} A_2$$

$$\vdots$$

$$P_n = \frac{1}{n} \text{tr} A_n$$

$$B_2 = A_2 - P_2 I$$

$$\vdots$$

$$B_n = A_n - P_n I$$

3.4.1 Programa MATPOLIN

Dado un polinomio matricial el programa calcula su determinante, su matriz adjunta y los coeficientes de su polinomio característico.

Datos para el programa:

N : Orden del polinomio matricial =n (donde $n \geq 2$)
 LA: Grado del polinomio matricial mas uno =m+1
 A : Coeficientes del polinomio matricial (en forma multi-
 plexada)

Resultados:

ADJ: Coeficientes de la adjunta de $A(z)$ (en forma multi-
 plexada)

DET: Coeficientes del determinante de $A(z)$ (el orden en
 que estan dados estos coeficientes corresponden a -
 grados crecientes del polinomio)

La proposición DIMENSION de este programa debe satisfacer
 las siguientes condiciones:

DIMENSION A(N,N,LA), ADJ(N,N,LADJ), P(N,LDET), DET(DET),
 S(N,N,LDET)

en donde:

$$LADJ = (N-1)*(LA-1)+1$$

$$LDET = N*(LA-1)+1$$

Nota: Si se quieren procesar datos complejos se deberá -
 quitar la letra "C" que aparece en la columna uno-
 en las proposiciones complejas del programa princi-
 pal y de las subrutinas que intervengan en él. El
 programa MATPOLIN requiere de las siguientes sub--
 rutinas:

POMAIN, MOVE, BRAINY, ZERO Y SCALE.

3.5.-Ecuación del determinante y la adjunta

Sea $A(z)$ un polinomio matricial de orden $P \times P$

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$$

La ecuación de su determinante es:

$$\det A(z) = 0$$

Cuyas raíces son z_1, z_2, \dots, z_n ; donde n es el grado del polinomio del $\det A(z)$. Aunque estas raíces pueden repetirse, es conveniente considerarlas como n valores diferentes. El grado n debe satisfacer que:

$$n \leq mp$$

Y para mayor facilidad, se asumirá que

$$n = mp$$

por lo tanto, las raíces

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$$

se consideran distintas y diferentes de cero.

La matriz constante $A(z_s)$ obtenida de la sustitución de la raíz z_s en el polinomio matricial $A(z)$ es necesariamente singular. Cuando z_s es una raíz que no se repite, entonces la matriz $A(z_s)$ de orden $P \times P$ tiene rango $P-1$ y la adjunta evaluada en $z=z_s$.

$$\text{adj } A(z_s)$$

es una matriz del mismo orden, como rango 1 y se puede expresar como un producto de la forma:

$$\text{adj } A(z_s) = C_s r_s$$

donde:

C_s es un vector columna (constante) y diferente de cero.

r_s es un vector renglón (constante) y diferente de cero.

apropiados para la raíz z_s .

Hay que hacer notar que C_s y r_s no son únicos; ya que pueden existir varios vectores que den el mismo resultado.

3.6.-Eigenvectores y Eigenvalores⁹ de un polinomio matricial.

Considérese el polinomio matricial de orden $P \times P$ y grado m .

$$U(z) = I - u_1 z - u_2 z^2 - \dots - u_m z^m \quad 3.6.1$$

Por comodidad hagamos $m=1$, entonces: 3.6.1 se reduce a:

$$U(z) = I - u_1 z \quad 3.6.2$$

se sabe que

$$U^{-1}(z) = \frac{\text{adj } U(z)}{\det U(z)} \quad 3.6.3$$

Por lo tanto

⁹ También conocidos como vectores y valores característicos, respectivamente.

$$U(z) \operatorname{adj} U(z) = I \det U(z) \quad 3.6.4$$

Recuérdese la ecuación del determinante

$$\det U(z) = 0 \quad 3.6.5$$

cuyas raíces son: z_1, z_2, \dots, z_p ; es decir

$$\det U(z_i) = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, p \quad 3.6.6$$

Por otra parte

$$\operatorname{adj} U(z_i) = c_i r_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, p \quad 3.6.7$$

donde c_i es un vector columna y r_i es un vector renglón-
asociados con la raíz z_i .

Por lo cual, la ecuación 3.6.4 evaluada en $z = z_i$ es

$$U(z_i) c_i r_i = 0 \quad 3.6.8$$

en donde el cero representa a una matriz cero de orden $-$
 $P \times P$; ésta ecuación se puede escribir como:

$$\begin{aligned} U(z_i) c_i &= 0 \\ (I - u_1 z_i) c_i &= 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad 3.6.9$$

en donde el cero representa a una columna de ceros de or-
den $P \times 1$, c_i es el vector eigencolumna de la matriz u_1 , -
asociado con la eigenraíz $\lambda_i = z_i^{-1}$. Por lo tanto, dado -
el polinomio matricial 3.6.2 se puede calcular su deter-
minante ($\det U(z)$) y encontrar sus raíces (z_1, z_2, \dots, z_p)

como se muestra en 3.6.6. Sustituyendo estas raíces en la adjunta ($\text{adj } U(z)$) se obtienen las eigencolumnas (c_1, c_2, \dots, c_p) como se manifiesta en 3.6.7.

En resumen, dado el polinomio 3.6.2, es posible calcular sus eigenraíces z_i y eigencolumnas c_i para $i=1,2,\dots,p$.

El problema inverso consiste en que dadas las eigenraíces y las correspondientes eigencolumnas, se forme el polinomio matricial $U(z)$.

El primer paso es formar la matriz $P \times P$ de eigencolumnas

$$C = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_p)$$

y la matriz diagonal $P \times P$ de eigenvalores o eigenraíces.

$$Z = \text{diag} (z_1, z_2, z_3, \dots, z_p)$$

Tomando esta notación, se tiene de la ecuación 3.6.9 que:

$$\begin{aligned} (c_i - u_i, c_i z_i) &= 0 \quad \text{para } i=1,2,\dots,p \\ (C - u, CZ) &= 0 \end{aligned} \quad 3.6.10$$

Resolviendo esta ecuación para u_1 .

$$u_1 = CZ^{-1}C^{-1}$$

se puede formar el polinomio matricial.

$$U(z) = I - u_1 z$$

El procedimiento que se acaba de describir para el polinomio 3.6.2 de grado $m=1$, también se aplica al polinomio -

mio 3.6.1 de grado arbitrario m .

Sea el polinomio matricial 3.6.1, la ecuación del determinante posee $n=mp$ raíces z_1, z_2, \dots, z_n ; esto es:

$$\det U(z_\lambda) = 0 \quad \text{para } \lambda = 1, 2, \dots, n \quad 3.6.11$$

Sustituyendo las raíces en la adjunta;

$$\text{adj } U(z_\lambda) = c_\lambda r_\lambda \quad \text{para } \lambda = 1, 2, 3, \dots, n \quad 3.6.12$$

cuyas eigencolumnas son $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$

Así, del polinomio 3.6.1 se pueden calcular las eigenraíces z_λ y sus eigencolumnas c_λ para $\lambda = 1, 2, 3, \dots, n$ - donde $n=mp$. Estos valores satisfacen la siguiente ecuación:

$$U(z_\lambda)c_\lambda = 0$$

que también es

$$(I - u_1 z_\lambda - u_2 z_\lambda^2 - \dots - u_m z_\lambda^m)c_\lambda = 0 \quad 3.6.13$$

Para resolver el problema en forma inversa, imagínese que se dan las eigenraíces z_λ y las eigencolumnas c_λ . Formando la matriz de orden $p \times n$ de eigencolumnas:

$$C = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$$

y la matriz diagonal $n \times n$ de eigenraíces

$$Z = \text{diag}(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$$

En notación matricial expresemos a 3.6.13 como:

$$C - u_1 CZ - u_2 CZ^2 - \dots - u_m CZ^m = 0 \quad 3.6.14$$

en donde el 0 representa a una matriz de orden $p \times n$ cuyos elementos son ceros.

Es posible resolver el sistema de ecuaciones simultáneas representado por la ecuación 3.6.14 para las matrices u_1, u_2, \dots, u_m de orden $p \times p$ y con esto formar el polinomio matricial $U(z)$.

Considérese ahora el polinomio matricial de orden $p \times p$

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m \quad 3.6.15$$

el cual se puede factorizar como:

$$A(z) = a_0 (I - u_1 z - \dots - u_m z^m) = a_0 U(z)$$

donde.

$$u_i = -a_0^{-1} a_i \quad \text{para } i=1, 2, \dots, m$$

Puesto que a_0 no es una matriz singular, se ve en la siguiente expresión,

$$\det A(z) = \det a_0 \det U(z)$$

que $A(z)$ y $U(z)$ tienen las mismas eigenraíces z_1, z_2, \dots, z_n , donde $n=mp$.

Por otro lado

$$\text{adj } A(z_i) = \text{adj } [a_0 U(z_i)] = \text{adj } U(z_i) \text{ adj } a_0$$

$$= c_i r_i \text{adj } a_0 = c_i (r_i \text{adj } a_0)$$

y se observa que $A(z)$ y $U(z)$ tienen las mismas eigencolumnas $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, donde $n=mp$.

Por lo tanto, de la ecuación 3.6.13 se tiene que:

$$A(z_i) c_i = 0 \quad \text{para } i=1, 2, \dots, n \quad 3.6.16$$

donde 0 es un vector de orden $P \times 1$ formado por ceros.

En conclusión, se puede decir que, el tratamiento del polinomio matricial 3.6.15 se puede efectuar de la misma manera que para el polinomio matricial 3.6.1.

3.7.-Factorización de polinomios matriciales en productos de binomios

Sea el polinomio matricial de orden $P \times P$

$$A(Z) = a_0 + a_1 Z + \dots + a_m Z^m \quad 3.7.1$$

El objetivo es encontrar las matrices b_k del mismo orden que a_i , tales que:

$$A(Z) = b_0 (I + Z b_1) (I + Z b_2) \dots (I + Z b_m) \quad 3.7.2$$

Por otro lado se sabe que:

$$\text{adj } A(Z) = A^{-1}(Z) \det A(Z) \quad 3.7.3$$

Postmultiplicando la ecuación 3.7.2 por $\text{adj } A(Z)$, se llega a la siguiente expresión:

$$\det A(Z) = b_0(I+zb_1)(I+zb_2)\dots(I+zb_m) \text{ adj } A(z) \quad 3.7.4$$

Supóngase que Z_1, Z_2, \dots, Z_n ($n=mp$) son las raíces del polinomio del $\det A(Z)$. Además, se sabe que:

$$\text{adj } A(Z_k) = c_k r_k \quad \text{para } k=1,2,\dots,n$$

Para $Z=Z_k$, el $\det A(Z_k)$ es cero, por lo que la ecuación 3.7.4 se transforma a:

$$\begin{aligned} b_0(I+Z_k b_1)(I+Z_k b_2)\dots(I+Z_k b_m) \text{ adj } A(Z_k) &= 0 \\ b_0(I+Z_k b_1)(I+Z_k b_2)\dots(I+Z_k b_m) c_k r_k &= 0 \end{aligned} \quad 3.7.5$$

la ecuación 3.7.5 se cumple si:

$$(I+Z_k b_m) c_k = 0 \quad 3.7.6$$

Esta expresión establece que c_k es un eigenvector de b_m con eigenvalor

$$\lambda_k = -\frac{1}{Z_k}$$

Considerando P raíces (Z_1, Z_2, \dots, Z_p) de entre las n - - raíces del $\det A(Z)$, entonces la ecuación 3.7.6 da:

$$b_m c_k = c_k \left(-\frac{1}{Z_k}\right) \quad 3.7.7$$

Para expresarla en notación matricial, se considerará a C como una matriz $P \times P$ de eigencolumnas

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_p]$$

y D como una matriz diagonal con p eigenvalores

$$D = \text{diag}[-Z_1^{-1}, -Z_2^{-1}, \dots, -Z_p^{-1}]$$

De esta manera la ecuación 3.7.7 es:

$$b_m C = CD$$

$$b_m = CD C^{-1}$$

Considérese ahora que:

$$I \det A(z) = b_0 (I + zb_1) \dots (I + zb_{m-1}) [(I + zb_m) \text{adj} A(z)]$$

El factor

$$(I + zb_m) \text{adj} A(z)$$

también llega a ser el producto de una columna y un renglón en los últimos ceros del $\det A(z)$. Si se toman los valores de las últimas $m-p$ raíces, entonces se puede determinar b_{m-1} , por el mismo método, así, continuando con el proceso, es posible determinar las últimas matrices b_{m-2} , b_2 , b_1 .

Finalmente:

$$A(Z=0) = b_0 = a_0$$

Por lo tanto se ha encontrado la factorización requerida

$$B(Z) = b_0 (I + b_1 Z) (I + b_2 Z) \dots (I + b_m Z) \quad 3.7.8$$

la cual satisface

$$I \det A(Z) = B(Z) \text{adj} A(Z) \quad 3.7.9$$

para $Z = Z_k$ ($k = 1, 2, \dots, mp$) y para $Z = 0$

Por hipótesis se sabe que la siguiente expresión es válida:

$$I \det A(z) = A(z) \text{ adj } A(z) \quad 3.7.10$$

para toda Z . Cada uno de los elementos de las ecuaciones 3.7.9 y 3.7.10 es un polinomio de grado n .

De lo anterior se observa que

$$A(z) = B(z)$$

en la cual $B(z)$ representa la factorización del polinomio matricial $A(z)$ en factores de binomios.

3.7.1.-Nombre del programa: FACTORIZ

El programa factoriza el polinomio 3.7.1 sec (3.7) en -- producto de binomios (ec. 3.7.8 de la misma sección).

Datos para el programa:

N = Orden de la matriz = p

LA = Número de coeficientes del polinomio matricial = $m+1$
 $m+1$ o longitud de la señal A

A = Coeficientes del polinomio matricial $A(Z) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \dots, \alpha_m)$ multiplexados.

ADJ = Coeficientes de la adjunta de $A(Z)$ multiplexados.

$ZEROS$ = Ceros del $\det A(Z) = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$, donde $n=mp$

Los resultados del programa son:

B = Matrices deseadas = (b_0, b_1, \dots, b_m) (dadas en forma multiplexada), las cuales cumplen con la siguiente expresi3n:

$$a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_m Z^m = b_0 (1 + b_1 Z) (1 + b_2 Z) + \dots$$

NOTA: Las variables A, ADJ, ZEROS y B se manejan en forma compleja.

El programa FACTORIZ utiliza aritm3tica compleja; por lo tanto, todas las subrutinas empleadas deben ser complejas. Estas subrutinas son: FACT, MOVE, ZERO, MAINV, BRAINY, FADDEJ (Ver ap3ndice).

La proposici3n DIMENSION debe cumplir las siguientes condiciones para diferentes datos.

DIMENSION A(N,N,LA), ADJ(N,N,LADJ), ZEROS(N,LA-1), - - -
S(N,N,5+2*LADJ), B(N,N,LA)

Donde

$$LADJ = (N-1) * (LA-1) + 1$$

```

C   TESIS PROFESIONAL
C   PROGRAMA PRINCIPAL
C   ESTE PROGRAMA OBTIENE LA MULTIPLICACION DE SENALES
C   MULTICANALES (O CONVOLUCION)
DIMENSION A(2,2,3),B(2,3,3),C(2,3,5)
READ(5,*) NRA,NCA,LA,NRB,NCB,LB
READ(5,*) (((A(I,J,K),I=1,NRA),J=1,NCA),K=1,LA)
READ(5,*) (((B(I,J,K),I=1,NRB),J=1,NCB),K=1,LB)
CALL BRAINY(NRA,NCA,LA,A,NRB,NCB,LB,B,C)
LC=LA+LB-1
WRITE(6,4)
WRITE(6,5) NRA,NCA,LA,(((A(I,J,K),I=1,NRA),J=1,NCA),K=1,LA)
WRITE(6,6)
WRITE(6,5) NRB,NCB,LB,(((B(I,J,K),I=1,NRB),J=1,NCB),K=1,LB)
WRITE(6,7)
WRITE(6,5) NRA,NCB,LC,(((C(I,J,K),I=1,NRA),J=1,NCB),K=1,LC)
4  FORMAT(1H1,5(/),20X,'LOS DATOS DE LA SENAL MULTICANAL
   1A SON:')
5  FORMAT(4(/),30X,'NUMERO DE RENGLONES DE LA
   1MATRIZ=',I2,/,30X,'NUMERO DE COLUMNAS DE LA MATRIZ=',
   1I2,/,30X,'LONGITUD DE LA SENAL MULTICANAL= ',I2,/,30X,
   1'LOS COEFICIENTES DE LA SENAL SON: ',/,1X,10(1X,F4.1))
6  FORMAT(10(/),20X,'LOS DATOS DE LA SENAL MULTICANAL B SON:')
7  FORMAT(10(/),30X,'SENAL MULTICANAL C(Z)=A(Z) B(Z)=')
STOP
END

```

PROGRAMA MATPOLIN

```

C   TESIS PROFESIONAL
C   PROGRAMA QUE OBTIENE LA INVERSA DE UN POLINOMIO MATRICIAL.
DIMENSION A(2,2,3),ADJ(2,2,3),P(2,5),DET(5),S(2,2,5)
READ(5,*) N,LA
READ(5,*) (((A(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LA)
CALL POMAIN(N,LA,A,ADJ,P,DET,S)
WRITE(6,2) N,LA,(((A(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LA)
WRITE(6,3) (((ADJ(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LA)
NEDET=2*LA-1
WRITE(6,4) (DET(I),I=1,NEDET)
2  FORMAT(1H1,10(/),30X,'ORDEN DEL POLINOMIO MATRICIAL
   1N=',I1,/,30X,'GRADO DEL POLINOMIO MATRICIAL MAS UNO
   2LA =',I1,/,30X,'COEFICIENTES DEL POLINOMIO MATRICIAL
   3:',/,5X,'A=',20(1X,F4.0))
3  FORMAT(10(/),20X,'COEFICIENTES DE LA ADJUNTA DEL POLINOMIO
   1MATRICIAL:',/,5X,'ADJ=',20(1X,F4.0))
4  FORMAT(5(/),30X,'COEFICIENTES DEL DETERMINANTE:'
   1,/,5X,'DET=',20(1X,F5.0))
STOP
END

```

PROGRAMA FACTORIZ

```

C   PROGRAMA PRINCIPAL
      COMPLEX A,ADJ,ZEROS,S,B
      DIMENSION A(2,2,3),ADJ(2,2,3),ZEROS(2,2),S(2,2,16)
      DIMENSION B(2,2,3)
      READ(5,*) N,LA
      NF=LA-1
      READ(5,*) (((A(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LA)
      READ(5,*) (((ADJ(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LA)
      READ(5,*) ((ZEROS(I,J),I=1,N),J=1,N),K=1,LA)
      CALL FACT(N,LOA,A,ADJ,ZEROS,S,B)
      WRITE(6,1) N,LA
      WRITE(6,2) (((A(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LA)
      WRITE(6,3) (((ADJ(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LA)
      WRITE(6,4) ((ZEROS(I,J),I=1,N),J=1,NF)
      WRITE(6,5) ((B(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LA)
1   FORMAT(1H1,30X,'N=',I2,///,30X,'LA=',I2)
2   FORMAT(///,30X,'POLINOMIO MATRICIAL A:',//,20X,20(1X,F3.0))
3   FORMAT(///,5X,'ADJ=',10(1X,F5.0))
4   FORMAT(///,5X,'ZEROS=',10(1X,F7.2))
5   FORMAT(5(//),30X,'FACTORIZACION DEL POLINOMIO MATRICIAL
1A:',//,10X,10(1X,FB.4))
      STOP
      END

```

EJEMPLO DEL PROGRAMA "MATRIXPOL"

LOS DATOS DE LA SENAL MULTICANAL A SON:

NUMERO DE REGLONES DE LA MATRIZ= 2

NUMERO DE COLUMNAS DE LA MATRIZ= 2

LONGITUD DE LA SENAL MULTICANAL= 3

LOS COEFICIENTES DE LA SENAL SON:

0.0	1.0	1.0	1.0	2.0	1.0	0.0	0.0	1.0	0.0
1.0	0.0								

$$A = (a_0, a_1, a_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

LOS DATOS DE LA SENAL MULTICANAL B SON:

NUMERO DE REGLONES DE LA MATRIZ= 2

NUMERO DE COLUMNAS DE LA MATRIZ= 3

LONGITUD DE LA SENAL MULTICANAL= 3

LOS COEFICIENTES DE LA SENAL SON:

1.0	0.0	1.0	2.0	0.0	1.0	1.0	1.0	2.0	0.0
1.0	1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	1.0		

$$B = (b_0, b_1, b_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

SEÑAL MULTICANAL C(Z)=A(Z) B(Z)=

NUMERO DE REGLONES DE LA MATRIZ= 2

NUMERO DE COLUMNAS DE LA MATRIZ= 3

LONGITUD DE LA SENAL MULTICANAL= 5

LOS COEFICIENTES DE LA SENAL SON:

0.0	1.0	2.0	3.0	1.0	1.0	3.0	3.0	2.0	3.0
4.0	1.0	4.0	1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	4.0	0.0

$$C = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

N= 2

EJEMPLO DEL PROGRAMA "FACTORIZ"

LA= 2

POLINOMIO MATRICIAL A

$\underbrace{2. \ 0.}_{\lambda^2}$
 $\underbrace{1. \ 0.}_{\lambda}$
 $\underbrace{7. \ 0.}_{\lambda^0}$
 $\underbrace{6. \ 0.}_{\lambda^1}$
 $\underbrace{1. \ 0.}_{\lambda^2}$
 $\underbrace{0. \ 0.}_{\lambda^1}$
 $\underbrace{1. \ 0.}_{\lambda^0}$
 $\underbrace{1. \ 0.}_{\lambda^0}$

$A^0J = \begin{matrix} 6. & 0. & -1. & 0. & 0. & 0. & 2. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & -1. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{matrix}$

ZIROS = $\begin{matrix} -3.00 & .00 & -4.00 & .00 \end{matrix}$

FACTORIZACION DEL POLINOMIO MATRICIAL A

$\begin{matrix} 2.0000 & .0000 & 1.0000 & .0000 & .0000 & .0000 & 6.0000 & .0000 & .5000 & .0000 \\ -.0833 & .0000 & .0000 & .0833 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 \end{matrix}$

EN FORMA MATRICIAL:

$$B = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.083 & 0.083 \end{bmatrix} \right) = (b_0, b_1)$$

Nota: Como los resultados son complejos entonces aparecen por parejas.

IV.-FILTRADO DIGITAL MULTICANAL Y ANALISIS ESPECTRAL

4.1.-Operadores multicanales

Muchos sistemas de interés están formados por entrada y salida múltiple ; tales sistemas son llamados multicanales, donde cada entrada representa un canal de entrada y cada salida representa a un canal de salida. Para el análisis de un sistema multicanal se emplean técnicas que hacen uso de métodos matriciales, debido a que se facilita el planteamiento del problema. Esta presentación matricial ayuda en el tratamiento conceptual del problema y da las bases unificadas para la consideración de los sistemas lineales y no-lineales.

Los problemas básicos que aparecen en el análisis de cualquier sistema conforme a su naturaleza, composición y complejidad son:

- a).-Identificación de los rasgos relevantes de los objetos que componen al sistema.
- b).-La formación de un modelo matemático que relacione los rasgos del sistema.
- c).-Las técnicas matemáticas empleadas para la solución del sistema.

Un sistema multicanal genera muchas series de tiempo, como éstas se relacionan entre sí, se puede hacer que un operador multicanal actúe sobre todas ellas, al igual -

que como se hace con una serie unicanal. Se sabe que existen dos formas para el análisis de las series de tiempo: - el análisis FUNDAMENTAL y el TECNICO, éste último hace referencia al procesamiento de la serie por métodos que utilizan la historia real de los datos mismos, mientras que el primero da los fundamentos físicos y matemáticos para el modelado del problema.

La teoría del operador multicanal discreto, conceptualmente es la misma que la del operador unicanal; matemáticamente esto se representa por una extensión del álgebra escalar a un álgebra matricial, logrando esto por medio de la sustitución de un escalar por una matriz. Cuando se requiera que el número de salidas sea igual al número de entradas trataremos con matrices cuadradas, mientras que si el número de salidas requeridas es diferente al de la entrada, las matrices serán rectangulares, asociando el orden de la matriz con el número de entradas y salidas -- respectivamente. Así, cada renglón de la matriz representará a una serie o un canal, y cada columna el tiempo en que fueron registradas las series.

Analicemos el caso por el cual el número de canales P a la entrada es el mismo que a la salida y definamos a la operación de convolución como un operador multicanal, el cual estará representado por:

$$y_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + \dots + a_m x_{t-m} \quad 4.1,1$$

En donde (a_0, a_1, \dots, a_m) son los coeficientes del operador y están representados por matrices cuadradas, x_t es la señal de entrada para un tiempo t y y_t es la salida para ese tiempo t . Por ello, para una t fija se tendrá =

que la entrada X_t y salida y_t estarán dados por vectores-columna de P canales.

Aplicando la transformada Z al operador multicanal, resulta:

$$A(z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_m Z^m \quad 4.1.2$$

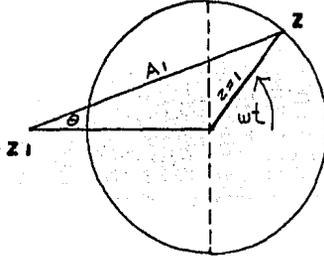
de lo que se observa que es igual como si se tratara de un operador unicanal, sólo que la transformada Z del operador es ahora una matriz polinomial cuadrada de orden $P \times P$, la cual da la evaluación en cualquier tiempo.

Como se ha visto:

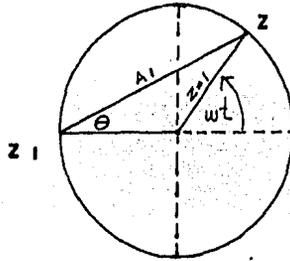
$$A^{-1}(z) = \frac{\text{adj } A(z)}{\det A(z)}$$

donde el determinante juega un papel muy importante en la clasificación de los operadores multicanales. Al resolver el determinante, el cual es un polinomio en z con coeficientes escalares, encontraremos las raíces del polinomio que definirán el tipo de operador; así, si las raíces del $\det A(z)$ caen fuera del círculo unitario, entonces $A(z)$ será de fase mínima; si quedan dentro del círculo unitario, el operador será de fase máxima; si los valores caen sobre el círculo unitario, entonces $A(z)$ será de fase cero, pero cuando los valores de las raíces caen dentro y fuera del círculo unitario el operador $A(z)$ se clasificará como de fase mixta. (Figura 4.1.1).

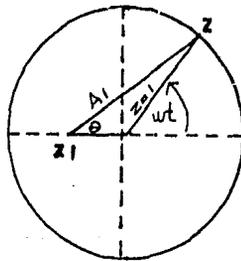
PLANO "Z"



$|z_1| > 1$ OPERADOR DE FASE MINIMA



$|z_1| = 1$ OPERADOR DE FASE CERO



$|z_1| < 1$ OPERADOR DE FASE MAXIMA

Fig. 4.1.1

Representación de los operadores en el plano Z

4.2.-Operador multicanal inverso

Ahora veamos las condiciones para la estabilidad de un -- operador discreto multicanal inverso de longitud finita.

Recordaremos que el operador inverso está dado por:

$$A^{-1}(z) = \text{adj}A(z) \left[\frac{1}{\det A(z)} \right]$$

Si la $\text{adj} A(z)$ es una matriz con polinomios enteros y si representa un operador realizable y discreto, entonces, cuando se obtiene la matriz inversa vemos que cada término de la $\text{adj} A(z)$ está multiplicado por $[1/\det A(z)]$. Es por eso que la estabilidad del operador multicanal inverso $A^{-1}(z)$ depende únicamente de la estabilidad del operador unicanal $[1/\det A(z)]$. Por otro lado se sabe que el inverso de un operador unicanal se puede representar por una función realizable de fase mínima estable. También se puede representar por una función puramente estable -- no realizable dada por un operador unicanal de fase máxima. Además, otra forma en que se representa el inverso es por medio de una función estable, la cual involucra ambas componentes realizables y no realizables, lo que da como resultado un operador de fase mixta de un sólo canal.

De lo anterior se puede decir que el operador multicanal inverso de $A(z)$ se puede representar por: una función matricial realizable de fase mínima si el $\det A(z)$ del operador unicanal es también de fase mínima, una función matricial no realizable de valores estables si el $\det A(z)$ es de fase máxima, y por una función matricial de fase -- mixta si el inverso del $\det A(z)$ tiene componentes reali-

zables y no realizables.

De esto se concluye que:

-Un operador multicanal de fase mínima y discreto tiene un operador multicanal inverso que es también de fase mínima (realizable) y estable.

-Un operador multicanal discreto de fase mixta es estable, si su inverso está formado por componentes realizables y no realizables.

-Mientras que el inverso del operador multicanal de fase máxima, es una función estable, si sus componentes son no realizables.

Mencionemos ahora la estructura general del operador multicanal inverso de $A(z)$ de longitud finita. Para ello se analizarán las relaciones existentes entre $A(z)$, $\text{adj } A(z)$ y el $\det A(z)$. Del álgebra matricial se sabe que:

$$[\text{adj } A(z)] A(z) = I \det A(z) \quad 4.2.1$$

Donde I es la matriz identidad de P canales y orden $P \times P$. La ecuación del determinante de la matriz polinomial está definida como:

$$\det A(z) = 0$$

Pero el $\det A(z)$ es un polinomio de grado $n = mp$. Por razones de simplicidad, notación y claridad, consideremos que la ecuación del determinante tiene n raíces distintas, las cuales denotaremos por:

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n \quad n=mp$$

Entonces el $\det A(z)$ se puede escribir en forma factorizada de la siguiente manera:

$$\det A(z) = c \cdot (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \quad 4.2.2$$

donde c es un valor constante.

A partir de la ecuación 4.2.1 se tiene que:

$$[\text{adj } A(z_i)] A(z_i) = 0 \quad 4.2.3$$

En donde 0 es una matriz cuyos elementos son cero. Si se recuerda la $\text{adj } A(z_i)$ se puede escribir como el producto de un vector columna y un vector renglón (Sección 3.5).

$$\text{adj } A(z_i) = c_i r_i$$

Por ello la ecuación 4.2.3 se transforma en:

$$c_i r_i A(z_i) = 0$$

Aquí cero es un vector renglón formado por ceros, a r_i se le llamará vector renglón característico de la matriz polinomial $A(z)$, correspondiente al valor característico z_i , y a c_i se le conocerá como vector columna-característico de la matriz polinomial correspondiente a la raíz z_i .

Como se ha visto, $A^{-1}(z) = \text{adj } A(z) [1/\det A(z)]$ y utilizando la ecuación 4.2.2 se encuentra que la transformada z -del operador multicanal discreto es:

$$A^{-1}(z) = \frac{\text{adj } A(z)}{c(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)}$$

En el segundo miembro de la ecuación anterior se puede extender por fracciones parciales de la siguiente forma:

$$A^{-1}(z) = \frac{u_1}{z-z_1} + \frac{u_2}{z-z_2} + \frac{u_3}{z-z_3} + \dots + \frac{u_n}{z-z_n}$$

donde u_1, u_2, \dots, u_n son matrices de orden PXP. Ahora, -- para determinar u_i , multipliquemos ambos miembros de la -- ecuación por $z-z_i$, y haciendo luego $z=z_i$, se encuentra -- que:

$$u_i = \frac{\text{adj } A(z_i)}{c(z_i-z_1)(z_i-z_3)\dots(z_i-z_n)}$$

Definiendo α_i como:

$$\alpha_i = 1/c(z_i-z_1)(z_i-z_3)\dots(z_i-z_n)$$

y recordando nuevamente que $\text{adj } A(z_i) = c_i r_i$, entonces se tiene que

$$u_i = \alpha_i c_i r_i$$

De forma similar se encontrarán $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ y, por con secuencia, el operador inverso será:

$$A^{-1}(z) = \frac{\alpha_1 c_1 r_1}{z-z_1} + \frac{\alpha_2 c_2 r_2}{z-z_2} + \dots + \frac{\alpha_n c_n r_n}{z-z_n}$$

en donde z_i, c_i, r_i , son valores, vectores columna y vec

tores renglón característicos, respectivamente, de la matriz polinomial $A(z)$.

Si $|z_i| > 1$, de la fracción $(1/z - z_i)$ se puede extender en una serie de potencias estable negativa y se representará por:

$$\frac{1}{z - z_i} = -z_i^{-1} - z_i^{-2} z - z_i^{-3} z^2 - \dots$$

y el sistema inverso $A^{-1}(z)$ se puede extender en una serie de potencias en z estable no negativa como sigue:

$$A^{-1}(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i \kappa_i (-z_i^{-1} - z_i^{-2} z - z_i^{-3} z^2 - \dots)$$

Debido a que los valores z_i son raíces de la ecuación -- característica $\det A(z) = 0$, entonces los valores característicos serán mayores (todos) que la unidad en magnitud, sabiendo que $\det A(z)$ representa a un operador de un sólo canal de fase mínima. Así, cuando el $\det A(z)$ cumple con la condición anterior $A(z)$ representa a operadores de fase mínima cuyo inverso se puede expresar por funciones estables y realizables.

Para el caso cuando las raíces son menores que la unidad en magnitud, entonces el operador multicanal será de fase máxima y su inverso estará representado por una función puramente estable no realizable.

4.3.-Autocorrelación del operador multicanal inverso

En la sección anterior se encontró que el operador inverso de P canales de $A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m$ es:

$$A^{-1}(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i c_i r_i}{z - z_i}$$

en donde $n = mp$.

Ahora expresemos a la autocorrelación ϑ_t del operador multicanal inverso en transformada Z

$$\vartheta(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \vartheta_t z^t = A^{-1}(z) A_{*}^{-1}(z) \quad 4.3.1$$

donde $A_{*}^{-1}(z)$ es la transpuesta de $A^{-1}(z)$ y está dada por:

$$\begin{aligned} A_{*}^{-1}(z) &= [A^{-1}(\frac{1}{z^{*}})]^{*T} \\ &= \left[\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j c_j r_j}{z^{*} - z_j} \right]^{*T} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j^{*} r_j^{*T} c_j^{*T}}{z^{-1} - z_j^{*}} \end{aligned}$$

y el resultado es:

$$\vartheta(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha_i \alpha_j^{*}) c_i (r_i r_j^{*})^{*T} c_j^{*T} \left[\frac{1}{(z - z_i)(z^{-1} - z_j^{*})} \right] \quad 4.3.2$$

aquí $\alpha_i \alpha_j^*$ y $r_i r_j^{*T}$, son escalares dados por el producto de un renglón con una columna. Usando fracciones parciales, se tiene la siguiente extensión:

$$\frac{1}{(z-z_i)(z^{-1}-z_j^*)} = \frac{1}{z_i z_j^* - 1} \left[\frac{1}{1-(z/z_i)} + \frac{z^{-1}/z_j^*}{1-(z^{-1}/z_j^*)} \right]$$

Cuando el operador multicanal es de fase mínima la expansión anterior es convergente.

$$\frac{1}{(z-z_i)(z^{-1}-z_j^*) z_i z_j^* - 1} \left[\sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{z^{-1}}{z_j^*}\right)^s + \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_i}\right)^t \right] \quad 4.3.3$$

Sustituyendo la ecuación 4.3.3 en la 4.3.2 y comparando el resultado de 4.3.1 se ve que los coeficientes del operador θ_t están dados por.

$$\begin{aligned} \theta_t &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\alpha_i \alpha_j^* c_i (r_i r_j^{*T}) c_j^{*T}}{z_i z_j^* - 1} \right) \left(\frac{1}{z_i^t} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \frac{(\alpha_i \alpha_j^*) (r_i r_j^{*T})}{z_i z_j^* - 1} c_j^{*T} \right] \frac{c_i}{z_i^t} \end{aligned}$$

para cada $t=0,1,2,\dots$, la expresión dentro del corchete cuadrado representa un vector renglón el cual se denotará por γ_i^* , por lo tanto:

$$\theta_t = \sum_{i=1}^n \frac{c_i \gamma_i^{*T}}{z_i^t}$$

Por otra parte;

$$\theta_{-s} = \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j c_j^{*T}}{z_j^s}$$

Ahora para $s=1,2,\dots$, a partir de lo anterior se --
cumplirá:

$$\vartheta_{-s} = \vartheta_s^{*T} \quad 4.3.4$$

para $s=1,2,\dots$, los coeficientes de la autocorrela-
ción ϑ_t en forma matricial se puede escribir como:

$$\vartheta_t = CZ^{-t} \Gamma^{*T} \quad \text{para } t=0,1,2,\dots$$

en donde

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

es una matriz de orden $P \times P$ formada por vectores cólum
na c_i .

$$Z = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

es la diagonal de la matriz $n \times n$ formada por las raí--
ces z_i y finalmente

$$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

es una matriz de orden $P \times n$ formada por los vectores -
columna γ_i .

Por otro lado, se tiene que a partir de 4.3.4 también--
se cumple:

$$\vartheta_{-s} = \Gamma Z^{-s} C^{*T} \quad \text{para } s=1,2,3,\dots$$

4.4.-Factorización del espectro multicanal de fase mínima

Dada la matriz multicanal con P canales o autocorrelación

$$\psi(z) = \sum_{s=-m}^m r_s z^s$$

Donde los r_s son los coeficientes de la autocorrelación representados por matrices de orden $P \times P$. Se desea determinar el operador de fase mínima con P canales.

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m \quad 4.4.1$$

de modo que se cumpla

$$\psi(z) = A(z)A_*(z) \quad 4.4.2$$

Este problema es la contraparte multicanal de la factorización del espectro de un sólo canal. Recordemos que $A_*(z)$ se define como:

$$A_*(z) = [A(1/z^*)]^*T$$

entonces según 4.4.1 se tiene:

$$A_*(z) = a_0^*T + a_1^*T z^{-1} + \dots + a_m^*T z^{-m}$$

haciendo la extensión de $\psi(z)$ a partir de la propiedad hermitiana se obtiene:

$$\psi(z) = \sum_{s=-m}^m r_s {}^*T z^{-s}$$

de lo que se deduce

$$r_{-s} = r_s {}^*T$$

Debido a que el objetivo es determinar el operador de fase mínima, la factorización del operador multicanal en su forma general es:

Dada la ecuación 4.4.1 se desea encontrar un operador $--A(z)$ (de fase mínima) de tal forma que se cumpla la ecuación 4.4.2. Según la sección 3.7, los términos del segundo miembro de la ecuación 4.4.2 se pueden expresar en productos binomiales, entonces se llega a:

$$\psi(z) = (I - u_1 z)(I - u_2 z) \dots (I - u_m z) a_0 a_0 {}^*T (I - u_m {}^*T z^{-1}) \dots (I - u_2 {}^*T z^{-1})(I - u_1 {}^*T z^{-1})$$

De la definición de matriz inversa se sabe que:

$$\psi^{-1}(z) \det \psi(z) = \text{adj } \psi(z)$$

Lo cual se puede escribir como:

$$I \det \psi(z) = \text{adj } \psi(z) \psi(z)$$

$$= \text{adj } \psi(z) [(I - u_1 z)(I - u_2 z) \dots (I - u_m z) a_0 a_0 {}^*T (I - u_m {}^*T z^{-1}) \dots (I - u_2 {}^*T z^{-1})(I - u_1 {}^*T z^{-1})]$$

4.4.3

donde el $\det \psi(z)$ se descompone en productos binomiales para conocer los ceros, debido a que éste es un cuasi-po

linomio¹⁰, se puede reducir a un polinomio cuyo grado es la mitad del grado del polinomio original. Esto se logra haciendo $z+z^{-1}=u$. De aquí, que si z_i es un cero (raíz), entonces $1/z_i^*$ también lo es. Por lo tanto, la ecuación del cuasipolinomio del $\det \psi(z)$ tiene $2m_p$ raíces, la mitad de éstas pertenecen a $A(z)$ y la otra a $A_*(z)$, así se tendrán 2^{m_p} factorizaciones múltiples, excluyendo el caso para los ceros que están sobre el círculo unitario y también aquellos que se repiten, se escogerán sólo las raíces con magnitud mayor que la unidad para obtener de esa forma la factorización de fase mínima. Para cada una de estas raíces, como se sabe, cumplirán con:

$$\text{adj } \psi(z_i) = c_i r_i$$

entonces es posible formar con los r_i una matriz $R = [r_i]$, y con las raíces encontradas formar otra matriz $D = [1/z_i]$. Finalmente con ellas expresar a la matriz U , como:

$$U = R^{-1} D R \quad 4.4.4$$

Por otro lado, sustituyendo los valores de $\text{adj } \psi(z_i)$ en 4.4.3, se obtiene lo siguiente:

$$I \det \psi(z) = c_i r_i (I - u, z_i) \dots (I - u_m z_i) a_0 a_0^{*T} (I - u_m^* z_i^{-1}) \dots (I - u, z_i^{-1}) \quad 4.4.5$$

¹⁰ Un cuasipolinomio es una expresión semejante a un polinomio con un número infinito de términos, pero diferente a un polinomio porque puede involucrar potencias negativas de la variable independiente.

Se sabe que para encontrar las raíces del polinomio, éste se iguala a cero, por lo cual el valor del primer miembro en la ecuación matricial anterior es una matriz formada por ceros.

$$0 = c_{\lambda} r_{\lambda} (I - u_1 z_{\lambda}) \dots (I - u_m z_{\lambda}) a_0 a_0^{*T} (I - u_m^{*T} z_{\lambda}^{-1}) \dots (I - u_1^{*T} z_{\lambda}^{-1})$$

Ahora se puede escribir, (según las ecuaciones 3.7.5 y 3.7.6)

$$r_{\lambda} (I - u_1 z_{\lambda}) = 0$$

Usando esta ecuación para los primeros ceros ($\lambda=1, 2, \dots, P$), se puede conocer u_1 . Para los ceros restantes $z = z_{\lambda}$ ($\lambda=P+1, P+2, \dots, 2P$) el factor adj $\psi(z)(I - u_1 z)$ se transforma en el producto de una columna y un renglón (Sec. 3.7), usando el mismo procedimiento se determinan u_2, u_3, \dots, u_m . Para conocer a_0 sólo se sustituye el valor $z=0$ en la ecuación 4.4.5, recordando que las raíces tienen magnitud mayor que la unidad. Una vez conocidos los valores u_{λ}, a_0 se puede expresar al operador de fase mínima de la serie causal como:

$$A(z) = (I - u_1 z)(I - u_2 z) \dots (I - u_m z) a_0$$

$$= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m$$

$$y_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_m x_{t-m}$$

4.5.-Autocorrelación y crosscorrelación de series multi- canales de tiempo

Un proceso estocástico¹¹ de P canales puede representarse mediante un vector columna

$$X_t = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_p(t) \end{bmatrix}$$

en donde t representa el índice del tiempo y el elemento $X_i(t)$ al proceso unicanal para un número de canales - i. Los coeficientes de la autocorrelación multicanal para un defasamiento τ en tiempo, está dado por una matriz de orden $P \times P$; P representa el número de canales.

$$\varphi_1 = E\{X_{t+\tau} X_t^T\} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(\tau) & \varphi_{12}(\tau) & \dots & \varphi_{1p}(\tau) \\ \varphi_{21}(\tau) & \varphi_{22}(\tau) & \dots & \varphi_{2p}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{p1}(\tau) & \varphi_{p2}(\tau) & \dots & \varphi_{pp}(\tau) \end{bmatrix}$$

¹¹ Un proceso estocástico está formado por variables estocásticas, éstas nos indican la frecuencia relativa de ocurrencia en las observaciones repetidas de una magnitud en particular de la función de probabilidad de distribución formada por un conjunto de N muestras (agrupación) y además la ocurrencia tiene cierta probabilidad debido a que son variables aleatorias.

En donde los elementos $\phi_{ij}(\tau) = E\{X_i(t+\tau)X_j(t)\}$; para cuando $i=j$, esta expresión representa a la autocorrelación, mientras que si $i \neq j$ entonces se tiene la crosscorrelación de la señal unicanal. Aquí E representa a lo que se conoce como Esperanza Matemática del proceso estacionario (o covariancia), a condición de que su matriz de autocorrelación depende sólo de τ y no del tiempo absoluto t . Debido a ésto se ha representado a $\phi(\tau)$ para indicar explícitamente que ϕ_τ es la autocorrelación de X_t , pudiendo escribir ahora ϕ_{XX} en vez de ϕ_τ .

La crosscorrelación para un desplazamiento de tiempo τ en dos procesos de P canales mutuamente estacionarios,

$$X_t = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_p(t) \end{bmatrix} \quad Y_t = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

Se define como la matriz de $P \times P$

$$\phi_{X,Y}(\tau) = E\{X_{t+\tau} Y_t^T\}$$

si se hace

$$\phi_{X_i Y_j}(\tau) = E\{X_i(t+\tau) y_j(t)\}$$

entonces ésta representará los coeficientes de la crosscorrelación para la serie del tiempo de un canal X_i, y_j y dichos coeficientes son los elementos de la matriz.

$$\varrho_{xy}(\tau) = \begin{bmatrix} \varrho_{x_1 y_1}(\tau) & \varrho_{x_1 y_2}(\tau) \dots \varrho_{x_1 y_p}(\tau) \\ \varrho_{x_2 y_1}(\tau) & \varrho_{x_2 y_2}(\tau) \dots \varrho_{x_2 y_p}(\tau) \\ \vdots & \vdots \\ \varrho_{x_p y_1}(\tau) & \varrho_{x_p y_2}(\tau) \dots \varrho_{x_p y_p}(\tau) \end{bmatrix}$$

y se ve que si $y_t = x_t$, entonces estos coeficientes representarán los de la autocorrelación multicanal $\varrho_{x,x}(\tau)$

Sean las muestras siguientes de la serie de tiempo

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$$

donde cada una de estas observaciones x_i representan a una matriz $p \times q$. Por otro lado tomando otra serie de tiempo.

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

y que representa a una matriz de orden $r \times q$. Luego la crosscorrelación entre estas dos series, se calculará mediante la siguiente expresión:

$$\varrho_{x,y}(\tau) = \sum x_{t+\tau} y_t^T \quad \text{para } \tau = 0, 1, 2, \dots, k$$

la sumatoria se hace sobre todos y cada uno de los enteros t , considerando estos valores en los intervalos $1 \leq t \leq m$ y $1 \leq t \leq n$ para x_t y y_t respectivamente.

4.6.-Análisis espectral de series multicanales de tiempo.

En la sección anterior se vió que los coeficientes de -

la autocorrelación multicanal están definidos por - - 4.5.1, como se pudo ver ahí, los elementos de la diagonal principal definen la autocorrelación de cada uno de los canales como si se tratase de un análisis unicanal- $\phi_{jj}(\tau)$. Mientras que aquellos elementos que están fuera de la diagonal representan a la crosscorrelación - - $\phi_{jk}(\tau)$ para cada uno de los canales. Ahora definamos a la matriz espectral $\Phi(f)$ mediante la transformada de Fourier discreta de la función de autocorrelación - - 4.5.1; esto es:

$$\phi(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \phi_{\tau} e^{-2\pi f \lambda \tau}$$

así, la matriz espectral estará definida como:

$$\Phi(f) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(f) & \phi_{12}(f) & \dots & \phi_{1p}(f) \\ \phi_{21}(f) & \phi_{22}(f) & \dots & \phi_{2p}(f) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{p1}(f) & \phi_{p2}(f) & \dots & \phi_{pp}(f) \end{bmatrix} = \Phi^*(f)$$

La igualdad $\Phi(f) = \Phi^*(f)$, se cumple según la ecuación 4.3.4.

En la matriz anterior los elementos de la diagonal principal dan la densidad del auto-espectro $\phi_{ii}(f)$ y aquellos que están fuera de la diagonal principal representan la densidad del cros-espectro $\phi_{jk}(f)$.

Considérese ahora que la serie del tiempo es real, entonces la densidad del auto-espectro es una función par de frecuencia f , mientras que la densidad del cros-espectro será un valor complejo (parte real y parte ima

ginaria), compuesto de funciones pares e impares:

$$\Phi_{jk}(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \phi_{jk}(\tau) e^{-2\pi f i \tau} \text{ donde } j \neq k$$

la parte real estará definida como densidad de co-espectro.

$$C_{jk}(f) = \text{Re} [\Phi_{jk}(f)]$$

que también se puede escribir como la transformada co-seno:

$$\begin{aligned} C_{jk}(f) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \phi_{jk}(\tau) \cos 2\pi f \tau \\ &= \phi_{jk}(0) + \sum_{\tau=1}^{\infty} [\phi_{jk}(\tau) + \phi_{kj}(\tau)] \cos 2\pi f \tau \end{aligned}$$

Por otro lado, la parte imaginaria es negativa y se conoce como densidad del espectro-cuadrático y se le define:

$$Q_{jk}(f) = -\text{Im} [\Phi_{jk}(f)]$$

que también se le puede definir como la transformada se-no:

$$\begin{aligned} Q_{jk}(f) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \phi_{jk}(\tau) \text{sen } 2\pi f \tau \\ &= \sum_{\tau=1}^{\infty} [\phi_{jk}(\tau) - \phi_{kj}(\tau)] \text{sen } 2\pi f \tau \end{aligned}$$

La función de crosscorrelación $\varnothing_{jk}(\tau)$ se obtiene mediante la suma de sus partes: par $e_{jk}(\tau)$ e impar $o_{jk}(\tau)$

$$\varnothing_{jk}(\tau) = e_{jk}(\tau) + o_{jk}(\tau)$$

donde

$$e_{jk}(\tau) = \frac{1}{2} [\varnothing_{jk}(\tau) + \varnothing_{kj}(\tau)] = e_{jk}(-\tau)$$

$$o_{jk}(\tau) = \frac{1}{2} [\varnothing_{jk}(\tau) - \varnothing_{kj}(\tau)] = -o_{jk}(-\tau)$$

Como se podrá apreciar, la densidad del espectro cuadrático $Q_{jk}(\tau)$ es una función impar de f dada por:

$$Q_{jk}(f) = 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} o_{jk}(\tau) \sin(2\pi f\tau) \quad 4.6.1$$

mientras que la densidad del co-espectro $C_{jk}(\tau)$ es una función par de f dada por:

$$C_{jk}(f) = e_{jk}(0) + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} e_{jk}(\tau) \cos 2\pi f\tau \quad 4.6.2$$

Finalmente, el auto-espectro $\hat{\varphi}_{jj}(f)$ estará dado por la expresión del co-espectro para cuando $j=k$

$$\hat{\varphi}_{jj}(f) = \varnothing_{jj}(0) + 2 \sum_{\tau=1}^m \varnothing_{jj}(\tau) \cos(2\pi f\tau) \quad 4.6.3$$

Hasta ahora se han encontrado los elementos que forman la matriz multicanal (matriz de autocorrelación).

Nuestro interés es encontrar la matriz multicanal empíri

ca, cuyos elementos que la forman se calculan según las ecuaciones 4.6.1, 4.6.2 y 4.6.3, multiplicadas cada una de éstas por una función de peso triangular.

$$\omega_\tau = 1 - \frac{\tau}{m+1} \quad \text{para } \tau = 0, 1, 2, \dots, m$$

De esta forma, los elementos de la matriz multicanal empírica estarán dadas por:

$$\hat{Q}_{jk}(f) = 2 \sum_{\tau=1}^m O_{jk}(\tau) \omega_\tau \text{ sen } 2\pi f \tau \quad 1'$$

$$\hat{C}_{jk}(f) = e_{jk}(0) + 2 \sum_{\tau=1}^m e_{jk}(\tau) \omega_\tau \text{ cos } 2\pi f \tau \quad 2'$$

$$\hat{I}_{jj}(f) = \theta_{jj}(0) + 2 \sum_{\tau=1}^m \theta_{jj}(\tau) \omega_\tau \text{ cos } 2\pi f \tau \quad 3'$$

Finalmente la matriz de autocorrelación multicanal del auto-espectro, co-espectro y espectro cuadrático, empírico es:

$$M(f) = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11}(f) & \hat{C}_{12}(f) & \dots & \hat{C}_{1p}(f) \\ \hat{Q}_{12}(f) & \hat{I}_{22}(f) & \dots & \hat{C}_{2p}(f) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{Q}_{1p}(f) & \hat{Q}_{2p}(f) & \dots & \hat{I}_{pp}(f) \end{bmatrix}$$

Donde f es una frecuencia discreta dada para

$$f = 0, \Delta f, 2\Delta f, 3\Delta f, \dots, m\Delta f$$

y $\Delta f = 1/2m$ en ciclos por unidad de tiempo.

4.7.- Coherencia y fase

La media geométrica de dos espectros esta dado por:

$$M_{jk}(f) = \sqrt{\Phi_{jj}(f) \Phi_{kk}(f)}$$

Y sirve como una medida del límite superior de la potencia teórica, común a cualquier frecuencia f dada en -- dos series unicanales. Para obtener este límite, la potencia a esa frecuencia debe tener una relación de fase fija para las dos series unicanales. Para el caso en que el límite superior se logre alcanzar a una misma frecuencia, se dice que las dos series del tiempo son coherentes a esa frecuencia. Sin embargo, si es el caso en el que las relaciones de fase a una frecuencia dada son cambiantes de manera aleatoria; es decir que son completamente causales, las dos series del tiempo son completamente incoherentes y el límite inferior es cero.

Definamos los coeficientes de la coherencia como:

$$K_{jk}(f) = [K_{jk}(f)] e^{-i\theta_{jk}(f)} = \frac{\Phi_{jk}(f)}{M_{jk}(f)} = \frac{C_{jk}(f) - iQ_{jk}(f)}{M_{jk}(f)}$$

La magnitud de la coherencia se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\left| K_{jk}(f) \right| = \frac{\sqrt{[C_{jk}(f)]^2 + [Q_{jk}(f)]^2}}{M_{jk}(f)} = \left| K_{kj}(f) \right|$$

Mientras que el retraso de fase de la coherencia es:

$$\theta_{jk}(f) = \arctan \frac{Q_{jk}(f)}{C_{jk}(f)} = -\theta_{kj}(f)$$

La magnitud de la coherencia estará entre los límites: - 0 que corresponde al caso completamente incoherente y - 1 para el caso coherente esto es:

$$0 \leq |K_{jk}(f)| \leq 1$$

Con los valores encontrados se forma la matriz de coherencia de la siguiente manera:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(f) & |K_{12}(f)| \dots \dots \dots |K_{1p}(f)| \\ \theta_{12}(f) & \phi_{22}(f) \dots \dots \dots |K_{2p}(f)| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta_{1p}(f) & \theta_{2p}(f) \dots \dots \dots \phi_{pp}(f) \end{bmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal que forman a la matriz anterior son los auto-espectros de la serie, los elementos arriba de la diagonal principal son las magnitudes de la coherencia mientras que bajo la diagonal son los retrasos de fase expresados en grados.

V.-FILTRO DIGITAL WIENER MULTICANAL

5.1.-Introducción

Muchas de las teorías que existen acerca de la predicción y separación (o enfatización) de señales se basan principalmente en el trabajo original de Norbert Wiener, el cual tiene una gran importancia, ya que representa las primeras técnicas analíticas para el diseño sistemático de filtros que separan la señal deseada del ruido. Un filtro que efectúa la operación de resaltar o enfatizar una señal dentro del ruido se llama filtro de enfatizamiento o filtro de suavizamiento de datos y se dice que es de "suavizamiento", ya que el filtro "suaviza" en gran cantidad el ruido que está mezclado con la señal de interés. Por lo tanto, el enfatizamiento de una señal se puede describir como el problema de separar, lo mejor posible, la señal de una serie de tiempo de ruido (no deseada). Generalmente la serie x_t de que se dispone, es una serie de tiempo mezclada con ruido; es decir, suponemos que la serie x_t está compuesta de una componente pura s_t llamada señal, y una componente impura n_t llamada ruido, es decir:

$$x_t = s_t + n_t$$

El objetivo es diseñar un filtro que elimine la componente de ruido y de esta manera enfatizar la señal en relación al ruido. Este diseño debe ser tal, que la salida real del filtro sea bastante aproximada a la salida deseada s_t , que es la señal de interés.

La operación de enfatizar una señal se puede efectuar -

de varias formas. Por ejemplo, la salida deseada puede ser la misma señal, retrasada un cierto tiempo constante B ; éste es el caso de un enfatizamiento de señal con retraso; en otras palabras, la salida del filtro y_t debe ser la mejor aproximación a la salida deseada s_{t-B} , que es la señal retrasada por un tiempo positivo B . Otro ejemplo es el caso en el cual la salida deseada es la señal adelantada un cierto tiempo constante α ; esto quiere decir que el filtro debe predecir valores futuros de la señal. Este caso que involucra dos operaciones, el de separación y predicción de la señal, es llamado separación de señal con adelanto. Aquí se introduce la serie de tiempo con ruido dentro de un filtro realizable; este filtro se debe diseñar de modo que la salida real y_t sea la mejor aproximación a la salida deseada $s_{t+\alpha}$ que es la señal adelantada por el tiempo positivo de adelanto α .

El trabajo original de Wiener estaba restringido a señales continuas en el tiempo, sin embargo, N. Levinson adaptó los métodos de Wiener al caso de series de tiempo discretas y operadores discretos de longitud finita.

5.2.-Diseño de filtros digitales Wiener multicanales

El problema básico en el diseño de filtros digitales multicanales Wiener es el de determinar los valores numéricos de los coeficientes del filtro (f_0, f_1, f_2, \dots). Para resolver el problema se deben considerar 3 condiciones que determinan el rango de aplicación de los resultados:

- (1) Las series de tiempo que representen a la entrada x_t

y la salida deseada Z_t son estacionarias, lo cual significa que las propiedades estadísticas de éstas no cambian con el tiempo.

(2) En el criterio de aproximación se considera el error cuadrático medio entre la salida deseada y la salida real. Esto significa que determinamos el operador (f_0, f_1, f_2, \dots) de tal manera que minimicemos la traza de la matriz de error cuadrático medio entre la salida deseada Z_t y la salida real y_t . La traza está dada por:

$$I \equiv \text{tr } E\{(Z_t - y_t)(Z_t - y_t)^T\}$$

Donde el promedio E es el promedio en conjunto, el cual se toma sobre todas las posibles entradas y salidas deseadas, con cada peso de acuerdo a su probabilidad de ocurrencia. En caso de que las series de tiempo sean ergódicas¹², el promedio en conjunto se puede reemplazar por los correspondientes promedios de tiempos.

(3) La operación que se utiliza para la separación y predicción, se asume que es una operación lineal, es decir, que se va a utilizar un filtro lineal invariante con el tiempo. La información disponible consiste de los valores pasados de la señal X_s , donde $-\alpha < s \leq t$ y "t" es el tiempo presente. Un filtro físicamente realizable (con fun --

¹² Una función ergódica debe ser necesariamente una función estacionaria, y si un miembro de la agrupación se extiende infinitamente con el tiempo, se caracterizará en la misma distribución, de todo el grupo; es decir, una función es representativa para todo el grupo; si es ergódico el proceso, la muestra estadística y el tiempo estadístico coinciden y las funciones de autocorrelación obtenidas son equivalentes.

ción de memoria (f_0, f_1, f_2, \dots), pero sin función de anticipación) efectúa una operación lineal sobre X_s y sólo en ese rango. En la práctica se utilizará un operador de longitud finita ($f_0, f_1, f_2, \dots, f_m$).

La teoría de Wiener se aplica sólo cuando se cumplen estas 3 condiciones o hay mucha aproximación a éstas.

La teoría de separación y predicción lineal de mínimos cuadrados se basa en la regularidad estadística. En general, la predicción y separación depende fundamentalmente en la consideración de que las regularidades que han ocurrido en el pasado se repetirán en el futuro. Este postulado, matemáticamente se traduce en que las series de tiempo sean estacionarias y esto implica que un valor obtenido como el promedio de la serie en el pasado, será el mismo que el valor obtenido en el futuro. En forma más específica, se puede decir que la predicción y separación depende esencialmente en la existencia de correlación entre la salida deseada Z_t y la entrada X_t . Puesto que las operaciones son lineales, la única correlación que se puede utilizar es la correlación lineal.

La función de autocorrelación de la entrada es:

$$\phi_{XX}(\tau) = E\{X_t X_{t-\tau}^T\}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots$$

y la función de crosscorrelación entre la salida deseada y la entrada se define por:

$$\phi_{ZX}(\tau) = E\{Z_t X_{t-\tau}^T\}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots$$

Si esta crosscorrelación fuera cero, entonces no existi-

ría ninguna estimación lineal de importancia y por lo -- tanto la mejor estimación de mínimos cuadrados de la sa- lida deseada sería su valor medio.

Considérese el filtro como una matriz de $M \times N$,

$$f_s \equiv f(s) = \begin{bmatrix} f_{11}(s) & f_{12}(s) & \dots & f_{1N}(s) \\ f_{21}(s) & f_{22}(s) & \dots & f_{2N}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{M1}(s) & f_{M2}(s) & \dots & f_{MN}(s) \end{bmatrix}$$

la serie de tiempo de entrada por una matriz de $N \times 1$

$$x_t \equiv x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}$$

y la salida deseada esta dada por la matriz de orden $M \times 1$

$$z_t \equiv z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_M(t) \end{bmatrix}$$

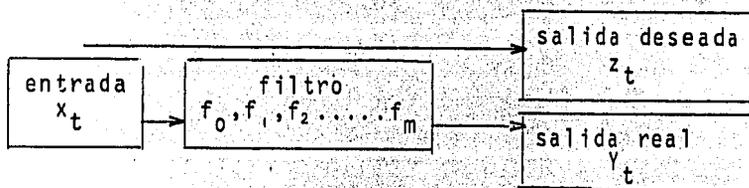
Se calculará ahora el operador de longitud finita óptimo para predicción y separación de señales. No se pierde ge- neralidad si se eliminan los valores medios de la entra- da y la salida deseada y por lo tanto $E\{x_t\} = 0$ y --

$$E\{z_t\} = 0$$

La salida real, que es la convolución de la entrada con el operador, se puede expresar por la siguiente ecuación matricial:

$$Y_t = f_0 x_t + f_1 x_{t-1} + \dots + f_m x_{t-m}$$

En forma esquemática se puede representar al proceso de filtrado multicanal Wiener como:



Donde la salida real es la matriz de orden $M \times 1$

$$Y_t \equiv Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_M(t) \end{bmatrix}$$

El error entre la salida deseada y la salida real es:

$$e_t = z_t - Y_t = z_t - (f_0 x_t + f_1 x_{t-1} + \dots + f_m x_{t-m})$$

En forma matricial, este error se expresa por el vector de orden $M \times 1$

$$e_t = z_t - y_t = \begin{bmatrix} z_1(t) & \vdots & y_1(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_M(t) & \vdots & y_M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ \vdots \\ e_M(t) \end{bmatrix}$$

La matriz de error cuadrático medio se define entonces por:

$$E\{e_t e_t^T\} = \begin{bmatrix} E\{e_1^2(t)\} & E\{e_1(t)e_2(t)\} & \dots & E\{e_1(t)e_m(t)\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{e_m(t)e_1(t)\} & E\{e_m(t)e_2(t)\} & \dots & E\{e_m^2(t)\} \end{bmatrix}$$

La traza de la matriz de error cuadrático medio es:

$$I \equiv \text{tr} E\{e_t e_t^T\} = E\{e_1^2(t)\} + E\{e_2^2(t)\} + \dots + E\{e_m^2(t)\}$$

Ahora se determinarán los valores de los coeficientes f_s del filtro, de tal manera que la traza I de la matriz de error cuadrático medio sea mínima.

Por otro lado, el error e_t se puede escribir como:

$$e_t = z_t - y_t = z_t - \sum_{s=0}^m f_s x_{t-s}$$

desarrollando:

$$\begin{aligned} e_t e_t^T &= (z_t - \sum f_s x_{t-s})(z_t - \sum f_r x_{t-r})^T \\ &= z_t z_t^T - z_t (\sum f_r x_{t-r})^T - \sum f_s x_{t-s} z_t^T + (\sum f_s x_{t-s})(\sum f_r x_{t-r})^T \\ &= z_t z_t^T - z_t \sum x_{t-r}^T f_r^T - \sum f_s x_{t-s} z_t^T + \sum \sum f_s x_{t-s} x_{t-r}^T f_r^T \end{aligned}$$

Tomando el promedio en conjunto se tiene que:

$$E(e_t e_t^T) = E(z_t z_t^T) - \Sigma E(z_t x_{t-r}^T) f_r^T - \Sigma f_s E(x_{t-s} z_t^T) + \Sigma \Sigma f_s E(x_{t-s} x_{t-r}^T) f_r^T$$

La matriz de crosscorrelación entre la salida deseada y la entrada se define como:

$$E(z_t x_{t-r}^T) = E(z_{t+r} x_t^T) = \phi_{zx}(r) \quad (\text{Matriz de orden } M \times N)$$

La igualdad anterior se debe a que las señales son estacionarias.

La matriz de crosscorrelación entre la entrada y la salida deseada se define también por:

$$E(x_{t-s} z_t^T) = \phi_{xz}(-s) \quad (\text{Matriz de orden } N \times M)$$

Se puede observar que estas dos funciones de crosscorrelación están relacionadas por:

$$\phi_{xz}^T(-s) = E(z_t x_{t-s}^T) = \phi_{zx}(s)$$

Finalmente, definamos la función de autocorrelación de la entrada como:

$$E(x_{t-s} x_{t-r}^T) = \phi_{xx}(r-s) \quad (\text{matriz de orden } N \times N)$$

Por consiguiente, se puede escribir $E(e_t e_t^T)$ en términos de las funciones de correlación de la siguiente forma:

$$E(e_t e_t^T) = E(z_t z_t^T) - \Sigma \phi_{zx}(r) f_r^T - \Sigma f_s \phi_{xz}(-s) + \Sigma \Sigma f_s \phi_{xx}(r-s) f_r^T$$

Ahora se obtendrá la derivada de $I = \text{tr} \cdot E(e_t e_t^T)$ con respecto a cada coeficiente del filtro e igualándola a cero para obtener la traza mínima. Realizando este procedimiento se llega al siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$f_0 \rho_{xx}(0) + f_1 \rho_{xx}(-1) + \dots + f_m \rho_{xx}(-m) = \rho_{zx}(0)$$

$$f_0 \rho_{xx}(1) + f_1 \rho_{xx}(0) + \dots + f_m \rho_{xx}(1-m) = \rho_{zx}(1)$$

$$f_0 \rho_{xx}(m) + f_1 \rho_{xx}(m-1) + \dots + f_m \rho_{xx}(0) = \rho_{zx}(m)$$

La solución de este sistema proporciona el óptimo operador de longitud $(m+1)$. Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones normales. Las cantidades conocidas son los coeficientes de autocorrelación $\rho_{xx}(r)$ de la entrada x_t y los coeficientes de crosscorrelación, $\rho_{zx}(r)$ de la salida deseada z_t con la entrada x_t . Las incógnitas son los coeficientes del operador $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_m)$. Debido a que la matriz del sistema de ecuaciones es una matriz de autocorrelación, la solución se puede obtener haciendo uso de la recursión dada más adelante.

Investiguemos ahora la estructura de las ecuaciones normales con respecto al problema de la minimización. Si se hace lo siguiente:

$$\text{term 1} = E(z_t z_t^T) = \rho_{zz}(0)$$

$$\text{term 2} = \sum \rho_{zx}(r) f_r^T$$

$$\text{term 3} = \sum f_s \rho_{xz}(-s) = \sum f_s \rho_{zx}^T(s)$$

$$\text{term 4} = \sum \sum f_s \rho_{xx}(r-s) f_r^T$$

Entonces:

$$E(e_t e_t^T) = \text{term 1} - \text{term 2} - \text{term 3} + \text{term 4}.$$

Cuando minimizamos $I = \text{tr } E(e_t e_t^T)$, el resultado es que:

$$\text{term 4} = \text{term 2} = \text{term 3}$$

Por lo tanto (como verificación de $\text{term 4} = \text{term 2}$) se tiene que:

$$\sum_r \sum_s f_s \phi_{xx}(r-s) f_r^T = \sum_r \phi_{zx}(r) f_r^T$$

cancelando \sum_r y f_r^T queda:

$$\sum_{s=0}^m f_s \phi_{xx}(r-s) = \phi_{zx}(r) \quad \text{para } r=0,1,2,\dots,m$$

y esta expresión representa a las ecuaciones normales.

El mínimo valor de la traza de la matriz de error cuadrático medio es:

$$I_{\min} = \text{tr}(\text{term 1} - \text{term 2}) = \text{tr} \phi_{zz}(0) - \text{tr} \sum_{r=0}^m \phi_{zx}(r) f_r^T$$

Este valor depende del parámetro m (longitud del filtro) y entonces los valores de las trazas I_{\min} , disminuyen - - conforme las longitudes de los filtros se incrementan. La recursión de n a $n+1$, se pueden interrumpir cuando alguna de las siguientes precondiciones se cumple primero:

- (1) El filtro alcanza alguna longitud máxima establecida.
- (2) El error cuadrático medio normalizado, $--$ $I_{min}/tr \hat{\phi}_{zz}$ (o) alcance algún valor pre - seleccionado.
- (3) La secuencia de errores cuadrático medio normalizados, muestre poca probabilidad - de disminución apreciable.

5.3.-Solución recursiva de las ecuaciones normales multicanales.

Se ha visto como se diseñan los filtros multicanales de mínimos cuadrados (Wiener), cuyos coeficientes se encuentran resolviendo las ecuaciones normales.

Debido a que la matriz de este sistema de ecuaciones tiene la forma de una matriz Toeplitz, se puede utilizar una técnica recursiva¹³, la cual facilita mucho los cálculos.

Para mayor sencillez designemos como r_t al coeficiente de autocorrelación multicanal $\hat{\phi}_{xx}(t)$ y con g_t , al coeficiente de crosscorrelación multicanal $\hat{\phi}_{zx}(t)$. Entonces las ecuaciones normales se pueden escribir de la siguiente forma:

¹³ The Toeplitz Recursion. Robinson, Enders A. Sven Treitel Geo -- physical Signal Analysis.

$$\begin{aligned}
 f_0 r_0 + f_1 r_{-1} + \dots + f_m r_{-m} &= g_0 \\
 f_0 r_1 + f_1 r_0 + \dots + f_m r_{-m+1} &= g_1 \\
 \vdots & \\
 f_0 r_m + f_1 r_{m-1} + \dots + f_m r_0 &= g_m
 \end{aligned}$$

En notación matricial se tiene:

$$[f_0, f_1, \dots, f_m] \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \dots & r_m \\ r_{-1} & r_0 & \dots & r_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{-m} & r_{-m+1} & \dots & r_0 \end{bmatrix} = [g_0, g_1, g_2, \dots, g_m]$$

En donde los elementos f_0, f_1, \dots, f_m son los coeficientes del filtro y representan las incógnitas. La matriz cuadrada simétrica, la cual es la matriz de autocorrelación multicanal, tiene la forma de una matriz del grupo Teoplitz; -ésto es, los elementos r_{ij} de la matriz de $N \times N$, a lo largo de cualquier diagonal (en el sentido de la diagonal principal) son los mismos. Estos elementos $r_{-m}, r_{-m+1}, \dots, r_m$ -- son los coeficientes de autocorrelación de la entrada x_t y satisfacen la siguiente expresión:

$$r_{-t} = r_t^T$$

y representan los valores conocidos en las ecuaciones normales.

Los elementos de la matriz (de orden $M \times N$) que se encuen -

tran del lado derecho: g_0, g_1, \dots, g_m , son los coeficientes de crosscorrelación entre la salida deseada z_t y la entrada x_t y también son cantidades conocidas.

El propósito deseado, es encontrar un método de cálculo eficiente para las ecuaciones normales. En relación a cada matriz de autocorrelación, existen dos secuencias auxiliares, una llamada operador de predicción de error y la otra operador Hindsight error por medio de las cuales se desarrolla un cálculo recursivo^I y del cual se obtiene la siguiente fórmula:

$$F_{n+1}(z) = F_n(z) - c_f(n+1)z^{n+1}B_{n+1}(z^{-1})$$

5.3.1. - Programa que resuelve las ecuaciones normales multicanales

El programa ECUANOR resuelve ecuaciones normales multicanales por el proceso recursivo mencionado anteriormente.

Datos de entrada:

N = Número de canales de entrada

M = Número de canales de salida

LF = $m+1$ = Longitud del filtro (con la condición de que $LF \geq 1$).

R = Coeficientes de autocorrelación multicanal (en forma multiplexada): (r_0, r_1, \dots, r_m)

I Multichannel Time Series Analysis..., Enders A. Robinson (ver -- bibliografía).

G = Coeficientes de crosscorrelación multicanal (multiplexados) = (g_0, g_1, \dots, g_m)

Los resultados del programa son:

F: Coeficientes del filtro multicanal (multiplexados) = (f_0, f_1, \dots, f_m) .

A: Coeficientes del operador de predicción de error (multiplexados) para m; $[a_0(m), a_1(m), \dots, a_m(m)]$

AP: Coeficientes del operador de predicción de error (multiplexados) para m-1; $[a_0(m-1), a_1(m-1), \dots, a_{m-1}(m-1), 0]$ (sólo si $m \geq 1$).

B: Coeficientes del operador Hindsight-error (multiplexados) para m; $[b_0(m), b_1(m), \dots, b_m(m)]$

BP: Coeficiente del operador Hindsight-error (multiplexados) para m-1; $[b_0(m-1), b_1(m-1), \dots, b_{m-1}(m-1), 0]$ (sólo si $m \geq 1$)

VA = $v_a(m)$

VB = $v_b(m)$

DA = $-u_a(m-1)$ (Sólo si $m \geq 1$)

DB = $-u_b(m-1)$ (Sólo si $m \geq 1$)

CA = $-c_a(m)$ (Sólo si $m \geq 1$)

CB = $-c_b(m)$ (Sólo si $m \geq 1$)

CF = $-c_f(m)$ (Sólo si $m \geq 1$)

GAM = $-\gamma(m) - g_m$ (Sólo si $m \geq 1$)

La proposición DIMENSION debe satisfacer las siguientes condiciones para cada corrida de datos:

DIMENSION F(M,N,LF), R(N,N,LF), G(M,N,LF), A(N,N,LF), AP(N,N,LF), B(N,N,LF), BP(N,N,LF), VA(N,N,), VB(N,N), DA(N,N), DB(N,N), - CA(N,N), CB(N,N), CF(M,N), GAM(M,N).

El programa ECUANOR utiliza las subrutinas NORMEQ, ZERO, MOVE, SIMEQI y MAINE (Ver Apéndice).

5.3.2.-Programa para el filtro multicanal Wiener

El programa FILWI calcula, en base a una serie multicanal de entrada y a una salida multicanal deseada, el filtro digital Wiener multicanal y su correspondiente serie de salida real multicanal.

Datos del programa:

N = Número de canales de entrada al filtro, donde $N \geq 1$

LX= Longitud de la serie de tiempo de entrada = v

X = Serie de tiempo de entrada de N canales = (x_1, x_2, \dots, x_v)
en forma multiplexada

M = Número de canales de salida del filtro, donde $M \geq 1$

LZ= Longitud de la serie de salida deseada = μ

Z = Serie de salida deseada de M canales = (z_1, z_2, \dots, z_μ)

LR= $m + 1$ = Máxima longitud posible del filtro, en el -- sentido de que la recursión a un filtro más largo, se suspende una vez que el filtro alcanza esta longitud máxima pre-seleccionada.

$LW = q + 1 =$ longitud de un lado de la ventana triangular:

$$W_t = \begin{cases} 1 - \left[\frac{|t|}{q} \right] & \text{Para } |t| = 0, 1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{Para } |t| \geq q \end{cases}$$

que se utiliza para dar peso a las funciones de correlación (autocorrelación y crosscorrelación). Hay que hacer notar que si $LW \leq 1$, no se dan pesos; es decir, si $LW \leq 1$, entonces el programa hace $W_t = 1$ para toda t .

FLOOR = Número entre cero y uno, que representa un límite en el error cuadrático medio normalizado:

$$\frac{I_{\min}}{\text{tr } \hat{\Phi}_{ZZ}(0)}$$

en el sentido de que la recursión a un filtro mayor se suspende una vez que el error cuadrático-medio normalizado llega a su tolerancia.

Datos de Salida:

LF = Longitud del filtro = $K+1$, donde $K \leq m$

F = Filtro multicanal Wiener calculado, de longitud $K+1 = (f_0, f_1, \dots, f_K)$ en forma multiplexada.

E = Secuencias de error cuadrático medio normalizado, para filtros de longitud 1, longitud 2, ..., longitud $K + 1$.

LY = Longitud de la salida real = $v + K$

$Y =$ Salida real = $(y_1, y_2, \dots, y_{v+k})$ en forma multiplexada.

La proposición DIMENSION del programa FILWI, debe satisfacer las siguientes condiciones, para diferentes datos:

DIMENSION $X(N, LX), Z(M, LZ), F(M, N, LR), E(LR), Y(M, LY),$ -
 $S(NN*(5*LR + 6) + MN*(LR + 2) + 2*M*M)$

Donde:

$NN = N*N$

$MN = M*N$

El programa FILWI hace uso de las subrutinas WIENER, - -
 RECUR, ZERO, MOVE, SCALE, BRAINY, HEAT, MAINE, SIMEQI, -
 SPUR. Las versiones para éstas deben ser reales.

PROGRAMA ECUANOR

```

      YESIS PROFESIONAL
C     PROGRAMA PRINCIPAL
C     ESTE PROGRAMA RESUELVE ECUACIONES NORMALES MULTICANALES
      DIMENSION F(1,2,2),R(2,2,2),G(1,2,2)
      DIMENSION A(2,2,2),AP(2,2,2)
      DIMENSION B(2,2,2),BP(2,2,2),VA(2,2),VB(2,2),DA(2,2)
      DIMENSION DB(2,2),CA(2,2),CB(2,2),CF(1,2),GAM(1,2)
      READ(5,*) N,M,LF
      READ(5,*) (((R(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LF)
      READ(5,*) (((G(I,J,K),I=1,M),J=1,N),K=1,LF)
      CALL NORMEQ(N,M,LF,F,R,G,A,AP,B,BP,VA,VB,DA,DB,CA,CB,CF,
1     IGAM)
      WRITE(6,2)
      WRITE(6,3) N,M,LF
      WRITE(6,4) (((R(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LF)
      WRITE(6,5) (((G(I,J,K),I=1,M),J=1,N),K=1,LF)
      WRITE(6,6) (((F(I,J,K),I=1,M),J=1,N),K=1,LF)
      WRITE(6,7) (((A(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LF)
      WRITE(6,8) (((B(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LF)
      WRITE(6,9) ((VA(I,J),I=1,N),J=1,N)
      WRITE(6,10) ((VB(I,J),I=1,N),J=1,N)
      IF(LF.LE.1) GO TO 50
      WRITE(6,11) (((AP(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LF)
      WRITE(6,12) (((BP(I,J,K),I=1,N),J=1,N),K=1,LF)
      WRITE(6,13) ((DA(I,J),I=1,N),J=1,N)
      WRITE(6,14) ((DB(I,J),I=1,N),J=1,N)
      WRITE(6,15) ((CA(I,J),I=1,N),J=1,N)
      WRITE(6,16) ((CB(I,J),I=1,N),J=1,N)
      WRITE(6,17) ((CF(I,J),I=1,M),J=1,N)
      WRITE(6,18) ((GAM(I,J),I=1,M),J=1,N)
2     FORMAT(1H1,3X,'LOS DATOS DE ENTRADA SON LOS SIGUIENTES:')
3     FORMAT(5(/),5X,'N=',I2,/,5X,'M=',I2,/,5X,'LF=',I2)
4     FORMAT(/,5X,'R=',16(2X,F5.1))
5     FORMAT(/,5X,'G=',16(2X,F5.1))
6     FORMAT(5(/),3X,'COEFICIENTES DEL FILTRO Y
1     RESULTADOS:',/,5X,'F=',15(2X,F6.2))
7     FORMAT(/,5X,'A=',15(2X,F6.2))
8     FORMAT(/,5X,'B=',15(2X,F6.2))
9     FORMAT(/,5X,'VA=',15(2X,F6.2))
10    FORMAT(/,5X,'VB=',15(2X,F6.2))
11    FORMAT(/,5X,'AP=',15(2X,F6.2))
12    FORMAT(/,5X,'BP=',15(2X,F6.2))
13    FORMAT(/,5X,'DA=',15(2X,F6.2))
14    FORMAT(/,5X,'DB=',15(2X,F6.2))
15    FORMAT(/,5X,'CA=',15(2X,F6.2))
16    FORMAT(/,5X,'CB=',15(2X,F6.2))
17    FORMAT(/,5X,'CF=',15(2X,F6.2))
18    FORMAT(/,5X,'GAM=',15(2X,F6.2))
50    STOP
      END

```

PROGRAMA FILWI

```

C   TESIS PROFESIONAL
C   PROGRAMA PRINCIPAL
C   ESTE PROGRAMA CALCULA EL FILTRO DIGITAL WIENER
C   MULTICANAL Y LA CORRESPONDIENTE SERIE DE SALIDA
C   REAL MULTICANAL.
DIMENSION X(5,5),Z(5,5),F(5,5,6),E(6),Y(5,10)
DIMENSION S(1150)
READ (5,*) N,LX,M,LZ,LR,LW,FLOOR
READ (5,*) ((X(I,J),I=1,N),J=1,LX)
READ (5,*) ((Z(I,J),I=1,M),J=1,LZ)
CALL WIENER(N,LX,X,M,LZ,Z,LR,LW,FLOOR,LF,F,E,
1LY,Y,S)
WRITE(6,1)
WRITE(6,2) N,LX,((X(I,J),I=1,N),J=1,LX)
WRITE(6,3) M,LZ,((Z(I,J),I=1,M),J=1,LZ)
WRITE(6,4) LR,LW,FLOOR
WRITE(6,5) LF,(((F(I,J,K),I=1,M),J=1,N),K=1,LR)
WRITE(6,6) (E(I),I=1,LR)
WRITE(6,7) LY,((Y(I,J),I=1,M),J=1,LY)
1 FORMAT(1H1,30X,'LOS DATOS DEL PROGRAMA SON LOS
1SIGUIENTES:',////)
2 FORMAT(5X,'N=',I2,///,5X,'LX=',I3,///,5X,'X=',10(1X,F7.2))
3 FORMAT(5(//),5X,'M=',I2,///,5X,'LZ=',I3,///,5X,'Z=',10(1X,
1F7.2))
4 FORMAT(///,5X,'LR=',I2,///,5X,'LW=',I2,///,5X,'FLOOR='
1 ,F4.1)
5 FORMAT(5(//),30X,'EL FILTRO WIENER Y LOS RESULTADOS SON:',
1///,5X,'LF=',I2,///,5X,'F=',8(1X,F12.2))
6 FORMAT(///,5X,'E=',10(1X,F10.3))
7 FORMAT(///,5X,'LY=',I3,///,5X,'Y=',10(1X,F10.2))
STOP
END

```

LOS DATOS DE ENTRADA SON LOS SIGUIENTES:

N= 2

M= 1

LF= 2

R= 7.0 -1.0 -1.0 3.0 -2.0 1.0 -2.0 1.0
G= 1.0 0.0 0.0 1.0

CUEFICIENTES DEL FILTRO Y RESULTADOS:

F=	0.40	-0.20	0.25	0.75				
A=	1.00	0.00	0.00	1.00	0.40	-0.20	0.80	-0.40
B=	1.00	0.00	0.00	1.00	0.25	0.25	-0.25	-0.25
VA=	4.60	0.20	0.20	2.40				
VB=	0.25	-1.75	-1.75	2.25				
AP=	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
BP=	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DA=	2.00	-1.00	2.00	-1.00				
DB=	2.00	2.00	-1.00	-1.00				
CA=	0.40	-0.20	0.80	-0.40				
CB=	0.25	0.25	-0.25	-0.25				
CF=	0.25	0.75						

GAM= 0.25 1.25

EJEMPLO DEL PROGRAMA "ECUANOR"

LOS DATOS DEL PROGRAMA SON LOS SIGUIENTES:

RESULTADOS DEL PROGRAMA FILMI

N= 3

LX= 99

14	X=	51.00	41.57	-31.97	35.00	19.57	-15.97	19.00	-00.43	-31.97	-11.94
15	-51.43	45.00	-15.94	-03.43	-31.97	-30.94	-03.43	-41.97	-20.94	-51.43	
16	21.03	45.00	22.57	-97.97	107.00	30.57	-15.03	79.00	-43.43	-70.97	
17	38.00	34.57	9.03	21.00	72.57	-47.97	-8.94	23.57	24.03	-24.94	
18	67.57	29.03	-30.94	109.57	54.03	-22.94	109.57	118.03	30.00	174.57	
19	73.03	85.00	82.57	-27.97	04.00	-03.43	43.03	71.00	-03.43	-28.97	
20	43.00	-03.43	07.03	20.00	-03.43	-5.97	13.00	-51.43	-27.97	0.00	
21	-63.43	-51.47	-5.94	-20.43	-1.97	-25.94	-49.43	-19.97	-30.94	-52.43	
22	12.03	-30.94	-35.43	-18.97	-42.94	-44.43	-17.97	-39.94	-33.43	15.03	
23	-32.94	-52.43	-30.97	-12.94	-37.43	-11.97	-1.94	-03.43	101.03	-3.94	
24	-34.43	-31.97	1.00	-10.43	-10.97	-1.94	-27.43	-10.97	-18.94	-28.43	
25	58.03	-30.94	-40.43	-70.97	-38.94	-63.43	-10.97	-44.94	-60.43	9.03	
26	-16.94	-37.43	51.03	-45.94	-45.43	-11.94	-41.94	-48.43	79.03	-34.94	
27	-03.43	-49.47	-32.94	-00.43	-27.97	-11.94	-54.43	-60.03	-0.94	0.57	
28	-75.97	-5.94	62.57	-54.97	-10.44	-24.43	-34.03	-22.94	-30.43	13.03	
29	-30.94	7.57	-7.97	-39.94	-39.43	-11.97	-42.94	-43.43	21.03	-43.94	
30	-41.43	-15.97	-30.94	-50.43	-10.47	-29.94	-20.43	13.03	-10.94	20.57	
31	-37.97	3.00	55.57	20.03	15.00	22.57	108.03	20.00	7.57	24.03	
32	24.00	51.03	30.03	1.00	27.57	33.03	-18.94	-20.43	-13.97	-30.94	
33	3.57	2.03	-33.94	-3.43	1.03	10.00	-14.43	1.03	75.00	30.57	
34	-26.97	41.00	06.57	-30.97	70.00	113.57	-71.97	39.00	123.57	8.03	
35	16.00	12.57	10.03	-9.94	11.57	57.03	-22.94	36.57	-57.97	-35.94	
36	4.57	-22.97	-31.94	29.57	1.03	-0.94	-43.43	-11.97	15.00	-12.43	
37	29.03	51.00	8.57	103.03	17.00	54.57	-21.97	49.00	82.57	-33.97	
38	19.00	37.57	-00.97	17.00	-2.43	40.03	7.00	23.57	05.03	-7.94	
39	-10.43	0.03	-25.94	5.57	-27.97	-39.94	-17.43	57.03	-42.94	-10.43	
40	-00.97	-23.40	-28.43	-15.97	8.00	10.57	-7.97	47.00	40.57	24.00	
41	49.97	-13.57	-27.97	30.00	42.57	-1.97	12.00	49.57	13.03	-2.94	
42	39.57	-55.97	0.00	4.57	-0.97	-10.94	3.57	-0.97	-30.94	10.57	
43	-33.97	-39.94	25.57	-10.97	-9.94	30.57	04.03				

M= 3

LZ= 99

44	Z=	35.06	49.57	-35.97	19.06	-60.43	-31.97	-11.94	-53.43	99.03	-15.94
45	-03.43	-31.97	-39.94	-03.43	-97.97	-20.94	-51.43	23.03	45.00	22.57	
46	-97.97	107.00	-38.57	15.03	73.00	-43.43	-70.97	30.00	34.57	73.03	
47	71.00	52.57	-47.97	18.94	23.57	24.03	-23.94	07.57	29.03	-30.94	
48	104.57	51.03	-22.94	109.57	118.03	36.00	174.57	73.03	05.00	82.57	
49	-77.97	01.43	-01.43	43.03	71.00	-03.43	-28.97	43.00	-03.43	02.03	
50	70.00	-03.43	-55.97	13.00	-51.43	-27.97	0.00	-63.43	-51.97	5.94	
51	-20.43	-1.97	-25.94	-49.43	-19.47	-30.94	-52.43	12.03	-40.94	-35.43	
52	-10.94	-12.94	-44.43	-12.97	-39.94	-33.43	15.03	-32.94	-52.43	-38.97	

VI.- CONCLUSIONES

El propósito de esta tesis, fue principalmente, mostrar las herramientas básicas para el análisis multicanal de señales, por lo cual el presente, quizá no parezca muy-práctico sino más bien de investigación, aunque el capítulo V de filtro digital Wiener tiene aplicaciones más-visibles a la Geofísica y, en particular, a la sismología, en donde se le conoce más comúnmente.

Por la forma en que se estructuraron los capítulos se cree conveniente hablar en forma muy general de algunas aplicaciones que tienen las operaciones mencionadas en ellos.

La información que se tiene de las señales en general, tienen que ser procesadas, dependiendo del objetivo que se busque; aquí se presentaron dos técnicas para el análisis de las señales: Unicanal y Multicanal.

En el análisis unicanal se tiene sólo una señal como -- entrada y como salida, las operaciones que se analizaron aquí resultan tener mucha aplicación dentro de las diversas áreas de la Geofísica, por mencionar algunas -- de ellas y las aplicaciones, se tienen:

Gravimetría.--Suavizamiento de la señal (anomalía) observada de campo (regional), ésto a través de la convolución de la anomalía con el operador.

Sismología.--Resaltar señales perdidas en ruido, por medio de la crosscorrelación, ésto se logra gracias a la similitud que deberán presentar las señales involucradas en la operación a la salida (señal deseada y señal-

mezclada con ruido). Para obtener diferentes tipos de filtros, para eliminar: reverberaciones múltiples, ruido coherente, fantasmas, etc., en los registros sismológicos.

Mientras que en el análisis multicanal, como existen varios canales de entrada y salida, entonces la aplicación deberá ser en áreas tales que se maneje varias señales en el tiempo, como lo es la sismología de reflexión y el área de comunicaciones entre otras, en donde podemos aplicar las operaciones mencionadas (convolución, autocorrelación, correlación), con la variante que en este análisis, debido a la magnitud del tema se trabajó con matrices en lugar de escalares y se les tomó a las primas como unidad fundamental del tema.

Para las diferentes áreas, en las que se requiera, el uso de este tipo de análisis, es necesario definir la serie multicanal, esto es: como un polinomio matricial, en donde quedará bien establecido el número de canales y la longitud de la serie, posteriormente se podrán aplicar cualesquiera de las operaciones que han venido mencionándose, según sea lo que se requiera y finalmente, se podrá hacer un análisis en el dominio de la frecuencia.

Como última conclusión podemos decir que las bases que se manejan en la tesis, están abiertas a cualquier campo, es decir, no sólo a la Geofísica, sino a otras áreas que estén relacionadas con señales de tiempo.

NOTA: Resulta un poco incómodo cambiar la capacidad de las instrucciones DIMENSION en los programas vistos en este trabajo (como se indica en cada caso), sin embargo, es necesario debido a la complejidad de los temas.

A P E N D I C E

```

SUBROUTINE BRAINY(NRA,NCA,LA,A,NRB,NCB,LB,B,C)
DIMENSION A(NRA,NCA,LA),B(NCA,NCB,LB),C(NRA,NCB,1)
C ESTE PROGRAMA EFECTUA LA MULTIPLICACION DE POLINOMIOS
C MATRICIALES
C PARA UNA VERSION COMPLEJA ELIMINE LA C DE LA COLUMNA
C 1 DE LA SIGUIENTE INSTRUCCION.
C COMPLEX A,B,C
LC=LA+LB-1
NAB=NRA*NCB*LC
CALL ZERO(NAB,C)
DO 1 I=1,LA
DO 1 J=1,LB
K=I+J-1
DO 1 M=1,NRA
DO 1 N=1,NCB
DO 1 L=1,NCA
1 C(M,N,K)=C(M,N,K)+A(M,L,I)*B(L,N,J)
RETURN
END

```

```
SUBROUTINE ZERO(LX,X)
DIMENSION X(LX)
C ESTE PROGRAMA ASIGNA EL VALOR 0.0 A CADA UNO DE LOS
C ELEMENTOS DE UN ARREGLO
C PARA VERSION COMPLEJA ELIMINE LA C DE LA
C COLUMNA 1 DE LA SIGUIENTE INSTRUCCION
C COMPLEX X
IF(LX.LE.0) RETURN
DO 1 I=1,LX
1 X(I)=0.0
RETURN
END
```

```

SUBROUTINE FOMAIN (N,LA,A,ADJ,P,DET,S)
DIMENSION A(N,N,LA),ADJ(N,N,1),P(N,1),DET(1),S(N,N,1)
C ESTE PROGRAMA CALCULA EL DETERMINANTE, MATRIZ ADJUNTA
C Y LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO CARACTERISTICO DE UNA
C MATRIZ POLINOMIAL
C PARA VERSION COMPLEJA ELIMINE LA C DE LA COLUMNA 1
C DE LA SIGUIENTE INSTRUCCION.
C COMPLEX A,ADJ,P,DET,S
N2LA=N*N*LA
CALL MOVE(N2LA,A,S)
J=LA
DO 4 L=1,N
DO 1 K=1,J
P(L,K)=0.0
DO 1 I=1,N
1 P(L,K)=P(L,K)+S(I,I,K)/FLOAT(L)
IF(L.EQ.N) GO TO 5
NNJ=N*N*K
CALL MOVE(NNJ,S,ADJ)
DO 3 I=1,N
DO 3 K=1,J
3 ADJ(I,I,K)=ADJ(I,I,K)-P(L,K)
CALL BRAINY(N,N,LA,A,N,N,J,ADJ,S)
4 J=J+LA-1
5 CONTINUE
FF=FLOAT(2*MOD(N,2)-1)
NNN=N*N*(J-LA+1)
CALL SCALE(FF,NNN,ADJ)
DO 6 L=1,J
6 DET(L)=P(N,L)*FF
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MAINE(N,A,B)
DIMENSION A(N,N),B(N,N)
C ESTE PROGRAMA INVIERTE UNA MATRIZ SIMETRICA POR UN METODO
C ESCALAR
DO 5 I=1,N
DO 5 J=1,N
5 B(I,J)=0.0
B(1,1)=1./A(1,1)
IF (N.EQ.1) RETURN
DO 40 M=2,N
K=M-1
EK=A(M,M)
DO 10 I=1,K
DO 10 J=1,K
10 EK=EK-A(M,I)*B(I,J)*A(J,M)
B(M,M)=1./EK
DO 30 I=1,K
DO 20 J=1,K
20 B(I,M)=B(I,M)-B(I,J)*A(J,M)/EK
30 B(M,I)=B(I,M)
DO 40 I=1,K
DO 40 J=1,K
40 B(I,J)=B(I,J)+B(I,M)*B(M,J)*EK
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MOVE(LX,X,Y)
DIMENSION X(LX),Y(LX)
C ESTE PROGRAMA MUEVE UN ARREGLO DE UNA LOCALIDAD DE
C ALMACENAMIENTO A OTRA
C PARA VERSION COMPLEJA ELIMINE LA C
C DE LA SIGUIENTE INSTRUCCION
C COMPLEX X,Y
DO 1 I=1,LX
1 Y(I)=X(I)
RETURN
END

```

```
SUBROUTINE SCALE(S,LX,X)
DIMENSION X(LX)
C ESTE PROGRAMA MULTIPLICA CADA ELEMENTO DE UN ARREGLO
C POR UN FACTOR ESCALAR C
C PARA VERSION COMPLEJA ELIMINE LA C DE LA COLUMAN 1
C DE LA SIGUENTE INSTRUCCION.
C COMPLEX X
DO 1 I=1,LX
1 X(I)=S*X(I)
RETURN
END
```

```
FUNCTION SPUR(N,A)
DIMENSION A(N,N)
C ESTE PROGRAMA CALCULA LA TRAZA DE UNA MATRIZ CUADRADA
SPUR=0.0
DO 1 I=1,N
1 SPUR=SPUR+A(I,I)
RETURN
END
```

```

SUBROUTINE FACT(N,LA,A,ADJ,ZEROS,S,B)
C ESTE PROGRAMA FACTORIZA UN POLINOMIO MATRICIAL EN PRODUCTO
C DE BINOMIOS
COMPLEX A,ADJ,ZEROS,S,B,ZI
DIMENSION A(2,2,3),ADJ(2,2,3),ZEROS(2,2),S(2,2,11),B(2,2,3)
NF=LA-1
C CAMBIA LA ADJUNTA A S(1,1,6)
CALL MOVE(N*N*((N-1)*NF+1),ADJ,S(1,1,6))
C DO DE LOS FACTORES (I+Z*Q*I*QINV)
DO 30 IP=1,NF
L=(N-1)*NF+IP
CALL ZERO(N*N*5,S)
DO 20 ICOL=1,N
C INTRODUCE LAS RAICES(PREVIOS FACTORES*ADJUNTA)
C PARA OBTENER LAS EIGENCOLUMNAS.
CALL ZERO(N*N,B)
DO 10 I=1,L
ZI=ZEROS(ICOL,IP)**(I-1)
DO 10 K=1,N
DO 10 J=1,N
10 B(J,K,1)=B(J,K,1)+S(J,K,I+5)*ZI
C FORMA LA MATRIZ Q DE EIGENCOLUMNAS Y LA ALMACENA EN S(1,1,3)
CALL MOVE(N,B,S(1,ICOL,3))
C FORMA LA MATRIZ DIAGONAL D CON -1/CERO Y LA ALMACENA EN
C S(1,1,4)
S(ICOL,ICOL,4)=-1./ZEROS(ICOL,IP)
C FORMA LA MATRIZ IDENTIDAD I Y LA ALMACENA EN S(1,1,1)
20 S(ICOL,ICOL,1)=1.0
C OBTIENE Q**(-1) Y LA ALMACENA EN S(1,1,5)
CALL MAINV(N,S(1,1,3),S(1,1,5))
C HACE Q*I*Q**(-1) Y LO ALMACENA EN S(1,1,2)
CALL BRAINY(N,N,1,S(1,1,3),N,N,1,S(1,1,4),B)
CALL BRAINY(N,N,1,B,N,N,1,S(1,1,5),S(1,1,2))
C GUARDA LA MATRIZ Q*I*Q**(-1) EN EL ARREGLO B
I=NF-IP+2
CALL MOVE(N*N,S(1,1,2),B(1,1,I))
WRITE(6,40) I,((B(J,K,I),J=1,N),K=1,N)
40 FORMAT(5X,2X,I3,3X,10(1X,F7.2))
C NUEVO FACTOR=(I+Z*Q*I*Q**(-1))=(I+Z*B)
C FORMA NUEVO FACTOR*(PREVIOS FACTORES*ADJUNTA) Y LOS ALMACENA
C EN S(1,1,6)
WRITE(6,50) (((S(J,K,MN),J=1,N),K=1,N),MN=1,2)
WRITE(6,50) (((S(J,K,MN),J=1,N),K=1,N),MN=6,(5+L))
50 FORMAT(5X,10(2X,F7.2))
CALL BRAINY(N,N,2,S,N,N,L,S(1,1,6),S(1,1,L+6))
30 CALL MOVE(N*N*(L+1),S(1,1,L+6),S(1,1,6))
CALL MOVE(N*N,A,B)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE FADDEJ(N,A,AINV,DET,ADJUG,P)
COMPLEX A,AINV,DET,ADJUG,P
C ESTE PROGRAMA INVIERTE UNA MATRIZ DE N*N POR UN METODO
C DADO POR FADDEEVV Y SOMINSKII
DIMENSION A(N,N),AINV(N,N),ADJUG(N,N),P(N)
CALL MOVE(N*N,A,AINV)
DO 4 K=1,N
P(K)=0.0
DO 2 I=1,N
2 P(K)=P(K)+AINV(I,I)
P(K)=P(K)/FLOAT(K)
IF(K.EQ.N) GO TO 5
CALL MOVE(N*N,AINV,ADJUG)
DO 3 I=1,N
3 ADJUG(I,I)=AINV(I,I)-P(K)
4 CALL BRAINY(N,N,1,A,N,N,1,ADJUG,AINV)
5 CALL MOVE(N*N,ADJUG,AINV)
IF(CABS(P(N)).LT.1.0E-30) GO TO 7
DO 6 I=1,N
DO 6 J=1,N
6 AINV(I,J)=AINV(I,J)/P(N)
7 DET=P(N)
IF(MOD(N,2).EQ.1) RETURN
DET=-DET
DO 8 I=1,N
DO 8 J=1,N
8 ADJUG(I,J)=-ADJUG(I,J)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE HEAT(NRX,NCX,LX,X,NRY,NCY,LY,Y,LG,G)
COMPLEX X,Y,G
C PROGRAMA QUE EFECTUA CORRELACION MULTICANAL
DIMENSION X(NRX,NCX,LX),Y(NRY,NCY,LY),G(NRX,NRY,LG)
CALL ZERO(NRX*NRY*LG,G)
MIN=MINO(LG,LX)
DO 1 M=1,NRX
DO 1 N=1,NRY
DO 1 L=1,NCX
DO 1 J=1,MIN
LDOT=MINO(LY,LX-J+1)
DO 1 I=1,LDOT
K=I+J-1
C SI LA VERSION ES COMPLEJA ENTONCES EL ULTIMO TERMINO
C DE LA SIGUIENTE INSTRUCCION DEBE SER: CONJ(Y(N,L,I))
1 G(M,N,J)=G(M,N,J)+X(M,L,K)*Y(N,L,I)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MAINV(N,A,B)
C ESTE PROGRAMA CALCULA LA INVERSA DE UNA MATRIZ 'A'
COMPLEX A,B,DET,ADJUG,P
C NMAX=VALOR MAYOR DE N A PROCESAR
C DIMENSION ADJUG(NMAX*NMAX),P(NMAX)
DIMENSION ADJUG(4),P(2)
DIMENSION A(N*N),B(N*N)
CALL FADDEJ(N,A,B,DET,ADJUG,P)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE NORMEQ(N,M,LF,F,R,G,A,AP,B,BP,VA,VB,DA,DB,
1CA,CB,CF,GAM)
C ESTE PROGRAMA RESUELVE LAS ECUACIONES NORMALES MULTICA-
C NALES POR UN METODO RECURSIVO
DIMENSION F(M,N,LF),R(N,N,LF),G(M,N,LF),A(N,N,LF),AP(N,N,LF)
DIMENSION B(N,N,LF),BP(N,N,LF),VA(N,N),VB(N,N)
DIMENSION DA(N,N),DB(N,N)
DIMENSION CA(N,N),CB(N,N),CF(M,N),GAM(M,N)
CALL ZERO(N*N*LF,A)
CALL ZERO(N*N*LF,B)
CALL ZERO(M*N*LF,F)
DO 2 I=1,N
DO 1 J=1,N
VA(I,J)=R(I,J,1)
1 VB(I,J)=R(I,J,1)
A(I,I,1)=1.
2 B(I,I,1)=1.
CALL SIMEQ1(M,N,F,R,G)
I(LF,EQ,1) RETURN
DO 8 L=2,LF
CALL ZERO(N*N,DA)
CALL MOVE(M*N,G(1,1,L),GAM)
DO 5 I=1,N
DO 4 LI=1,L
LD=L-LI+1
DO 4 K=1,N
DO 3 J=1,N
3 DA(I,J)=DA(I,J)-A(I,K,LI)*R(K,J,LD)
DO 4 J=1,M
4 GAM(J,I)=GAM(J,I)-F(J,K,LI)*R(K,I,LD)
DO 5 J=1,N
5 DB(J,I)=DA(I,J)
CALL SIMEQ1(N,N,CA,VB,DA)
CALL SIMEQ1(N,N,CB,VA,DB)
CALL MOVE(N*N*L,A,AP)
CALL MOVE(N*N*L,B,BP)
DO 7 J=1,N
DO 7 K=1,N
DO 6 LI=1,L
LD=L-LI+1
DO 6 I=1,N
A(I,J,LI)=A(I,J,LI)+CA(I,K)*BP(K,J,LD)
6 B(I,J,LI)=B(I,J,LI)+CB(I,K)*AP(K,J,LD)
DO 7 I=1,N
VA(I,J)=VA(I,J)-CA(I,K)*DB(K,J)
7 VB(I,J)=VB(I,J)-CB(I,K)*DA(K,J)
CALL SIMEQ1(M,N,CF,VB,GAM)
DO 8 LI=1,L
LD=L-LI+1
DO 8 J=1,N
DO 8 K=1,N
DO 8 I=1,M
8 F(I,J,LI)=F(I,J,LI)+CF(I,K)*B(K,J,LD)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SIMEQ1(M,N,A,B,C)
ESTE PROGRAMA RESUELVE UN SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTA- 151
NEAS QUE INVOLUCRAN UNA MATRIZ SIMETRICA
DIMENSION S(25,25)
DIMENSION A(M,N),B(N,N),C(M,N)
CALL MOVE(N*N,B,S)
CALL MAINE(N,S,B)
DO 1 I=1,M
DO 1 J=1,N
A(I,J)=0.0
DO 1 K=1,N
1 A(I,J)=A(I,J)+C(I,K)*B(K,J)
CALL MOVE(N*N,S,B)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE WIENER(N,LX,X,M,LZ,Z,LR,LW,FLOOR,
1LF,F,E,LY,Y,S)
C FILTRO WIENER MULTICANAL
DIMENSION X(1),Z(1),F(1),E(1),Y(1),S(1)
NN=N*N
NNLR=NN*LR
MN=M*N
IR=1
IA=1+NNLR
IB=IA+NNLR
IAP=IB+NNLR
IBP=IAP+NNLR
IVA=IBP+NNLR
IVE=IVA+NN
IDA=IVB+NN
IDB=IDA+NN
ICA=IDB+NN
ICB=ICA+NN
IG=ICB+NN
ICF=IG+MN*LR
IGAM=ICF+MN
IH=IGAM+MN
IFGT=IH+M*N
CALL HEAT(M,1,LZ,Z,M,1,LZ,Z,1,S(IH))
IF(LW.LE.1) L=LR
IGZ=IG+MN*LW
IRZ=IR+NN*LW
IF(LW.GT.1.AND.LW.LT.LR) L=LW
IF(LW.GT.1.AND.LW.LT.LR) CALL ZERO(MN*(LR-LW),S(IGZ))
IF(LW.GT.1.AND.LW.LT.LR) CALL ZERO(NN*(LR-LW),S(IRZ))
IF(LW.GT.1.AND.LW.GE.LR) L=LR
CALL HEAT(M,1,LZ,Z,N,1,LX,X,L,S(IG))
CALL HEAT(N,1,LX,X,N,1,LX,X,L,S(IR))
IF(LW.LE.1.OR.L.LE.1) GO TO 2
DO 1 K=2,L
IGK=IG+MN*(K-1)
IRK=IR+NN*(K-1)
WINDOW=1.0-FLOAT(K-1)/FLOAT(LW-1)
CALL SCALE(WINDOW,MN,S(IGK))
1 CALL SCALE(WINDOW,NN,S(IRK))
2 CALL RECUR(N,M,LR,S,S(IH),S(IG),FLOOR,LF,F,E,3(IA)
1,S(IB),S(IAP),S(IBP),S(IVA),S(IVB),S(IDA),S(IDB),S(ICA),
2S(ICB),S(ICF),S(IGAM),S(IFGT))
LY=LX+LF-1
CALL BRAINY(M,N,LF,F,N,1,LX,X,Y)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE RECUR(N,M,LR,R,H,G,FLOOR,LF,F,E,
1A,B,AP,BP,VA,VB,DA,DB,CA,CB,CF,GAM,FGT)
DIMENSION F(M,N,LR),R(N,N,LR),G(M,N,LR),H(M,M)
DIMENSION A(N,N,LR),AP(N,N,LR),B(N,N,LR),BP(N,N,LR)
DIMENSION VA(N,N),VB(N,N),DA(N,N),DB(N,N)
DIMENSION CA(N,N),CB(N,N),CF(M,N),GAM(M,N)
DIMENSION FGT(M,M),E(LR)
CALL ZERO(N*N*LR,A)
CALL ZERO(N*N*LR,B)
CALL ZERO(N*N*LR,F)
DO 2 I=1,N
DO 1 J=1,N
VA(I,J)=R(I,J,1)
1 VB(I,J)=R(I,J,1)
A(I,I,1)=1.
2 B(I,I,1)=1.
CALL SIMEQ1(M,N,F,R,G)
LF=1
CALL HEAT(M,N,1,F,M,N,1,G,1,FGT)
E(1)=1.0-SPUR(M,FGT)/SPUR(M,H)
IF(E(1).LE.FLOOR) RETURN
IF(LR.EQ.1) RETURN
DO 9 L=2,LR
CALL ZERO(N*N,DA)
CALL MOVE(M*N,G(1,1,L),GAM)
DO 5 I=1,N
DO 4 LI=1,L
LD=L-LI+1
DO 4 K=1,N
DO 3 J=1,N
3 DA(I,J)=DA(I,J)-A(I,K,LI)*R(K,J,LD)
DO 4 J=1,M
4 GAM(J,I)=GAM(J,I)-F(J,K,LI)*R(K,I,LD)
DO 5 J=1,N
5 DB(J,I)=DA(I,J)
CALL SIMEQ1(N,N,CA,VB,DA)
CALL SIMEQ1(N,N,CB,VA,DB)
CALL MOVE(N*N*L,A,AP)
CALL MOVE(N*N*L,B,BP)
DO 7 J=1,N
DO 7 K=1,N
DO 6 LI=1,L
LD=L-LI+1
DO 6 I=1,N
A(I,J,LI)=A(I,J,LI)+CA(I,K)*BP(K,J,LD)
6 B(I,J,LI)=B(I,J,LI)+CB(I,K)*AP(K,J,LD)
DO 7 I=1,N
VA(I,J)=VA(I,J)-CA(I,K)*DB(K,J)
7 VB(I,J)=VB(I,J)-CB(I,K)*DA(K,J)
CALL SIMEQ1(M,N,CF,VB,GAM)
DO 8 LI=1,L
LD=L-LI+1
DO 8 J=1,N
DO 8 K=1,N
DO 8 I=1,M
8 F(I,J,LI)=F(I,J,LI)+CF(I,K)*B(K,J,LD)
CALL HEAT(M,N,L,F,M,N,L,G,1,FGT)
E(L)=1.0-SPUR(M,FGT)/SPUR(M,H)
LF=L
IF(E(L).LE.FLOOR) RETURN
9 CONTINUE
RETURN
END

```

BIBLIOGRAFIA

- Advanced and Digital Seismology Mathematical Background. C.T.P. Course IX.
- Analisis de Fourier.-Hwei P. Hsu, Fondo Educativo - Interamericano.
- Apuntes de Algebra.-Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Circuito y Sistemas Electromecánicos.-Czitróm de -- Gerez y Víctor Gerez Greiser. Tomo I. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A.
- Deconvolution V.I. Society of Exploration Geophysical
- Digital Processing of Geophysical Data.-Continuing-Education Program S.E.G.
- Fortran para Ingeniería.-William Schick, Charles J.- Metz Jr., Mc Graw-Hill, 1974.
- Geophysical Signal Analysis.-Robinson, Enders A. - - Sven Treitel.
- Introduction to digital Filtering in Geophysisc. Ota Kulhanek, January, 1975.
- Mathematics of Physics and Modern Engineering Sokolni Koff, Redheffer, Second Edition, 1966.
- Matemáticas Universitarias.-Jack R. Britton, R. Ben - Kriegh, Leon W. Rutland . CECSA. Tomo II, 1969.
- Multichanel Time Series Analysis with Digital Computer Programs, Enders A. Robinson, University of Tulsa, -- Tulsa, Oklahoma.
- Principles of Digital Filtering, E.A. Robinson and - Treitel, Geophysics, Vol. XXIX, No.3. June, 1964.

Señales y Sistemas Lineales.-Robert A. Gabel, Richard A. Roberts. Limusa, 1975

The Theory of Matrices, Grantmacher, Chelsea, New -- York, 1959. V. I.

The Stability of Digital Filters, S. Treitel and E.A. Robinson, IEEE Transactions on Geoscience Electronics-Vol. GE-2, November, 1964.