



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ingeniería

**LA CUANTIZACION
EN LAS
COMUNICACIONES**

T E S I S

Que para obtener el título de:
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

P r e s e n t a :

José Arturo Landeros Ayala

Director de Tesis: Dr. Luis Andrés Buzo de la Peña

México, D. F.

1984



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

1.	Introducción	1
2.	Antecedentes Históricos	4
3.	Generalidades de Cuantización	9
3.1	El Cuantizador	9
3.2	Cuantización Uniforme	11
3.3	Potencia promedio de una señal cuantizada uniformemente	17
3.4	Cuantizador No Uniforme	18
3.5	Cuantizador de memoria cero	23
3.6	Cuantizador con memoria	25
4.	Compansión	28
4.1	Compansores	28
4.2	Cuantización Robusta	31
5.	Cuantización Adaptiva	45
5.1	El Cuantizador adaptivo	45
6.	Cuantización Vectorial	50
6.1	El cuantizador vectorial	50
6.2	Derivación heurística de la integral de distorsión	63
7.	El cuantizador óptimo	66
7.1	Cálculo de la distorsión	66
7.2	Partición óptima	85
8.	Relación señal a ruido de cuantización para algunos sistemas de modulación	88
8.1	Relación señal a ruido utilizando DPCM	88

8.2	Relación señal a ruido de un sistema DPCM utilizando codificación de entropía	92
8.3	Comparación de la relación señal a ruido para algunos sistemas de acuerdo a su codificación.	93
9.	Conclusiones	96
	BIBLIOGRAFIA	100

1. INTRODUCCION

El procesamiento y la transmisión de señales digitales se ha acercado rápidamente a desempeñar un papel muy importante en los Sistemas de Comunicaciones. Sin embargo, el origen físico de muchas señales de información tales como: voz, imagen, telemetría, etc, son señales de naturaleza analógica. La conversión de dichas señales analógicas a digitales tiene muchas ventajas tales como: la facilidad y eficiencia de multiplexar señales digitales "en paquetes" para una conmutación conveniente; la insensibilidad relativa de circuitos digitales al ruido de retransmisión, que comunmente es problema con los Sistemas de Comunicaciones analógicos; se tienen tasas de error extremadamente bajas y alta fidelidad debida a la detección y correc-

ción de errores; se tiene privacidad en las comunicaciones (criptografía); y la flexibilidad para la implementación digital de "hardware" lo cual permite el uso de microprocesadores y mini-procesadores, conmutación digital y el uso de circuitos integrados de gran escala. Por estas ventajas es de crucial importancia una interface efectiva entre el mundo analógico y digital en el procesamiento moderno de señales pero el precio que se tiene que pagar por estos beneficios es un aumento en el ancho de banda.

Frecuentemente la calidad de la conversión analógica-digital es un factor crítico que limita el funcionamiento de todo el sistema.

La transmisión digital de señales analógicas es posible gracias al teorema del muestreo el cual establece que si una señal analógica está limitada en banda y es muestreada en determinados intervalos de tiempo y a una razón igual o mayor a dos veces la frecuencia más alta de esta señal, entonces la señal muestreada contiene la información necesaria de la señal original y puede reconstruirse mediante el uso de un filtro paso bajo y por consiguiente solamente se necesita transmitir los valores muestreados. Estas muestras se pueden transmitir utilizando esquemas de modulación de pulsos en donde se puede variar la amplitud, el ancho o la posición de una determinada forma de pulso en proporción a las amplitudes de las muestras.

Otra forma de transmitir los valores muestreados de una señal analógica es "cuantizando" los valores muestreados a valores predeterminados, y después transmitir la señal muestreada y cuantizada utilizando modulación digital.

Esta conversión analógica digital se puede considerar en cuatro etapas que serían: el prefiltrado, el muestreo, la cuantización y la codificación. La cuantización es una etapa esencial para dicha conversión y por esta razón nos avocamos a desarrollar ampliamente lo referente a esta etapa, la cual es una forma de digitizar la información para después codificarla y poder transmitirla, pero no se transmite toda la información generada, sino únicamente la mínima necesaria para poder reconstruir la señal original dentro de un criterio de precisión deseada.

2. ANTECEDENTES HISTORICOS

En tiempos remotos las formas de comunicación a distancia empleadas por el hombre fueron digitales, tales como las señales de humo, por tambor, o por el golpeteo de un tronco hueco, etc.

Mucho tiempo después surgieron otras formas de comunicaciones digitales empleadas por el hombre, las cuales fueron electrónicas, tales como el telégrafo, el TWX y el TELEX. En 1834, Gauss y Weber diseñaron uno de los primeros telégrafos que lograron operar a distancia significativas; poco después Cooke y Wheatstone demostraron en 1837, otro sistema telegráfico que también operaba a grandes distancias.

En Estados Unidos de Norteamérica, ayudado por un donativo de \$ 30,000.00 dólares cedidos por el Congreso, Samuel Morse desarrolló un sistema telegráfico revolucionario basado en su famoso código de punto-rayas. En 1910, Honard Krum diseñó en Estados Unidos una técnica para sincronizar la transmisión y recepción de cada caracter, lo cual era un problema técnico, agregándole a cada uno de éstos, un elemento estandard que denotaba el principio o el fin de cada caracter.

La técnica de Krum combinada con el código Baudot de longitud constante (código que se considera precursor de la mayoría de los códigos utilizados actualmente para el procesamiento de datos), dió como resultado el desarrollo y la popularización del empleo de equipo telegráfico automático y su operación comercial. Empezó en 1910, cuando el sistema telegráfico postal de los Estados Unidos inauguró su servicio de teleimpresores.

Dos de las mejores y más grandes redes de teleimpresores son conocidas por los nombres de TWX y TELEX. El TWX lo inventó la compañía A.T. & T. La cual lo vendió a la Western Union en 1971 y el TELEX es un servicio que se originó en Alemania en 1934.

Por otro lado, en 1864, gracias a la teoría dinámica de las ondas electromagnéticas debida a Maxwell, se tuvieron las bases que posteriormente darían origen a las comunicaciones por radio, pero lo cual fué posible hasta 1887, cuando Hertz comprobó prácticamente dicha teoría.

En 1895, los experimentos de Lodge, Popov y Marconi fructificaron cuando éste último fundó la compañía telegráfica y señales sin hilo, explotando comercialmente la radiotelegrafía, y desde esta fecha, hasta los años 30's de este siglo las comunicaciones digitales se estancaron, ya que durante este tiempo lo que se popularizó fueron las comunicaciones de naturaleza analógica, tales como la telefonía, la radio y la televisión.

En 1937, el doctor Alac Reeves inventó la modulación por codificación de pulsos (PCM del inglés Pulse Code Modulation) para aplicarla en radioenlaces de microondas. Pero este invento fué un poco prematuro, ya que la complejidad del proceso de modulación PCM requería de un número excesivo de tubos de vacío electrónicos, los cuales eran los únicos dispositivos electrónicos disponibles en aquella época para la integración de circuitos moduladores de pulsos, lo que representa serias desventajas económicas. Además, la tecnología para sintetizar circuitos lógicos en aquel entonces no había madurado lo suficiente para manejar altas frecuencias.

En 1947, se inventó el transistor cuya evolución durante la década siguiente, permitió que en 1961 se construyera el primer sistema comercial de PCM.

Por otra parte los grandes progresos hacia fines de los años 50's habían sido hechos en la tecnología de la transmisión digital, motivando aún más la investigación en los laboratorios Bell. Durante los años 60's, la tendencia de digitalización en

las redes telefónicas empezó a crecer paulatinamente y alcanzó un vigoroso impulso durante los años 70's.

Con lo respecta a las señales de radio, durante la década de los 30's, se creó en Francia un sistema de microondas digitales, pero éste empezó a introducirse en gran escala hasta los años 70's con la digitalización de las telecomunicaciones vfa satélite, ya que antes eran analógicas.

Durante la época en que se implementaron los primeros Sistemas de Comunicaciones PCM y la invención del transistor, también se publicó un estudio hecho por Shannon y Weaver acerca de la teoría matemáticas de las comunicaciones que revolucionó el campo de las comunicaciones y proporcionó las bases para lo que actualmente se conoce como teoría de la información.

Una aplicación importante de esta teoría fué la llamada Teoría de la Codificación, la cual floreció durante los años 50's y 60's y contribuyó significativamente al desarrollo de la técnica de transmisión de datos.

Las comunicaciones digitales se hicieron populares por la carrera que presentaba el transmitir datos a mayor velocidad y confiabilidad, aunado a la aplicación de la teoría matemática de las comunicaciones.

Durante las últimas dos décadas, las comunicaciones digitales no solo han avanzado por el aumento de capacidad y el abati miento de costos que la microelectrónica ofrece en el diseño de este tipo de sistemas; su progreso también se ha relacionado con la aparición de nuevas áreas teórico-prácticas como es el caso de procesamiento digital de señales.

Aunque las raíces del campo de las comunicaciones digitales datan de las matemáticas de los siglos XVII y XVIII, se ha convertido en una herramienta importante en una gran diversidad de disciplinas; pero resulta paradójico que las comunicaciones digitales electrónicas son tan antiguas como las teorías debidas a Newton y Gauss y tan modernas como los circuitos integrados de las computadoras digitales.

3. GENERALIDADES DE CUANTIZACION

3.1 El Cuantizador

La representación de una señal analógica muestreada sólo por ciertos niveles discretos permisibles es llamada "Cuantización".

Por lo tanto, para poder cuantizar una señal analógica, primero se necesita tener las muestras de ésta, es decir, muestrear la señal, y cada muestra en general puede tener un valor dentro del rango continuo de $-\infty$ a $+\infty$.

La función del cuantizador es reemplazar cada valor de estas muestras por un valor de salida, el cual puede ser igual al valor de la muestra o uno aproximado. Evidentemente es imposible representar la amplitud exacta de todas las muestras al

emplear la cuantización. La amplitud de una muestra es representada como la amplitud de un pulso o como un pulso con una cierta posición en el tiempo, pero el ruido, la distorsión, etc, entre los pulsos, alteran la amplitud y la posición, y por ello se causan errores en la información que se recupera, esto en lo que concierne al tamaño de la muestra.

Por esta razón el error aumenta cada vez más conforme se amplifica la señal con repetidores sucesivos, ya que también se amplifica el ruido y la distorsión, esto pone un límite a la distancia a la que se puede transmitir una señal aún con una amplificación suficiente.

Sin embargo, es posible permitir que solamente ciertos niveles discretos de amplitud o ciertas posiciones de los pulsos en el tiempo sean codificados y luego transmitidos y entonces cuando la señal es muestreada se manda el nivel más cercano al nivel verdadero de la muestra. Cuando es recibido y amplificado tendrá un nivel un poco diferente a los niveles especificados, pero si el ruido y la distorsión no son muy grandes, se puede decir con seguridad qué nivel de la señal se supone que debe ser. Entonces se puede reformar la señal o crear una señal nueva, la cual tenga el nivel mandado originalmente, de esta forma se puede lograr un mayor número de retransmisiones.

Ahora bien, entre mayor sea el número de niveles de cuantización empleados, el número de dígitos binarios o bits requeridos para representar la señal será mayor, por lo tanto el ancho de banda requerido para transmitir la señal ya codificada también será mayor. Una técnica regularmente empleada es la de

seleccionar tan pocos niveles de cuantización como sea posible sin detrimento al objetivo que tiene una eficiente transmisión.

Se ha demostrado que para la transmisión de voz vfa PCM 128 niveles, o PCM de 7 bits, es suficiente para asegurar una transmisión de alta calidad. Para la transmisión de datos de telemetría, la exactitud posible o requerida en la transmisión está determinada por el número de niveles usados.

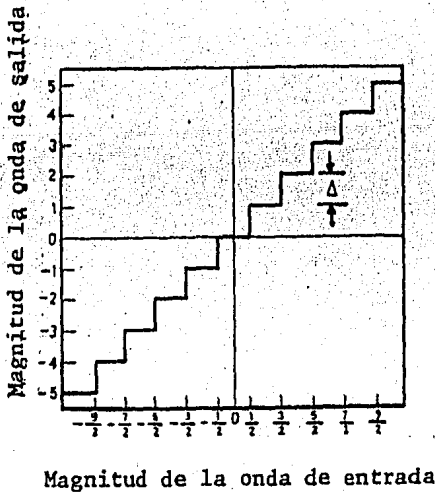
De esta forma el símbolo de un alfabeto finito puede representar e identificar el valor de una salida en particular o también, esta salida puede representar una palabra binaria de n bits, por lo cual muestra de la señal se cuantiza en uno de los niveles 2^n niveles, lo que implica una información de n bits por muestra y una razón de información total $2Wn$ bits por segundo para una señal pasada por un filtro paso bajas, donde W es la frecuencia más alta contenida en la forma de onda.

Los niveles de amplitud discretos están representados por diferentes palabras binarias, por ejemplo, para una longitud de $n = 2$ bits se pueden representar cuatro niveles distintos utilizando las palabras codificadas 00, 01, 10, 11.

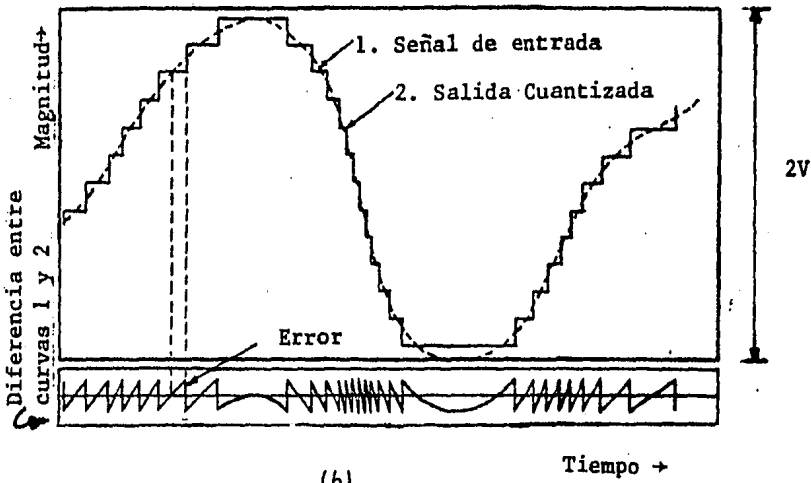
Para descodificar la señal, la palabra binaria se mapea en niveles de amplitud y la secuencia de pulsos es pasada por un filtro paso bajas cuya frecuencia de corte es W .

3.2 Cuantización Uniforme

En la fig 3.2.1 se ilustra el caso simple de un cuantizador uniforme, la forma de onda de la señal cuantizada y el error de cuantización:



(a)



(b)

Fig 3.2.1 El cuantizador uniforme. (a) Característica de un cuantizador uniforme. (b) Forma de onda de la señal cuantizada y el error de cuantización.

Denotando el tamaño del escalón del cuantizador, o el espaciamiento entre niveles como Δ . El número de niveles como N y si nuestra señal tiene una excursión de $2V$ volts o de $+V$ a $-V$ volts. El espaciamiento entre niveles adyacentes estará dado por:

$$\Delta = \frac{2V}{N} \quad 3.2.1$$

Las amplitudes cuantizadas estarán en $\pm \Delta/2, \pm \Delta/3, \dots, \pm (N - 1)/2$ y las muestras cuantizadas cubrirán un rango de:

$$A = (N - 1) \Delta \quad 3.2.2$$

Si al receptor llega una señal cuantizada A_j la señal original podía haber estado en el rango de $A_j + \Delta/2$ a $A_j - \Delta/2$ de donde podemos ver de la fig 3.2.2 que el error por cuantización o ruido de cuantización está limitado a $\pm \Delta/2$.

Si el número de niveles de cuantización es grande podemos asumir que el error de cuantización tiene la siguiente distribución uniforme:

$$p(\epsilon) = \frac{1}{\Delta} ; \quad -\frac{\Delta}{2} \leq \epsilon \leq \frac{\Delta}{2} \quad 3.2.3$$

Pero esto no se cumple si la señal satura al cuantizador.

Por ejemplo, en la realización del cuantizador de la fig 3.2.1, la salida del cuantizador se puede saturar a 5 volts, para entradas que excedan ese número y para el error de cuantización durante tal saturación sería una función de la entrada que aumentaría linealmente. Pero por el momento asumiremos que el cuantizador no se satura. Entonces utilizando la ecuación 3.2.3 podemos calcular el valor cuadrático medio del error debido a

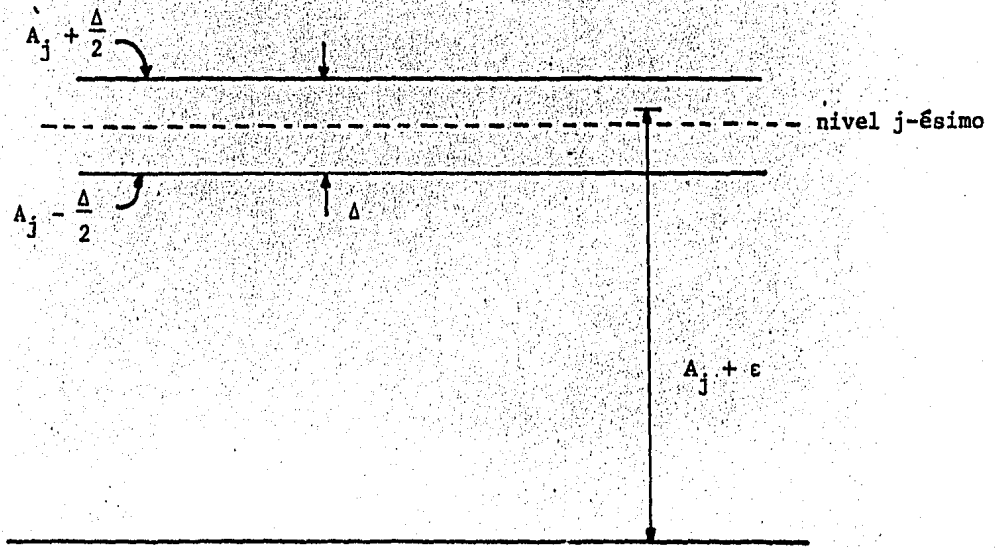


Fig 3.2.2 Límites del error por cuantización

la cuantización, para una distribución uniforme de la señal y con media nula, obteniendo lo siguiente:

$$\int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} \epsilon^2 p(\epsilon) d\epsilon = \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} \epsilon^2 \frac{1}{\Delta} d\epsilon = \frac{\Delta^2}{12} \quad 3.2.4$$

3.2.1 Señal a ruido de cuantización.

Introduciendo ahora la relación señal a ruido de cuantización (SNR), la cual es un criterio de evaluación de un cuantizador, definiendo primero la SNR en términos de la potencia media de la señal S.

$$S = \frac{(N^2 - 1)^2}{12} \quad 3.2.5$$

Relación señal a ruido para el valor pico de una señal:

$$V = \frac{\Delta N}{2} \quad 3.2.6$$

la relación de la señal V_{pico} al ruido rms será:

$$\text{SNR} = \frac{V}{\Delta/(2\sqrt{3})} = \sqrt{3} N \quad 3.2.7$$

y la razón de potencia correspondiente es:

$$\frac{S_0}{N_0} = 3N^2 \quad 3.2.8$$

o en decibeles:

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{dB} = 4,8 + 20 \log_{10} N \quad 3.2.9$$

de donde se puede ver que la relación de potencia se incrementa conforme aumenta el cuadrado del número de niveles.

En la tabla 3.2.1 se muestra el aumento de SNR conforme aumenta N y además se puede observar el crecimiento del ancho de banda relativo. Para calcular los valores de esta tabla se recurre al número de niveles de cuantización N, lo cual determina el número de bits necesarios para codificar la señal cuantizada:

$$N = n^m \quad 3.2.10$$

donde m es el número de pulsos del grupo de codificación y n el número de niveles de codificación. A partir de esta relación, se puede encontrar una nueva relación de la señal a ruido transformando las ecuaciones 3.2.8 y 3.2.10 obteniendo:

$$\frac{S_0}{N_0} = 3n^{2m} \quad 3.2.11$$

y

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{dB} = 4,8 + 20m \log_{10} n \quad 3.2.12$$

respectivamente.

En el caso particular de $n = 2$, código binario, obtenemos:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{dB} = 4.8 + 6m \quad 3.2.13$$

Como el ancho de banda es proporcional a m , la relación señal a ruido de salida se incrementa exponencialmente con el ancho de banda.

S_o/N_o , dB	N	Ancho de Banda Relativo
11	2	1
17	4	2
23	8	3
29	16	4
35	32	5
41	64	6
47	128	7

Tabla 3.2.1 Optimización de la Señal a Ruido con el aumento de niveles de cuantización.

3.3 Potencia promedio de una señal cuantizada uniformemente

Tomando el mismo valor de espaciamiento entre niveles de Δ volts, excursiones de la señal de $\pm V$ volts, la potencia promedio que se obtiene es:

$$S_o = \frac{1}{12} (N^2 - 1)\Delta^2 \quad 3.3.1$$

Y ya que el ruido es $\Delta^2/12$, la relación señal a ruido que se obtiene a la salida, SNR de la potencia promedio, es:

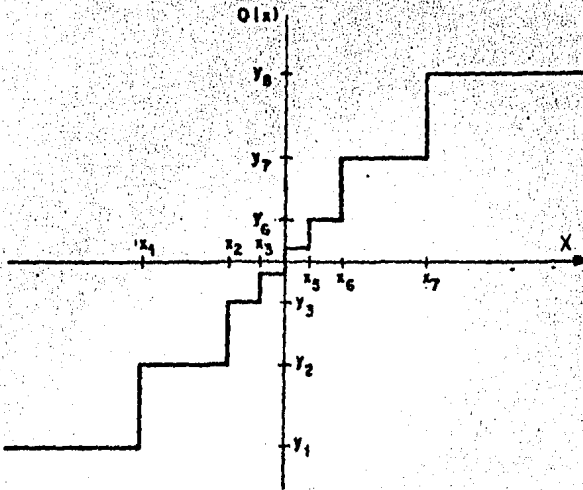
$$\frac{S_o}{N_o} = N^2 - 1 \quad 3.3.2$$

Para $N \gg 1$ el resultado obtenido difiere por una constante de relación de señal a ruido pico dada por la ecuación 3.2.8.

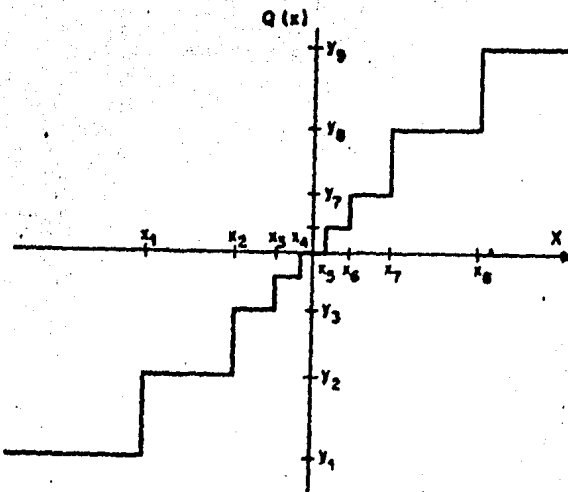
Por ejemplo, para un sistema de 128 niveles la SNR de cuantización es de 42 dB, por lo que el grupo de codificación binaria que se requiere es de siete bits, ya que $2^7 = 128$ y el ancho de banda es siete veces el que ocupaba la señal cuantizada originalmente.

3.4. Cuantizador no uniforme

El cuantizador no uniforme se caracteriza por el aumento del tamaño del escalón conforme nos alejamos de la media del cuantizador; la ventaja de tal cuantizador, como el que se muestra en la fig 3.4.1, es que, sin aumentar el número de niveles de cuantización y por lo tanto sin tener que aumentar también la razón de bits, uno puede permitir escalones grandes en los extremos del cuantizador que se encarguen de las posibles excursiones de la señal de voz en los rangos (relativamente infrecuentes) de gran amplitud. De la misma forma, para una cantidad dada de codificación sobre un rango dinámico específico



(a)



(b)

Fig 3.4.1 Característica de un cuantizador no uniforme
 a) con 8 niveles de cuantización,
 b) con 9 niveles de cuantización

de la señal, un cuantizador no lineal permite la reducción de la razón de bits. Por ejemplo, el cuantizador logarítmico de Smith, se puede diseñar para dar una cierta calidad de cuantización de voz con 128 niveles (7 bits por muestra) mientras que para un cuantizador uniforme se necesitan aproximadamente 11 bits por muestra para una realización similar.

El uso de un cuantizador no uniforme es equivalente a primero comprimir la señal, pasarla por un cuantizador uniforme y después expandir la salida del cuantizador; a este proceso se le conoce como "*Compansión*" (companding) y lo veremos con más detalle en el Cap. 4.

Panter y Dite demostraron la ventaja que tenía la cuantización no uniforme, la cual aumentaba el factor de cresta (la relación entre el valor pico y el valor rms) de la señal, e indicaron que el escoger el valor de μ implica una dependencia del valor de B ; es decir, que valores mayores de B llevan a valores mayores de μ o una mayor no uniformidad del cuantizador. Más recientemente, Paez y Glisson utilizaron la distribución gamma como un buen modelo para amplitudes de voz y obtuvieron el cuantizador no uniforme óptimo correspondiente. El término cuantizador óptimo se describirá en el Cap. 7, y por ahora nos limitaremos a decir que este término se refiere a la maximización de SNR del cuantizador.

La obtención de la relación SNR incluye los efectos por error de saturación, pero éstos se considerarán insignificantes en esta exposición. El cuantizador Paez-Glisson se ilustra mediante la tabla 3.3.1.

n	2		4		8		16		32	
	x _i	y _i	x _i	y _i	x _i	y _i	x _i	y _i	x _i	y _i
1	∞	0.577	1.205	0.302	0.504	0.149	0.229	0.072	0.101	0.033
2			∞	2.108	1.401	0.859	0.568	0.386	0.252	0.169
3					2.872	1.944	1.045	0.791	0.429	0.334
4					∞	3.799	1.823	1.300	0.830	0.523
5							2.372	1.945	0.857	0.737
6							3.407	3.798	1.111	0.876
7							8.050	4.015	1.397	1.245
8								6.085	1.720	1.546
9									2.089	1.892
10									2.517	2.287
11									3.022	2.747
12									3.633	3.298
13									4.404	3.970
14									3.444	4.238
15									7.046	8.050
16									∞	8.043
σ _X	0.8480		0.2325		0.0712		0.0196		0.0052	
SNR _{dB}	1.77		8.33		11.47		17.07		22.83	

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \sigma = 1$$

$$\text{Variancia} = 0.75/\lambda^2 = 1$$

Tabla 3.3.1 Cuantizadores óptimos para señales con densidad gamma; media cero y variancia $\sigma^2 = 1$.

Los valores de "x" definen los finales de los rangos de entrada al cuantizador, los valores de "y" corresponden a las salidas. Por ejemplo, en el cuantizador de 3 bits, las entradas entre 0.504 y 1.401 son cuantizadas a 0.859 y todas las entradas que excedan el valor de 2.872 son cuantizadas a 3.799.

La obtención del cuantizador se basa en una iteración entre los rangos de entradas y los niveles de salida, como se sugiere en la teoría general debida a Max. Por ejemplo, Max obtuvo la siguiente maximización de SNR para cuantizadores de 1, 2, 3 y 4 bits con entradas gaussianas, los cuales son:

Δ_{opt}	=	$K(B) \cdot X_{rms}$
$K(1)$	=	1.596
$K(2)$	=	0.996
$K(3)$	=	0.586
$K(4)$	=	0.335

Una fórmula aproximada importante para el error medio cuadrático en los cuantizadores no uniformes se puede obtener basándose en el modelo anterior de cuantización no uniforme.

Para un N grande, podemos aproximar la curva de $F(y)$ en el j -ésimo intervalo de cuantización por un segmento de recta con pendiente $F'(y_j)$, la derivada de $F(y)$ evaluada en y_j , donde y_j es el punto de salida del cuantizador no uniforme equivalente.

Entonces:

$$F'(y_j) \Delta_j = F(x_j) - F(x_{j-1}) = \frac{2V}{N}$$

De tal forma definimos la pendiente de la curva del compresor:

$$F'(x) = g(x)$$

La señal de salida $F(x)$ tiene valores igualmente espaciados. Debido al compresor, este espaciamiento uniforme se proyecta en un espaciamiento no uniforme en los intervalos de decisión de la entrada Δ_j .

$$\Delta_j = \frac{2V}{N} \frac{1}{F'(x)} = \frac{a}{F'(x)}$$

Tenemos que la distorsión es:

$$\sigma^2 = \frac{1}{12} E \{ \Delta_j^2 \} = \frac{\Delta^2}{12} E \left\{ \left| \frac{1}{g(x)} \right|^2 \right\}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12} \int_{-V}^V (g(x))^{-2} p(x) dx$$

donde Δ es el tamaño del escalón

$$\Delta = \frac{2V}{N}$$

σ^2 es la variancia y $p(x)$ es la densidad de probabilidad de la señal de entrada.

$$\sigma^2 = \frac{2}{3} \frac{V^2}{N^2} \int_0^V (g(x))^{-2} p(x) dx$$

Esta expresión, debida a Bennett, está basada en la suposición de que el número de niveles N es muy grande y de que la distorsión por saturación es despreciable.

3.5 Cuantizador de Memoria Cero

El cuantizador más simple y más común, es el cuantizador de memoria cero, el cuál se caracteriza porque la salida del cuantizador solo depende de la presente muestra de entrada, es

decir, que las muestras anteriores y posteriores no tienen efecto en el valor de la salida.

Un cuantizador de memoria cero de N niveles se puede definir especificando un conjunto de $N + 1$ niveles de decisión X_1, X_2, \dots, X_N y un conjunto de N puntos de salida Y_1, Y_2, \dots, Y_N . Donde un valor muestreado X a la entrada, cae en el j -ésimo intervalo dado por:

$$R_j = \{X_{j-1} < X < X_j\}$$

Y el cuantizador produce el valor de salida Y_j . El cual es un valor aproximado a la muestra en el intervalo R_j .

Los valores extremos del cuantizador X_0 y X_N son los valores menor y mayor respectivamente, que las muestras de entrada pueden tener. Pero frecuentemente los valores muestreados no están acotados y por lo tanto debemos asumir que $X_0 = -\infty$ y $X_N = +\infty$ y los valores de salida si están acotados, o sea que tienen valores finitos. Si $N = 2^m$ entonces existe solo una palabra binaria de n bits para cada nivel de salida, dando lugar a un cuantizador de n bits.

Un cuantizador de memoria cero o cuantizador sin memoria se puede llevar a cabo con la utilización de un cuantizador uniforme o con un no uniforme.

3.6 Cuantización con memoria o por bloques

La cuantización con memoria o secuencial, más comúnmente conocida como cuantización por bloques o vectorial, es más sofisticada y más complicada en lo que a su teoría se refiere comparándola con la cuantización simple (la cuantización de memoria cero).

La cuantización por bloques es más común para la digitalización de imágenes que para la digitalización de voz.

En la cuantización por bloques, el valor de la salida si va a depender de los valores anteriores y/o posteriores de las muestras de entrada, ya que en este caso el cuantizador mira un grupo o bloque de K muestras de entrada (x_1, x_2, \dots, x_K) simultáneamente, el cual puede ser considerado como un vector de dimensión K , y el cuantizador produce un bloque de valores de salida $(Y_j = y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k})$ escogido de un conjunto finito de N posibles bloques de salida Y_1, Y_2, \dots, Y_N , aproximando de esta forma las muestras de entrada correspondientes.

Por otro lado, para un número dado de bits por muestra, los cuales representen los valores de salida, al utilizar la cuantización por bloques se obtiene una mejor calidad de la aproximación. Además si las muestras de entrada son estadísticamente independientes se pueden tener ventajas al utilizar la cuantización por bloques.

Una media conveniente de la distorsión que puede introducir un cuantizador por bloques es:

$$D = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \bar{e}_j^2$$

donde \bar{e}_j^2 es el error cuadrático medio de la j -ésima muestra y K el número de dimensiones.

La realización de la cuantización por bloques se podría comparar con la cuantización de memoria-cero al examinar que tanto depende la razón de bits o el número promedio de bits por muestra, $B = \frac{\log_2 N}{K}$, de la distorsión D , la distorsión de la muestra. En una forma más clara, conforme la longitud del bloque (K) aumenta, la razón de bits mínima para una distorsión dada disminuye.

Una forma simple de reducir la razón de bits, esquivando la complejidad de la cuantización vectorial, es por medio de la codificación de la entropía de los símbolos de salida sucesivos de un cuantizador de memoria cero.

Como habíamos visto anteriormente, la salida de un cuantizador de memoria cero de N niveles es una de los N símbolos diferentes Y_1, Y_2, \dots, Y_N , cada uno con una probabilidad de ocurrencia p_1, p_2, \dots, p_N . En lugar de transmitir $\log_2 N$ bits por muestra (o el entero mayor más cercano si $\log_2 N$ no es entero) para identificación de la entropía en la cuál se utilizan códigos de longitud variable, tales como el código de Huffman, el cuál asigna una palabra con más bits a un símbolo de baja probabilidad y palabras con menos bit a los símbolos con mayor probabilidad. El promedio de bits por muestra que resulta de esta codificación se aproxima a la entropía de la salida del cuantizador,

$$H = - \sum_{j=1}^N p_j \log_2 p_j$$

Este esquema requiere "Buffering" para producir un flujo de bits de salida estable.

En general, los cuantizadores óptimos no resultan de igual probabilidad para los símbolos de salida, en cuyos casos H es siempre menor que $\log_2 N$. Por ejemplo, un cuantizador óptimo de 16 puntos para muestras gaussianas produce símbolos de salida con entropía de 4.73 $\frac{\text{bits}}{\text{simb}}$ comparado con los 5 bits por símbolo que se necesitan para códigos con longitud constante. Una vez que se va a utilizar la codificación de la entropía, la teoría de la optimización ya no es relevante.

Es más apropiado encontrar una curva de compresor que nos de el error cuadrático medio mínimo para una restricción de la entropía de salida en lugar del número de puntos de salida.

4. COMPANSION

Anteriormente ya se habfa hablado de la técnica de compansión (companding); ahora se verá con más detalle dicha técnica.

4.1 Compansores

Los compansores primero comprimen el rango dinámico de las señales de voz a transmitir, después vuelven a expandir el mismo rango a la escala original. La ventaja es que el rango dinámico es reducido; por lo que la señal es trasladada arriba del nivel del ruido ambiental. Esto da como resultado una transmisión de voz con menos ruido. Este tipo de compansor es conocido como Compansor Silábico.

Una relación de compresión de 2 con una relación de expansión correspondiente de 1:2 da una realización satisfactoria utilizada en la mayoría de los circuitos telefónicos. Esto quiere decir que la energía de la voz que viaja por el circuito entre el compresor y el expansor, tendrá un rango de intensidad de la mitad de su valor original. Un rango de compansión de 50 a 60 dB es comúnmente suficiente para evitar la distorsión y dar la óptima relación de señal a ruido. La compresión y expansión de la energía de la voz en el compansor ocurre alrededor de un Punto Focal conocido como nivel no afectado. El punto focal es aquel comprendido en el rango de compansión que no es afectado por acción del compansor, de tal forma que el nivel de energía en el punto focal, pasa por el compresor y expansor con cero pérdida o ganancia de energía.

En la fig 4.1.1 Punto Focal se indica con una línea punteada horizontal.

La operación de un compansor silábico es la siguiente:

Asumiendo una intensidad de ruido de -51 dBm a la entrada del receptor y que la intensidad de la señal varía entre +5 dBm y -20 dBm y las pérdidas en la línea de 30 dB. Sin un compansor, las señales de baja intensidad alcanzan un nivel de -50 dBm a la entrada del receptor, un dB arriba del nivel del ruido. La persona que esté escuchando tendrá solo 1 dB de ruido abajo del nivel de intensidad de voz y para la voz inteligible, la potencia del ruido debe estar 20 dB abajo de la señal de voz más débil.

Utilizando compansión, la señal de voz más débil sale del

compresor a -10 dBm y llega a la entrada del receptor a -40 dBm, con un nivel de ruido de -51 dBm. Después de una amplificación de 30 dB, la señal entra al expansor con una intensidad de -10 dBm y el ruido con una intensidad de -21 dBm. Después de la expansión, los niveles de la señal son atenuados inversamente proporcional a su potencia; la débil pasa a ser de 20 dBm y el ruido de -47 dBm de esta manera, el margen entre la señal más débil y el ruido es aumentado a 27 dB.

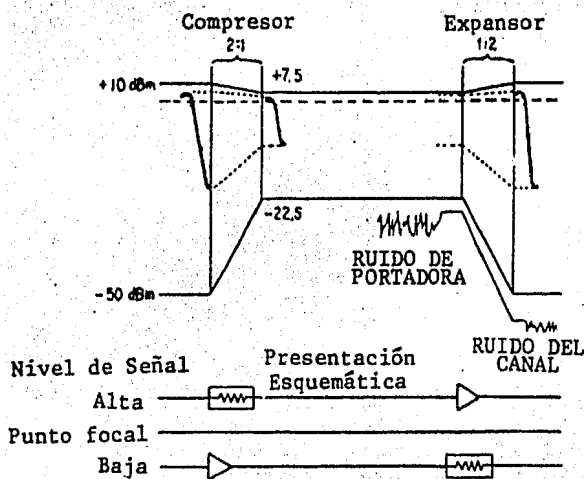


Fig 4.1.1 Operación de un Compresor

Este tipo de compansores es utilizado en circuitos de voz, pero no son recomendados para circuitos de transmisión de datos ya que ofrece poca o ninguna mejora de influencia por ruido para señales de datos.

Otro tipo de compansor, conocido como "compansor instantáneo", se utiliza para reducir el ruido de cuantización en PCM. En este método, el rango de amplitud de las muestras pulso es comprimido antes de la cuantización uniforme y después es expandido al rango normal en el extremo receptor del circuito.

Hay que notar que el compansor silábico responde a la envolvente de las señales de voz analógicas, mientras que el compansor instantáneo responde a las muestras de "PAM" de las señales analógicas. La compresión de la señal modifica la distribución normal de las amplitudes de voz al dar más ganancia a las señales débiles que a las fuertes. Utilizando ciertas características de compresión para reducir los rangos de voz de 60dB a 36dB aproximadamente y también que varíe logarítmicamente con la amplitud de la señal, el número de escalones de cuantización se puede reducir, mientras se mantiene el mismo ruido de cuantización.

4.2 Cuantización Robusta

Los cuantizadores robustos emplean ampliamente la técnica de compansión como la descrita en la fig 4,2,1.a.

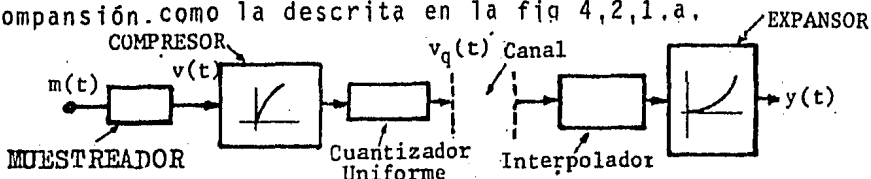


Fig 4.2.1.a El proceso de compansión

En ciertas aplicaciones de cuantizaciones, principalmente en transmisión de voz, el mismo cuantizador debe acomodar señales que tienen niveles de potencia que varían ampliamente. El uso de cuantizadores "Robustos", los cuales son relativamente insensibles a los cambios de densidad de probabilidad de las muestras de entrada, han llegado a tener una gran importancia práctica.

Para obtener una relación robusta, la relación señal a ruido del cuantizador deberá ser idealmente de una función de densidad de probabilidad particular de la señal de entrada. Si la pendiente de la curva del compresor se escogiera como:

$$g(x) = \frac{V}{b|x|} \quad 4.2.1$$

entonces la ecuación de Bennett se reduce a:

$$D = \frac{b^2}{3N^2} \sigma^2 \quad 4.2.2$$

De tal forma que la relación señal a ruido se reduce a la constante $3N^2/b^2$, la cual es independiente de $p(x)$.

Integrando la ec 4.2.1, resulta:

$$F(x) = V + C \log \left(\frac{x}{V} \right) \quad \text{para } x > 0 \quad 4.2.3$$

$$c = \text{cte}$$

lo cual demuestra que una curva de compresor logarítmica daría la realización robusta deseada. Por supuesto que la ecuación de Bennett desprecia el ruido de saturación de tal forma que la relación señal a ruido no permanece constante sino que disminu-

ye cuando el nivel de potencia de entrada es suficientemente grande, en el rango de la saturación.

También la curva del compresor de hecho no es realizable ya que $F(0)$ no es finita. Para vencer esta dificultad, se usa una curva de compresor modificada la cual se comporta bien para valores pequeños de x y continúa con el comportamiento logarítmico para otros valores.

Una característica de compresor para la digitalización de voz, es la curva de la ley μ y es muy usada; está dada por:

$$|v_2| = \frac{\log(1 + \mu |v_1|)}{\log(1 + \mu)}$$

donde v_1 y v_2 son voltajes de entrada y salida normalizados y μ es una constante positiva. En la fig 4.2.1 se muestra la característica de la ley μ para diferentes valores de μ .

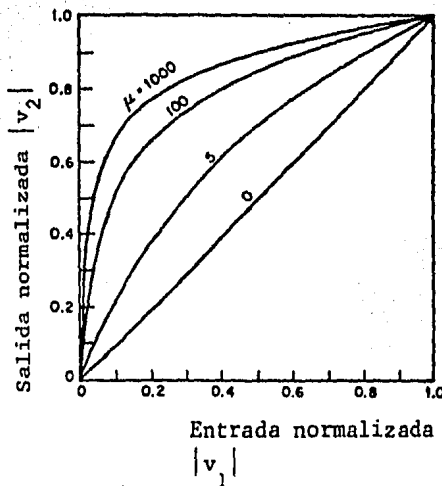


Fig 4.2.1 Característica de la ley μ para diferentes valores de μ .

Como se había visto anteriormente, la cuantización uniforme corresponde al caso cuando $\mu = 0$. Para un valor dado de μ , la pendiente recíproca de la curva de compresión, la cual define los escalones de cuantización, está dada por:

$$\frac{d|v_1|}{d|v_2|} = \frac{\log(1 + \mu)}{\mu} (1 + \mu|v_1|)$$

Por lo tanto, podemos ver que la ley μ no es estrictamente logarítmica ni estrictamente lineal, ya que para valores de $\mu|v_1| \ll 1$ es aproximadamente lineal y para $\mu \gg 1$ y $\mu|v_1| \gg 1$, $|v_2|$ se aproxima a la forma de la ec 4.2.3 (forma logarítmica). De la ec. de Bennett el ruido de cuantización granular medio cuadrático puede calcularse, resultando:

$$\frac{D}{\sigma^2} = \frac{[\log(1 + \mu)]^2}{3N^2} \left\{ 1 + \frac{2\alpha y}{\mu} + \left(\frac{y}{\mu}\right)^2 \right\}$$

donde α es la razón del valor absoluto medio para el valor rms de las muestras de entrada y "y" es el factor de carga.

Los valores típicos de μ son: $\mu = 100$ para 7-bits y $\mu = 225$ para 8 bits, esto, para cuantizadores de voz.

Los sistemas de PCM de los Estados Unidos, Canadá y Japón utilizan la ley μ de compansión.

Otra característica logarítmica robusta es la debida a Cattermole, la cual es la ley -A de compansión, donde

$$|v_2| = \begin{cases} \frac{A|v_1|}{1 + \log A} & 0 \leq |v_1| \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1 + \log(A|v_1|)}{1 + \log A} & \frac{1}{A} \leq |v_1| \leq 1 \end{cases}$$

En la fig 4.2.2 se muestra la característica de la ley "A" para diferentes valores de A.

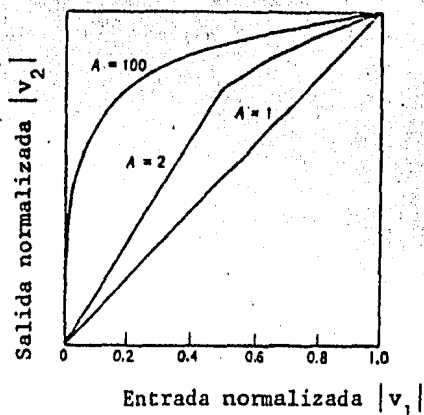


Fig 4.2.2 Característica de la ley-A para diferentes valores de A

Un valor típico de "A" es 87.6 para un cuantizador de voz de 7 bits.

El caso de un cuantizador uniforme corresponde al valor de $A = 1$. La pendiente recíproca de esta curva de compresión es

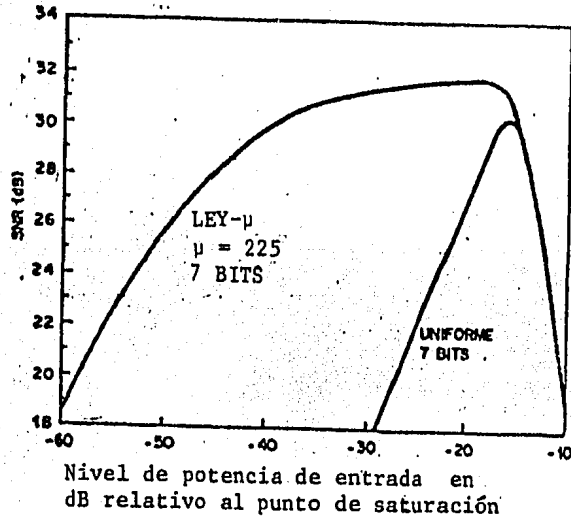


Fig 4.2.4 Relación señal a ruido contra nivel de potencia de entrada para cuantizador uniforme y para cuantizador utilizando la ley- μ de compresión, ambos teniendo 7 bit por muestra (128 niveles)

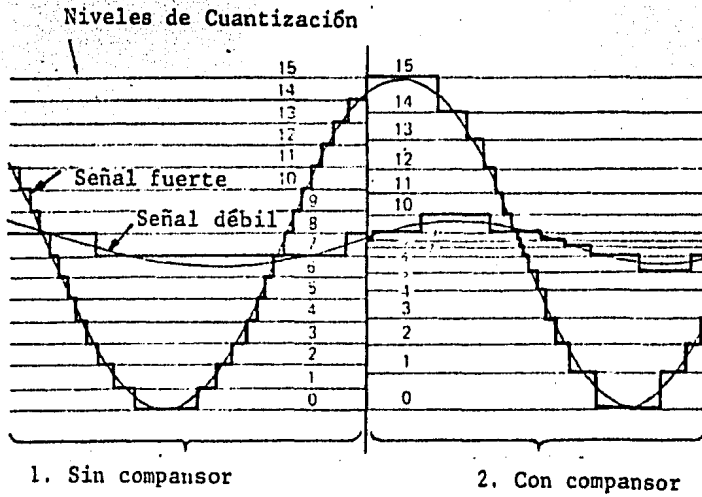


Fig 4.2.4' Diferencia de la utilización de una cuantización simple y el empleo de un compansor

$$\frac{d|v_1|}{d|v_2|} = \begin{cases} \frac{1 + \log A}{A} & 0 \leq v_1 \leq \frac{1}{A} \\ (1 + \log A)|v_1| & \frac{1}{A} \leq v_1 \leq 1 \end{cases}$$

por eso, los escalones de cuantización sobre un segmento de línea central, el cual tiene un efecto dominante sobre señales pequeñas, son disminuidos por un factor $\frac{A}{(1 + \log A)}$, lo que representa un valor típico de aproximadamente 25dB en la práctica, comparado con la cuantización uniforme.

En la fig 4.2.4', también se puede observar la mejor aproximación que se tiene al emplear un compansor, a diferencia del empleo de una cuantización uniforme única. Se puede ver que en la parte izquierda (donde no se utiliza compansión) la relación de señal a ruido de cuantización es baja para la señal débil y en el lado derecho la relación es mayor y para señales fuertes la diferencia es menor.

La característica de la ley $-A$ es usada en sistemas telefónicos de PCM en Europa.

Las leyes " μ " y " A " tienen la calidad robusta deseada y pueden llevar a cabo más o menos las mismas realizaciones.

Y en la fig 4.2.4 se puede ver la ventaja que tiene la utilización de la cuantización robusta en la relación $\frac{S}{N}$ para un nivel de potencia de entrada, con respecto a la cuantización uniforme tomando en cuenta para ambos casos 128 niveles de cuantización.

Para un amplio rango de niveles de potencia, se mantiene una alta relación $\frac{S}{N}$ en la ley $-\mu$, mientras que para la cuantización uniforme la relación $\frac{S}{N}$ cae rápidamente con los niveles de potencia que disminuyen. Para poder tener la misma calidad sobre un rango significativo, se debe usar un cuantizador uniforme de 11 bits, por lo que con la ley $-\mu$ se ahorran 4 bits por muestra.

En la práctica, los compansores son diseñados como aproximaciones piezo-lineales para una característica deseada.

Estas leyes de compansión segmentadas son implementadas convenientemente con circuitería digital. La palabra binaria codificada como se verá a continuación, tiene ciertos bits que identifican a que segmento pertenece la muestra analógica y los bits restantes identifican que nivel dentro del segmento representa la muestra analógica.

En los sistemas de PCM actuales, los circuitos que llevan a cabo el proceso de compansión, no proporcionan una curva segmentada equivalente, donde cada segmento es lineal. Por supuesto, que entre más segmentos tenga la curva, más se aproximará a una verdadera curva logarítmica, como se muestra en la fig 4.2.5.

Si se implementara un compresor con la ley μ con una aproximación de 7 segmentos lineales (No 8, ya que los segmentos que pasan por el origen son colineales y se cuentan como uno) la curva sería la mostrada en la fig 4.2.5.

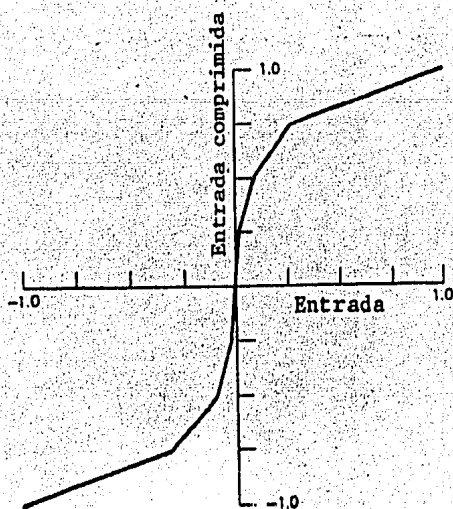


Fig 4.2.5 Aproximación de siete segmentos de la curva logarítmica para la ley- μ ($\mu = 100$).

Para señales de amplitud baja utilizando la compresión, se tiene una mejor relación SNR de aproximadamente:

para la Ley A - 24dB

para la Ley μ - 30dB

esto es utilizando un código para 7 niveles.

La codificación en sistemas de PCM es binaria.

En la fig 4.2.6 se tiene una aproximación segmentada de la

ley "A" que se utiliza en sistemas PCM de 24 canales la cual fué desarrollada por la compañía inglesa STC (Standard Telephone and Cables).

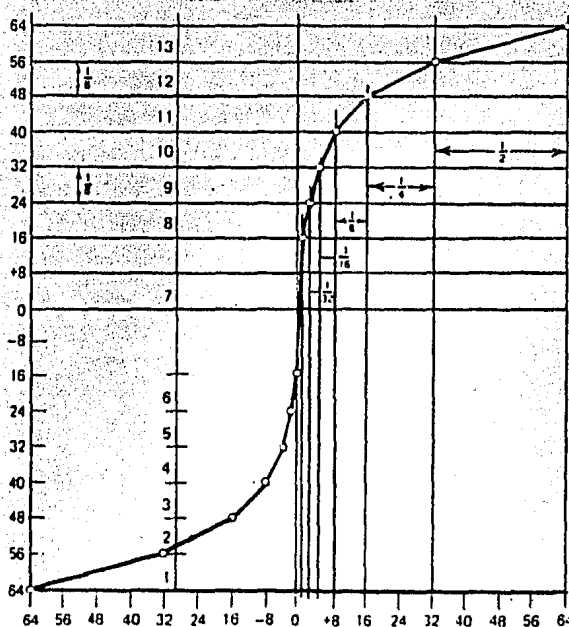


Fig. 4.2.6 Aproximación a 13 segmentos de la curva de la Ley-A, como la usada en el sistema STC de 24 canales. La abscisa representa los niveles de la señal cuantizada.

En esta aproximación se tienen 13 segmentos. En este sistema, 6 bits identifican el nivel de cuantización específico y un séptimo bit identifica si es positivo o negativo. Al escalón más negativo, se le asigna el código 0000000 y al escalón más

positivo el código 111111, con lo cual podemos identificar 128 niveles de cuantización 64 arriba del origen y 64 abajo.

La codificación para un sistema de este tipo se puede ver en la fig 4.2.7.

Si el primer elemento (bit) del código es 1, indica que se trata de un nivel de cuantización positivo (arriba del origen). Los siguientes tres bits identifican el segmento, por ejemplo, considerando que el quinto segmento positivo está dado por 1101xxxx en la fig 4.2.7.

Nuevamente el primer bit (El 1) indica que es un nivel positivo (arriba del eje horizontal), los siguientes tres elementos indican el quinto nivel, es decir:

- 0 - 1000 y 1001
- 1 - 1010
- 2 - 1011
- 3 - 1100
- 4 - 1101
- 5 - 1110
- etc.

En la fig 4.2.8 se muestra un esquema de la cuantización uniforme y subsecuentemente el código binario para el segmento 4; este esquema presenta la codificación final del segmento, el cual es uniforme, dando 16 ($2^4 = 16$) escalones de cuantización a codificar.

El sistema norteamericano de DS-1 con PCM utiliza una aproximación de 15 segmentos de la ley logarítmica. Una vez más te

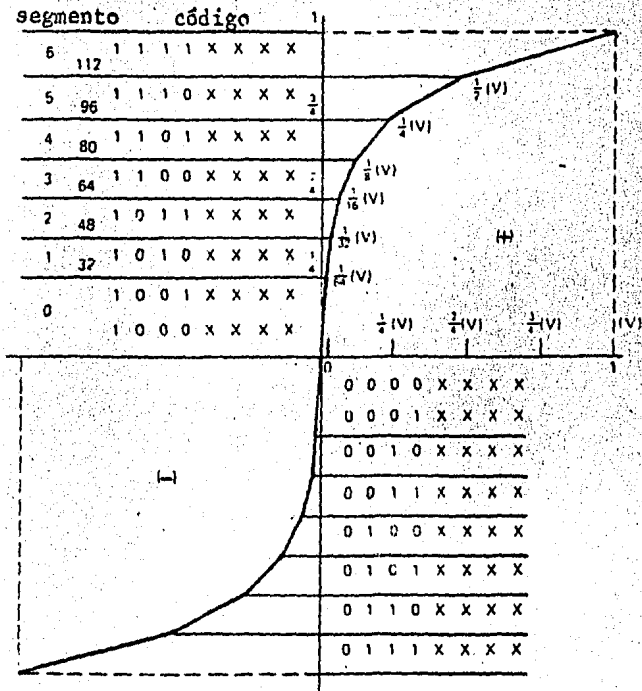


Fig 4.2.7 Cuantización y Codificación utilizada en el sistema PCM de CEPT 30 + 2.

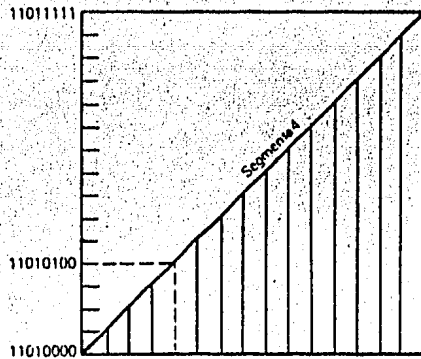


Fig 4.2.8 Sistema PCM de CEPT 30 + 2, codificación del segmento 4 (positivo).

nemos 16 segmentos, pero como vimos anteriormente, los segmentos que pasan por el origen son colineales y se cuentan por uno.

La cuantización del sistema DS-1 se muestra en la fig 4.2.9 para la parte positiva de la curva.

El 5º segmento representa los escalones de cuantización 64 a 80, como se muestra en la figura antes mencionada.

La fig 4.2.7 muestra la codificación de DS-1 y un 1 ó un 0 indican si se trata de un escalón arriba o abajo del eje horizontal.

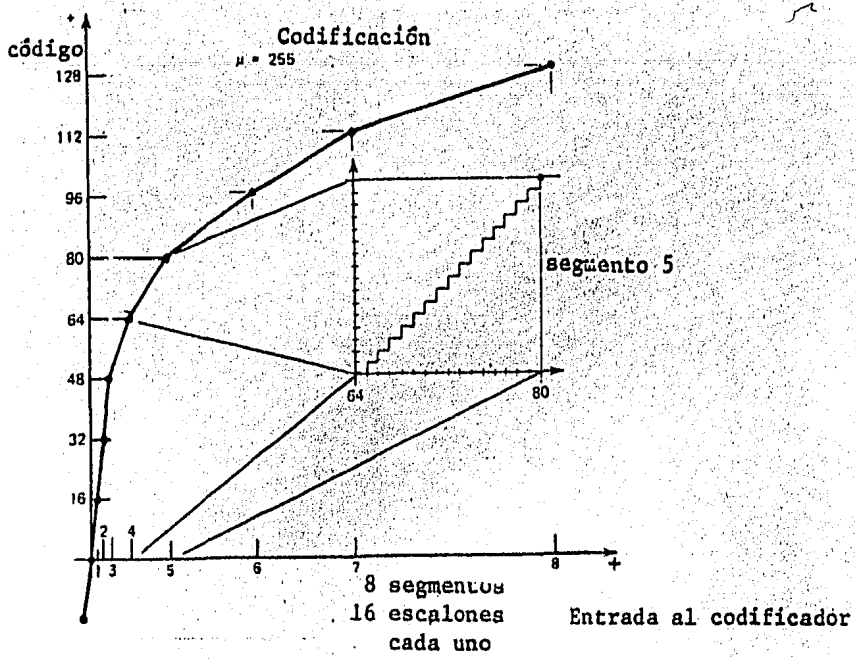


Fig 4.2.9 Parte positiva de la aproximación para la curva de compresión de la ley- μ .

Los siguientes tres elementos identifican el segmento y los últimos cuatro elementos identifican el nivel de cuantización dentro de ese segmento.

5. CUANTIZACIÓN ADAPTIVA

5.1 *El Cuantizador Adaptivo.*

Esta técnica de cuantización se ha estudiado más recientemente y presumiblemente es una forma más flexible de acoplar el tamaño del escalón del cuantizador con la variancia de la señal de entrada. Aunque en esta técnica se emplea un cuantizador con memoria, lo que se pretende es trabajar con un cuantizador lo más simple posible, el cual podría ser uniforme, pero modificando el tamaño del escalón para cada nueva entrada por un factor que depende de los niveles

que ocuparon las muestras previas. El sistema opera con una palabra de memoria en la forma siguiente: designado la salida de un cuantizador uniforme con codificación de B-BITS por nivel como,

$$Y_r = H_r \frac{\Delta_r}{2} \quad 5.1.1.$$

donde $\pm H_r = 1, 3, 5, \dots, 2^B - 1$ ($\Delta_r > 0, B > 2$) y Δ_r el tamaño del escalón.

El tamaño del escalón Δ_{r+1} se escoge ahora del tamaño del escalón anterior multiplicado por una función invariante con el tiempo de la magnitud de $|H_r|$, es decir,

$$\Delta_{r+1} = \Delta_r M(|H_r|) \quad 5.1.2$$

Cuando la función de multiplicación M es diseñada en forma apropiada, la lógica de adaptación (5.1.2) sirve para emparejar el tamaño del escalón con el tamaño de la muestra, para una estimación actualizada de la variancia de la señal.

En la fig 5.1.1 se muestra la característica de un cuantizador adaptivo de 3 bits, donde se pueden observar los ocho valores posibles de salida de codificador (de 000 a 111) y los correspondientes multiplicadores M del tamaño del escalón. Hay que notar que el valor de M depende de la magnitud de la última salida de codificador y no del signo

de la salida, lo cual se debe a que la función de densidad de probabilidad $p(x)$ se espera que sea simétrica con respecto a la media de valor cero.

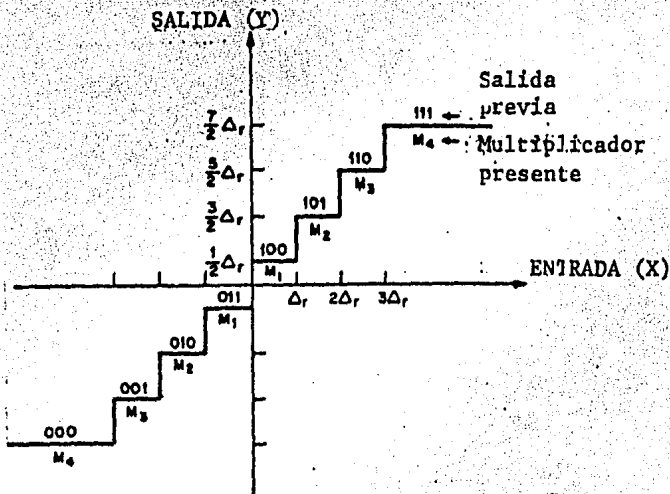


Fig 5.1.1 Cuantización Adaptiva con memoria de una palabra

En la fig 5.1.2 se muestran histogramas de los tamaños de escalón encontrados en una simulación de un cuantizador de 4 bits con una señal de distribución Gaussiana a la entrada. Los multiplicadores de tamaño del escalón se escogieron de tal forma que maximizarán la relación señal a ruido.

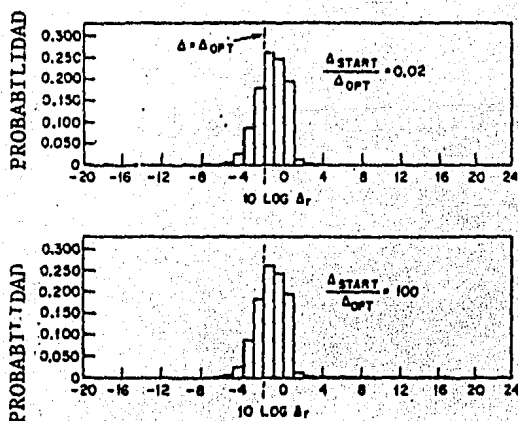


Fig 5.1.2. Histograma de los tamaños de escalón en Cuantización Adaptiva para una entrada con distribución Gauss-Markov; $B = 3$, $C = 0.5$

1

En la fig 5.1.2 también se muestra como estos multiplicadores mantienen la variable Δ en la región centrada en Δ_{opt} , el tamaño óptimo del escalón para un cuantizador no adaptivo. En la fig.5.1.3 se describe la característica de compansión de un cuantizador adaptivo para el ejemplo de 4-bits por muestra.

Las cantidades $\Delta_{m\acute{a}x}$, y $\Delta_{m\acute{i}n}$, son restricciones prácticas en la lógica de adaptación (5.1.2) y éstas determinan, por medio de la relación R , el rango dinámico del cuantiza-

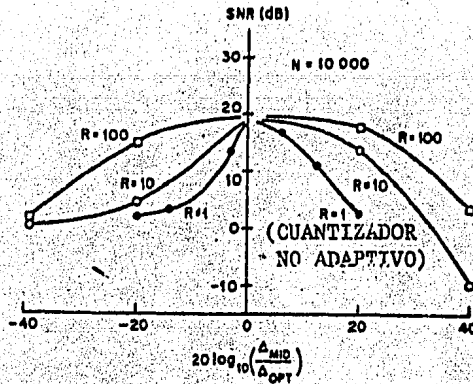


Fig 5.1.3 Características de Compensación de un cuantizador Adaptivo. $B = 4$, $C_1 = 0.5$

$$\Delta_{mid} = \left[\Delta_{min} - \Delta_{max} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad R = \frac{\Delta_{max}}{\Delta_{min}}$$

dor adaptivo. El rango dinámico es el rango de variancia de la entrada, el cual puede ser manejado por el cuantizador de igual forma, el rango de Δ_{mid} es aquél para el cual una señal de entrada dada se puede tolerar una realización (SNR) mínima especificada. Hay que notar que para el ejemplo de la fig 5.1.3, la ventaja de la adaptación es más bien en el aumento del rango dinámico que en el aumento del valor pico de la SNR.

Las adaptaciones del tamaño del escalón dan ganancias considerables en la relación señal a ruido cuando la correlación entre muestras adyacentes se aproxima a la unidad.

6. CUANTIZACION VECTORIAL

Ordinariamente, la cuantización escalar es una operación sobre el valor de una muestra simple de una señal analógica. En la cuantización vectorial, también conocida como cuantización multidimensional, un conjunto ordenado de K muestras (un vector de dimensión K en el espacio Euclídiano) es mapeado a un vector representativo de un conjunto finito.

6.1. *El Cuantizador Vectorial*

Un cuantizador puede ser modelado por un sistema compuesto por un codificador y un decodificador. El codificador

identifica en que región del espacio está situado el vector de entrada y le asigna una palabra de código correspondiente.

El codificador está definido esencialmente por una partición del espacio de dimensión K o "puntos" en un número finito de regiones. Por cierto que la geometría de esa partición es de fundamental interés en la teoría de la cuantización óptima.

La estructura básica de un cuantizador está descrita en términos de la partición y del conjunto de puntos de salida.

A continuación se describen las condiciones que deben cumplir las particiones para que la cuantización sea óptima.

Sea X una variable aleatoria distribuida continuamente en R^k (Espacio Euclidiano de dimensión K) con una función de densidad de probabilidad especificada.

Un cuantizador es óptimo con respecto a la variable aleatoria X si minimiza la distancia Euclidiana cuadrática media entre X y $Q(X)$:

$$e = E\|x - Q^*(x)\|^2 \leq E\|x - Q(x)\|^2 \quad 6.1.1$$

esto es, que el error sea menor o igual que el de cualquier otro cuantizador.

Asociada con cada uno de los N puntos de salida del cuantizador está una partición: R_1, R_2, \dots, R_n .

Un cuantizador se puede definir en forma única por el conjunto de puntos de salida y su correspondiente partición $\{R_i\}$.

Para una óptima cuantización, la partición debe satisfacer:

$$R_i \supset \{x \in R^k : \|x - y_i\| < \|x - y_j\| \quad \forall j \neq i\} \quad 6.1.2$$

Esto es, que todo punto interno de la partición R_i debe estar "más cerca" de su punto de salida correspondiente y_i que de cualquier otro punto de salida y_j .

Esta partición es la llamada del "vecino más cercano" (nearest neighbor), también conocida como la partición de Voronoi. Las regiones o celdas son conocidas como celdas de Voronoi o de Dirichlet.

A continuación se describen algunos conceptos para definir el entorno de la celda Voronoi como una región particular de partición.

El espacio medio se define por la relación:

$$H_{ij} = \{x: \|x - y_i\| \leq \|x - y_j\|\} \quad 6.1.3.$$

El espacio medio se compone de todos los puntos que se encuentran más cerca de y_i que de y_j .

El conjunto de puntos que se encuentran a la misma distancia de y_i que de y_j se le conoce como hiperplano (L_{ij}).

$$L_{ij} = \{x: \|x - y_i\| = \|x - y_j\|\} \quad 6.1.4$$

para $j = 1, 2, 3, \dots, N$

$j \neq i$

Entonces la celda Voronoi V_i puede ser descrita como la intersección de los espacios medios.

$$V_i = \bigcap_{j \neq i} H_{ij} \quad 6.1.5$$

Cálculo del error en la cuantización vectorial.

En 1948, W. R. Bennet obtuvo una expresión para calcular el error en la cuantización escalar, en la que se emplea el modelo del compresor para la cuantización no uniforme.

, En la obtención de la fórmula se asume que el número de niveles es grande y que la distorsión por saturación es insignificante. Gersho extrapoló la expresión por métodos heurísticos para obtener una expresión para la mínima distorsión obtenible en un proceso de cuantización vectorial de dimensión K .

En el caso unidimensional, la integral de Bennet es derivada, separando la descripción del cuantizador en dos aspectos: un cuantizador uniforme que es óptimo para la función de densidad uniforme y la función de la pendiente del compresor que determina como los puntos de salida del cuantizador uniforme deben ser redistribuidos tomando en cuenta la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria a ser cuantizada.

La integral de Bennet puede ser generalizada considerando primeramente el cuantizador óptimo para una variable aleatoria de dimensión k uniformemente distribuida y considerando después el efecto de una distribución no uniforme de los puntos de salida en la distorsión del cuantizador. En el caso multidimensional, decir distribución uniforme significa que la densidad de probabilidad se encuentra uniformemente distribuida en un hipercubo de dimensión k y de volumen unitario.

Un cuantizador óptimo que minimice la distorsión tiene una partición de Dirichlet. En general, cada región limitada de Dirichlet es un politopo (polígono de K dimensiones, limitado por segmentos de hiperplanos de dimensión $K - 1$).

El centroide \hat{y} de un politopo convexo H en el espacio R^k es el valor de y que minimiza la integral,

$$\int_H ||x - y||^r dx \quad 6.1.6$$

Para $r = 2$, y coincide con la definición usual para el centroide de un cuerpo con distribución de masa uniforme. Sin embargo, no todos los puntos que generan una partición de Dirichlet son necesariamente el centroide de sus respectivas regiones.

Un ejemplo de una partición de Dirichlet en el plano se muestra en la fig 6.1.1.

Definiendo la inercia normalizada $I'(H)$ de un politopo H como:

$$I(H) = \int_H \frac{||x - \hat{x}||^r}{|V(H)|^{1 + \frac{r}{K}}} dx \quad 6.1.7$$

donde \hat{x} es el centroide de H y $V(H)$ es el volumen k -dimensional de H .

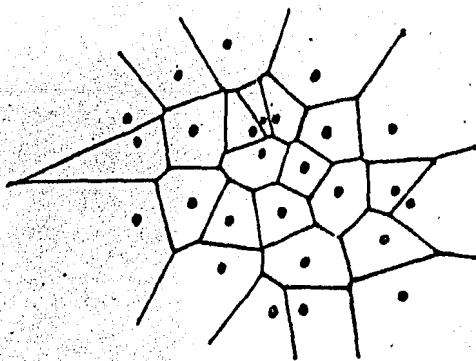


Fig 6.1.1 Partición de Dirichlet

Gershgorin define además el coeficiente de cuantización:

$$C(k, r) = \frac{1}{K} \inf_{H \in H_k} I(H)$$

6.1.8

$$H \in H_k$$

Un polítopo óptimo H^* es un polítopo admisible que tiene mínima inercia de todos los polítopos admisibles con el mismo volúmen. De aquí que:

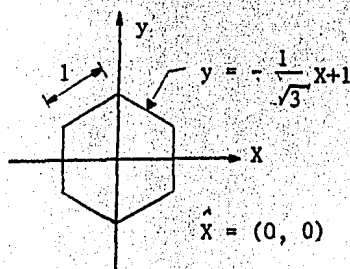
$$I(H^*) = kC(k, r)$$

6.1.9

En R^1 el polítopo sólo tiene una posibilidad, el segmento de línea. En R^2 el polítopo óptimo es el hexágono. En R^3 , Gersho sugiere que se trata del octaedro truncado. Aunque se hace la conjetura de que existe un polítopo óptimo para cada k , los cuales son desconocidos para dimensiones mayores de tres, y por lo tanto surgen dificultades para diseñar un cuantizador óptimo multidimensional.

Para $K = 2$ el hexágono regular es el polítopo óptimo. Y se puede calcular el coeficiente de cuantización de la siguiente manera:

$$C(K, r) = \frac{1}{K} I(H^*) \quad I(H^*) = \int \frac{||x - \hat{x}||^r}{(V(H^*))^1 + \frac{r}{K}} dx$$



\hat{x} es el centroide de H , $V(H^*)$ es el volúmen del polítopo, en este caso, el área del hexágono.

$$V(H^*) = 4 \int_0^{\frac{3}{4}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x + 1\right) dx = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

para la norma $r = 2$,

$$\int_H ||x - \hat{x}||^r dx = \int_H ||x||^2 dx = \int_H (x^2 + y^2) dx dy$$

$$\int_H ||x||^2 dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}x + 1} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{5\sqrt{3}}{8}$$

$$C(2, 2) = \frac{1}{2} \frac{5\sqrt{3}}{8} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2$$

$$C(2, 2) = \frac{5}{36\sqrt{3}}$$

Para el cuantizador que minimiza la distorsión es necesario que cada punto de salida sea el centroide de la región en que está situado. Las dos condiciones necesarias para optimalidad son que la partición sea de Dirichlet y que los puntos de salida sean los centroides.

Se dice que un polítopo convexo H genera una teselación si existe una partición de R^k cuyas regiones son todas congruentes con H .

Gersho define H_k , la clase de polítopo admisible en R^k como sigue. Un polítopo convexo H en R^k estará en H_k si: H genera una teselación que es una partición de Dirichlet con respecto a los centroides de cada región en la partición.

En la fig 6.1.2 se muestra una teselación del hexágono regular.

Para $K = 1$ Bennet introdujo el modelo del compansor de un cuantizador como un mapeo no lineal monotónicamente creciente, el compresor, seguido por un cuantizador uniforme y por el mapeo inverso, la expansión.

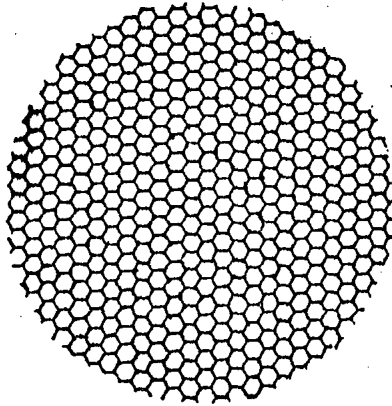


Fig 6.1.2 Tesselación del Hexágono Regular

Para una cuantización en bloques, Gersho introduce el concepto de función de densidad de punto y deriva una generalización de la integral de Bennet sin hacer ninguna referencia al mapeo.

Sin embargo, para completar la generalización del caso unidimensional se debe definir una función f invertible y continuamente diferenciable que efectúe el mapeo de un punto x en R^k a otro punto $f(x)$ en R^k .

La cuestión que se plantea entonces es conocer si para una densidad de probabilidad dada existe un mapeo $f(x)$ que haga de $Q(x)$ el cuantizador óptimo.

Para efecto de conservar las condiciones de Dirichlet es necesario que el mapeo sea conformal, ya que las líneas que unen los centroides de dos regiones adyacentes en una parti-

ción de Dirichlet deben ser siempre perpendiculares al hiperplano que separa ambas regiones.

Para $K = 2$, Heppes y Szusz hicieron notar que una condición necesaria y suficiente para la existencia de la función mapeo $f(x)$ es que el logaritmo de la función de densidad de punto sea una función armónica, esto es, que $\log(x)$ satisfaga la ecuación de Laplace.

Además, como se mencionó anteriormente, para el cuantizador óptimo debe ser proporcional a una potencia de $p(x)$, por consiguiente la condición es equivalente a tener $\log p(x)$ que satisfaga la ecuación de Laplace.

Esta condición elimina las densidades normales asociadas, así como a cualquier otra densidad cuyas curvas de densidad constante sean cerradas.

Esto constituye una limitante fundamental a la posibilidad de generalizar la compansión de Bennett al caso multidimensional.

Al respecto Bucklew aporta una importante alternativa, la cuantización subóptima, con sus consecuentes ventajas y limitaciones.

En el caso multidimensional, la característica del compresor es una función de mapeo del espacio de dimensión K al hipercubo k -dimensional.

$$f: R^k \rightarrow X_i^k = 1(0, 1) \quad 6.1.10$$

$$f = (f_1(x), f_2(x) \dots f_k(x))^T \quad 6.1.11$$

Una de las más importantes condiciones que impone Bucklew es que la distorsión producida en cada "canal" no esté correlacionada con ninguna otra.

$$E \{r_i r_j\} = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad 6.1.12$$

La condición principal para la existencia del compresor óptimo es que la matriz:

$$\left[\frac{f'(x)}{c \cdot p(x)^{\frac{1}{K+2}}} \right] \text{ sea ortogonal,} \quad 6.1.13$$

$$\text{donde } c = \left(\frac{\|P\|}{(K+2)} \right)^{\frac{1}{K+2}}$$

Para $K = 2$ esa condición dice que no existe el mapeo conformal para densidades de probabilidad circularmente simétricas.

Una ilustración de este hecho es el trabajo de Heppes y Szusz, que muestra que no es posible "teselar" una región circular con una arbitraria "función de distribución de superficie", usando hexágonos regulares.

$p(x)$ puede ser expresada en la siguiente forma:

$$p(x) = \prod_{i=1}^K p(x_i) \quad 6.1.14$$

La función del compresor es:

$$f_1(x_1) = C \int_{-\infty}^{x_1} p(x)^\alpha dx \quad 6.1.15$$

donde $C = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x)^\alpha dx}$ 6.1.16

Bucklew demuestra además que el error se minimiza para $\alpha = \frac{1}{3}$,

$$D = E(r^2) \approx |P| \frac{1}{3} \quad 6.1.17$$

que para el caso unidimensional resulta:

$$D_{1-dim} = \frac{|P| \frac{1}{3}}{12 N^2} \quad 6.1.18$$

Esta característica del compresor produce el mismo error que el cuantizador óptimo unidimensional si en el hipercubo cuantizamos con cuantizador uniforme unidimensional.

Podemos cuantizar en el hipercubo usando esquemas óptimos para producir un error de:

$$D = \frac{|P| \frac{1}{3}}{N^2 2\pi e} \quad \text{cuando } K \rightarrow \infty \quad 6.1.19$$

Por lo tanto, lo mejor que podemos producir con esta característica de compresor es una ganancia de $\frac{2\pi^6}{12} \approx 1.423$ en la relación señal-ruido de cuantización, a expensas de implementar el cuantizador óptimo en el hipercubo.

Este procedimiento conduce a un mapeo no conformal, pero con la posibilidad de obtener funciones de mapeo que asintóticamente ($K \rightarrow \infty$) darán óptimos resultados.

6.2 Derivación heurística de la integral de distorsión

Para generalizar la integral de distorsión al caso multidimensional, Gerho define la función de densidad de puntos de salida de un cuantizador de dimensión K como:

$$g_N(x) = \frac{1}{NV(S_i)} \quad \text{si } x \in S_i \quad 6.2.1$$

para $i = 1, 2, \dots, N$

donde $V(S_i)$ representa el volúmen de S_i .

En el caso asintótico, donde N es muy grande, $g_N(x)$ se puede considerar como una función de densidad aproximadamente continua $\lambda(x)$ que tenga volúmen unitario.

Entonces $\lambda(x) \Delta V(x)$ puede ser tomada como la fracción de puntos de salida localizada en un elemento incremental de volúmen $\Delta V(x)$ conteniendo a x . Entonces el volúmen de la región de cuantización S_i , asociado con el punto de salida y_i es dado aproximadamente por:

$$V(S_i) = \frac{1}{N \lambda(y_i)} \quad 6.2.2$$

para toda región limitada S_i . El término $N \lambda(y_i)$ es el número de puntos por unidad de volúmen en la vecindad de y_i , tal que su recíproco $V(S_i)$ es el volúmen por punto de salida.

La distorsión puede ser expresada como:

$$D = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^N \int ||x - y_i||^r P(x) dx \quad 6.2.3$$

Para N muy grande, es razonable asumir que la mayoría de las regiones S_i serán conjuntos limitados, y las regiones de saturación corresponderán a las regiones asintóticas de la densidad $p(x)$. La partición para toda región limitada puede aproximarse más y más (a medida que N aumenta) a la partición para una densidad uniforme, asumiendo que $\lambda(x)$ es suavemente variante. Aproximando S_i a un convenientemente rotado, trasladado y escalado polítopo óptimo H^* . Apoyándonos en 6.1.8:

$$\int ||x - y_i||^r dx = I(H^*) |V(S_i)|^{1 + \frac{r}{K}} \quad 6.2.4$$

empleando 6.1.9 y 6.2.2 y sustituyendo en 6.2.3:

$$D = N^{-\beta} C(K, r) \sum_{i=1}^N P(y_i) |\lambda(y_i)|^{-\beta} V(S_i) \quad 6.2.5$$

La sumatoria se puede aproximar en el caso asintótico a una integral produciendo:

$$D. = N^{-\beta} C(K, r) \int \frac{p(y)}{|\lambda(y)|^{\beta}} dy \quad 6.2.6$$

Esta ecuación puede ser reconocida como la versión de dimensión K de la fórmula de Bennett para la cuantización unidimensional con distorsión cuadrática-media.

Esta integral es minimizable optimizando la selección de λ , la función de densidad de puntos de salida. Gersho demuestra que la mínima distorsión es:

$$D(N) = C(K, r) N^{-\beta} \left\| P(x) \right\|_{\frac{K}{K+r}} \quad 6.2.7$$

7. EL CUANTIZADOR OPTIMO

Muchos autores han considerado el problema del diseño de cuantizadores óptimos sujetos a una medida de distorsión mínima deseada.

7.1 Cálculo de la distorsión.

En 1960, J. Max da condiciones necesarias pero no suficientes para el cuantizador de una dimensión. Lo que él hace, es definir la distorsión D como el valor esperado de $f(E)$, donde f es una función diferenciable y E es el error de cuantización $E = S_{in} - S_{out}$, S_{in} y S_{out} son las entradas y salidas del cuantizador respectivamente y denominado a $p(x)$ como la densidad de probabilidad de la amplitud de entrada, entonces:

$$D = E | f(S_{in} - S_{out}) | \quad 7.1.1$$

$$D = \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x - y_i) p(x) dx \quad 7.1.2$$

donde $x_{N+1} = \infty$, $x_1 = -\infty$ con el acuerdo de que el valor de entrada x_i y x_{i+1} tiene una salida correspondiente y_i .

Para minimizar D , dada una N fija, obtenemos las condiciones necesarias al diferenciar D con respecto a las x_i 's y y_i 's e igualando las derivadas a cero,

$$\frac{\partial D}{\partial x_j} = f(x_j - y_{j-1}) p(x_j) - f(x_j - y_j) p(x_j) = 0 \quad j = 2, \dots, N \quad 7.1.3$$

$$\frac{\partial D}{\partial y_j} = - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x - y_j) p(x) dx = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad 7.1.4$$

Para $p(x_i) \neq 0$, de la ec 7.1.3, obtenemos:

$$f(x_j - y_{j-1}) = f(x_j - y_j) \quad j = 2, \dots, N \quad 7.1.5$$

y de la ec 7.1.4,

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x - y_i) p(x) dx = 0$$

$$j = 1, \dots, N \quad 7.1.6$$

Ahora se podría preguntar cuándo estas condiciones son condiciones suficientes. La mejor respuesta que se puede dar para un caso general es que si las segundas derivadas parciales de D con respecto a las x_i 's y y_i 's existen, entonces el punto crítico determinado por las condiciones 7.1.5 y 7.1.6 es un mínimo si los elementos de la matriz del i -ésimo renglón y j -ésima columna están dados por:

$$\left. \frac{\partial^2 D}{\partial p_i \partial p_j} \right| \text{ punto crítico}$$

donde las p 's son las x 's y y 's y está definida como positiva. Un caso específico, se puede determinar si la matriz está definida como positiva o no, o simplemente se pueden encontrar los puntos críticos (es decir, aquéllos que satisfagan las condiciones necesarias) y evaluar D para cada uno.

El mínimo absoluto debe estar en uno de los puntos críticos, ya que los puntos extremos se pueden excluir fácilmente.

La clase de función que a uno le gustaría usar, sería una función métrica, es decir, que $f(x)$ sea monotónicamente no creciente,

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = f(-x)$$

Si se necesita que $f(x)$ sea monótonicamente creciente entonces 7.1.3 implica que,

$$|x_j - y_{j-1}| = |x_j - y_j|$$

$$j = 2, \dots, N$$

y esto quiere decir que (ya que y_{j-1} y y_j no coinciden),

$$x_j = (y_j + y_{j-1})/2 \quad j = 2, \dots, N$$

(x_j está a la mitad entre y_j y y_{j-1}).

Viendo ahora un ejemplo específico para entender mejor esta situación:

$$\text{Sea } f(x) = x^2$$

7.1.5 implica que

$$x_j = (y_j + y_{j-1})/2 \quad \text{ó} \quad y_j = 2x_j - y_{j-1} \quad j = 2, \dots, N \quad 7.1.7$$

7.1.6 implica que

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - y_j) p(x) dx = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad 7.1.8$$

Es decir, y_j es el centroide del área de $p(x)$ entre x_j y x_{j+1} . Pero estas ecuaciones no es un conjunto de ecuaciones simultáneas que se puedan resolver con facilidad. Sin embargo, hay que notar que si se escoge y_1 correctamente, se pueden generar las siguientes x_j 's y y_j 's por medio de 7.1.7 y 7.1.8, siendo esta última una ecuación implícita para x_{j+1} en términos de x_j y y_j .

Un método para resolver 7.1.7 y 7.1.8 es escoger y_1 , calcular las x_j 's y y_j 's mediante 7.1.7 y 7.1.8 y si y_1 es el centroide del área entre x_n e ∞ , y_1 fué escogido correctamente.

Si y_N no es el centroide apropiado, entonces y_1 debe escogerse nuevamente. Esta búsqueda puede ser sintetizada de tal forma, que se pueda realizar mediante el empleo de una computadora en corto tiempo. Este método es un algoritmo hecho entre Lloyd y Max.

Este procedimiento fue realizado numéricamente en una computadora IBM 709 para una distribución $p(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}$, bajo la restricción que $x_{(N/2)+1} = 0$ para N par y $y_{(N+1)/2} = 0$, para N impar. Este procedimiento da resultado simétricos, es decir, que si una señal de amplitud x es cuantizada como y_k , entonces $-x$ es cuantizada como $-y_k$. Las respuestas aparecen en la tabla 7.1.1.

Se ha hecho un estudio para determinar la dependencia de la distorsión con el número de niveles de salida del cuantizador. En la fig 7.1.1 se presenta una gráfica logarítmica de la distorsión contra el número de niveles del cuantizador.

		N = 1		N = 2		N = 3	
		x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	2	—	0.0	0.0	0.7080	0.0	0.6120
Error		1.000		0.3034		0.1002	
Entropía		0.0		1.000		1.536	
		N = 4		N = 5		N = 6	
		x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	2	0.0	0.4528	0.3823	0.0	0.0	0.3177
3	3	0.9316	1.510	1.244	0.7616	0.0589	1.000
Error		0.1175		0.07994		0.05708	
Entropía		1.911		2.203		2.443	
		N = 7		N = 8		N = 9	
		x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	2	0.2803	0.0	0.0	0.2451	0.2218	0.0
3	3	0.3744	0.5600	0.5006	0.7500	0.6812	0.4436
4	4	1.611	1.188	1.050	1.344	1.198	0.9188
Error		0.01400		0.03454		0.02785	
Entropía		2.647		2.825		2.983	
		N = 10		N = 11		N = 12	
		x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	2	0.0	0.1996	0.1837	0.0	0.0	0.1684
3	3	0.4047	0.6099	0.5599	0.3675	0.3401	0.3119
4	4	0.8339	1.058	0.9656	0.7524	0.6943	0.8768
5	5	1.325	1.591	1.436	1.179	1.081	1.286
6	6	1.968	2.345	2.059	1.693	1.534	1.783
Error		0.02293		0.01922		0.01634	
Entropía		3.125		3.253		3.372	
		N = 13		N = 14		N = 15	
		x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	2	0.1569	0.0	0.0	0.1457	0.1309	0.0
3	3	0.4700	0.3138	0.2935	0.4413	0.4143	0.2739
4	4	0.8126	0.6383	0.5959	0.7505	0.7030	0.5548
5	5	1.184	0.9370	0.9181	1.086	1.013	0.8512
6	6	1.623	1.381	1.277	1.468	1.361	1.175
7	7	2.215	1.805	1.703	1.939	1.776	1.546
8	8		2.565	2.282	2.625	2.344	2.007
Error		0.01406		0.01223		0.01073	
Entropía		3.481		3.582		3.677	
		N = 16		N = 17		N = 18	
		x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	2	0.0	0.1284	0.1215	0.0	0.0	0.1148
3	3	0.2582	0.3881	0.3670	0.2430	0.2306	0.3464
4	4	0.5224	0.6563	0.6201	0.4909	0.4653	0.5843
5	5	0.7996	0.9424	0.8875	0.7493	0.7091	0.8339
6	6	1.099	1.256	1.178	1.026	0.9680	1.102
7	7	1.437	1.618	1.508	1.331	1.251	1.400
8	8	1.844	2.069	1.906	1.685	1.573	1.746
Error		0.009497		0.008463		0.007589	
Entropía		3.765		3.849		3.928	

		N = 19		N = 20		N = 21	
		x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	2	0.1092	0.0	0.0	0.1038	0.09918	0.0
3	3	0.3294	0.2184	0.2083	0.3128	0.2989	0.1984
4	4	0.5551	0.4404	0.4197	0.5265	0.5027	0.3994
5	5	0.7908	0.6698	0.6375	0.7486	0.7137	0.6059
6	6	1.012	0.9117	0.8661	0.9837	0.9361	0.8215
7	7	1.318	1.173	1.111	1.239	1.175	1.051
8	8	1.631	1.464	1.381	1.524	1.440	1.300
9	9	2.018	1.803	1.690	1.857	1.743	1.579
10	10	2.550	2.232	2.066	2.270	2.116	1.908
11	11		2.869	2.594	2.908	2.635	2.321
Error		0.006844		0.006203		0.005618	
Entropía		4.002		4.074		4.141	
		N = 22		N = 23		N = 24	
		x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	2	0.0	0.09469	0.09085	0.0	0.0	0.03708
3	3	0.1900	0.2852	0.2736	0.1817	0.1746	0.2021
4	4	0.3822	0.4793	0.4591	0.3651	0.3510	0.4399
5	5	0.5794	0.6795	0.6507	0.5534	0.5312	0.6224
6	6	0.7844	0.8893	0.8504	0.7481	0.7173	0.8122
7	7	1.001	1.113	1.062	0.9527	0.9122	1.012
8	8	1.235	1.357	1.291	1.172	1.119	1.227
9	9	1.495	1.632	1.548	1.411	1.344	1.462
10	10	1.793	1.955	1.841	1.681	1.595	1.728
11	11	2.160	2.366	2.203	2.000	1.885	2.012
12	12	2.674	2.982	2.711	2.406	2.243	2.444
Error		0.005165		0.004741		0.004387	
Entropía		4.206		4.268		4.327	
		N = 25		N = 26		N = 27	
		x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	2	0.08381	0.0	0.0	0.08060	0.07779	0.0
3	3	0.2522	0.1676	0.1616	0.2425	0.2340	0.1556
4	4	0.4231	0.3368	0.3245	0.4066	0.3921	0.3124
5	5	0.5982	0.5093	0.4905	0.5743	0.5537	0.4719
6	6	0.7797	0.6870	0.6610	0.7477	0.7202	0.6354
7	7	0.9702	0.8723	0.8383	0.9289	0.8936	0.8049
8	8	1.173	1.068	1.025	1.121	1.077	0.9824
9	9	1.394	1.279	1.224	1.328	1.273	1.171
10	10	1.641	1.510	1.442	1.556	1.487	1.374
11	11	1.927	1.772	1.685	1.814	1.727	1.599
12	12	2.281	2.083	1.968	2.121	2.006	1.854
13	13	2.779	2.480	2.318	2.514	2.352	2.158
14	14		3.079	2.811	3.109	2.842	2.547
Error		0.004036		0.003741		0.003477	
Entropía		4.384		4.439		4.491	
		N = 28		N = 29		N = 30	
		x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	2	0.0	0.07302	0.07257	0.0	0.0	0.07016
3	3	0.1503	0.2256	0.2182	0.1451	0.1406	0.2110
4	4	0.3018	0.3780	0.3655	0.2913	0.2821	0.3532
5	5	0.4556	0.5333	0.5154	0.4396	0.4255	0.4978
6	6	0.6132	0.6930	0.6693	0.5912	0.5719	0.6460
7	7	0.7760	0.8589	0.8287	0.7475	0.7225	0.7990
8	8	0.9460	1.033	0.9956	0.9100	0.8788	0.9586
9	9	1.126	1.218	1.172	1.081	1.043	1.127
10	10	1.319	1.419	1.362	1.263	1.217	1.306
11	11	1.529	1.640	1.570	1.461	1.404	1.501
12	12	1.766	1.892	1.804	1.680	1.609	1.717
13	13	2.042	2.193	2.077	1.929	1.840	1.964
14	14	2.385	2.575	2.417	2.226	2.111	2.258
15	15	2.871	3.164	2.899	2.609	2.448	2.638
Error		0.003240		0.003027		0.002834	
Entropía		4.542		4.591		4.630	

Tabla 7.1.1 (Continúa en la página siguiente)

	N = 31		N = 32		N = 33	
	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
j = 1	0.06802	0.0	0.0	0.06590	0.06400	0.0
2	0.2045	0.1360	0.1320	0.1981	0.1924	0.1280
3	0.3422	0.2729	0.2648	0.3314	0.3218	0.2567
4	0.4822	0.4115	0.3991	0.4668	0.4530	0.3868
5	0.6254	0.5528	0.5359	0.6050	0.5869	0.5192
6	0.7730	0.6979	0.6761	0.7473	0.7245	0.6547
7	0.9265	0.8481	0.8210	0.8947	0.8687	0.7943
8	1.088	1.005	0.9718	1.049	1.015	0.9392
9	1.259	1.170	1.130	1.212	1.171	1.091
10	1.444	1.347	1.299	1.387	1.338	1.252
11	1.646	1.540	1.482	1.577	1.518	1.424
12	1.875	1.753	1.682	1.788	1.716	1.612
13	2.143	1.997	1.908	2.029	1.940	1.821
14	2.477	2.289	2.174	2.319	2.204	2.060
15	2.952	2.605	2.505	2.692	2.533	2.347
16		3.239	2.977	3.263	3.002	2.718
17						3.285
Error	0.002658		0.002499		0.002354	
Entropía	4.685		4.730		4.773	

	N = 34		N = 35		N = 36	
	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
j = 1	0.0	0.06212	0.06043	0.0	0.0	0.05870
2	0.1244	0.1867	0.1816	0.1209	0.1177	0.1705
3	0.2405	0.3122	0.3036	0.2423	0.2359	0.2952
4	0.3758	0.4394	0.4272	0.3650	0.3552	0.4152
5	0.5043	0.5691	0.5530	0.4895	0.4762	0.5372
6	0.6355	0.7020	0.6819	0.6190	0.5990	0.6620
7	0.7705	0.8391	0.8146	0.7471	0.7261	0.7903
8	0.9104	0.9818	0.9523	0.8820	0.8567	0.9231
9	1.057	1.131	1.096	1.023	0.9923	1.062
10	1.211	1.200	1.248	1.170	1.134	1.207
11	1.375	1.460	1.411	1.327	1.285	1.362
12	1.553	1.646	1.587	1.495	1.445	1.528
13	1.749	1.853	1.781	1.679	1.619	1.710
14	1.971	2.090	2.001	1.883	1.812	1.913
15	2.232	2.375	2.260	2.119	2.030	2.140
16	2.559	2.743	2.584	2.401	2.287	2.427
17	3.025	3.307	3.018	2.767	2.609	2.791
18				3.328	3.070	3.349
Error	0.002220		0.002097		0.001985	
Entropía	4.815		4.856		4.895	

Continuación de Tabla 7.1.1

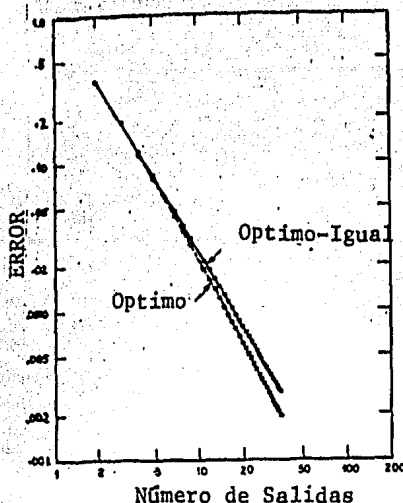


Fig 7.1.1 Error cuadrático medio contra número de salidas para un cuantizador óptimo y un cuantizador óptimo con niveles igualmente espaciados.

La curva no es una línea recta, ya que la tangente a la curva en $N = 4$ tiene la ecuación $D = 1.32N^{-1.74}$ y la tangente en $N = 36$ tiene la ecuación $D = 2.21N^{-1.96}$. Y se esperaba este tipo de comportamiento para un N grande. Y para este caso, cuando N es grande, la densidad de probabilidad de la amplitud no varía apreciablemente del extremo del rango de una entrada a otro, excepto para amplitudes muy grandes, las cuales son lo suficientemente improbables de tal forma que su influencia es pequeña. De aquí que, la mayoría de los niveles de salida están muy cercanos a ser las medidas de los puntos extremos de los rangos de entrada correspondientes.

Ahora bien, la mejor forma de cuantizar una señal uniformemente y poner los puntos extremos de los rangos de entrada a la mitad de los niveles de salida, como se muestra en la fig. 7.1.2 para $N = 1$.

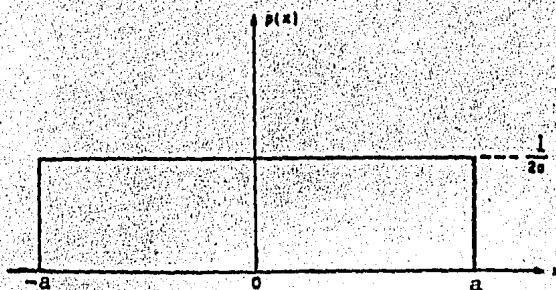


Fig 7.1.2 Cuantización óptima para el caso de distribución uniforme, $N = 1$.

La mejor forma de producir un cuantizador de $2N$ niveles de salida para esta distribución, es dividir cada rango de entrada a la mitad y poner los nuevos niveles de salida en los puntos medios de estos rangos como se muestra en la fig 7.1.3.

Es fácil ver que la distorsión en el segundo caso es la cuarta parte de la distorsión del primer caso. De aquí que

$$D = K N^{-2}$$

donde K es una constante, pero de hecho es la variancia de la distribución.

Si se realiza esta clase de proceso con divisiones iguales en cada rango de entrada del cuantizador óptimo para una señal con distribución normal y considerando N niveles de salida donde N es grande, entonces se espera nuevamente una reducción en la distorsión por un factor de 4.

Asintóticamente, entonces la ecuación para la tangente a la curva, de distorsión contra el número de niveles de salida será $D = K N^{-2}$ donde K es una constante.

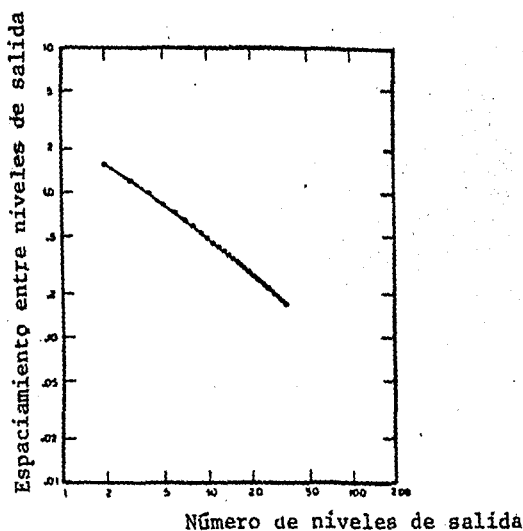


Fig 7.1.4 Espaciamento entre niveles de salida contra número de niveles de salida para el caso óptimo

Los equipos de conversión analógico-digital de alta velocidad están limitados actualmente a transformar rangos de entrada iguales a las salidas a la mitad de los extremos de los rangos de entrada. En muchas aplicaciones a uno le gustaría saber la mejor longitud del intervalo a usar, es decir, el intervalo que diera la mínima distorsión para un número dado de niveles de salida N . Este es un problema más sencillo que el primero, ya que es solo de dos dimensiones (para $N \geq 2$), es decir, D es una función de la longitud común " r " de los intervalos y de cualquier nivel de salida particular y_k . Si la entrada tiene una distribución simétrica y se desea una respuesta simétrica, el problema se convierte en uno de una dimensión. Si $p(x)$ es la densidad de probabilidades de amplitud y $f(x)$ es la función, tal que la distorsión D es $E[f(S_{in} - S_{out})]$, entonces para un número de niveles de salida par $2N$,

$$D = 2 \sum_{i=1}^{N-1} \int_{(i-1)r}^{ir} f(x - \frac{2i-1}{2}r) p(x) dx +$$

$$+ 2 \int_{(N-1)r}^{\infty} f(x - \frac{2N-1}{2}r) p(x) dx$$

7.1.9

Para un mínimo se necesita que:

$$\frac{dD}{dr} = - \sum_{i=1}^{N-1} (2i-1) \int_{(i-1)r}^r f'(x - \frac{[2i-1]r}{2}) p(x) dx -$$

$$- (2N-1) \int_{(N-1)r}^{\infty} f'(x - \frac{[2N-1]r}{2}) \dots p(x) d(x) = 0$$

7.1.10

Existe una expresión similar para el caso de número impar de niveles de salida. En cualquier caso el problema es muy susceptible de resolverse mediante el empleo de una computadora cuando $f(x)$, $p(x)$ y N son especificados. Se han obtenido resultados para la función $f(x) = x^2$, $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ y N de 2 a 36.

En la fig 7.1.4 se muestra una gráfica logarítmica del espaciamiento entre niveles de salida contra el número de salidas con igual espaciamiento, el cual da la distorsión más baja. Esta curva tampoco es una línea recta.

En la fig 7.1.5 tenemos una gráfica de la relación de la relación de la distorsión para el cuantizador óptimo de niveles igualmente espaciados.

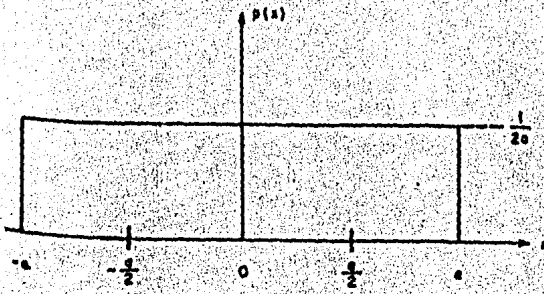
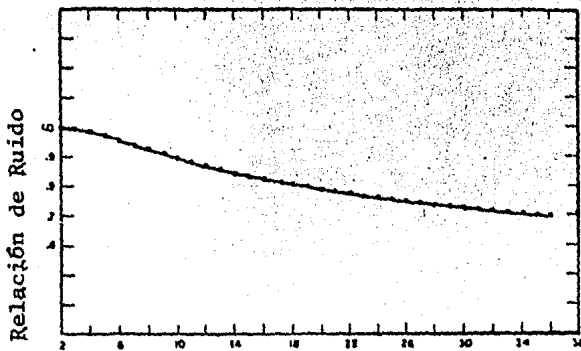


Fig 7.1.3 Cuantización óptima para el caso de distribución uniforme, $N = 2$.



Número de niveles de salida

Fig 7.1.5 Relación de error del cuantizador óptimo al error del cuantizador óptimo con niveles igualmente espaciados contra el número de salidas.

Número de Niveles de Salida	Espaciamento entre niveles de Salida	Error medio Cuadrático	Entropía Informal
1	—	1.000	0.0
2	1.596	0.3634	1.000
3	1.224	0.1902	1.536
4	0.9957	0.1188	1.904
5	0.8430	0.08218	2.183
6	0.7334	0.06065	2.409
7	0.6503	0.04686	2.598
8	0.5860	0.03744	2.761
9	0.5338	0.03069	2.904
10	0.4908	0.02568	3.032
11	0.4546	0.02185	3.148
12	0.4238	0.01885	3.253
13	0.3972	0.01645	3.350
14	0.3739	0.01450	3.440
15	0.3534	0.01289	3.524
16	0.3352	0.01154	3.602
17	0.3189	0.01040	3.676
18	0.3042	0.009430	3.748
19	0.2909	0.008594	3.811
20	0.2788	0.007869	3.874
21	0.2678	0.007235	3.933
22	0.2578	0.006678	3.990
23	0.2482	0.006185	4.045
24	0.2396	0.005747	4.097
25	0.2315	0.005355	4.146
26	0.2240	0.005004	4.194
27	0.2171	0.004687	4.241
28	0.2105	0.004401	4.285
29	0.2044	0.004141	4.328
30	0.1987	0.003905	4.370
31	0.1932	0.003688	4.410
32	0.1881	0.003490	4.449
33	0.1833	0.003308	4.487
34	0.1787	0.003141	4.524
35	0.1744	0.002986	4.560
36	0.1703	0.002843	4.594

Tabla 7.1.2 Parámetros para el cuantizador óptimo de niveles igualmente espaciados.

Sugerencias para usar las tablas:

En el sistema numérico para usar la tabla de niveles de salida y_j , y los puntos extremos de los intervalos de entrada, x_j , para el esquema de mínimo error cuadrático medio de cuantización y para entradas con densidad de probabilidad de amplitud normal con desviación estandar unitaria y media cero, es de la siguiente forma:

Para el número de niveles de salida N , par, x_1 es el primer punto extremo de un rango de entrada a la derecha del origen. Una entrada x_j y x_{j+1} produce la salida y_j .

Para el número de niveles de salida N , impar, y_1 es la salida no-negativa más pequeña. Una entrada entre x_{j-1} y x_j produce una salida y_j .

Esta descripción, ilustrada en la fig 7.1.6, es suficiente debido a la simetría del cuantizador. El error cuadrático esperado del proceso de cuantización y la entropía a la salida del cuantizador están también tabulados para los cuantizadores óptimos calculados.

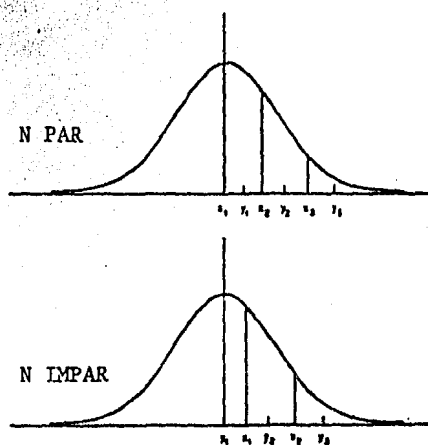


Fig 7.1.6 Puntos extremos de los rangos de entrada y niveles de salida para el cuantizador óptimo.

Si p_k es la probabilidad de la k -ésima salida, entonces la entropía está definida como:

$$H = - \sum_{k=1}^N p_k \log_2 p_k \quad 7.1.11$$

La tabla 7.1.2 es también para una entrada con distribución normal con desviación estándar unitaria.

James A. Bucklew obtiene una condición para el compandor óptimo, la cual establece que $(f'(x))/c_p(x)/(K+2)$ sea una matriz ortogonal para cualquier valor de x donde

$$C = 1/(||p|| \frac{K}{(K+2)} \frac{1}{(K+2)})$$

Cuando $K = 2$ esta condición establece que $f(x)$ debe ser conformal en cualquier parte, excepto para un conjunto de medida cero.

Gersho establece para el caso de dos dimensiones que no existen mapeos conformales para densidades de probabilidad simétricas circularmente. Una ilustración de este hecho es el trabajo hecho por Heppes y Szuz, el cual muestra que no es posible la teselación de una región circular con una función de distribución de superficie arbitraria. Siempre hay un lugar donde la teselación falla, este lugar sin embargo, es un conjunto de medida cero. Se necesita conformalidad local en todas partes y no conformalidad global.

Becklew también encontró la posibilidad de obtener funciones de mapeo no conformales que pueden dar resultados asintóticamente óptimos.

En 1955, Lukaszewicz y Steinhaus encontraron condiciones necesarias para optimizar un conjunto de niveles de decisión y puntos de salida para el criterio de error cuadrático medio y el error cuadrático medio absoluto, (en este último caso $|Q(x)-(x)|^2$ es reemplazado por $|Q(x) - x|$ en la ec de Bennett).

En 1957, Lloyd encontró condiciones necesarias para el cálculo de la solución óptima por medio de un algoritmo efectivo, utilizando el criterio de error cuadrático medio.

Otros de los autores que consideraron el problema de la optimización fueron: Fleisher, que dió una condición suficiente que requiere ciertas propiedades de convexidad de la función de densidad de la variable aleatoria de entrada. Panter y Dite dedujeron una expresión para el error cuadrático medio esperado de un cuantizador de una dimensión con mínimo error cuadrático medio, asumiendo que el número de niveles de salida era muy grande. Algazi generaliza la ecuación de Panter y Dite a una medida de distorsión a la potencia r -ésima. Wood utilizó una ecuación obtenida por Roe para rederivar la ecuación de Panter y Dite y dar las fórmulas para obtener en forma asintótica los niveles de salida del cuantizador. Zador generaliza el trabajo de Panter y Dite a varias dimensiones y a una medida de distorsión más general. La ecuación de Zador para el error de distorsión es:

$$C(K, r) N^{-r/k} \|p\|_{k+r} = \frac{1}{k} E\{\|x - Q(x)\|_2^r\}$$

7.1.12

donde x es el vector de entrada aleatorio, $Q(x)$ es el vector aleatorio cuantizado, $E\{\}$ es el operador estadístico de valor

esperado, N el número de niveles de salida el cual se supone muy grande, k las dimensiones de x , $C(K, r)$ el coeficiente de cuantización que depende de k y r , $p(x)$ es la densidad de probabilidad de x , y por último $\|p\|_{\infty} = [\int p(x)^{\alpha} dx, \dots dx_R]^{1/\alpha}$.

Se puede ahora resumir las condiciones de Max, diciendo que se basó en el criterio de error cuadrático medio, con un valor fijo de N y que las condiciones son las siguientes:

1) Cada nivel de salida de y_j debe ser el centroide o centro o masa del intervalo R_j con respecto a la densidad de probabilidad de entrada $p(x)$. En otras palabras, y_j es el valor medio condicional de la variable aleatoria de entrada x dado que x está en la región R_j .

2) Cada nivel de decisión x_j debe estar a la mitad de los puntos de salida adyacentes.

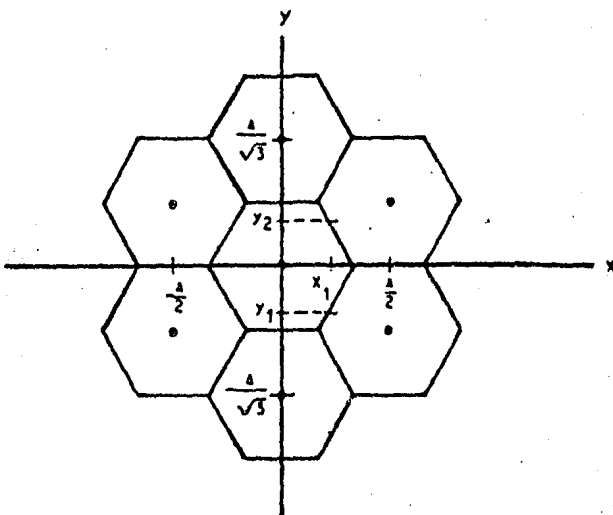
Y como se vio anteriormente, estas condiciones no dan valores óptimos explícitamente, ya que los valores de los puntos de salida y_j para un intervalo R_j depende de los valores de los niveles de decisión x_{j-1} y x_j que definen R_j y los niveles de decisión x_j dependen de los niveles de salida y_j y y_{j+1} .

Estas son las condiciones que Lloyd y Max utilizaron en su algoritmo.

Páez y Glisson utilizaron el algoritmo de Lloyd y Max para tabular los parámetros de un cuantizador óptimo cuando la distribución es Laplaciana y una forma particular de densidad Gamma.

Lloyd observó también que las condiciones de Max aunque eran necesarias, no eran suficientes para un mínimo; lo que él hizo fué dar un ejemplo de una función de densidad de probabilidad y el cuantizador asociado que satisfacía las condiciones y encontró que éste no era óptimo.

Por otro lado, un cuantizador multidimensional, puede ser visto esencialmente, como una partición del espacio. Si una muestra de datos cae dentro de un conjunto en la partición, éste es asignado a un nivel de salida particular y como se vió anteriormente, existe una partición óptima del hipercubo, la cual consiste de politopos. En una dimensión existe solo una posibilidad, el segmento de línea, en dos dimensiones el politopo óptimo es el hexágono, en tres dimensiones Gersho argumenta que el politopo óptimo es el octaedro truncado (Ver fig. 7.1.7). Para más de tres dimensiones no se conoce el politopo óptimo, así que parece ser muy difícil diseñar un cuantizador óptimo de más de tres dimensiones.



g 7.1.7 a. Partición para un Cuantizador en Hexágonos

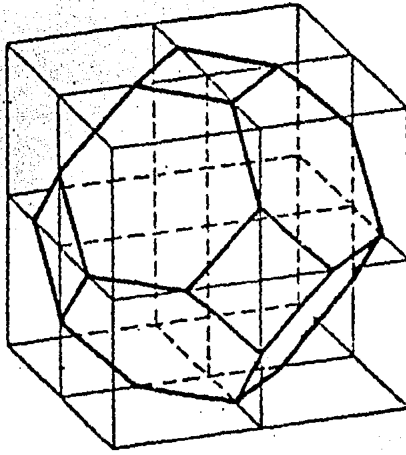


Fig 7.1,7 b. *Octaedro truncado*

Zador también demostró que en el límite cuando el número de dimensiones tiende a infinito, la constante de cuantización cuando $r = 2$ es $1/2\pi e$.

7.2 *Partición Óptima*

En el análisis anterior se hicieron algunas consideraciones tales como asumir que la probabilidad es aproximadamente constante en el intervalo de decisión ($P(y_j)$ constante), lo que nos llevó a lo siguiente:

$$D = \frac{1}{12} \sum_{j=2}^{N-1} p(y_j) \Delta_j^3 = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{j=2}^{N-1} p(y_j) \Delta$$

$$\sum p(y_j) \Delta = \int p(s) ds = 1$$

donde Δ_j es la longitud del intervalo R . Se hizo además la consideración de que para un número de niveles grande, el error de saturación es despreciable. De acuerdo a estas aproximaciones:

$$D = \frac{\Delta^2}{12}$$

Para aplicaciones en las que una función de densidad de probabilidad es conocida para describir adecuadamente la distribución de las muestras a ser cuantizadas, es conveniente buscar las mejores características posibles del cuantizador para esa función de densidad de probabilidad.

Considerando la aportación de cada intervalo en términos de la probabilidad de que el proceso de cuantización ocurra en determinado intervalo es:

$$D = \sum_{j=1}^N \int_{R_j} (q_j - x)^2 p(x) dx$$

D se puede interpretar como el total "Momento de inercia" del conjunto de intervalos $\{R_j\}$ alrededor de los respectivos niveles de salida $\{Q_j\}$.

Con el objeto de minimizar esta distorsión se ha calculado la posición de los niveles de salida en los respectivos intervalos de decisión. Para minimizar la distorsión, aplicando el cálculo diferencial llegamos a:

$$q_j = \frac{\int_{R_j} xp(x) dx}{\int_{R_j} p(x) dx}$$

Este es un clásico resultado que nos indica que el momento alcanza su mínimo valor cuando cada nivel de salida Q_j es el "Centro de Masa" del correspondiente nivel de decisión R_j . Por lo tanto cada nivel de salida Q_j debe ser el centroide o centro de masa del intervalo R_j con respecto a la densidad de entrada $P(x)$.

Dicho en otros términos, Q_j es el valor medio condicional de la variable aleatoria de entrada x dado que x está en la región R_j .

8. RELACION SEÑAL A RUIDO DE CUANTIZACION PARA ALGUNOS SISTEMAS DE MODULACION.

8.1 *Relación señal a ruido utilizando DPCM.*

En la fig 8.1.1 se muestra un diagrama de un sistema de Modulación por codificación de pulsos diferencial (DPCM).

Se puede ver que los sistemas DPCM son equivalentes a los sistemas de realimentación con error de cuantización. En este caso se asume que la razón de muestreo es dos veces el ancho de banda.

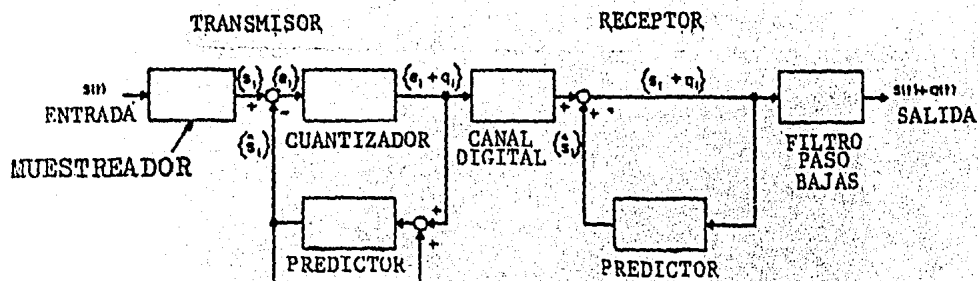


Fig 8.1.1 Diagrama por bloques de un sistema diferencial PCM

La diferencia principal entre el sistema DPCM de la fig. 8.1.1 y el sistema predictivo de la fig 8.1.2 es la inclusión de un cuantizador en el transmisor. La secuencia $\{e_i\}$ es cuantizada produciendo la secuencia $\{e_i + q_i\}$, donde la secuencia $\{q_i\}$ es el ruido de cuantización, la secuencia $\{e_i + q_i\}$ es transmitida, usualmente en un canal digital y el receptor utiliza una secuencia para reproducir la señal. La señal de salida $S(t) + q(t)$ consiste de la señal de entrada $S(t)$ y el ruido de cuantización $q(t)$. En el canal digital de la fig 8.1.2 están implícitos el codificador binario, el cual codifica cada nivel cuantizado en una serie de pulsos binarios para transmisión y un decodificador binario, el cual después de la transmisión sobre el canal, vuelve a convertir estos pulsos en niveles de cuantización.

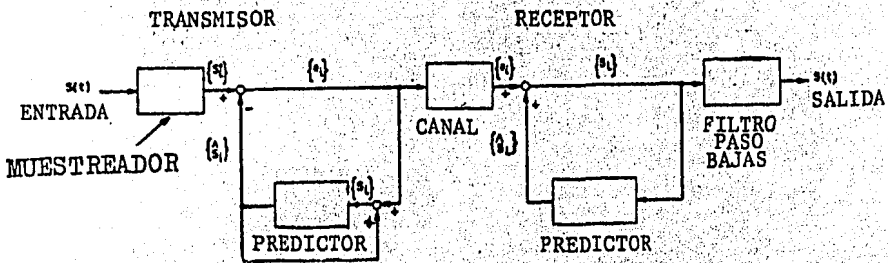


Fig 8.1.2 Diagrama por bloques de un sistema de comunicaciones predictivo

El ruido de cuantización en la señal de salida decodificada es el mismo ruido de cuantización a la salida del cuantizador. Panter y Dite demostraron que para un cuantizador óptimo, el valor mínimo del error cuadrático medio debido al ruido de cuantización está dado aproximadamente por:

$$\sigma_q^2 = \frac{2}{3N^2} \left[\int_0^V p^{1/3}(x) dx \right]^3 \quad 8.1.1$$

donde N es el número de niveles usados para representar cada valor de la muestra y la densidad de probabilidad de la señal a la entrada del cuantizador $p(x)$ es una función par, la cual es cero fuera del intervalo $(-V, V)$, el cual representa el

rango a la entrada del cuantizador. En un sistema binario

$$N = 2^n.$$

Para señales gaussianas, $p(x)$ será gaussiana. Al sustituir una función de densidad gaussiana con media cero y variancia en la ecuación 8.1.1 y tomando el límite cuando V es muy grande, como una aproximación para el valor cuadrático medio del ruido de cuantización, se tiene que,

$$\sigma_q^2 = \frac{\sqrt{3} \pi \sigma_e^2}{(2)^{2n}} \quad 8.1.2$$

donde n es el número de bits usados para codificar cada valor muestreado y σ_e^2 es el valor cuadrático medio de la secuencia $\{e_i\}$. De la ecuación 8.1.2 el valor de la relación S/N es aproximadamente,

$$\frac{S}{N} = 10 \log \frac{\sigma^2}{\sigma_q^2} \quad 8.1.3$$

$$\frac{S}{N} = 10 \log \frac{2}{\sqrt{3}\pi} + 20 n \log 2 + 10 \log \frac{\sigma^2}{\sigma_e^2} \quad 8.1.4$$

$$\frac{S}{N} = -4.35 + 6n + 10 \log \frac{\sigma^2}{\sigma_e^2} \quad 8.1.5$$

Si se diseña el predictor con la malla de realimentación de tal forma que el valor mínimo de σ_e^2 sea σ_m^2 , entonces la forma de la relación S/N en 8.1.5 es lo mismo que en la cota,

$$\frac{S}{N} \leq 6n + 10 \log \frac{\sigma^2}{\sigma_m^2} \quad 8.1.6$$

y comparando estas dos ecuaciones se puede ver que cuando $p(x)$ es gaussiana la relación S/N para DPCM es solo 4.35 dB abajo de la cota.

8.2 Relación de señal a ruido de un sistema de DPCM utilizando codificación de entropía.

Para una serie de muestras gaussianas, las cuales son completamente independientes, Max obtuvo la relación señal a ruido para un cuantizador de 36 niveles, la cual es 504 o 27.02 dB y además obtuvo que la entropía era 4.895 bits por muestra.

Si la codificación de la entropía fuera usada para transmitir estos valores muestreados, entonces los 36 niveles se transmitirían con los mismos 4.895 bits por muestra, pero de la ecuación 8.1.6 se ve que la cota para esta relación de transmisión es $6 \times 4.895 = 29.37$. Por lo que el sistema con codificación de entropía está $29.37 - 27.02 = 2.35$ dB abajo de esta cota. De esto se ve que un sistema DPCM con codificación de entropía puede tener una relación S/N dada aproximadamente por:

$$\frac{S}{N} = - 2.35 + 6n + 10 \log \frac{\sigma^2}{\sigma_e^2} \quad 8.2.1$$

8.3 Comparación de la relación señal a ruido para algunos sistemas de acuerdo a su codificación.

La comparación se hace en base a que la señal que se transmite es de densidad de probabilidad gaussiana y que la relación entre σ^2/σ_m^2 es de 25, por lo que al sustituir este valor en la ecuación 8.1.6 da la cota,

$$\frac{S}{N} \leq 6n + 13.0 \quad 8.3.1$$

Para DPCM sin codificación de la entropía, se obtiene de la ecuación 8.1.5 que

$$\frac{S}{N} = 6n + 8.65 \quad 8.3.2$$

Para PCM con codificación de la entropía, obtenemos de la ecuación 8.2.1 que

$$\frac{S}{N} = 6n + 10.65 \quad 8.3.3$$

Para PCM estándar con factor de carga de 4-sigma obtenemos que

$$\frac{S}{N} = 6n + 20 \log \frac{\sqrt{12}}{8} = 6n - 7.3 \quad 8.3.4$$

donde el factor de carga de 4-sigma significa que el rango del cuantizador es +/-4 veces el valor rms de la señal de entrada y que los niveles de cuantización están espaciados uniformemente en este rango. Esta fórmula es muy simple pero solo es exacta para valores de n menores o iguales a 9, ya que para valores mayores el ruido por saturación es muy alto debido a

los valores de la señal fuera del rango de $\pm 4\text{-sigma}$ y para este caso se requiere una ecuación mucho muy complicada para la relación $\frac{S}{N}$.

Vale la pena mencionar en esta sección que es en sí la codificación de la entropía y aunque se acaba de mencionar su beneficio es conveniente hacer hincapié en tal.

El cuantizador de un sistema DPCM cuantiza primero cada miembro de la secuencia de error e_i en el valor más cercano a uno de los $N = 2^n$ niveles de cuantización. Estos niveles de cuantización se seleccionan para minimizar el valor cuadrático medio del ruido de cuantización σ_q^2 . Aunque los miembros de la secuencia de los niveles de cuantización transmitidos son estadísticamente independientes, no son comunes entre sí. Por lo tanto la técnica de la codificación de la entropía, también llamada codificación de Shannon-Fano o código de Huffman, la cual consiste en asignar una palabra con más bits a un símbolo de baja probabilidad y una palabra con menos bits a un símbolo de probabilidad alta, puede ser usada para aumentar la relación S/N para una razón de bits dada o para disminuir la razón de bits para una relación S/N dada.

Por otro lado, para la modulación delta, en la cual se transmite un código de un bit y el cuantizador es un dispositivo de dos niveles y la razón de muestreo que típicamente es la razón de Nyquist es igual a su razón de bits, utilizando una fórmula empírica para el cálculo de la relación S/N . De lo anterior, se puede decir que un sistema DPCM de un dígito es idéntico a la modulación delta y tiene la misma relación señal a rui-

do. Sin embargo, la relación señal a ruido para la modulación delta aumenta aproximadamente 8 dB por octava para este tipo de señal. La expresión que tienen estas características es:

$$\frac{S}{N} = 14.65 + 8 \log_2 n \quad 8.3.5$$

que es una aproximación para la relación $\frac{S}{N}$ de la modulación delta. De la ec 8.3.1.a la 8.3.5, n es el número de dígitos binarios usados para codificar cada valor de la muestra y la razón de muestreo es $2f$, la razón de Nyquist. No obstante, n está definida como $n = \frac{B}{2f}$, donde B es la razón de bits y n es el número de bits por intervalo de Nyquist.

En la fig 8.3.1, la cota es comparada con las relaciones $\frac{S}{N}$ obtenidas anteriormente. La abcisa denota la razón de bits como un múltiplo del ancho de banda f_0 .

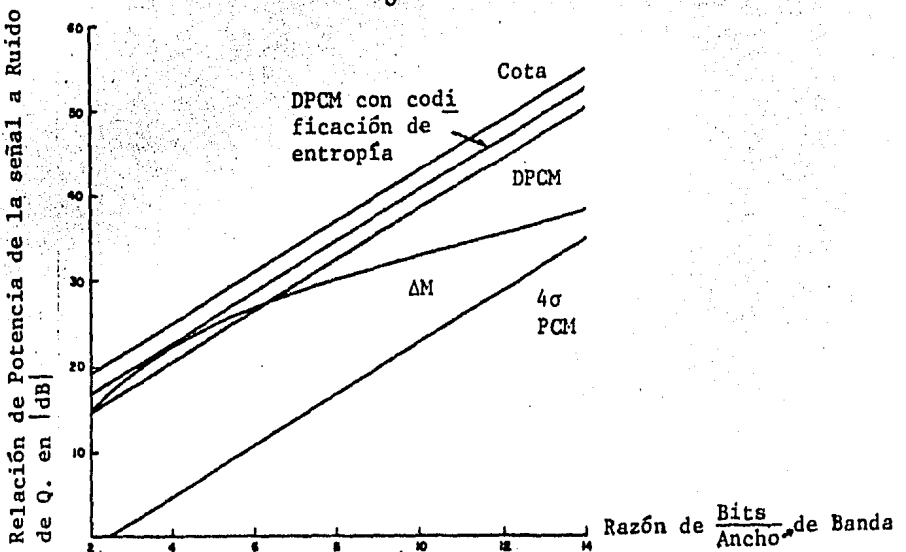


Fig 8.3.1 Comparación de la cota $\frac{S}{N}$ con la realización de algunos sistemas de codificación para señales de distribución Gaussiana.

9. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se hizo un amplio estudio de la cuantización, pero no se hizo un estudio en profundidad, ya que esto requeriría de herramientas matemáticas y estudios probabilísticos de alto nivel que producirían un trabajo muy extenso. Sin embargo, el hacer un estudio profundo de algunos puntos tratados en este trabajo podrían llevar a resultados relevantes para optimizar aún más la transmisión de información.

Se definió el proceso de cuantización y la función que realiza, se señalaron las ventajas que presenta la utilización de cuantizadores en la transmisión de señales. Se hizo un estudio de los diferentes tipos de cuantización, tales como el cuantizador uniforme, para el cual se definieron los límites por error de cuantización, la relación señal a ruido de cuanti

zación y como se mejoraba la relación señal a ruido al incrementar los niveles de cuantización. También se obtuvo la potencia promedio para una señal cuantizada uniformemente. Se describió también el cuantizador no uniforme y su equivalencia con un compansor. Se mencionó la ventaja de utilizar cuantizadores no uniformes en lugar de cuantizadores uniformes. Además se obtuvo una fórmula aproximada del error cuadrático medio que se tiene con este tipo de cuantizadores. Se describe el cuantizador de memoria cero, el cuantizador con memoria o por bloques y la medida de distorsión que se emplea para evaluar la buena o mala realización de un cuantizador. Además se ve como conforme aumenta la longitud del bloque, la razón de bits mínima por muestra disminuye para una distorsión dada y una forma de reducir la razón de bits sin emplear la cuantización vectorial, dicha forma es conocida como codificación de entropía.

Se describió el compansor silábico y las relaciones de compresión y expansión para este tipo de compansor. Además se definió lo que se conoce como punto focal de un compansor. También se describió el compansor instantáneo y la diferencia que existe entre éste y el compansor silábico.

Dentro de los compansores se estudió la cuantización robusta, ya que ésta utiliza ampliamente las leyes " μ " y "A" de compansión y además se dan los valores típicos de μ y A de acuerdo al número de bits por muestra y los valores de μ y A que dan como resultado un cuantizador uniforme.

Se menciona además como se diseñan en la práctica los compansores y la codificación que se emplea con estos diseños.

Se estudió una técnica de cuantización más reciente, la

cuantización adaptiva, en donde se muestra un histograma de los tamaños de la muestra del escalón para una entrada de distribución Gauss-Markov y las características de compansión para un cuantizador de este tipo.

Se analizó en forma breve la diferencia existente entre la cuantización escalar y la cuantización vectorial y de ésta segunda, se determinaron el error por cuantización y las formas de las regiones óptimas de acuerdo al número de dimensiones del cuantizador, para dos y tres dimensiones y se muestra la forma de calcular el coeficiente de cuantización para dos dimensiones. También se obtiene la integral de distorsión heurística-mente.

Se describe la técnica empleada por Max para la obtención de un cuantizador en una dimensión y se mencionan los estudios hechos por Fleisher, Panter, Dite, Algazi, Wood y Zador para el problema de optimización. También se mencionan ciertas condiciones hechas por Buclikew, Gersho, Likaszewicz, Steinhaus y Lolyd que llevan a resultados óptimos o asintóticamente óptimos.

Se describe como llegar a una partición óptima como solución al problema de optimización.

Por último se hace una comparación de las relaciones señal a ruido que se obtienen al emplear diferentes tipos de modulación y la codificación de entropía en la cuantización.

En el cap. 7 se dijo que la teoría de la optimización ya no resultaba relevante al utilizar la codificación de entropía, pero se podría hacer un estudio muy detallado de las ventajas

que resultarían al combinar la codificación de la entropía con cuantizadores robustos o con cuantizadores adaptivos o con ambos.

También se podrían estudiar las técnicas de codificación y hacer modelos para combinar esta técnica y los cuantizadores vistos en el presente trabajo, de tal forma que de acuerdo al tipo de fuente de información que se tenga, ya sea voz, video, datos, etc, se llegue al código óptimo y al cuantizador óptimo para cada uno de estos casos.

BIBLIOGRAFIA

1. **Capacitación de Personal en Técnicas Digitales**
Primer Reporte, Proyecto 2636
I.I.E. México, 1981.
2. **Digital and Analog Communication Systems**
K. Sam Shanmugam
John Wiley & Sons.
U.S.A., 1979.
3. **Digital Communications by Satellite**
Thomas Kailath
Prentice-Hall
New Jersey, U.S.A. 1977.

4. Future Developments in Telecommunications
Second Edition
James Martin
Prentice-Hall, Inc.
New Jersey, U.S.A., 1977.
5. Telecommunication Transmission Handbook
Second Edition
Roger L. Feeman
John Wiley & Sons,
New York, U.S.A., 1981.
6. Communication Systems
Simon Haykin
John Wiley & Sons,
New York, U.S.A., 1978.
7. Data Transmission
Dogan A. Tugal-Osman Tugal
Mc Graw-Hill
New York, U.S.A., 1982.
8. Communication System Principles
Peyton Z. Peebles, Jr.
Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
Massachusetts, U.S.A., 1976.
9. Telecommunications and The computer
Second Edition
James Martin
Prentice-Hall
New Jersey, U.S.A., 1976.
10. Telecommunication System Engineering, Analog and Digital
Network Design
Roger L. Freeman
John Wiley & Sons
New York, U.S.A., 1980.

11. Analog and Digital Communication
W. David Gregg
John Wiley & Sons,
New York, U.S.A., 1977
12. Quantizing for Minimum Distortion
Joe Max
Ire Transactions on Information Theory
March 1960
13. Digital Coding of Speech Waveforms
Nuggehally S. Jayant
Proceedings of the IEEE
May, 1974.
14. Companding and Random Quantization in Several Dimensions
James A. Bucklew
IEEE Transactions on Information Theory
March, 1981.
15. Quantization
Allen Gersho
IEEE Communications Society Magazine
September, 1977.
16. Asymptotically Optimal Block Quantization
Allen Gersho
IEEE Transactions on Information Theory
July, 1979.
17. An Algorithm for Vector Quantizer Desing
Joseph Linde, Andres Buzo, Robert M. Gray
IEEE Transaction on Communications
January, 1980.

18. The Design of Two-Dimensional Quantizers Using Prequantization
Kerry D. Rines, Neal C. Gallagher Jr.
IEEE Transaction on Information Theory
March, 1982.
19. On the Structure of Vector Quantizers
Allen Gersho
IEEE Transaction on Information Theory
March, 1982.
20. A Bound on Signal-to-Quantizing Noise Ratios for Digital Encodign Systems
21. Transmission, Information, Modulation and Noise
Mischa Schwartz.
Mc Graw-Hill
New York, U.S.A., 1980.

AGRADEZCO A LA SRA. YOLANDA LUNA,
SU VALIOSA COLABORACION EN LA ME-
CANOGRAFIA DEL PRESENTE TRABAJO.