

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

28
90

PROGRAMA PARA LA RESOLUCION DE MARCOS CON BARRAS
DE SECCION VARIABLE

TESIS

Que Para Obtener el Título de

INGENIERO CIVIL

Presenta

HECTOR GONZALEZ PEREZ



México, D.F. Enero 1983.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Indice.

PROGRAMA PARA LA RESOLUCION DE
MARCCS CON BARRAS DE SECCION
VARIABLE

Capitulo	Pagina
1.- Introduccion -----	1
2.- Teoria -----	3
a) Teoremas estructurales basicos -----	3
b) El metodo directo de las rigideces -----	14
3.- Diagrama de Flujo -----	48
4.- Listado -----	66
5.- Ejemplos -----	73
a) Ejemplo # 1 -----	73
b) Ejemplo # 2 -----	104
c) Ejemplo # 3 -----	122
6.- Conclusion -----	140
Bibliografia -----	144

Introducción.

En la actualidad es relativamente fácil disponer de una computadora, por lo cual es conveniente utilizar sus servicios en los calculos de ingeniería, esto permite que ellos puedan realizarse en menor tiempo que el que se utilizaría para efectuarlos manualmente, además, si el programa en la computadora es correcto y esta se encuentra funcionando adecuadamente, pueden evitarse los errores que generalmente se cometen al efectuar manualmente calculos largos, con esto puede garantizarse que los resultados que arroja la computadora dependen exclusivamente de los datos de entrada del programa.

No obstante de que el costo del tiempo de computadora es elevado, la eficiencia de la misma hace que en la mayoría de los casos se justifique su utilización en calculos largos y/o repetidos.

Es obvio que la eficiencia obtenida depende del programa y de los algoritmos en que este se basa para efectuar los cálculos así como de la forma en que este se adapte a la máquina en que se utiliza y del lenguaje que se utilice para desarrollarlo.

El programa presentado en este trabajo se realizó en lenguaje BASIC utilizandose para su ejecución una microcomputadora.

El objetivo de este programa es el de calcular: los desplazamientos de los nudos en las direcciones de los distintos grados de libertad (angulares y lineales), las deformaciones angulares en los extremos de las barras y las fuerzas internas (momentos flexionantes) en los mismos, todo ello para marcos planos con barras de sección variable, según las especificaciones

(2)

del manual de constantes de marcos (Handbook of Frame Constants) editado por PCA (Portland Cement Association).

Cabe mencionar que el programa presentado admite la existencia de barras inclinadas en los marcos.

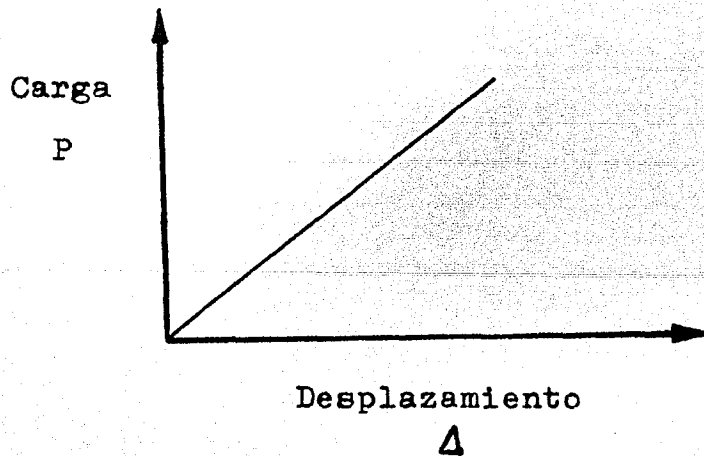
Teoría.

TEOREMAS ESTRUCTURALES BASICOS

Se asume que el lector esta familiarizado con los teoremas estructurales básicos, sin embargo, por complementar este trabajo, estos prerrequisitos serán brevemente presentados.

1.- Ley de Hooke.

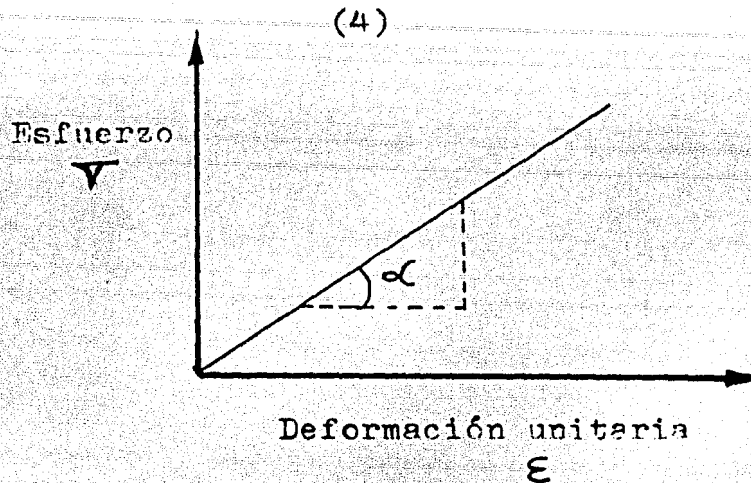
La relación entre carga y desplazamiento fue investigada -- por el físico experimental inglés Robert Hooke (1635-1703). -- El encontró que estando en el rango elástico de un material la carga era proporcional al desplazamiento.



De aquí se establece que el esfuerzo σ es proporcional a la deformación unitaria ϵ a lo cual se denomina comportamiento de Hooke.

La razón entre el esfuerzo y la deformación unitaria, en el rango elástico, la cual es una constante del material que se denota como el Módulo de Elasticidad (E) o módulo de Young por el filósofo inglés Thomas Young (1773-1829).

$$E = \sigma / \epsilon$$



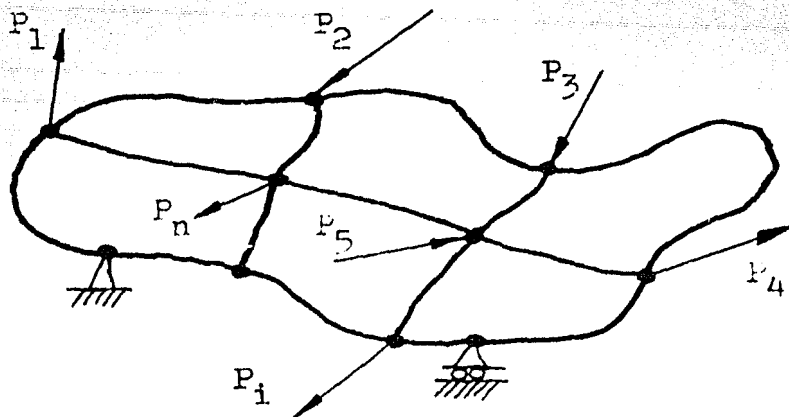
Donde:

Módulo de elasticidad (E) = $\tan \alpha$ = pendiente de la recta

Por consiguiente se establece que $\sigma = E\varepsilon$

2.- Teorema de superposición.

Considérese la configuración estructural mostrada en la figura sujeta a un sistema de cargas $\{P_k\}$. Si los desplazamientos resultantes de todos los puntos son directamente proporcionales al sistema de cargas aplicadas, entonces los mismos desplazamientos resultantes se obtendrían aplicando cada carga por separado en cualquier secuencia y sumando los efectos individuales para cada punto. Esto es lo propuesto por el teorema de superposición.



Por ejemplo el desplazamiento resultante en el punto i , Δ_i , igualará a la suma de los desplazamientos en el punto i debidos a cada una de las cargas aplicadas que componen el sistema.

$$\Delta_i = d_{i1} + d_{i2} + d_{i3} + \dots + d_{in}$$

$$\Delta_i = f_{i1}P_1 + f_{i2}P_2 + f_{i3}P_3 + \dots + f_{in}P_n$$

$$d_{ik} = f_{ik}P_k$$

Donde:

Δ_i = Desplazamiento total en el punto i

d_{ik} = Desplazamiento parcial en el punto i debido a la carga aplicada en el punto k .

f_{ik} = Desplazamiento en el punto i debido a una carga unitaria aplicada en el punto k , mientras que las cargas en los otros puntos no existen.

P_k = Fuerza aplicada en el punto k .

Por tanto los desplazamientos correspondientes al sistema de cargas aplicado será en forma matricial.

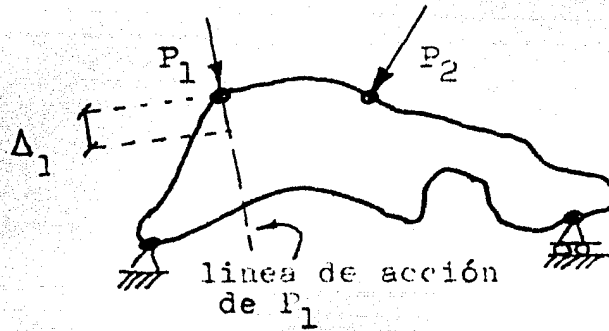
$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \dots & f_{2n} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \dots & f_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{bmatrix}$$

o en forma condensada $\{\Delta_k\} = [F_k] \{P_k\}$

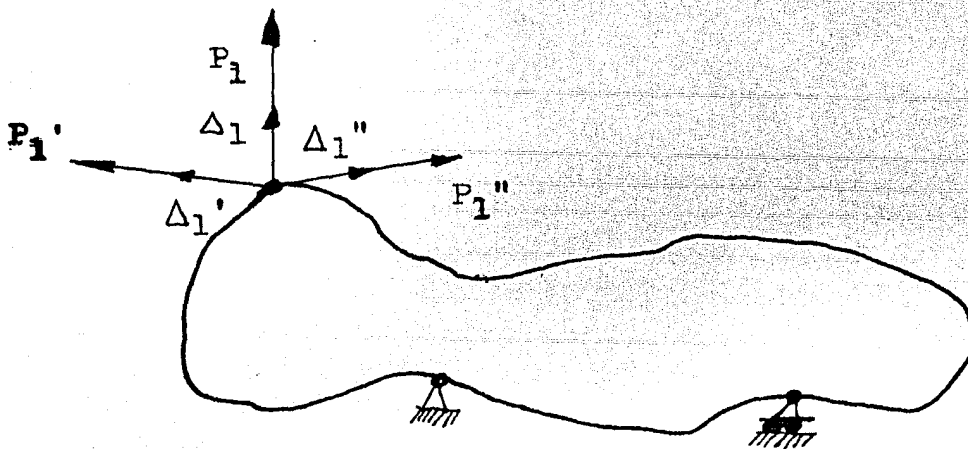
Donde: $[F_k]$ es llamada la matriz de flexibilidades o la matriz de coeficientes de influencia estructural correspondiente al sistema de cargas aplicado $\{P_k\}$.

(6)

Los desplazamientos resultantes $\{\Delta_k\}$ son medidos a lo largo de la línea de acción de la carga que actúa en ese punto. Estos desplazamientos se utilizan cuando se calcula el trabajo hecho por las cargas aplicadas $\{P_k\}$.



Por conveniencia se considerará una sola carga discreta aplicada en cada nudo, y en general habrá más de una carga discreta en un nudo cada una teniendo diferente línea de acción. Como previamente se mencionó, los desplazamientos resultantes $\{\Delta_k\}$ son desplazamientos correspondientes, ésto es, para cada carga discreta aplicada P_i existe un desplazamiento correspondiente, por lo cual al analizarse el desplazamiento en un punto deberá observarse cual desplazamiento correspondiente se está considerando.



3.- Trabajo realizado por un sistema de cargas.

Se supone el comportamiento elástico lineal de la estructura, es decir que el comportamiento de Hooke existe.

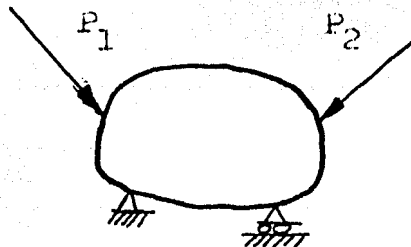
Suponiendo que una única carga discreta se aplica a una estructura que esta soportada de tal forma de evitar el movimiento de la misma, si la carga se aplica gradualmente desde cero hasta su valor final, el trabajo hecho por la carga P_1 , la cual tiene un desplazamiento correspondiente Δ_1 , es dado por $1/2 P_1 \Delta_1$.

Cuando un sistema de cargas se aplica el trabajo realizado está dado por: $1/2 P_1 \Delta_1 + 1/2 P_2 \Delta_2 + \dots + 1/2 P_n \Delta_n$

El trabajo efectuado por un sistema de cargas $\{P_k\}$ cuyos desplazamientos correspondientes son $\{\Delta_k\}$, es dado en forma matricial condensada por: $1/2 \{P_k\} \{\Delta_k\}$

4.- Teorema recíproco de Maxwell

Considerese la configuración estructural mostrada en la figura, el sistema de cargas aplicado consta de dos cargas discretas, P_1 , P_2 , las cuales se aplicarán gradualmente.



Dos secuencias de aplicar las cargas deben considerarse.

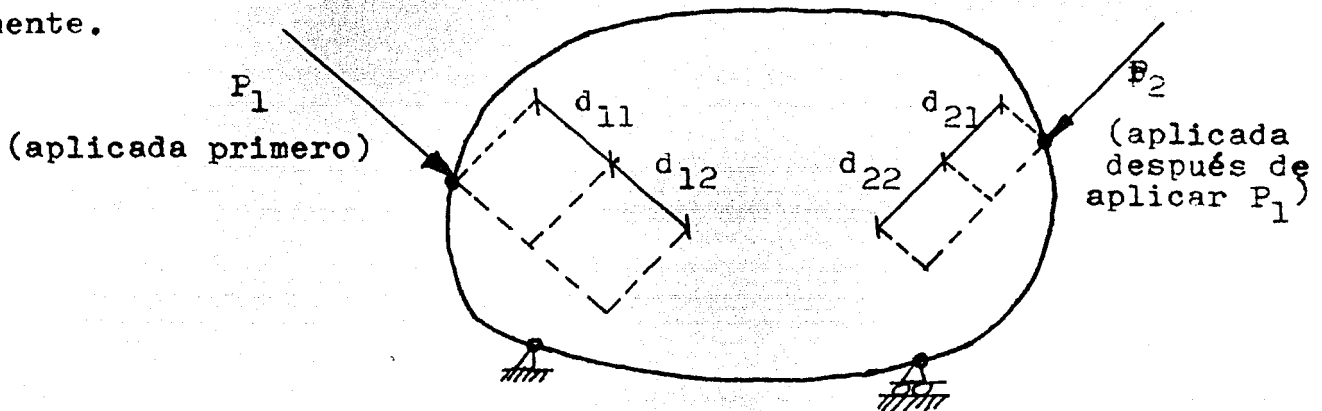
(8)

1 Aplicando P_1 primero y P_2 después

2 Aplicando P_2 primero y P_1 después

Secuencia 1 aplicando P_1 primero produce los desplazamientos correspondientes d_{11} en el punto 1 y d_{21} en el punto 2.

Si se aplica ahora P_2 ocurrirán desplazamientos adicionales en los puntos 1 y 2 éstos se denotan por d_{12} y d_{22} respectivamente.



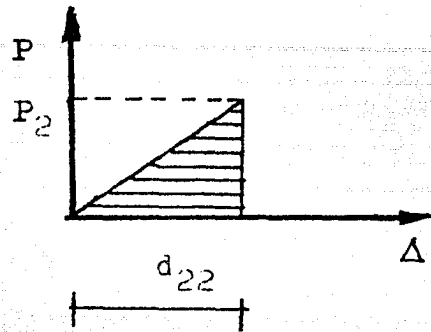
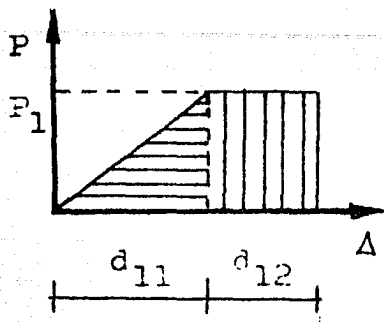
Los subíndices dados a los desplazamientos deben interpretarse como sigue:

El primer subíndice indica el punto en el cual el desplazamiento correspondiente se está determinando, el segundo subíndice indica el punto en el cual actúa la carga que provoca el desplazamiento correspondiente.

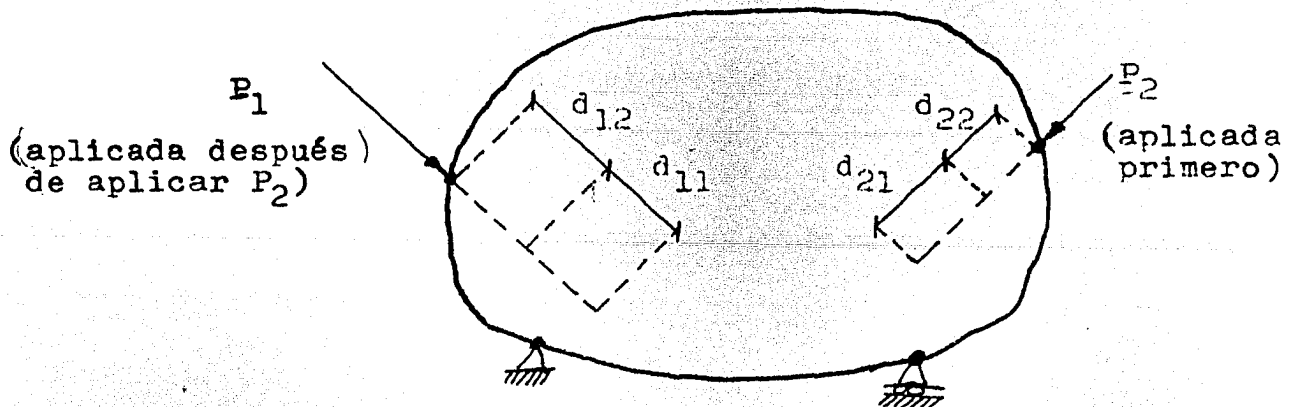
Debe notarse que P_1 permanece constante durante el desplazamiento d_{12} , el trabajo realizado por esta secuencia de carga está dado por: $1/2 P_1 d_{11} + P_1 d_{12} + 1/2 P_2 d_{22}$

Esto gráficamente expresa que el área total sombreada es el trabajo realizado.

(9)

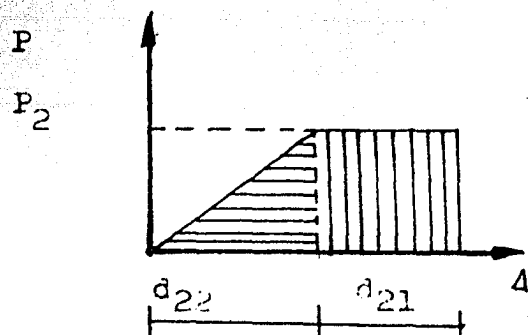
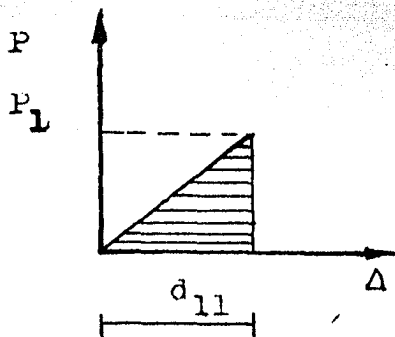


Secuencia 2 si ahora P_2 es aplicada primero, los desplazamientos correspondientes en los puntos 1 y 2 son d_{12} y d_{22} respectivamente, aplicando P_1 posteriormente provoca los desplazamientos adicionales d_{11} en el punto 1 y d_{21} en el punto 2. Para esta secuencia de carga P_2 permanece constante durante el desplazamiento d_{21} .



El trabajo realizado por esta secuencia de carga está dado por: $\frac{1}{2} P_1 d_{11} + P_2 d_{21} + \frac{1}{2} P_2 d_{22}$

Lo cual se muestra también graficamente



Cuando existe comportamiento de Hooke el trabajo efectuado es independiente de la secuencia de carga; por lo cual el trabajo realizado en cada caso será el mismo, por tanto:

$$1/2P_1d_{11}+P_1d_{12}+1/2P_2d_{22}=1/2P_1d_{11}+P_2d_{21}+1/2P_2d_{22}$$

de aquí: $P_1d_{12}=P_2d_{21}$

si $P_1=P_2$ $d_{12}=d_{21}$

si $P_1=P_2=1$ entonces $f_{12}=f_{21}$

El teorema recíproco de Maxwell puede enunciarse como sigue:

El desplazamiento en el nudo i debido a una carga unitaria aplicada en el punto j es numéricamente igual al desplazamiento en el punto j debido a una carga unitaria aplicada en el punto i .

En ambos casos el desplazamiento es un desplazamiento correspondiente, ésto es, el desplazamiento en el punto i se mide a lo largo de la línea de acción de P_i y el desplazamiento en el punto j se mide a lo largo de la línea de acción de P_j .

La matriz de flexibilidades de una estructura es normalmente considerada como una matriz cuadrada, cuando esto sucede la matriz es también simétrica y por el teorema de Maxwell, los coeficientes cruzados de la matriz de flexibilidades son iguales, es decir: $f_{ij}=f_{ji}$

5.- Cargas y desplazamientos generalizados.

Hasta este punto solo cargas discretas y sus desplazamientos correspondientes se han considerado en los sistemas de carga y desplazamiento, ahora podremos presentar una generalización

zación adicional.

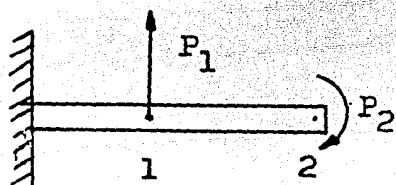
- a) El sistema de cargas discretas $\{P_k\}$ puede consistir de fuerzas y/o momentos.
- b) El sistema de desplazamientos correspondientes $\{\Delta_k\}$ puede consistir de desplazamientos lineales y/o desplazamientos angulares o giros.
- c) Cuando se adopte el concepto de sistemas generalizados, debe recordarse que los coeficientes de la matriz de flexibilidades deben ser dimensionalmente correctos.
- d) Los teoremas estructurales permanecen válidos para los sistemas generalizados.

Consideremos el cantiliver mostrado, los desplazamientos correspondientes generalizados están dados por:

$$\text{en el punto 1} \quad \Delta_1 = d_{11} + d_{12} = f_{11}P_1 + f_{12}P_2$$

$$\text{en el punto 2} \quad \Delta_2 = d_{21} + d_{22} = f_{21}P_1 + f_{22}P_2$$

Las dimensiones de las distintas cantidades se muestran en la tabla; con el objeto de ilustrar mejor utilizaremos unidades, digamos toneladas, metros, radianes, para las cargas y desplazamientos, y las dimensiones serán fuerza y longitud.



Cantidad	Dimensión	Unidades
P_1	F	Ton
P_2	FL	Ton m
Δ_1	L	m
Δ_2	--	rad
f_{11}	L/F	m/ton
f_{12}	L/FL=1/F	m/ton m=1/ton
f_{21}	1/F	rad/ton
f_{22}	1/FL	rad/ton m

Por el teorema recíproco de Maxwell $f_{12}=f_{21}$ estos coeficientes son iguales numericamente pero dimensionalmente son distintos, como puede observarse en la tabla.

6.- Energía total.

Cuando un sistema de cargas es aplicado a una estructura elástica, los elementos estructurales se deforman y la energía se almacena en los mismos, a esta energía se le conoce como energía de deformación, cada elemento en la estructura almacena un porcentaje de la energía total. Cuando las cargas son removidas la energía de deformación se utiliza para reestablecer la configuración original de la estructura.

La energía de deformación se presenta de diferentes formas, dependiendo de la carga y puede ser: energía de flexión, energía de cortante y energía axial.

Cuando los apoyos ceden, energía adicional es almacenada, esto se conoce como el potencial de las reacciones.

También hay potencial debido a la deficiencia de las uniones de los elementos estructurales, es decir cuando existe juego en los nudos de una estructura.

7.- Grados de libertad.

Una estructura elástica continua tiene un número infinito de desplazamientos definidos que se pueden identificar, observar o calcular, pero el perfil deformado de una estructura se puede describir por medio de un número limitado de estos desplazamientos. Al número de desplazamientos que se eligen para definir el perfil deformado se le llama el número de grados

de libertad de la estructura.

En general, se puede pensar que una estructura es una red de miembros y nudos. Los nudos se introducen en donde los miembros se cortan o terminan, y donde se colocan los apoyos.

Por conveniencia se pueden añadir más nudos; por ejemplo, en el lugar en que el miembro cambia de sección transversal o donde se requiera conocer los valores de los desplazamientos. Por lo común se supone que los miembros son rectos y prismáticos entre los nudos, pero ésto no es un requisito. Las componentes de los desplazamientos nodales se llaman grados de libertad. Es suficiente conocer los desplazamientos nodales para definir completamente el perfil deformado de la estructura, porque los miembros siguen una curva elástica definida entre los nudos basada en los desplazamientos de sus extremos, en la carga, y en las propiedades geométricas. Por comodidad, es común que se tomen las componentes del desplazamiento en cada una de las tres direcciones de los ejes de coordenadas mutuamente ortogonales como los tres grados de libertad nodales. En una estructura tridimensional pueden existir seis grados de libertad por cada nudo y, en una estructura de dos dimensiones tres grados de libertad por cada nudo. Algunos de éstos pueden restringirse por medio de las condiciones de apoyo o de sus posiciones acerca del comportamiento dejando el resto como la cantidad de grados de libertad de la estructura.

EL METODO DIRECTO DE LAS RIGIDECES

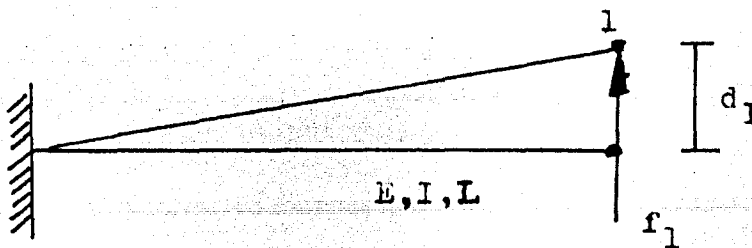
Entre los logros de mayor alcance en la ingeniería estructural esta la capacidad de analizar automáticamente casi todo tipo de estructura con un elevado grado de precisión y a un costo razonable. La aparición de la computadora digital ha hecho posible este perfeccionamiento. Al aparecer la computadora se crearon de inmediato métodos de análisis adecuados para el cálculo en computadora; el más usado de ellos es el método directo de las rigideces, inventado en la década de 1950.

Al principio de dicha década Samuel Levy sugirió algunas de las ventajas de un método de desplazamientos usando coeficientes de influencia para el análisis de las estructuras de los aviones. Al mismo tiempo, varias otras personas estaban elaborando una variedad de métodos para el análisis con base en métodos matriciales, con objeto de aprovechar la computadora digital. Este confuso conjunto de métodos se consolidó algo con el tiempo. Hacia 1954 Turner, Clough, Martin y Topp presentaron el primer tratamiento del método directo de las rigideces. Demostraron que la matriz de rigideces, un ordenamiento de los coeficientes de influencia de rigidez que se usan para determinar los desplazamientos, se puede plantear como la superposición de las rigideces de los elementos o miembros.

La dualidad de los métodos de las fuerzas y de los desplazamientos fue demostrada por Argyris y Kesley en 1960 en su tratamiento de los teoremas de energía. Desde entonces, se ha obtenido una gran unidad de los diversos procedimientos, y se ha visto un rápido aumento en el tamaño de los problemas que se tratan, según aumentan el tamaño y las potencialidades de

las computadoras.

En la actualidad el ingeniero en estructuras debe estar familiarizado con el método de análisis de las rigideces porque constituye una poderosa herramienta de análisis. Al mismo tiempo deberá estudiar el uso correcto de esta forma automática de análisis. El resultado de un análisis es sólo tan bueno como los datos de que se parte, el criterio y la habilidad ingenieriles, que nunca se podrán automatizar, se deben aplicar a las suposiciones de carga, comportamiento del material, condiciones de apoyo, que son necesarios antes de hacer un análisis. Lo mismo se aplica a la interpretación y el uso de los resultados de tales análisis.



Las ideas básicas del método de las rigideces se pueden demostrar considerando el análisis de la viga en voladizo que se ilustra en la figura. Se desea determinar el desplazamiento en el extremo 1 (d_1) bajo la acción de la carga (f_1). Primero se escribe una relación fuerza-desplazamiento, imponiendo un desplazamiento unitario correspondiente a d_1 luego se determina la fuerza necesaria para producir este desplazamiento unitario en el extremo de una viga prismática en voladizo, que es $3EI/L^3$. Esta fuerza se define como coeficiente de influencia

de rigidez para la viga, k_1 , ya que representa la resistencia de la viga a un desplazamiento unitario.

Ahora considerése el equilibrio del nudo 1 en el diagrama de cuerpo libre que sigue:



La fuerza hacia abajo en el nudo, causada por la resistencia a la flexión de la viga, es $k_1 d_1$, y la fuerza hacia arriba es la carga aplicada f_1 . El equilibrio da:

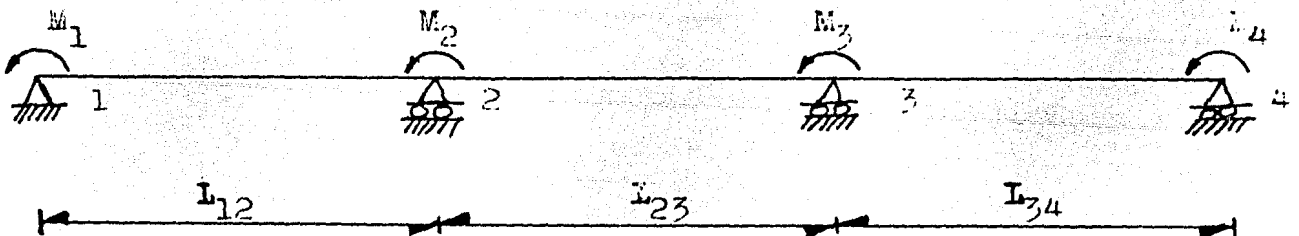
$$k_1 d_1 = f_1$$

$$(3EI/L^3) d_1 = f_1$$

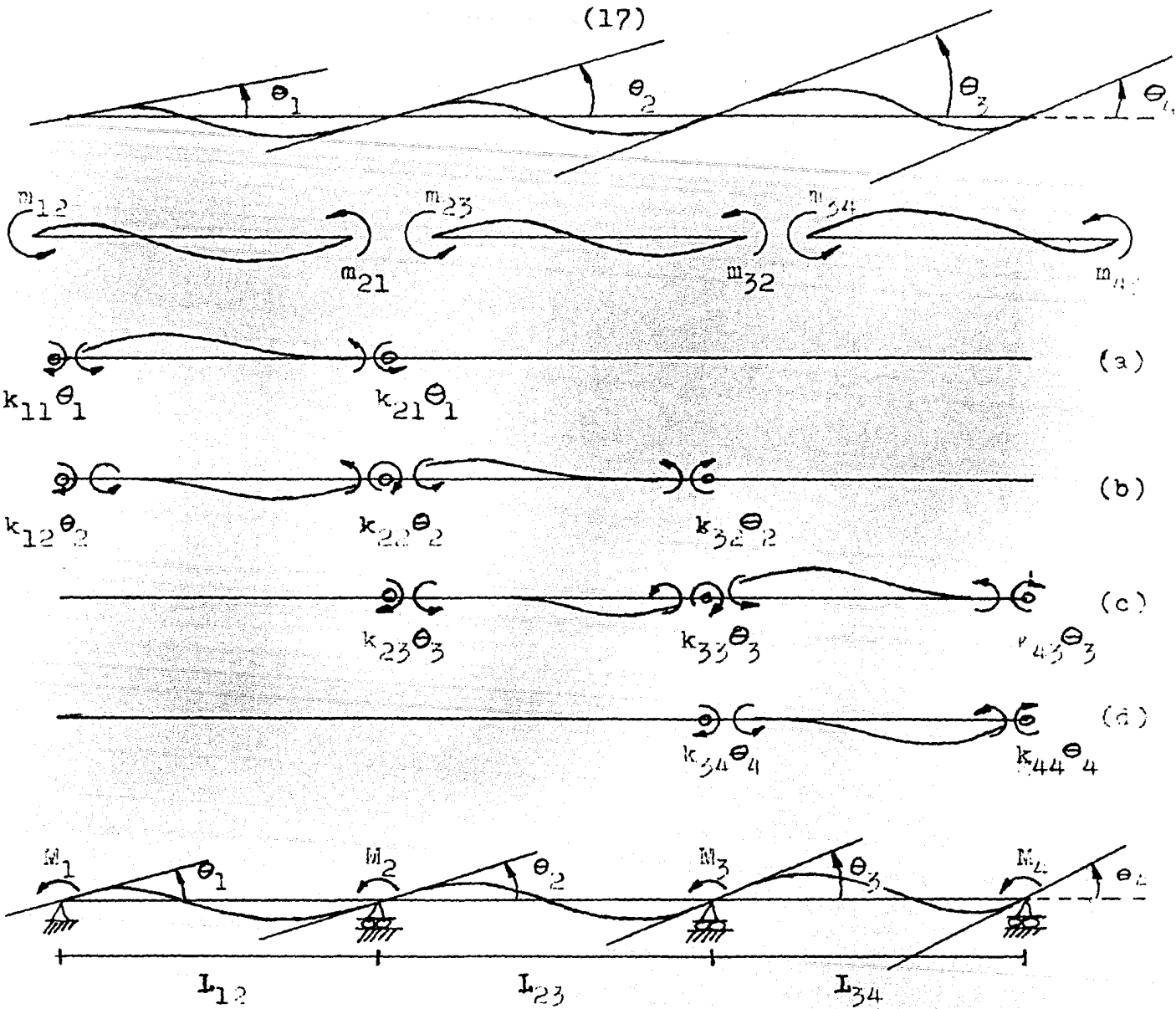
$$d_1 = f_1 L^3 / 3EI$$

Se ha usado un coeficiente de influencia de rigidez k_1 , que expresa la influencia de un desplazamiento unitario, para determinar el desplazamiento para la carga f_1 . El método de las rigideces es simplemente una extensión lógica de esta idea a las estructuras con muchos grados de libertad.

Considérese la trabe de tres claros siguiente:



(17)



Existe un grado de libertad de rotación en cada uno de los cuatro nudos. Se aplica una carga en cada nudo. El perfil deformado que se muestra en la figura se puede considerar como la superposición de cuatro casos separados con sólo un desplazamiento en cada uno de ellos. Estos casos separados se indican en las figuras a, b, c, d, por ejemplo en la figura a se muestra el perfil deformado de la estructura con θ_1 impuesta y todos los demás grados de libertad sujetos contra la rotación. - Las fuerzas que son necesarias en los extremos de los miembros

para lograr cada uno de estos modos de desplazamiento (producir la rotación, y evitar la rotación en los nudos sujetos) se indican en la figura, pero no se les da nombre. Por ejemplo en el nudo 1 el momento k_{11} es el que actúa en el nudo 1, provocándole una rotación unitaria, con los nudos 2 al 4 fijos contra la rotación. k_{12} es el momento que actúa en el nudo 1 causado por la rotación unitaria del nudo 2 que a su vez es causada por el momento k_{22} , con los nudos 1, 3 y 4 sujetos contra la rotación. Los términos en Θ representan las rotaciones reales de los nudos. Por tanto $k_{11} \Theta_1$ es el momento real en el extremo, en el nudo 1 de la figura a. Los momentos del nudo $k_{ij} \Theta_j$ se anotan en la figura como los totales para ambos miembros que se unen en un nudo, donde k_{ij} representa una rigidez de nudo. Estos totales son iguales al momento que aplican los miembros al nudo. Nótese que los momentos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj en los extremos de los miembros, que son positivos, producen momentos en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj en los nudos, que también se definen como positivos. La superposición de los cuatro casos que se muestran en la figura representa los momentos reales internos que obran en los nudos. El momento total interno en cualquier nudo debe ser igual al momento externo aplicado. Si se definen los momentos externos como positivos cuando tienen sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj, se puede expresar el equilibrio del nudo como:

$$k_{11} \Theta_1 + k_{12} \Theta_2 + k_{13} \Theta_3 + k_{14} \Theta_4 = M_1$$

$$k_{21} \Theta_1 + k_{22} \Theta_2 + k_{23} \Theta_3 + k_{24} \Theta_4 = M_2$$

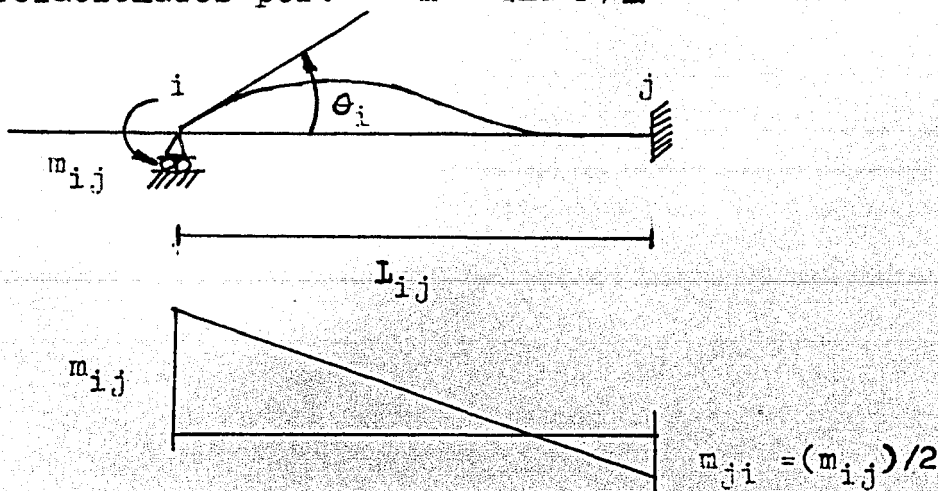
(19)

$$k_{31} \theta_1 + k_{32} \theta_2 + k_{33} \theta_3 + k_{34} \theta_4 = M_3$$

$$k_{41} \theta_1 + k_{42} \theta_2 + k_{43} \theta_3 + k_{44} \theta_4 = M_4$$

donde algunos de los términos k_{ij} son cero, tales como k_{13} , k_{14} , k_{24} y sus opuestos k_{31} , k_{41} y k_{42} .

La definición de los términos k_{ij} permite calcularlos en forma muy sencilla y repetida. En la siguiente figura se ilustra una relación básica fuerza-desplazamiento. Cuando el extremo lejano de un miembro prismático sometido a flexión está fijo, el momento y la rotación en el extremo cercano, están relacionados por: $m = 4EI \theta / L$



Si se aplica una rotación unitaria, la rigidez a la flexión es por tanto, $k_{ii} = m/\theta = 4EI/L$

En este caso el momento en el extremo fijo es la mitad del momento aplicado en el extremo que gira (recordando el factor de transporte en la distribución de momentos). Así: $k_{ji} = 2EI/L$

Cuando se aplica una rotación unitaria a un nudo al que llega más de un miembro, la rigidez en el nudo es la suma de las rigideces con que contribuyen cada uno de los miembros que llegan

gan a él, porque cada miembro sufre una rotación dada.

En nuestra viga continua, los coeficientes de influencia de rigidez k se calculan fácilmente:

$$k_{11} = 4(EI/L)_{12}$$

$$k_{12} = k_{21} = 2(EI/L)_{12}$$

$$k_{22} = 4(EI/L)_{12} + 4(EI/L)_{23}$$

$$k_{23} = k_{32} = 2(EI/L)_{23}$$

$$k_{33} = 4(EI/L)_{23} + 4(EI/L)_{34}$$

$$k_{34} = k_{43} = 2(EI/L)_{34}$$

$$k_{44} = 4(EI/L)_{34}$$

$$k_{13} = k_{14} = k_{24} = k_{31} = k_{41} = k_{42} = 0$$

Nótese que en todos los casos $k_{ij} = k_{ji}$. Esto ocurre siempre con los coeficientes de influencia de rigidez y como resultado del teorema recíproco de Maxwell. El detalle principal de estos cálculos es que, aunque muy numerosos, son básicamente los mismos y se adaptan bien para usarlos en la computadora. Cada término se basa en el mismo caso sencillo de un miembro sometido a flexión, fijo en un extremo y dándosele una rotación unitaria al otro.

Los coeficientes de influencia de rigidez ahora se pueden sustituir en las ecuaciones de equilibrio y dando los valores numéricos apropiados para los términos $(EI/L)_{ij}$ es posible llegar a una solución numérica de los ángulos Θ o giros.

El método de las rigideces se resume como sigue:

Primero, cada uno de los grados de libertad de la estructura recibe un número para fines de notación. Los desplazamiento

tos correspondientes a cada uno de los grados de libertad sen las incógnitas que se van a determinar. El segundo paso consiste en calcular los coeficientes de influencia de rigidez. Con este objeto, se sujetan todos los nudos de la estructura, y luego se ejecuta una serie de análisis, uno por cada grado de libertad, por turno, dando un desplazamiento unitario. Cuando al grado de libertad j se da un desplazamiento unitario se determinan las fuerzas correspondientes a cada uno de los grados de libertad i , llamado k_{ij} , luego se formulan las ecuaciones de equilibrio que siempre son de la forma:

$$k_{11}d_1 + k_{12}d_2 + \dots + k_{1n}d_n = f_1$$

$$k_{21}d_1 + k_{22}d_2 + \dots + k_{2n}d_n = f_2$$

$$\vdots$$

$$k_{n1}d_1 + k_{n2}d_2 + \dots + k_{nn}d_n = f_n$$

donde los términos d_1 a d_n representan los n desplazamientos desconocidos, y los términos f_1 a f_n son las cargas nodales.

En las cargas nodales aplicadas se usa la misma convención de signos, así como en las fuerzas en los extremos de los miembros y los momentos: las fuerzas son positivas si están dirigidas hacia arriba o a la derecha, y los momentos son positivos si tienen la dirección del movimiento de las manecillas del reloj.

Hasta ahora, el estudio del método de las rigideces se ha referido al caso en que las cargas sólo se aplican a los nudos lo que permite escribir las ecuaciones de equilibrio en una -

forma muy sencilla. Sin embargo, en la mayor parte de los -- problemas reales intervienen cargas aplicadas lateralmente a -- los miembros entre los nudos. Un ejemplo común es el caso de la carga uniformemente distribuida sobre una viga. Para efectuar la conversión a cargas nodales se usa el principio de la superposición.

Debe notarse que con este método por lo regular se utilizan más ecuaciones que con el método de las fuerzas y por tanto, requiere más trabajo de cálculo. Al mismo tiempo habrá que observar que intervienen más calculos repetidos que en el método de las fuerzas. Aunque el método directo de rigideces no es un método popular para trabajar a mano, por lo laborioso de resolver el sistema de ecuaciones, es el que más se usa en los -- análisis que se hacen por computadora para las estructuras.

Ahora organizaremos el método de manera que se adecúe al -- cálculo con computadoras. El resultado constituye un recurso valioso para resolver estructuras reticulares de cualquier tipo, teniendo la facultad de poder ampliarse sencillamente para las formas más generales de estructura.

El método se plantea en términos de matrices. El método -- de las matrices se adapta muy bien para formular los cálculos en que es necesario usar ecuaciones simultáneas, y es la ma--- nera natural de efectuar estos cálculos en una computadora.

Aquí no se examinan los métodos empleados para resolver las ecuaciones que se obtienen. La inversión se usa como forma -- simbólica para expresar la solución de ecuaciones, pero no se intenta sugerir que la inversión es el único procedimiento. La solución de ecuaciones es una materia completa en sí, especialmente

mente cuando se trata de un sistema grande de ecuaciones como los que se presentan con frecuencia en el análisis estructural.

La ecuación básica de rigideces se desarrolló anteriormente, ésta expresa el equilibrio de cada uno de los nudos en función de los coeficientes de influencia de la rigidez nodal y de los desplazamientos nodales desconocidos.

Esta ecuación en notación matricial es:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & & k_{3n} \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$$

En notación matricial abreviada se puede escribir como:

$$[K] \{D\} = \{F\}$$

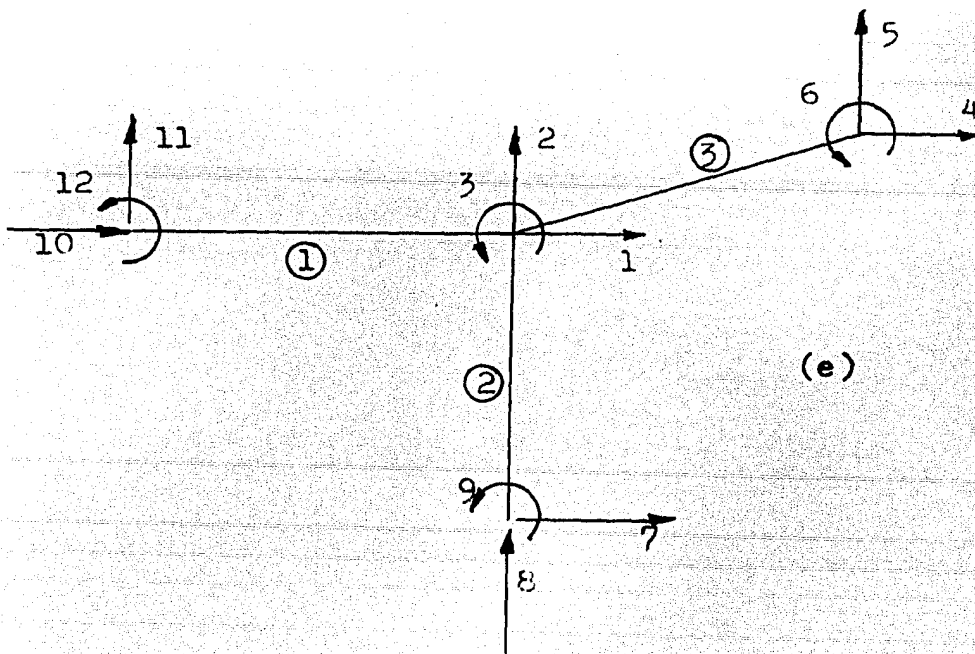
donde a $[K]$ se le llama matriz de rigideces de la estructura a $\{D\}$ vector de desplazamientos y a $\{F\}$ vector de cargas.

En esta ecuación k_{ij} es la fuerza nodal correspondiente al grado de libertad i causada por la aplicación de un desplazamiento unitario correspondiente al grado de libertad j . d_1, d_2, \dots, d_n son los desplazamientos nodales desconocidos y f_1, f_2, \dots, f_n son las cargas nodales aplicadas, correspondientes al grado de libertad $1, 2, \dots, n$. La formación de

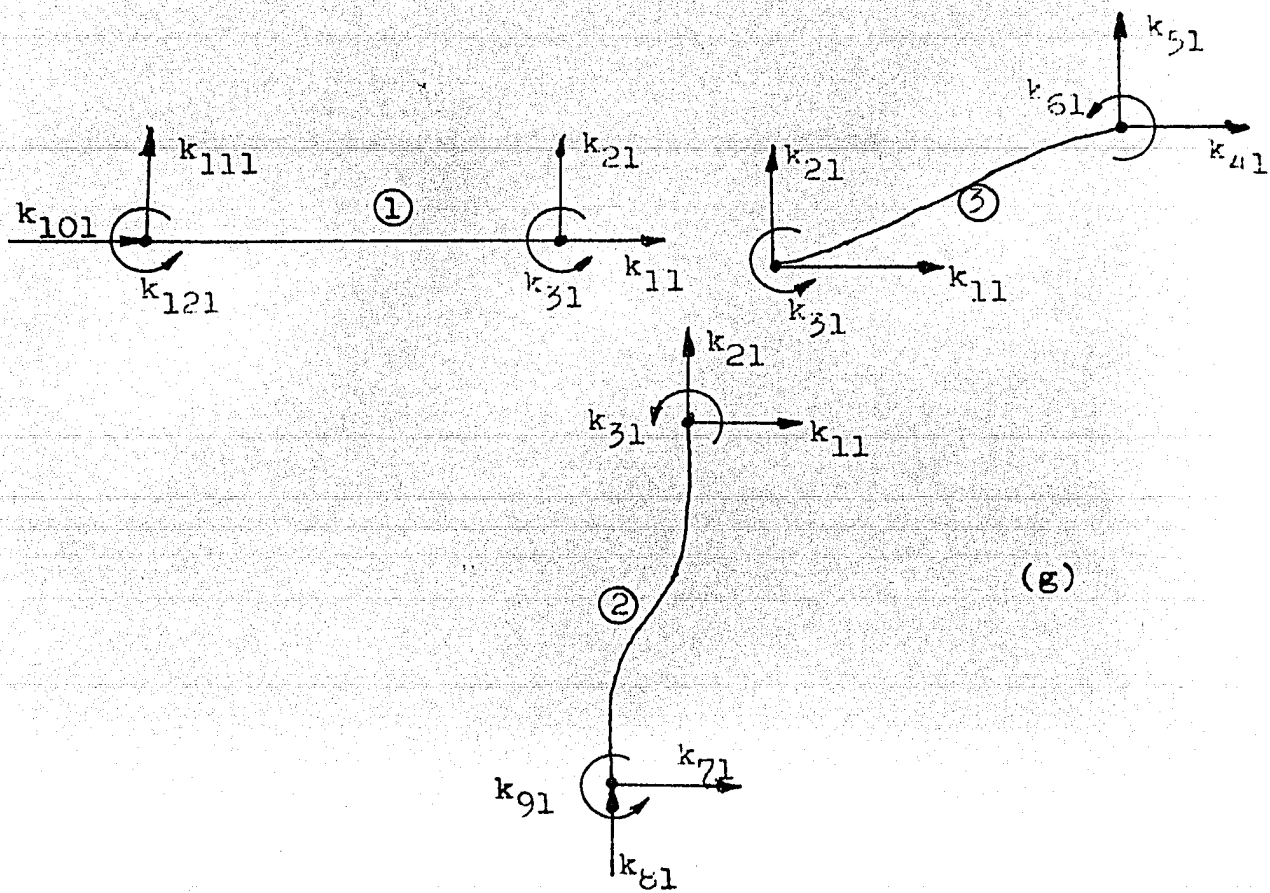
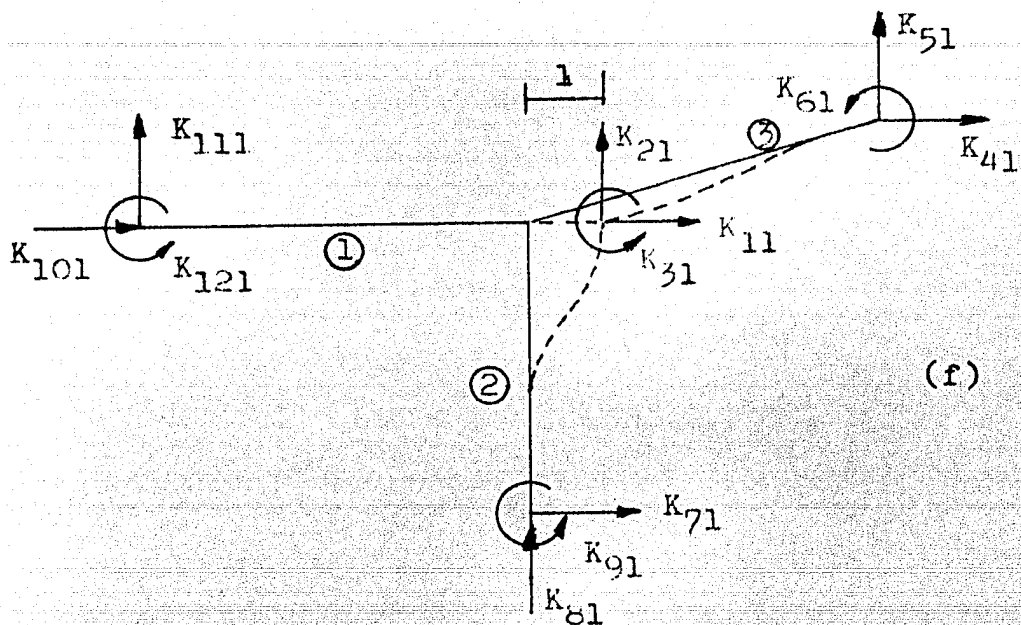
la matriz $[K]$ es un paso importante del proceso de análisis.

Debido a que en el análisis de la rigidez los grados de libertad se localizan en las uniones o nudos, a la fuerza k_{ij} se le llamará rigidez nodal. Nuestro objetivo es idear una manera eficiente, automática, para generar los términos k_{ij} .

Todos los términos de una columna dada de la matriz de rigideces son fuerzas nodales producidas por un solo desplazamiento nodal unitario aplicado. Considérese parte de una estructura reticular plana, según se muestra en la figura e, los grados de libertad están numerados en la figura (del 1 al 12). Si se desea calcular los elementos de la primera columna de la matriz de rigideces de la estructura, se desplaza la estructura como se indica en la figura f (un desplazamiento unitario correspondiente al grado de libertad 1, manteniendo el valor de todos los demás desplazamientos en cero).



(25)



Los elementos K_{11} , K_{21} , K_{31} son las fuerzas correspondientes a los grados de libertad 1, 2 y 3 respectivamente, causados por un desplazamiento unitario correspondiente al grado de libertad 1. El resto de la estructura no aparece en la figura, porque solamente se desplaza el grado de libertad 1 y las únicas fuerzas y pares que hay que calcular son las asociadas a los miembros afectados por estos desplazamientos. Tales fuerzas se indican en la figura f en sus direcciones positivas definidas. Como ya se dijo antes, constituyen la primera columna de la matriz de rigideces de la estructura. Al observarlas se demuestra que pueden calcularse directamente sin dificultad; ésto se hace descomponiendo un término K dado en sus componentes según cada uno de los miembros que concurren a la junta. Por ejemplo, K_{11} es la suma de los términos k_{11} para cada uno de los tres miembros, como se muestra en la figura g. A la k minúscula se le llama coeficiente de influencia por rigidez del miembro. El problema se ha reducido al cálculo de las rigideces correspondientes del miembro.

Se examinara el cálculo de K_{11} . El miembro 1 se alarga -- una distancia igual a la unidad; por tanto, k_{11} para el miembro 1 es la fuerza necesaria para producir una elongación unitaria en el miembro 1. Para un miembro prismático de longitud L área A y módulo de elasticidad E , $k_{11} = EA/L$. El miembro 2 se traslada lateralmente en uno de sus extremos una distancia unitaria, con las rotaciones de los extremos impedidas. Se comprueba fácilmente (por el método de las áreas, de los momentos, del trabajo virtual o cualquier otro método para el cálculo de desplazamientos) que para el miembro 2, $k_{11} = 12EI/L^3$,

donde E , I y L se refieren al módulo de elasticidad, momento de inercia con relación al eje de flexión y longitud del miembro 2. Aquí se supone que la flexión es con relación a uno de los ejes principales. El miembro 3 sufre una forma más complicada de desplazamiento. Se evita la rotación pero la traslación en la dirección x de la estructura da por resultado tanto un acortamiento como una traslación lateral en el miembro inclinado. Es necesario prestar atención cuidadosa a la forma geométrica y a los componentes de las fuerzas y desplazamientos para calcular k_{11} directamente para el miembro 3. En vez de efectuar el cálculo aquí, más adelante se estudiará una manera efectiva de manejar los miembros inclinados.

En resumen cada término de la matriz de rigideces se puede calcular directamente examinando los extremos del miembro en cada nudo y sumando las rigideces con que contribuye cada miembro.

En el cálculo de las rigideces nodales, las rigideces del miembro se deben calcular primero en función de las direcciones de las coordenadas establecidas para la estructura. La rigidez nodal K_{ij} se encuentra entonces como la suma de las rigideces correspondientes del miembro k_{ij} . Surgen dificultades cuando la orientación del miembro difiere de las direcciones de las coordenadas de la estructura. Se atacará el problema determinando primero las rigideces del miembro en un sistema local de coordenadas conveniente para el miembro, y después se transformarán las mismas al sistema global de la estructura.

Hasta ahora conocemos lo esencial para comprender el fun---

cionamiento del método, pero en virtud de que existen diversas formas de aplicarlo nos limitaremos aquí a explicar aquélla -- que se empleó dentro del programa para la computadora con el objeto de obtener un mejor entendimiento de la misma.

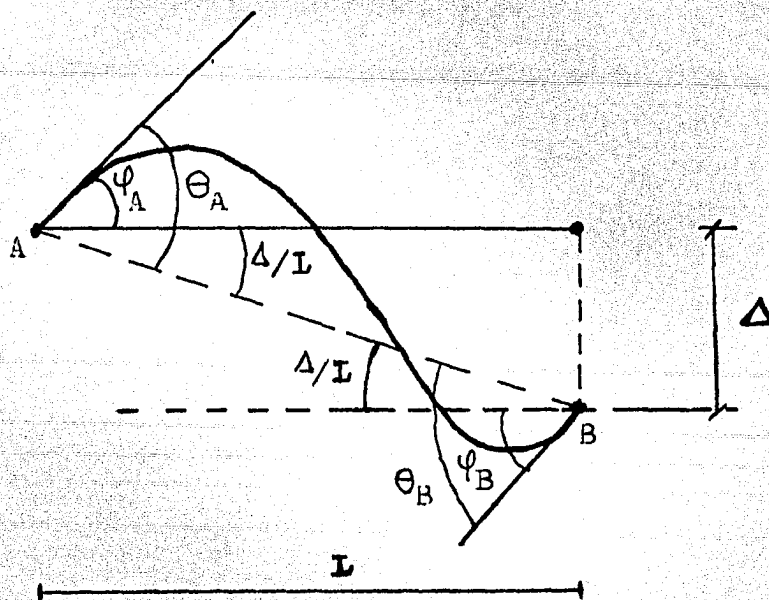
Para principiar consideremos las siguientes suposiciones.

-Despreciaremos la deformación axial de las barras, es decir supondremos que no existe.

-Nos interesará únicamente conocer los momentos internos finales en los extremos de las barras, en virtud que las fuerzas axiales y cortantes en dichas barras pueden calcularse fácilmente una vez conocidos estos.

-Trabajaremos sólo apoyos completos en los que ψ, dx, dy son 0.

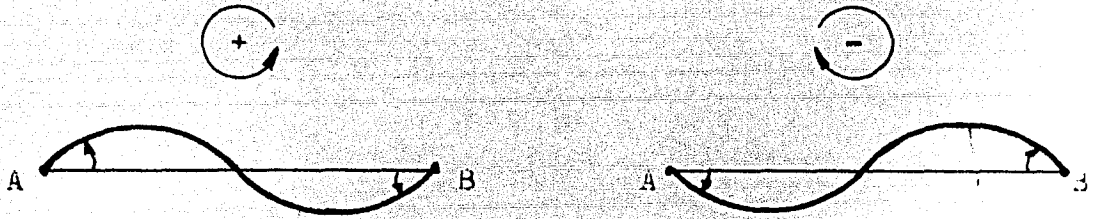
Consideremos el siguiente diagrama de una barra en que la dirección de la misma se define por un nudo origen (A) y un nudo destino (B).



Donde :

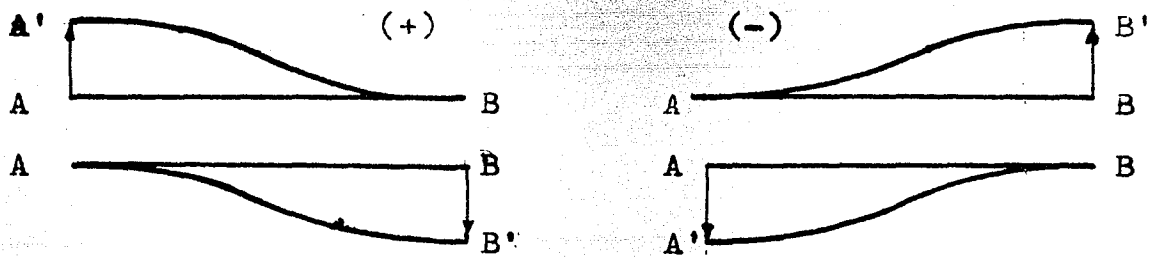
ψ_A y ψ_B son los desplazamientos angulares o giros de los nudos A y B respectivamente de acuerdo con la siguiente conven--

ci3n de signos:

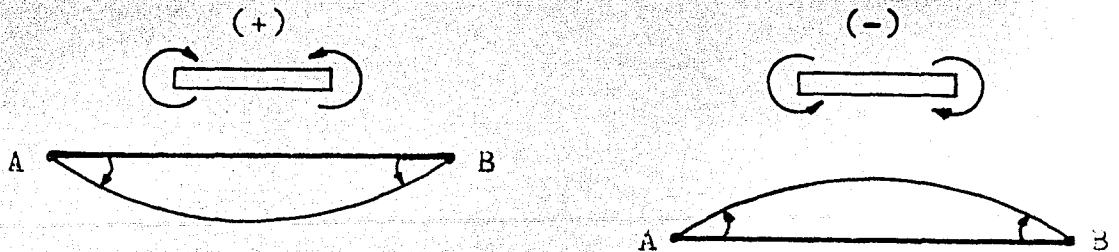


L es la longitud original de la barra.

Δ es el desplazamiento lineal relativo, perpendicular al eje original de la barra entre el nudo A y el nudo B siguiendo la siguiente convenci3n de signos:



θ_A y θ_B son las deformaciones angulares en los extremos A y B de la barra obedeciendo a la convenci3n de signos siguiente:



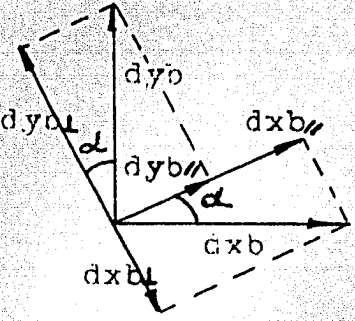
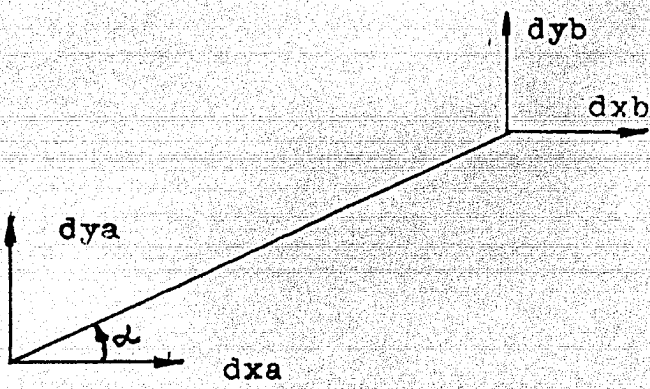
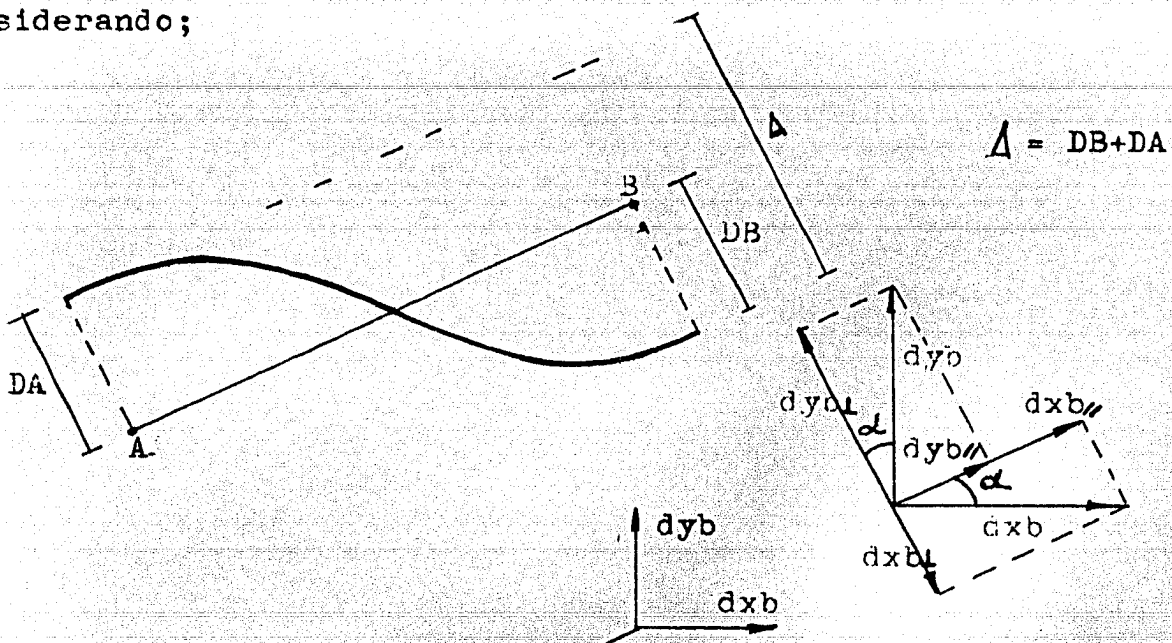
De la figura observamos que:

$$\theta_A = - (\psi_A + \Delta/L)$$

$$\theta_B = + (\psi_B + \Delta/L)$$

(30)

Considerando;

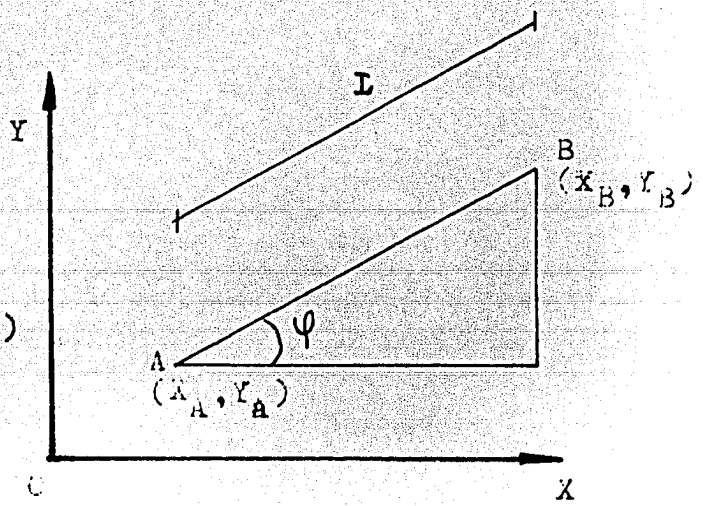
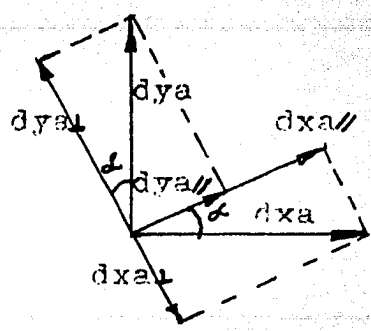


$$DA = dya_{\perp} + dxa_{\perp}$$

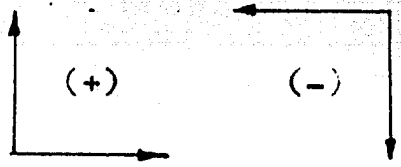
$$DA = \cos \alpha dya - \sin \alpha dxa$$

$$DB = -dyb_{\perp} + dxb_{\perp}$$

$$DB = -\cos \alpha dyb + \sin \alpha dxb$$



Los desplazamientos lineales (d) siguen la convención.



(31)

$$\cos \alpha = (X_B - X_A) / L \quad \text{Sen} \alpha = (Y_B - Y_A) / L$$

$$DA = \frac{X_B - X_A}{L} dya - \frac{Y_B - Y_A}{L} dxa$$

$$DB = \frac{Y_B - Y_A}{L} dxb - \frac{X_B - X_A}{L} dyb$$

$$\text{De aquí } \Delta = \frac{Y_B - Y_A}{L} (dxb - dxa) - \frac{X_B - X_A}{L} (dyb - dya)$$

Por tanto:

$$\theta_A = -\psi_A + \frac{Y_B - Y_A}{L^2} dxa - \frac{Y_B - Y_A}{L^2} dxb - \frac{X_B - X_A}{L^2} dya + \frac{X_B - X_A}{L^2} dyb \quad \text{Ec.1}$$

$$\theta_B = \psi_B - \frac{Y_B - Y_A}{L^2} dxa + \frac{Y_B - Y_A}{L^2} dxb + \frac{X_B - X_A}{L^2} dya - \frac{X_B - X_A}{L^2} dyb \quad \text{Ec.2}$$

donde:

ψ_A = desplazamiento angular del nudo origen de la barra

ψ_B = desplazamiento angular del nudo destino de la barra

dxa = desplazamiento lineal en la dirección x del nudo origen de la barra.

dya = desplazamiento lineal en la dirección y del nudo origen de la barra.

dxb = desplazamiento lineal en la dirección x del nudo destino de la barra.

dyb = desplazamiento lineal en la dirección y del nudo destino de la barra.

X_A = abscisa del nudo origen de la barra

Y_A = ordenada del nudo origen de la barra

X_B = abscisa del nudo destino de la barra

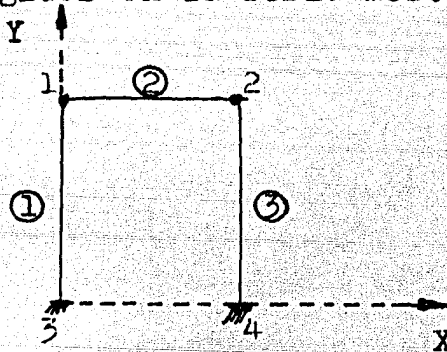
Y_B = ordenada del nudo destino de la barra

L = longitud de la barra

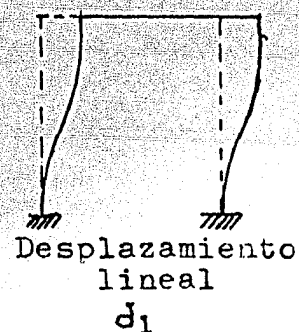
θ_A = deformación angular del extremo A de la barra

θ_B = deformación angular del extremo B de la barra.

Consideremos la siguiente estructura constituida por dos nu dos y tres barras dirigidas en la forma mostrada.



Observese que en esta estructura existen tres grados de libertad, dos desplazamientos angulares o giros y un desplazamiento lineal. A pesar de que la estructura sólo tiene dos nu dos hemos denominado como nudos 3 y 4 a los apoyos ésto únicamente para poder identificarlos.



Sabemos que los apoyos no permiten ningun desplazamiento - por ser empotramientos, por tanto son apoyos completos.

Para la barra 1 el nudo origen es el nudo 3 "apoyo" por tanto $\varphi_A = dx_A = dy_A = 0$, $X_A = X_3$ y $Y_A = Y_3$, el nudo destino es el nudo 1, por tanto $\varphi_B = \varphi_1$, $dx_B = d_1$ ya que este desplazamiento coincide con el grado de libertad lineal 1, $dy_B = 0$ ya que la barra 1 no sufre deformaciones axiales, $X_B = X_1$ y $Y_B = Y_1$.

Para la barra 2 el nudo origen es el nudo 1 por tanto $\varphi_A = \varphi_1$, $dx_A = d_1$, $dy_A = 0$, $X_A = X_1$ y $Y_A = Y_1$, el nudo destino es el nudo 2, por tanto $\varphi_B = \varphi_2$, $dx_B = d_1$, $dy_B = 0$ ya que la barra 3 no sufre deformaciones axiales, $X_B = X_2$ y $Y_B = Y_2$. Nótese que $dx_A = dx_B$ para esta barra, ésto porque la misma no sufre deformaciones - axiales.

Para la barra 3 el nudo origen es el nudo 2, por tanto $\varphi_A = \varphi_2$, $dx_A = d_1$, $dy_A = 0$ siendo este el mismo desplazamiento que tiene el apoyo denominado nudo 4 en la dirección y, $X_A = X_2$ y $Y_A = Y_2$ el nudo destino es el nudo 4 "apoyo", por tanto $\varphi_B = dx_B = dy_B = 0$, $X_B = X_4$ y $Y_B = Y_4$.

Si sustituimos estos valores en las ecuaciones 1 y 2 obtendremos:

$$\Theta_{A1} = - \frac{Y_1 - Y_3}{I_1^2} d_1$$

$$\Theta_{B1} = \varphi_1 + \frac{Y_1 - Y_3}{I_1^2} d_1$$

$$\Theta_{A2} = - \varphi_1 + \frac{Y_2 - Y_1}{I_2^2} d_1 - \frac{Y_2 - Y_1}{I_2^2} d_1 = - \varphi_1$$

$$\Theta_{B2} = \varphi_2 - \frac{Y_2 - Y_1}{I_2^2} d_1 + \frac{Y_2 - Y_1}{I_2^2} d_1 = \varphi_2$$

(34)

$$\theta_{A3} = -2 + \frac{Y_4 - Y_2}{I_3^2} d_1$$

$$\theta_{B3} = -\frac{Y_4 - Y_2}{I_3^2} d_1$$

Esto en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} \theta_{A1} \\ \theta_{B1} \\ \theta_{A2} \\ \theta_{B2} \\ \theta_{A3} \\ \theta_{B3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{Y_1 - Y_3}{I_1^2} \\ 1 & 0 & \frac{Y_1 - Y_3}{I_1^2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{Y_4 - Y_2}{I_3^2} \\ 0 & 0 & -\frac{Y_4 - Y_2}{I_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

Y en forma matricial abreviada es:

$$\{e\} = [A]\{d\} \quad \text{Ec. 3}$$

Donde: $\{e\}$ = Vector de deformaciones angulares.

$[A]$ = Matriz de Continuidad

$\{d\}$ = Vector de desplazamientos.

Siendo el orden de estas matrices.

$\{e\}$ 2NB x 1

$[A]$ 2NB x GL

$\{d\}$ GL x 1

NB = número de barras con que cuenta la estructura.

GL = número de grados de libertad que tiene la estructura.

GL = número de nudos + número de grados de libertad lineal

La matriz de continuidad es una matriz de transformación que nos permite como veremos posteriormente obtener a partir de la matriz de rigideces de las barras, referida a las coordenadas locales de cada miembro, la matriz de rigideces de la estructura referida a las coordenadas globales de la misma.

La forma de esta matriz varía dependiendo de cuales son los nudos origen y destino de cada barra, así como de la correspondencia de los desplazamientos de los mismos con los grados de libertad de la estructura.

No debemos olvidar que el procedimiento para obtener la matriz de continuidad se basa totalmente en las ecuaciones 1 y 2

Cada barra tiene dos renglones en la matriz de continuidad, los cuales se forman con los coeficientes de ψ_A , ψ_B , d_{xa} , d_{ya} , d_{xb} , y d_{yb} , que en la matriz aparecerán como coeficientes de los desplazamientos en los grados de libertad correspondientes.

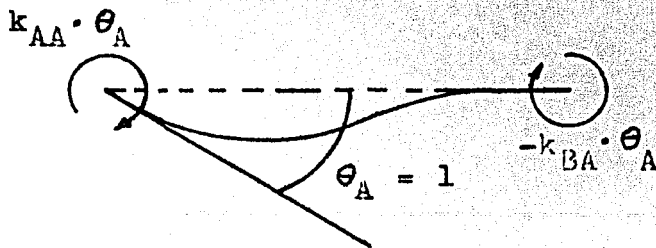
Así entonces proporcionando como datos al programa el número de nudos y las coordenadas de los mismos en el sistema global, el número de grados de libertad lineal y la correspondencia de éstos con los desplazamientos en las direcciones X y Y de cada nudo, utilizando el grado de libertad lineal 0 (cero) para indicar un desplazamiento que no existe, el número de apoyos y sus coordenadas respectivas en el sistema global, a éstos se les numerará como nudos consecutivos aún cuando no lo son, esto con el unico propósito de poder referirnos a los mismos - sin confusión, el número de barras así como el nudo en que se

origina y el nudo en que termina cada una de ellas haciendo uso de la numeración asignada a nudos y apoyos, cabe mencionar que el número de nudos que se introduce como dato al programa es el número de los mismos sin incluir los apoyos. Una vez que el programa cuenta con estos datos es capaz de calcular las longitudes de las barras mediante:

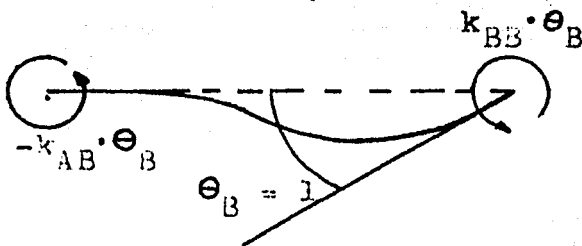
$$L = \sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}$$

para posteriormente integrar en base a las ecuaciones 1 y 2 la matriz de Continuidad.

Considerese la barra siguiente que es la parte fundamental de una estructura.



Si aplicamos una deformación angular unitaria en el extremo A de la barra manteniendo sujeto el extremo B, se generan los momentos k_{AA} y k_{BA} en los nudos A y B respectivamente.



Si aplicamos ahora una deformación angular unitaria en el extremo B de la barra manteniendo sujeto el extremo A, se generan entonces los momentos k_{BB} y k_{AB} en los nudos B y A respectivamente.

Sabemos que el momento generado por la deformación angular del extremo de una barra y la misma deformación son proporcionales, también sabemos que al deformar angularmente el extremo de una barra cuando se mantiene fijo el otro extremo, se generan momentos en ambos extremos de la barra, entonces, si haciendo uso del teorema de superposición, sobreponemos los efectos causados por la deformación angular θ_A en el extremo A de la barra con los efectos causados por la deformación angular θ_B en el extremo B de la barra, resulta que:

$$M_A = k_{AA} \theta_A - k_{AB} \theta_B$$

$$M_B = -k_{BA} \theta_A + k_{BB} \theta_B$$

Donde:

M_A y M_B son los momentos totales en los extremos A y B de la barra respectivamente.

k_{AA} y k_{BB} son las rigideces angulares de los extremos A y B de la barra respectivamente.

$k_{AB} = C_B k_{BB} = k_{BA} = C_A k_{AA}$ siendo C_B y C_A unos coeficientes denominados factores de transporte.

En forma general para una estructura con n barras.

$$M_{A1} = k_{AA1} \theta_{A1} - k_{AB1} \theta_{B1}$$

$$M_{B1} = -k_{BA1} \theta_{A1} + k_{BB1} \theta_{B1}$$

$$M_{A2} = k_{AA2} \theta_{A2} - k_{AB2} \theta_{B2}$$

$$M_{B2} = -k_{BA2} \theta_{A2} + k_{BB2} \theta_{B2}$$

⋮

⋮

⋮

⋮

$$M_{An} = k_{AA_n} \theta_{An} - k_{AB_n} \theta_{Bn}$$

$$M_{Bn} = -k_{BA_n} \theta_{An} + k_{BB_n} \theta_{Bn}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M_{A1} \\ M_{B1} \\ M_{A2} \\ M_{B2} \\ \vdots \\ M_{An} \\ M_{Bn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA1} & -k_{AB1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{BA1} & k_{BB1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{AA2} & -k_{AB2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{BA2} & k_{BB2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{AA_n} & -k_{AB_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{BA_n} & k_{BB_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{A1} \\ \theta_{B1} \\ \theta_{A2} \\ \theta_{B2} \\ \vdots \\ \theta_{An} \\ \theta_{Bn} \end{bmatrix}$$

Y en forma matricial condensada

$$\{P\} = [k] \{e\} \quad \text{Ec. 4}$$

Donde:

$\{P\}$ es el vector de momentos internos

$[k]$ es la matriz de rigideces de las barras

Siendo el orden de estas matrices

$$\{P\} \quad 2NB \times 1$$

$$[k] \quad 2NB \times 2NB$$

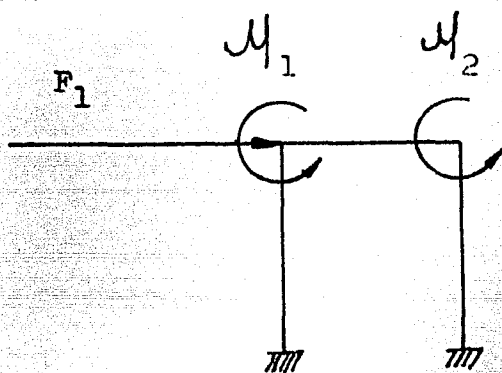
Cabe mencionar que las rigideces k_{AA} , k_{AB} , k_{BA} , y k_{BB} son siempre positivas, para la forma de proceder empleada en el programa.

Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación 4 se obtiene

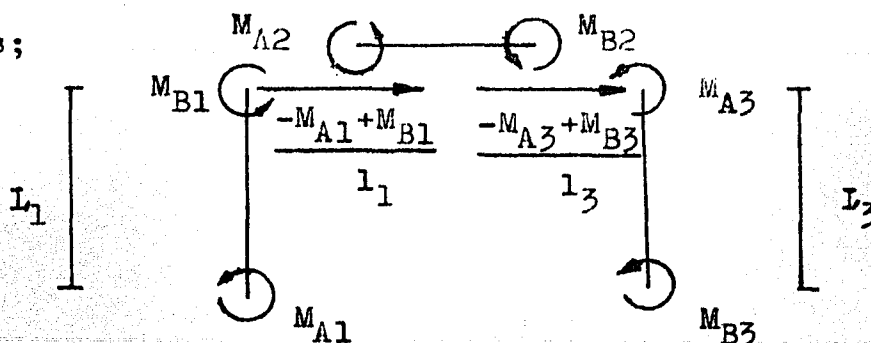
$$\{P\} = [k] [A] \{\delta\} \quad \text{Ec. 5}$$

Observese que los momentos internos en los extremos de las barras (M_A y M_B) siguen la misma convención de signos que se emplea para las deformaciones angulares (θ_A y θ_B).

De la estructura mostrada anteriormente.



Si denominamos \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 a los momentos externos aplicados en los nudos 1 y 2 respectivamente y F_1 a la fuerza externa aplicada en la dirección del grado de libertad 1. Recordando los momentos internos que actúan en cada barra y obteniendo algunos cortantes;



Por equilibrio de la estructura llegamos a:

$$\mathcal{M}_1 = M_{B1} - M_{A2}$$

$$\mathcal{M}_2 = M_{B2} - M_{A3}$$

$$F_1 = (-M_{A1} + M_{B1})/l_1 + (-M_{A3} + M_{B3})/l_3$$

Que en forma matricial es:

(40)

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -\frac{Y_1 - Y_3}{L_1^2} & \frac{Y_1 - Y_3}{L_1^2} & 0 & 0 & \frac{Y_4 - Y_2}{L_3^2} & -\frac{Y_4 - Y_2}{L_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{A1} \\ M_{B1} \\ M_{A2} \\ M_{B2} \\ M_{A3} \\ M_{B3} \end{bmatrix}$$

Y en forma matricial condensada

$$\{F\} = [B] \{P\}$$

Donde:

$\{F\}$ es el Vector de Fuerzas externas

$[B]$ es la transpuesta de la matriz A para cualquier estructura.

Por tanto

$$\{F\} = [A^T] \{P\} \quad \text{Ec. 6}$$

Nótese que los momentos externos M en los nudos siguen la convención de signos utilizada para los desplazamientos angulares ψ y las fuerzas externas F siguen la convención de signos empleada para los desplazamientos lineales d .

Si sustituimos la ecuación 5 en la ecuación 6 se obtiene:

$$\{F\} = [A^T] [k] [A] \{d\} \quad \text{Ec. 7}$$

Si formamos la matriz de rigideces de las barras para la estructura que hemos manejado tendremos;

(41)

$$\begin{bmatrix} k_{AA1} & -k_{AB1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{BA1} & k_{BB1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{AA2} & -k_{AB2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{BA2} & k_{BB2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{AA3} & -k_{AB3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{BA3} & k_{BB3} \end{bmatrix}$$

Si efectuamos con las matrices obtenidas el producto $A^T k A$ obtendremos la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} (k_{BB1} + k_{AA2}) & k_{AB2} & \frac{(k_{BA1} + k_{BB1})}{L_1} \\ k_{BA2} & (k_{BB2} + k_{AA3}) & \frac{(k_{AA3} + k_{AB3})}{L_3} \\ \frac{(k_{AB1} + k_{BB1})}{L_1} & \frac{(k_{AA3} + k_{BA3})}{L_3} & \frac{(k_{AA1} + k_{BA1} + k_{AB1} + k_{BB1})}{L_1^2} + \frac{(k_{AA3} + k_{BA3} + k_{AB3} + k_{BB3})}{L_3^2} \end{bmatrix}$$

Para realizar el producto se substituyó en la matriz de continuidad $Y_1 - Y_3$ por L_1 y $Y_4 - Y_2$ por $-L_3$ antes de obtener su transpuesta, la validez de esta substitución radica en que las barras 1 y 3 son verticales y la diferencia de ordenadas de los nudos origen y destino, en valor absoluto es la longitud de las mismas.

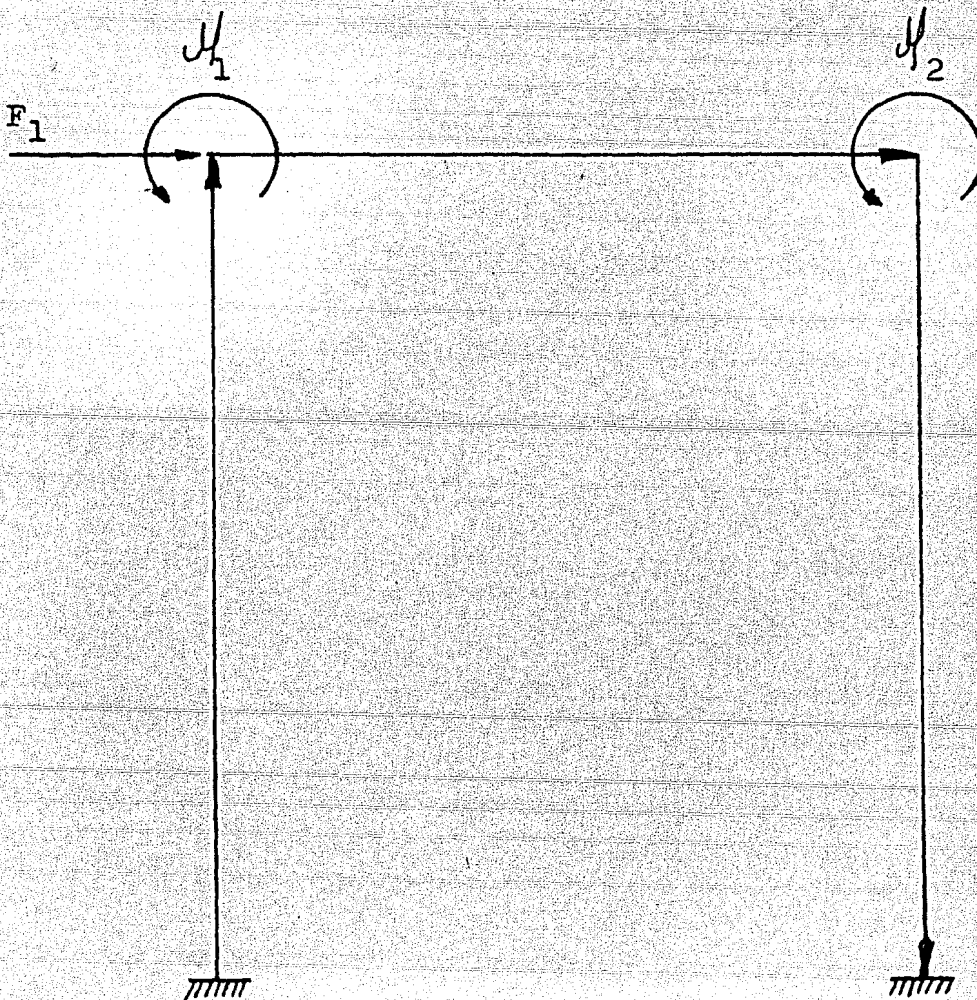
Nótese que esta matriz es simétrica al igual que la matriz de rigideces de las barras ya que para cada barra $k_{AB} = k_{BA}$ según el teorema de Maxwell.

(42)

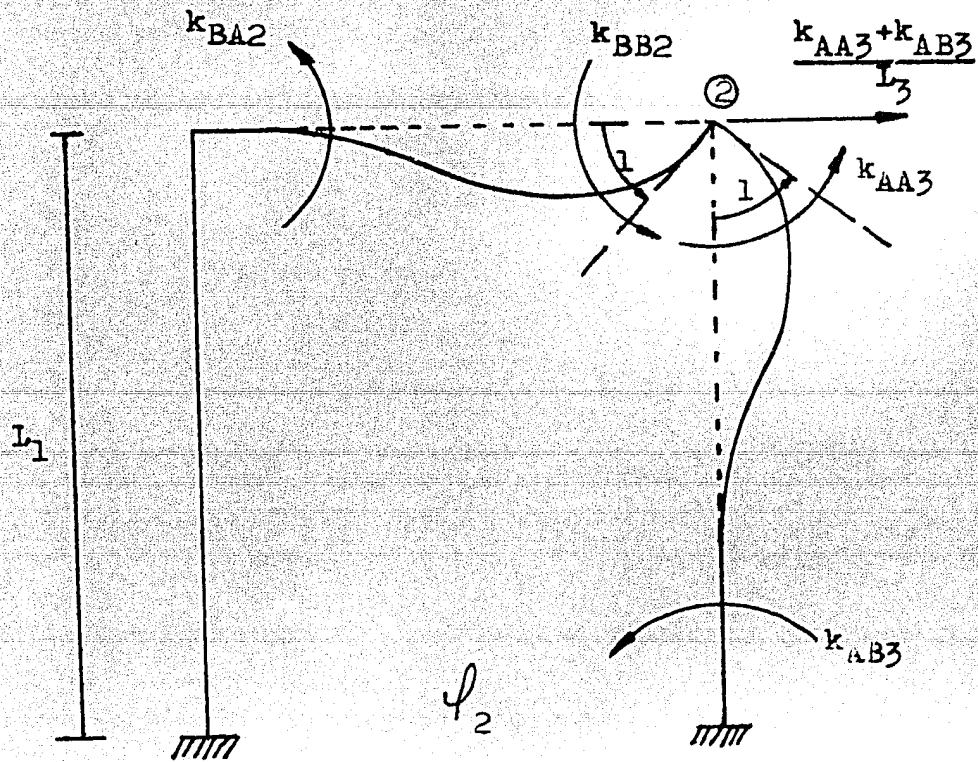
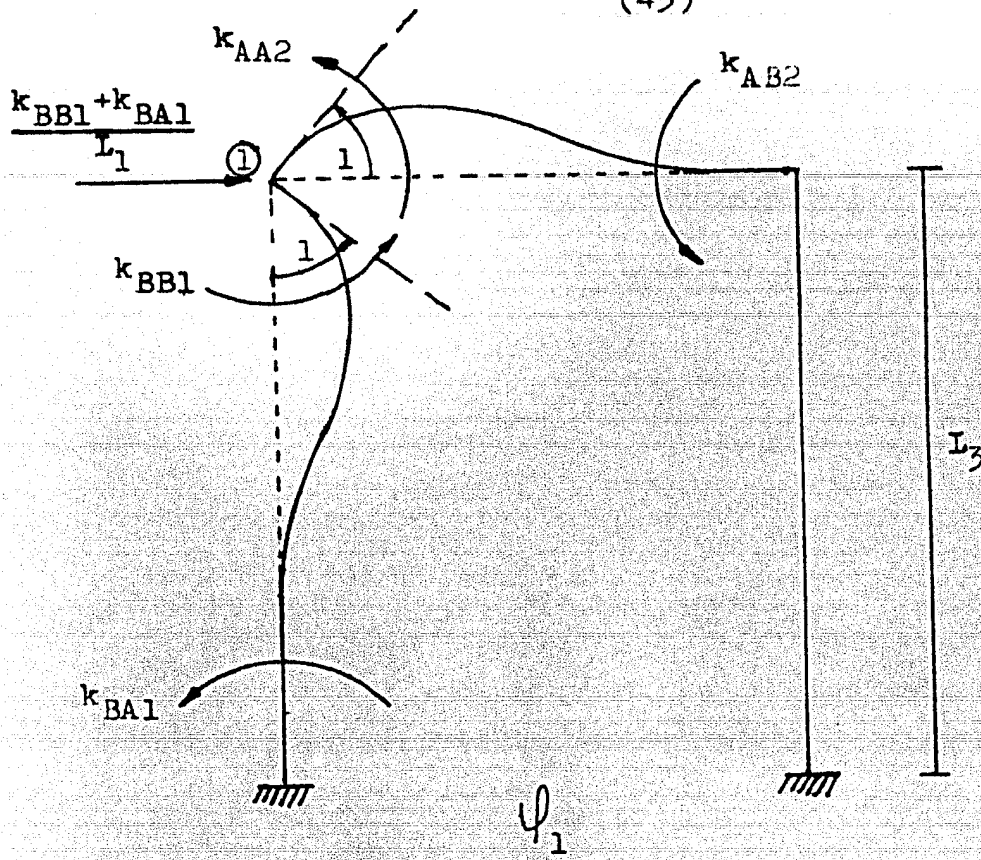
Sabemos que la matriz de rigideces se integra con la suma de las rigideces con que contribuye cada miembro para cada grado de libertad de la estructura.

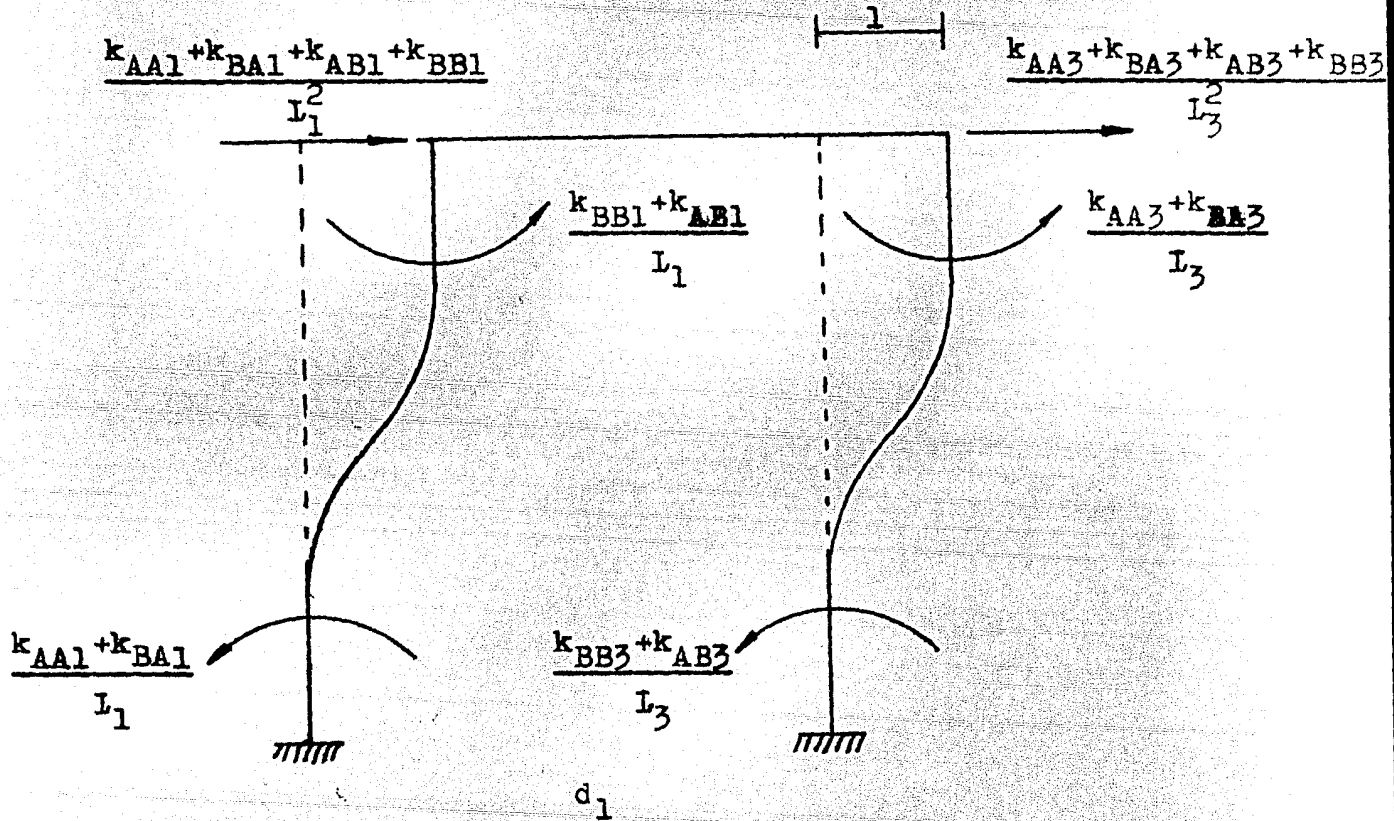
Para encontrar las rigideces con cuyas sumas integraremos - la matriz de rigideces de la estructura aplicaremos desplazamientos unitarios, angulares o lineales en cada grado de libertad, angular o lineal respectivamente.

Para la estructura con que hemos trabajado:



(43)





De las figuras anteriores podemos establecer:

$$M_1 = (k_{BB1} + k_{AA2}) \varphi_1 + k_{AB} \varphi_2 + \frac{k_{BB1} + k_{BA1}}{L_1} d_1$$

$$M_2 = k_{BA2} \varphi_1 + (k_{BB2} + k_{AA3}) \varphi_2 + \frac{k_{AA3} + k_{AB3}}{L_3} d_1$$

$$F_1 = \frac{k_{BB1} + k_{AB1}}{L_1} \varphi_1 + \frac{k_{AA3} + k_{BA3}}{L_3} \varphi_2 + \left[\frac{k_{AA1} + k_{BA1} + k_{AB1} + k_{BB1}}{L_1^2} + \frac{k_{AA3} + k_{BA3} + k_{AB3} + k_{BB3}}{L_3^2} \right] d_1$$

Si los coeficientes de estas ecuaciones los colocamos en forma de matriz, obtendremos la misma matriz que obtuvimos efectuando el producto $[A^T][k][A]$ la cual es la matriz de rigideces de la estructura, lo anterior se cumple para cualquier estructura.

De aquí:

$$[K] = [A^T][k][A] \quad \text{Ec. 8}$$

Si sustituimos la ecuación 8 en la ecuación 7 se obtiene:

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad \text{Ec. 9}$$

Volviendo al funcionamiento del programa, una vez que el mismo ha construido la matriz de continuidad, efectúa la transposición de esta. Si proporcionamos ahora los coeficientes de rigidez R_{AA} , R_{AB} , R_{BA} , R_{BB} , el módulo de elasticidad del material de las barras E (constante para todas las barras) y el momento de inercia I , de cada barra, el programa calculará las rigideces k_{AA} , k_{AB} , k_{BA} , k_{BB} para cada barra mediante las siguientes ecuaciones:

$k_{AA} = R_{AA} EI/L$ $k_{AB} = R_{AB} EI/L$ $k_{BA} = R_{BA} EI/L$ $k_{BB} = R_{BB} EI/L$
 para integrar posteriormente la matriz de rigideces de las barras, la cual premultiplicada por la transpuesta de la matriz de continuidad y postmultiplicada por la matriz de continuidad da por resultado la matriz de rigideces de la estructura.

$$[K] = [A^T][k][A]$$

Si ahora proporcionamos al programa las fuerzas externas que actúan sobre cada grado de libertad, éste formará el vector de fuerzas externas con lo cual se tiene el sistema de ecuaciones

$$\{F\} = [K] \{d\}$$

Donde el vector de desplazamientos constituye el vector de incógnitas. Si resolvemos este sistema obtenemos los valores de los desplazamientos o mejor dicho el vector solución.

Existen diversas formas de resolver el sistema de ecuaciones, pero el programa emplea el método directo de Gauss Jordan que consiste en efectuar transformaciones elementales a la matriz ampliada formada por la matriz de rigideces de la estructura y el vector columna de fuerzas externas, hasta transformar la matriz de rigideces en una matriz identidad, a la vez de que el vector de fuerzas externas se transforma en el vector solución.

Por este método el sistema:

$$\{F\} = [K] \{d\}$$

se transforma en:

$$\{v\} = [I] \{d\}$$

Donde: $\{v\}$ es el vector solución

$[I]$ es la matriz identidad o matriz unitaria

Y por las propiedades de la matriz unitaria; se llega a;

$$\{v\} = \{d\}$$

El vector de desplazamientos obtenido es premultiplicado -- por la matriz de continuidad en el programa con el propósito -- de obtener el vector de deformaciones angulares.

$$\{e\} = [A] \{d\}$$

Posteriormente en el programa se premultiplica el vector de deformaciones angulares por la matriz de rigideces de las barras con lo cual se obtiene el vector de fuerzas internas o vector de momentos internos.

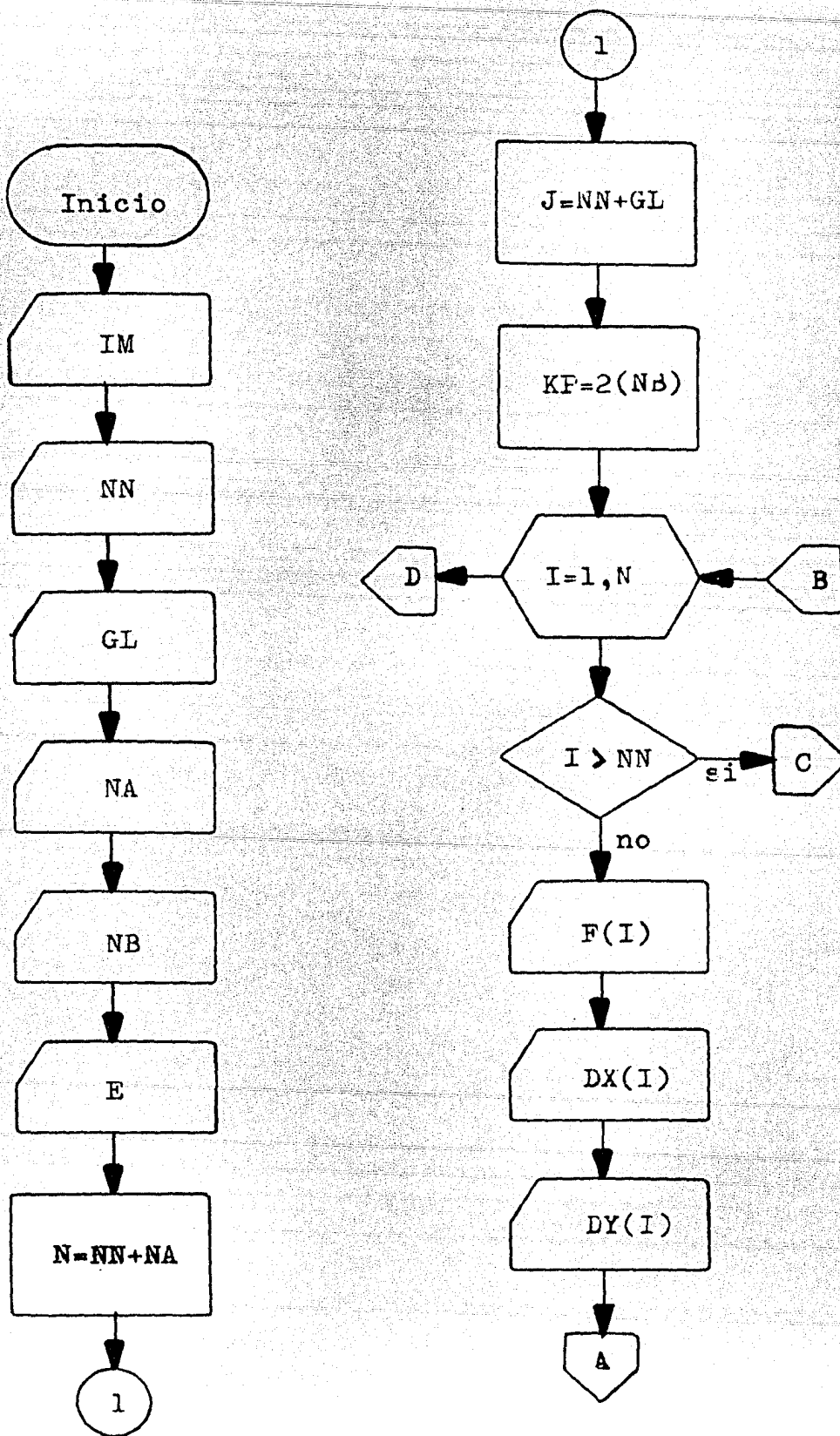
$$\{P\} = [k]\{e\}$$

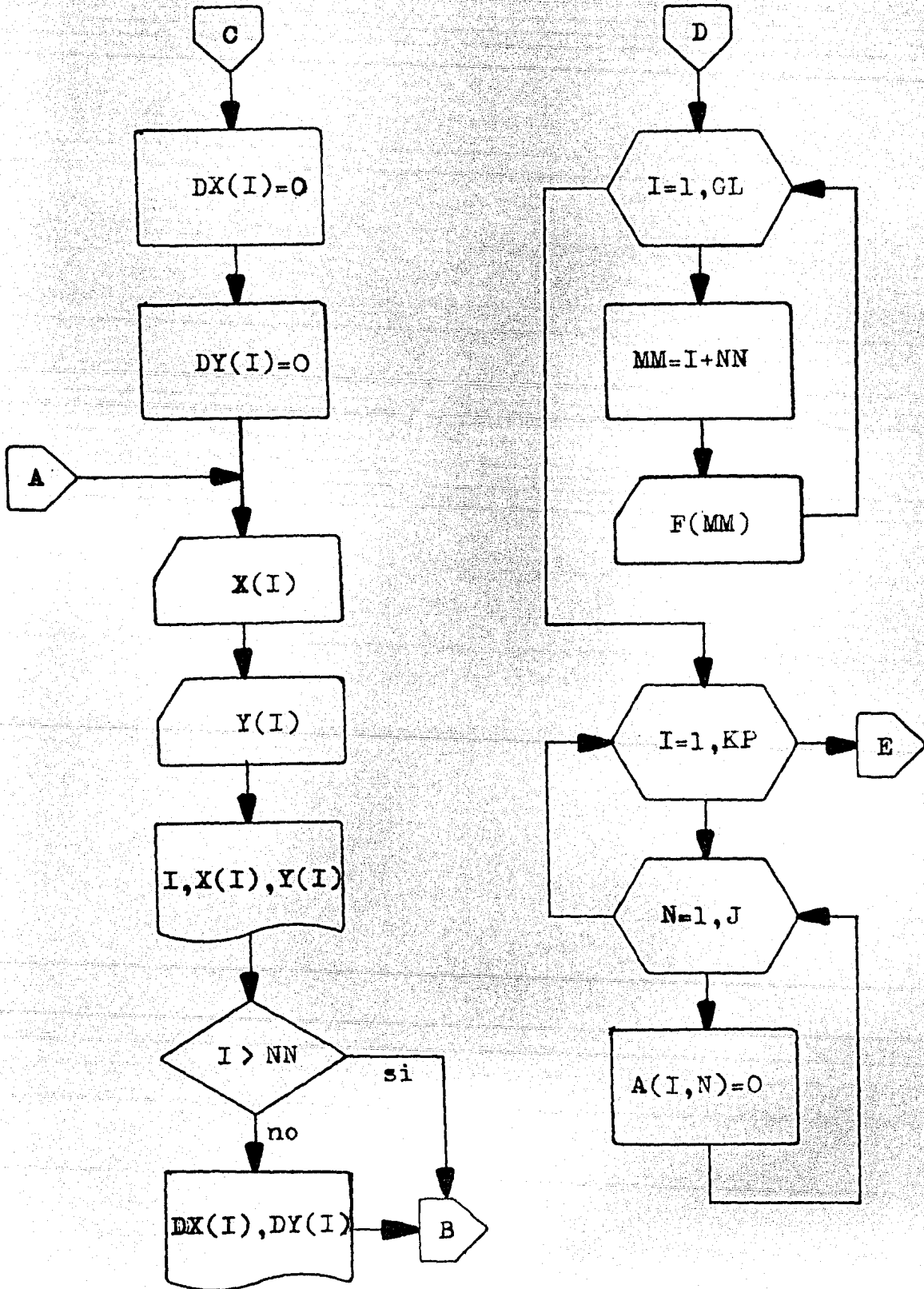
Para verificar los resultados obtenidos, el programa verificará el equilibrio de la estructura, es decir premultiplicando el vector de momentos internos por la matriz de continuidad transpuesta, se obtendrá un vector de fuerzas externas tal que equilibre las fuerzas internas en la estructura obtenidas, si el vector de fuerzas externas obtenido es igual al vector de fuerzas externas que se introdujo como dato al principio del programa, se comprueba la veracidad de los resultados.

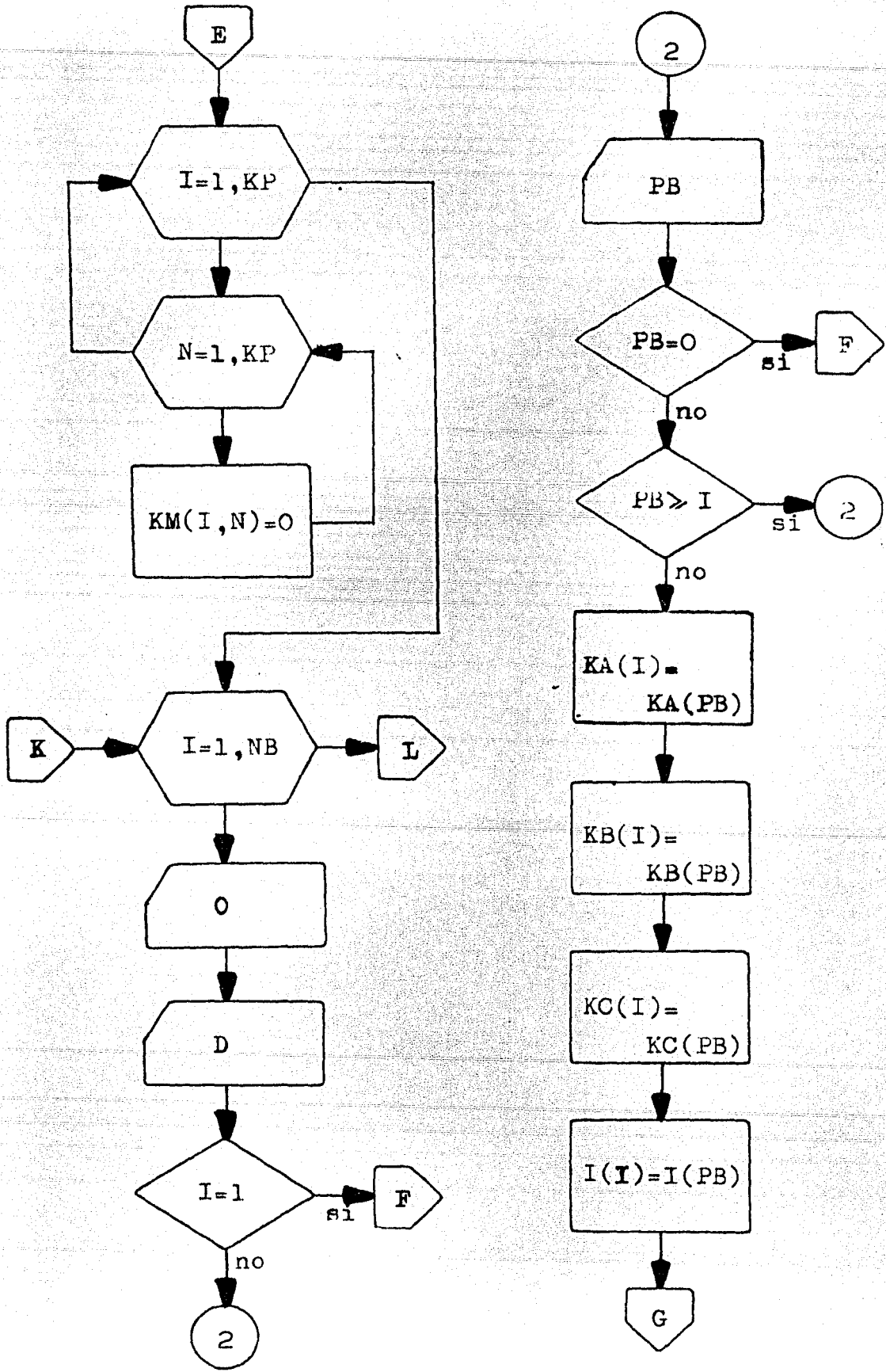
$$\{F\} = [A^T]\{P\}$$

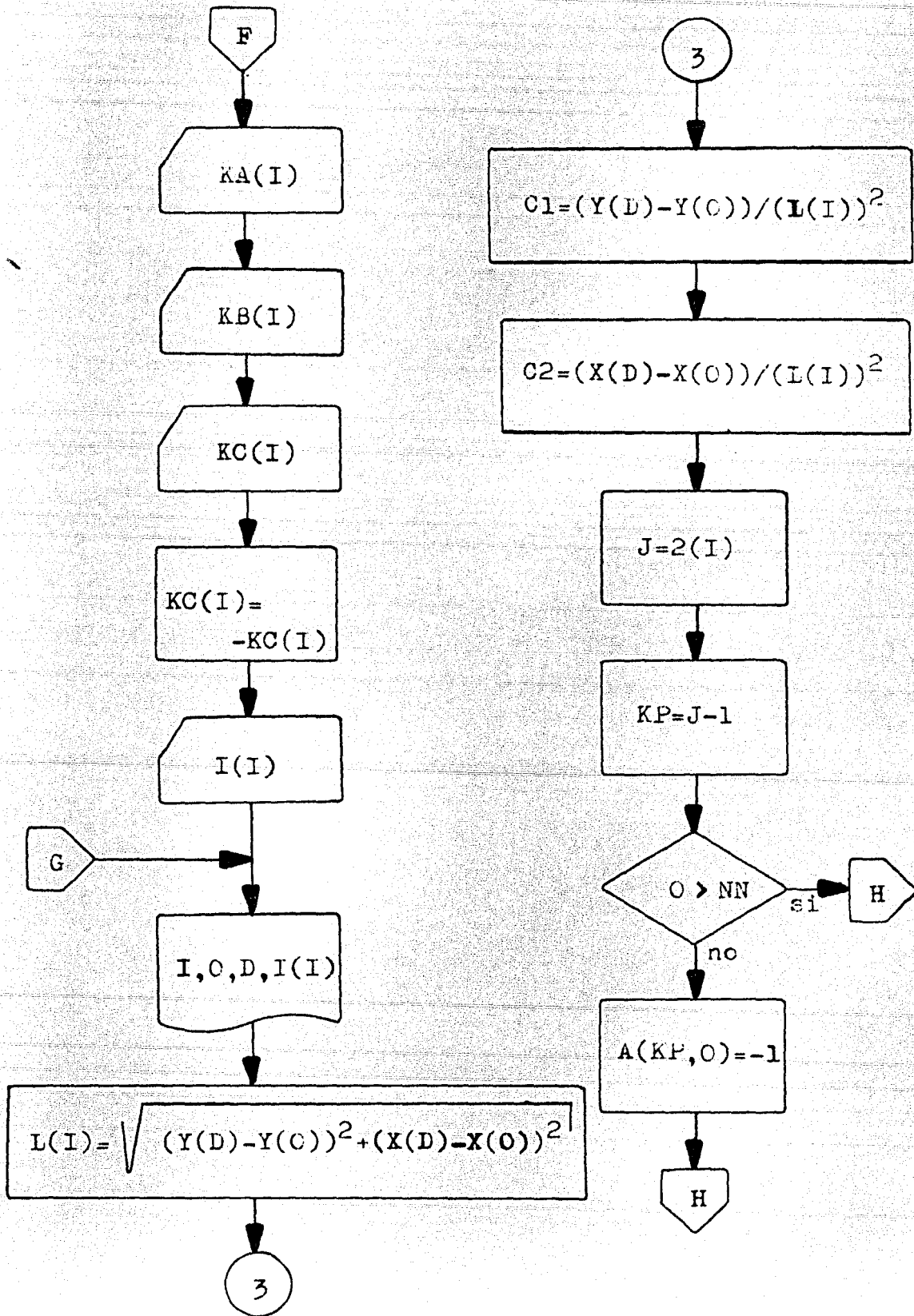
Así entonces hemos descrito brevemente el funcionamiento del programa, si se desea observar detalladamente este proceso podemos remitirnos al diagrama de flujo del programa o incluso hasta el mismo listado, donde la forma de ejecución del programa aparece paso a paso.

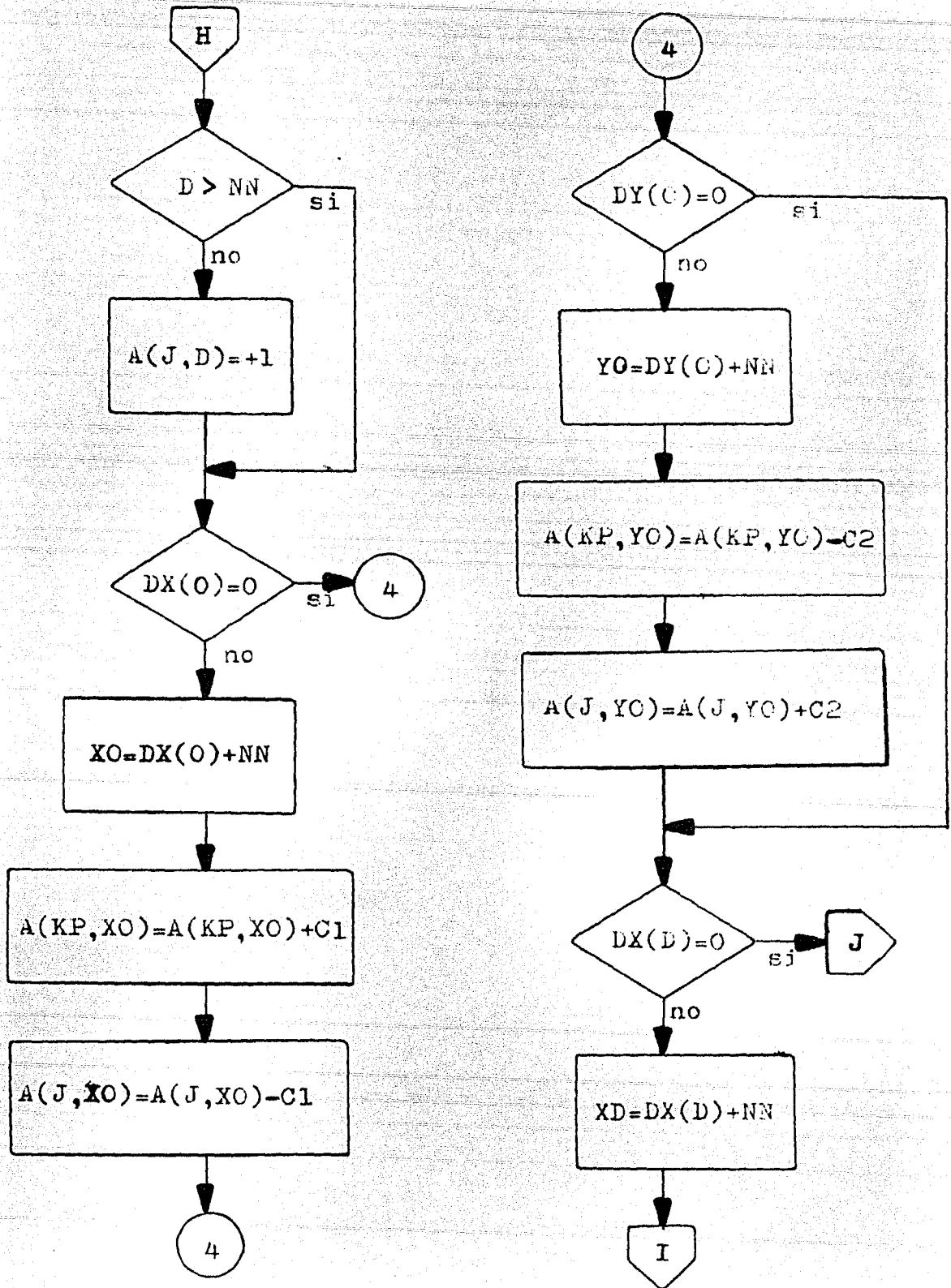
Diagrama de flujo.

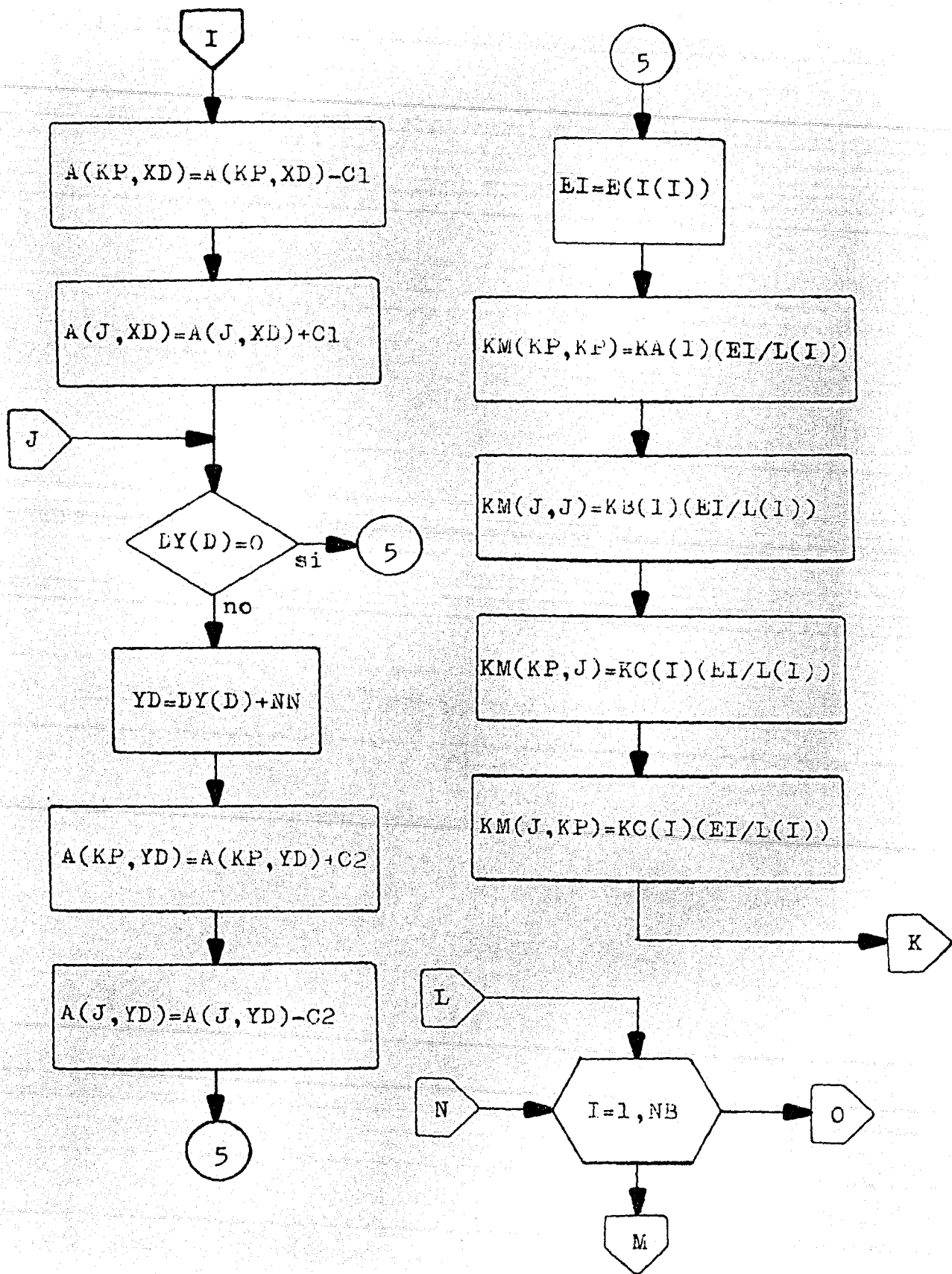


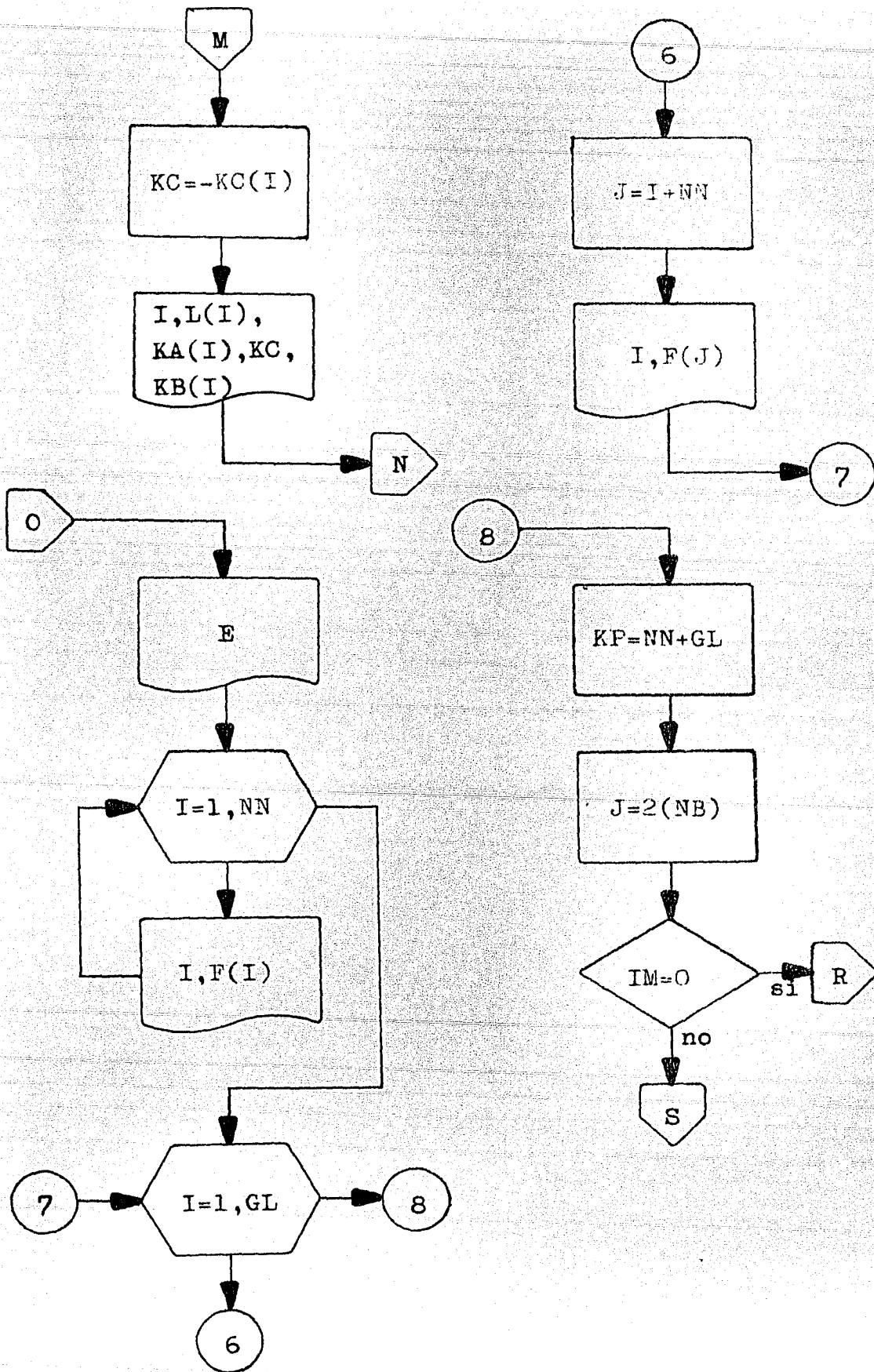


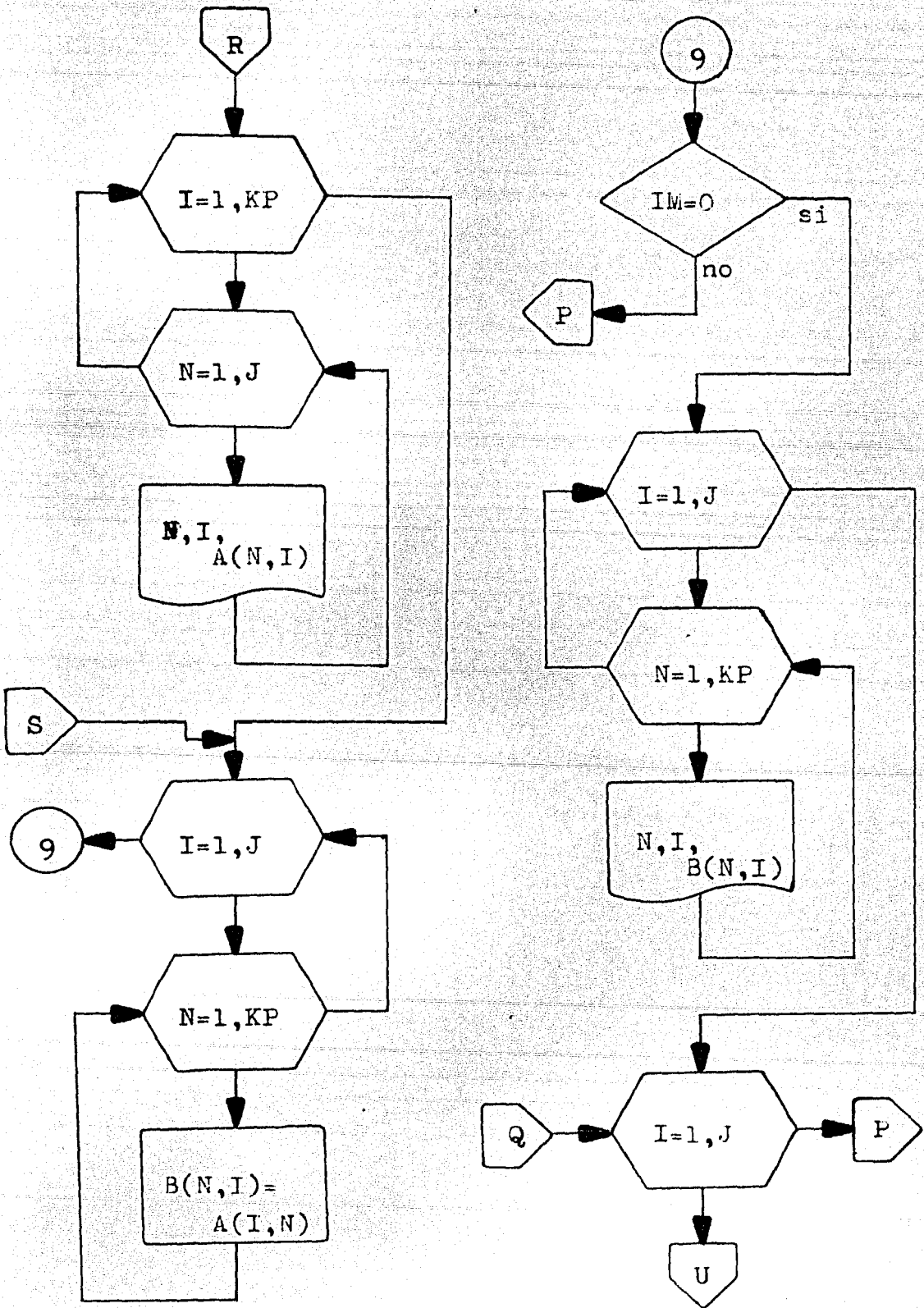


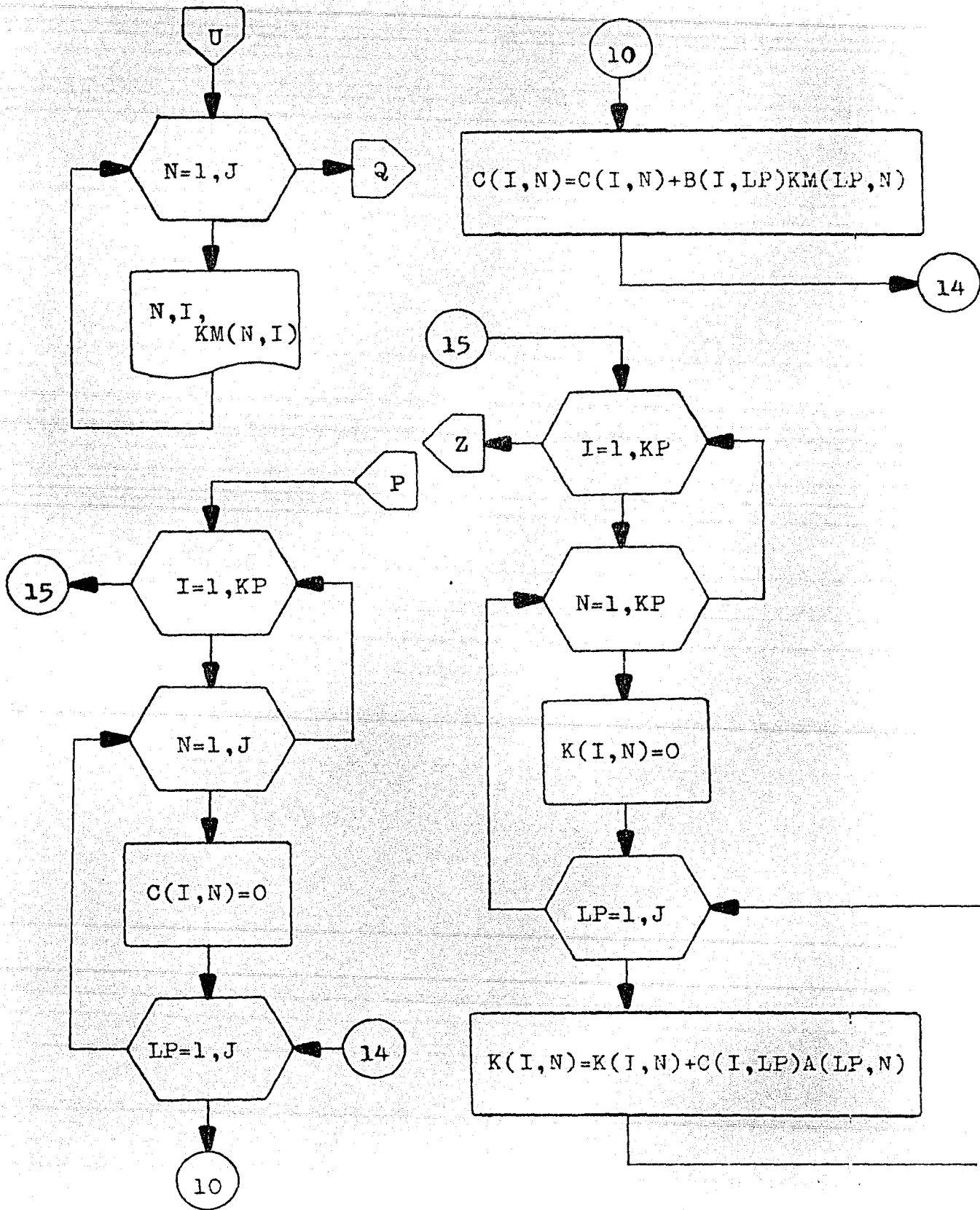


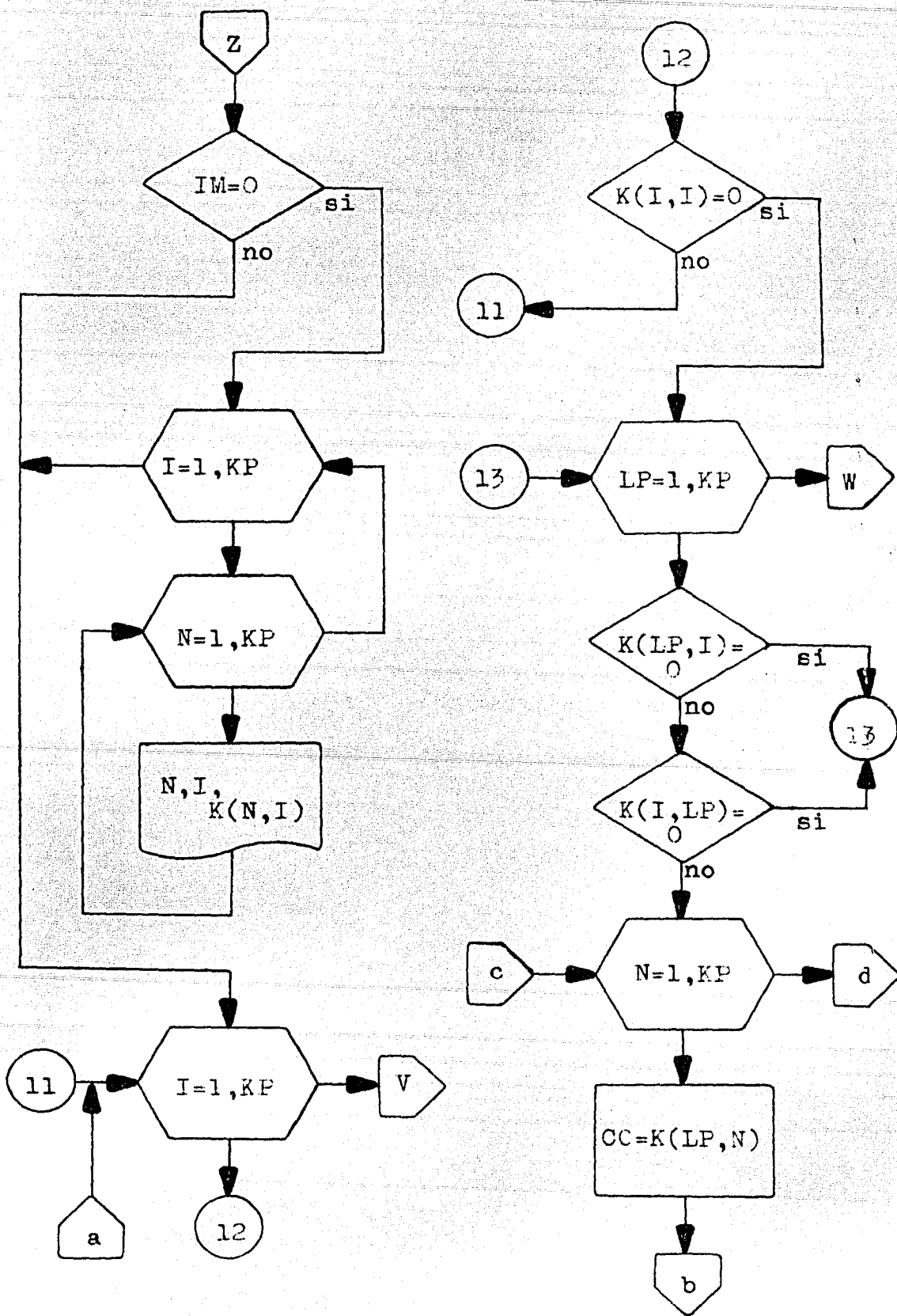


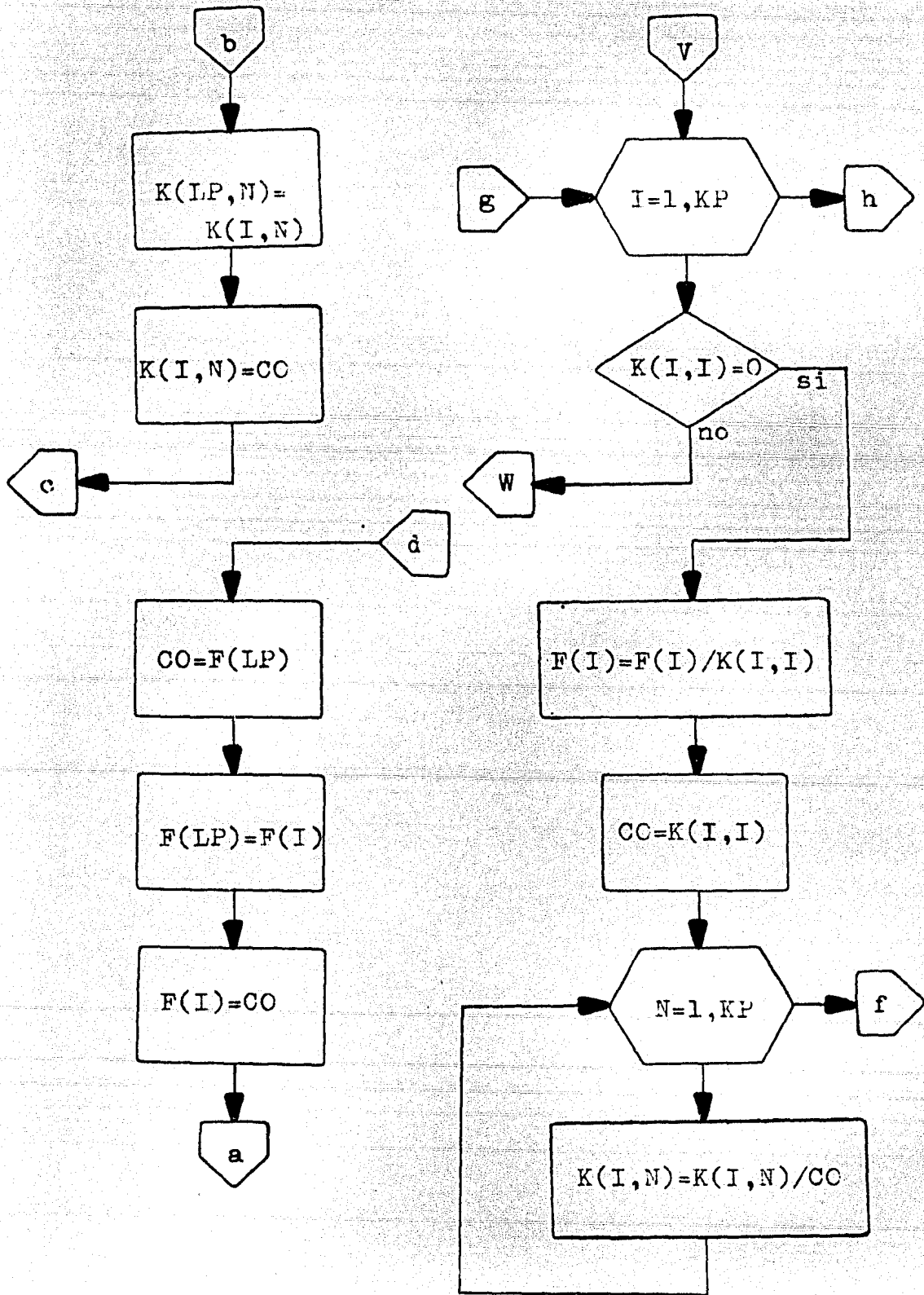


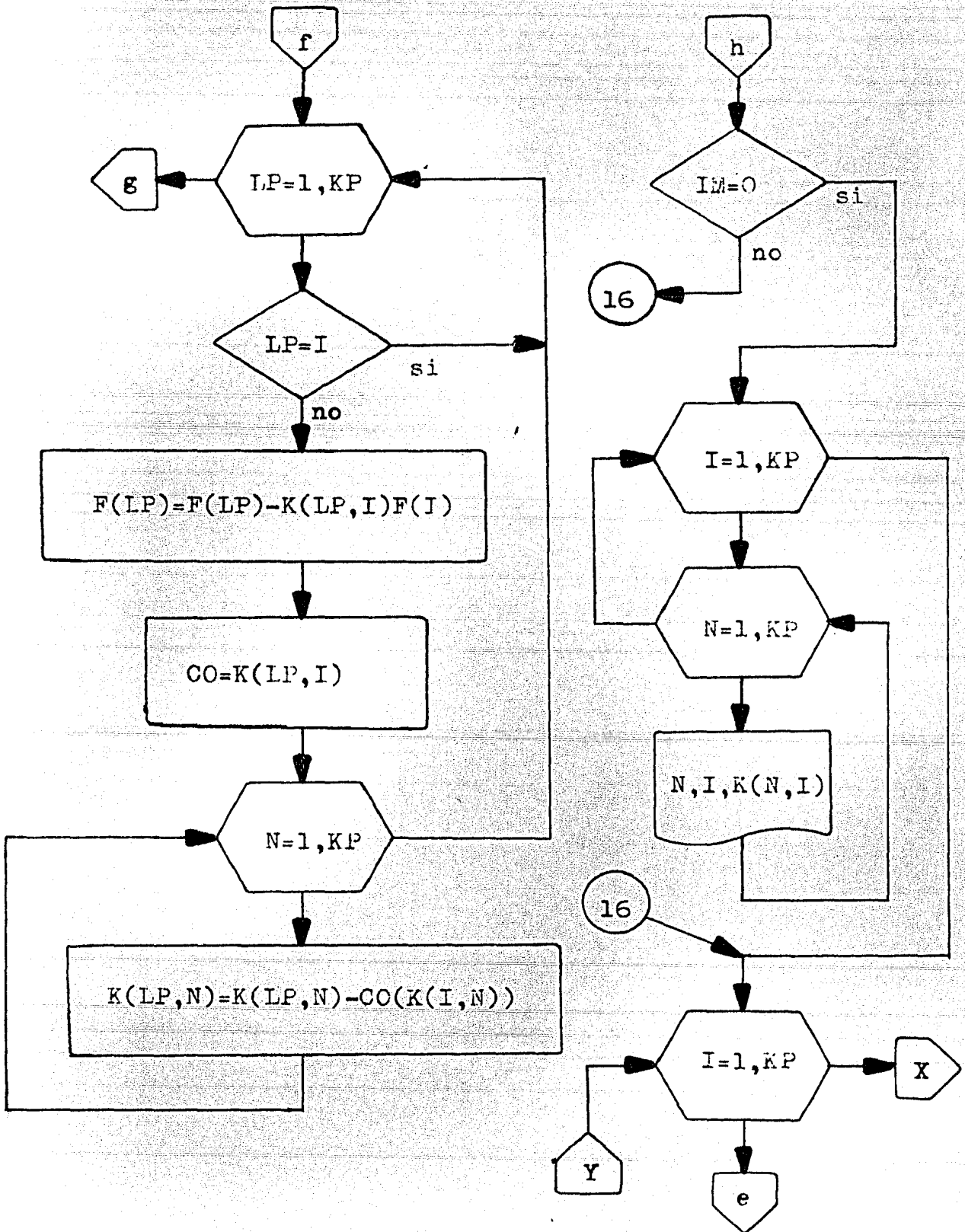


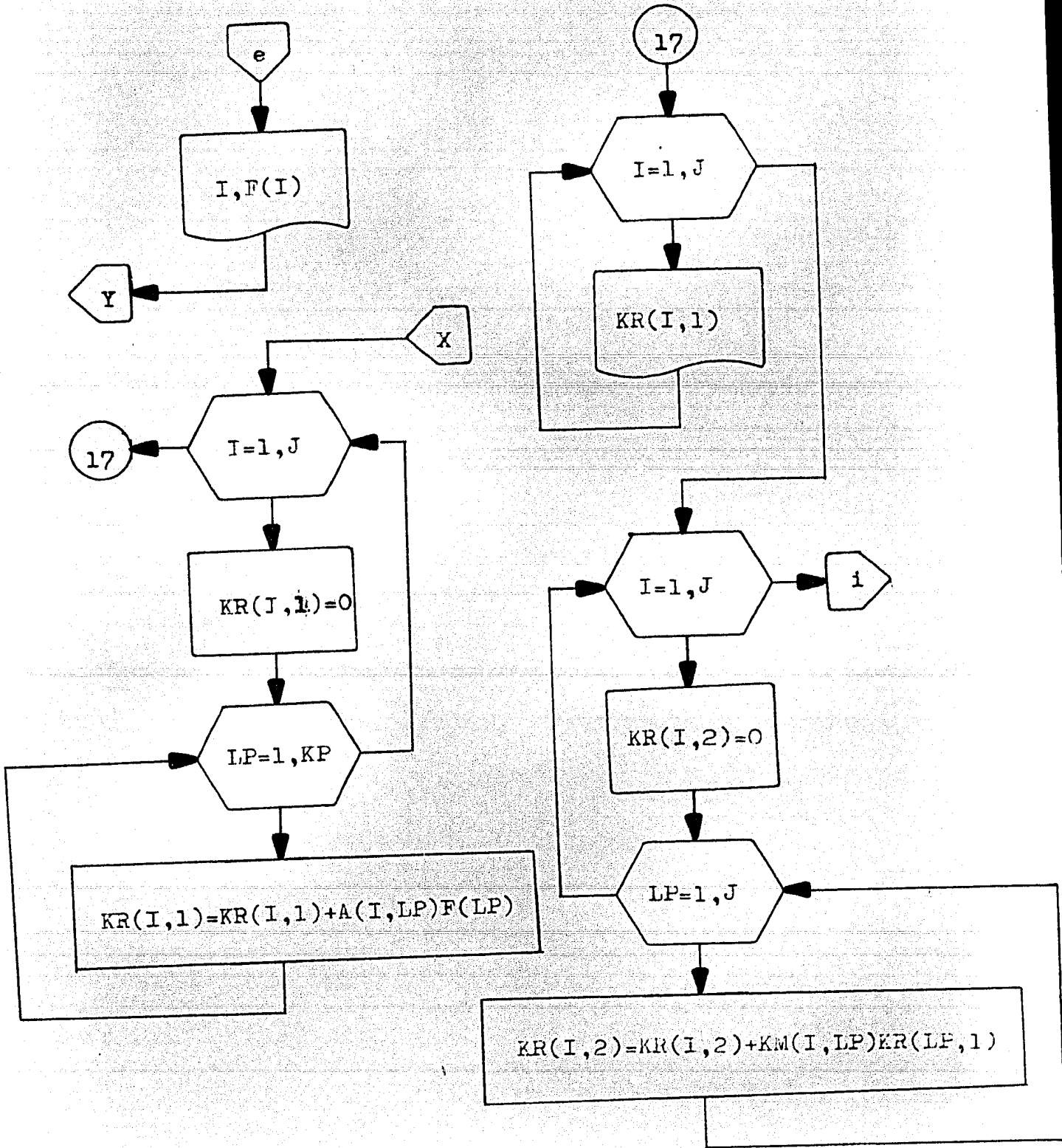


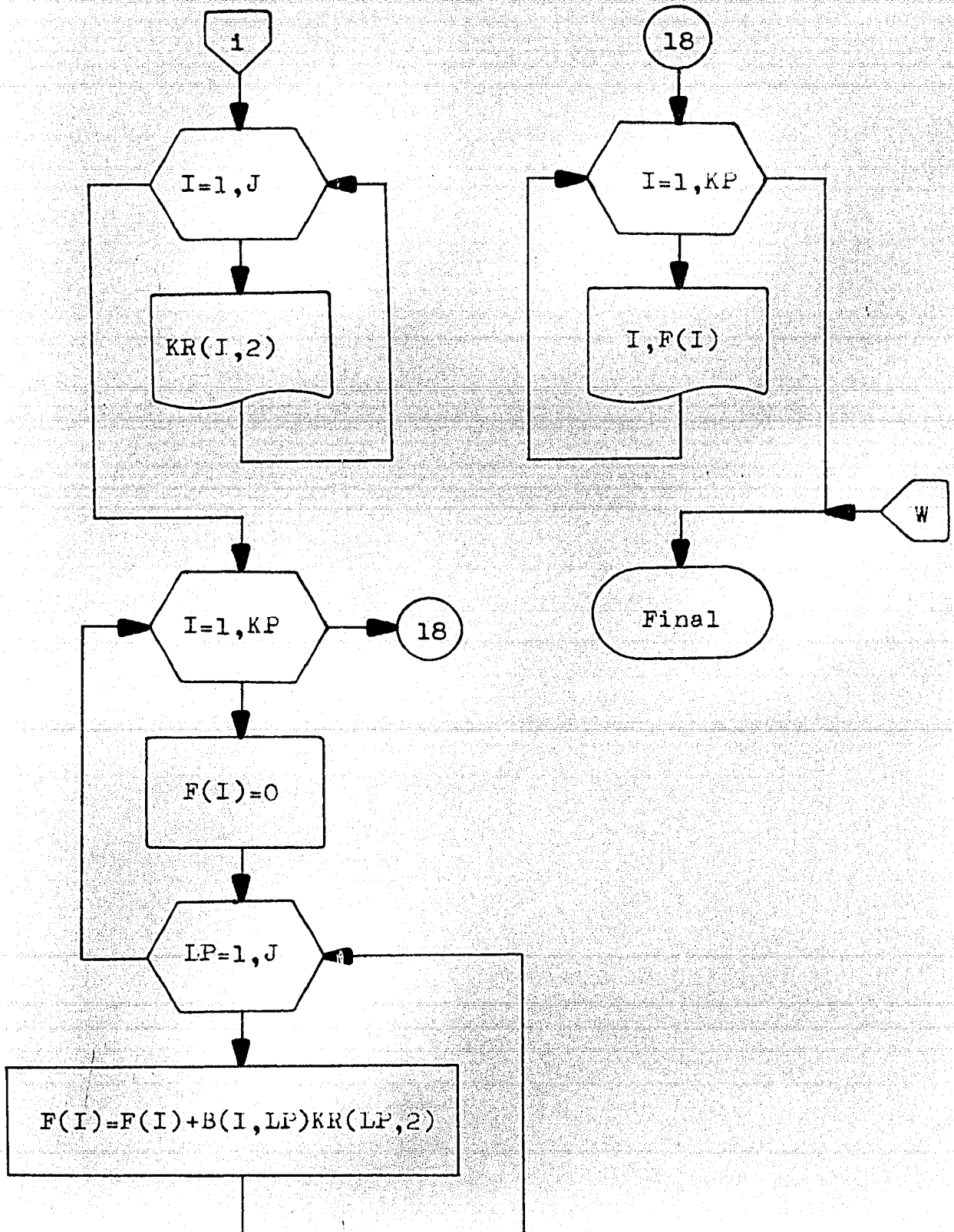












En este diagrama de flujo se omiten las instrucciones correspondientes a la impresión de mensajes y aquellas que determinan la forma en que se imprimen los resultados.

Las variables principales, es decir aquellas cuyo valor es necesario proporcionar al programa como dato son:

IM Variable que controla la impresión de las matrices de:

Continuidad

Continuidad Transpuesta

Rigideces de las barras

Rigideces de la estructura

Solución al sistema de ecuaciones

Cuando esta variable vale 0 se imprimen todas ellas además de los datos de entrada y los vectores de:

Desplazamientos

Deformaciones angulares

Fuerzas internas

Fuerzas externas finales

Si esta variable adopta un valor distinto de 0 se omite únicamente la impresión de las matrices mencionadas.

NN Número de nudos de la estructura sin incluir apoyos.

GL Número de grados de libertad lineal que tiene la estructura.

NA Número de apoyos de la estructura.

NB Número de barras con que cuenta la estructura.

E Módulo de elasticidad del material empleado.

F(I) Fuerza o Momento externo que actúa en el nudo I

DX(I) Grado de libertad lineal que corresponde con el desplazamiento en X del nudo I, en caso de que éste desplazamiento este restringido, es decir que no exista ningún grado de libertad lineal correspondiendo con él, deberá darse - 0 como valor de esta variable.

DY(I) Grado de libertad lineal que corresponde con el desplazamiento en Y del nudo I, en caso de que este desplazamiento este restringido, es decir que no exista ningún grado de libertad lineal correspondiendo con él, deberá darse - 0 como valor de esta variable.

X(I) Coordenada X del nudo I.

Y(I) Coordenada Y del nudo I.

C Nudo origen de la barra en cuestión.

D Nudo destino de la barra en cuestión.

KA(I) Coeficiente de rigidez R_{AA} de la barra I.

KB(I) Coeficiente de rigidez R_{BB} de la barra I.

KC(I) Coeficiente de rigidez R_{AB} o R_{BA} de la barra I.

I(I) Momento de inercia de la barra I.

PB Variable que indica cual de las barras cuyos datos hayan sido proporcionados al programa, tiene las mismas propiedades que la barra en cuestión, si no existe ninguna se dará el valor 0 a esta variable.

Esta variable permite cuando su valor es distinto de 0 que el programa haga $KA(I)=KA(PB)$, $KB(I)=KB(PB)$, $KC(I)=KC(PB)$, $I(I)=I(PB)$, con lo cual se evita proporcionar el mismo juego de datos varias veces, si el valor de esta variable es 0, el programa pregunta los valores de $KA(I)$, $KB(I)$, $KC(I)$, e $I(I)$.

- A(I,N) Elemento del renglon I, columna N de la matriz de Continuidad.
- B(I,N) Elemento del renglon I, columna N de la matriz de Continuidad Transpuesta.
- KM(I,N) Elemento del renglon I, columna N de la matriz de Rigideces de las Barras.
- K(I,N) Elemento del renglon I, columna N de la matriz de Rigideces de la Estructura.

Debe notarse que el elemento del renglon I del vector de Fuerzas Externas inicial $F(I)$, después de resolver el sistema de ecuaciones se convierte en el elemento del renglon I del vector de Desplazamientos teniendo en este la misma denominación $F(I)$, al igual que el elemento $K(I,N)$ de la matriz de Rigideces de la estructura se transforma en el elemento correspondiente de la matriz Identidad conservando la denominación $K(I,N)$, así entonces después de resolver el sistema de ecuaciones.

- F(I) Elemento del renglon I del vector de Desplazamientos.
- K(I,N) Elemento del renglon I, columna N de la matriz Identidad o unitaria.
- KR(I,1) Elemento del renglon I del vector de Deformaciones Angulares.
- KR(I,2) Elemento del renglon I del vector de Fuerzas Internas.

Al verificar los resultados por comprobación del equilibrio

(65)

F(I) Elemento del renglon I del vector de Fuerzas Externas final.

Todas las demás variables empleadas son variables transitorias o de conteo, es decir variables secundarias.

Lista de.

```

10 CLEAR 1000
20 INPUT "IMPRIMIR OPERACIONES (SI=0, NO<>0)"; IM
30 INPUT "NUMERO DE NUDOS SIN INCLUIR APOYOS"; NN
40 INPUT "NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD LINEAL"; GL
50 INPUT "NUMERO DE APOYOS"; NA
60 INPUT "NUMERO DE BARRAS"; NB
70 INPUT "MODELO DE ELASTICIDAD DEL MATERIAL DE LAS BARRAS"; E
80 N=NN+NA
90 J=NN+GL
100 KF=2*NB
110 DIM X(N),Y(N),DX(N),DY(N),F(J),KA(NB),KB(NB),KC(NB)
120 DIM A(KP,J),B(J,KP),KM(KP,KP),L(NB),C(J,KP),K(J,J),I(NB)
130 DIM KR(KP,2)
140 LPRINT TAB(40)"GRADO DE LIBERTAD LINEAL QUE"
150 LPRINT TAB(40)"CORRESPONDE CON EL DESPLAZAMIENTO"
160 LPRINT TAB(40)"DEL NUDO EN LA DIRECCION"
170 LPRINT "NUDO"; TAB(17)"COORDENADAS"; TAB(42)" X" Y"
180 FOR I=1 TO N
190 PRINT "NUDO"; I
200 IF I>NN THEN 250
210 INPUT "MOMENTO EXTERNO:"; F(I)
220 INPUT "EL DESPLAZAMIENTO EN X CORRESPONDE AL GRADO DE LIBERTAD LINEAL"; DX(I)
230 INPUT "EL DESPLAZAMIENTO EN Y CORRESPONDE AL GRADO DE LIBERTAD LINEAL"; DY(I)
240 GOTO 280
250 PRINT "APOYO"
260 DX(I)=0
270 DY(I)=0
280 INPUT "COORDENADA X="; X(I)
290 INPUT "COORDENADA Y="; Y(I)
300 LPRINT USING " ### X= +###.### Y= +###.###"; J,X(I),Y(I)
310 IF I>NN THEN 340
320 LPRINT USING " (###) (###)"; DX(I):DY(I)
330 GOTO 350
340 LPRINT " APOYO"
350 NEXT I
360 FOR I=1 TO GL
370 MM=I+NN
380 PRINT "FUERZA EN DIRECCION DEL GRADO DE LIBERTAD LINEAL (";I;")"
390 INPUT F(MM)
400 NEXT I
410 H=4+NN+GL
420 IF H<60 THEN 450
430 LPRINT CHR(11)
440 H=3
450 LPRINT
460 LPRINT "BARRA NUDO NUDO MOMENTO"
470 LPRINT " ORIGEN DESTINO INERCIA"
480 FOR I=1 TO KP
490 FOR N=1 TO J
500 A(I,N)=0

```

(67)

```
510 NEXT N
520 NEXT I
530 FOR I=1 TO NF
540 FOR N=1 TO NF
550 KM(I,N)=0
560 NEXT N
570 NEXT I
580 FOR I=1 TO NB:
590 PRINT "BARRA";I
600 INPUT "NUDO ORIGEN":O
610 INPUT "NUDO DESTINO":D
620 IF I = 1 THEN 900
630 IF I > 2 THEN 690
640 PRINT "SI LAS PROPIEDADES GEOMETRICAS"
650 PRINT "COEFICIENTES DE RIGIDEZ (RAA,RAB,RBA,RBB) Y MOMENTO DE INERCIA (I)"
660 PRINT "DE ALGUNA BARRA SON IGUALES A LAS DE OTRA BARRA CUYOS DATOS"
670 PRINT "HAYAN SIDO PROPORCIONADOS, UNICAMENTE ESPECIFIQUE EL NUMERO"
680 PRINT "DE ESTA, EN CASO CONTRARIO PULSE 0"
690 PRINT "PROPIEDADES BARRA";I;"=PROPIEDADES BARRA"
700 INPUT PB
710 IF PB=0 THEN 800
720 IF PB>=I THEN 780
730 KA(I)=KA(PB)
740 KB(I)=KB(PB)
750 KC(I)=KC(PB)
760 I(I)=I(PB)
770 GOTO 850
780 PRINT "LOS DATOS DE ESA BARRA NO HAN SIDO DADOS"
790 GOTO 690
800 INPUT "COEFICIENTE DE RIGIDEZ RAA":KA(I)
810 INPUT "COEFICIENTE DE RIGIDEZ RBB":KB(I)
820 INPUT "COEFICIENTE DE RIGIDEZ RAB,RBA":KC(I)
830 KC(I)=-KC(I)
840 INPUT "MOMENTO DE INERCIA (I)":I(I)
850 LPRINT USING " ***      ***      ***      ***.***.***.*****":I;O;D;I(I)
860 L(I)=SQR((Y(D)-Y(O))^2+(X(D)-X(O))^2)
870 C1=(Y(D)-Y(O))/L(I)^2
880 C2=(X(D)-X(O))/L(I)^2
890 J=I+2
900 KP=J-1
910 IF O>NN THEN 930
920 A(KP,O)=-1
930 IF D>NN THEN 950
940 A(J,D)=+1
950 IF DX(O)=0 THEN 990
960 XO=DX(O)+NN
970 A(KP,XO)=A(KP,XO)+C1
980 A(J,XO)=A(J,XO)-C1
990 IF DY(O)=0 THEN 1030
1000 YO=DY(O)+NN
1010 A(KP,YO)=A(KP,YO)+C2
1020 A(J,YO)=A(J,YO)+C2
1030 IF DX(D)=0 THEN 1070
1040 XD=DX(D)+NN
1050 A(KP,XD)=A(KP,XD)-C1
1060 A(J,XD)=A(J,XD)+C1
1070 IF DY(D)=0 THEN 1110
1080 YD=DY(D)+NN
1090 A(KP,YD)=A(KP,YD)+C2
1100 A(J,YD)=A(J,YD)-C2
```

(68)

```
1110 EI=E*I(I)
1120 KM(KP,KP)=KA(I)*EI/L(I)
1130 KM(J,J)=KB(I)*EI/L(I)
1140 KM(KP,J)=KC(I)*EI/L(I)
1150 KM(J,KP)=KC(I)*EI/L(I)
1160 NEXT I
1170 H=H+3*NB
1180 IF H<60 THEN 1210
1190 LPRINT CHR$(11)
1200 H=3+NB
1210 LPRINT
1220 LPRINT "BARRA LONGITUD          COEFICIENTES DE RIGIDEZ"
1230 LPRINT "          RAA          RAB, RBA          RBB"
1240 FOR I=1 TO NE
1250 LPRINT USING "###.###.###.###" +0.###.###"; I; L(I); KA(I);
1260 KC=-LC(I)
1270 LPRINT USING " +#.###.###.### +#.###.###"; KC; KB(I)
1280 NEXT I
1290 H=H+8*NN+GL
1300 IF H<60 THEN 1330
1310 LPRINT CHR$(12)
1320 H=8+NN+GL
1330 LPRINT
1340 LPRINT USING "MODULO DE ELASTICIDAD DEL MATERIAL (E)= ###.###.###.###" E
1350 LPRINT
1360 LPRINT "NUDO          MOMENTO"
1370 LPRINT "          EXTERNO"
1380 FOR I=1 TO NN
1390 LPRINT USING "###.###.###.###" I; F(I)
1400 NEXT I
1410 LPRINT
1420 LPRINT " GRADO"
1430 LPRINT " DE          FUERZA"
1440 LPRINT "LIBERTAD          EXTERNA"
1450 LPRINT " LINEAL"
1460 FOR I=1 TO GL
1470 J=I+NN
1480 LPRINT USING "###.###.###.###" I; F(J)
1490 NEXT I
1500 KP=NN+GL
1510 J=2*NB
1520 IF IM=0 THEN 1540
1530 GOTO 1710
1540 LPRINT CHR$(11)
1550 LPRINT "MATRIZ DE CONTINUIDAD"
1560 LPRINT
1570 FOR I=1 TO KP STEP 2
1580 LP=I+1
1590 FOR N=1 TO J
1600 LPRINT USING "A(### , ###)= +###.###.###.###"; N; I; A(N, I);
1610 IF I=KP THEN 1640
1620 LPRINT USING "          A(### , ###)= +###.###.###.###"; N; LP; A(N, LP)
1630 GOTO 1650
1640 LPRINT CHR$(10)
1650 NEXT N
1660 LPRINT
1670 LPRINT
1680 NEXT I
1690 LPRINT CHR$(11)
1700 LPRINT "MATRIZ DE CONTINUIDAD TRANSPUESTA"
```

(69)

```
1710 FOR I=1 TO J
1720 FOR N=1 TO KP
1730 B(N,I)=A(I,N)
1740 NEXT N
1750 NEXT I
1760 IF IM=0 THEN 1780
1770 GOTO 2060
1780 LPRINT
1790 FOR I=1 TO J STEP 2
1800 LP=I+1
1810 FOR N=1 TO KP
1820 LPRINT USING "AT(### , ###)= +###,###.#####";N;I;B(N,I);
1830 IF I=J THEN 1860
1840 LPRINT USING "      AT(### , ###)= +###,###.#####";N;LP;B(N,LP)
1850 GOTO 1870
1860 LPRINT CHR$(10)
1870 NEXT N
1880 LPRINT
1890 LPRINT
1900 NEXT I
1910 LPRINT CHR$(11)
1920 LPRINT "MATRIZ DE RIGIDECEZ DE LAS BARRAS"
1930 LPRINT
1940 FOR I=1 TO J STEP 2
1950 LP=I+1
1960 FOR N=1 TO J
1970 LPRINT USING "k(### , ###)= +###,###.#####";N;I;KM(N,I);
1980 IF I=J THEN 2010
1990 LPRINT USING "      k(### , ###)= +###,###.#####";N;LP;KM(N,LP);
2000 GOTO 2020
2010 LPRINT CHR$(10)
2020 NEXT N
2030 LPRINT
2040 LPRINT
2050 NEXT I
2060 FOR I=1 TO KP
2070 FOR N=1 TO J
2080 C(I,N)=0
2090 FOR LP=1 TO J
2100 C(I,N)=C(I,N)+B(I,LP)*M(LP,N)
2110 NEXT LP
2120 NEXT N
2130 NEXT I
2140 FOR I=1 TO KP
2150 FOR N=1 TO KP
2160 K(I,N)=0
2170 FOR LP=1 TO J
2180 K(I,N)=K(I,N)+C(I,LP)*A(LP,N)
2190 NEXT LP
2200 NEXT N
2210 NEXT I
2220 IF IM=0 THEN 2240
2230 GOTO 2390
2240 LPRINT CHR$(11)
2250 LPRINT "MATRIZ DE RIGIDECEZ DE LA ESTRUCTURA"
2260 LPRINT
2270 FOR I=1 TO KP STEP 2
2280 LP=I+1
2290 FOR N=1 TO KP
2300 LPRINT USING "K(### , ###)= +###,###.#####";N;I;K(N,I);
```


(70)

```
2310 IF I=KP THEN 2340
2320 LPRINT USING " K(### , ###) = +###.###.####";N;LP;K(N,LP)
2330 GOTO 2350
2340 LPRINT CHR$(10)
2350 NEXT N
2360 LPRINT
2370 LPRINT
2380 NEXT I
2390 LPRINT CHR$(11)
2400 FOR I=1 TO KP
2410 IF K(I,1)=0 THEN 2440
2420 NEXT I
2430 GOTO 2630
2440 FOR LP=1 TO KP
2450 IF K(LP,1)=0 THEN 2560
2460 IF I(I,LP)=0 THEN 2560
2470 FOR N=1 TO KP
2480 CO=K(LP,N)
2490 K(LP,N)=K(I,N)
2500 K(I,N)=CO
2510 NEXT N
2520 CO=F(LP)
2530 F(LP)=F(I)
2540 F(I)=CO
2550 GOTO 2420
2560 NEXT LP
2570 IF I<=NN THEN 2610
2580 LP=I-NN
2590 LPRINT "EL DESPLAZAMIENTO EN EL GLL(";LP;") ES INDEFINIDO"
2600 GOTO 3690
2610 LPRINT "EL GIRO EN EL NUDO (";I;") ES INDEFINIDO"
2620 GOTO 3690
2630 FOR I=1 TO KP
2640 IF K(I,1)=0 THEN 2660
2650 GOTO 2710
2660 IF F(I)=0 THEN 2690
2670 LPRINT "EL SISTEMA DE ECUACIONES ES INCOMPATIBLE"
2680 GOTO 3690
2690 LPRINT "EL SISTEMA DE ECUACIONES ES COMPATIBLE INDETERMINADO"
2700 GOTO 3690
2710 F(I)=F(I)/K(I,1)
2720 CO=K(I,1)
2730 FOR N=1 TO KP
2740 K(I,N)=K(I,N)/CO
2750 NEXT N
2760 FOR LP=1 TO KP
2770 IF LP=I THEN 2830
2780 F(LP)=F(LP)-K(LP,I)*F(I)
2790 CO=K(LP,I)
2800 FOR N=1 TO KP
2810 K(LP,N)=K(LP,N)-CO*K(I,N)
2820 NEXT N
2830 NEXT LP
2840 NEXT I
2850 LPRINT "EL SISTEMA DE ECUACIONES ES COMPATIBLE DETERMINADO"
2860 IF IM=0 THEN 2880
2870 GOTO 3040
2880 LPRINT
2890 LPRINT "MATRIZ SOLUCION"
2900 LPRINT
```

(71)

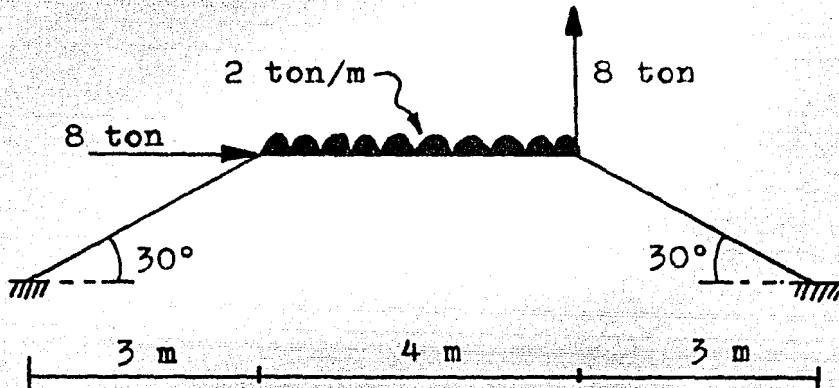
```
2910 FOR I=1 TO KP STEP 2
2920 LP=I+1
2930 FOR N=1 TO KP
2940 LPRINT USING "KS(###, ###)= +###,###.###";N;I;K(N,I)
2950 IF I=KP THEN 2980
2960 LPRINT USING "      KS(###, ###)= +###,###.###";N;LP;K(N,LP)
2970 GOTO 2990
2980 LPRINT C#*(10)
2990 NEXT N
3000 LPRINT
3010 LPRINT
3020 NEXT I
3030 LPRINT C#*(11)
3040 LPRINT
3050 LPRINT "DESPLAZAMIENTOS"
3060 FOR I=1 TO KP
3070 IF I=NN THEN 3100
3080 LPRINT USING "PHI(###)= +###,###.###";I;F(I)
3090 GOTO 3120
3100 LP=I+NN
3110 LPRINT USING "      d(###)= +###,###.###";LP;F(I)
3120 NEXT I
3130 FOR I=1 TO J
3140 KR(I,1)=0
3150 FOR LP=1 TO KP
3160 KR(I,1)=KR(I,1)+A(I,LP)*F(LP)
3170 NEXT LP
3180 NEXT I
3190 H=3+KP+J
3200 IF H<60 THEN 3230
3210 LPRINT C#*(11)
3220 H=2+J
3230 LPRINT
3240 LPRINT "DEFORMACIONES"
3250 FOR I=1 TO J STEP 2
3260 LP=I+1
3270 M=LP/2
3280 LPRINT USING "THETA A (###)= +###,###.###";M;KR(I,1)
3290 LPRINT USING "THETA B (###)= +###,###.###";M;KR(LP,1)
3300 NEXT I
3310 FOR I=1 TO J
3320 KR(I,2)=0
3330 FOR LP=1 TO J
3340 KR(I,2)=KR(I,2)+KM(I,LP)*KR(LP,1)
3350 NEXT LP
3360 NEXT I
3370 H=H+2+J
3380 IF H<60 THEN 3410
3390 LPRINT C#*(11)
3400 H=2+J
3410 LPRINT
3420 LPRINT "FUERZAS INTERNAS"
3430 FOR I=1 TO J STEP 2
3440 LP=I+1
3450 M=LP/2
3460 LPRINT USING "      mA (###)= +###,###.###";M;KR(I,2)
3470 LPRINT USING "      mB (###)= +###,###.###";M;KR(LP,2)
3480 NEXT I
3490 FOR I=1 TO KP
3500 F(I)=0
```

(72)

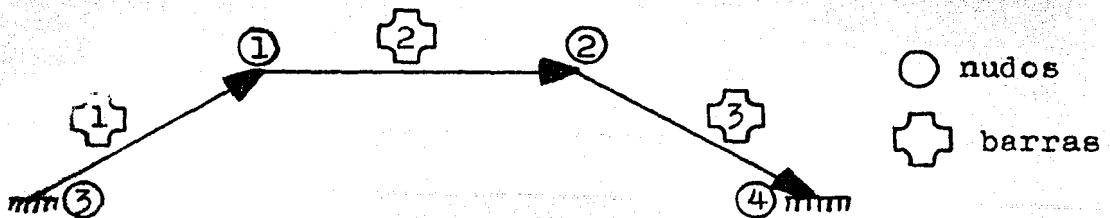
```
3510 FOR LP=1 TO J
3520 F(I)=F(I)+B(I,LP)*KR(LP,2)
3530 NEXT LP
3540 NEXT I
3550 H=H+3*KP
3560 IF H<0 THEN 3580
3570 LPRINT CHR$(11)
3580 LPRINT
3590 LPRINT "COMPRESION EQUILIBRIO"
3600 LPRINT "FUERZAS EXTERNAS"
3610 FOR I=1 TO KP
3620 IF I=NN THEN 3650
3630 LPRINT USING "      M(###)= +###.###.###":I;F(I)
3640 GOTO 3670
3650 LP=1-NN
3660 LPRINT USING "      F(###)= +###.###.###":LP;F(I)
3670 NEXT I
3680 LPRINT CHR$(11)
3690 END
```

Ejemplos.

1.- Consideremos el marco siguiente, sujeto a las cargas mostradas.



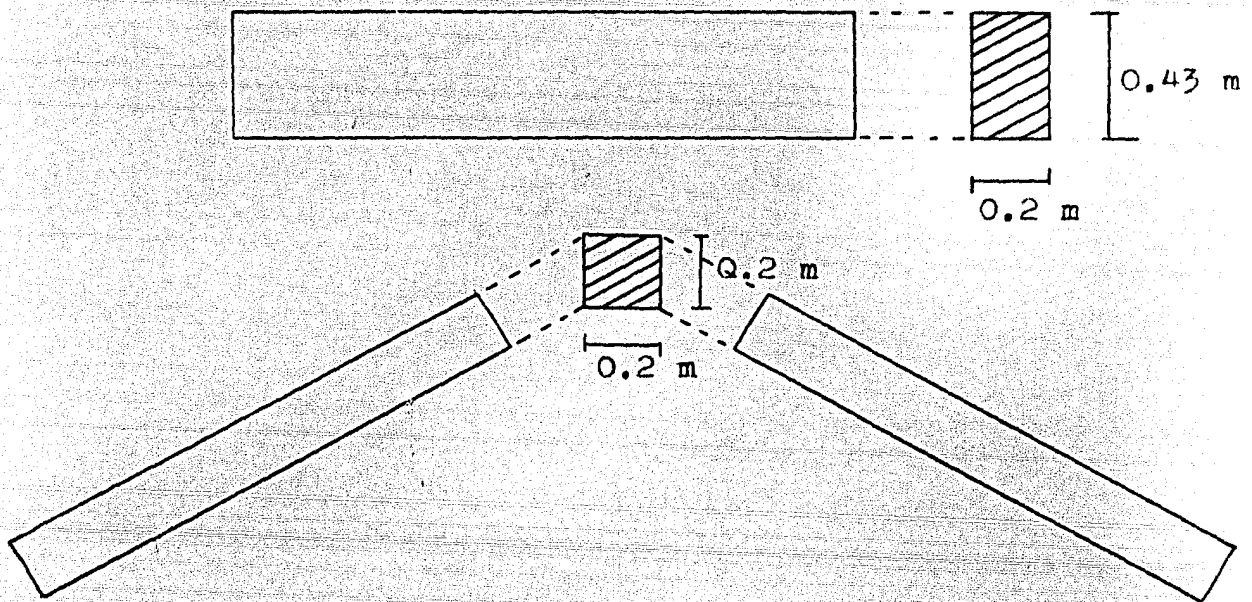
Numeremos las barras y los nudos, la numeración debe hacerse con números consecutivos, para los nudos no apoyos desde 1 hasta m , para los nudos apoyos desde $m+1$ hasta $m+n$, siendo m el número de nudos no apoyos y n el número de nudos apoyos, y para las barras desde 1 hasta \tilde{n} siendo \tilde{n} el número de barras, demos también una orientación a las barras, con lo cual se definirán el nudo origen y el nudo destino de cada una de ellas.



Las barras 1 y 3 tienen sección constante de 0.2 m de ancho y 0.2 m de peralte.

La barra 2 tiene sección constante de 0.2 m de ancho y 0.43 m de peralte.

(74)



De acuerdo con el manual de constantes de marcos (PCA), el momento de inercia de las barras es el que corresponde a la sección transversal que tenga el menor peralte en la barra, sabiendo que el ancho de cada barra es constante en toda su longitud. según el mencionado manual, puede decirse que dicha sección es la que tiene el menor momento de inercia. Además puede observarse que cualquier sección transversal de las barras contempladas por este manual es una sección rectangular cuyo momento de inercia es:

$$I = bh^3/12$$

donde:

b es la base de dicho rectángulo o el ancho de la barra.

h es la altura del rectángulo o el peralte de la barra.

I es el momento de inercia con respecto a un eje para-

(75)

lelo a la base del rectángulo que pasa por el centroide de la sección.

En nuestro ejemplo para las barras 1 y 3.

$$I = (0,2 \text{ m})^4 / 12 = 0,000133 \text{ m}^4$$

para la barra 2.

$$I = 0,2 (0,43)^3 / 12 = 0,00133 \text{ m}^4$$

Como puede observarse la barra 2 tiene 10 veces la inercia de las barras 1 y 3.

En la construcción de este marco se empleará concreto de $f'c = 200 \text{ kg/cm}^2$, con lo cual tendremos un módulo de elasticidad del material:

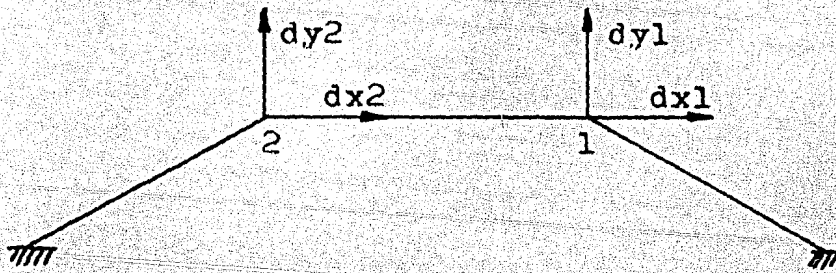
$$E = 10,000 / f'c = 10,000 / 200 = 141,421 \text{ kg/cm}^2$$

Que en unidades compatibles con las empleadas anteriormente es:

$$E = 1,414,210.00 \text{ ton/m}^2$$

Distingamos ahora los tres grados de libertad lineal de la estructura y su correspondencia con los desplazamientos en las direcciones X y Y de los nudos. Nótese que solo atendemos a los grados de libertad lineal ya que el programa no es capaz de distinguirlos y los datos referentes a ello tendremos que proporcionárselos, no así para los grados de libertad angular que sí son distinguidos por el programa.

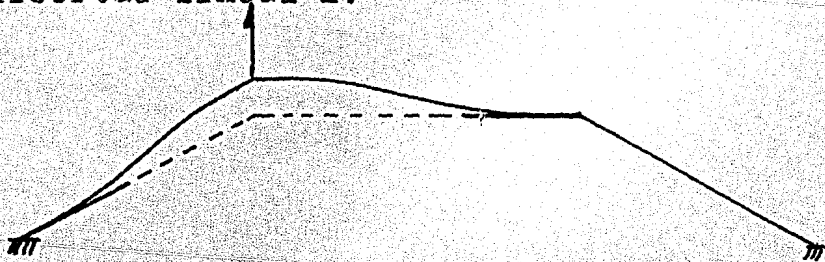
Desplazamientos en las direcciones X y Y de los nudos.



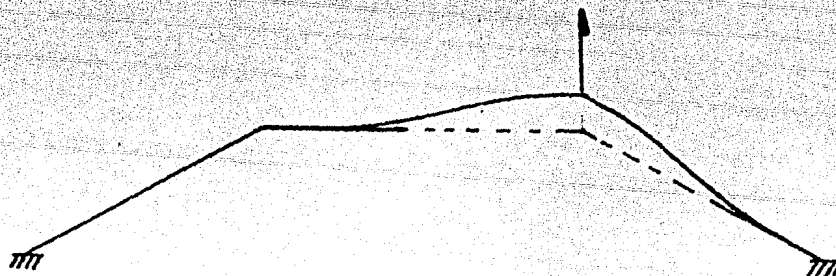
Grado de libertad lineal 1.



Grado de libertad lineal 2.



Grado de libertad lineal 3.



De las figuras anteriores podemos establecer la correspondencia entre los grados de libertad lineal y los desplazamientos en X y Y de los nudos no apoyos.

Nudo	Grado de libertad lineal que corresponde con el desplazamiento del nudo en la dirección:	
	X	Y
1	1	2
2	1	3

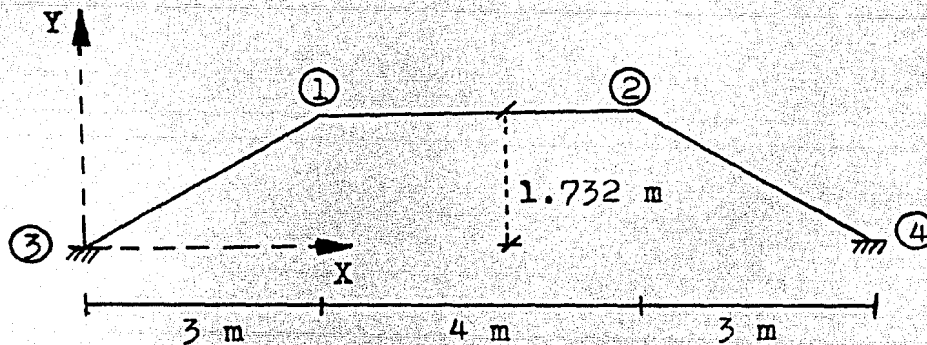
Recordemos que si el desplazamiento de un nudo en alguna de las dos direcciones establecidas (X y Y) no existe por estar restringido esté por las condiciones de apoyo considerando la hipótesis de que no existen deformaciones axiales en las barras, utilizaremos el grado de libertad ficticio 0 para expresar que ningún grado de libertad lineal corresponde con este desplazamiento.

Para los apoyos no es necesario esto ya que el programa considera automáticamente que éstos no tienen ningún desplazamiento al efectuar los calculos.

Obtengamos ahora las coordenadas de todos los nudos incluyendo los apoyos, para lo cual fijaremos el origen de nuestro sistema de Coordenadas en el nudo 3 que corresponde a uno de los apoyos.

La altura del marco es:

$$\text{Altura} = (3 \text{ m}) \tan 30^\circ = 1.732 \text{ m}$$



Nudo	Coordenadas	
	Abscisa (X)	Ordenada (Y)
1	3 m	1.732 m
2	7 m	1.732 m
3	0 m	0.000 m
4	10 m	0.000 m

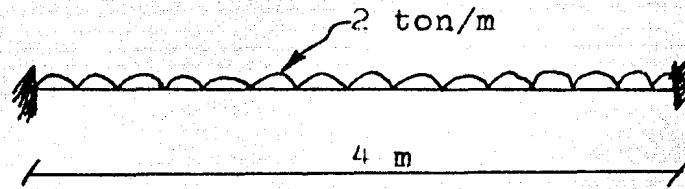
Coloquemos ahora en forma tabular el nudo origen y el nudo destino de cada barra de acuerdo con la dirección adoptada para cada una de ellas. Para ello es que se han dado números a los apoyos, para identificarlos también.

Barra	Nudo origen	Nudo destino
1	3	1
2	1	2
3	2	4

Calculemos también las fuerzas externas aplicadas en los nudos, las cuales pueden ser; momentos, fuerzas paralelas a la dirección X y fuerzas paralelas a la dirección Y.

(79)

Para la barra 2 que es la única que se encuentra cargada.

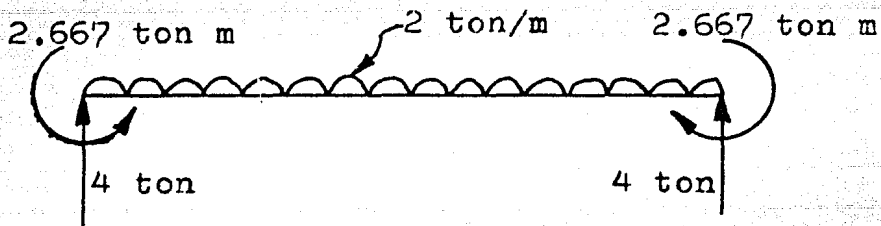


Sabemos que el momento de empotramiento para una barra de sección constante es $wL^2/12$.

Para nuestro marco:

$$wL^2/12 = 2 \text{ ton/m } (4 \text{ m})^2/12 = 2.667 \text{ ton m}$$

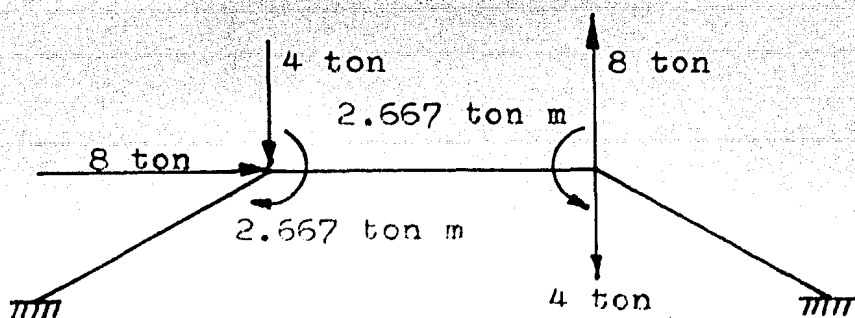
y por equilibrio de fuerzas encontramos el valor de las reacciones.



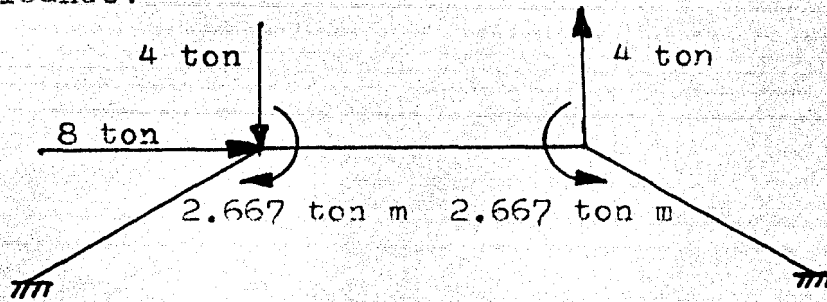
De aquí establecemos que la siguiente barra es equivalente en cuanto a las fuerzas externas aplicadas, con nuestra barra real.



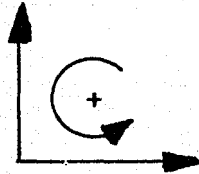
La cual en la estructura queda:



Simplificando:



Ahora determinemos las fuerzas externas que actúan en la -- dirección de cada uno de los grados de libertad (angulares y -- lineales), siguiendo la convención de signos establecida con -- anterioridad.



Existen en esta estructura 2 grados de libertad angular, el giro en el nudo 1 y el giro en el nudo 2, y las fuerzas que -- actúan en dirección de estos grados de libertad son el momento en el nudo 1 y el momento en el nudo 2 respectivamente.

Momento externo en el nudo 1 = -2.667 ton m

Momento externo en el nudo 2 = $+2.667 \text{ ton m}$

Como ya vimos anteriormente, existen 3 grados de libertad -- lineal en esta estructura y al igual que para los desplazamien -- tos, las fuerzas aplicadas sobre el nudo en las direcciones X -- y Y corresponden con la dirección de alguno de los grados de -- libertad lineal del nudo. Si no existiera ningún grado de li -- bertad lineal correspondiendo con alguna de estas fuerzas, en -- tonces dicha fuerza no sería necesaria para efectuar los calcul

los ya que sólo nos interesan los efectos de la flexión.

Si existieran dos fuerzas aplicadas sobre distintos nudos - pero sobre el mismo grado de libertad lineal habría que sumar las algebraicamente para obtener la fuerza total que actúa sobre dicho grado de libertad.

Para nuestro marco:

Fuerza externa sobre el grado de libertad lineal 1 = +8 ton

Fuerza externa sobre el grado de libertad lineal 2 = -4 ton

Fuerza externa sobre el grado de libertad lineal 3 = +4 ton

Sabemos que para una barra empotrada la rigidez angular de sus extremos es $4EI/L$ siendo el factor de transporte $1/2$, lo cual se cumple exclusivamente para barras de sección constante como las del marco en estudio, por tanto tendremos las rigideces siguientes:

$$k_{AA}=4EI/L \quad k_{BA}=2EI/L \quad k_{BB}=4EI/L \quad k_{AB}=2EI/L$$

Como EI/l es constante para cada barra se emplean únicamente los coeficientes de rigidez:

$$R_{AA}=4 \quad R_{BA}=2 \quad R_{BB}=4 \quad R_{AB}=2$$

Para este ejemplo no es necesario utilizar las tablas ya -- que los valores de las rigideces angulares, factores de transporte, y momentos de empotramiento para barras de sección constante son bien conocidos, no así para barras de sección variable, por lo cual mostraremos el uso de las tablas del manual.

Al final de estos ejemplos se muestran algunas de las tablas del manual en cuya parte superior se encuentra un croquis donde se especifican las dimensiones de las barras en forma generalizada mediante algunas variables, si nosotros encontramos los valores de dichas variables para un caso particular de barra entonces podremos entrar a las tablas y obtener los valores correspondientes de los Coeficientes de rigidez R_{AA} , R_{BB} , los Factores de Transporte C_{AB} , C_{BA} con los cuales se pueden obtener los Coeficientes de rigidez R_{AB} y R_{BA} mediante:

$$R_{BA} = C_{AB} R_{AA} \quad R_{AB} = C_{BA} R_{BB}$$

También se obtienen los Coeficientes del Momento de Empotramiento para carga uniformemente distribuida o para carga concentrada. Para obtener el momento de empotramiento para el caso de carga uniformemente distribuida se multiplican los coeficientes m_A y m_B por wl^2 .

$$M_A = m_A wL^2$$

$$M_B = m_B wL^2$$

Para el caso de carga concentrada los coeficientes n_A y n_B se multiplican por Pl .

$$M_A = n_A Pl$$

$$M_B = n_B Pl$$

Obtengamos estos valores para nuestro marco.

Como sólo tenemos barras de sección constante en él, para todas ellas:

$$W_A = r_A \cdot h_c = 0, \quad W_B = r_B \cdot h_c = 0, \quad a_A \cdot L = 0, \quad a_B \cdot L = 0$$

Como es obvio que la longitud de las barras (L) y el peralte mínimo de las mismas (h_c) son distintos de 0, podemos concluir que:

$$a_A=0 \quad a_B=0 \quad r_A=0 \quad r_B=0$$

Con estos valores entramos a las tablas y nos dirigimos a la tabla 52a que es la correspondiente a ellos.

En esta tabla encontramos que para todas nuestras barras:

$$C_{AB}=0.5 \quad C_{BA}=0.5 \quad R_{AA}=4 \quad R_{BB}=4 \quad m_A=0.0833 \quad m_B=0.0833$$

$$\text{De aquí:} \quad R_{BA}=C_{AB}R_{AA}=0.5(4)=2 \quad R_{AB}=C_{BA}R_{BB}=0.5(4)=2$$

Y para la barra 2 que es la única que se encuentra cargada:

$$M_A=m_A w L^2 = 0.0833(2 \text{ ton/m})(4 \text{ m})^2 = 2.666 \text{ ton m}$$

$$M_B=m_B w L^2 = 0.0833(2 \text{ ton/m})(4 \text{ m})^2 = 2.666 \text{ ton m}$$

Con estos valores de los momentos de empotramiento que son aproximadamente los mismos que habíamos calculado anteriormente se pueden calcular las fuerzas externas aplicadas en los nudos y con ello las fuerzas que actúan en dirección de cada uno de los grados de libertad de la estructura como se había hecho anteriormente.

Como puede verse se obtienen los mismos valores que se obtuvieron antes y con ello se ha ilustrado el uso adecuado de las tablas.

Ahora contamos ya con todos los datos necesarios y procede-

remos a correr el programa.

Ilustraremos en este ejemplo la forma en que el programa va solicitando los datos y la forma en que debemos de proporcionar éstos, para lo cual emplearemos una P para distinguir lo que el programa pregunta por pantalla y una R para distinguir lo que debemos responder nosotros.

Corre el programa.

P Imprimir operaciones (si=0,no≠0) ?
 R 0
 P Número de nudos sin incluir apoyos ?
 R 2
 P Número de grados de libertad lineal ?
 R 3
 P Número de apoyos ?
 R 2
 P Número de barras ?
 R 3
 P Módulo de elasticidad del material de las barras ?
 R 1,414,210.0
 P Nudo 1
 P Momento externo ?
 R -2.667
 P El desplazamiento en X corresponde al grado de libertad lineal ?
 R 1
 P El desplazamiento en Y corresponde al grado de libertad lineal ?
 R 2

P Coordenada X ?

R 3.0

P Coordenada Y ?

R 1.732

P Nudo 2

P Momento externo ?

R 2.667

F El desplazamiento en X corresponde al grado de libertad lineal ?

R 1

P El desplazamiento en Y corresponde al grado de libertad lineal ?

R 3

P Coordenada X ?

R 7.0

P Coordenada Y ?

R 1.732

P Nudo 3

P Apoyo

P Coordenada X ?

R 0.0

P Coordenada Y ?

R 0.0

P Nudo 4

F Apoyo

P Coordenada X ?

R 10.0

P Coordenada Y ?

R 0.0

P Fuerza en dirección del grado de libertad lineal 1 ?

R 8.0

P Fuerza en dirección del grado de libertad lineal 2 ?

R -4.0

P Fuerza en dirección del grado de libertad lineal 3 ?

R 4.0

P Barra 1

P Nudo origen ?

R 3

P Nudo destino ?

R 1

P Coeficiente de rigidez R_{AA} ?

R 4.0

P Coeficiente de rigidez R_{BB} ?

R 4.0

P Coeficiente de rigidez R_{AB}, R_{BA} ?

R 2.0

P Momento de inercia ?

R 0.000133

P Barra 2

P Nudo origen ?

R 1

P Nudo destino ?

R 2

P Si las propiedades geométricas

P Coeficientes de rigidez ($R_{AA}, R_{AB}, R_{BA}, R_{BB}$) y momento de inercia (I)

P De alguna barra son iguales a las de otra barra cuyos datos

P Hayan sido proporcionados, únicamente especifique el número

P De esta, en caso contrario pulse 0

(87)

P Propiedades barra 2 = Propiedades barra ?
R 0
P Coeficiente de rigidez R_{AA} ?
R 4.0
P Coeficiente de rigidez R_{BB} ?
R 4.0
P Coeficiente de rigidez R_{AB}, R_{BA} ?
R 2.0
P Momento de inercia ?
R 0.00133
P Barra 3
P Nudo origen ?
R 2
P Nudo destino ?
R 4
P Propiedades barra 3 = Propiedades barra ?
R 1

Aquí termina el abastecimiento de datos al programa y sólo resta esperar a que los resultados aparezcan en la impresora.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para -- este ejemplo, no debe olvidarse que todos los datos de entrada deben estar en unidades compatibles para que los resultados -- sean correctos y tengan unidades compatibles con los datos.

(88)

GRADO DE LIBERTAD LINEAL QUE
CORRESPONDE CON EL DESPLAZAMIENTO
DEL NUDO EN LA DIRECCION

NUDO	COORDENADAS		X		Y	
	X=	Y=	(1)	(2)	(3)	(3)
1	+3.000	+1.732				
2	+7.000	+1.732	(1)	(2)		
3	+0.000	+0.000	(1)	(3)		
4	+10.000	+0.000				

BARRA	NUDO ORIGEN	NUDO DESTINO	MOMENTO INERCIA	
1	3	1	0.00013	
2	1	2	0.00133	
3	2	4	0.00013	

BARRA	LONGITUD	COEFICIENTES DE RIGIDEZ		
		RAA	RAB, RBA	RBB
1	3.464	+4.000	+2.000	+4.000
2	4.000	+4.000	+2.000	+4.000
3	3.464	+4.000	+2.000	+4.000

MODULO DE ELASTICIDAD DEL MATERIAL (E) = 1,414,210.000

NUDO	MOMENTO EXTERNO
1	-2.667
2	2.667

GRADO DE LIBERTAD LINEAL	FUERZA EXTERNA
1	8.000
2	-4.000
3	4.000

(89)

MATRIZ DE CONTINUIDAD

A(1 , 1) =	+0.00000	A(1 , 2) =	+0.00000
A(2 , 1) =	+1.00000	A(2 , 2) =	+0.00000
A(3 , 1) =	-1.00000	A(3 , 2) =	+0.00000
A(4 , 1) =	+0.00000	A(4 , 2) =	+1.00000
A(5 , 1) =	+0.00000	A(5 , 2) =	-1.00000
A(6 , 1) =	+0.00000	A(6 , 2) =	+0.00000
A(1 , 3) =	-0.14434	A(1 , 4) =	+0.25000
A(2 , 3) =	+0.14434	A(2 , 4) =	-0.25000
A(3 , 3) =	+0.00000	A(3 , 4) =	-0.25000
A(4 , 3) =	+0.00000	A(4 , 4) =	+0.25000
A(5 , 3) =	-0.14434	A(5 , 4) =	+0.00000
A(6 , 3) =	+0.14434	A(6 , 4) =	+0.00000
A(1 , 5) =	+0.00000		
A(2 , 5) =	+0.00000		
A(3 , 5) =	+0.25000		
A(4 , 5) =	-0.25000		
A(5 , 5) =	-0.25000		
A(6 , 5) =	+0.25000		

MATRIZ DE CONTINUIDAD TRANSPUESTA

(90)

AT(1 , 1)=	+0.00000	AT(1 , 2)=	+1.00000
AT(2 , 1)=	+0.00000	AT(2 , 2)=	+0.00000
AT(3 , 1)=	-0.14434	AT(3 , 2)=	+0.14434
AT(4 , 1)=	+0.25000	AT(4 , 2)=	-0.25000
AT(5 , 1)=	+0.00000	AT(5 , 2)=	+0.00000
AT(1 , 3)=	-1.00000	AT(1 , 4)=	+0.00000
AT(2 , 3)=	+0.00000	AT(2 , 4)=	+1.00000
AT(3 , 3)=	+0.00000	AT(3 , 4)=	+0.00000
AT(4 , 3)=	-0.25000	AT(4 , 4)=	+0.25000
AT(5 , 3)=	+0.25000	AT(5 , 4)=	-0.25000
AT(1 , 5)=	+0.00000	AT(1 , 6)=	+0.00000
AT(2 , 5)=	-1.00000	AT(2 , 6)=	+0.00000
AT(3 , 5)=	-0.14434	AT(3 , 6)=	+0.14434
AT(4 , 5)=	+0.00000	AT(4 , 6)=	+0.00000
AT(5 , 5)=	-0.25000	AT(5 , 6)=	+0.25000

(91)

MATRIZ DE RIGIDECES DE LAS BARRAS

k(1 , 1)=	+217.18900	k(1 , 2)=	-108.59500
k(2 , 1)=	-108.59500	k(2 , 2)=	+217.18900
k(3 , 1)=	+0.00000	k(3 , 2)=	+0.00000
k(4 , 1)=	+0.00000	k(4 , 2)=	+0.00000
k(5 , 1)=	+0.00000	k(5 , 2)=	+0.00000
k(6 , 1)=	+0.00000	k(6 , 2)=	+0.00000
k(1 , 3)=	+0.00000	k(1 , 4)=	+0.00000
k(2 , 3)=	+0.00000	k(2 , 4)=	-0.00000
k(3 , 3)=	+1,830.90000	k(3 , 4)=	-940.45000
k(4 , 3)=	-940.45000	k(4 , 4)=	+1,830.90000
k(5 , 3)=	+0.00000	k(5 , 4)=	+0.00000
k(6 , 3)=	+0.00000	k(6 , 4)=	+0.00000
k(1 , 5)=	+0.00000	k(1 , 6)=	+0.00000
k(2 , 5)=	+0.00000	k(2 , 6)=	+0.00000
k(3 , 5)=	+0.00000	k(3 , 6)=	+0.00000
k(4 , 5)=	+0.00000	k(4 , 6)=	+0.00000
k(5 , 5)=	+217.18900	k(5 , 6)=	-108.59500
k(6 , 5)=	-108.59500	k(6 , 6)=	+217.18900

MATRIZ DE RIGIDEZES DE LA ESTRUCTURA

K(1 , 1)=	+2,098.09000	K(1 , 2)=	+940.45000
K(2 , 1)=	+940.45000	K(2 , 2)=	+2,098.09000
K(3 , 1)=	+47.02210	K(3 , 2)=	+47.02210
K(4 , 1)=	+623.89000	K(4 , 2)=	+795.33700
K(5 , 1)=	-795.33700	K(5 , 2)=	-623.89000
K(1 , 3)=	+47.02210	K(1 , 4)=	+623.89000
K(2 , 3)=	+47.02210	K(2 , 4)=	+795.33700
K(3 , 3)=	+27.14780	K(3 , 4)=	-23.51140
K(4 , 3)=	-23.51140	K(4 , 4)=	+393.39300
K(5 , 3)=	-23.51140	K(5 , 4)=	-352.66900
K(1 , 5)=	-795.33700		
K(2 , 5)=	-623.89000		
K(3 , 5)=	+23.51140		
K(4 , 5)=	-352.66900		
K(5 , 5)=	+393.39300		

EL SISTEMA DE ECUACIONES ES COMPATIBLE DETERMINADO

MATRIZ SOLUCION

KS(1 , 1) =	+1.000	KS(1 , 2) =	+0.000
KS(2 , 1) =	+0.000	KS(2 , 2) =	+1.000
KS(3 , 1) =	+0.000	KS(3 , 2) =	+0.000
KS(4 , 1) =	+0.000	KS(4 , 2) =	+0.000
KS(5 , 1) =	+0.000	KS(5 , 2) =	+0.000
KS(1 , 3) =	+0.000	KS(1 , 4) =	+0.000
KS(2 , 3) =	+0.000	KS(2 , 4) =	+0.000
KS(3 , 3) =	+1.000	KS(3 , 4) =	+0.000
KS(4 , 3) =	+0.000	KS(4 , 4) =	+1.000
KS(5 , 3) =	+0.000	KS(5 , 4) =	+0.000
KS(1 , 5) =	+0.000		
KS(2 , 5) =	+0.000		
KS(3 , 5) =	+0.000		
KS(4 , 5) =	+0.000		
KS(5 , 5) =	+1.000		

(9)

DESPLAZAMIENTOS

PHI (1) = -0.366
PHI (2) = -0.350
d (1) = +2.817
d (2) = +0.725
d (3) = -0.736

DEFORMACIONES

THETA A (1) = -0.225
THETA B (1) = -0.140
THETA A (2) = +0.001
THETA B (2) = +0.005
THETA A (3) = +0.138
THETA B (3) = +0.223

FUERZAS INTERNAS

mA (1) = -33.716
mB (1) = -6.002
mA (2) = -3.335
mB (2) = +8.378
mA (3) = +5.711
mB (3) = +33.425

COMPRACION EQUILIBRIO

FUERZAS EXTERNAS

M (1) = -2.667
M (2) = +2.667
F (1) = +8.000
F (2) = -4.000
F (3) = +4.000

Sabemos que la barra 2 tiene 10 veces la inercia de las barras 1 y 3.

Si hacemos $i = 0.00133 \text{ m}^4$

Entonces;

Momento de inercia de la barra 1 = $1.0 i$

Momento de inercia de la barra 2 = $10.0 i$

Momento de inercia de la barra 3 = $1.0 i$

Si hacemos $e = 1,414,210.0 \text{ ton/m}^2$

Entonces;

$E = 1.0 e$

Ahora para todas las barras i y e son constantes y podemos extraerlas del calculo con el programa lo que evitara que dicho programa trabaje con cantidades demasiado grandes. Unicamente habrá que multiplicar por (ei) los coeficientes de las matrices de rigideces de las barras y de rigideces de la estructura para obtener los coeficientes reales que corresponden a nuestra estructura y habrá que dividir entre (ei) los coeficientes de los vectores de desplazamientos y de deformaciones angulares con lo cual se obtienen igualmente los coeficientes reales que corresponden a nuestra estructura.

Este procedimiento es muy útil cuando se desconocen los valores precisos de i y e que provocarán desplazamientos y deformaciones angulares admisibles, conocida la proporcion de las rigideces en las barras se puede efectuar un cálculo para posteriormente mediante iteraciones se llegue a determinar los valores razonables de i y e que satisfagan nuestras solicitudes.

Corramos nuevamente el programa para nuestro mismo ejemplo, cambiando únicamente los valores de los momentos de inercia y módulo de elasticidad, por los siguientes.

Momento de inercia de la barra 1 = 1

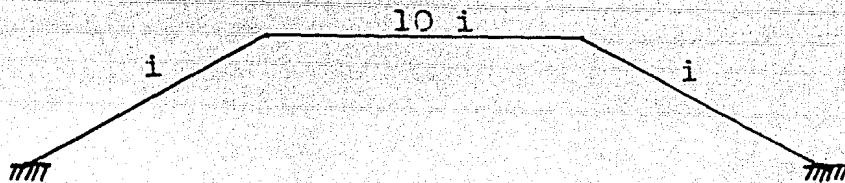
Momento de inercia de la barra 2 = 10

Momento de inercia de la barra 3 = 1

Módulo de elasticidad del material = 1

Para comprobar podremos multiplicar por (ei) las matrices de rigideces de las barras y de rigideces de la estructura obtenidas en esta corrida del programa y compararlas con las obtenidas en la corrida anterior, igualmente podremos dividir -- entre (ei) los vectores de desplazamientos y de deformaciones angulares obtenidos aquí y compararlos con los obtenidos anteriormente.

$$ei = (1,414,210.0 \text{ ton/m}^2)(0.00133 \text{ m}^4) = 1,880.90 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$$



(97)

GRADO DE LIBERTAD LINEAL QUE
CORRESPONDE CON EL DESPLAZAMIENTO
DEL NUDO EN LA DIRECCION

NUDO	COORDENADAS		X	Y
	X=	Y=		
1	+3.000	+1.732	(1)	(2)
2	+7.000	+1.732	(1)	(3)
3	+0.000	+0.000	APUYO	
4	+10.000	+0.000	APUYO	

BARRA	NUDO ORIGEN	NUDO DESTINO	MOMENTO INERCIA
1	3	1	1.00000
2	1	2	10.00000
3	2	4	1.00000

BARRA	LONGITUD	COEFICIENTES DE RIGIDEZ		
		RAA	RAB, RBA	RBB
1	3.464	+4.000	+2.000	+4.000
2	4.000	+4.000	+2.000	+4.000
3	3.464	+4.000	+2.000	+4.000

MODULO DE ELASTICIDAD DEL MATERIAL (E) = 1.000

NUDO	MOMENTO EXTERNO
1	-2.667
2	2.667

GRADO DE LIBERTAD LINEAL	FUERZA EXTERNA
1	8.000
2	-4.000
3	4.000

MATRIZ DE CONTINUIDAD

A(1 , 1)=	+0.00000	A(1 , 2)=	+0.00000
A(2 , 1)=	+1.00000	A(2 , 2)=	+0.00000
A(3 , 1)=	-1.00000	A(3 , 2)=	+0.00000
A(4 , 1)=	+0.00000	A(4 , 2)=	+1.00000
A(5 , 1)=	+0.00000	A(5 , 2)=	-1.00000
A(6 , 1)=	+0.00000	A(6 , 2)=	+0.00000
A(1 , 3)=	-0.14434	A(1 , 4)=	+0.25000
A(2 , 3)=	+0.14434	A(2 , 4)=	-0.25000
A(3 , 3)=	+0.00000	A(3 , 4)=	-0.25000
A(4 , 3)=	+0.00000	A(4 , 4)=	+0.25000
A(5 , 3)=	-0.14434	A(5 , 4)=	+0.00000
A(6 , 3)=	+0.14434	A(6 , 4)=	+0.00000
A(1 , 5)=	+0.00000		
A(2 , 5)=	+0.00000		
A(3 , 5)=	+0.25000		
A(4 , 5)=	-0.25000		
A(5 , 5)=	-0.25000		
A(6 , 5)=	+0.25000		

MATRIZ DE CONTINUIDAD TRANSUESTA

AT(1 , 1)=	+0.00000	AT(1 , 2)=	+1.00000
AT(2 , 1)=	+0.00000	AT(2 , 2)=	+0.00000
AT(3 , 1)=	-0.14434	AT(3 , 2)=	+0.14434
AT(4 , 1)=	+0.25000	AT(4 , 2)=	-0.25000
AT(5 , 1)=	+0.00000	AT(5 , 2)=	+0.00000
AT(1 , 3)=	-1.00000	AT(1 , 4)=	+0.00000
AT(2 , 3)=	+0.00000	AT(2 , 4)=	+1.00000
AT(3 , 3)=	+0.00000	AT(3 , 4)=	+0.00000
AT(4 , 3)=	-0.25000	AT(4 , 4)=	+0.25000
AT(5 , 3)=	-0.25000	AT(5 , 4)=	-0.25000
AT(1 , 5)=	+0.00000	AT(1 , 6)=	+0.00000
AT(2 , 5)=	-1.00000	AT(2 , 6)=	+0.00000
AT(3 , 5)=	-0.14434	AT(3 , 6)=	+0.14434
AT(4 , 5)=	+0.00000	AT(4 , 6)=	+0.00000
AT(5 , 5)=	-0.25000	AT(5 , 6)=	+0.25000

MATRIZ DE RIGIDECES DE LAS BARRAS

k(1 , 1)=	+1.15471	k(1 , 2)=	-0.57735
k(2 , 1)=	-0.57735	k(2 , 2)=	+1.15471
k(3 , 1)=	+0.00000	k(3 , 2)=	+0.00000
k(4 , 1)=	+0.00000	k(4 , 2)=	+0.00000
k(5 , 1)=	+0.00000	k(5 , 2)=	+0.00000
k(6 , 1)=	+0.00000	k(6 , 2)=	+0.00000
k(1 , 3)=	+0.00000	k(1 , 4)=	+0.00000
k(2 , 3)=	+0.00000	k(2 , 4)=	+0.00000
k(3 , 3)=	+10.00000	k(3 , 4)=	-5.00000
k(4 , 3)=	-5.00000	k(4 , 4)=	+10.00000
k(5 , 3)=	+0.00000	k(5 , 4)=	+0.00000
k(6 , 3)=	+0.00000	k(6 , 4)=	+0.00000
k(1 , 5)=	+0.00000	k(1 , 6)=	+0.00000
k(2 , 5)=	+0.00000	k(2 , 6)=	+0.00000
k(3 , 5)=	+0.00000	k(3 , 6)=	+0.00000
k(4 , 5)=	+0.00000	k(4 , 6)=	+0.00000
k(5 , 5)=	+1.15471	k(5 , 6)=	-0.57735
k(6 , 5)=	-0.57735	k(6 , 6)=	+1.15471

(101)

MATRIZ DE RIGIDECES DE LA ESTRUCTURA

K(1 , 1) =	+11.15470	K(1 , 2) =	+5.00000
K(2 , 1) =	+5.00000	K(2 , 2) =	+0.25000
K(3 , 1) =	+1.25000	K(3 , 2) =	+3.75000
K(4 , 1) =	+3.31698	K(4 , 2) =	-3.31698
K(5 , 1) =	-3.75000		
		K(1 , 3) =	+0.25000
K(1 , 3) =	+0.25000	K(2 , 3) =	+3.75000
K(2 , 3) =	+0.14433	K(3 , 3) =	-0.12500
K(3 , 3) =	-0.12500	K(4 , 3) =	+2.09151
K(4 , 3) =	+0.12500	K(5 , 3) =	-1.87500
K(1 , 5) =	-3.75000		
K(2 , 5) =	-3.31698		
K(3 , 5) =	+0.12500		
K(4 , 5) =	-1.87500		
K(5 , 5) =	+2.09151		

EL SISTEMA DE ECUACIONES ES COMPATIBLE DETERMINADO

MATRIZ SOLUCION

KS(1 , 1)=	+1.000	KS(1 , 2)=	+0.000
KS(2 , 1)=	+0.000	KS(2 , 2)=	+1.000
KS(3 , 1)=	+0.000	KS(3 , 2)=	+0.000
KS(4 , 1)=	+0.000	KS(4 , 2)=	+0.000
KS(5 , 1)=	+0.000	KS(5 , 2)=	+0.000

KS(1 , 3)=	+0.000	KS(1 , 4)=	+0.000
KS(2 , 3)=	+0.000	KS(2 , 4)=	+0.000
KS(3 , 3)=	+1.000	KS(3 , 4)=	+0.000
KS(4 , 3)=	+0.000	KS(4 , 4)=	+1.000
KS(5 , 3)=	+0.000	KS(5 , 4)=	+0.000

KS(1 , 5)=	+0.000
KS(2 , 5)=	+0.000
KS(3 , 5)=	+0.000
KS(4 , 5)=	+0.000
KS(5 , 5)=	+1.000

(103)

DESPLAZAMIENTOS

PHI (1) =	-68.793
PHI (2) =	-67.784
d (1) =	+529.908
d (2) =	+136.350
d (3) =	-136.367

DEFORMACIONES

THETA A (1) =	-42.397
THETA B (1) =	-26.396
THETA A (2) =	+0.114
THETA B (2) =	+0.805
THETA A (3) =	+25.892
THETA B (3) =	+41.892

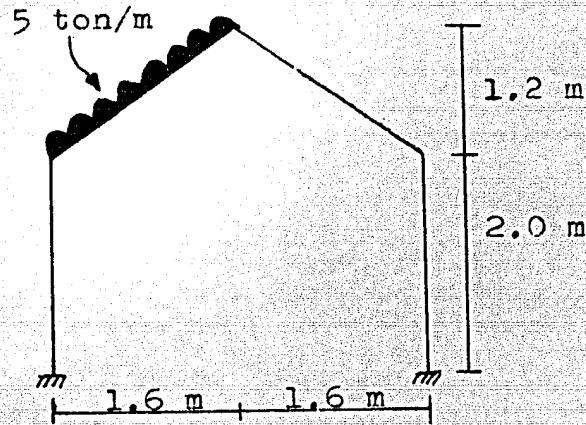
FUERZAS INTERNAS

mA (1) =	-33.716
mB (1) =	-6.002
mA (2) =	-3.335
mB (2) =	+8.378
mA (3) =	+5.711
mB (3) =	+33.424

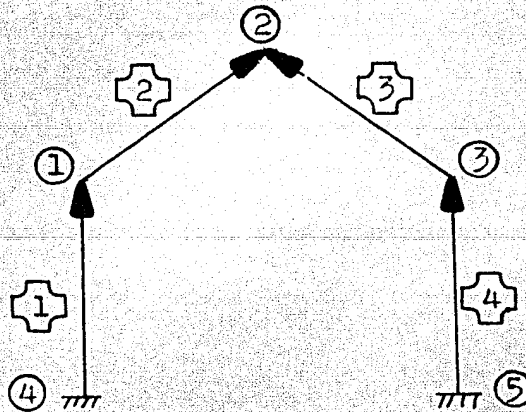
COMPROBACION EQUILIBRIO
FUERZAS EXTERNAS

M (1) =	-2.667
M (2) =	+2.667
F (1) =	+8.000
F (2) =	-4.000
F (3) =	+4.000

2.- Consideremos el siguiente marco, sometido a las cargas --- mostradas.



Numerando barras, nudos apoyos y no apoyos, y dando dirección a las barras.

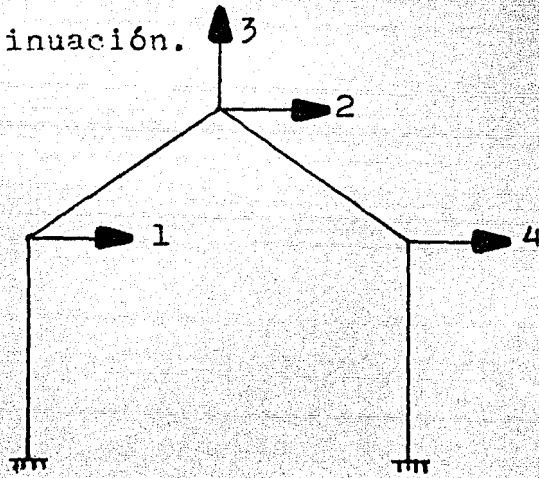


De las figuras anteriores tenemos:

Nudo	Coordenadas	
	(X)	(Y)
1	0.0 m	2.0 m
2	1.6 m	3.2 m
3	3.2 m	2.0 m
4	0.0 m	0.0 m
5	3.2 m	0.0 m

Barra	Nudo origen	Nudo destino
1	4	1
2	1	2
3	3	2
4	5	3

La estructura presenta cuatro grados de libertad lineal que se indican a continuación.

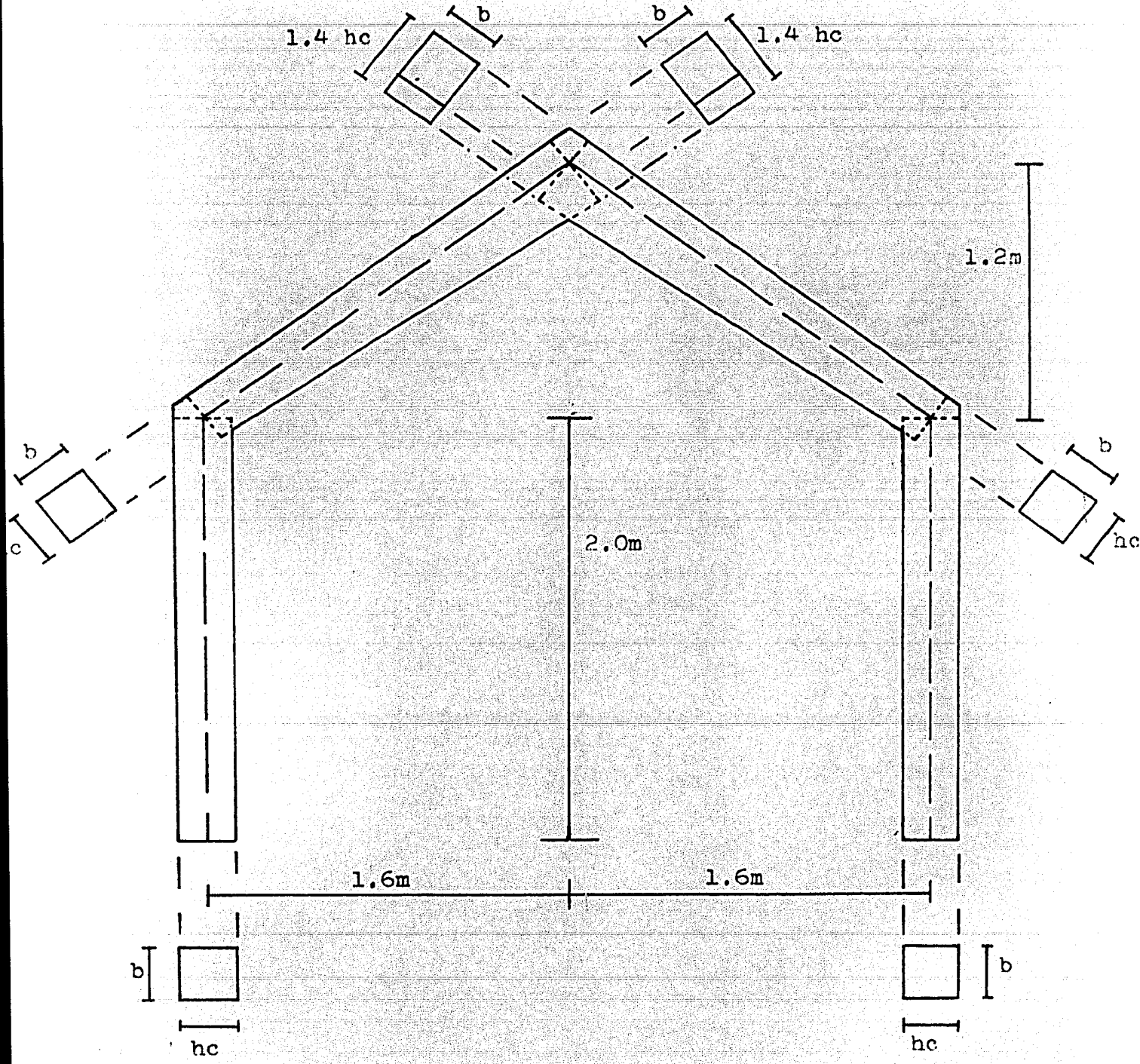


Grado de libertad lineal que corresponde con el desplazamiento del nudo en la dirección:

Nudo	(X)	(Y)
1	1	0
2	2	3
3	4	0

En la siguiente página se encuentra un croquis en el que se indican las dimensiones de las secciones transversales de las barras.

(106)



De la figura anterior se concluye que las barras 1 y 4 tienen sección constante y las barras 2 y 3 sección variable con un cartel triangular de 0.4 hc de peralte, b de ancho a lo largo de toda la longitud de las barras y con la parte más peraltada en el extremo B de las mismas.

De aquí que:

Para las barras 1 y 4

$$r_A=0 \quad r_B=0 \quad a_A=0 \quad a_B=0$$

Para estos valores de la tabla 52a se obtiene;

$$R_{AA}=4 \quad R_{BB}=4 \quad C_{AB}=0.5 \quad C_{BA}=0.5$$

$$\text{Con lo cual se calcula: } R_{AB}=2 \quad R_{BA}=2$$

Para las barras 2 y 3

$$r_A=0 \quad r_B=0.4 \quad a_A=0 \quad a_B=1$$

Para estos valores de la tabla 52 se obtiene;

$$R_{AA}=5.17 \quad R_{BB}=8.57 \quad C_{AB}=0.642 \quad C_{BA}=0.388$$

$$\text{Con lo cual se calcula: } R_{AB}=3.322 \quad R_{BA}=3.322$$

Los valores de R_{AB} y R_{BA} calculados son un poco distintos - por la falta de más cifras decimales en las tablas, pero sabemos por el teorema de Maxwell que ambos coeficientes deben ser iguales, por lo cual se toma el promedio de los dos valores obtenidos como el valor correcto para los mismos.

Para la barra 2, la única cargada de este marco se obtiene de la misma tabla:

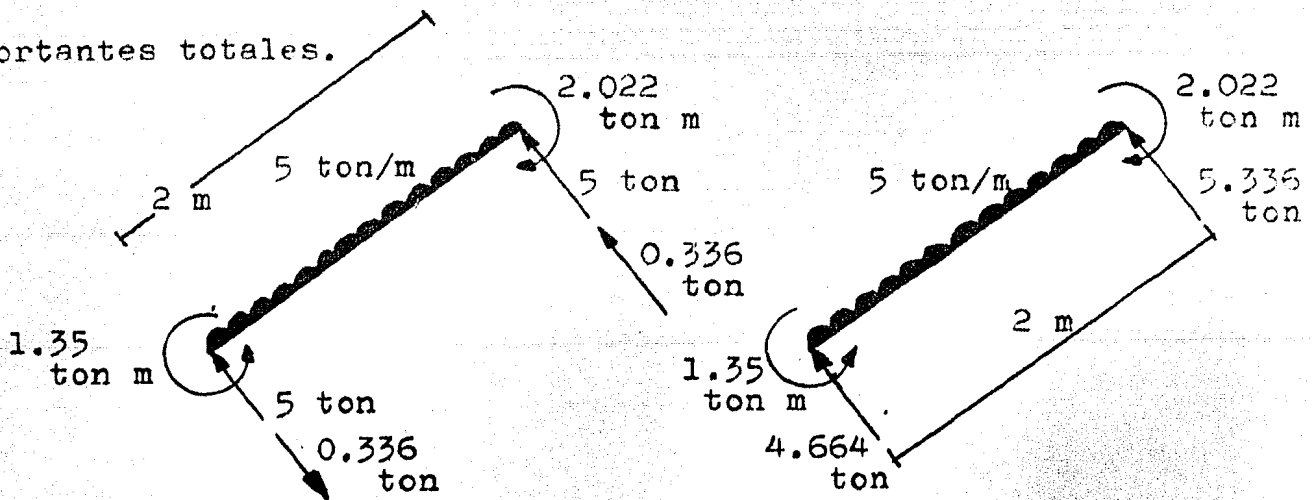
$$m_A = 0.0675 \quad m_B = 0.1011$$

Con estos valores se calculan los momentos de empotramiento;

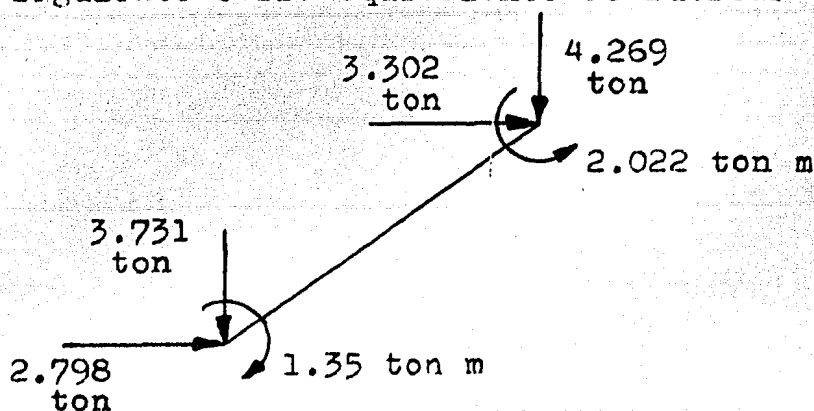
$$M_A = 1.35 \quad M_B = 2.022$$

Como suponemos que h_c y b tienen unidades compatibles con las demás cantidades, estos momentos obtenidos están en ton m.

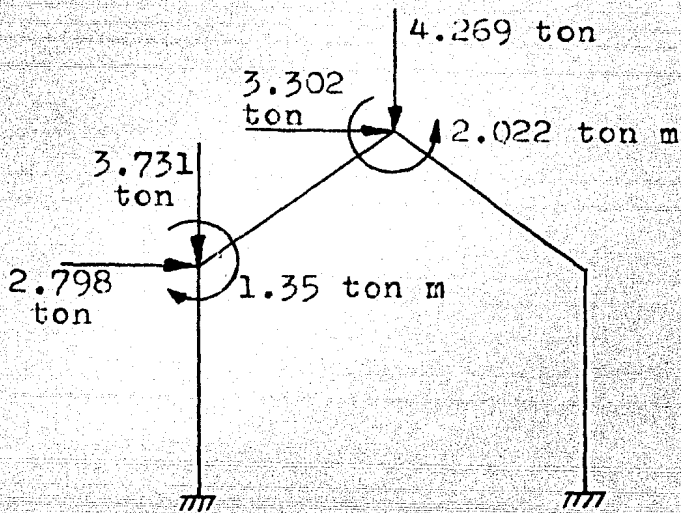
Por suma de momentos encontramos los valores de las fuerzas cortantes totales.



Si descomponemos estas fuerzas en fuerzas con trayectorias ortogonales e intercambiamos reacciones por acciones encontramos la siguiente barra equivalente de fuerzas externas aplicadas.



Si colocamos esta barra en nuestro marco tendremos:



Lo cual nos permite obtener las fuerzas que actúan en la -- dirección de cada uno de los 7 grados de libertad que tiene es te marco (3 angulares y 4 lineales) que son:

Momento externo en el nudo 1 = -1.35 ton m

Momento externo en el nudo 2 = 2.022 ton m

Momento externo en el nudo 3 = 0.0 ton m

Fuerza sobre el grado de libertad lineal 1 = 2.798 ton

Fuerza sobre el grado de libertad lineal 2 = 3.202 ton

Fuerza sobre el grado de libertad lineal 3 = -4.269 ton

Fuerza sobre el grado de libertad lineal 4 = 0.0 ton

Como para nuestro marco todas las barras tienen peralte mínimo constante e igual a h_c y ancho constante e igual a b el momento de inercia es constante e igual a i .

$$I = b(h_c)^3 / 12 = i$$

Siendo el módulo de elasticidad del material igual a e .

$E = e$

Daremos entonces como momento de inercia de todas las barras $I=1$ y módulo de elasticidad $E=1$.

Con los datos que tenemos corramos el programa y recordemos que habrá que multiplicar por (ei) las matrices de rigideces de las barras y rigideces de la estructura para obtener las respectivas matrices correctas. También habrá que dividir entre (ei) los vectores de desplazamientos y deformaciones angulares para obtener los respectivos vectores correctos.

No olvidemos que e es el valor de el módulo de elasticidad del material adoptado para construir el marco una vez que se hayan efectuado los calculos, siendo i el momento de inercia correspondiente a una sección rectangular con las dimensiones h y b elegidas despúes de efectuar los calculos con la computadora, obviamente todas estas cantidades en unidades compatibles con las empleadas anteriormente.

A continuación se muestran los resultados obtenidos por la computadora con el programa presentado en este trabajo.

(111)

GRADO DE LIBERTAD LINEAL QUE
CORRESPONDE CON EL DESPLAZAMIENTO
DEL NUDDO EN LA DIRECCION

NUDDO	COORDENADAS			
	X	Y	X	Y
1	X= +0.000	Y= +2.000	(1)	(0)
2	X= +1.600	Y= +3.200	(2)	(3)
3	X= +3.200	Y= +2.000	(4)	(0)
4	X= +0.000	Y= +0.000		
5	X= +3.200	Y= +0.000	APOYO	APOYO

BARRA	NUDDO ORIGEN	NUDDO DESTINO	MOMENTO INERCIA	
1	4	1	1.00000	
2	1	2	1.00000	
3	3	2	1.00000	
4	5	3	1.00000	

BARRA	LONGITUD	COEFICIENTES DE RIGIDEZ		
		RAA	RAB, RBA	RBB
1	2.000	+4.000	+2.000	+4.000
2	2.000	+5.170	+3.322	+8.570
3	2.000	+5.170	+3.322	+8.570
4	2.000	+4.000	+2.000	+4.000

MODULO DE ELASTICIDAD DEL MATERIAL (E)= 1.000

NUDDO	MOMENTO EXTERNO
1	-1.350
2	2.022
3	0.900

GRADO DE LIBERTAD LINEAL	FUERZA EXTERNA
1	2.798
2	3.202
3	-4.269
4	0.900

MATRIZ DE CONTINUIDAD

A(1 , 1)=	+0.00000	A(1 , 2)=	+0.00000
A(2 , 1)=	-1.00000	A(2 , 2)=	+0.00000
A(3 , 1)=	-1.00000	A(3 , 2)=	+0.00000
A(4 , 1)=	+0.00000	A(4 , 2)=	+1.00000
A(5 , 1)=	+0.00000	A(5 , 2)=	+0.00000
A(6 , 1)=	-0.00000	A(6 , 2)=	+1.00000
A(7 , 1)=	+0.00000	A(7 , 2)=	+0.00000
A(8 , 1)=	+0.00000	A(8 , 2)=	+0.00000
A(1 , 3)=	+1.00000	A(1 , 4)=	-0.50000
A(2 , 3)=	+1.00000	A(2 , 4)=	-0.50000
A(3 , 3)=	-1.00000	A(3 , 4)=	+0.30000
A(4 , 3)=	+0.00000	A(4 , 4)=	-0.30000
A(5 , 3)=	-1.00000	A(5 , 4)=	+0.00000
A(6 , 3)=	+0.00000	A(6 , 4)=	+0.00000
A(7 , 3)=	+0.00000	A(7 , 4)=	+0.00000
A(8 , 3)=	+1.00000	A(8 , 4)=	+0.00000
A(1 , 5)=	+0.00000	A(1 , 6)=	-0.00000
A(2 , 5)=	+0.00000	A(2 , 6)=	+0.00000
A(3 , 5)=	-0.30000	A(3 , 6)=	+0.40000
A(4 , 5)=	+0.30000	A(4 , 6)=	-0.40000
A(5 , 5)=	-0.30000	A(5 , 6)=	-0.40000
A(6 , 5)=	+0.30000	A(6 , 6)=	+0.40000
A(7 , 5)=	+0.00000	A(7 , 6)=	+0.00000
A(8 , 5)=	+0.00000	A(8 , 6)=	+0.00000
A(1 , 7)=	-1.00000		
A(2 , 7)=	+0.00000		
A(3 , 7)=	+0.00000		
A(4 , 7)=	+0.00000		
A(5 , 7)=	+0.30000		
A(6 , 7)=	-0.30000		
A(7 , 7)=	-0.50000		
A(8 , 7)=	+1.50000		

MATRIZ DE CONTINUIDAD TRANSPUESTA

AT(1 , 1)=	+0.00000	AT(1 , 2)=	+1.00000
AT(2 , 1)=	+0.00000	AT(2 , 2)=	+0.00000
AT(3 , 1)=	+0.00000	AT(3 , 2)=	+0.00000
AT(4 , 1)=	-0.50000	AT(4 , 2)=	+0.50000
AT(5 , 1)=	+0.00000	AT(5 , 2)=	+0.00000
AT(6 , 1)=	+0.00000	AT(6 , 2)=	+0.00000
AT(7 , 1)=	+0.00000	AT(7 , 2)=	+0.00000
AT(1 , 3)=	-1.00000	AT(1 , 4)=	+0.00000
AT(2 , 3)=	+0.00000	AT(2 , 4)=	+1.00000
AT(3 , 3)=	+0.00000	AT(3 , 4)=	+0.00000
AT(4 , 3)=	+0.20000	AT(4 , 4)=	-0.30000
AT(5 , 3)=	-0.30000	AT(5 , 4)=	-0.30000
AT(6 , 3)=	+0.40000	AT(6 , 4)=	-0.40000
AT(7 , 3)=	+0.00000	AT(7 , 4)=	+0.00000
AT(1 , 5)=	+0.00000	AT(1 , 6)=	+0.00000
AT(2 , 5)=	+0.00000	AT(2 , 6)=	+1.00000
AT(3 , 5)=	-1.00000	AT(3 , 6)=	+0.00000
AT(4 , 5)=	+0.00000	AT(4 , 6)=	+0.00000
AT(5 , 5)=	-0.30000	AT(5 , 6)=	+0.30000
AT(6 , 5)=	-0.40000	AT(6 , 6)=	+0.40000
AT(7 , 5)=	+0.30000	AT(7 , 6)=	-0.30000
AT(1 , 7)=	+0.00000	AT(1 , 8)=	+0.00000
AT(2 , 7)=	+0.00000	AT(2 , 8)=	+0.00000
AT(3 , 7)=	+0.00000	AT(3 , 8)=	+1.00000
AT(4 , 7)=	+0.00000	AT(4 , 8)=	+0.00000
AT(5 , 7)=	+0.00000	AT(5 , 8)=	+0.00000
AT(6 , 7)=	+0.00000	AT(6 , 8)=	+0.00000
AT(7 , 7)=	-0.50000	AT(7 , 8)=	+0.50000

MATRIZ DE RIGIDECES DE LAS BARRAS

k(1 , 1)=	+2.00000	k(1 , 2)=	-1.00000
k(2 , 1)=	-1.00000	k(2 , 2)=	+2.00000
k(3 , 1)=	+0.00000	k(3 , 2)=	+0.00000
k(4 , 1)=	+0.00000	k(4 , 2)=	+0.00000
k(5 , 1)=	+0.00000	k(5 , 2)=	+0.00000
k(6 , 1)=	+0.00000	k(6 , 2)=	+0.00000
k(7 , 1)=	+0.00000	k(7 , 2)=	+0.00000
k(8 , 1)=	+0.00000	k(8 , 2)=	+0.00000
k(1 , 3)=	+0.00000	k(1 , 4)=	+0.00000
k(2 , 3)=	+0.00000	k(2 , 4)=	+0.00000
k(3 , 3)=	+2.58500	k(3 , 4)=	-1.66100
k(4 , 3)=	-1.66100	k(4 , 4)=	+4.28500
k(5 , 3)=	+0.00000	k(5 , 4)=	+0.00000
k(6 , 3)=	+0.00000	k(6 , 4)=	+0.00000
k(7 , 3)=	+0.00000	k(7 , 4)=	+0.00000
k(8 , 3)=	+0.00000	k(8 , 4)=	+0.00000
k(1 , 5)=	+0.00000	k(1 , 6)=	+0.00000
k(2 , 5)=	+0.00000	k(2 , 6)=	+0.00000
k(3 , 5)=	+0.00000	k(3 , 6)=	+0.00000
k(4 , 5)=	+0.00000	k(4 , 6)=	+0.00000
k(5 , 5)=	+2.58500	k(5 , 6)=	-1.66100
k(6 , 5)=	-1.66100	k(6 , 6)=	+4.28500
k(7 , 5)=	+0.00000	k(7 , 6)=	+0.00000
k(8 , 5)=	+0.00000	k(8 , 6)=	+0.00000
k(1 , 7)=	+0.00000	k(1 , 8)=	+0.00000
k(2 , 7)=	+0.00000	k(2 , 8)=	+0.00000
k(3 , 7)=	+0.00000	k(3 , 8)=	+0.00000
k(4 , 7)=	+0.00000	k(4 , 8)=	+0.00000
k(5 , 7)=	+0.00000	k(5 , 8)=	+0.00000
k(6 , 7)=	+0.00000	k(6 , 8)=	+0.00000
k(7 , 7)=	+2.00000	k(7 , 8)=	-1.00000
k(8 , 7)=	-1.00000	k(8 , 8)=	+2.00000

MATRIZ DE RIGIDEZES DE LA ESTRUCTURA

KC 1 , 1)=	+4.58500	KC 1 , 2)=	+1.68100
KC 2 , 1)=	+1.68100	KC 2 , 2)=	+8.57000
KC 3 , 1)=	+0.00000	KC 3 , 2)=	+1.68100
KC 4 , 1)=	+0.22620	KC 4 , 2)=	-1.78380
KC 5 , 1)=	+1.27380	KC 5 , 2)=	+3.56760
KC 6 , 1)=	-1.69840	KC 6 , 2)=	+0.00000
KC 7 , 1)=	+0.00000	KC 7 , 2)=	-1.78380
KC 1 , 3)=	+0.00000	KC 1 , 4)=	+0.22620
KC 2 , 3)=	+1.68100	KC 2 , 4)=	-1.78380
KC 3 , 3)=	+4.58500	KC 3 , 4)=	+0.00000
KC 4 , 3)=	+0.00000	KC 4 , 4)=	+2.41728
KC 5 , 3)=	+1.27380	KC 5 , 4)=	-0.91728
KC 6 , 3)=	+1.69840	KC 6 , 4)=	+1.22304
KC 7 , 3)=	+0.22620	KC 7 , 4)=	+0.00000
KC 1 , 5)=	+1.27380	KC 1 , 6)=	-1.69840
KC 2 , 5)=	+3.56760	KC 2 , 6)=	-0.00000
KC 3 , 5)=	+1.27380	KC 3 , 6)=	+1.69840
KC 4 , 5)=	-0.91728	KC 4 , 6)=	+1.22304
KC 5 , 5)=	+1.83456	KC 5 , 6)=	-0.00000
KC 6 , 5)=	+0.00000	KC 6 , 6)=	+3.28144
KC 7 , 5)=	-0.91728	KC 7 , 6)=	-1.22304
KC 1 , 7)=	+0.00000		
KC 2 , 7)=	-1.78380		
KC 3 , 7)=	+0.22620		
KC 4 , 7)=	+0.00000		
KC 5 , 7)=	-0.91728		
KC 6 , 7)=	-1.22304		
KC 7 , 7)=	+2.41728		

EL SISTEMA DE ECUACIONES ES COMPATIBLE DETERMINADO

MATRIZ SOLUCION

KS(1 , 1)=	+1.000	KS(1 , 2)=	+0.000
KS(2 , 1)=	+0.000	KS(2 , 2)=	+1.000
KS(3 , 1)=	+0.000	KS(3 , 2)=	+0.000
KS(4 , 1)=	+0.000	KS(4 , 2)=	+0.000
KS(5 , 1)=	+0.000	KS(5 , 2)=	+0.000
KS(6 , 1)=	+0.000	KS(6 , 2)=	+0.000
KS(7 , 1)=	+0.000	KS(7 , 2)=	+0.000
KS(1 , 3)=	+0.000	KS(1 , 4)=	+0.000
KS(2 , 3)=	+0.000	KS(2 , 4)=	+0.000
KS(3 , 3)=	+1.000	KS(3 , 4)=	+0.000
KS(4 , 3)=	+0.000	KS(4 , 4)=	+1.000
KS(5 , 3)=	+0.000	KS(5 , 4)=	+0.000
KS(6 , 3)=	+0.000	KS(6 , 4)=	+0.000
KS(7 , 3)=	+0.000	KS(7 , 4)=	+0.000
KS(1 , 5)=	+0.000	KS(1 , 6)=	+0.000
KS(2 , 5)=	+0.000	KS(2 , 6)=	+0.000
KS(3 , 5)=	+0.000	KS(3 , 6)=	+0.000
KS(4 , 5)=	+0.000	KS(4 , 6)=	+0.000
KS(5 , 5)=	+1.000	KS(5 , 6)=	+0.000
KS(6 , 5)=	+0.000	KS(6 , 6)=	+1.000
KS(7 , 5)=	+0.000	KS(7 , 6)=	+0.000
KS(1 , 7)=	+0.000		
KS(2 , 7)=	+0.000		
KS(3 , 7)=	+0.000		
KS(4 , 7)=	+0.000		
KS(5 , 7)=	+0.000		
KS(6 , 7)=	+0.000		
KS(7 , 7)=	+1.000		

DESPLAZAMIENTOS

PHI (1)=	-20.483
PHI (2)=	-18.577
PHI (3)=	-11.520
d (1)=	+24.483
d (2)=	+78.094
d (3)=	-10.937
d (4)=	+11.520

DEFORMACIONES

THETA A (1)=	-12.241
THETA B (1)=	-8.241
THETA A (2)=	+0.984
THETA B (2)=	+1.841
THETA A (3)=	-4.117
THETA B (3)=	-2.940
THETA A (4)=	-5.760
THETA B (4)=	-5.760

FUERZAS INTERNAS

mA (1)=	-16.241
mB (1)=	-4.241
mA (2)=	-2.891
mB (2)=	+7.781
mA (3)=	-5.760
mB (3)=	-5.759
mA (4)=	-5.760
mB (4)=	-5.760

COMPROBACION EQUILIBRIO

FUERZAS EXTERNAS

M (1)=	-1.350
M (2)=	+2.022
M (3)=	+0.000
F (1)=	+2.798
F (2)=	+3.202
F (3)=	-4.269
F (4)=	-0.000

Propongamos ahora un concreto de $f'c=250 \text{ kg/cm}^2$ para construir este marco.

Entonces tendremos un módulo de elasticidad propuesto

$$e = 10,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}^{1/2} / 250 \text{ kg/cm}^2 = 158,114 \text{ kg/cm}^2$$

$$e = 1,581,140 \text{ ton/m}^2$$

Si proponemos una sección con dimensiones $hc=0.5 \text{ m}$ y $b=0.3 \text{ m}$ tendremos un momento de inercia propuesto

$$i = 0.3 \text{ m} (0.5 \text{ m})^3 / 12 = 0.00313 \text{ m}^4$$

Por tanto

$$ei = (1,581,140 \text{ ton/m}^2)(0.00313 \text{ m}^4) = 4941.06 \text{ ton m}^2$$

Si multiplicamos por ei las matrices de rigideces de las barras y rigideces de la estructura, y dividimos entre ei los vectores de desplazamientos y deformaciones angulares que se obtuvieron del cálculo anterior encontraremos las matrices y vectores correctos correspondientes a los valores del módulo de elasticidad propuesto y del momento de inercia adoptado.

Estas matrices y vectores son los que aparecen a continuación, notese que la matriz de continuidad y su transpuesta así como el vector de fuerzas internas no dependen de los valores propuestos y por tanto no tienen que corregirse.

MATRIZ DE RIGIDEZES DE LAS BARRAS

k(1 , 1)=	+9,897.94000	k(1 , 2)=	-4,948.97000
k(2 , 1)=	-4,948.97000	k(2 , 2)=	+9,897.94000
k(3 , 1)=	+0.00000	k(3 , 2)=	+0.00000
k(4 , 1)=	+0.00000	k(4 , 2)=	+0.00000
k(5 , 1)=	+0.00000	k(5 , 2)=	+0.00000
k(6 , 1)=	+0.00000	k(6 , 2)=	+0.00000
k(7 , 1)=	+0.00000	k(7 , 2)=	+0.00000
k(8 , 1)=	+0.00000	k(8 , 2)=	+0.00000
k(1 , 3)=	+0.00000	k(1 , 4)=	+0.00000
k(2 , 3)=	+0.00000	k(2 , 4)=	+0.00000
k(3 , 3)=	+12,793.10000	k(3 , 4)=	-8,220.24000
k(4 , 3)=	-8,220.24000	k(4 , 4)=	+21,206.30000
k(5 , 3)=	+0.00000	k(5 , 4)=	+0.00000
k(6 , 3)=	+0.00000	k(6 , 4)=	+0.00000
k(7 , 3)=	+0.00000	k(7 , 4)=	+0.00000
k(8 , 3)=	+0.00000	k(8 , 4)=	+0.00000
k(1 , 5)=	+0.00000	k(1 , 6)=	+0.00000
k(2 , 5)=	+0.00000	k(2 , 6)=	+0.00000
k(3 , 5)=	+0.00000	k(3 , 6)=	+0.00000
k(4 , 5)=	+0.00000	k(4 , 6)=	+0.00000
k(5 , 5)=	+12,793.10000	k(5 , 6)=	-8,220.24000
k(6 , 5)=	-8,220.24000	k(6 , 6)=	+21,206.30000
k(7 , 5)=	+0.00000	k(7 , 6)=	+0.00000
k(8 , 5)=	+0.00000	k(8 , 6)=	+0.00000
k(1 , 7)=	+0.00000	k(1 , 8)=	+0.00000
k(2 , 7)=	+0.00000	k(2 , 8)=	+0.00000
k(3 , 7)=	+0.00000	k(3 , 8)=	+0.00000
k(4 , 7)=	+0.00000	k(4 , 8)=	+0.00000
k(5 , 7)=	+0.00000	k(5 , 8)=	+0.00000
k(6 , 7)=	+0.00000	k(6 , 8)=	+0.00000
k(7 , 7)=	+9,897.94000	k(7 , 8)=	-4,948.97000
k(8 , 7)=	-4,948.97000	k(8 , 8)=	+9,897.94000

(120)

MATRIZ DE RIGIDEZES DE LA ESTRUCTURA

K(1 , 1)=	+22,691.00000	K(1 , 2)=	+8,220.24000
K(2 , 1)=	+8,220.24000	K(2 , 2)=	+42,412.70000
K(3 , 1)=	+0.00000	K(3 , 2)=	+8,220.24000
K(4 , 1)=	+1,119.46000	K(4 , 2)=	-8,827.97000
K(5 , 1)=	+6,303.99000	K(5 , 2)=	+17,655.90000
K(6 , 1)=	-8,405.33000	K(6 , 2)=	+0.00000
K(7 , 1)=	+0.00000	K(7 , 2)=	-8,827.97000
K(1 , 3)=	+0.00000	K(1 , 4)=	+1,119.46000
K(2 , 3)=	+8,220.24000	K(2 , 4)=	-8,827.97000
K(3 , 3)=	+22,691.00000	K(3 , 4)=	+0.00000
K(4 , 3)=	+0.00000	K(4 , 4)=	+11,963.00000
K(5 , 3)=	+6,303.99000	K(5 , 4)=	-4,539.59000
K(6 , 3)=	+8,405.33000	K(6 , 4)=	+6,052.79000
K(7 , 3)=	+1,119.46000	K(7 , 4)=	+0.00000
K(1 , 5)=	+6,303.99000	K(1 , 6)=	-8,405.33000
K(2 , 5)=	+17,655.90000	K(2 , 6)=	+0.00000
K(3 , 5)=	+6,303.99000	K(3 , 6)=	+8,405.33000
K(4 , 5)=	-4,539.59000	K(4 , 6)=	+6,052.78000
K(5 , 5)=	+9,079.18000	K(5 , 6)=	-0.00024
K(6 , 5)=	-0.00024	K(6 , 6)=	+16,140.80000
K(7 , 5)=	-4,539.59000	K(7 , 6)=	-6,052.79000
K(1 , 7)=	+0.00000		
K(2 , 7)=	-8,827.97000		
K(3 , 7)=	+1,119.46000		
K(4 , 7)=	+0.00000		
K(5 , 7)=	-4,539.59000		
K(6 , 7)=	-6,052.79000		
K(7 , 7)=	+11,963.00000		

DESPLAZAMIENTOS

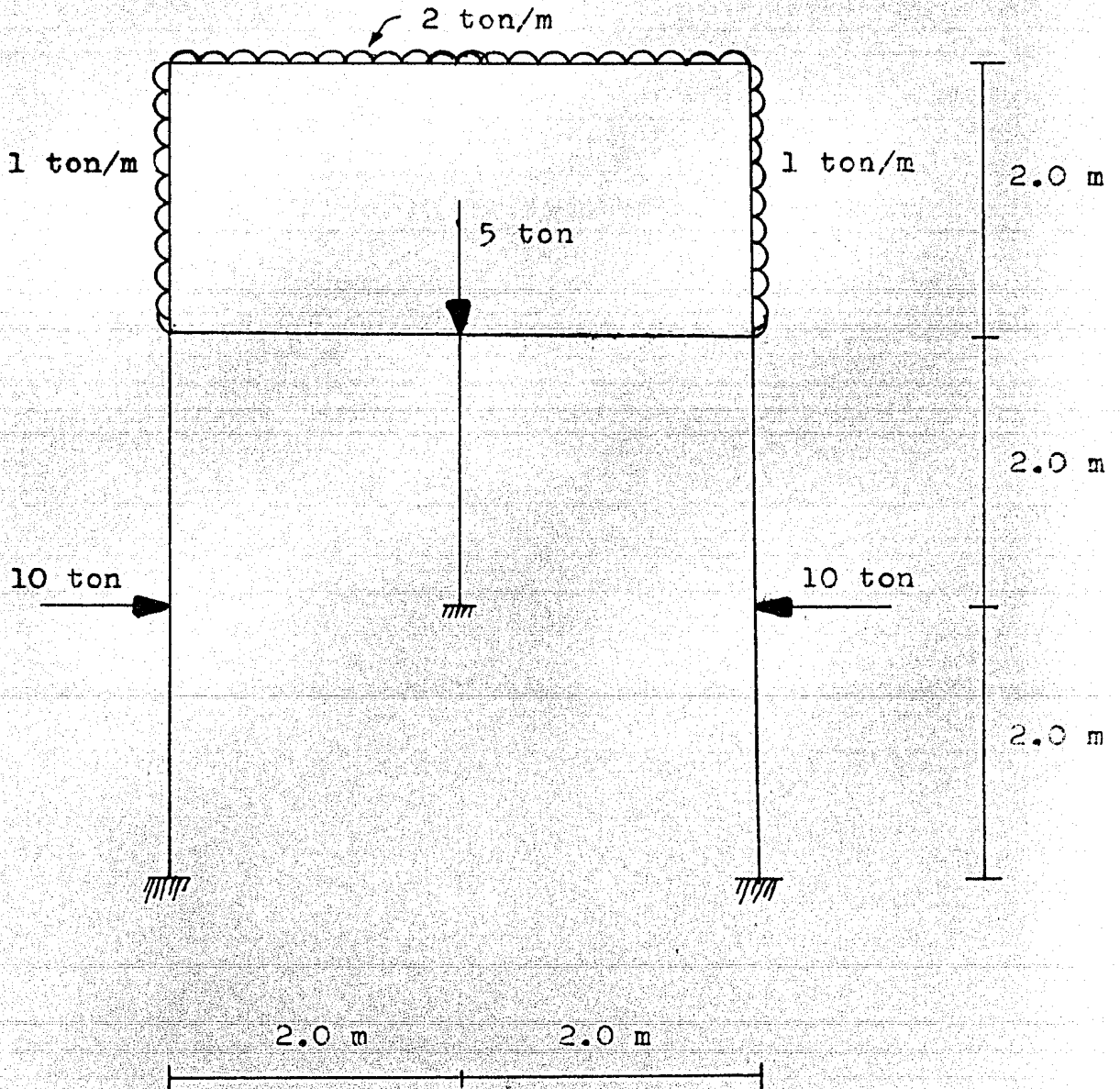
PHI (1) =	-0.003
PHI (2) =	-0.003
PHI (3) =	-0.002
d (1) =	+0.005
d (2) =	+0.015
d (3) =	-0.002
d (4) =	-0.002

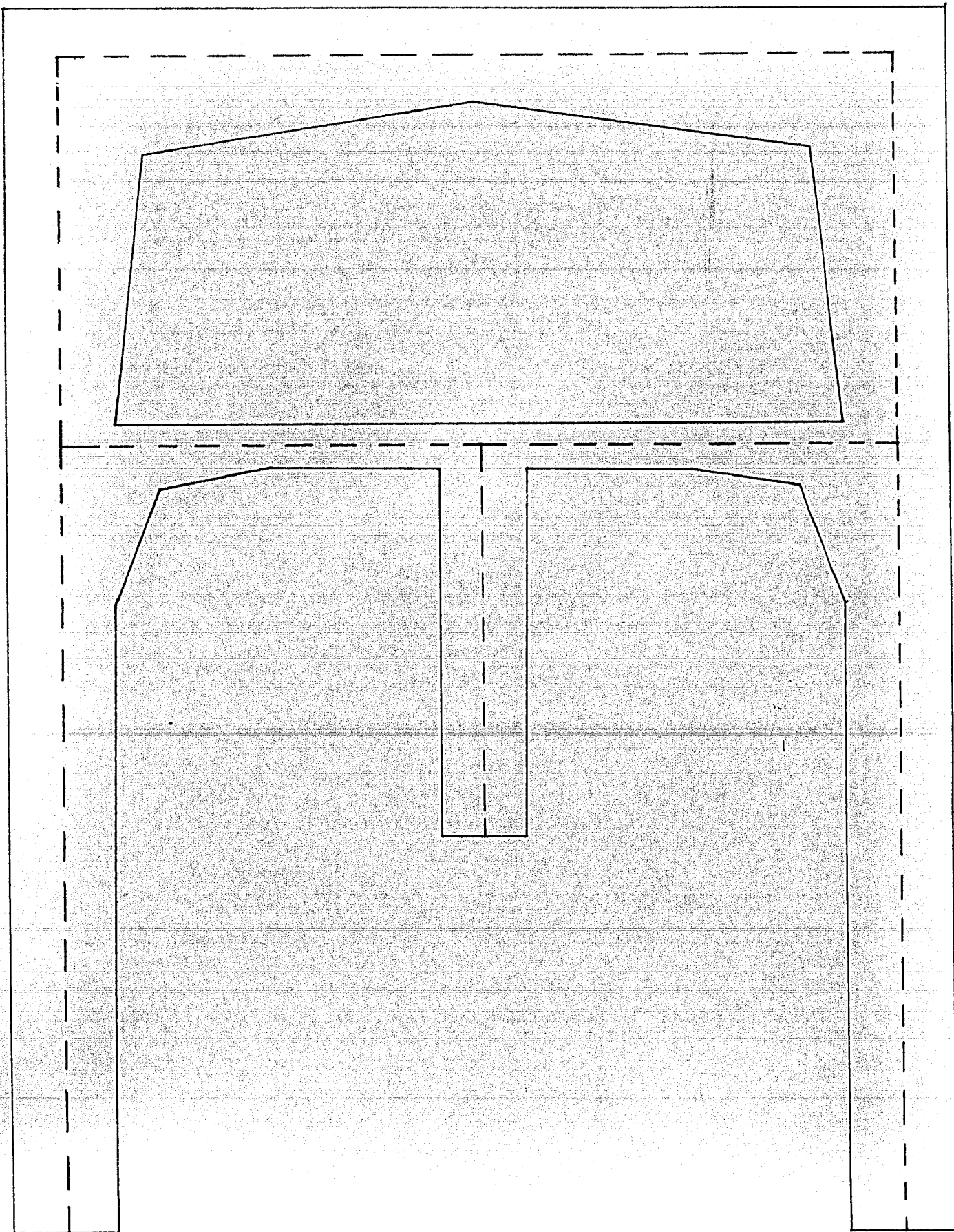
DEFORMACIONES

THETA A (1) =	-0.003
THETA B (1) =	-0.002
THETA A (2) =	-0.000
THETA B (2) =	-0.000
THETA A (3) =	-0.001
THETA B (3) =	-0.001
THETA A (4) =	-0.001
THETA B (4) =	-0.001

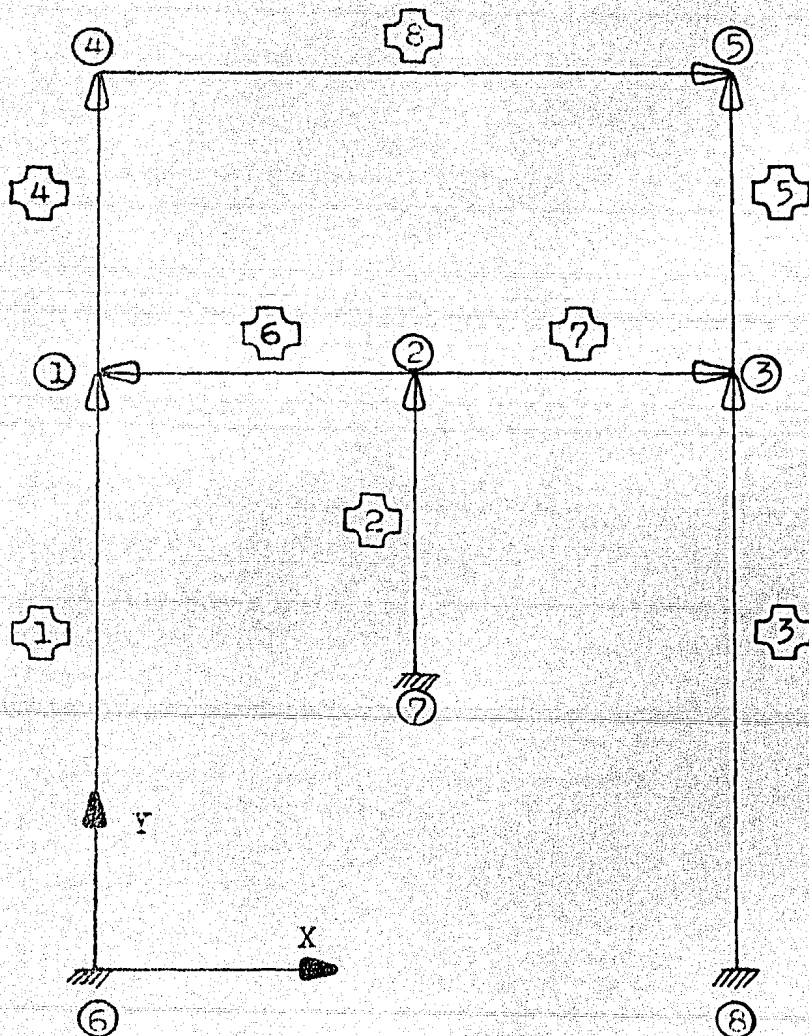
(122)

3.- Analizemos el marco que a continuación se presenta bajo el efecto de las cargas mostradas.



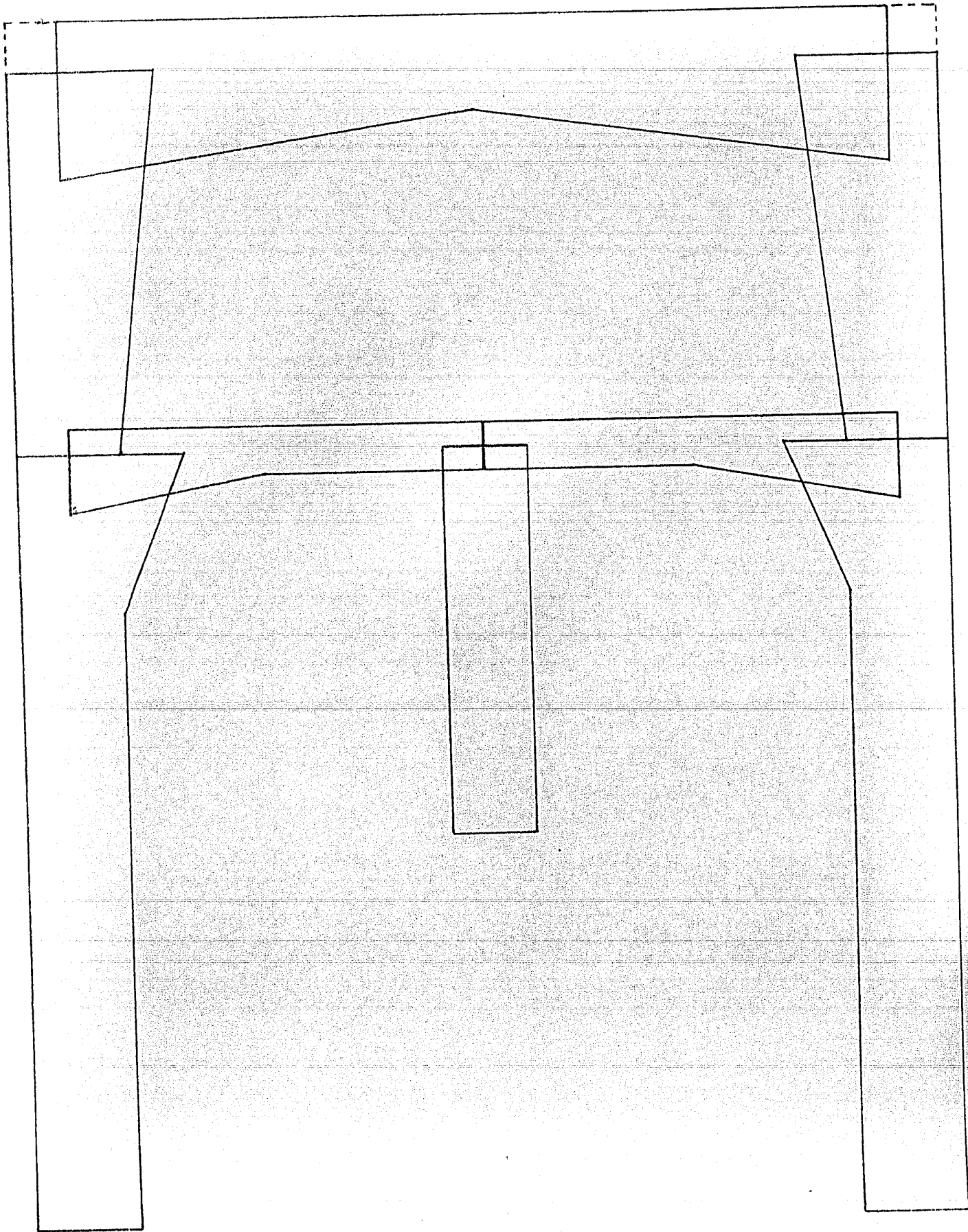


Numerando nudos no apoyos y apoyos, direccionando y numerando de las barras se tiene:



De las figuras anteriores podemos obtener:

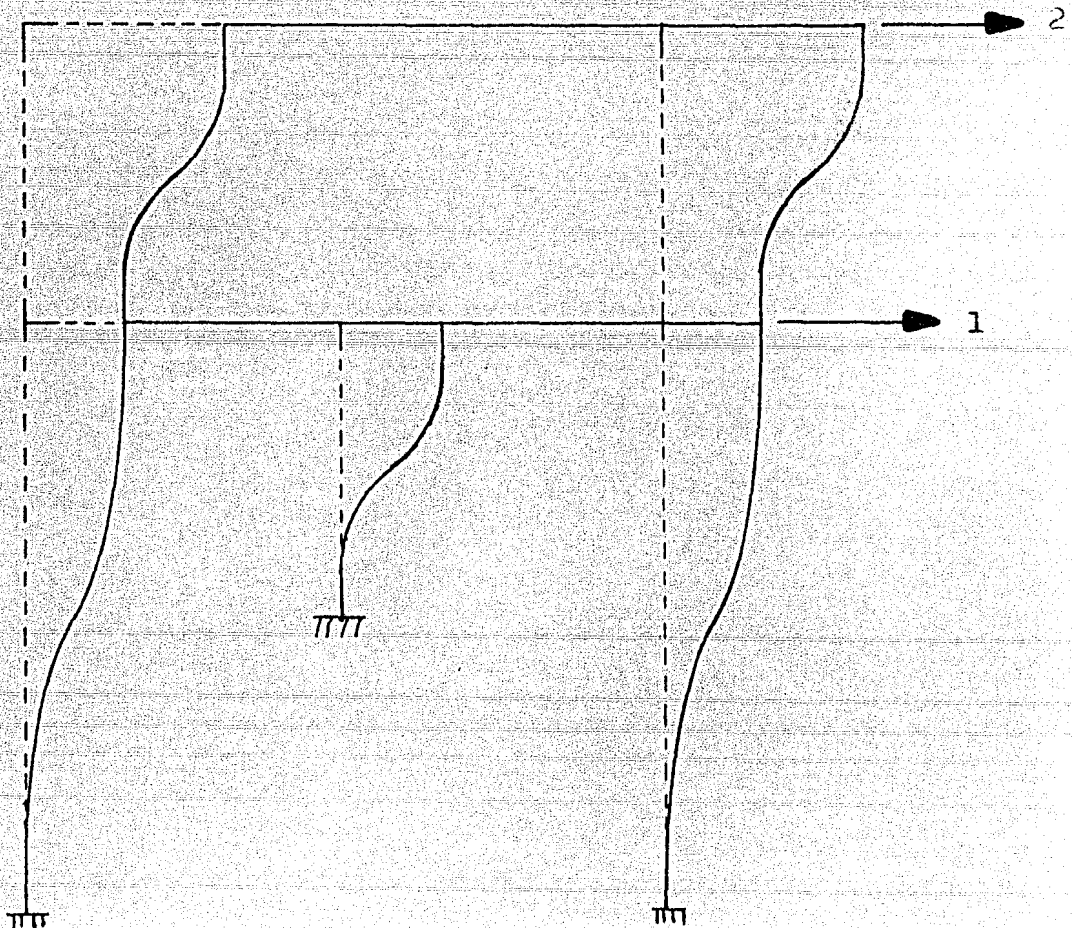
Nudo	Coordenadas		Nudo	Coordenadas	
	(X)	(Y)		(X)	(Y)
1	0.0 m	4.0 m	5	4.0 m	6.0 m
2	2.0 m	4.0 m	6	0.0 m	0.0 m
3	4.0 m	4.0 m	7	2.0 m	2.0 m
4	0.0 m	6.0 m	8	4.0 m	0.0 m



(126)

Barra	Nudo Origen	Nudo Destino	Barra	Nudo Origen	Nudo Destino
1	6	1	5	3	5
2	7	2	6	2	1
3	8	3	7	2	3
4	1	4	8	4	5

La estructura tiene los siguientes dos grados de libertad lineal:

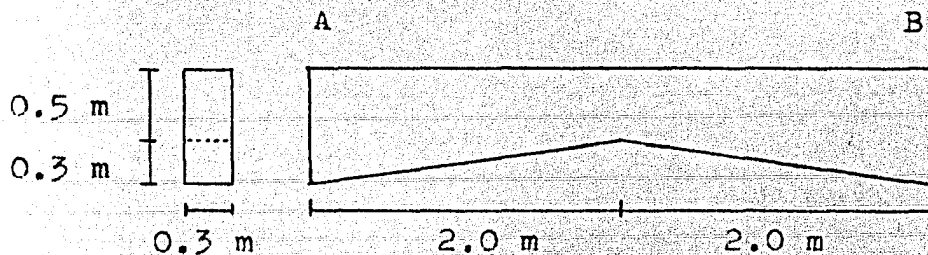


De la figura anterior se puede establecer:

Nudo	Grado de libertad lineal que corresponde con el desplazamiento del nudo en la dirección:	
	(X)	(Y)
1	1	0
2	1	0
3	1	0
4	2	0
5	2	0

Obtengamos ahora los momentos de empotramiento, los cortantes, el momento de inercia y los coeficientes de rigidez para cada una de las distintas barras que componen el marco. Para lo cual habrá que considerar las dimensiones de las barras, que en su mayoría son de sección variable. Las figuras que ilustran la forma y dimensiones de las barras se presentarán junto con sus valores respectivos de las cantidades mencionadas.

--- Para la barra 8



$$W_A = W_B = 0.3 \text{ m} = r_A hc = r_B hc \quad r_A = r_B = 0.3 \text{ m} / hc = 0.3 \text{ m} / 0.5 \text{ m} = 0.6$$

$$a_A L = a_B L = 2 \text{ m} \quad a_A = a_B = 2 \text{ m} / L = 2 \text{ m} / 4 \text{ m} = 0.5$$

De la tabla 36 que es la correspondiente a estos valores

(128)

$$R_{AA}=10.72 \quad R_{BB}=10.72 \quad C_{AB}=0.633 \quad C_{BA}=0.633$$

De aquí calculamos

$$R_{AB}=C_{BA}R_{BB}=0.633(10.72)=6.786$$

$$R_{BA}=C_{AB}R_{AA}=0.633(10.72)=6.786$$

De la misma tabla para carga uniformemente distribuida

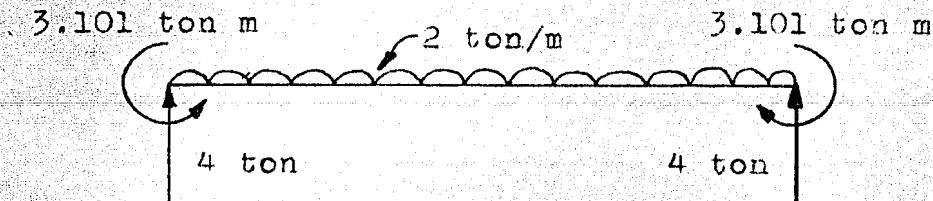
$$m_A=0.0969 \quad m_B=0.0969$$

De aquí calculamos

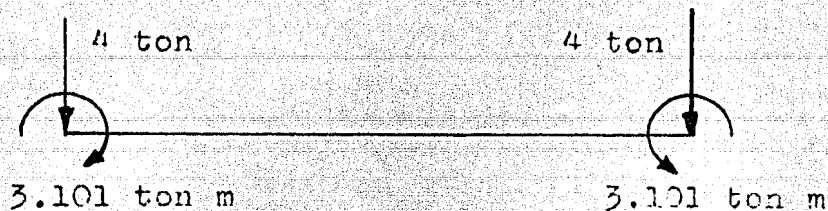
$$M_A=m_A w l^2=0.0969(2 \text{ ton/m})(4 \text{ m})^2=3.101 \text{ ton m}$$

$$M_B=m_B w l^2=0.0969(2 \text{ ton/m})(4 \text{ m})^2=3.101 \text{ ton m}$$

Por suma de momentos podemos encontrar las demás reacciones



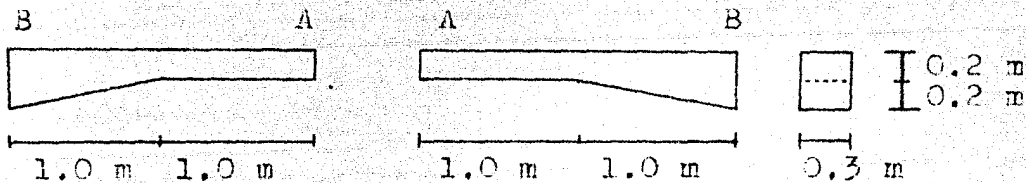
Si sustituimos reacciones por acciones obtenemos la barra equivalente en cuanto a las fuerzas externas aplicadas



El momento de inercia de esta barra es

$$I=bh^3/12=(0.3 \text{ m})(0.5 \text{ m})^3/12=0.00613 \text{ m}^4$$

--- Para las barras 6 y 7



$$W_B = 0.2 \text{ m} = r_B hc \quad r_B = 0.2 \text{ m} / hc = 0.2 \text{ m} / 0.2 \text{ m} = 1.0$$

$$W_A = 0.0 \text{ m} = r_A hc \quad r_A = 0.0 \text{ m} / hc = 0.0 \text{ m} / 0.2 \text{ m} = 0.0$$

$$a_B L = 1 \text{ m} \quad a_B = 1 \text{ m} / L = 1 \text{ m} / 2 \text{ m} = 0.5$$

$$a_A L = 0 \text{ m} \quad a_A = 0 \text{ m} / L = 0 \text{ m} / 2 \text{ m} = 0.0$$

De la tabla 52 que es la correspondiente a estos valores

$$R_{AA} = 4.99 \quad R_{BB} = 12.28 \quad C_{AB} = 0.948 \quad C_{BA} = 0.385$$

De aquí calculamos

$$R_{AB} = C_{BA} R_{BB} = 0.385 (12.28) = 4.729$$

$$R_{BA} = C_{AB} R_{AA} = 0.948 (4.99) = 4.729$$

El momento de inercia es

$$I = bh^3 / 12 = (0.3 \text{ m})(0.2 \text{ m})^3 / 12 = 0.0002 \text{ m}^4$$

--- Para las barras 4 y 5

$$W_B = 0.2 \text{ m} = r_B hc$$

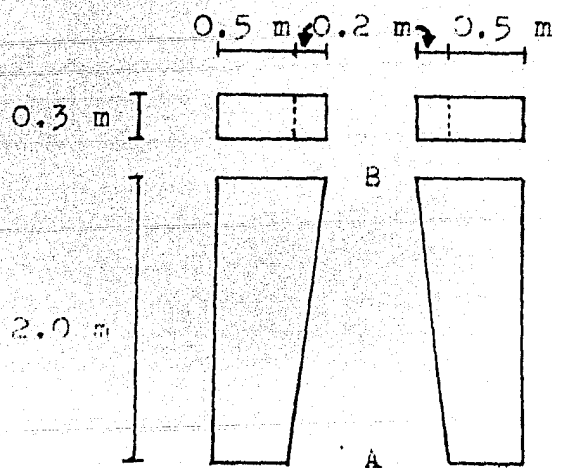
$$r_B = 0.2 \text{ m} / hc = 0.2 \text{ m} / 0.5 \text{ m} = 0.4$$

$$W_A = 0.0 \text{ m} = r_A hc$$

$$r_A = 0.0 \text{ m} / hc = 0.0 \text{ m} / 0.5 \text{ m} = 0.0$$

$$a_B L = 2 \text{ m}$$

$$a_A L = 0 \text{ m}$$



$$a_B = 2 \text{ m} / L = 2 \text{ m} / 2 \text{ m} = 1.0$$

$$a_A = 0 \text{ m} / L = 0 \text{ m} / 2 \text{ m} = 0.0$$

De la tabla 52 que es la correspondiente a estos valores

$$R_{AA} = 5.17 \quad R_{BB} = 8.57 \quad C_{AB} = 0.642 \quad C_{BA} = 0.388$$

De aquí calculamos

$$R_{AB} = C_{BA} R_{BB} = 0.388(8.57) = 3.322$$

$$R_{BA} = C_{AB} R_{AA} = 0.642(5.17) = 3.322$$

De la misma tabla para carga uniformemente distribuida

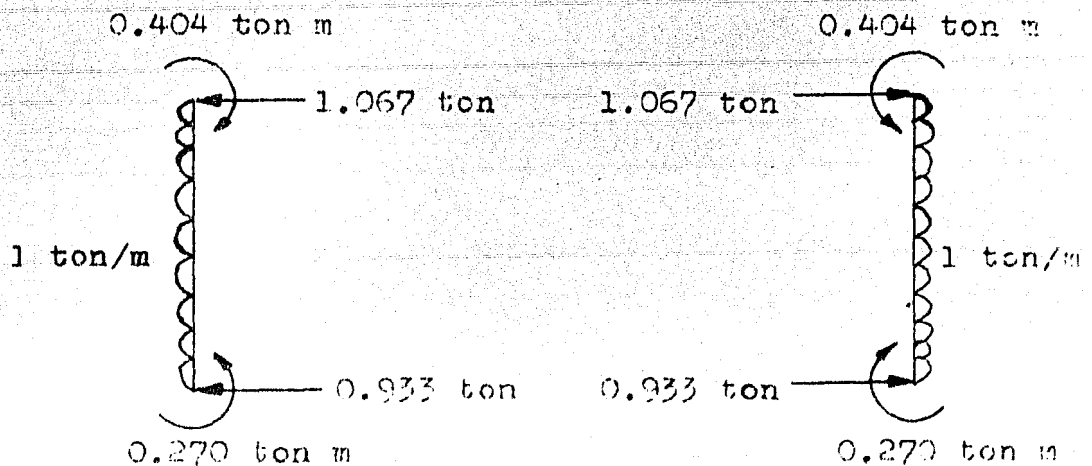
$$m_A = 0.0675 \quad m_B = 0.1011$$

De aquí calculamos

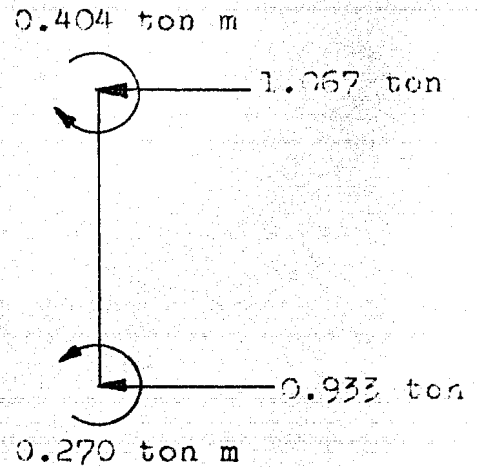
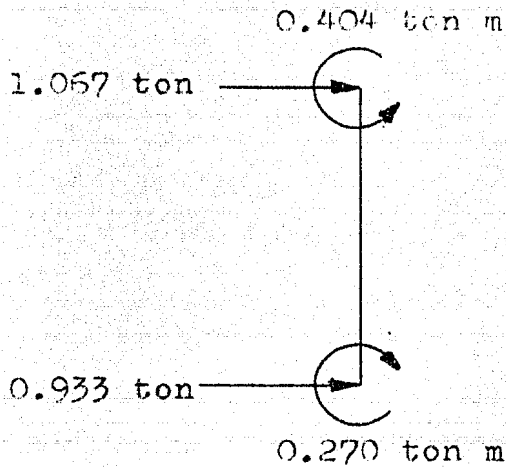
$$M_A = m_A w l^2 = 0.0675(1 \text{ ton/m})(2 \text{ m})^2 = 0.270 \text{ ton m}$$

$$M_B = m_B w l^2 = 0.1011(1 \text{ ton/m})(2 \text{ m})^2 = 0.404 \text{ ton m}$$

Por suma de momentos podemos encontrar las demás reacciones



Si sustituimos reacciones por acciones obtenemos la barra equivalente en cuanto a las fuerzas externas aplicadas



El momento de inercia es

$$I = bh^3/12 = (0.3 \text{ m})(0.5 \text{ m})^3/12 = 0.00313 \text{ m}^4$$

---Para las barras 1 y 3

$$W_A = 0.0 \text{ m} = r_A hc$$

$$r_A = 0.0 \text{ m} / hc = 0.0 \text{ m} / 0.5 \text{ m} = 0.0$$

$$W_B = 0.3 \text{ m} = r_B hc$$

$$r_B = 0.3 \text{ m} / hc = 0.3 \text{ m} / 0.5 \text{ m} = 0.6$$

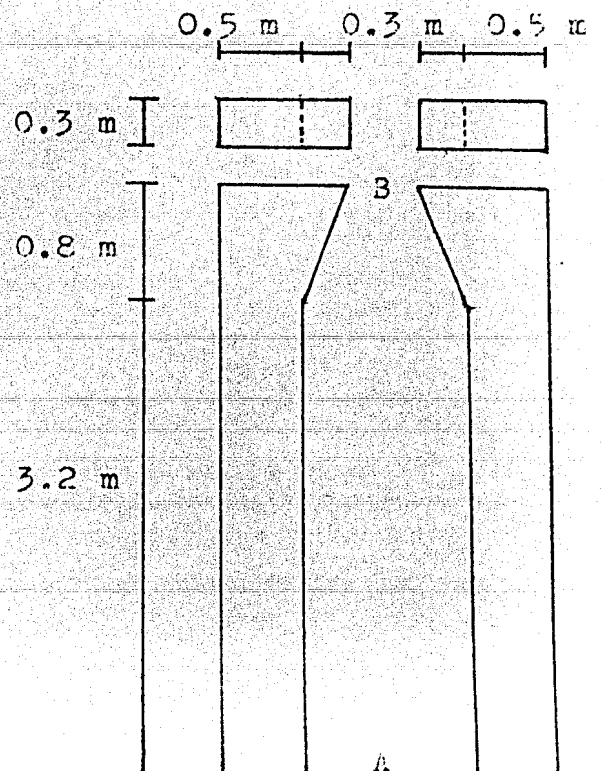
$$a_A L = 0 \text{ m}$$

$$a_A = 0 \text{ m} / L = 0 \text{ m} / 4 \text{ m} = 0.0$$

$$a_B L = 0.8 \text{ m}$$

$$a_B = 0.8 \text{ m} / L = 0.8 \text{ m} / 4 \text{ m} = 0.2$$

De la tabla 52 que es la que corresponde a estos valores



(132)

$$R_{AA}=4.35 \quad R_{BB}=5.81 \quad C_{AB}=0.642 \quad C_{BA}=0.481$$

De aquí calculamos

$$R_{AB}=C_{BA}R_{BB}=0.481(5.81)=2.794$$

$$R_{BA}=C_{AB}R_{AA}=0.642(4.35)=2.794$$

De la misma tabla para una carga concentrada

$$bL=2 \text{ m} \quad b=2 \text{ m}/L=2 \text{ m}/4 \text{ m}=0.5$$

Para este valor

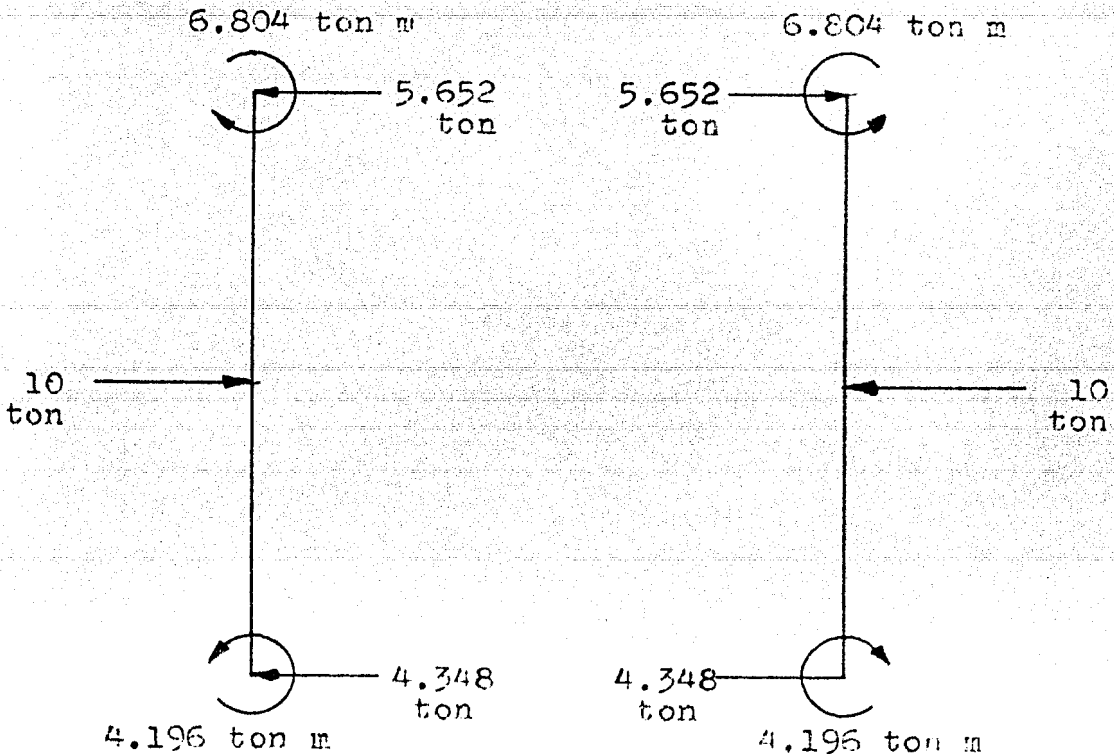
$$m_A=0.1049 \quad m_B=0.1701$$

De aquí calculamos

$$M_A=m_A PL=0.1049(10 \text{ ton})(4 \text{ m})=4.196 \text{ ton m}$$

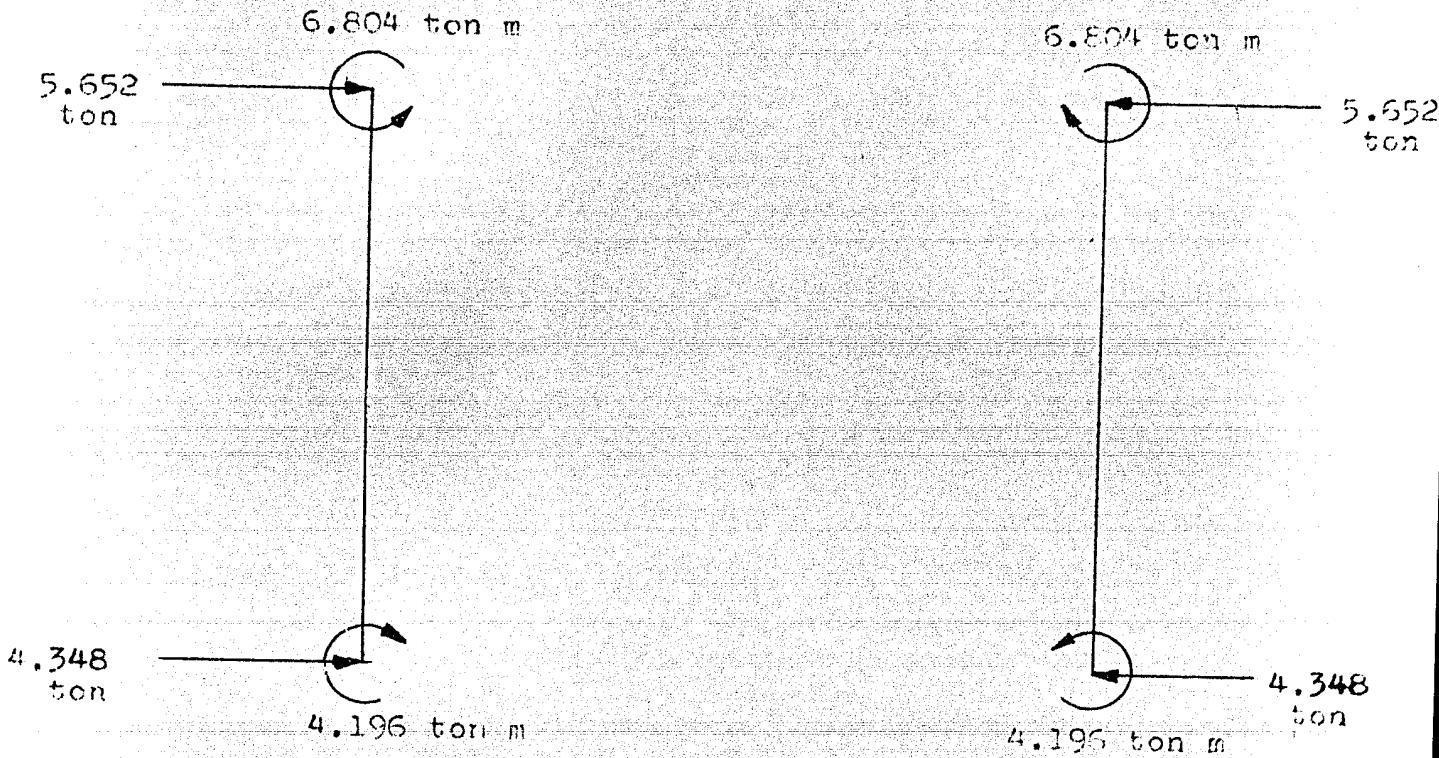
$$M_B=m_B PL=0.1701(10 \text{ ton})(4 \text{ m})=6.804 \text{ ton m}$$

Por suma de momentos podemos encontrar las demás reacciones



(133)

Si sustituimos reacciones por acciones obtenemos la barra equivalente en cuanto a las fuerzas externas aplicadas



El momento de inercia es

$$I = bh^3/12 = (0.3 \text{ m})(0.5 \text{ m})^3/12 = 0.00313 \text{ m}^4$$

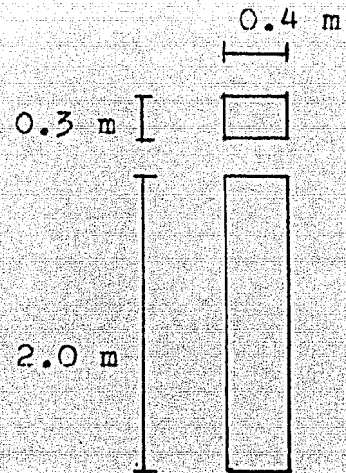
---Para la barra 2

Por tener sección constante sabemos:

$$R_{AA} = 4 \quad R_{BB} = 4 \quad C_{AB} = 0.5 \quad C_{BA} = 0.5$$

Por tanto

$$R_{AB} = 2 \quad R_{BA} = 2$$

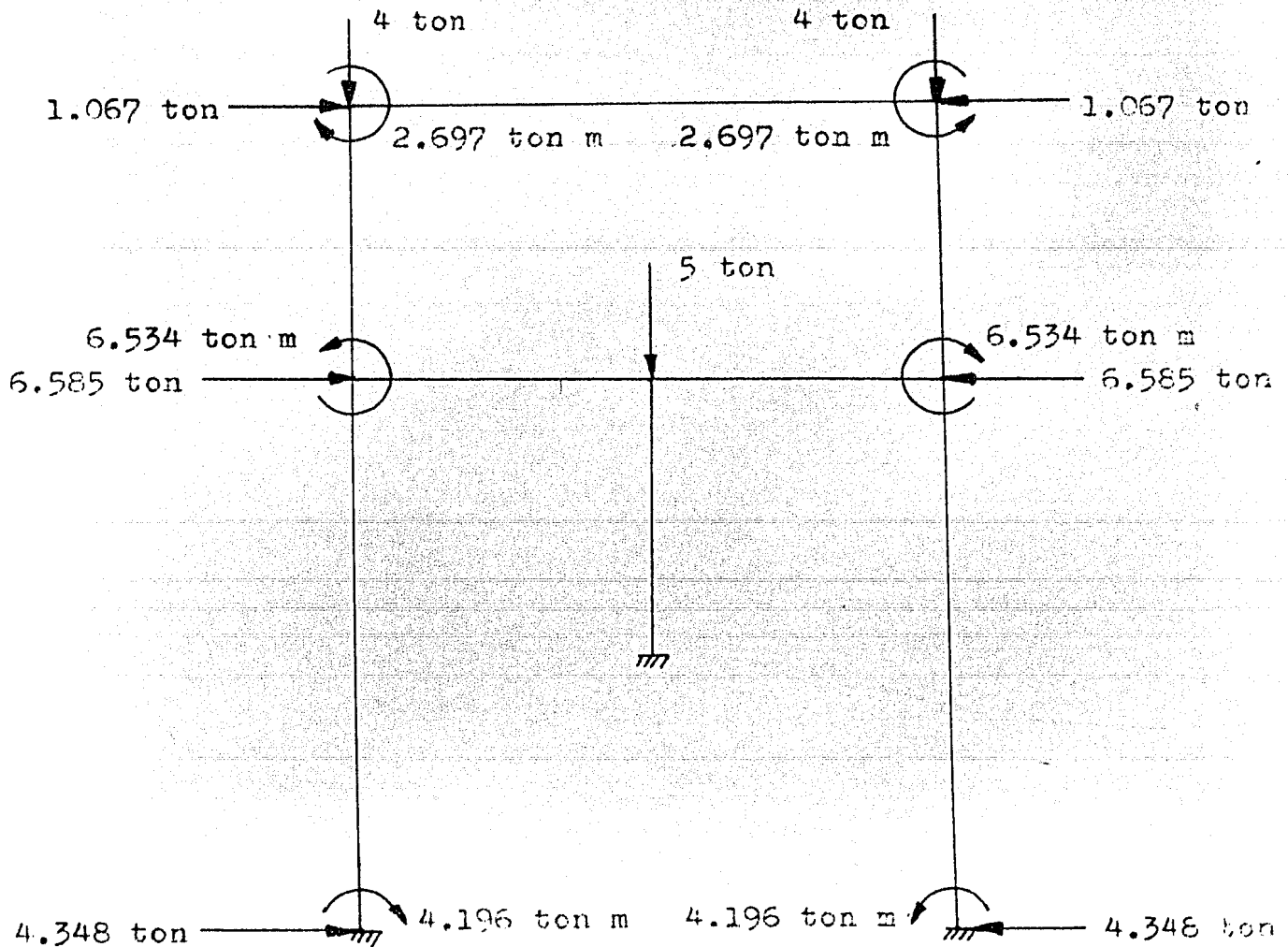


El momento de inercia es

$$I = bh^3/12 = (0.3 \text{ m})(0.4 \text{ m})^3/12$$

$$I = 0.0016 \text{ m}^4$$

Si superponemos los efectos de la carga de cada una de las barras en la estructura tenemos



De la figura anterior se pueden obtener las fuerzas que actúan en dirección de cada uno de los grados de libertad (lineales y angulares) que son:

Fuerza sobre el grado de libertad lineal 1=0 ton

Fuerza sobre el grado de libertad lineal 2=0 ton

Momento externo en el nudo 1=6.534 ton m

Momento externo en el nudo 2=0.000 ton m

Momento externo en el nudo 3=-6.534 ton m

Momento externo en el nudo 4=-2.697 ton m

Momento externo en el nudo 5=2.697 ton m

El marco se hará de concreto de $f'c=200$ con módulo de elasticidad $E=1,414,210 \text{ ton/m}^2$.

Hemos visto que este marco tiene 5 nudos no apoyos, 3 apoyos 8 barras y 2 grados de libertad lineal.

Nos interesa conocer únicamente los desplazamientos, deformaciones angulares y momentos internos por lo que evitaremos que el programa imprima las matrices involucradas en el cálculo introduciendo un valor distinto de cero cuando el programa pregunte si se imprimieran las operaciones.

Tenemos todos los datos necesarios para ejecutar el programa.

Proporcionando los datos obtenidos se corrió el programa y se obtuvieron los siguientes resultados.

(136)

GRADO DE LIBERTAD LINEAL QUE
CORRESPONDE CON EL DESPLAZAMIENTO
DEL NUDO EN LA DIRECCION

NUDO	COORDENADAS		X	Y
1	X=	Y=	+4.000	(1)
2	X=	Y=	+4.000	(1)
3	X=	Y=	+4.000	(1)
4	X=	Y=	+4.000	(2)
5	X=	Y=	+4.000	(2)
6	X=	Y=	+4.000	AFORO
7	X=	Y=	+4.000	AFORO
8	X=	Y=	+4.000	AFORO

BARRA	NUDO ORIGEN	NUDO DESTINO	MOMENTO INERCIA
1	6	1	0.00313
2	7	2	0.00156
3	8	3	0.00313
4	1	4	0.00313
5	3	5	0.00313
6	2	1	0.00020
7	2	3	0.00020
8	4	5	0.00313

BARRA	LONGITUD	COEFICIENTES DE RIGIDEZ		
		RAA	RAB, RBA	RTT
1	4.000	+4.350	+2.784	-5.810
2	2.000	+4.000	+2.000	+4.000
3	4.000	+4.350	-2.784	+5.810
4	1.000	+5.170	+3.322	+8.570
5	1.000	+5.170	+3.322	+8.570
6	2.000	+4.990	+4.729	+12.280
7	2.000	+4.990	+4.729	-12.280
8	4.000	+10.720	+6.786	-19.720

MODULO DE ELASTICIDAD DEL MATERIAL (E) = 1,415,210,000

NUDO	MOMENTO EXTERNO
1	0.534
2	0.267
3	-0.534
4	-1.067
5	2.134

GRADO DE LIBERTAD LINEAL	FUERZA EXTERNA
1	0.000
2	0.000

EL SISTEMA DE ECUACIONES ES COMPATIBLE DETERMINADO

DESPLAZAMIENTOS

PHI (1) =	+0.000
PHI (2) =	+0.000
PHI (3) =	+0.000
PHI (4) =	-0.000
PHI (5) =	+0.000
PHI (6) =	+0.000
PHI (7) =	+0.000
PHI (8) =	+0.000

DEFORMACIONES

THETA A (1) =	+0.000
THETA B (1) =	+0.000
THETA A (2) =	+0.000
THETA B (2) =	+0.000
THETA A (3) =	+0.000
THETA B (3) =	+0.000
THETA A (4) =	-0.000
THETA B (4) =	-0.000
THETA A (5) =	+0.000
THETA B (5) =	+0.000
THETA A (6) =	-0.000
THETA B (6) =	+0.000
THETA A (7) =	-0.000
THETA B (7) =	-0.000
THETA A (8) =	+0.000
THETA B (8) =	+0.000

FUERZAS INTERNAS

mA (1) =	+1.320
mB (1) =	+2.746
mA (2) =	+1.000
mB (2) =	+1.000
mA (3) =	+1.320
mB (3) =	+2.746
mA (4) =	+3.047
mB (4) =	+1.667
mA (5) =	+3.047
mB (5) =	+1.667
mA (6) =	-0.269
mB (6) =	+0.710
mA (7) =	+0.269
mB (7) =	-0.742
mA (8) =	+1.000
mB (8) =	+1.000

COMPROBACION EQUILIBRIO

FUERZAS EXTERNAS

MC (1) =	+6.531
MC (2) =	+0.000
MC (3) =	+6.531
MC (4) =	-0.687
MC (5) =	+0.000
FC (1) =	-0.000
FC (2) =	+0.000

Straight Haunches — Constant Width

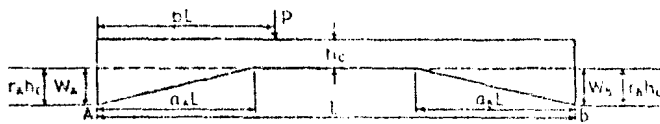
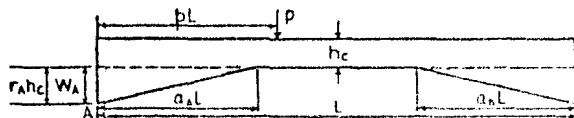


Table with columns for Right Haunch, Carry-over Factors, Stiffness Factors, and Concentrated Load F.E.M. Coef. x PL. Includes sub-tables for alpha_A = 0.5, alpha_A = 0, and alpha_A = 0.

TABLAS DE COEFICIENTES

Straight Haunches — Constant Width



Note:

All carry-over factors and fixed end moment coefficients are negative and all stiffness factors are positive.

Right Haunch	Carry-over Factors		Stiffness Factors		Unif. Load F.E.M. Coef. $\times W_A L^3$		Concentrated Load F.E.M.—Coef. $\times PL$												Haunch Load at			
							b												Left		Right	
							0.1				0.3				0.5				0.7			
α_A	r_B	C_{AB}	C_{BA}	R_{AA}	R_{BB}	m_A	m_B	m_A	m_B	m_A	m_B	m_A	m_B	m_A	m_B	m_A	m_B	m_A	m_B	m_A	m_B	
TABLE 36																						
$\alpha_A = 0.5$						$\alpha_B = \text{variable}$						$r_A = 0.6$						$r_B = \text{variable}$				
0.1	0.4	0.461	0.780	9.28	5.49	0.113	0.0776	0.0884	0.0052	0.1901	0.0450	0.1841	0.1100	0.0926	0.1496	0.0096	0.0870	0.0290	0.0052	0.0000	0.0016	
	0.6	0.475	0.778	9.43	5.77	0.1099	0.0909	0.0882	0.0064	0.1833	0.0553	0.1803	1.152	0.0878	0.1562	0.0076	0.0396	0.0298	0.0054	0.0000	0.0016	
	1.0	0.495	0.774	9.65	6.17	0.1056	0.0854	0.0879	0.0058	0.1864	0.0501	0.1751	1.223	0.0812	0.1653	0.0052	0.0292	0.0285	0.0058	0.0000	0.0016	
	1.5	0.510	0.772	9.81	6.48	0.1031	0.0839	0.0877	0.0061	0.1847	0.0525	0.1711	1.279	0.0761	0.1723	0.0034	0.0293	0.0284	0.0060	0.0000	0.0016	
	2.0	0.519	0.770	9.91	6.68	0.1015	0.0911	0.0876	0.0062	0.1826	0.0540	0.1686	1.314	0.0729	0.1767	0.0024	0.0266	0.0283	0.0062	0.0000	0.0017	
0.2	0.4	0.502	0.760	9.64	6.37	0.1069	0.0844	0.0880	0.0059	0.1865	0.0506	0.1758	1.228	0.0837	0.1633	0.0092	0.0873	0.0286	0.0058	0.0006	0.0058	
	0.6	0.532	0.752	9.96	7.05	0.1026	0.0907	0.0876	0.0064	0.1833	0.0553	0.1684	1.337	0.0750	0.1759	0.0071	0.0901	0.0282	0.0053	0.0005	0.0060	
	1.0	0.576	0.740	10.43	8.13	0.0981	0.1002	0.0870	0.0073	0.1785	0.0626	0.1572	1.504	0.0621	0.1948	0.0045	0.0937	0.0276	0.0072	0.0004	0.0062	
	1.5	0.612	0.731	10.84	9.08	0.0908	0.1081	0.0865	0.0080	0.1744	0.0688	0.1478	1.647	0.0516	0.2106	0.0027	0.0961	0.0272	0.0079	0.0002	0.0064	
	2.0	0.635	0.724	11.11	9.74	0.0874	0.1134	0.0862	0.0085	0.1716	0.0731	0.1414	1.745	0.0447	0.2211	0.0018	0.0975	0.0269	0.0083	0.0001	0.0065	
0.3	0.4	0.534	0.732	9.88	7.20	0.1049	0.0877	0.0877	0.0064	0.1842	0.0547	0.1710	1.310	0.0802	0.1683	0.0094	0.0866	0.0283	0.0063	0.0022	0.0118	
	0.6	0.580	0.715	10.39	8.38	0.0993	0.0962	0.0872	0.0072	0.1797	0.0619	0.1609	1.471	0.0696	0.1841	0.0075	0.0892	0.0278	0.0071	0.0019	0.0123	
	1.0	0.653	0.692	11.03	10.46	0.0905	0.1101	0.0863	0.0087	0.1723	0.0743	0.1444	1.740	0.0532	0.2004	0.0049	0.0931	0.0270	0.0085	0.0012	0.0131	
	1.5	0.716	0.674	11.80	12.54	0.0827	0.1229	0.0854	0.0102	0.1653	0.0860	0.1299	2.000	0.0391	0.2320	0.0031	0.0953	0.0261	0.0099	0.0008	0.0137	
	2.0	0.759	0.661	12.33	14.15	0.0772	0.1321	0.0848	0.0113	0.1601	0.0951	0.1178	2.191	0.0298	0.2476	0.0021	0.0969	0.0257	0.0109	0.0005	0.0141	
0.4	0.4	0.555	0.701	10.02	7.93	0.1040	0.0884	0.0875	0.0067	0.1830	0.0572	0.1686	1.348	0.0795	0.1651	0.0093	0.0854	0.0282	0.0065	0.0049	0.0188	
	0.6	0.615	0.674	10.57	9.64	0.0979	0.0978	0.0869	0.0076	0.1776	0.0633	0.1589	1.540	0.0688	0.1815	0.0079	0.0878	0.0275	0.0076	0.0041	0.0194	
	1.0	0.717	0.637	11.55	13.00	0.0879	0.1144	0.0857	0.0090	0.1660	0.0833	0.1367	1.888	0.0523	0.2069	0.0054	0.0913	0.0265	0.0095	0.0030	0.0218	
	1.5	0.813	0.608	12.59	16.84	0.0784	0.1313	0.0845	0.0123	0.1592	0.1017	0.1165	2.257	0.0379	0.2305	0.0036	0.0940	0.0254	0.0116	0.0021	0.0228	
	2.0	0.885	0.589	13.92	20.17	0.0713	0.1445	0.0835	0.0142	0.1503	0.1171	0.1009	2.562	0.0281	0.2474	0.0026	0.0957	0.0245	0.0134	0.0016	0.0258	
0.5	0.4	0.563	0.670	10.11	8.51	0.1031	0.0875	0.0874	0.0059	0.1820	0.0560	0.1663	1.344	0.0785	0.1623	0.0100	0.0845	0.0280	0.0067	0.0090	0.0258	
	0.6	0.633	0.633	10.72	10.72	0.0969	0.0969	0.0867	0.0081	0.1761	0.0680	0.1538	1.538	0.0680	0.1761	0.0081	0.0867	0.0274	0.0078	0.0078	0.0274	
	1.0	0.757	0.581	11.84	15.45	0.0865	0.1140	0.0853	0.0107	0.1655	0.0800	0.1324	1.903	0.0523	0.1991	0.0057	0.0899	0.0262	0.0100	0.0060	0.0270	
	1.5	0.889	0.540	13.11	21.61	0.0765	0.1326	0.0838	0.0130	0.1538	0.1120	0.1106	2.326	0.0387	0.2212	0.0039	0.0926	0.0248	0.0127	0.0044	0.0325	
	2.0	0.997	0.513	14.23	27.69	0.0686	0.1485	0.0825	0.0168	0.1438	0.1341	0.0929	2.689	0.0295	0.2377	0.0028	0.0943	0.0237	0.0153	0.0034	0.0344	
TABLE 37																						
$\alpha_A = 0.1$						$\alpha_B = \text{variable}$						$r_A = 1.0$						$r_B = \text{variable}$				
0.1	0.4	0.548	0.591	5.37	4.98	0.0969	0.0847	0.0938	0.0032	0.1780	0.0538	0.1472	1.271	0.0679	0.1596	0.0067	0.0881	0.0016	0.0000	0.0000	0.0016	
	0.6	0.565	0.590	5.44	5.21	0.0951	0.0880	0.0937	0.0034	0.1767	0.0562	0.1442	1.325	0.0643	0.1660	0.0053	0.0905	0.0016	0.0000	0.0000	0.0016	
	1.0	0.588	0.588	5.54	5.54	0.0935	0.0925	0.0936	0.0036	0.1749	0.0594	0.1400	1.400	0.0600	0.1749	0.0040	0.0936	0.0016	0.0000	0.0000	0.0016	
	1.5	0.605	0.585	5.62	5.80	0.0906	0.0960	0.0935	0.0037	0.1735	0.0620	0.1368	1.488	0.0557	0.1816	0.0024	0.0957	0.0016	0.0000	0.0000	0.0016	
	2.0	0.615	0.585	5.67	5.97	0.0894	0.0982	0.0934	0.0038	0.1726	0.0636	0.1348	1.494	0.0534	0.1858	0.0019	0.0970	0.0016	0.0000	0.0000	0.0016	
0.2	0.4	0.597	0.579	5.56	5.74	0.0934	0.0918	0.0936	0.0036	0.1748	0.0602	0.1403	1.409	0.0610	0.1735	0.0064	0.0885	0.0016	0.0000	0.0004	0.0059	
	0.6	0.633	0.573	5.71	6.31	0.0895	0.0982	0.0934	0.0040	0.1721	0.0654	0.1342	1.524	0.0545	0.1858	0.0049	0.0911	0.0016	0.0000	0.0003	0.0061	
	1.0	0.685	0.566	6.95	7.19	0.0850	0.1076	0.0931	0.0045	0.1660	0.0732	0.1253	1.697	0.0450	0.2037	0.0031	0.0944	0.0016	0.0000	0.0002	0.0063	
	1.5	0.726	0.560	6.14	7.96	0.0810	0.1154	0.0929	0.0049	0.1646	0.0799	0.1178	1.842	0.0373	0.2184	0.0018	0.0966	0.0016	0.0000	0.0001	0.0064	
	2.0	0.752	0.557	6.28	8.49	0.0784	0.1206	0.0928	0.0052	0.1624	0.0844	0.1129	1.940	0.0323	0.2279	0.0012	0.0978	0.0016	0.0000	0.0001	0.0065	
0.3	0.4	0.638	0.561	5.69	6.48	0.0916	0.0955	0.0934	0.0039	0.1727	0.0651	0.1361	1.502	0.0582	0.1785	0.0066	0.0878	0.0016	0.0000	0.0015	0.0121	
	0.6	0.694	0.550	5.92	7.47	0.0872	0.1042	0.0932	0.0045	0.1667	0.0731	0.1277	1.627	0.0501	0.1938	0.0051	0.0903	0.0016	0.0000	0.0011	0.0127	
	1.0	0.779	0.535	6.31	9.18	0.0803	0.1181	0.0928	0.0054	0.1622	0.0864	0.1143	1.951	0.0378	0.2175	0.0033	0.0937	0.0016	0.0000	0.0008	0.0133	
	1.5	0.853	0.524	6.67	10.85	0.0743	0.1307	0.0924	0.0062	0.1564	0.0911	0.1020	2.209	0.0275	0.2380	0.0020	0.0960	0.0016	0.0000	0.0005	0.0139	
	2.0	0.903	0.516	6.93	12.12	0.0701	0.1396	0.0921	0.0069	0.1521	0.1085	0.0933	2.400	0.0208	0.2543	0.0014	0.0973	0.0016	0.0000	0.0004	0.0142	
0.4	0.4	0.668	0.540	5.78	7.15	0.0909	0.0965	0.0933	0.0042	0.1714	0.0682	0.1340	1.545	0.0580	0.1766	0.0069	0.0867	0.0016	0.0000	0.0035	0.0194	
	0.6	0.742	0.523	6.07	8.61	0.0860	0.1063	0.0930	0.0049	0.1666	0.0785	0.1242	1.749	0.0499	0.1918	0.0056	0.0890	0.0016	0.0000	0.0029	0.0206	
	1.0	0.864	0.500	6.60	11.41	0.0780	0.1233	0.0925	0.0062	0.1581	0.0974	0.1075	2.113	0.0375	0.2165	0.0037	0.0923	0.0016	0.0000	0.0022	0.0220	
	1.5	0.979	0.481	7.15	15.53	0.0704	0.1401	0.0919	0.0075	0.1496	0.1174	0.0911	2.487	0.0269	0.2387	0.0024	0.0948	0.0016	0.0000	0.0015	0.0233	
	2																					

Conclusión.

Después de leer este trabajo detenidamente puede comprenderse la utilidad del programa para computadora que en él se presenta para el análisis de marcos planos con barras de sección variable.

Este programa se realizó con el objetivo principal de demostrar el funcionamiento del método directo de las rigideces, y por tal motivo es susceptible de modificaciones que podrían --- adaptarlo a algún uso particular haciendolo más eficiente.

El tiempo que emplea la computadora en efectuar un análisis determinado con este método es bastante aceptable en comparación con el mismo análisis efectuado con otro método en la misma computadora.

Es obvio que la computadora misma en que se corra este programa o uno similar determina la velocidad y el costo de los cálculos. En una computadora de bolsillo un análisis como el que realizamos en alguno de los ejemplos sería muy lento y --- aunque la hora máquina de este tipo de computadoras es barata la utilización de ellas sería poco atractiva. En comparación tenemos la macrocomputadora que es muy rápida pero como el costo de la hora máquina de la misma es cara también hace poco --- atractiva su utilización. Un término medio entre tiempo y costo es la microcomputadora que para este tipo de cálculos es la más atractiva.

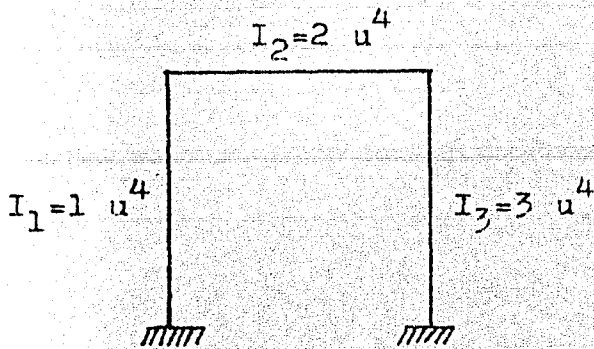
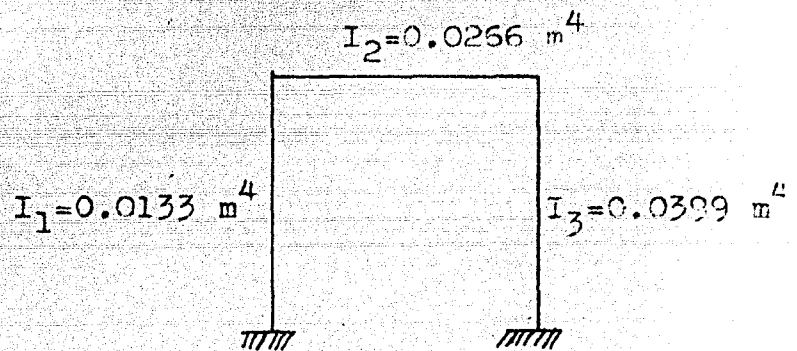
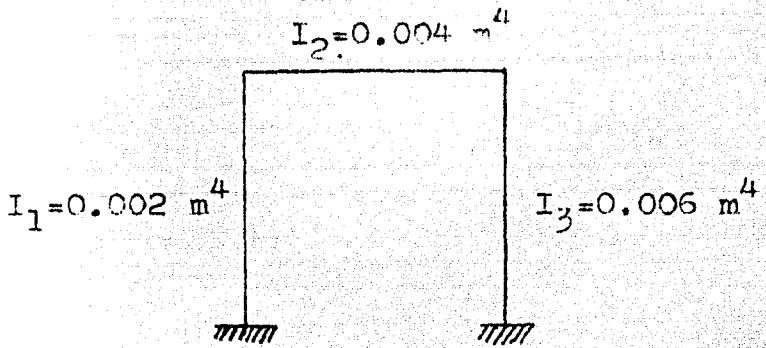
Nunca debe olvidarse que la precisión o la veracidad de los resultados que se obtienen con este programa dependen principalmente de la veracidad y precisión de los datos iniciales -- que hay que proporcionar al mismo.

Existen diversas formas de manejar el método directo de las rigideces, cada una de las cuales tiene sus ventajas particulares, la forma de manejar el método que se empleó en este trabajo es una de las más sencillas y por esta razón se eligió para ilustrar el funcionamiento del método, sacrificando con ello la eficiencia en que otras formas de manejar el método tienen ventaja, no obstante, como deseamos calcular no solo los desplazamientos de la estructura, sino también los momentos internos en los extremos de las barras, la forma de aplicar el método adoptada es adecuada.

Generalmente cuando los cálculos se realizan manualmente es conveniente trabajar el módulo de elasticidad y uno de los distintos momentos de inercia como constantes con lo cual se evita el manejo de cantidades demasiado grandes, pero al trabajar con la computadora esto no proporciona una ventaja considerable y por ello se prefirió no hacerlo en el programa con lo cual se obtienen directamente las matrices correspondientes a la estructura que se analiza, lo que permite obtener los vectores de soluciones sin necesidad de hacer correcciones.

De los ejemplos presentados puede observarse que los momentos internos en los extremos de las barras depende de la proporción que guardan entre sí los momentos de inercia de las barras dentro de la estructura sin importar el valor específico de éstos, por ejemplo si analizáramos los tres marcos siguientes bajo el mismo sistema de cargas aplicadas, teniendo los tres desde luego las mismas dimensiones generales o propiedades geométricas de la estructura, obtendríamos los mismos mo-

mentos internos ya que en todos estos marcos $I_2=2I_1$ y $I_3=3I_1$



Es claro desde luego que en cada uno de ellos los desplazamientos aunque proporcionales serían distintos.

En la utilización de las tablas del manual de Portland Cement Association para la obtención de los coeficientes de rigidez R_{AA}, R_{BB} , factores de transporte C_{AB}, C_{BA} , y coeficientes del momento de empotramiento m_A, m_B , es válida la interpolación lineal si para los valores de los parámetros a_A, a_B, r_A, r_B o p

no se encuentran tabuladas dichas cantidades.

Para terminar podemos decir que el programa que se presentó es algo versátil y puede utilizarse en algunos cálculos que no se trataron en este trabajo por ser casos poco frecuentes en realidad, siempre y cuando los datos que se proporcionan o las condiciones que se utilizan se adapten adecuadamente para cumplir con los fundamentos del programa.

Bibliografía.

Structural Matrix Analysis for the Engineer.

John S. Robinson

Theory of Matrix Structural Analysis.

J.S. Przemieniecki

Estructuras Estáticamente Indeterminadas.

White, Gergely, Sexmith

Computer Methods of Structural Analysis.

Beaufait, Rowan, Hoadley, Hackett

Análisis de Estructuras Indeterminadas.

J. Sterling Kinney

Handbook of Frame Constants.

Potrland Cement Association