

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA



28
82

SOLUCION DE PROBLEMAS DE POTENCIAL Y ELASTI- CIDAD BIDIMENSIONALES, CON EL METODO DE INTEGRACION DE ELEMENTOS DE FRONTERA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
I N G E N I E R O C I V I L
P R E S E N T A

JOEL AVELINO GARCIA VARGAS

MEXICO, D. F.

1983



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

1. Introducción	1
2. Problemas de potencial	5
2.1 <i>Introducción</i>	5
2.2 <i>Relaciones básicas</i>	6
2.3 <i>Elementos de frontera</i>	11
2.4 <i>Ecuación de Poisson</i>	19
3. Problemas de elasticidad	23
3.1 <i>Introducción</i>	23
3.2 <i>Teoría de la elasticidad lineal</i>	24
3.3 <i>Relaciones básicas</i>	35
3.4 <i>Elementos de frontera</i>	42
4. Aplicaciones	58
4.1 <i>Solución de problemas de potencial isótropos</i>	59
4.1.1 <i>Ejemplo de flujo de calor</i>	59
4.1.2 <i>Problemas con más de una superficie. Ejemplo de flujo de calor entre dos círculos concéntricos</i>	61
4.1.3 <i>Flujo laminar alrededor de un cilindro entre dos placas</i>	61
4.2 <i>Solución de problemas de elasticidad isótropos</i>	63
4.2.1 <i>Cavidad circular bajo presión interna</i>	63
4.2.2 <i>Pilote sujeto a carga axial en un semiespacio elástico</i>	64
4.2.3 <i>Grupo de 2 pilotes con losa rígida en contacto con la superficie del suelo</i>	68
5. Conclusiones	70
6. Reconocimiento	72
7. Referencias	73
Apéndice A. <i>Fórmulas de integración numérica</i>	76
A.1 <i>Introducción</i>	76
A.2 <i>Fórmula unidimensional de la Cuadratura de Gauss</i>	78
A.3 <i>Fórmula logarítmica unidimensional de la Cuadratura de</i>	

<i>Gauss</i>	84
Apéndice B. Descripción de programas	85
B.1 Programa SPPBEC para la solución de problemas de potencial isótropos con elementos constantes	85
B.2 Programa SPPBEL para la solución de problemas de potencial isótropos con elementos lineales	91
B.3 Programa SPEBEC para la solución de problemas isótropos y linealmente elásticos con elementos constantes	93
Apéndice C. Problemas con más de una superficie	98
Tablas	133
Figuras	147

1. Introducción

En la actualidad, los ingenieros están familiarizados con métodos como los de diferencias finitas o elementos finitos. Estas técnicas discretizan el dominio del problema bajo consideración en un cierto número de subdominios o celdas. Las ecuaciones que gobiernan el problema se aproximan en toda la región por funciones que satisfacen parcial o totalmente las condiciones de frontera. Estos métodos junto con otras técnicas que se aplican en el dominio se les llama métodos de "dominio".

Otra posibilidad es usar funciones de aproximación que satisfacen las ecuaciones gobernantes en el dominio pero no las condiciones de frontera. Estas técnicas se les llama métodos de frontera.

El método de elementos de frontera es una técnica que ofrece importantes ventajas sobre las soluciones tipo "dominio". Uno de los aspectos más interesantes del método es el pequeño sistema de ecuaciones involucrado en el proceso de solución y la reducción considerable de los datos requeridos para resolver un problema. Así mismo, la aproximación numérica del método de elementos de frontera es generalmente mayor que la de los elementos finitos. Estas ventajas son más marcadas en problemas bi y tridimensionales.

El método también es adecuado para resolver problemas con dominio infinito

como los que frecuentemente surgen en mecánica de suelos, hidráulica, análisis estructural, etc para los que los métodos clásicos de dominio no son del todo satisfactorios.

Cabe señalar que los métodos de elementos de frontera pueden combinarse con las técnicas de dominio para obtener una representación mejor de las condiciones de frontera, ya que, se sabe que los resultados pueden no ser satisfactorios debido a la dificultad para representar propiamente las condiciones de frontera; esto sucede especialmente donde se tienen dominios infinitos.

Para este tipo de problemas es posible proponer una subdivisión de la región de interés para elementos finitos y trabajar con elementos de frontera para aproximar mejor las condiciones de frontera en aquellos casos en que se tienen problemas de radiación (24). (Los elementos de frontera representan la frontera entre la región del elemento finito y el dominio infinito).

Otra ventaja importante de los métodos de frontera sobre los de dominio es que permiten representar mejor las regiones de concentración de esfuerzos. Aunque esto depende, generalmente, del tipo de función de aproximación que se use.

El término "elemento de frontera" se emplea para indicar el método por el cual la superficie externa de un dominio se divide en una serie de elementos sobre los cuales las funciones bajo consideración pueden variar arbitrariamente (8).

Los métodos de frontera al igual que los métodos de dominio, pueden ser de diferentes tipos, desde las técnicas simples como los llamados métodos "in directos" hasta las técnicas más complejas como los métodos "directos". Ambas técnicas pueden interpretarse como formulaciones diferentes de residuos pesados.

La técnica de frontera menos sofisticada es el llamado método "indirecto" de análisis. En su forma más simple se parte de una solución que satisface las ecuaciones gobernantes en el dominio pero contiene algunos coeficien-

tes como incógnitas; estos se determinan forzando las condiciones de frontera en cierto número de puntos o subregiones. Por esta razón, se dice que esta técnica es imperfecta pero que no altera la forma ya que puede proporcionar buenos resultados en muchas aplicaciones prácticas. Esto es cierto principalmente cuando la ecuación usada es la solución fundamental de las ecuaciones que gobiernan el problema (8). Algunas de estas soluciones "fundamentales" se muestran en los Caps 2 y 3 de este trabajo y representan la solución sobre un dominio infinito para una carga unitaria aplicada en un punto.

Por su simplicidad, se ha usado la técnica indirecta por muchos años.

Por otra parte, los métodos directos se presentan generalmente basados en la identidad de Green, pero pueden interpretarse como una formulación de la técnica de residuos pesados. Son técnicas más generales y versátiles que los métodos indirectos, los cuales pueden interpretarse como un caso especial de las formulaciones directas.

Se puede decir entonces que el método de elementos de frontera se basa en dos aspectos esenciales: la solución fundamental del campo de ecuaciones y en un teorema recíproco, el cual en la teoría del potencial es el Teorema de Green y en la teoría de la elasticidad lineal es el Teorema del trabajo recíproco de Betti (6).

En el Cap 2 se plantean las ecuaciones para resolver problemas de potencial isótropos bidimensionales. Se emplea el método indirecto.

En el Cap 3 se muestra la obtención de las ecuaciones que sirven para resolver problemas de elasticidad lineal bidimensional.

En el Cap 4 se aplica el método de elementos de frontera a la solución de problemas de potencial y elasticidad isótropos en el plano. Puede notarse que al aplicar el método de elementos de frontera a la solución de problemas de potencial isótropos con dominio de frontera con esquinas se presentan ciertas dificultades; esto se evita si se emplean elementos con dos nudos en las esquinas; sin embargo, esto provoca que se incremente el número de ecuaciones para resolver, lo cual es indeseable. Un procedimiento alter

nativo es emplear elementos isoparamétricos (6). También se muestra la aplicación del método a la solución del problema de un pilote y de un grupo de pilotes con y sin losa de cimentación en contacto con la superficie del suelo.

En el Cap 5 se dan las conclusiones más relevantes de este trabajo.

Finalmente, en el Apéndice A se muestran las fórmulas de integración numérica empleadas en los programas de computadora. En los Apéndices B y C se dan las instrucciones de los programas SPPBEC, SPPBEL, SPEBEC y SPPBSD respectivamente. En la parte final de este trabajo se proporcionan los listados de los programas.

2. Problemas de potencial

2.1 Introducción

La técnica de solución de frontera se puede usar como un método de residuos ponderados seleccionando una solución aproximada -arbitraria- que satisfaga la ecuación que gobierna el problema. Se presenta aquí la generalización de esta idea y se trabaja con cierto tipo de solución de influencia. Las nuevas soluciones representan una carga concentrada en un punto que se conoce como la solución fundamental.

En años recientes se ha publicado un gran número de artículos y trabajos sobre este tipo de métodos de frontera (1-9). Estos métodos se presentan bajo nombres diferentes tales como "método de las ecuaciones integrales de frontera", "soluciones integrales de frontera", etc. En su forma más general, esta técnica consiste en subdividir la frontera de la región bajo consideración en una serie de elementos; por lo que el nombre "técnica de elementos de frontera" resulta el más apropiado y es el que se usará en este trabajo.

En este capítulo se discute únicamente la formulación de frontera en problemas de potencial. Las ideas básicas son similares para

cualquier otro problema ingenieril. La aplicación a la solución de problemas de elasticidad se muestra en el Cap. 3.

Usualmente, esta técnica produce una singularidad cuando se particulariza la solución conocida (fundamental) a la frontera. Con el objeto de resolver ese inconveniente se presenta un método (Secc 2.2) para integrar la solución fundamental en la frontera. La misma técnica de integración se aplica en problemas de elasticidad (Secc 3.2) y simplifica considerablemente las derivaciones.

Se presentan y discuten algunas soluciones de potencial usando diferentes tipos de elementos de frontera, esto es, constantes (u y q son constantes) y con variación lineal (u y q varían linealmente en el elemento). Se enfatiza la aplicación sencilla de la técnica de elementos de frontera y la manera como pueden aplicarse en la ingeniería. En el Cap. 4 se dan algunos ejemplos donde se muestran las ventajas de los elementos de frontera sobre los elementos finitos.

2.2 Relaciones básicas

Para ilustrar cómo la formulación del elemento frontera puede deducirse de la técnica de residuos ponderados (8), considérese una función de potencial u sobre un dominio Ω el cual se requiere para satisfacer la siguiente ecuación gobernante:

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.1)$$

Las condiciones de frontera correspondientes a este problema son de dos tipos (fig 2.1).

- a) Condición esencial, tal que $u = \bar{u}$ en Γ_1
- b) Condición natural del tipo $\partial u / \partial n = \bar{q}$ en Γ_2

La frontera total es $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

Se introduce una función de peso u^* tal que su primera derivada sea continua (cumple con las condiciones del espacio de Sobolev) (11). Posteriormente, esta función se requerirá para satisfacer la ecuación gobernante. Se puede escribir ahora la siguiente proposición de residuos ponderados (8),

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (2.2)$$

donde $q = \partial u / \partial n$ y $q^* = \partial u^* / \partial n$

Nótese que el último término en la ec 2.2 se obtiene ponderando la condición $u = \bar{u}$ en Γ_1 y suministra un tipo de proposición mixta.

Integrando por partes el lado izquierdo de la ec 2.2, se obtiene

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (2.3)$$

donde se ha usado la convención de suma de Einstein para índices. Después de integrar nuevamente el lado izquierdo de la ec 2.3, se puede escribir la siguiente expresión

$$\int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (2.4)$$

Se discute ahora la obtención de la solución fundamental de la ecuación de Laplace. Se pretende encontrar una solución que satisfaga la ecuación de Laplace (ec 2.1), si se supone que una carga concentrada actúa en el punto " \mathcal{L} ", la ecuación gobernante es

$$\nabla^2 u^* + \Delta^{\mathcal{L}} = 0 \quad (2.5)$$

donde Δ^i es la función delta de Dirac. A la solución de esta ecuación se le llama solución fundamental. Como puede verse esta función tiene la siguiente propiedad (8)

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 u^* + \Delta^i) d\Omega = \int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d\Omega + u^i \quad (2.6)$$

donde u^i representa el valor de la función incógnita u en el punto de aplicación de la carga. Si la solución fundamental satisface la ec 2.5, entonces

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 u^*) d\Omega = -u^i \quad (2.7)$$

Entonces la ec 2.4 queda de la siguiente forma

$$u^i + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma \quad (2.8)$$

donde

$$q = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$$

Para un medio tridimensional isótropo la solución fundamental de la ec 2.5 es (12)

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (2.9)$$

donde r es la distancia del punto de aplicación del potencial unitario al punto bajo consideración. La ecuación tridimensional de Laplace (ec 2.5) en coordenadas polares y tomando en cuenta la simetría conduce a (8)

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} = \Delta^i \quad (2.10)$$

Sustituyendo la ec 2.9 en la ec 2.10 se observa que la ecuación se satisface para cualquier valor de r diferente de cero. Para estudiar el caso de $r \equiv 0$ es necesario realizar la siguiente integración en una esfera de contorno del punto donde se aplica la carga

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta^i d\Omega = -1 \quad (2.11)$$

Puede probarse fácilmente que el lado izquierdo de la ec 2.11 es igual a menos uno escribiendo la siguiente expresión

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma \quad (2.12)$$

Sustituyendo la solución fundamental (ec 2.9) en la ec 2.12 se tiene

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left(-\frac{1}{r^2}\right) d\Gamma = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{4\pi r^2}{r^2}\right]_{\Gamma} = -1 \quad (2.13)$$

El resultado en la ec 2.13 es independiente de r y muestra que cuando $r \rightarrow 0$ el lado izquierdo de la ec 2.11 es igual a -1.

Para dos dimensiones la solución fundamental para el caso isótropo es (12)

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.14)$$

A continuación se discuten los planteamientos para establecer la ecuación en la frontera.

La ec 2.8 es válida para cualquier punto en el dominio, pero para formular el problema como una técnica de frontera se necesita tomarlo justamente en la frontera. Esto se hace de una manera simple. Considérese el hemisferio en la frontera de un dominio tridimensional como el descrito en la fig 2.2. El caso bidimensional puede también analizarse de la misma manera. Se supone que el punto frontera es el centro de la esfera y posteriormente el radio " ϵ " se reduce a cero. El punto entonces tenderá al punto frontera. Se supone que la frontera es suave y que el punto está en Γ_2 ; considere raciones similares se aplican si el punto está en Γ_1 .

Es necesario analizar qué pasa cuando se considera que la frontera Γ_2 se divide en dos partes, esto es

$$\int_{\Gamma_2} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_{(2-\epsilon)}} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \quad (2.15)$$

Si ahora se sustituye la solución fundamental en la segunda integral del lado derecho de la ec 2.15 y se toma el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se obtiene que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\epsilon} u \frac{1}{4\pi\epsilon^2} d\Gamma \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2} u = -\frac{1}{2} u \quad (2.16)$$

Nótese que cuando ϵ es cero, la frontera $\Gamma_{(2-\epsilon)}$ se convierte nuevamente en Γ_2 . El mismo resultado, $-1/2 u$, se obtiene para problemas bidimensionales con una frontera suave. Se puede introducir la subdivisión para los términos del lado derecho de la ec 2.8, esto es

$$\int_{\Gamma} q u^* d\Gamma$$

pero para este caso

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} q \frac{1}{4\pi\epsilon} d\Gamma \right\} = 0$$

luego, este límite no introduce ningún término nuevo en la ec 2.8. Sustituyendo la ec 2.16 en la ec 2.8 se tiene la siguiente ecuación para un punto en la frontera:

$$1/2 u^i + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_2} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma \quad (2.17)$$

Se obtiene el mismo resultado si en lugar de tomar un punto en Γ_2 se toma uno en la frontera Γ_1 .

En general la ec 2.17 se puede escribir como,

$$1/2 u^i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (2.18)$$

donde $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ y se supone que $u = \bar{u}$ en Γ_1 y $\partial u / \partial n = q = \bar{q}$ en Γ_2 .

2.3 Elementos de frontera

Se aplica ahora la ec 2.18 en la frontera del dominio bajo consideración. Se estudia aquí únicamente el caso bidimensional y su frontera se divide en n segmentos o elementos de líneas rectas (fig 2.3). Los puntos o "nodos" donde se consideran los valores incógnitas se toman al centro de cada elemento (fig 2.3(a)) cuando se tienen elementos constantes o en la

intersección entre dos elementos (fig 2.3(b)) cuando se tienen elementos lineales. Además, la frontera no necesita ser discretizada únicamente por segmentos rectos sino que se pueden usar también los elementos curvos con poco trabajo adicional (fig 2.3(c)). Generalmente, para el último caso se incluye un nudo extra a la mitad del elemento, ya que para definir una cúbica es necesario tener por lo menos tres puntos.

Se considera primero el caso en que se tienen únicamente nudos medios (fig 2.3(a)). La frontera se representa con n elementos, de los cuales n_1 pertenecen a Γ_1 y n_2 a Γ_2 . Se suponen constantes los valores de u y q en cada elemento e iguales a los valores en el nudo medio del elemento. La ec 2.18 para un punto ' i ' dado en forma discreta es

$$1/2 u^i + \sum_{j=1}^n u_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (2.19)$$

Esta ecuación se aplica para un nudo ' i ' particular. El término

$$\int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma$$

relaciona al nudo ' i ' con el segmento ' j ' sobre el cual se realiza la integración. A estas integrales se les llamará \hat{H}_{ij} . A las integrales del lado derecho se les llamará G_{ij} . Entonces se tiene que

$$1/2 u^i + \sum_{j=1}^n u_j \hat{H}_{ij} = \sum_{j=1}^n q_j G_{ij} \quad (2.20)$$

Las integrales arriba mencionadas se calculan analíticamente de una manera sencilla para el caso de elementos constantes pero para elementos de orden superior aumenta la dificultad para evaluarlas. De aquí que por generalidad las integrales se calculan numéricamente para todos los segmentos excepto para el correspondiente al nudo bajo consideración.

La ec 2.20 relaciona el valor de u del nudo medio ' i ' con el valor de u y q de todos los nudos en la frontera, incluyendo el ' i '.

Se puede escribir la ec 2.20 para cada nudo ' i ', con lo que se obtienen n ecuaciones.

Si se llama

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \hat{H}_{ij} \quad , \quad \text{cuando } i \neq j \\ H_{ij} &= \hat{H}_{ij} + 1/2 \quad , \quad \text{cuando } i = j \end{aligned} \quad (2.21)$$

Entonces, la ec 2.20 se puede escribir como:

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j \quad (2.22)$$

El conjunto completo de ecuaciones para los n nudos se puede expresar en forma matricial como:

$$H U = G Q \quad (2.23)$$

Nótese que se conocen n_1 valores de u y n_2 valores de q , de aquí que se tenga un conjunto de n incógnitas en la ec 2.23. Si se reordenan las ecuaciones de tal forma que todas las incógnitas queden del lado izquierdo, se puede escribir que

$$A X = F \quad (2.24)$$

donde X es el vector de incógnitas de u y q .

Una vez que se conocen los valores de u y q en la frontera completa se puede calcular el valor de u en cualquier punto interno usando la ec 2.8, la cual después de discretizarla queda:

$$u^i = \sum_{j=1}^n q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^n u_j \hat{H}_{ij} \quad (2.25)$$

La derivada interna $q_x (q_x = \partial u / \partial x)$ o $q_y (q_y = \partial u / \partial y)$ se puede calcular diferenciando la ec 2.8, esto es

$$(q_x)^i = \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma \quad (2.26)$$

$$(q_y)^i = \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial y} d\Gamma$$

Para integrar las ecuaciones obtenidas a partir de aplicar la solución fundamental a la frontera se pueden calcular usando la fórmula de Cuadratura de Gauss de 4 puntos para todos los segmentos excepto para el correspondiente al nudo bajo consideración (Apéndice A). Para este caso particular la \hat{H}_{ii} es cero (debido a la ortogonalidad de r y n) y se puede calcular analíticamente la integral G_{ii} .

$$G_{ii} = \int_{\Gamma_i} u^* d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \ln \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma \quad (2.27)$$

Si se usa la coordenada ξ (fig 2.4) se tiene,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{(1)}^{(2)} \ln \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = \frac{1}{\pi} \int_{(0)}^{(2)} \ln \left(\frac{1}{r} \right) dr \quad (2.28)$$

() indica que el número entre paréntesis corresponde al número del punto no la distancia.

Transformando coordenadas (nótese que $r = \xi |r_1|$, donde $|r_1| = |r_2|$)

se obtiene:

$$r = \xi |r_1|, \quad dr = |r_1| d\xi$$

sustituyendo estos valores en la ec 2.28, se obtiene

$$\frac{1}{\pi} \int_{(0)}^{(2)} \ln \left(\frac{1}{r} \right) dr = \frac{1}{\pi} \int_{(0)}^{(2)} \ln \left(\frac{1}{\xi |r_1|} \right) |r_1| d\xi = \frac{1}{\pi} |r_1| \int_{(0)}^{(2)} (-\ln(\xi |r_1|)) d\xi$$

pero $-\ln(\xi |r_1|) = \ln \frac{1}{\xi} + \ln \frac{1}{|r_1|}$, sustituyendo en la ecuación anterior se tiene

$$\frac{1}{\pi} |r_1| \left\{ \ln \frac{1}{|r_1|} + \int_{(0)}^{(2)} \ln \frac{1}{\xi} d\xi \right\} = \frac{1}{\pi} |r_1| \left\{ \ln \frac{1}{|r_1|} + 1 \right\} \quad (2.29)$$

luego la ec 2.27 queda

$$G_{ii} = \frac{1}{\pi} |r_1| \left\{ \ln \frac{1}{|r_1|} + 1 \right\} \quad (2.30)$$

Para casos más complejos se puede usar una fórmula especial logarítmicamente ponderada para la integración numérica. La fórmula se debe a Stroud y Secrest (Apéndice A). La integración implica que,

$$\int_0^1 \ln \left(\frac{1}{r} \right) f(r) dr \simeq \sum_{i=1}^k w_i f(r_i) \quad (2.31)$$

Para elementos lineales se obtienen a continuación las expresiones correspondientes.

Se supone ahora una variación lineal de u y q en cada elemento. Se considera que los nudos están en la intersección de dos elementos rectos tal como los mostrados en la fig 2.3(b) y marcados como nudos extremos.

La ec 2.18 puede escribirse para n elementos como;

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma \quad (2.32)$$

Nótese que al contrario de la ec 2.19 no se toman u_j y q_j fuera de la integral ya que ellos varían linealmente en el elemento. Si bien $c^i = -1/2$ para fronteras suaves, existen caminos para encontrar su valor en fronteras no suaves.

Considérese un segmento arbitrario tal como el mostrado en la fig 2.5. Se pueden definir los valores de u y q en cualquier punto del elemento en términos de sus valores nodales y de las funciones de interpolación ϕ_1 y ϕ_2 tal que, para el caso de dos variables con variación lineal se puede escribir que (8)

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 = \{\phi_1 \phi_2\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ q(\xi) &= \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 = \{\phi_1 \phi_2\} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde ξ es la coordenada adimensional $\xi = 2x/l$ y ϕ_1 y ϕ_2 están dados por

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad , \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (2.34)$$

Las integrales a lo largo del elemento 'j' en la ec 2.32 para el lado izquierdo se transforman en

$$\int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \{\phi_1 \ \phi_2\} q^* d\Gamma \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \{h_{i1} \ h_{i2}\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

donde para cada elemento 'j' se tienen dos componentes

$$h_{i1} = \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma, \quad h_{i2} = \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma$$

Para el lado derecho se tiene

$$\int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \{\phi_1 \ \phi_2\} u^* d\Gamma \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \{g_{i1} \ g_{i2}\} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

donde

$$g_{i1} = \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma, \quad g_{i2} = \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma$$

Sustituyendo las ecs 2.35 y 2.36 para todos los elementos 'j' en la ec 2.32 se obtiene la siguiente ecuación para el nudo 'i' (8)

$$c_{ii}^u u_i + \{\hat{H}_{i1} \ \hat{H}_{i2} \ \dots \ \hat{H}_{in}\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \{G_{i1} \ G_{i2} \ \dots \ G_{in}\} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

donde \hat{H}_{ij} es igual al término h_{i1} del elemento 'j' más el término h_{i2} del elemento 'j-1' y similarmente para G_{ij} . Por esto la ec 2.37 representa la ecuación ensamblada para el nudo 'i'. La ec 2.37 puede escribirse como

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^n \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j \quad (2.38)$$

donde 'j' define el nudo entre los elementos (nudos extremos en la fig 2.3(b)). Similarmente, como se vio previamente (ec 2.22), esta ecuación puede escribirse como

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j \quad (2.39)$$

y este conjunto completo de ecuaciones en forma matricial es

$$H U = G Q \quad (2.40)$$

A no ser que la superficie sea suave en el punto 'i' el valor de $-1/2$ obtenido en la ec 2.16 no es válido. Sin embargo, siempre se pueden calcular los términos de la diagonal de H por el hecho de que cuando se aplica un potencial uniforme sobre la frontera completa, las derivadas normales (valores de q) deben ser nulos. Por esto la ec 2.40 queda,

$$H U = 0 \quad (2.41)$$

De este modo la suma de todos los elementos de H en cualquier renglón debe ser cero, y el valor del coeficiente de la diagonal puede calcularse fácilmente una vez que se conocen todos los coeficientes fuera de la diagonal, esto es

$$h_{ii} = -\sum_{j=1}^n h_{ij}$$

De esta manera no es necesario calcular explícitamente el valor de c^i .

2.4 Ecuación de Poisson

Considérese ahora el caso de una función u que se requiere para satisfacer la siguiente ecuación de Poisson en Ω

$$\nabla^2 u - p = 0 \quad (2.42)$$

Como previamente se vio, las condiciones de frontera correspondientes a este problema son:

Condición esencial tal que $u = \bar{u}$ en Γ_1 .

Condición natural $\partial u / \partial n = \bar{q}$ en Γ_2 .

La frontera total es $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

La función de peso u^* produce la siguiente expresión (8)

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - p) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \bar{q} \right) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \quad (2.43)$$

Integrando por partes dos veces el primer término del lado izquierdo, se tiene (8)

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} p u^* d\Omega + \int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d\Omega &= - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.44)$$

Se puede emplear la misma solución fundamental para u^* que la usada en la ec 2.5, es decir

$$\nabla^2 u^* + \nabla^2 \bar{u} = 0 \quad (2.45)$$

De aquí que la ec 2.44 en un punto ' i ' sea

$$\int \rho u^* d\Omega + u^i + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma \quad (2.46)$$

Dado que ' i ' está en la frontera, el término u^i en la ec 2.46 debe multiplicarse por $1/2$ para fronteras suficientemente lisas (suaves). Si la frontera no es lisa en el punto ' i ' en lugar de $1/2$ la constante tiene que determinarse de las consideraciones del potencial constante, luego la ec 2.46 puede escribirse como

$$c^i u^i + \int_{\Omega} \rho u^* d\Omega + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (2.47)$$

Discretizando la ecuación anterior y usando elementos constantes, se tiene

$$c^i u^i + \int_{\Omega} \rho u^* d\Omega + \sum_{j=1}^n u_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (2.48)$$

que puede escribirse como

$$c^i u^i + B_i + \sum_{j=1}^n \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j \quad (2.49)$$

o bien

$$B_i + \sum_{j=1}^n H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j$$

donde el término B_i es el resultado de calcular la siguiente integral

$$\int_{\Omega} p u^* d\Omega$$

La integración puede realizarse dividiendo el dominio Ω en una serie de celdas o elementos de forma similar a los usados en el método de elementos finitos (fig 2.6), pero conceptualmente diferentes. Sobre cada elemento puede aplicarse la fórmula de integración numérica, por tanto

$$B_i = \sum_{n_e} \left(\sum_{j=1}^k w_j (p u^*)_j \right) A_{n_e} \quad (2.50)$$

donde n_e = número de elementos, k = número de puntos de integración en cada elemento, w_j = función de peso y A_{n_e} = área de la celda o elemento.

Todo el conjunto de ecuaciones para los n nudos puede expresarse en forma matricial como

$$B + H U = G Q \quad (2.51)$$

Nótese que se conocen n_1 valores de u y n_2 valores de q en la frontera. Por tanto, la ec 2.51 puede reordenarse de forma que todas las ecuaciones estén del lado izquierdo, ésto es

$$A X = F \quad (2.52)$$

donde X es el vector de incógnitas de u y q .

Una vez que se conocen los valores de u y q en toda la frontera puede calcularse u en cualquier punto interior, ésto es

$$u^i = \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^n \hat{H}_{ij} u_j - B_i$$

Cuando se tengan flujos concentrados deberán transformarse en flujos equivalentes usando las funciones de forma correspondientes.

3. Problemas de elasticidad

3.1 Introducción

En este capítulo se aplica el método del elemento frontera a problemas de elasticidad lineal. Bajo ciertas limitaciones el comportamiento de sólidos puede considerarse como lineal. En general, los materiales tienen propiedades que son dependientes del tiempo y del estado de esfuerzo a que estén sometidos. Por ejemplo, ciertos materiales tienen el efecto de flujo plástico (creep) con el tiempo y otros presentan deformaciones plásticas bajo ciertas cargas. Además, ciertos cuerpos pueden agrietarse lo que provoca una redistribución de esfuerzos.

Aún en los casos en que las propiedades del material pueden considerarse lineales, las deformaciones del cuerpo pueden ser tales que su comportamiento no pueda aceptarse como lineal. Esto se conoce como la no linealidad en geometría e implica que la nueva configuración del cuerpo debe tomarse en cuenta (un problema clásico es el de los cables que forman catenarias).

Todos estos problemas pueden atacarse en un camino u otro usando elementos de frontera pero quedan fuera del alcance del presente trabajo. Se

discutirán únicamente sistemas elástico-lineales.

La teoría de la elasticidad lineal para un cuerpo sólido se basa en las siguientes hipótesis:

- 1) El comportamiento del material es lineal, esto es, se tienen relaciones lineales esfuerzo-deformación.
- 2) Se desprecia el cambio en la orientación de un cuerpo debido a los desplazamientos.

Esta hipótesis conduce a relaciones lineales desplazamiento-deformación y permite referir las relaciones de equilibrio a la geometría no deformada.

En lo que sigue, por conveniencia, se usa la notación índice y matricial y se aplican las mismas relaciones a cuerpos bi y tridimensionales.

3.2 Teoría de la elasticidad lineal

El estado de esfuerzos en un punto (fig 3.1) se define por medio del tensor esfuerzo (13) como

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde, si se acepta isotropía, se tiene que

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{23} \quad (3.2)$$

Estas componentes de esfuerzo deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio en todo el interior del cuerpo que en notación índice puede

escribirse como

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

Las fuerzas superficiales prescritas en la superficie Γ_2 del cuerpo se denotan por $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ (fig 3.1). El equilibrio en la frontera requiere que se cumplan las siguientes condiciones de esfuerzos de frontera (13)

$$p_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i \quad (3.4)$$

donde n_j son los cosenos directores de la normal hacia afuera con respecto a los x_j , esto es

$$n_1 = \cos(n, x_1), \quad n_2 = \cos(n, x_2), \quad n_3 = \cos(n, x_3)$$

El tensor de deformaciones en un punto sometido a un estado de esfuerzos (13) es

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

Si Γ_1 denota la porción de la frontera en la cual se prescriben los desplazamientos, entonces los desplazamientos prescritos son

$$u_j = \bar{u}_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (3.6)$$

Los valores de \bar{u}_j son prescritos. Nótese que la superficie total Γ del cuerpo es igual a $\Gamma_1 + \Gamma_2$.

El nexo entre el estado de esfuerzo y el de deformaciones para un cuerpo está dado por las relaciones esfuerzo-deformación las cuales dependen del comportamiento del material. Para un material elástico lineal se tiene

en forma matricial

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ \text{sim} & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

o bien $\epsilon = C \sigma$

donde c_{ij} son los coeficientes de flexibilidades.

Se puede expresar la ec 3.7 en forma transpuesta como

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ & & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ \text{sim} & & & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ & & & & d_{55} & d_{56} \\ & & & & & d_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

o bien $\sigma = D \epsilon$

donde d_{ij} son los coeficientes de rigidez.

Para un material elástico (tipo Green) hay 21 constantes del material (14). El número de constantes independientes se reduce cuando la estructura del material tiene uno o más planos de simetría. Si el material

tiene tres planos ortogonales de simetría se dice que es ortotrópico y el número de constantes independientes se reduce a 9 (15) entonces la ec 3.7 se reduce a

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

donde $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$ y $x_2 - x_3$ son los planos de simetría del material. Las relaciones inversas para obtener los esfuerzos son similares en forma a la ec 3.9.

Un material isótropo tiene únicamente dos constantes independientes, E y ν (15). La forma de la relación esfuerzo-deformación no varía, ya que es independiente de la selección del marco de referencia. Entonces la ec 3.8 se puede escribir como (13)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

donde E y ν son el módulo de Young y la relación de Poisson, respectivamente. Las relaciones inversas para las deformaciones son

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Las relaciones 3.10 y 3.11 pueden expresarse en términos de las constantes de Lamé (λ, μ), como (13)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda e_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \\ e_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde

$$\lambda = E\nu / (1+\nu)(1-2\nu)$$

$$\mu = E / 2(1+\nu) = G$$

$$e_{\alpha\alpha} = \delta_{ij} e_{ij}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \delta_{ij} \sigma_{ij}$$

δ_{ij} es la delta de Kronecker que se define como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Considérese ahora el problema de una placa alargada con deformación plana.

Sea un sólido prismático homogéneo como el mostrado en la fig 3.2. Las caras planas de la superficie se definen por $x_3 = \pm h/2$ y la superficie cilíndrica por $x_1 = x_1(\Gamma)$, $x_2 = x_2(\Gamma)$, donde Γ es la longitud de arco a lo largo de la curva de frontera. Si

- (1) el cuerpo es delgado (h es pequeña en comparación con las dimensiones representativas en las direcciones x_1 y x_2),
- (2) no hay fuerzas de superficie actuando en las caras planas ($p_1 = p_2 = p_3 = 0$, en $x_3 = \pm h/2$),
- (3) las fuerzas de cuerpo están en el plano y son independientes de x_3 ($b_3 = 0$ y b_1, b_2 son funciones únicamente de x_1 y x_2), y
- (4) las fuerzas que actúan en la frontera cilíndrica están en el plano y son independientes de x_3 ($p_3 = 0$ y p_1, p_2 son funciones únicamente de x_1 y x_2)

entonces es razonable suponer que $\sigma_{33}, \sigma_{31}, \sigma_{23}$ son pequeñas en comparación con $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ y la variación de todas estas cantidades es pequeña con respecto a x_3 . El esfuerzo plano o el problema de la placa alargada se basa en las suposiciones siguientes (14)

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$$

en todo el volumen y

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} \text{ son independientes de } x_3 \quad (3.13)$$

(Rigurosamente el requerimiento de que $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ sean independientes de x_3 , viola ciertas ecuaciones de compatibilidad pero es bastante razonable para placas delgadas).

Un planteamiento alternativo a la ec 3.13 es

$$u_1 = u_1(x_1, x_2) ; u_2 = u_2(x_1, x_2)$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \quad (3.14)$$

Se toma la ec 3.14 como las suposiciones básicas para placas alargadas. La ec 3.13 es aplicable a placas homogéneas. Para tratar una placa laminada se suponen u_1 y u_2 en todo el espesor y se desprecian los esfuerzos no planos. El esfuerzo plano varía de acuerdo con las propiedades del material.

El desplazamiento transversal u_3 no es independiente y puede obtenerse de la relación esfuerzo-deformación para ϵ_{33} :

$$\epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \text{función de } \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} \quad (3.15)$$

En la otra posibilidad, la "deformación plana", se supone que el desplazamiento u_3 es cero. Esto puede hacerse si

- (1) El espesor es grande en comparación con las dimensiones representativas en las direcciones x_1 y x_2 .
- (2) Las fuerzas de cuerpo y de superficie que actúan en la superficie cilíndrica son planas (no hay componente en x_3) e independiente de x_3 .

Es entonces razonable suponer que los desplazamientos en el plano de u_1 y u_2 son independientes de x_3 , y el desplazamiento u_3 fuera del plano es cero. El problema de la 'deformación plana' se basa en las siguientes suposiciones

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0 \quad (3.16)$$

La ec 3.16 corresponde específicamente a

$$\epsilon_{33} = \epsilon_{31} = \epsilon_{32} = 0$$

$$\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12} \text{ son independientes de } x_3 \quad (3.17)$$

Nótese que para deformación plana $\sigma_{33} \neq 0$. Se puede determinar σ_{33} de la relación esfuerzo-deformación para σ_{33} .

Las placas alargadas y la deformación plana son problemas bidimensionales en el sentido de que el desplazamiento y los parámetros de fuerza varían únicamente con respecto a x_1 y x_2 .

Se formula ahora la relación esfuerzo-deformación bidimensional para placas alargadas y deformación plana. Se parte de la relación tridimensional para el material elástico lineal, esto es

$$\epsilon = C \sigma \quad (3.18)$$

La ec 3.18 involucra 21 constantes c diferentes. Para el problema bidimensional el plano x_1-x_2 debe ser un plano de simetría de la estructura del material, es decir, la relación esfuerzo-deformación debe tener la misma forma cuando se invierte la dirección x_3 . Se puede mostrar que las relaciones apropiadas son (15)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Si cualquiera de los dos x_1 o x_2 es un eje de simetría, el material se llama ortotrópico. Para este caso

$$c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{56} = 0 \quad (3.20)$$

Simplificaciones adicionales pueden obtenerse introduciendo más restricciones, tales como propiedades iguales en dos direcciones ortotrópicas o en cualesquiera dos direcciones en un plano (plano ortotrópico). Para más detalles consultar la ref 15.

Las relaciones para esfuerzo plano se obtienen poniendo $\sigma_{33} = 0$ en la ec 3.19 y considerando únicamente las ecuaciones para $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}$, esto es

$$\epsilon = C \sigma \quad (3.21)$$

o

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{14} \\ c_{12} & c_{22} & c_{24} \\ c_{14} & c_{24} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Resolviendo para σ se tiene que

$$\sigma = C^{-1} \epsilon = D \epsilon \quad (3.23)$$

Para deformación plana se debe eliminar primero σ_{33} usando las condiciones

$$\epsilon_{33} = c_{13} \sigma_{11} + c_{23} \sigma_{22} + c_{33} \sigma_{33} + c_{34} \sigma_{12} = 0 \quad (3.24)$$

esto da

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{c_{33}} c_{13} \sigma_{11} + c_{23} \sigma_{22} + c_{34} \sigma_{12} \quad (3.25)$$

Sustituyendo σ_{33} en la ec 3.19 se obtiene

$$\epsilon = C' \sigma \quad (3.26)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} - (c_{13}^2/c_{33}) & c_{12} - (c_{13}c_{23}/c_{33}) & c_{14} - (c_{13}c_{34}/c_{33}) \\ c_{22} - (c_{23}^2/c_{33}) & \text{sim.} & c_{24} - (c_{23}c_{34}/c_{33}) \\ c_{44} - (c_{34}^2/c_{33}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Finalmente, se invierte la ec 3.27

$$\sigma = (C')^{-1} \epsilon = D' \epsilon \quad (3.28)$$

Se puede obtener la ec 3.28 invirtiendo primero la ec 3.19 y luego haciendo $\epsilon_{33} = 0$.

En general, D' se determina invirtiendo $C(C'$ para deformación plana). Cuando el material es ortotrópico y las direcciones simétricas del material coinciden con las direcciones de x_1 y x_2 , puede obtenerse fácilmente la forma explícita para D . En vez de usar la notación c_{ij} , como en la ec 3.19, se expresa la relación esfuerzo-deformación en términos de las constantes físicas, es decir, en términos de los módulos de corte y de elasticidad y de los coeficientes de Poisson, luego la ec 3.19 se puede escribir como (15)

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{E_{11}} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_{22}} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_{33}} \sigma_{33} \\ \epsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} \sigma_{11} + \frac{1}{E_{22}} \sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_{33}} \sigma_{33} \\ \epsilon_{33} &= -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} \sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_{22}} \sigma_{22} + \frac{1}{E_{33}} \sigma_{33} \\ 2\epsilon_{12} &= \frac{1}{G} \sigma_{12} \end{aligned} \quad (3.29)$$

En particular la ec 3.29 para esfuerzo plano ($\sigma_{33}=0$) conduce a

$$\sigma = D \epsilon \quad (3.30)$$

o bien

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-n\nu_{21}^2} & \frac{\nu_{21} E_{11}}{1-n\nu_{21}^2} & 0 \\ \frac{E_{11}}{n(1-n\nu_{21}^2)} & 0 & 0 \\ \text{sim} & & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

donde

$$n = \frac{E_{11}}{E_{22}}$$

Las relaciones para un material isotrópico están dadas por

$$E_{11} = E_{22} = E; \quad \nu_{21} = \nu; \quad G_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.32)$$

Para deformación plana se tiene que

$$\sigma_{33} = \nu_{31} \sigma_{11} + \nu_{32} \sigma_{22} \quad (3.33)$$

Las relaciones restantes en la ec 3.29 pueden escribirse como (8)

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{E'_{11}} \sigma_{11} - \frac{\nu'_{21}}{E'_{11}} \sigma_{22} \\ \epsilon_{22} &= -\frac{\nu'_{21}}{E'_{22}} \sigma_{22} + \frac{1}{E'_{22}} \sigma_{22} \\ 2\epsilon_{12} &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12} \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde

$$\begin{aligned}
 E'_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - (E_{11}/E_{22})v_{31}^2} \\
 E'_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - (E_{22}/E_{11})v_{32}^2} \\
 v'_{21} &= \frac{v_{21} + v_{31}v_{32}(E_{22}/E_{33})}{1 - v_{32}^2(E_{22}/E_{33})}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Puesto que las expresiones obtenidas tienen la misma forma que para el es fuerzo plano, se puede reemplazar E_{11}, E_{22}, v_{21} con $E'_{11}, E'_{22}, v'_{21}$ en la ec 3.31 obteniéndose D' . Nótese que ahora

$$n' = \frac{E'_{11}}{E'_{22}} = \frac{E_{11}}{E_{22}} \left[\frac{1 - (E_{22}/E_{33})v_{32}^2}{1 - (E_{11}/E_{33})v_{31}^2} \right] \tag{3.36}$$

Los coeficientes equivalentes para el caso isótropo son (8)

$$\begin{aligned}
 E'_{11} &= E'_{33} = E' = E / (1 - v^2) \\
 v'_{12} &= v' = v / (1 - v) \\
 G_{12} &= E / (2(1 + v))
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

En vista de que el esfuerzo y deformación planas difieren únicamente en los elementos de la rigidez, se tiene que desarrollar una formulación única. En lo que sigue, no se hará alguna distinción entre los dos problemas.

3.3 Relaciones básicas

El principio de los desplazamientos virtuales para problemas elástico-li

neales puede escribirse como (9)

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma \quad (3.38)$$

donde u_k^* son los desplazamientos virtuales que satisfacen las condiciones de frontera homogéneas $\bar{u}_k^* \equiv 0$ en Γ_1 . Si ahora se interpreta u_k^* como una función de peso que no satisface estas condiciones en Γ_1 la ec 3.38 puede escribirse como (9)

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (3.39)$$

donde $p_k^* = n_j \sigma_{jk}^*$ son las fuerzas de superficie correspondientes al sistema u_k^* . Supóngase que las relaciones deformación-desplazamiento son lineales, esto es

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.40)$$

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \quad (3.41)$$

y que las propiedades del material también son lineales.

En consecuencia se puede ahora integrar por partes la ec 3.39 obteniéndose

$$\int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{jk} \epsilon_{jk}^* d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (3.42)$$

Integrando por partes una vez más se tiene

$$\int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* u_k d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma \quad (3.43)$$

Se buscan ahora las soluciones fundamentales que satisfagan las ecuaciones de equilibrio, usualmente del tipo

$$\sigma_{jk}^* + \Delta_{\ell}^i = 0 \quad (3.44)$$

donde Δ_{ℓ}^i es la función delta de Dirac y representa una carga unitaria en i en la dirección ℓ . Este tipo de solución produce para cada dirección ' ℓ ' la siguiente ecuación

$$u_{\ell}^i + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma = \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega + \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma \quad (3.45)$$

donde u_{ℓ}^i representa el desplazamiento en i en la dirección ' ℓ '.

En general se puede escribir para el punto ' i '

$$u_{\ell}^i + \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega \quad (3.46)$$

donde $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Nótese que u_k^* y p_k^* son las soluciones fundamentales, esto es los desplazamientos y fuerzas de superficie debidas a una carga unitaria concentrada en el punto ' i ' en la dirección ' ℓ '. Si se considera que las fuerzas unitarias actúan en las tres direcciones, la ec 3.46 puede escribirse como

$$u_{\ell k}^i + \int_{\Gamma} u_k p_{\ell k}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_{\ell k}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{\ell k}^* d\Omega \quad (3.47)$$

donde $p_{\ell k}^*$ y $u_{\ell k}^*$ representan las fuerzas de superficie y desplazamientos en la dirección k debidas a la fuerza unitaria que actúa en la dirección ℓ . La ec 3.47 es válida para el punto particular ' i ' donde se aplican las fuerzas.

Por otra parte, la solución fundamental (3) para un cuerpo infinito tridimensional isótropo en donde actúa una carga puntual en su interior (problema de Kelvin), está dada por

$$u_{\ell k}^* = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{\ell k} + r_{,\ell} r_{,k} \right] \quad (3.48)$$

$$p_{\ell k}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu)\delta_{\ell k} + 3r_{,\ell} r_{,k} \right\} - (1-2\nu) \left\{ n_k r_{,\ell} - n_{\ell} r_{,k} \right\} \right]$$

donde n es normal a la superficie del cuerpo, $\delta_{\ell k}$ es la delta de Kronecker, r es la distancia del punto de aplicación de la carga al punto bajo consideración, $r_{,j} = \partial r / \partial x_j$ y n_j son los cosenos directores (fig 3.3).

Para el caso bidimensional isótropo de deformación plana la solución (10) está dada por

$$u_{\ell k}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{\ell k} + r_{,\ell} r_{,k} \right] \quad (3.49)$$

$$p_{\ell k}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu)\delta_{\ell k} + 2r_{,k}r_{,\ell} \right\} - (1-\nu) \left\{ n_k r_{,\ell} - n_{\ell} r_{,k} \right\} \right]$$

donde $(r, \ell) = r_{\ell}/r$ (fig 3.4).

A continuación se discuten los planteamientos para establecer la ecuación en la frontera.

Así como en el caso del problema de potencial, la ec 3.47 debe tomarse justamente en la frontera. Considérese que la frontera es suficientemente lisa y del tipo Γ_2 en el punto ' ℓ ' (de la misma manera se aplica para Γ_1). La primera integral en Γ_2 en la ec 3.47 puede escribirse en dos partes, esto es

$$\int_{\Gamma_2} u_k p_{\ell k}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_{(2-\epsilon)}} u_k p_{\ell k}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{\epsilon}} u_k p_{\ell k}^* d\Gamma \quad (3.50)$$

Si se considera la integral en Γ_{ϵ} cuando $\epsilon \rightarrow 0$ (fig 3.5) y por comodidad se llama I, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\epsilon}} u_k p_{\ell k}^* d\Gamma \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_{\epsilon}} u_{\ell} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu)\delta_{\ell k} + 3r_{,\ell}r_{,k} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1-2\nu) \left\{ n_k r_{,\ell} - n_{\ell} r_{,k} \right\} \right] \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \right\} d\Gamma \quad (3.51) \end{aligned}$$

Nótese que $\epsilon \equiv r$. Considérese la fig 3.4 donde se usa un sistema de coordenadas esféricas por comodidad. Para este caso particular el

segundo término en la ec 3.51 se anula, esto es

$$n_k r_{,\ell} - n_{\ell} r_{,k} = \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_{\ell}} - \frac{\partial r}{\partial x_{\ell}} \frac{\partial r}{\partial x_k} \equiv 0 \quad (3.52)$$

De ahí que únicamente se considere el primer término en la integral, que es

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_{\epsilon}} u_k \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \delta_{\ell k} + 3r_{,\ell} r_{,k} \right\} \frac{d\Gamma}{8\pi(1-2\nu)r^2} \right\} \quad (3.53)$$

Nótese que $\frac{\partial r}{\partial n} = 1$

Esto puede desarrollarse (9) tomando en cuenta las relaciones geométricas mostradas en la fig 3.4, por ejemplo cuando $\ell = 1$

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_{\epsilon}} \left[u_1^i (1-2\nu) + 3u_1^i e_{11} e_{11} + 3u_2^i e_{12} e_{12} + 3u_3^i e_{13} e_{13} \right] \frac{\text{sen}\theta \, d\theta \, d\phi}{8\pi(1-\nu)} \right\} \quad (3.54)$$

donde $e_{i\ell}$ son los vectores límite en la dirección $x_{i\ell}$ (fig 3.4) tal que

$$e_{i\ell} = n_{i\ell} = \frac{\partial r}{\partial x_{i\ell}} = \frac{r_{,i\ell}}{r}$$

Nótese que la integral es ahora independiente de 'r' y puede expresarse en términos de ϕ y θ únicamente, esto es

$$I = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ u_1^i (1-2\nu) + 3u_1^i \text{sen}^2\theta \cos^2\phi + 3u_2^i \text{sen}^2\theta \cos\phi \text{sen}\phi \right. \\ \left. + 3u_3^i \text{sen}\theta \cos\theta \cos\phi \right\} \frac{\text{sen}\theta \, d\theta \, d\phi}{8\pi(1-\nu)} \quad (3.55)$$

Después de integrar se encuentra que algunas de las integrales son cero (9) y el resultado final es

$$I = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) 2\pi + 2\pi u_1^i \right]$$

$$= -\frac{4(1-\nu)}{8(1-\nu)} u_1^i = -\frac{1}{2} u_1^i \quad (3.56)$$

El mismo resultado se obtiene cuando $\ell=2$ y $\ell=3$. Entonces este resultado puede escribirse como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} u_k p_{\ell k}^* d\Gamma \right\} = -\frac{u_\ell^i}{2} \quad (3.57)$$

La integral

$$\int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_{\ell k}^* d\Gamma$$

puede escribirse como

$$\int_{\Gamma_{(2-\epsilon)}} \bar{p}_k u_{\ell k}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} \bar{p}_k u_{\ell k}^* d\Gamma$$

pero puede mostrarse que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \bar{p}_k u_{\ell k}^* d\Gamma = 0$$

y por lo tanto esta integral no introduce ningún término nuevo.

Un resultado similar se obtiene para la parte Γ_1 de la frontera. De ahí que cuando el punto 'i' se convierte en un punto frontera de una frontera suficientemente lisa, se puede escribir (9) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i^i + \int_{\Gamma_2} u_k p_{\ell k}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_{\ell k}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} p_k u_{\ell k}^* d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_{\ell k}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{\ell k}^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.58)$$

Para el caso de fronteras no suficientemente lisas el cálculo de la integral en Γ_e es más difícil y se obtiene un resultado diferente a $-1/2$. Afortunadamente, el cálculo explícito de este valor no es necesario pero puede obtenerse usando el movimiento de cuerpo rígido.

En general, para un punto en una frontera no suave se tiene un coeficiente c^i tal que la ec 3.33 puede escribirse como

$$c^i u_i^i + \int_{\Gamma} u_k p_{\ell k}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_{\ell k}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{\ell k}^* d\Omega \quad (3.59)$$

3.4 Elementos de frontera

Es más conveniente trabajar ahora con matrices que con la notación índice. Se puede definir lo siguiente:

Sean

$$u^i = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \text{Vector de desplazamiento del punto 'i' con componentes en las direcciones } x_1, x_2, x_3$$

u , vector de desplazamiento en cualquier punto de la frontera Γ .

$$p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}, \text{ vector de fuerzas de superficie en cualquier punto de la frontera } \Gamma.$$

$$b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}, \text{ vector de fuerzas de cuerpo en cualquier punto del dominio } \Omega$$

$$p^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix}, \text{ matriz cuyos coeficientes } p_{\ell k}^* \text{ son las fuerzas en la direcci3n 'k' debidas a la fuerza unitaria en 'i' que act3a en la direcci3n 'l'}$$

$$u^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix}, \text{ matriz cuyos coeficientes } u_{\ell k}^* \text{ son los desplazamientos en la direcci3n 'k' debidos a la fuerza unitaria en 'i' que act3a en la direcci3n 'l'}$$

La ec 3.59 puede expresarse ahora en forma matricial como sigue:

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma + \int_{\Omega} u^* b d\Omega \quad (3.60)$$

Supóngase que la frontera se divide en elementos (fig 3.6) y que las funciones u y p pueden aproximarse en cada elemento ' j ' usando las siguientes funciones (8, 9) de interpolación

$$u = \phi^T u_j = \begin{bmatrix} \phi^T & & \\ & \phi^T & \\ & & \phi^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

$$p = \phi^T p_j = \begin{bmatrix} \phi^T & & \\ & \phi^T & \\ & & \phi^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_j \end{Bmatrix}$$

donde u_j y p_j son los elementos nodales. Nótese que se han supuesto las mismas funciones para u y p . En general, podrían no ser las mismas y para ser más consistentes podrían haberse tomado las funciones para p de un orden menor que para las de u .

Las funciones ϕ pueden considerarse como las funciones estándar bidimensionales para elementos finitos, donde u_j y p_j son los desplazamientos y fuerzas de superficie nodales, respectivamente en el elemento. Estos son los valores que deben determinarse con la solución.

Las funciones pueden sustituirse en la ec 3.60, con lo que se obtiene (8, 9) para un punto nodal particular que

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* \phi^T d\Gamma \right\} u_j = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \phi^T d\Gamma \right\} p_j + \sum_{s=1}^m \left\{ \int_{\Omega_s} u^* b d\Omega \right\} \quad (3.62)$$

donde Σ indica que la suma se hace desde $j=1$ hasta n , sobre los n elementos de la superficie y Γ_j es la superficie del elemento ' j ', u_j y p_j son los desplazamientos y fuerzas de superficie nodales en el elemento ' j '.

Nótese que también se ha considerado que el dominio se divide en m elementos internos sobre los cuales tienen que calcularse las integrales correspondientes a las fuerzas de cuerpo. Estos no son elementos finitos sino regiones simples donde se realiza la integración (usualmente numérica). Una vez que se hace esto, el problema se reduce a un problema de frontera.

Las integrales generalmente se resuelven numéricamente y las funciones Φ se expresan en algún sistema homogéneo de coordenadas tal como el sistema ξ_i de la fig 3.7. Es necesario transformar las coordenadas del sistema ξ_i al sistema global x_i . Esto se hace a continuación.

Si se transforma del sistema x_i (fig 3.7) al ξ_i , para cualquier función u que sea continua y tenga primera derivada parcial continua (13) se tiene que

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} & \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{Bmatrix}$$

donde J es el Jacobiano de la transformación.

La relación inversa es

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Una diferencial de volumen puede escribirse como

$$\begin{aligned} d(\text{Volumen}) &= d\Omega = \text{Magnitud de } \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_2} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \right) d\xi_1 d\xi_2 d\eta \\ &= |J| d\xi_1 d\xi_2 d\eta \end{aligned}$$

Una diferencial de área ($\eta=0$ en la fig 3.7) está dada por

$$d(\text{Area}) = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |G| d\xi_1 d\xi_2$$

donde

$$|G| = (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)^{1/2}$$

$$g_1 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right), \quad g_2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right)$$

$$g_3 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right)$$

Nótese que x_1, x_2, x_3 pueden definirse usando funciones de interpolación y valores nodales de la misma forma (8) como fueron definidos los desplazamientos y fuerzas de superficie (ec 3.61).

Aplicando la integración numérica (véase el apéndice A) la ec 3.62 se transforma (9) en

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} |G| \omega_k (p^* \phi^T)_k \right\} u_j = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} |G| \omega_k (u^* \phi^T)_k \right\} p_j + \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^n |J| \omega_p (u^* b)_p \right\} \quad (3.63)$$

donde ℓ = número de puntos de integración, ω = peso de los puntos de integración, $(p^* \phi^T)_k$, $(u^* \phi^T)_k$ y $(u^* b)_p$ son los valores de las funciones en los puntos de integración.

La ec 3.63 corresponde al nudo particular ' i '. El término integración numérica relaciona al nudo ' i ' con los nudos del elemento ' j ' sobre el cual se realiza la integración. A la integral del lado izquierdo se le llama \hat{H}_{ij} y a la del lado derecho G_{ij} .

Las contribuciones de H y G pueden ensamblarse en una matriz global tal que

$$C U + \hat{H} U = G P + B \quad (3.64)$$

o bien

$$H U = G P + B \quad (3.65)$$

donde $H = C + \hat{H}$, y C es una matriz diagonal, que no necesita ser determinada explícitamente. U son los desplazamientos y P los valores que las fuerzas de superficie distribuidas toman en los nudos de frontera.

Los coeficientes de la diagonal de la matriz H pueden obtenerse aplicando las condiciones de cuerpo rígido. Si se suponen desplazamientos unitarios de cuerpo rígido en todas direcciones (8), la ec 3.65 queda

$$H I = 0 \quad (3.66)$$

donde I es un vector unitario. De aquí que los términos de la diagonal de H sean simplemente

$$h_{ii} = - \sum_{i \neq j} h_{ij} \quad (3.67)$$

Después de aplicar las condiciones de frontera el sistema puede reordenarse de la siguiente manera

$$A X = F \quad (3.68)$$

donde X contiene los desplazamientos y fuerzas de superficie desconocidas.

Una vez que se conocen u y p en la frontera se pueden calcular los valores de los desplazamientos y esfuerzos en puntos internos. Los desplazamientos en un punto $(8, 9)$ están dados por

$$u^i = \int_{\Gamma} u^* p \, d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma + \int_{\Omega} b \, u^* \, d\Omega \quad (3.69)$$

o para la componente en ' ℓ '

$$u_{\ell}^i = \int_{\Gamma} u_{\ell k}^* p_k \, d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{\ell k}^* u_k \, d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{\ell k}^* \, d\Omega \quad (3.70)$$

Para un medio isótropo los esfuerzos (3) pueden calcularse diferenciando u en los puntos internos, esto es

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_{\ell}}{\partial x_{\ell}} + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.71)$$

Después de realizar la diferenciación se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l} + G \left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} p_k \, d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \left\{ \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l} + G \left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} b_k \, d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial p_{lk}^*}{\partial x_l} + G \left(\frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} u_k \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.72)$$

Todas estas derivadas se toman en los puntos internos. Tomando en cuenta la forma en que se calculan las derivadas de r (fig 3.8) esta expresión (8) puede reducirse a

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k \, d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k \, d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij} b_k \, d\Omega \quad (3.73)$$

donde las componentes de los tensores de tercer orden D_{kij} y S_{kij} (3.8) son

$$D_{kij} = \frac{1}{r^\alpha} \left\{ (1-2\nu) \left\{ \delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k} \right\} + \beta r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} S_{kij} = & \frac{2u}{r^\beta} \left\{ \beta \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) \right. \right. \\ & \left. \left. - \gamma r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + \beta\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) \right. \\ & \left. + (1-2\nu) (\beta n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)} \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde $r_{,i} = \partial r / \partial x_i$

Las derivadas se toman en la frontera (fig 3.8)

Las ecs 3.74 y 3.75 se aplican a problemas bi y tridimensionales, esto es

(1) Para dos dimensiones, $\alpha=1$; $\beta=2$; $\gamma=4$

(2) Para tres dimensiones, $\alpha=2$; $\beta=3$; $\gamma=5$

Se aplica ahora el método del elemento frontera a la elasticidad bidimensional. Las relaciones y ecuaciones gobernantes se han expuesto anteriormente, así como la solución fundamental para un cuerpo isótropo.

Se parte de la ec 3.59, esto es

$$c^i u_{\ell}^i + \int_{\Gamma} u_k p_{\ell k}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_{\ell k}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} b_k u_{\ell k}^* d\Omega$$

donde se supone que la solución fundamental satisface la ecuación siguiente

$$\sigma_{jk,j}^* + \Delta^i = 0 \quad (3.76)$$

La ec 3.76 se aplica para un punto en la frontera y si $c=1$ se aplica para un punto interno.

La solución fundamental para un material isótropo se ha mostrado anteriormente (ec 3.49), la que se repite por comodidad

$$u_{\ell k}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{\ell k} + r_{,\ell} r_{,k} \right]$$

$$p_{\ell k}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \delta_{k\ell} + 2r_{,k} r_{,\ell} \right\} - (1-2\nu) (n_k r_{,\ell} - n_\ell r_{,k}) \right]$$

donde $p_{\ell k}^*$ y $u_{\ell k}^*$ representan la fuerza de superficie y desplazamiento en la dirección k debido a una fuerza unitaria que actúa en la dirección ℓ respectivamente.

En forma matricial u^* es una matriz de 2×2 con elementos $u_{\ell k}^*$ y p^* es también una matriz de 2×2 con elementos $p_{\ell k}^*$, esto es

$$p^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} ; \quad u^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos, fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo conocidas son

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} ; \quad p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} ; \quad b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

Entonces la ecuación básica de frontera puede escribirse como

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p \, d\Gamma + \int_{\Omega} u^* b \, d\Omega \quad (3.77)$$

Considérese ahora el caso de elementos constantes (fig 3.9) cada uno de los cuales tiene un nudo medio. Se supone que los valores de p y u son constantes en cada elemento e iguales a los valores del nudo medio del elemento. Luego la ec 3.77 queda

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* d\Gamma \right\} u_j = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right\} p_j + \int_{\Omega} u^* b d\Omega \quad (3.78)$$

donde u_j y p_j son los desplazamientos y fuerzas de superficie nodales en el elemento ' j '. Nótese que es conveniente definir elementos o celdas internas para la integración de fuerzas de cuerpo. Estas celdas se usan para la integración numérica de las fuerzas de cuerpo y no deben confundirse con elementos finitos.

Si hay m celdas se puede escribir (8, 9) que

$$\int_{\Omega} u^* b d\Omega = \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{\ell} (u^* b)_p \omega_p \right\} A_s = b^i$$

donde ω_p son los coeficientes de peso para la integración numérica y A_s es el área de cada elemento bajo consideración. El cálculo de los términos fuerzas de cuerpo produce un vector b .

La ec 3.78 corresponde a un nudo particular ' i '. Los términos

$$\int_{\Gamma_j} p^* d\Gamma \quad \text{y} \quad \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma$$

relacionan al nudo ' i ' con el segmento ' j ' sobre el cual se realiza la integración. Si se llama a estas integrales \hat{H}_{ij} y G_{ij} se tienen matrices de 2×2 . En consecuencia se tiene que

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^n \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} p_j + b^i \quad (3.79)$$

Esta ecuación relaciona el valor de u en el nudo medio ' i ' con los valores de u y p en todos los nudos en la frontera, incluyendo el ' i '.

La ec 3.79 puede escribirse para cada nudo ' i ' obteniendo $2 \times n$ ecuaciones, donde n es el número total de nudos. Si se llama ahora a

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij}, \quad \text{cuando } i \neq j$$

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} + c^i, \quad \text{cuando } i = j$$

donde c^i es una matriz de coeficientes que depende de la geometría (8) de la frontera, esto es

$$c^i = \begin{bmatrix} c^i & 0 \\ 0 & c^i \end{bmatrix}$$

con $c^i = 1/2$ para fronteras suficientemente lisas.

Por lo tanto la ec 3.79 puede escribirse como

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} p_j + b^i$$

El conjunto de ecuaciones para los n nudos puede expresarse en forma matricial como

$$H U = G P + B \quad (3.80)$$

Nótese que se conocen n_1 valores de desplazamientos y n_2 valores de fuerzas de superficie ($2n = n_1 + n_2$), de aquí que se tenga un conjunto de $2n$

incógnitas en la ec 3.80. Reordenando las ecuaciones de la misma forma que para problemas de potencial, esto es, poniendo las incógnitas del lado izquierdo en el vector X , se obtiene

$$A X = F + B \quad (3.81)$$

Una vez que se conocen los valores de desplazamientos y fuerzas de superficie en la frontera pueden calcularse los desplazamientos y esfuerzos en cualquier punto interior (8, 9) de la siguiente manera

$$u^i = \int_{\Gamma} u^* p \, d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma + \int_{\Omega} u^* b \, d\Omega$$

$$u^i = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_k} u^* \, d\Gamma \right\} p_k - \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_k} p^* \, d\Gamma \right\} u_k + \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{\ell} (u^* b)_k \omega_k \right\} A_s$$

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{ij} p \, d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ij} u \, d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ij} b \, d\Omega \quad (3.82)$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_k} D_{ij} \, d\Gamma \right\} p_k - \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_k} S_{ij} \, d\Gamma \right\} u_k + \sum_{s=1}^m \left\{ \int_{\Omega_s} D_{ij} \, d\Omega \right\} b_s \quad (3.83)$$

donde

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} D_{1ij} & D_{2ij} \end{bmatrix} ; \quad p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{1ij} & S_{2ij} \end{bmatrix} ; \quad u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Los valores de D y S están dados por las ecs 3.74 y 3.75 respectivamente para el caso bidimensional.

Las integrales para H_{ij} y G_{ij} se pueden calcular para cualquier punto usando la fórmula de Cuadratura de Gauss de 4 puntos, excepto para el punto bajo consideración ($i=j$). Los valores de H_{ii} pueden calcularse usando las condiciones de cuerpo rígido pero no así los de G_{ii} que necesitan calcularse usando una fórmula logarítmicamente ponderada para la integración numérica (Apéndice A).

Aunque la integración numérica generalmente es más conveniente no es difícil calcular analíticamente G_{ii} para el caso bidimensional isótropo. Los elementos de G_{ii} son

$$G_{ii} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

Con las definiciones mostradas en las figuras 3.10 y 3.11 los elementos de G_{ii} (excluyendo el valor principal) (8) son

$$G_{11} = \left[\begin{array}{cc} \int_{(1)}^{(2)} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma & \int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 d\Gamma \\ (1) & (1) \end{array} \right] \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\begin{array}{ccc} \int_{\epsilon}^R \ln\frac{1}{r} dr & \int_{\epsilon}^R \cos^2\theta dr & \int_{\epsilon}^R \cos^2\theta dr \\ (1) & (1) & (1) \end{array} \right] \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[2(3-4\nu) \left\{ r \ln\left(\frac{1}{r}\right) \Big|_{\epsilon}^R + r \Big|_{\epsilon}^R \right\} + 2R \cos^2\theta \right] \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}$$

$$= \frac{2R}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu)(1 - \ln R) + \frac{(r_1)^2}{4R^2} \right]$$

$$G_{12} = \left[\int_{(1)}^{(2)} \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} d\Gamma \right] \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^R \sin\theta \cos\theta dr + \int_0^R \sin\theta \cos\theta dr \right] \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}$$

$$= \left[2R \sin\theta \cos\theta \right] \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} = \left[2R \frac{r_1 r_2}{4R^2} \right] \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} = G_{21}$$

$$G_{22} = \left[(3-4\nu) \int_{(1)}^{(2)} \ln \frac{1}{r} d\Gamma + \int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 d\Gamma \right] \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}$$

$$= \left[2(3-4\nu) R (1 - \ln R) + 2R \sin^2\theta \right] \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}$$

$$= \left[(3 - 4\nu) (1 - \ln R) + \frac{(r_2)^2}{4 R^2} \right] \frac{2 R}{8\pi G(1 - \nu)}$$

Las definiciones de r_1 y r_2 se dan en la fig 3.10.

4. Aplicaciones

En este capítulo se presenta la aplicación del método de integración de elementos de frontera (MIEF) a problemas de potencial y de elasticidad en el plano.

Para la solución de problemas de potencial isótropos se emplean elementos constantes (u y q , que representan el potencial y la derivada del potencial respectivamente, son constantes en todo el elemento) y elementos lineales (u y q varían linealmente en el elemento). Se muestra además, la aplicación del MIEF a la solución de problemas de potencial isótropos con más de una superficie. Por otra parte, para la solución de problemas de elasticidad isótropos y linealmente elásticos en ausencia de fuerzas de cuerpo, se emplean elementos constantes. Los programas de computadora que se utilizan y su organización se dan en los Apéndices B y C.

Para algunos problemas se compara la solución analítica con la numérica obtenida con el método mencionado.

4.1 Solución de problemas de potencial isótropos

Se muestra la aplicación del MIEF a la solución de dos problemas de potencial isótropos. Estos problemas se resuelven empleando los programas de computadora SPPBEC y SPPBEL (Apéndice B).

4.1.1 Ejemplo de flujo de calor

Para ilustrar la aplicación del método de integración de elementos de frontera, considérese el ejemplo siguiente de flujo de calor para el dominio mostrado en la fig 4.1. Se aplica primero el programa SPPBEC. El número de elementos de frontera es 12 y el número de puntos internos donde se calculará la función es 5.

Los datos que se requieren se dan en la Tabla 1.

Los resultados del problema al aplicar el programa SPPBEC se muestran en la Tabla 2 y en la fig 4.2(a).

Los resultados que se obtienen para este problema de potencial simple con elementos constantes son razonables y están de acuerdo con la solución trivial tanto en la frontera como en el dominio interior.

El problema del flujo de calor se estudia ahora empleando el programa SPPBEL que utiliza elementos lineales. Se espera que al aplicar este programa se obtengan mejores resultados.

Para este caso, en el que se utilizan elementos lineales, desafortunadamente en los problemas con esquinas se presentan dificultades, debido principalmente a que se tienen dos valores para la derivada normal $\partial u / \partial n$ que dependen del lugar bajo consideración. En efecto, en estos puntos se necesita seleccionar cuál de las dos variables, el potencial u o su derivada $\partial u / \partial n$, debe prescribirse.

Dado que el valor de la derivada del potencial $\partial u/\partial n$ no puede definirse en forma única, generalmente se prescribe el potencial u .

Los datos que se requieren son los mismos que para el caso del programa SPPBEC, excepto para las condiciones de frontera. Estos datos se dan en la Tabla 3.

Los resultados del problema al aplicar el programa SPPBEL se muestran en la Tabla 4 y en la fig 4.2(b).

Los resultados que se obtienen al usar el programa SPPBEL son de mayor aproximación que los obtenidos al emplear el programa SPPBEC. Sin embargo, debido a la dificultad de trabajar problemas con esquinas, se obtienen resultados incorrectos en el valor de la derivada del potencial $\partial u/\partial n$ en las esquinas (fig 4.2(b)). Este problema no se tiene en el método de elementos finitos debido a la forma como se prescriben las condiciones naturales de frontera y por el hecho de que la solución también se aproxima en el dominio del problema (8), esto es, los errores tienden a distribuirse.

Una forma sencilla de evitar el problema con esquinas, es suponer que hay dos puntos muy cerca uno del otro que pertenecen a diferentes lugares (fig 4.2(c)). Esta solución empírica proporciona mejores resultados tal como se muestra en la Tabla 5 y en la fig 4.2(c). En efecto, en un punto que está en la esquina se prescribe el valor del potencial u y en el otro el valor de su derivada $\partial u/\partial n$.

Por otra parte, el problema de flujo de calor ha sido estudiado por Alarcón y Domínguez (6). Emplean el MIEF con elementos isoparamétricos. En la Tabla 6 se comparan los resultados obtenidos empleando elementos isoparamétricos con los aquí obtenidos.

Puede observarse que los resultados obtenidos empleando elementos de frontera isoparamétricos son de mayor aproximación pero muy similares a los encontrados con el programa SPPBEL con elementos lineales con dos nudos

en las esquinas. Para el caso de puntos internos los resultados son prácticamente iguales. Se muestran, además, los resultados obtenidos con la solución analítica.

4.1.2 Problemas con más de una superficie. Ejemplo de flujo de calor entre dos círculos concéntricos

Se muestra aquí la aplicación del MIEF a la solución de problemas potenciales isótropos con más de una superficie. Se emplea el programa de computadora SPPBSD (Apéndice C) con elementos constantes.

Se aplica el programa SPPBSD a la solución del ejemplo de flujo de calor para el dominio mostrado en la fig 4.3. El número de elementos de frontera es 16 y el número de puntos internos donde se calculará la función es 6.

Los resultados se muestran en la Tabla 7.

4.1.3 Flujo laminar alrededor de un cilindro entre dos placas

Se presenta la aplicación de los programas de computadora SPPBEC y SPPBEL a la solución del problema de flujo laminar alrededor de un cilindro entre dos placas (fig 4.4).

La función u representa las líneas de flujo y su derivada $\partial u / \partial n$ representan las velocidades a lo largo de la frontera. Los valores de las líneas de flujo y su derivada se muestran en la fig 4.4.

Debido a la simetría se necesita definir únicamente un cuarto del dominio.

Para el caso del programa SPPBEC el número de elementos de frontera es 32 y el número de puntos internos donde se calculará la función es 6. En la fig 4.5(a) se muestran los valores prescritos de u y $\partial u / \partial n$ en toda la

frontera.

Los resultados que se obtienen para u y $\partial u/\partial n$ se muestran en la fig 4.5(b) y en la Tabla 8. Se observa que la forma de variación de la velocidad $\partial u/\partial n$ es como se esperaba.

Al aplicar el programa SPPBEL se obtienen mejores resultados para las funciones u y $\partial u/\partial n$ en toda la frontera pero hay una distorsión en el valor de $\partial u/\partial n$ cerca de aquellas esquinas en las que pueden tomarse dos valores muy diferentes de la derivada normal, que dependen del lugar bajo consideración.

Los datos que se requieren son los mismos que para el programa SPPBEC, excepto en que se prescribe el valor del potencial u en el nudo o elemento de frontera número 12.

Los resultados que se obtienen se muestran en la fig 4.6 y en la Tabla 9.

Puede evitarse la distorsión del valor de la derivada normal al emplear el programa SPPBEL con elementos binodales. En efecto, esto se evita al prescribir los valores de $\partial u/\partial n$ en los nudos 32 y 37 por ejemplo, mientras que el valor de la función u se da en los nudos 1 y 31. Los resultados para u y $\partial u/\partial n$ se muestran en la fig 4.7 y en la Tabla 10. Los valores de u en el dominio concuerdan con los resultados obtenidos al emplear el método del elemento finito y el método de colocación de celdas (coordenadas curvilíneas en diferencias finitas) (7,22). En la Tabla 11 se comparan los valores de u en algunos puntos internos obtenidos con los programas SPPBEC y SPPBEL y los obtenidos con los métodos del elemento finito y de colocación de celdas. Los valores obtenidos para $\partial u/\partial n$ en la frontera al emplear elementos finitos (7) no son satisfactorios (fig 4.8), mientras que las soluciones obtenidas al emplear los programas SPPBEC y SPPBEL representan una buena configuración del flujo. Además, se han obtenido otras soluciones para este problema (6,23). En la Tabla 12 se comparan los valores de u y $\partial u/\partial n$ en algunos puntos de la frontera, obtenidos con varios métodos.

4.2 Solución de problemas de elasticidad isótropos

Se muestra la aplicación del método de integración de elementos de frontera a la solución de dos problemas de elasticidad isótropos y linealmente elásticos en ausencia de fuerzas de cuerpo. Estos problemas se resuelven empleando el programa de computadora SPEBEC (Apéndice B).

4.2.1 Cavidad circular bajo presión interna

Se aplica el programa SPEBEC a la solución del problema de una cavidad circular bajo presión uniforme interna en un medio infinito para el dominio mostrado en la fig 4.9. La frontera se divide en 24 elementos constantes e igual número de nudos y el número de puntos internos donde se calcularán los esfuerzos y desplazamientos es 10.

Para evitar el movimiento de cuerpo rígido se prescriben algunas componentes de los desplazamientos iguales a cero; en la dirección X para los nudos 12 y 24, y en la dirección Y para el nudo 18.

En la Tabla 13 puede observarse la simetría de resultados. Como se esperaba, los desplazamientos y esfuerzos tienden a disminuir al aumentar la distancia desde la cavidad. Los esfuerzos radiales y tangenciales en los puntos internos tienen el mismo valor absoluto pero de diferente signo, lo cual es correcto. Asimismo, en la Tabla 14 se comparan los resultados obtenidos con la solución del elemento de frontera con los de la solución teórica. Puede verse que la solución obtenida con el programa SPEBEC es satisfactoria. La solución teórica fue obtenida por Muskhelishvili y Sokolnikoff (16,17) y está dada por

$$u_r = \frac{pR^2}{2\mu r}$$

$$u_\theta = 0$$

$$\sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta} = -\frac{PR^2}{r^2}$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

donde u representa los desplazamientos y σ los esfuerzos.

4.2.2 Pilote sujeto a carga axial en un semiespacio elástico

Para estudiar el comportamiento de un pilote alojado en un semiespacio elástico se hacen las hipótesis de que el suelo y el pilote son elásticos, isótropos y homogéneos; el pilote tiene perfecta adherencia con el suelo; la capa elástica del suelo está apoyada en una capa rígida la cual se considera matemáticamente como suave y la base del pilote se considera lisa.

Para formular el problema, considérese un pilote cilíndrico de longitud L y radio ' a ' dentro de un semiespacio elástico e isótropo, definido por las constantes E y G , siendo E el módulo de elasticidad y G el módulo de rigidez al cortante. Se ha encontrado (25) que los desplazamientos verticales y radiales, totales, están dados por

$$\begin{aligned}
 W(r, z) = & \int_0^L \int_0^{2\pi} a \phi_S KW_1(c, r_1, z) d\theta dc + \\
 & + \int_0^b \int_0^{2\pi} \epsilon \phi_D KW_2(L, r_2, z) d\theta d\epsilon + \\
 & + \int_0^L \int_0^{2\pi} a \phi_r KW_3(c, r, z) d\theta dc \\
 U(r, z) = & \int_0^L \int_0^{2\pi} a \phi_S KU_1(c, r_1, z) \cos\alpha d\theta dc +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^b \int_0^{2\pi} \epsilon \phi_b KU_2(L, r_2, z) \cos \alpha_2 d\theta d\epsilon + \\
 & + \int_0^L \int_0^{2\pi} a \phi_r KU_3(c, r, z) d\theta dc
 \end{aligned}$$

donde

ϕ_s es la intensidad de esfuerzos en el pilote a una profundidad c (fig 4.10)

ϕ_b es el esfuerzo resultante vertical en la base del pilote y actúa en el punto $O'(\epsilon, \theta, L)$ (fig 4.11)

ϕ_r es el esfuerzo ficticio radial que se aplica al pilote

$KW_1(c, r_1, z)$, $KW_2(L, r_2, z)$, $KW_3(c, r, z)$, $KU_1(c, r, z)$, $KU_2(L, r_2, z)$ y $KU_3(c, r, z)$ se obtienen de la solución de Mindlin

Las ecuaciones anteriores son válidas en cualquier parte del semiespacio y satisfacen las condiciones de frontera

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0 & \quad \text{en } B(r, 0) \\
 \sigma_{rz} = 0, & \quad \text{para } 0 < r < b, \text{ en } B(r, L)
 \end{aligned}$$

Para obtener la solución del problema, considérese que el punto $B(r, z)$ se encuentra en la interfase pilote-suelo. Además, se supondrá que el pilote se divide en n segmentos de espesor G_1 y la base en m anillos de radio G_2 , luego los desplazamientos verticales y radiales para cualquier elemento i en el pilote, se pueden obtener de la siguiente forma al linealizar las ecuaciones anteriores (25)

$$(W_s)_i = \sum_{j=1}^n (\phi_s)_j (KSS)_{ij} + \sum_{j=1}^n (\phi_r)_j (KRS)_{ij} + \sum_{j=1}^m (\phi_b)_j (KBS)_{ij}$$

con $i=1, 2, \dots, n$

$$(U_s)_i = \sum_{j=1}^n (\phi_s)_j (KSU)_{ij} + \sum_{j=1}^n (\phi_r)_j (KRU)_{ij} + \sum_{j=1}^m (\phi_b)_j (KBU)_{ij}$$

con $i=1, 2, \dots, n$

Por otra parte, el desplazamiento en la base está dado por

$$(W_b)_{\iota} = \sum_{j=1}^n (\phi_s)_j (KSB)_{\iota j} + \sum_{j=1}^n (\phi_r)_j (KRB)_{\iota j} + \sum_{j=1}^m (\phi_b)_j (KBB)_{\iota j}$$

Las integrales involucradas en estas ecuaciones son integrales propias, excepto para los casos en que $\iota=j$, que pueden evaluarse con cualquier método numérico.

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} W_s \\ U_s \\ W_b \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} \phi_s \\ \phi_r \\ \phi_b \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

donde

$$K = \begin{bmatrix} KSS & KRS & KBS \\ KSU & KRU & KBU \\ KSB & KRB & KBB \end{bmatrix}$$

La ec 4.1 representa un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que se puede resolver para las incógnitas ϕ_s , ϕ_r y ϕ_b si se conocen los desplazamientos W_s , U_s y W_b en el dominio del pilote. Para un pilote rígido, los desplazamientos verticales en el cuerpo del mismo y en su base son iguales a los que se tienen en la parte superior (cabeza); en este caso el desplazamiento radial es nulo. Entonces si se aplica un desplazamiento vertical unitario en la cabeza del pilote se tiene

$$W_s = 1, U_s = 0 \text{ y } W_b = 1 \quad (4.2)$$

Al sustituir estas condiciones en la ec 4.1 y resolver el sistema de ecuaciones lineales resultantes se conocerán los esfuerzos en la interfase pilote-suelo, con los que se podrán obtener los desplazamientos y esfuerzos en cualquier parte del suelo. En particular, los esfuerzos que actúan en la interfase pilote-suelo se obtienen al calcular los esfuerzos en $B(r,z)$ cuando se aproxima a la interfase. Así mismo, la carga P_z soportada por el pilote a cualquier profundidad se obtiene (25) con la ecuación

$$P_z = \int_L^z 2\pi a \phi_s dc + \int_0^b 2\pi c \phi_b d\epsilon \quad (4.3)$$

La carga requerida para producir un desplazamiento unitario se obtiene al sustituir en la ecuación anterior el valor $z=0$.

Cuando se aplican las condiciones dadas por la ec 4.2 a pilotes compresibles se obtiene una subestimación de los desplazamientos en la cabeza del pilote (25). En esos casos se recomienda hacer las siguientes consideraciones: el pilote está perfectamente adherido al medio y el desplazamiento vertical a la profundidad z diferirá de aquel que se tiene a la profundidad $(z+dz)$ por una cantidad igual a la deformación elástica del pilote en la longitud dz (fig 4.12). Debido a que el esfuerzo vertical es mayor que los otros esfuerzos, el problema se puede representar con buena aproximación de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{P_z}{A_p E_p}$$

$$u = -\nu_p a \frac{\partial w}{\partial z}$$

donde A_p = área de la sección transversal del pilote; E_p = módulo de elasticidad del pilote y ν_p = relación de Poisson para el pilote.

En las figs 4.13 a 4.16 se presentan los resultados del análisis elástico para un pilote cargado axialmente cuando se tiene relación de longitud a diámetro del pilote L/d igual a 10 y relación de Poisson del suelo $\nu=0.5$. Se encontró que el análisis riguroso da resultados muy parecidos a los obtenidos con un análisis aproximado (cuando se desprecia el desplazamiento radial). En la fig 4.13 se muestra que el desplazamiento radial $u(r,z)$ es del orden de 6×10^{-3} veces el desplazamiento en la cabeza del pilote, w_0 , tanto en la parte superior $z/L=0$ como en la inferior $z/L=1$. Con el análisis riguroso para pilotes rígidos estos desplazamientos son nulos.

En la fig 4.14 se presenta la variación del esfuerzo cortante para pilote rígido. Se ha hecho un dibujo adimensional en términos de $\tau/(P/\pi dL)$ donde τ es el esfuerzo cortante en la interfase pilote-suelo. La distribución de esfuerzos cortantes calculada con ambos análisis es idéntica en la parte inferior pero difiere para la parte superior de la interfase.

En la fig 4.15 se presentan los esfuerzos radiales obtenidos con ambos métodos. La magnitud de estos esfuerzos es del orden de la mitad de los es-

fuerzas cortantes en los extremos del pilote y de $1/5$ en la parte media (los esfuerzos de compresión se indican con un signo negativo).

En la fig 4.16 se presenta la distribución de los esfuerzos cortantes en pilotes compresibles para dos valores de la relación de Poisson del pilote $\nu_p = 0$ y 0.2 , obtenida con un análisis riguroso; cabe aclarar que en el análisis aproximado no se toma en cuenta la relación de Poisson (25). La relación de compresibilidad, λ , se escogió igual a 6000 (λ es la relación del módulo de Young al módulo de rigidez al cortante del suelo). De los resultados se puede concluir que para fines prácticos el análisis aproximado —el cual ignora la presencia del pilote dentro del semiespacio— es adecuado. Sin embargo, si se requiere conocer el estado de esfuerzos en la interfase, entonces deberá realizarse un análisis riguroso.

Por otra parte, se han obtenido resultados (25) con el método aproximado para un pilote compresible en los que se muestra que el efecto de λ —cuya variación se tomó entre 6000 e infinito (la cual cubre todos los fines prácticos de interés)— en la distribución de esfuerzos cortantes en el pilote, es despreciable para pilotes cortos ($L/d=20$) y la distribución concuerda con la obtenida con análisis más refinados (26).

Para un pilote esbelto ($L/d=80$) la distribución de esfuerzos cortantes para valores de λ entre 60000 e infinito son muy parecidas y además, son similares a la de pilotes cortos. Sin embargo, para $\lambda=6000$ la distribución tiene una variación radicalmente distinta.

Así mismo, el efecto de λ en la relación carga-desplazamiento vertical es despreciable para relaciones de L/d menores a 20 .

4.2.3 Grupo de 2 pilotes con losa rígida en contacto con la superficie del suelo

Para estudiar el problema se considera que los pilotes están perfectamente adheridos al medio que los rodea el que a su vez se idealiza como un semiespacio elástico y la interfase suelo-cimentación rígida se considera como "suave" en el sentido matemático.

Se ha encontrado (25) que la ecuación matricial que resuelve el problema —en general— es

$$\begin{Bmatrix} \{W\}^1 \\ \vdots \\ \{W\}^{NP} \\ \{W_c\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [KSP]^{11} & \dots & [KSP]^{1,NP} & [KCP]^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [KSP]^{NP,1} & \dots & [KSP]^{NP,NP} & [KCP]^{NP} \\ [KPC]^1 & \dots & [KPC]^{NP} & [KCC] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\}^1 \\ \vdots \\ \{\phi\}^{NP} \\ \{\phi_c\} \end{Bmatrix}$$

donde $\{W\}^1, \dots, \{W\}^{NP}$ son vectores de $((n+m) \times 1)$ de desplazamientos verticales para los pilotes 1, 2, ..., NP; NP es el número de pilotes simétricos;

$[KSP]^{pq}$ son matrices cuyos coeficientes $(KSP)_{ij}$ se calculan en el p-ésimo pilote debido al q-ésimo grupo simétrico ($p, q = 1, 2, \dots, NP$); $[KCP]^p$ son matrices cuyos coeficientes $(KCP)_{ij}$ son los calculados en el p-ésimo pilote, y $[KPC]^q$ son matrices con coeficientes $(KPC)_{ij}$ calculados en los elementos de la superficie del estrato rígido debido al q-ésimo grupo simétrico y la matriz $[KCC]$ se obtiene al resolver el problema de una base circular o rectangular, apoyada en la superficie y con carga concentrada vertical (25). $\{\phi\}^q$ son las intensidades de esfuerzo en el fuste y la base del q-ésimo pilote y $\{\phi_c\}$ es el esfuerzo normal en la interfase cimentación rígida-suelo.

En la fig 4.17 se presenta la comparación para un pilote cargado axialmente con y sin losa de cimentación. Puede verse que cuando se tiene losa, la rigidez del sistema se incrementa una cantidad muy pequeña para relaciones L/d mayores a 20.

En la fig 4.18 se presenta la distribución de carga en la losa y el pilote, tanto para pilote rígido como compresible. Se aprecia que para $20 < L/d < 40$ la losa soporta entre 15 y 20 por ciento.

En la fig 4.19 se muestra la respuesta carga axial-desplazamiento vertical de un grupo de 2 pilotes con losa rectangular. Puede verse que para pilotes cortos el efecto de λ es despreciable, así como para pilotes largos la relación carga axial-desplazamiento vertical es más importante.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado una breve introducción del método de integración de elementos de frontera (MIEF) y su aplicación a la solución de problemas de potencial y de elasticidad isótropos en el plano. Los resultados obtenidos con el MIEF son satisfactorios tal como se mostró en el Cap 4.

Las soluciones de elementos de frontera ofrecen ventajas sobre las soluciones tipo "dominio" como la de elementos finitos, diferencias finitas, etc. Algunas de estas ventajas son entre otras la posibilidad de definir únicamente la superficie del cuerpo y la facilidad con que pueden representarse las fronteras en un medio infinito. Las ventajas son aún más notables en problemas continuos bi y tridimensionales donde ocurren concentración de flujos o esfuerzos. El método también es adecuado para resolver problemas con fronteras infinitas tal como ocurren en mecánica de suelos, hidráulica y otras disciplinas de la ingeniería, donde los métodos clásicos de dominio no son del todo adecuados.

Se ha formulado el método de integración de elementos de frontera basado en una aproximación de residuos pesados pero también puede formularse en términos de funciones de influencia que se encuentran en la literatura bajo el nombre de "método de las ecuaciones integrales de frontera". La formulación

hecha a partir de los residuos pesados es más poderosa (8) y permite relacionar al método con otras técnicas clásicas de la ingeniería.

Uno de los aspectos más interesantes del método de elementos de frontera es la simplicidad con la que se proporcionan los datos para resolver un problema. Esta contrasta con la cantidad de datos necesarios en los programas de elementos finitos. Este es un punto muy importante en la práctica, ya que muchas horas-hombre se pierden en preparar y verificar los datos de elementos finitos.

La precisión de las soluciones de elementos de frontera es generalmente mayor que la obtenida con técnicas de elementos finitos. Así mismo, los resultados de elementos finitos son de precisión aceptable para las variables originales bajo consideración (potencial en ciertos problemas de campo o desplazamientos en análisis de esfuerzo) pero cuando estas variables se derivan (para obtener flujos o esfuerzos) los resultados son de una precisión mucho menor y en la mayoría de los casos discontinuos entre los elementos (8). Este problema puede agravarse aún más, sobre todo si existen regiones en el continuo con flujo alto o concentración de esfuerzo.

Las matrices que se obtienen para elementos de frontera son muchas veces totalmente llenas lo que significa que el método puede ser menos eficiente que los elementos finitos u otras aplicaciones. Para superar esta dificultad se sugiere que el cuerpo debe dividirse en regiones diferentes que permitan obtener matrices bandedas (8). La subdivisión del cuerpo también es necesaria para cuerpos delgados y largos o para aquellos en que tienen dimensiones de diferente magnitud en distintas direcciones.

Aunque está fuera del alcance del presente trabajo, el método de integración de elementos de frontera también puede extenderse al estudio de problemas no lineales y a los que dependen del tiempo.

En conclusión, puede decirse que el método de elementos de frontera presenta ventajas definitivas sobre las técnicas tipo "dominio" y que estas ventajas son más evidentes para problemas con fronteras infinitas y para cuerpos complejos tridimensionales.

6. Reconocimiento

Deseo expresar mi agradecimiento al M en I Gustavo Rafael Aranda Hernández, cuyos consejos y recomendaciones me guiaron durante la elaboración de este trabajo.

Al instituto de Ingeniería por las facilidades proporcionadas para el desarrollo de la presente tesis.

7. Referencias

1. Rizzo, F. J., "An integral equation approach to boundary value problem of classical elastostatics", Q. Appl. Math., 25, 83-95, (1967)
2. Cruse, T. A., "Application of the BIEM to 3-D stress analysis", Compt. Structures, 3, 509-527, (1973)
3. Cruse, T. A., "Numerical solution in 3-D elastostatics", Int. J. Solids Structures, 5, 1259-1274, (1969)
4. Lachat, J. C. and Watson, J. O., "Effective numerical treatment of BIEM", Int. J. Num. Meth. Engng., 10, 991-1005, (1975)
5. Zienkiewicz, O. C., Kell, D. W. and Bettes, P., "The coupling of the FEM and boundary solutions procedures", Int. J. Num. Meth. Engng., 11, 355-375, (1977)
6. Alarcón, E., Martín, A. and Paris, F., "Boundary elements in potential and elasticity theory", Compt. Structures, 10, 351-362, (1979)
7. Brebbia, C. A. and Domínguez, J., "Boundary element methods for potential problems", Appl. Math. Modelling, 1, 372-378, (1977)
8. Brebbia, C. A., *Boundary element method for engineers*, Pentech Press Limited, Londres, (1978)
9. Alarcón, E., Brebbia, C.A. and Domínguez, J., "The boundary element method in elasticity", Int. J. Mechanical Science, 20, 625-639, (1978)

10. Jaswon, M. A. and Symm, G. T., *Integral equation methods in potential theory and elastostatics*, Academic Press Inc, Nueva York, (1977)
11. Oden, J. T. and Reddy, J. N., *An introduction to the mathematical theory of finite elements*, John Wiley and Sons, Nueva York, (1976)
12. Courant, R. and Hilbert, D., *Methods of mathematical physics*, John Wiley and Sons, Nueva York, (1962)
13. Fung, Y. C., *A first course in continuum mechanics*, Prentice-Hall Inc, 2a. edición, Englewood Cliffs, N. J., (1977)
14. Fung Y. C., *Foundations of solid mechanics*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, N. J., (1965)
15. Lekhnitskii, S. G., *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, Holden-Day Inc, San Francisco, (1963)
16. Muskhelishvili, N. I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, P. Noordhoff LTD, Groningen, (1963)
17. Sokolnikoff, I. S., *Mathematical theory of elasticity*, 2a. ed, McGraw-Hill Book Company Inc, Nueva York, (1956)
18. Atkinson, K. E., *An Introduction to numerical analysis*, John Wiley and Sons, Nueva York, (1978)
19. Bathe, Klaus-Jürgen and Wilson, L. E., *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, N. J., (1976)
20. Hornbeck, R. W., *Numerical Methods*, Quantum Publishers Inc, Nueva York, (1975)
21. Stroud, A. H. and Secrest, D., *Gaussian Quadrative Formulas*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, N. J., (1966)
22. Lau, P. C. M and Brebbia, C. A., "The cell collocation method in continuum mechanics", *Int. J. Mechanical Science*, 20, 83-95, (1978)
23. Sánchez-Sesma, F. J., Esquivel, J. A. y Palencia, V. J., "Una solución numérica de la ecuación de Laplace", *Comunicaciones internas, Fac. Ciencias-UNAM*, 3, (1979)
24. Brebbia, C. A. and Walker, S., "Simplified boundary elements for radiation problems", *Appl. Math. Modelling*, 2, 135-137, (1978)
25. Banerjee, P. K., "A contribution to the study of axially loaded pile foundations", Tesis Doctoral, Universidad de Southampton, 1969

26. Poulos, H. G. and Davis, E. H., "The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers", *Geotechnique*, Vol 18, No 3, 351-371, (1968)

Apéndice A. Fórmulas de integración numérica

A.1 Introducción

El propósito fundamental de la integración numérica (también llamada cuadratura) es el cálculo de integrales que es imposible o muy difícil de calcular analíticamente. La forma cerrada usual de las expresiones analíticas de integrales tienen muchas ventajas sobre la evaluación numérica, lo cual sugiere que las técnicas numéricas no deben emplearse sin hacer antes un primer esfuerzo para calcularlas analíticamente (incluyendo una investigación en las tablas de integración disponibles). Además de la precisión, otras ventajas de las integrales analíticas son: su generalidad y la posibilidad de evaluar más rápido los efectos que se tengan al variar cualquier parámetro involucrado. No obstante, la integración numérica es indispensable en muchos casos, dado que puede significar la diferencia entre dar una respuesta correcta y una no del todo correcta.

La integración numérica es también esencial en la evaluación de integrales de funciones disponibles únicamente en algunos puntos. Tales funciones algunas veces resultan de la solución numérica de ecuaciones diferen-

ciales o de datos experimentales tomados en ciertos intervalos.

En la integración numérica las fórmulas que más se han usado son: la Regla Trapezoidal que se basa en la aproximación de la función $f(x)$ por simples líneas rectas y la Regla de Simpson que utiliza arcos parabólicos usando la serie de Taylor para aproximar la función $f(x)$. Se pueden obtener fórmulas con una aproximación mejor reemplazando más derivadas en la serie de Taylor (20) con expresiones en diferencias finitas. Esta familia general de fórmulas de integración numérica, conocidas como de Newton-Cotes, pueden obtenerse de la misma forma para intervalos de puntos iguales. Sin embargo, existen métodos mejores de integración numérica tales como la integración de Romberg y la Cuadratura de Gauss que son más eficientes y de mejor adaptabilidad a la computadora digital.

La integración de Romberg es una técnica de integración numérica poderosa y eficiente que se basa en el uso de la Regla Trapezoidal combinada con la extrapolación de Richardson (20). Converge mucho más rápido que la regla de Simpson, pero no es eficiente para funciones periódicas, ya que se obtienen resultados totalmente incorrectos.

Quizá la técnica de integración numérica más eficiente sea la Cuadratura de Gauss. Esta técnica se basa en la utilización de polinomios ortogonales, tales como los de Chebyshev, Laguerre, Hermite o Legendre. Tiene una aproximación bastante grande con solo usar cuatro puntos de integración numérica, de ahí que su convergencia sea bastante rápida. Por otra parte, cuando la función a integrar presenta una o más singularidades, la Cuadratura de Gauss puede tratarlas eficientemente en la mayoría de los casos. La singularidad puede eliminarse tomando un punto suficientemente cercano a ella y con ello descomponer la integral en dos partes. Cuando se tienen funciones altamente oscilatorias, este método no es el más apropiado (20). Para más detalles ver la ref 20.

A.2 Fórmula unidimensional de la Cuadratura de Gauss

La Cuadratura de Gauss es un método muy poderoso para la integración numérica que emplea intervalos no necesariamente iguales. Los polinomios ortogonales tales como los polinomios de Chebyshev son eficientes (20) en la aproximación de funciones. Si tales polinomios pueden aproximar funciones tan eficazmente, entonces la forma de la integración numérica se basa en los polinomios ortogonales que debe ser el siguiente paso lógico. (Recuérdese que la Regla Trapezoidal y la Regla de Simpson se basan en la aproximación de la función original por simples líneas rectas y arcos parabólicos, respectivamente). Estos polinomios se han utilizado usando la interpolación de Chebyshev en la derivación de la fórmula de Cuadratura (20), que incluye la normalización del intervalo, el muestreo de la aproximación de la función en los ceros del polinomio ortogonal y la generación del polinomio de interpolación de la fórmula de Lagrange. Entonces, la fórmula de cuadratura se desarrolla para integrar el polinomio de interpolación.

Aunque se han utilizado los polinomios de Chebyshev, éstos no son los únicos ya que existen otros polinomios ortogonales como los de Laguerre, Hermite o Legendre que pueden emplearse para obtener las fórmulas de Cuadratura de Gauss. En efecto, la selección del polinomio depende del tipo de función a integrar y de los límites de la integral. Los polinomios más empleados comúnmente en este contexto actualmente son los polinomios de Legendre (20) y las fórmulas que resultan al usar estos polinomios son las de la Cuadratura de Gauss-Legendre o, simplemente, de la Cuadratura de Gauss.

Otras expresiones de cuadratura comúnmente empleadas son las de Gauss-Chebyshev y Gauss-Laguerre.

La idea que hay detrás de la Cuadratura de Gauss es encontrar una fórmula de integración

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \omega_j f(x_j) \approx \int_a^b \omega(x) f(x) dx = I(f) \quad A.1$$

que sea exacta para todos los polinomios $f(x)$ de un grado tan grande como sea posible. Los coeficientes de peso y nudos son variables (a diferencia de la fórmula de Newton-Cotes, en que únicamente los coeficientes de peso eran incógnitas (19)), se restringen a ser reales y los nudos deben pertenecer al intervalo de integración. Las funciones de peso $w(x)$ deben ser no negativas (18,21) en el intervalo (a,b) , que puede ser infinito y satisfacer las siguientes propiedades:

$$1) \int_a^b |x|^n \omega(x) dx \text{ es integrable y finita para toda } n \geq 0$$

2) Se supone que

$$\int_a^b \omega(x) g(x) dx = 0$$

para algunas funciones $g(x)$ continuas y no negativas. Entonces la función $g(x) \equiv 0$ en (a,b) .

Las fórmulas de integración que resultan son de un alto grado de aproximación.

Para tener una intuición del problema considérese el caso especial

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n \omega_j f(x_j) \quad \text{A.2}$$

Nótese que $\omega(x) \equiv 1$. Los coeficientes de peso $\{\omega_j\}$ y los nudos $\{x_j\}$ deben determinarse para hacer que el error

$$E_n(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{j=1}^n \omega_j f(x_j)$$

sea igual a cero para los polinomios $f(x)$ de un grado tan alto como sea posible. Al derivar las ecuaciones para los nudos y coeficientes de peso, se tiene que

$$E_n(a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m) = a_0 E_n(1) + a_1 E_n(x) + \dots + a_m E_n(x^m)$$

De aquí que $E_n(f) = 0$ para cualquier polinomio de grado $\leq m$ se cumple si y solo si

$$E_n(x^i) = 0 \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, m$$

Para el caso en que $n=1$, se tienen dos parámetros ω_1 y x_1 considerando que

$$E_1(1) = 0 \quad ; \quad E_1(x) = 0$$

Esto da

$$\int_{-1}^1 1 dx - \omega_1 = 0 \quad ; \quad \int_{-1}^1 x dx - \omega_1 x_1 = 0$$

de donde se obtiene que $\omega_1 = 2$ y $x_1 = 0$. Obsérvese que $f(x) = 1$.

Entonces la ec A.2 queda

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 f(0)$$

Cuando $n=2$, se tienen cuatro parámetros $\omega_1, \omega_2, x_1, x_2$, y en este caso (18) se ponen cuatro condiciones para estos parámetros

$$E_2(x^i) = \int_{-1}^1 x^i dx - (\omega_1 x_1^i + \omega_2 x_2^i) = 0 \quad ; \quad i=0,1,2,3$$

o bien

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= 2 \\ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 &= 0 \\ \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 &= 2/3 \\ \omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones no lineales tiene una solución única que está dada por

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_2 = 1 \\ x_2 &= -x_1 = \sqrt{3}/3 \end{aligned}$$

luego, la fórmula queda

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

y tiene un grado de aproximación de 3.

Para el caso general de n , hay $2n$ parámetros libres (incógnitas) $\{x_j\}$ y $\{\omega_j\}$; y se supone que existe una ec A.1 que usa n nudos y da un grado de aproximación de $2n-1$ (18). Las ecuaciones que deben resolverse son

$$E_n(x^i) = 0 \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, 2n-1$$

o bien

$$\sum_{j=1}^n \omega_j x_j^i = \begin{cases} 0 & ; \quad i = 1, 3, \dots, 2n-1 \\ \frac{2}{i+1} & ; \quad i = 0, 2, \dots, 2n-2 \end{cases}$$

Este es un sistema de ecuaciones no lineales cuya solución no es tan fácil de obtener, debido a la dificultad de trabajar con sistemas no lineales. Sin embargo, puede hacerse otra aproximación de la teoría para la ec A.1, es decir utilizar los polinomios ortogonales de Legendre. En efecto, para $\omega(x) \equiv 1$ en $[-1, 1]$ la fórmula de integración de Gauss es

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n \omega_j f(x_j)$$

con nudos en los ceros del polinomio de Legendre $P_n(x)$ de grado n en

$[-1,1]$. Los coeficientes de peso (18) están dados por

$$\omega_i = \frac{-2}{(n+1) P_n'(x_i) P_{n+1}(x_i)} ; \quad i=1,2,\dots,n$$

y

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) (2n)!^2} \cdot \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \equiv e_n \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}$$

para alguna $-1 < \eta < 1$. Para integrales sobre otros intervalos finitos con función de peso $\omega(x) \equiv 1$, se usa el siguiente cambio de variables lineal (20)

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \xi$$

$$\left(\frac{b-a}{2}\right) \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$$

entonces la fórmula queda

$$\int_a^b f(x) dx = \left(\frac{b-a}{2}\right) \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b+(b-a)\xi}{2}\right) d\xi$$

con lo cual se reduce la integral al intervalo estándar $[-1,1]$.

Se han publicado (18,20,21) los valores de los nudos y coeficientes de peso para la ec A.2 para valores pequeños de n . Estos valores se dan en la Tabla A.1.

A.3 Fórmula logarítmica unidimensional de la Cuadratura de Gauss

Para el caso en que la función a integrar numéricamente sea de tipo logarítmico, también es posible obtener expresiones para la Cuadratura de Gauss. En efecto, Krylov y Pal'cev (21) han tabulado los nudos y coeficientes de peso para integrales del tipo

$$\int_0^1 x^\alpha \ln\left(\frac{e}{x}\right) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

para valores pequeños de n y para $\alpha = \pm \frac{4}{5}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{5}, 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 .

Por otra parte, Stroud y Secrest (21) presentan resultados para integrales del tipo

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(\xi_i) \quad \text{A.3}$$

Los valores de los nudos y coeficientes de peso para la ec A.3 para valores pequeños de n se dan en la Tabla A.2

Apéndice B. Descripción de programas

Se presenta aquí la descripción de los programas usados en la solución de problemas de potencial y de elasticidad en el plano. Se proporcionan los listados de programas para la solución de problemas de potencial isótropos con elementos constantes (u y q que representan el potencial y la derivada del potencial respectivamente, son constantes en todo el elemento (fig 2.3(a)) y lineales (u y q varían linealmente en el elemento (fig 2.3(b)). Para los de elasticidad se presenta un programa para la solución de problemas isótropos y linealmente elásticos en ausencia de fuerzas de cuerpo.

Los programas se dan en lenguaje FORTRAN IV para la computadora Burroughs B7800 del PUC de la UNAM.

B.1 Programa SPPBEC para la solución de problemas de potencial isótropos con elementos constantes

Se describe a continuación un programa de computadora en lenguaje FORTRAN IV para la solución de problemas de potencial isótropos con elementos constantes, esto es, elementos con potencial u y derivada de potencial q

constantes y con un nudo en medio (fig 2.3(a)).

El programa requiere menos pasos de programación que uno de elemento finito debido a que es innecesario tener una subrutina especial para ensamblar el sistema de ecuaciones. El número de incógnitas es sustancialmente menor ya que únicamente se requieren nudos en la frontera. En la fig B.1 se comparan los pasos principales de ambos métodos. Asimismo, no es únicamente el número de pasos los que se reducen para elementos de frontera sino que la entrada de datos es mucho más fácil que para elementos finitos. Por otra parte los resultados internos se obtienen únicamente en los puntos donde se requiera y no en cualquier lugar en el dominio, como se hace en el caso de elementos finitos.

El diagrama de macro-flujo para el programa de elementos de frontera se muestra en la fig B.2. En el programa principal se define la dimensión máxima del sistema de ecuaciones (o nudos de frontera) por NX.

El archivo más usual de entrada es 5 y el de salida 6. Se llaman las cinco subrutinas siguientes

- INPUT : Lee el programa de entrada
- FMAT : Forma las matrices H y G y las reordena de acuerdo con las condiciones de frontera para formar la matriz A de la ec 2.24
- SLNPD : Resuelve el sistema de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss
- INTER : Reordena el vector de incógnitas y calcula los valores del potencial en puntos internos específicos
- OUTPUT : Impresión de resultados

Las variables generales enteras que se usan en el programa, junto con su significado son las siguientes

N : Número de elementos de frontera (igual al número de nudos en este caso)

L : Número de puntos internos donde se calcularán las funciones

El único entero ordenado es

KODE: Indica el orden unidimensional del tipo de condiciones de frontera en los nudos elemento. Si KODE=0 significa que se conoce el valor del potencial u y si KODE=1 significa que se conoce el valor de la derivada del potencial q en el nudo frontera

Los arreglos de las variables reales que se almacenan en la memoria junto con datos y resultados son

X : Coordenada x del punto extremo de los elementos de frontera

Y : Coordenada y del punto extremo de los elementos de frontera

XM : Coordenada x de los nudos. XM(J) contiene la coordenada del nudo J

YM : Coordenada y de los nudos. YM(J) contiene la coordenada del nudo J

G : Matriz definida en la ec 2.23. Después de aplicar las condiciones de frontera la matriz A se almacena en el mismo lugar

H : Matriz definida en la ec 2.23

FI : Valor prescrito de las condiciones de frontera. FI(J) contiene el valor prescrito de la condición en el nudo J. Si KODE=0 significa que se prescribe el potencial u y si KODE=1 que se da explícitamente el valor de q

DFI : Vector de la parte derecha de la ec 2.24. Después de la solución contiene los valores de las incógnitas u y q

CX : Coordenada x para un punto interno donde se requiere el valor de u

CY : Coordenada y para un punto interno donde se requiere el valor de u

SOL : Vector de valores del potencial para puntos internos

A continuación se describen las subrutinas empleadas en el programa.

Subrutina INPUT

Todos los datos que requiere el programa se leen en esta subrutina. Los datos de entrada consisten del siguiente grupo de tarjetas

- 1) Tarjeta del título. Contiene el nombre del programa, FORMATO 16A4.
- 2) Tarjeta de parámetros básicos. Contiene el número de elementos de frontera y el número de puntos internos donde se calculará la función. FORMATO 2I5.
- 3) Tarjetas de coordenadas de puntos internos. Son tantas tarjetas como nudos se requieran, en cada nudo se dan las coordenadas x y y . FORMATO 2F10.0
- 4) Tarjetas de coordenadas de puntos extremos de los elementos de frontera. Cada tarjeta define las coordenadas del extremo de un elemento, lee en contra de la dirección de las manecillas del reloj para el caso mostrado en la fig B.3(a) y en dirección de éstas para el caso de la fig B.3(b). FORMATO 2F10.0.
- 5) Tarjetas de condiciones de frontera. Son tantas tarjetas como nudos se tengan dando los valores del potencial en el nudo si KODE=0 o el valor de la derivada del potencial si KODE=1. KODE se lee en FORMATO I5 y FI en FORMATO F10.0.

Esta subrutina imprime el título, los parámetros básicos, los puntos extremos de los elementos de frontera y las condiciones de frontera. Las coordenadas de puntos internos se imprimen en la subrutina OUTPUT.

Subrutina FMAT

En esta subrutina se obtienen las matrices H y G de la ec 2.23. Sus elementos se obtienen con las subrutinas INTE e INLO.

INTE: En esta subrutina se obtienen los elementos de las matrices H y G por medio de la integración numérica a lo largo de los elementos de frontera. Se obtienen todos los elementos excepto aquellos que están en la diagonal.

INLO: En esta subrutina se obtienen los elementos de la diagonal de la matriz G, esto es, los elementos de frontera en los que se incluye el nudo bajo consideración. La matriz G, se obtiene con la ec 2.30.

Los elementos de la diagonal de la matriz H es $\hat{H}_{ii} + 1/2$ (ec 2.21) e iguales a $1/2$. Nótese que la solución fundamental se ha tomado como $\ln(1/r)$ en el programa, todos los términos de H y G aparecen multiplicados por 2π .

El siguiente sistema de ecuaciones se reordena para formar la matriz A (que en esta etapa se ha almacenado en G) y del lado derecho el vector F (que en esta etapa se ha almacenado en DFI) de la ec 2.24.

Subrutina INTE

Los valores de los coeficientes fuera de la diagonal de H y G se calculan con la fórmula de integración de 4 puntos de Gauss (Apéndice A).

La variable DIST es la distancia del punto bajo consideración a los elementos de frontera como se muestra en la fig B.4. Si su dirección es la misma que la de la normal se define positiva, en caso contrario es negativa.

Los términos G y H son del tipo

$$G = \sum_{i=1}^4 \ln \frac{1}{(RA)_i} \omega_i \frac{\sqrt{(X1-X2)^2 + (Y1-Y2)^2}}{2}$$

$$H = \sum_{i=1}^4 \frac{d}{dn} \left\{ \ln \frac{1}{(RA)_i} \right\} \omega_i \frac{\sqrt{(X1-X2)^2 + (Y1-Y2)^2}}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^4 - \frac{1}{(RA)_i^2} (DIST) \omega_i \frac{\sqrt{(X1-X2)^2 + (Y1-Y2)^2}}{2}$$

Los términos de la última parte son una consecuencia del cambio de coordenadas de X, Y a la coordenada adimensional ξ , esto es, el Jacobiano de la transformación.

Subrutina INLO

En esta subrutina se obtienen los elementos de la diagonal de la matriz G con la ec 2.30, esto es

$$G_{ii} = \frac{1}{\pi} |r| \left\{ \ln \frac{1}{|r_1|} + 1 \right\}$$

Subrutina SLNPD

Esta es una subrutina estándar obtenida por Brebbia y Ferrante (8) que puede resolver una matriz definida no positiva con el método de eliminación de Gauss. Si la matriz A tiene un cero en la diagonal, entonces se intercambia por otro renglón, se dice que el sistema matricial es singular únicamente cuando al intercambiar renglones se tenga un cero en los

coeficientes de la diagonal, para una posición de renglón determinada.

El resultado es un vector con las incógnitas del potencial y su derivada en la frontera y se escribe en DFI.

Subrutina INTER

La subrutina INTER reordena los vectores FI (vector de la condición de frontera) y DFI (vector de incógnitas) de tal forma que todos los valores del potencial se almacenan en FI y todos los valores de las derivadas en DFI.

En esta subrutina también se calculan los valores del potencial para puntos internos con la ec 2.25. Nótese que debido a que todos los términos de H y G aparecen multiplicados por 2π la solución para puntos internos se multiplica por 2π .

Subrutina OUTPUT

En esta subrutina se imprimen los resultados del problema, se listan las coordenadas de los nudos de frontera y los valores del potencial y de su derivada, así como los valores del potencial en los puntos internos requeridos.

El listado del programa SPPBEC se muestra en la parte final del apéndice.

B.2 Programa SPPBEL para la solución de problemas de potencial isótropos con elementos lineales

La parte teórica para elementos lineales se desarrolló en la Sec 2 del Cap 2. Pero no obstante que los pasos de programación son básicamente los mismos en ciertas subrutinas se requieren algunas modificaciones.

Las subrutinas INPUT y SLNPD son las mismas en ambos programas.

Para este caso, el programa principal es similar al programa dado en la Sec B.1, pero aquí no se necesitan los arreglos XM y YM con las coordenadas de los nudos medios, debido a que los nudos se consideran en la intersección de dos elementos. Por tanto, XM y YM no necesitan incluirse en el argumento de la subrutina FMAT.

Subrutina FMAT

En esta subrutina se forma el sistema de ecuaciones que se resolverá.

Subrutina INTE

En esta subrutina a diferencia de la correspondiente al programa de elementos constantes en lugar de obtener únicamente los valores para el elemento a lo largo del cual se realiza la integración, se obtienen también los coeficientes de la parte de G y H correspondientes a los nudos adyacentes.

Subrutina INLO

Esta subrutina obtiene los elementos de la matriz G que corresponden a las integrales a lo largo de los elementos que incluyen el nudo bajo consideración.

Subrutina INTER

Esta subrutina sustituye a la correspondiente al programa de elementos constantes. Se colocan todos los potenciales en FI y sus derivadas en DFI, obteniéndose finalmente los valores del potencial para puntos internos. El valor del potencial para puntos internos se obtiene por medio de la ec 2.25 pero los coeficientes de G_{ii} y \hat{H}_{ij} se definen por las ecs 2.35 a 2.37.

Subrutina OUTPUT

Finalmente, en esta subrutina se imprimen los resultados pero a diferencia del programa para elementos constantes en lugar de imprimir los arreglos XM y YM se imprimen las coordenadas de los nudos, esto es, imprime los valores de X y Y.

El listado del programa SPPBEL se muestra en la parte final del apéndice.

B.3 Programa SPEBEC para la solución de problemas isótropos y linealmente elásticos con elementos constantes

Para este caso se da un programa de computadora en lenguaje FORTRAN IV para la solución de problemas isótropos y linealmente elásticos en ausencia de fuerzas de cuerpo con elementos constantes. El programa tiene la misma organización que los programas anteriores.

En el programa principal y en la estructura de datos las variables y arreglos generales usados en el programa junto con su significado son los siguientes

- N : Número de elementos de frontera (que en este caso es igual al número de nudos)
- L : Número de puntos internos donde se calcularán los esfuerzos y desplazamientos
- GE : Módulo de cortante
- XNU : Módulo de Poisson
- X,Y : Arreglos unidimensionales con las coordenadas x_1 y x_2 de los elementos de frontera
- XM,YM: Arreglos unidimensionales con las coordenadas de los nudos
- G : Matriz definida en la ec 3.80. Después de aplicar las condicio-

nes de frontera la matriz A se almacena en el mismo lugar (ec 3.81)

H : Matriz definida por la ec 3.80

KODE : Arreglo unidimensional indicando el tipo de condición de frontera en los nudos de los elementos

FI : Vector donde se almacenan los valores prescritos de las condiciones de frontera

DFI : Vector del lado derecho en el sistema global. Después de resolver el sistema contiene los valores de las incógnitas

CX,CY: Vectores unidimensionales con las coordenadas de los puntos internos (máximo 20)

DSOL : Valores de los desplazamientos en puntos internos (2 desplazamientos por punto)

SSOL : Valores de los esfuerzos en puntos internos (3 esfuerzos por punto)

Al igual que en los programas anteriores se tienen cinco subrutinas principales que son las siguientes

INPUT: Lee el programa de entrada (datos)

FMAT : Forma las matrices H y G y las reordena de acuerdo con las condiciones de frontera para formar la matriz A de la ec 3.81

SLNPD: Resuelve el sistema de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss

INTER: Reordena el vector de incógnitas y obtiene los valores de los desplazamientos y esfuerzos en puntos internos específicos

OUTPUT: Impresión de resultados

A continuación se describen las subrutinas empleadas en el programa.

Subrutina INPUT

Todos los datos que requiere el programa se leen en esta subrutina. Los datos se presentan de la siguiente forma

- 1) Tarjeta del título. Contiene el nombre del programa, FORMATO 16A4.
- 2) Tarjeta de parámetros básicos. Contiene el número de elementos, número de puntos internos, el módulo de cortante y el módulo de Poisson. FORMATO (2I5,2F10.0).
- 3) Tarjetas de coordenadas de puntos internos. Son tantas tarjetas como nudos internos se requieren. En cada nudo se dan las coordenadas x_1 y x_2 . FORMATO 2F10.0.
- 4) Tarjetas de coordenadas de puntos extremos de los elementos de frontera. Cada tarjeta define las coordenadas del extremo de un elemento; lee en contra de la dirección de las manecillas del reloj para superficies externas y a favor para superficies internas.
- 5) Tarjetas de condiciones de frontera. Son tantas tarjetas como nudos de frontera se tengan dando los valores de la variable conocida en las direcciones x_1 y x_2 . Las variables son desplazamientos si KODE=0 y fuerzas de superficie si KODE=1. KODE se lee con FORMATO I5 y FI con FORMATO F10.0.

Esta subrutina imprime primero el título y los parámetros básicos. Después las coordenadas de los puntos extremos de los elementos de frontera y las condiciones de frontera de cada nudo, así como también los códigos y valores prescritos. Las coordenadas de puntos internos se imprimen en la subrutina OUTPUT.

Subrutina FMAT

En esta subrutina se obtienen las matrices H y G con las subrutinas INTE e INLO.

INTE : Aquí se obtienen los coeficientes de H_{ij} , G_{ij} para el caso $i \neq j$, usando integración numérica

INLO : Obtiene la matriz G_{ii}

La matriz H_{ii} es simple (para fronteras suficientemente lisas).

$$H_{ii} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

En esta subrutina también se arregla el sistema de ecuaciones y lo prepara para su solución. La matriz A de la ec 3.81 se almacena en esta etapa en G. Nótese que algunos renglones en A se han multiplicado por el módulo de cortante (que en el programa se representa como GE) para eliminar el error numérico (es decir, todos los elementos de la matriz G son ahora del mismo orden). Asimismo, en esta subrutina también se forma la parte derecha del vector F (almacenado en DFI).

Subrutina INTE

Se obtienen aquí los valores de los coeficientes de las matrices H y G usando integración numérica. Nótese que $H_{12} \neq H_{21}$ pero $G_{12} = G_{21}$.

Subrutina INLO

En esta subrutina se obtiene la matriz G_{ii} . La integración se hace analíticamente pero también puede obtenerse con integración numérica.

Subrutina INTER

Esta subrutina reordena primero los vectores DFI y FI de tal forma que to dos los desplazamientos de frontera se almacenan en FI y todas las fuerzas de superficie en DFI. Asimismo se obtienen esfuerzos y desplazamientos en puntos internos. Para hacer esto se usan las ecs 3.82 y 3.83. Las integrales de los coeficientes de S y D que aparecen en la última ecuación se obtienen en otra subrutina llamada SIGM.

Subrutina SIGM

Los coeficientes D y S dados por las ecs 3.74 y 3.75 respectivamente, son necesarios para obtener los esfuerzos en puntos internos.

En esta subrutina se obtienen las integrales de los coeficientes D y S con la fórmula de la Cuadratura de Gauss.

Subrutina OUTPUT

En esta subrutina se imprimen los resultados en el siguiente orden

- 1) Nudos de frontera con coordenadas x_1, x_2 , valores de los desplazamientos u_1, u_2 y fuerzas de superficie p_1, p_2 .
- 2) Nudos internos con coordenadas x_1, x_2 , valores de los desplazamientos u_1, u_2 y esfuerzos $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$.

El listado del programa SPEBEC se da en la parte final del apéndice.

Apéndice C. Problemas con más de una superficie

El método de integración de elementos de frontera puede usarse para estudiar problemas con más de una superficie, como es el caso de cuerpos con agujeros tal como el mostrado en la fig C.1. Para definir una frontera externa o interna se necesita identificar la dirección de la normal. Esto, para problemas bidimensionales puede hacerse de la siguiente manera

- 1) Para superficies externas la forma de enumerar los elementos se hace en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- 2) Para superficies internas la forma de enumerar los elementos se hace en sentido positivo.

De esta forma puede definirse la normal en el programa de computadora. El programa SPPBSD de computadora siguiente se basa en el programa SPPBEC para problemas de potencial isótropos con elementos constantes (Apéndice B) pero pudiendo tomar cinco superficies diferentes. Cada superficie se enumera de acuerdo a lo señalado anteriormente. Las subrutinas del programa son las siguientes

El programa principal es el mismo que para el caso de problemas isótropos con elementos constantes, excepto en que el COMMON se sustituye por

```
COMMON N, L, NC(5), M
```

donde las nuevas variables NC y M son

M: Número de superficies diferentes

NC: Número del nudo último de cada superficie diferente.

Subrutina INPUT

La entrada de datos es la misma que para el programa mencionado, con la excepción de M y NC que se leen en la misma tarjeta de N y L (número de elementos y número de puntos internos donde se calculará la función). Se lee en FORMATO 8I5.

Subrutina FMAT

Debido a que el COMMON se ha cambiado es necesario definir algunos comandos extra para diferenciar cada una de las superficies; además éstos se usan para obtener las coordenadas del punto medio XM y YM. Nótese que la coordenada del nudo último de cada superficie es en el punto medio del segmento definido por el punto extremo último al primer punto sobre tal superficie.

Las subrutinas INTE, INLO y SLNPD son las mismas que para el programa de problemas de potencial isótropos con elementos constantes.

Para el caso de la subrutina INTER varía con respecto a la del programa mencionado en que debe tomar en cuenta las superficies diferentes.

Finalmente la subrutina OUTPUT únicamente es necesario cambiar el nuevo COMMON, esto es

```
COMMON N, L, NC(5), M
```

El listado del programa SPPBSD se da en la parte final de este apéndice.

Listado del programa SPPBEC

```

000 $RESET FREE
010 FILE 5=DATOS,UNIT=DJSK,RECORD=14,BLOCKING=30
020 FILE 6=PRINTER,UNIT=PRINTER,RECORD=22
030
040 C*****
050 C      PROGRAMA PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS POTENCIALES BIDIMEN-
060 C      SIONALES EMPLEANDO EL METODO DE INTEGRACION DE ELEMENTOS DE
070 C      FRONTERA
080 C      SE EMPLEAN ELEMENTOS CON FUNCIONES CONSTANTES.
090 C*****
100
110 COMMON N,L
120 DIMENSION X(41),Y(41),XM(40),YM(40),G(40,40),FI(40),DFI(40)
130 DIMENSION KODE(40),CX(40),CY(40),SOL(40),H(40,40)
140 NX=40
150
160 C*****
170 C      LECTURA DE DATOS
180 C*****
190 CALL INPUT (CX,CY,X,Y,KODE,FI)
200
210 C*****
220 C      FORMA EL SISTEMA DE ECUACIONES
230 C*****
240 CALL FNAT (X,Y,XM,YM,G,H,FI,DFI,KODE,NX)
250
260 C*****
270 C      SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES
280 C*****
290 CALL SLNDP (G,DFI,D,H,NX)
300
310 C*****
320 C      OBTIENE LOS VALORES DEL POTENCIAL EN PUNTOS INTERNOS
330 C*****
340 CALL INTER (FI,DFI,KODE,CX,CY,X,Y,SOL)
350
360 C*****
370 C      IMPRESION DE RESULTADOS
380 C*****
390 CALL OUTPUT (XM,YM,FI,DFI,CX,CY,SOL)
400
410 CALL EXIT
420 END
430
440 SUBROUTINE INPUT(CX,CY,X,Y,KODE,FI)
450
460 C*****
470 C      N=NUMERO DE ELEMENTOS DE FRONTERA
480 C      L=NUMERO DE PUNTOS INTERNOS DONDE SE OBTENDRAN LAS
490 C      FUNCIONES
500 C*****
510

```

```

000 COMMON N,L
001 DIMENSION CX(1),CY(1),X(1),Y(1),KODE(1),FI(1),TITLE(16)
002 WRITE(6,2000)
003 2000 FORMAT(1H1,3X,79(1H*)/4X,1H*,3X,67HPROGRAMA PARA LA SOLUCION DE PR
004 OBLEMAS POTENCIALES BIDIMENSIONALES,11X,1H*/4X,1H*,3X,63HSE EMPLEA
005 1 EL METODO DE INTEGRACION DE ELEMENTOS DE FRONTERA, SE,5X,1H*/4X,1
006 1H*,3X,43HSEMPLEAN ELEMENTOS CON FUNCIONES CONSTANTES,25X,1H*/4X,1H
007 1*,3X,21HADAPTACION HECHA POR,47X,1H*/4X,1H*,25X,19H*, RAFAEL ARAN
008 DA H.,27X,1H*/4X,1H*,35X,17H*DEL D. GARCIA U.,29X,1H*/4X,1H*,17X,3
009 12HINSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM - 1981,18X,1H*/4X,73(1H*))
010 C*****
011 C SE LEE EL TITULO DEL PROBLEMA *
012 C*****
013 READ(5,1000)TITLE
014 1000 FORMAT(16A4)
015 WRITE(6,2010)TITLE
016 2010 FORMAT(75X,3H***,16A4,3H***)
017 C*****
018 C LECTURA DE PARAMETROS BASICOS *
019 C*****
020 READ(5,1010) N,L
021 1010 FORM=(2I5)
022 WRITE(6,2020)N,L
023 2020 FORMAT(7/4X,5HNUMERO //4X,34HNUMERO DE ELEMENTOS DE FRONTERA = 13, /
024 14X,40HNUMERO DE PUNTOS INTERNOS DONDE SE OBTIENEN LAS FUNCIONES =
025 13)
026 C*****
027 C LECTURA DE COORDENADAS DE PUNTOS INTERNOS *
028 C*****
029 DO 10 J=1,L
030 10 READ(5,1020) CX(J),CY(J)
031 1000 FORMAT(2F10,0)
032 C*****
033 C LECTURA DE COORDENADAS DE PUNTOS EXTREMOS DE LOS *
034 C ELEMENTOS DE FRONTERA *
035 C*****
036 WRITE(6,3030)
037 3030 FORMAT(7/4X,59HCOORDENADAS DE PUNTOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS DE F
038 RONTERA,7/8X,5HPRUNTO,19X,19X,25X,14X/)
039 DO 20 I=1,N
040 20 READ(5,1030)X(I),Y(I)
041 20 WRITE(6,3040) I,X(I),Y(I)
042 3040 FORMAT(9X,12,19X,E12,5,10X,E12,5)
043 C*****
044 C LECTURA DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA *
045 C EVALUA EL VALOR DEL POTENCIAL EN EL NUDO I SI KODE=0, *
046 C VALOR DE LA DERIVADA DEL POTENCIAL EN EL NUDO I SI KODE=1 *
047 C*****
048 WRITE(6,3050)
049 3050 FORMAT(1H1,11X,17HCONDICIONES DE FRONTERA,7/9X,6HCODIGO,

```



```

300 C*****
300
300 DO 70 J=1,N
300 DFI(I)=0.0
300 DO 70 J=1,N
300 DFI(I)=DFI(I)+H(I,J)*FJ(J)
300 70 CONTINUE
300 RETURN
300 END
300
300 SUBROUTINE INTE(XP,YP,X1,Y1,Y2,VZ,H,G)
300
300 C*****
300 EN ESTA SUBROUTINA SE OBTIENEN LOS VALORES DE LOS
300 ELEMENTOS FUERA DE LA DIAGONAL DE LAS MATRICES
300 H Y G. SE EMPLEA INTEGRACION NUMERICA (FORMULA
300 DE CUATRO PUNTOS DE GAUSS) A TRAVES DE LOS ELE-
300 MENTOS DE FRONTERA
300
300 DIST=DISTANCIA DEL PUNTO BAJO CONSIDERACION A LOS
300 ELEMENTOS DE FRONTERA
300 RA=DISTANCIA DESDE EL PUNTO BAJO CONSIDERACION A
300 LOS PUNTOS DE INTEGRACION EN LOS ELEMENTOS DE
300 FRONTERA
300 C*****
300
300 DIMENSION XCO(4),YCO(4),XSI(4),OME(4)
300 XSI(1)=0.34112431
300 XSI(2)=-XSI(1)
300 XSI(3)=0.33998104
300 XSI(4)=-XSI(3)
300 OME(1)=0.34785485
300 OME(2)=OME(1)
300 OME(3)=0.65214515
300 OME(4)=OME(3)
300 AX=(X2-X1)/2.
300 AX2=AX*AX
300 BX=(X2+X1)/2.
300 AY=(Y2-Y1)/2.
300 AY2=AY*AY
300 BY=(Y2+Y1)/2.
300 IF (AX) 10,20,10
300 10 TANG=AY/AX
300 TANG2=TANG*TANG
300 DIST=ABS((TANG*XP-YP+Y1-TANG*X1)/SQRT(TANG2+1.))
300 GO TO 30
300 20 DIST=ABS(YP-X1)
300 30 SIG=(Y1-XP)+(Y2-YP)-(X2-YP)*(Y1-YP)
300 IF (SIG) 40,50,50
300 40 DIST=-DIST
300 50 G=0.
300 H=0.
300 DO 60 I=1,4
300 XCO(I)=AX*XSI(I)+BX
300 YCO(I)=AY*XSI(I)+BY
300 RA=SQRT((XP-XCO(I))+(YP-YCO(I))*(YP-YCO(I)))
300 RA2=RA*RA
300 DST=OME(I)*SQRT(AX2+AY2)
300 G=G+ALBC(I)/RA*SQRT
300 60 H=H+(DIST*G/DST/RA2)

```

RETURN
END

SUBROUTINE 1ML0(Y1,YJ,X0,Y20)

C*****
C***** SE OBTIENEN LOS ELEMENTOS DE LA TRIAGONAL
C***** DE LA MATRIZ G
C*****

AY=(Y2-Y1)/Z.
AXZ=AY*AX
AYZ=(Y2-Y1)/Z.
AYZ=AY*AY
CR=SQRT(AYZ*YZ)
G=0.25*(ALOG(1./CR)+1.)
RETURN
END

SUBROUTINE SLNDR(A,B,D,N,NX)

C*****
C***** SOLUCION DE UN SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES.
C***** SE EMPLEA EL METODO DE ELIMINACION GAUJDIANA.
C***** SE PROPORCIONA UN PRUETO PARA INTERCAMBIAR
C***** RENGLONES EN CASO DE ENCONTRARSE UN CERO EN
C***** LA DIAGONAL.
C*****

N=NUMERO REAL DE INCOGNITAS
NX=DIMENSION DE LA MATRIZ A. EN RENGLONES Y COLUMNAS

DIMENSION A(NX,NX),B(NX)
EPS=0.000001
N1=N-1
DO 100 K=1,N1
K1=K+1
C=A(K,K)
IF(ABS(C)-EPS) 10,10,60

C*****
C***** INTERCAMBIA RENGLONES PARA OBTENER COEFICIENTES NO NULOS
C***** EN LA DIAGONAL PRINCIPAL
C*****

10 DO 40 J=K1,N
IF(ABS(A(J,K))-EPS) 40,40,20
20 DO 30 L=K1,N
C=A(K,L)
A(K,L)=A(J,L)
30 A(J,L)=C
C=B(K)
B(K)=B(J)
B(J)=C
C=A(K,K)
GO TO 40
40 CONTINUE
50 WRITE(6,2000) K
2000 FORMAT(4X,74H SINGULARIDAD EN EL RENGLON #154
I=0.0

GO TO 100

```

C*****
C DIVIDE EL RENGLOM J ENTRE EL COEFICIENTE DE LA
C VARIABLE
C*****

```

```

DO 70 I=1,N
  DO 70 J=1,N
  70 B(K,I)=A(I,I)/C
  B(I)=B(I)/C

```

```

C*****
C ELIMINA LA INCOGNITA X(K) DEL RENGLOM I
C*****

```

```

DO 90 I=1,N
  DO 90 J=1,N
  DO 90 K=1,N
  90 C(I,J)=A(I,J)-C*A(I,K)
  90 B(I)=B(I)-C*B(K)
100 CONTINUE

```

```

C*****
C OBTIENE LA ULTIMA INCOGNITA
C*****

```

```

IF (ABS(A(N,N)) EQO DO 50,110
110 B(N)=B(N)/A(N,N)

```

```

C*****
C SUSTITUCION REGRESIVA PARA OBTENER LAS
C DEMAS INCOGNITAS
C*****

```

```

DO 120 I=1,N
  B(I)=B(I)
  DO 120 J=1,N
  120 B(I)=B(I)-A(I,J)*B(J)

```

```

C*****
C OBTIENE EL DETERMINANTE DEL SISTEMA
C*****

```

```

D=1.0
DO 130 I=1,N
  130 D=D*A(I,I)
140 END
END

```

```

SUBROUTINE INTER(FI,DFI,KODE,CX,CY,X,Y,BOL)

```

```

C*****
C OBTIENE EL VALOR DEL POTENCIAL PARA PUNTOS INTERIOS.
C REORDENA LOS CARACTERES E I Y DFI DE TAL FORMA QUE EL
C POTENCIAL SE ALMACENA EN FI Y SU DERIVADA EN DFI
C*****

```

```

COMMON M,L

```

```

300 DIMENSION F(11),EF(11),MCF(11),CX(11),CY(11),X(11),Y(11),SOL(11)
310 KATAM=1
320 DO 10 I=1,N
330 IF (MCF(I)) 10,10,10
20 CF=EF(I)
340 F(I)=EF(I)
350 E(I)=CF
360 DO CONTINUE
370
380 *****
390 ***** OBTIENE EL VALOR DEL POTENCIAL PARA CADA UNO INTERNO *****
400 *****
410 DO 30 K=1,N
420 SOL(K)=0
430 DO 40 J=1,N
440 CALL INTE ((CX(K),CY(K),X(J),Y(J)),Z(J+1),Z(J+1),A,B)
450 SOL(K)=SOL(K)+EF(I)*X*Y*Z(J)
460 SOL(K)=SOL(K)/(2.*PI)
470 SETUPA
480 END
490
500 SUBROUTINE OUTPUT(XM,YM,PI,PEI,CX,CY,SOL)
510 *****
520 ***** SE LISTAN LAS COORDENADAS DE LOS MUROS DE *****
530 ***** PROXIMA Y LOS VALORES DEL POTENCIAL Y DE *****
540 ***** LA DENSIDAD DEL POTENCIAL ADICIONALES CON EL ID *****
550 ***** ATUAL. SE IMPRIMEN LOS VALORES DEL POTENCIAL *****
560 ***** PARA LOS PUNTOS INTERNO QUE SE REQUIERA *****
570 *****
580 *****
590 *****
600 DIMENSION N(1)
610 DIMENSION ZM(11),YM(11),PI(11),PEI(11),CX(11),CY(11),SOL(11)
620 I=1,N
630
640 2000 FORMAT(11I,7/4X,10F9.2,11I,4/4X,11F9.2//)
650 1,14Y,17X,17Z,11X,10F9.2,11X,10F9.2//)
660 DO 10 I=1,N
670 10 WRITE(A,2000) YM(I),YM(I),PI(I),SOL(I)
680 2010 FORMAT(11I,4E14,7,2X)
690 PEI(I),1000)
700 2020 FORMAT(7/4X,10F9.2,11I,4/4X,11Y,11Y,10F9.2,11Y,10F9.2//)
710 DO 20 K=1,N
720 20 WRITE(A,2020) CY(K),CY(K),SOL(K)
730 2000 FORMAT(7/4X,10F9.2,11I,4/4X)
740 RETURN
750 END

```

Listado del programa SPPBEL

```

100 $RESET FREE
200 FILE 5=DATOS2,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30
300 FILE 6=PRINTER,UNIT=PRINTER,RECORD=22
400
500 C*****
600 C      PROGRAMA PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS POTENCIALES BIDIMEN- *
700 C      SIONALES EMPLEANDO EL METODO DE INTEGRACION DE ELEMENTOS DE *
800 C      FRONTERA. *
900 C      SE EMPLEAN ELEMENTOS CON FUNCIONES LINEALES *
1000 C*****
1100 COMMON N,L
1200 DIMENSION X(51),Y(51),G(50,50),FI(50),DFI(50)
1300 DIMENSION KODE(50),CX(50),CY(50),SOL(50),H(50,50)
1400 NX=50
1500
1600 C*****
1700 C      LECTURA DE DATOS. *
1800 C*****
1900 CALL INPUT (CX,CY,X,Y,KODE,FI)
2000
2100 C*****
2200 C      FORMA EL SISTEMA DE ECUACIONES *
2300 C*****
2400 CALL FMAT (Y,Y,G,H,FI,DFI,KODE,NX)
2500
2600 C*****
2700 C      SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES *
2800 C*****
2900 CALL SLNDP (G,DFI,D,N,NX)
3000
3100 C*****
3200 C      OBTIENE LOS VALORES DEL POTENCIAL EN PUNTOS INTERNOS *
3300 C*****
3400 CALL INTER (FI,DFI,KODE,CX,CY,X,Y,SOL)
3500
3600 C*****
3700 C      IMPRESION DE RESULTADOS. *
3800 C*****
3900 CALL OUTPUT (X,Y,FI,DFI,CX,CY,SOL)
4000
4100 CALL EXIT
4200 END
4300
4400 SUBROUTINE INPUT(CX,CY,X,Y,KODE,FI)
4500 C*****
4600 C      N=NUMERO DE ELEMENTOS DE FRONTERA; *
4700 C      L=NUMERO DE PUNTOS INTERNOS DONDE SE OBTENDRAN LAS *
4800 C      FUNCIONES *
4900 C*****

```



```

COMMON N,L
DIMENSION CX(1),CY(1),X(1),Y(1),KODE(1),FI(1),TITLE(16)
WRITE(6,2000)
2000 FORMAT(1H1,3X,73(14*)/4X,1H*,3X,67HPROGRAMA PARA LA SOLUCION DE PR
10BLENAS POTENCIALES BIDIMENSIONALES, 1X,1H*/4X,1H*,3X,67HSE ENCUEN
1 EL METODO DE INTEGRACION DE ELEMENTOS DE FRONTERA, 35(3X,14*/4X,1
1H*,3X,41HEMPLEAN ELEMENTOS CON FUNCIONES LINEALES, 27X,1H*/4X,1H*,
13X,21HADAPTACION HECHA POR:,47X,1H*/4X,1H*,25X,12H6, RAFAEL ARANDA
1 H.,27X,1H*/4X,1H*,25X,17HJUEL A. GARCIA V.,29Y,1H*/4X,1H*,17X,36H
1 INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM - 1982,18X,1H*/4X,73(14*)
C*****
C SE LEE EL TITULO DEL PROGRAMA *
C*****
READ(5,1000) TITLE
1000 FORMAT(16A4)
WRITE(6,2010) TITLE
2010 FORMAT(/5X,3H***,16A4,3H***)
C*****
C LECTURA DE PARAMETROS BASICOS *
C*****
READ(5,1010) N,L
1010 FORMAT(2I5)
WRITE(6,2020) N,L
2020 FORMAT(/74X,5HDATOS, /74X,34HNUMERO DE ELEMENTOS DE FRONTERA = I3, /
14X,60HNUMERO DE PUNTOS INTERNOS DONDE SE OBTIENEN LAS FUNCIONES =
2I3)
C*****
C LECTURA DE COORDENADAS DE PUNTOS INTERNOS *
C*****
IF (L) 1,2,J
1 DO 10 I=1,L
10 READ(5,1020) CX(I),CY(I)
1020 FORMAT(2F10.0)
C*****
C LECTURA DE COORDENADAS DE PUNTOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS *
C DE FRONTERA *
C*****
2 WRITE(6,2030)
2030 FORMAT(/4X,59HCOORDENADAS DE PUNTOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS DE F
1FRONTERA, /78X,5HPUNTO, 19X,1HX,23X,1HY/)
DO 20 J=1,N
READ(5,1020) X(I),Y(I)
20 WRITE(6,2040) J,X(I),Y(I)
2040 FORMAT(9X,I2,15X,E12.5,12X,E12.5)
C*****
C LECTURA DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA *
C FI=VALOR DEL POTENCIAL EN EL NUDO I SI KODE=0, *
C VALOR DE LA DERIVADA DEL POTENCIAL EN EL NUDO I SI KODE=1 *
C*****
WRITE(6,2050)

```

```

2050 FORMAT(1H1,11X,23HCONDICIONES DE FRONTERA, //9X,4HINUDO,5X,6HCODIGO,
15X,15HVALOR PRESCRITO/)
DO 30 I=1,N
  READ(5,1030) KODE(I),FI(I)
  30 WRITE(2,2030) I,KODE(I),FI(I)
1030 FORMAT(15,F10.0)
2030 FORMAT(10X,I3,8X: I1,8Y,E12.5)
  RETURN
  END

```

```

SUBROUTINE FMAT(X,Y,G,H,FI,DFI,KODE,NX)

```

```

C*****
C      SE OBTIENEN LAS MATRICES G Y H, PARA FORMAR EL SISTEMA:
C      A X = F
C*****

```

```

COMMON N,NL
DIMENSION X(1),Y(1),G(NX,NX),H(NX,NX),FI(1),KODE(1),DFI(1)

```

```

C*****
C      LIMPIA LAS MATRICES G Y H
C*****

```

```

DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,N
  G(I,J)=0.
  10 H(I,J)=0.

```

```

C*****
C      OBTIENE LAS MATRICES H Y G
C*****

```

```

  X(N+1)=X(1)
  Y(N+1)=Y(1)
DO 170 I=1,N
  NF=I+1
  NS=I+NF-2
DO 80 JL=NF,NS
  IF (JL-I) 30,30,20
  20 J=JL-N
  30 J=JL
  40 CALL INTE (X(I),Y(I),X(J),Y(J),X(J+1),Y(J+1),A1,A2,B1,B2)
  IF (J=N) 50,40,40
  50 H(I,J+1)=H(I,J+1)+A2
  G(I,J+1)=G(I,J+1)+B2
  GO TO 70
  60 H(I,I)=H(I,I)+A2
  G(I,I)=G(I,I)+B2
  70 H(I,J)=H(I,J)+A1
  G(I,I)=G(I,I)+B1
  80 H(I,I)=H(I,I)-A1-A2
  NF=I+NF-1
  NS=I+NF
DO 120 JL=NF,NS
  IF (JL-N) 100,100,90
  90 J=JL-N
  90 TO 110
  100 J=JL

```

```

200 110 CALL INLO (X(J),Y(J),X(J+1),Y(J+1),B1,B2)
200 IF (J-J-NF) 120,120,130
300 120 CH=B1
400 B1=B2
500 B2=CH
600 130 IF (J-N) 140,150,150
700 140 G(I,J+1)=G(I,J)+B2
800 GO TO 140
900 150 G(I,1)=G(I,1)+B2
000 160 G(I,J)=G(I,J)+B1
100 170 CONTINUE
100 C*****
100 C SE ARREGLA EL SISTEMA DE ECUACIONES QUE SE RESOLVERA
100 C*****
200 DO 190 J=1,N
300 IF (KODE(J)) 190,190,180
400 180 DO 190 I=1,N
500 CH=G(I,J)
600 G(I,J)=-H(I,J)
700 H(I,J)=-CH
800 190 CONTINUE
900 C*****
900 C ORIGINALMENTE DFI CONTIENE EL VECTOR DE TERMINOS
900 C INDEPENDIENTES, DESPUES DE RESOLVER EL SISTEMA CONTIENE
900 C LOS VALORES DE LAS INCOGNITAS
900 C*****
000 DO 200 I=1,N
100 DFI(I)=0.
200 DO 200 J=1,N
300 DFI(I)=DFI(I)+H(I,J)*F1(J)
400 200 CONTINUE
500 RETURN
600 END
700
800 SUBROUTINE INTE(XP,YP,X1,Y1,X2,Y2,A1,A2,B1,B2)
900 C*****
900 C EN ESTA SUBROUTINA SE OBTIENEN LOS VALORES DE LOS
900 C ELEMENTOS FUERA DE LA DIAGONAL DE LAS MATRICES
900 C H Y G. SE EMPLEA INTEGRACION NUMERICA (FORMULA
900 C DE CUATRO PUNTOS DE GAUSS) A TRAVES DE LOS ELE-
900 C MENTOS DE FRONTERA
900 C
900 C DIST-DISTANCIA DEL PUNTO BAJO CONSIDERACION A LOS
900 C ELEMENTOS DE FRONTERA
900 C RA-DISTANCIA DEL PUNTO BAJO CONSIDERACION A
900 C LOS PUNTOS DE INTEGRACION EN LOS ELEMENTOS DE
900 C FRONTERA
900 C*****
000 DIMENSION XCO(4),YCO(4),XSI(4),OME(4)
100 XSI(1)=0.36113431
200 XSI(2)=-YSI(1)
300 XSI(3)=0.33998104
400 XSI(4)=-XSI(3)
500 OME(1)=0.34785487

```



```

300 C*****
700 C      A=MATRIZ DE COEFICIENTES DEL SISTEMA
000 C      B=VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES. EN ESTE
100 C      VECTOR SE ALMACENA LA SOLUCION
200 C      N=NUMERO REAL DE INCOGNITAS
300 C      NX=DIMENSION DE LA MATRIZ A, EN FILAS Y COLUMNAS
400 C*****
500 DIMENSION A(NX,NX),B(NX)
600 EPS=0.000001
700 N1=N-1
800 DO 100 K=1,N1
900 K1=K+1
000 C=A(K,K)
100 IF (ABS(C)-EPS) 10,10,60
200
300 C*****
400 C      INTERCAMBIA FILAS PARA OBTENER COEFICIENTES NO NULOS
500 C      EN LA DIAGONAL PRINCIPAL
600 C*****
700 DO 40 J=1,N
800 IF (ABS(A(J,K))-EPS) 40,40,20
900 DO 30 L=K,N
000 C=A(J,L)
100 A(K,L)=A(J,L)
200 A(J,L)=C
300 C=B(K)
400 B(K)=B(J)
500 B(J)=C
600 C=A(K,K)
700 DO TO 40
800 CONTINUE
900 WRITE(6,2000) K
000 2000 FORMAT(1X,'SINGULARIDAD EN EL FILA',J)
100 B=0
200 GO TO 160
300
400 C*****
500 C      DIVIDE EL FILA J, ENTRE EL COEFICIENTE DE LA
600 C      DIAGONAL
700 C*****
800 DO 60 K=K1,N
900 D=A(K,K)
000 DO 70 J=K1,N
100 A(K,J)=A(K,J)/D
200 B(K)=B(K)/D
300
400 C*****
500 C      ELIMINA LA INCOGNITA X(K) DEL FILA I
600 C*****
700 DO 90 I=K1,N
800 C=A(I,K)
900 DO 80 J=K1,N
000 A(I,J)=A(I,J)-C*A(K,J)
100 B(I)=B(I)-C*B(K)
200 CONTINUE
300 C*****

```



```

C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI,DFI,CX,CY,SOL)
*****
SE LISTAN LAS COORDENADAS DE LOS NUDOS DE
FRONTERA Y LOS VALORES DEL POTENCIAL Y DE
LA DERIVADA DEL POTENCIAL EN ELLOS.
ALLI SE MUESTRAN LOS VALORES CON ELLOS.
PARA LOS NODOS INTERIORS DEL POTENCIAL
*****
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(1),DFI(1),CX(1),CY(1),SOL(1))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(2),DFI(2),CX(2),CY(2),SOL(2))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(3),DFI(3),CX(3),CY(3),SOL(3))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(4),DFI(4),CX(4),CY(4),SOL(4))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(5),DFI(5),CX(5),CY(5),SOL(5))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(6),DFI(6),CX(6),CY(6),SOL(6))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(7),DFI(7),CX(7),CY(7),SOL(7))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(8),DFI(8),CX(8),CY(8),SOL(8))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(9),DFI(9),CX(9),CY(9),SOL(9))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(10),DFI(10),CX(10),CY(10),SOL(10))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(11),DFI(11),CX(11),CY(11),SOL(11))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(12),DFI(12),CX(12),CY(12),SOL(12))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(13),DFI(13),CX(13),CY(13),SOL(13))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(14),DFI(14),CX(14),CY(14),SOL(14))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(15),DFI(15),CX(15),CY(15),SOL(15))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(16),DFI(16),CX(16),CY(16),SOL(16))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(17),DFI(17),CX(17),CY(17),SOL(17))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(18),DFI(18),CX(18),CY(18),SOL(18))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(19),DFI(19),CX(19),CY(19),SOL(19))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(20),DFI(20),CX(20),CY(20),SOL(20))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(21),DFI(21),CX(21),CY(21),SOL(21))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(22),DFI(22),CX(22),CY(22),SOL(22))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(23),DFI(23),CX(23),CY(23),SOL(23))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(24),DFI(24),CX(24),CY(24),SOL(24))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(25),DFI(25),CX(25),CY(25),SOL(25))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(26),DFI(26),CX(26),CY(26),SOL(26))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(27),DFI(27),CX(27),CY(27),SOL(27))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(28),DFI(28),CX(28),CY(28),SOL(28))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(29),DFI(29),CX(29),CY(29),SOL(29))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(30),DFI(30),CX(30),CY(30),SOL(30))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(31),DFI(31),CX(31),CY(31),SOL(31))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(32),DFI(32),CX(32),CY(32),SOL(32))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(33),DFI(33),CX(33),CY(33),SOL(33))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(34),DFI(34),CX(34),CY(34),SOL(34))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(35),DFI(35),CX(35),CY(35),SOL(35))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(36),DFI(36),CX(36),CY(36),SOL(36))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(37),DFI(37),CX(37),CY(37),SOL(37))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(38),DFI(38),CX(38),CY(38),SOL(38))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(39),DFI(39),CX(39),CY(39),SOL(39))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(40),DFI(40),CX(40),CY(40),SOL(40))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(41),DFI(41),CX(41),CY(41),SOL(41))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(42),DFI(42),CX(42),CY(42),SOL(42))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(43),DFI(43),CX(43),CY(43),SOL(43))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(44),DFI(44),CX(44),CY(44),SOL(44))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(45),DFI(45),CX(45),CY(45),SOL(45))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(46),DFI(46),CX(46),CY(46),SOL(46))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(47),DFI(47),CX(47),CY(47),SOL(47))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(48),DFI(48),CX(48),CY(48),SOL(48))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(49),DFI(49),CX(49),CY(49),SOL(49))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(50),DFI(50),CX(50),CY(50),SOL(50))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(51),DFI(51),CX(51),CY(51),SOL(51))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(52),DFI(52),CX(52),CY(52),SOL(52))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(53),DFI(53),CX(53),CY(53),SOL(53))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(54),DFI(54),CX(54),CY(54),SOL(54))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(55),DFI(55),CX(55),CY(55),SOL(55))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(56),DFI(56),CX(56),CY(56),SOL(56))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(57),DFI(57),CX(57),CY(57),SOL(57))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(58),DFI(58),CX(58),CY(58),SOL(58))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(59),DFI(59),CX(59),CY(59),SOL(59))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(60),DFI(60),CX(60),CY(60),SOL(60))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(61),DFI(61),CX(61),CY(61),SOL(61))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(62),DFI(62),CX(62),CY(62),SOL(62))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(63),DFI(63),CX(63),CY(63),SOL(63))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(64),DFI(64),CX(64),CY(64),SOL(64))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(65),DFI(65),CX(65),CY(65),SOL(65))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(66),DFI(66),CX(66),CY(66),SOL(66))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(67),DFI(67),CX(67),CY(67),SOL(67))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(68),DFI(68),CX(68),CY(68),SOL(68))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(69),DFI(69),CX(69),CY(69),SOL(69))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(70),DFI(70),CX(70),CY(70),SOL(70))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(71),DFI(71),CX(71),CY(71),SOL(71))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(72),DFI(72),CX(72),CY(72),SOL(72))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(73),DFI(73),CX(73),CY(73),SOL(73))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(74),DFI(74),CX(74),CY(74),SOL(74))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(75),DFI(75),CX(75),CY(75),SOL(75))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(76),DFI(76),CX(76),CY(76),SOL(76))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(77),DFI(77),CX(77),CY(77),SOL(77))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(78),DFI(78),CX(78),CY(78),SOL(78))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(79),DFI(79),CX(79),CY(79),SOL(79))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(80),DFI(80),CX(80),CY(80),SOL(80))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(81),DFI(81),CX(81),CY(81),SOL(81))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(82),DFI(82),CX(82),CY(82),SOL(82))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(83),DFI(83),CX(83),CY(83),SOL(83))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(84),DFI(84),CX(84),CY(84),SOL(84))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(85),DFI(85),CX(85),CY(85),SOL(85))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(86),DFI(86),CX(86),CY(86),SOL(86))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(87),DFI(87),CX(87),CY(87),SOL(87))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(88),DFI(88),CX(88),CY(88),SOL(88))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(89),DFI(89),CX(89),CY(89),SOL(89))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(90),DFI(90),CX(90),CY(90),SOL(90))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(91),DFI(91),CX(91),CY(91),SOL(91))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(92),DFI(92),CX(92),CY(92),SOL(92))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(93),DFI(93),CX(93),CY(93),SOL(93))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(94),DFI(94),CX(94),CY(94),SOL(94))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(95),DFI(95),CX(95),CY(95),SOL(95))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(96),DFI(96),CX(96),CY(96),SOL(96))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(97),DFI(97),CX(97),CY(97),SOL(97))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(98),DFI(98),CX(98),CY(98),SOL(98))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(99),DFI(99),CX(99),CY(99),SOL(99))
C) SROUTANT OUTPUT(X,Y,FI(100),DFI(100),CX(100),CY(100),SOL(100))

```

Listado del programa SPEBEC

```

100 $RESET FREE
200 FILE 5=DATOS,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30
300 FILE 6=PRINTER,UNIT=PRINTER,RECORD=22
400
500 C*****
600 C      PROGRAMA PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS ELASTICOS BI-
700 C      DIMENSIONALES EMPLEANDO EL METODO DE ELEMENTOS DE
800 C      FRONTERA.
900 C      SE EMPLEAN ELEMENTOS CON FUNCIONES CONSTANTES
000 C*****
100 COMMON N,L,NC(5),M,SE,YNH
200 DIMENSION X(75),Y(75),XM(75),YM(75),G(150,150),FI(150),DFI(150)
300 DIMENSION KODE(150),CX(20),CY(20),SSOL(120),DSOL(80),H(150,150)
400 NX=150
500
600 C*****
700 C      LECTURA DE DATOS
800 C*****
900 CALL INPUT (CX,CY,X,Y,KODE,FI)
000
100 C*****
200 C      FORMA EL SISTEMA DE ECUACIONES
300 C*****
400 CALL EMAT (X,Y,XM,YM,G,H,FI,DFI,KODE,NX)
500
600 C*****
700 C      SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES
800 C*****
900 NN=2*N
000 CALL SLNPD (G,DFI,D,NN,NX)
100
200 C*****
300 C      OBTIENE LOS VALORES DEL ESFUERZO Y DESPLAZAMIENTO
400 C      EN PUNTOS INTERNOS
500 C*****
600 CALL INTER (FI,DFI,KODE,CX,CY,X,Y,SSOL,DSOL)
700
800 C*****
900 C      IMPRESION DE RESULTADOS
000 C*****
100 CALL OUTPUT (XM,YM,FI,DFI,CX,CY,SSOL,DSOL)
200
300 CALL EXIT
400 END
500
600 SUBROUTINE INPUT(CX,CY,X,Y,KODE,FI)
700
800 C*****
900 C      N=NUMERO DE ELEMENTOS DE FRONTERA
000 C      L=NUMERO DE PUNTOS INTERNOS DONDE SE OBTENDRAN LAS
100

```



```

200          FUNCIONES
200          M=NUMERO DE SUPERFICIES DIFERENTES
200          NC(I)=ULTIMO NUDO DE LA SUPERFICIE I
200          GE=MODULO DE CORTANTE
200          XNU=MODULO DE POISSON
200          C*****
200          COMMON N,L,NC(5),M,GE,XNU
200          DIMENSION CX(1),CY(1),X(1),Y(1),KODF(1),FI(1),TITLE(16)
200          WRITE(6,2000)
200          2000 FORMAT(1H1,3X,73(1H*)/4X,1H*,3X,45HPROGRAMA PARA LA SOLUCION DE PR
200          10BLEMAS ELASTICOS BIDIMENSIONALES, 3X,1H*/4X,1H*,3X,45HSE EMPLEA E
200          IL METODO DE INTEGRACION DE ELEMENTOS DE FRONTERA, 5E,5X,1H*/4X,1H*
200          1,3X,45HEMPLEAN ELEMENTOS CON FUNCIONES CONSTANTES, 25X,1H*/4X,1H*,
200          13X,21HADAPTACION HECHA POR: 47X,1H*/4X,1H*,25X,19HG. RAFAEL ARANDA
200          1 H.,27X,1H*/4X,1H*,25X,17HJOEL A. GARCIA V.,22X,1H*/4X,1H*,17X,36H
200          1INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM - 1982,18X,1H*/4X,75(1H*)
200          C*****
200          C *****
200          C          SE LEER EL TITULO DEL PROBLEMA
200          C *****
200          READ(5,1000) TITLE
200          1000 FORMAT(16A4)
200          WRITE(6,2010) TITLE
200          2010 FORMAT(75X,3H***,16A4,3H***)
200          C *****
200          C          LECTURA DE PARAMETROS BASICOS
200          C *****
200          READ(5,1010) N,L,N,(NC(K),K=1,5),GE,XNU
200          1010 FORMAT(8I5,2F10,0)
200          WRITE(6,2020) N,L,GE,XNU
200          2020 FORMAT(//4X,5HDATOS,//4X,34HNUMERO DE ELEMENTOS DE FRONTERA = 13,
200          1/4X,40HNUMERO DE PUNTOS INTERNOS DONDE SE OBTIENEN LAS FUNCIONES =
200          1 13,74X,21HMODULO DE CORTANTE = 314.7,74X,20HMODULO DE POISSON = 5
200          114.7)
200          IF (M) 20,20,10
200          10 WRITE(6,2030) N,(NC(K),K=1,N)
200          2030 FORMAT(//4X,41HEL NUMERO DE SUPERFICIES DIFERENTES ES = 13,74X,
200          144HLOS ULTIMOS NUDOS EN ESTAS SUPERFICIES SON 5/(2X,13))
200          C *****
200          C          LECTURA DE COORDENADAS DE PUNTOS INTERNOS
200          C *****
200          20 DD 30 I=1,L
200          30 READ(5,1020) CX(I),CY(I)
200          1020 FORMAT(2F10,0)
200          C *****
200          C          LECTURA DE COORDENADAS DE PUNTOS EXTREMOS DE LOS
200          C          ELEMENTOS DE FRONTERA
200          C *****
200          WRITE(6,2040)
200          2040 FORMAT(74X,5HCOORDENADAS DE PUNTOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS DE F
200          1FRONTERA,775X,5HPUNTO,13X,11X,25X,14Y,7)

```

```

0000      T=40 I=1,N
0001      WILD(5,1000) X(I),Y(I)
0002      WRITE(6,2060) I,X(I),Y(I)
0003      2060 FORMAT(2E10.4)
0004      2060 FORMAT(12,15X,E12.5,12X,E12.5)
0005
0006 *****
0007 LEADURA DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA
0008 FI(I)=VALOR DEL DESPLAZAMIENTO EN LA COORDENADA I SI
0009 KODE=0, VALOR DEL ESFUERZO SI KODE=1
0010 *****
0011
0012 WRITE(6,2060)
0013 2060 FORMAT(1E1,7/12X,23CONDICIONES DE FRONTERA,7/15X,15VALOR PRESCRI
0014 1TO,10X,15VALOR PRESCRITO,7/8X,5HNUO,6X,11HDIRECCION X,4X,6HCOODIG
0015 20,4X,11HDIRECCION Y,4X,6HCOODIG,7)
0016 DO 50 I=1,N
0017 READ(5,1040) KODE(I*I-1),FI(2*I-1),KODE(2*I),FI(2*I)
0018 50 WRITE(6,2070) I,FI(2*I-1),KODE(2*I-1),FI(2*I),KODE(2*I)
0019 1040 FORMAT(15,F10.0,15,F10.0)
0020 2070 FORMAT(8X,13.4Y,E14.7,6X,11,4X,E14.7,6X,11)
0021 RETURN
0022 END
0023
0024 SUBROUTINE FMAT(X,Y,XM,YM,G,H,FI,DFI,KODE,NX)
0025
0026 *****
0027 SE OBTIENEN LAS MATRICES G Y H PARA FORMAR EL SISTEMA
0028
0029  $A \cdot X = F$ 
0030 *****
0031
0032 COMMON /AL/ HCOOD, HCOOY, HCOOZ
0033 DIMENSION X(13,1),XM(1),YM(1),G(NX,NX),H(NX,NX)
0034 DIMENSION F(13),DFI(1),DFI2(1)
0035
0036 *****
0037 OBTIENE LAS COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO Y LAS ALMACENA
0038 EN LAS ARREGLOS XM Y YM
0039 *****
0040
0041 Y(MI)=Y(1)
0042 Y(MI)=Y(1)
0043 DO 10 I=1,N
0044 YMI=(Y(I)+Y(I-1))/2
0045 YMI=(YMI+YMI-1)/2
0046 IF (N-1) 40,40,20
0047 20 YMI=(YMI+YMI-1)/2
0048 YMI=(YMI+YMI-1)/2
0049 DO 30 I=1,N
0050 YMI=(X(NS(I))+X(NS(K-1)+1))/2
0051 30 YMI=(YMI+YMI-1)/2
0052
0053 *****
0054 OBTIENE LAS MATRICES G Y H
0055 *****
0056
0057 DO 40 I=1,N
0058 DO 40 J=1,N
0059 G(I,J)=100.00

```



```

600 FXN=1.-2.*XNU
600 RXN=3.-4.*XNU
600 G11=G11+(RXN*ALOG(1./RA)+RD1)*ONE(I)*RZ/DR
600 G12=G12+RXN*RD2*ONE(I)*RZ/DR
600 G22=G22+(RXN*ALOG(1./RA)+RD2)*ONE(I)*RZ/DR
600 H11=H11-DIST*(RXN*(ETA1*RD2-ETA2*RD1)/DRA*ONE(I)*RZ
600 H12=H12-(DRA*FXN*(ETA1*RD2-ETA2*RD1))*ONE(I)*RZ/DR
600 H21=H21-(DRA*FXN*(ETA2*RD1-ETA1*RD2))*ONE(I)*RZ/DR
600 H22=H22-DIST*(FXN*2.*RD2)*ONE(I)*RZ/DRA
600 RETURN
600 END

```

```

SUBROUTINE INLO(X1,Y1,X2,Y2,G11,G12,G22)

```

```

C*****
C SE OBTIENEN LOS VALORES DE LOS ELEMENTOS DE
C LA DIAGONAL DE LA MATRIZ G
C*****

```

```

COMMON N,L,NC(5),M,GE,XNU

```

```

PI=4.*ATAN(1.)
AX=(X2-X1)/2.
AX2=AX*AX
AY=(Y2-Y1)/2.
AY2=AY*AY
SR=SQRT(AX2+AY2)
DE=4.*PI*GE*(1.-XNU)
RXN=3.-4.*XNU
SR2=4.*SR**2
ALN=1.-ALOG(SR)
G11=SR*(RXN*ALN+(X2-X1)**2/SR2)/DE
G12=(X2-X1)*(Y2-Y1)/(4.*SR*DE)
G22=SR*(RXN*ALN+(Y2-Y1)**2/SR2)/DE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SLNPD(A,B,D,N,NX)

```

```

C*****
C SOLUCION DE UN SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES.
C SE EMPLEA EL METODO DE ELIMINACION GAUSSIANA.
C SE PROPORCIONA UN PIVOTE PARA INTERCAMBIAR
C RENGLONES EN CASO DE ENCONTRARSE UN CERO EN
C LA DIAGONAL
C*****

```

```

C*****
C A=MATRIZ DE COEFICIENTES DEL SISTEMA
C B=VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES. EN ESTE
C VECTOR SE ALMACENA LA SOLUCION
C N=NUMERO REAL DE INCOGNITAS
C NX=DIMENSION DE LA MATRIZ A. EN RENGLONES Y COLUMNAS
C*****

```

```

DIMENSION A(NX,NX),B(NX)

```

```

EPS=0.000001
N1=N-1
DO 100 K=1,N1
K1=K+1
C=A(K,K)

```

IF (ABS(C)-EPS) 10,10,40

```
C*****
C INTERCAMBIA RENGLONES PARA OBTENER COEFICIENTES NO
C NULOS EN LA DIAGONAL PRINCIPAL
C*****
```

```
10 DO 40 J=K1,M
   IF (ABS(A(J,I))-EPS) 40,40,20
20 DO 30 L=K1,M
   C=A(K,L)
   A(F,L)=A(J,L)
30 A(L,I)=C
   C=B(K)
   B(I)=B(J)
   R(I)=C
   C=A(K,K)
   GO TO 40
40 CONTINUE
50 WRITE(6,2000) K
2000 FORMAT(1X,2AH SINGULARIDAD EN EL RENGLON ,I5)
D=0.0
GO TO 140
```

```
C*****
C DIVIDE EL RENGLON J, ENTRE EL COEFICIENTE DE LA
C DIAGONAL
C*****
```

```
40 C=A(K,K)
   DO 70 J=K1,N
   70 A(I,J)=A(K,J)/C
   B(K)=B(K)/C
```

```
C*****
C ELIMINA LA INCOGNITA X(K) DEL RENGLON I
C*****
```

```
DO 80 I=K1,N
   C=A(I,K)
   DO 80 J=K1,N
   80 A(I,J)=A(I,J)-C*A(K,J)
   90 R(I)=B(I)-C*B(K)
100 CONTINUE
```

```
C*****
C OBTIENE LA ULTIMA INCOGNITA
C*****
```

```
IF (ABS(A(N,N)-EPS)) 50,50,110
110 B(N)=R(N)/A(N,N)
```

```
C*****
C SUSTITUCION REGRESIVA PARA CONOCER LAS DEMAS INCOGNITAS
C*****
```

```
DO 120 L=1,M
   R=L
   DO 120 J=1,L-1
```



```

1000 I122=(2*Y1)-D222/(2*K)+DFT(2*KJ-1)*S112+DFT(2*KJ)*S22-FI(2*KJ-1)*S21-FI(2
1001 2*KJ)*S12
1002 CALL SIGM (X(X*(Y1-Y11),Y11),Y11),Y11),Y11),Y11),Y11),Y11),D111,D211,D112,
1003 S211,D122,D212,D111,S211,S112,S211,S211,S122,S222)
1004 S211=(2*Y1)-D211/(2*K)+DFT(2*KJ-1)*S111+DFT(2*KJ)*S211-FI(2*KJ-1)*S1
1005 S112=(2*Y1)-D211/(2*K)+DFT(2*KJ-1)*S112+DFT(2*KJ)*S211-FI(2*KJ-1)*S1
1006 S122=(2*Y1)-D211/(2*K)+DFT(2*KJ-1)*S122+DFT(2*KJ)*S211-FI(2*KJ-1)*S1
1007 S222=(2*Y1)-D211/(2*K)+DFT(2*KJ-1)*S222+DFT(2*KJ)*S211-FI(2*KJ-1)*S1
1008 S111=(2*Y1)-D211/(2*K)+DFT(2*KJ-1)*S111+DFT(2*KJ)*S211-FI(2*KJ-1)*S1
1009 S121=(2*Y1)-D211/(2*K)+DFT(2*KJ-1)*S121+DFT(2*KJ)*S211-FI(2*KJ-1)*S1
1010 S212=(2*Y1)-D211/(2*K)+DFT(2*KJ-1)*S212+DFT(2*KJ)*S211-FI(2*KJ-1)*S1
1011 S222=(2*Y1)-D211/(2*K)+DFT(2*KJ-1)*S222+DFT(2*KJ)*S211-FI(2*KJ-1)*S1
1012 CONTINUE
1013 RETURN
1014 END

```

```

SUBROUTINE SIGM(YP,YP,X1,Y1,Y2,Y3,D11,D211,D112,D212,D122,D222
1, S111, S211, S112, S211, S122, S222)

```

```

C*****
C EN ESTA SUBROUTINA SE OBTIENEN LOS VALORES DE LAS M2
C PUNTO P Y T PARA OBTENER EL ESFUERZO EN CUALQUIER
C PUNTO INTERNO
C*****

```

```

COMMON N,L,M,C(E1,M,SE,YN)
DIMENSION YCO(4),YCO(4),XS1(4),ONE(4)
YCO(1)=0.0
YCO(2)=0.0
YCO(3)=0.0
YCO(4)=0.0
XS1(1)=0.0
XS1(2)=0.0
XS1(3)=0.0
XS1(4)=0.0
ONE(1)=0.0
ONE(2)=0.0
ONE(3)=0.0
ONE(4)=0.0
AX=(X2-X1)/2.
AY=(Y2-Y1)/2.
AX2=AX*AX
AY2=AY*AY
ATAN1=(Y2-Y1)/(2.*SQRT(AY2+AY2))
ATAN2=(Y1-Y2)/(2.*SQRT(AY2+AY2))
IF (AX) GO TO 20,10
10 TANG=AY/AX
YCO(2)=TANG*YCO(1)
DIST=ABS(XP-Y1)
GO TO 30
20 DIST=ABS(XP-Y1)
30 S11=(Y1-YP)*(Y1-YP)-(X2-XP)*(Y1-YP)
IF (SIG) GO TO 30,50
40 DIST=-DIST
50 D11=0.0
D211=0.0
D112=0.0
D212=0.0
D122=0.0
D222=0.0
S111=0.0
S211=0.0
S112=0.0
S212=0.0

```



```

000 S112=0.0
001 S122=0.0
002 S222=0.0
003 FA=1.-4.*XNLI
004 BYN=1.-2.*XNLI
005 DE=4.*PI*(1.-XNLI)
006 DO 60 I=1,4
007 XCO(I)=AX*XEI(I)+BX
008 YCO(I)=AY*XSI(I)+BY
009 RA=SQRT((XP-XCO(I))**2+(YP-YCO(I))**2)
010 RA2=RA*RA
011 RD1=(XCO(I)-XP)/RA
012 RD12=RD1*RD1
013 RD13=RD12*RD1
014 RD2=(YCO(I)-YP)/RA
015 RD22=RD2*RD2
016 RD23=RD22*RD2
017 ORZ=OME(I)*SQRT(AX2+AY2)
018 DR=DE*RA
019 DIR=2.*DIST/RA
020 GDR=2.*GE/(DE*RA2)
021 D11=D111+(RXN*RD1+2.*RD13)*ORZ/DR
022 D21=D211+(2.*RD12*RD2-RXN*RD2)*ORZ/DE
023 D112=D111+(RXN*RD1+2.*RD13)*ORZ/DE*ORZ
024 D212=D211+(RXN*RD1+2.*RD13)*ORZ/DR*ORZ
025 D122=D121+(2.*RD1*RD22-RXN*RD1)/DR*ORZ
026 D222=D221+(RXN*RD2+2.*RD23)/DR*ORZ
027 S11=S111+(DIR*(RXN*RD1+XNU*2.*RD1-4.*RD13)+4.*XNU*ETA1*RD12+RXN*
028 12.*ETA1*RD12+2.*ETA1)-FA*ETA1)*GDR*ORZ
029 S21=S211+(DIR*(RXN*RD2-4.*RD12*RD2)+4.*XNU*ETA1*RD1+RD2+RXN*2.*
030 1ETA2*RD12-FA*ETA2)*GDR*ORZ
031 S12=S112+(DIR*(XNU*RD2-4.*RD12*RD2)+2.*XNU*(ETA1*RD2*RD1+ETA2*RD1
032 12)*RXN*(2.*ETA1*RD1*RD2+ETA2))*GDR*ORZ
033 S22=S212+(DIR*(XNU*RD1-4.*RD1*RD22)+2.*XNU*(ETA1*RD22+ETA2*RD1*RD
034 12)*RXN*(2.*ETA2*RD1*RD1+ETA1))*GDR*ORZ
035 S122=S121+(DIR*(RXN*RD1-4.*RD1*RD22)+4.*XNU*(ETA2*RD1*RD2+RXN*2.*ET
036 1A1*RD22-FA*ETA1)*GDR*ORZ
037 S222=S221+(DIR*(RXN*RD2+2.*XNU*RD2-4.*RD13)+4.*XNU*(ETA2*RD22+RXN*(
038 12.*ETA2*RD22+2.*ETA2)-FA*ETA2)*GDR*ORZ
039 RETURN
040 END

```

SUBROUTINE OUTPUT (XM, YM, FI, DF1, CX, CY, SSOL, DSOL)

```

000 C*****
001 C SE LISTAN LAS COORDENADAS DE LOS NUDOS DE FRONTERA Y
002 C LOS VALORES DEL DESPLAZAMIENTO Y DE LA FUERZA DE
003 C SUPERFICIE ASOCIADOS CON ELLOS.
004 C ADENAS SE IMPRIMEN LOS VALORES DEL DESPLAZAMIENTO Y
005 C DEL ESFUERZO PARA LOS PUNTOS INTERNOS DONDE SE REQUIERA
006 C*****

```

```

007 COMMON N,L,NC(5),M,GE,XNLI
008 DIMENSION XM(1),YM(1),FI(1),DF1(1),CX(1),CY(1),SSOL(1),DSOL(1)
009 WRITE(6,2000)
010 FORMAT(1H1,7/4X,10HRESULTADOS,7/4X,17HNUDOS DE FRONTERA,7/10X,1HX
011 1,17X,1HY,11X,16HDESP.L3ZAMIENTO Y,3Y,16HDESP.LAZAMIENTO Y,3X,16HFUER
012 1ZA DE SUP. X,3X,16HFUERZA DE SUP. Y,7)
013 DO 10 I=1,N
014 10 WRITE(6,2010) XM(I),Y(I),FI(2*I-1),FI(2*I),DF1(2*I-1),DF1(2*I)
015 2010 FORMAT(6,5Y,E14,7)
016 WRITE(6,2020)
017 2020 FORMAT(7/4X,15HPUNTOS INTERNOS,7/10X,1HX,16X,1HY,5Y,16HDESP.LAZAMIE
018 INTO X,3X,16HDESP.LAZAMIENTO Y,5X,7HSTGMA X,10X,6HTAG XY,11X,7HSTGMA
019 2 Y,7)
020 DO 20 K=1,L
021 20 WRITE(6,2030) CX(K),CY(K),DSOL(2*K-1),DSOL(2*K),SSOL(3*K-2),SSOL(3
022 1*K-1),SSOL(3*K)
023 2030 FORMAT(7,3X,E14,7)
024 RETURN
025 END

```



```

C*****
000 COMMON N,L,NC(5),M
000 DIMENSION CX(1),CY(1),X(1),Y(1),KODE(1),FI(1),TITLE(16)
000 WRITE(6,2000)
000 2000 FORMAT(1H1,3X,78(1H*)/4X,1H*,3X,67HEROGRAMA PARA LA SOLUCION DE PR
000 10BLEMAS POTENCIALES BIDIMENSIONALES,,1X,1H*/4X,1H*,3X,63HSE EMPLEA
000 1 EL METODO DE INTEGRACION DE ELEMENTOS DE FRONTERA,,5X,5Y,1H*/4X,1
000 1H*,3X,43HEMPLEAN ELEMENTOS CON FUNCIONES CONSTANTES,,25X,1H*/4X,1H
000 1*,3X,21HADAPTACION HECHA POR:,47X,1H*/4X,1H*,25X,19HG. RAFAEL ARAN
000 1DA H.,27X,1H*/4X,1H*,25X,17HJUEL A GARCIA V.,28X,1H*/4X,1H*,17X,3
000 16HINSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM - 1982,18X,1H*/4X,70(1H*))
000
000 C*****
000 C SE LEE EL TITULO DEL PROBLEMA *
000 C*****
000 READ(5,1000) TITLE
000 1000 FORMAT(16A4)
000 WRITE(6,2010) TITLE
000 2010 FORMAT(5X,3H***,16A4,3H***)
000
000 C*****
000 C LECTURA DE PARAMETROS BASICOS *
000 C*****
000 READ(5,1010) N,L,M,(NC(K),K=1,5)
000 1010 FORMAT(3I5)
000 WRITE(6,2020) N,L
000 2020 FORMAT(/4X,5HDATOS,/,4X,34HNUMERO DE ELEMENTOS DE FRONTERA = 13, /
000 14X,20HNUMERO DE PUNTOS INTERNOS DONDE SE OBTIENEN LAS FUNCIONES =
000 113)
000 15 (M) 20,20,10
000 10 WRITE(6,2030) M,(NC(K),K=1,M)
000 2030 FORMAT(/4X,32HNUMERO DE SUPERFICIES DIFERENTES = 13,/,4X,37HNUDOS U
000 14HLTIMOS EN ESTAS SUPERFICIES = 5(2X,13))
000
000 C*****
000 C LECTURA DE COORDENADAS DE PUNTOS INTERNOS *
000 C*****
000 DO 30 I=1,L
000 30 READ(5,1020) CX(I),CY(I)
000 1020 FORMAT(2F10,0)
000
000 C*****
000 C LECTURA DE COORDENADAS DE PUNTOS EXTREMOS DE LOS *
000 C ELEMENTOS DE FRONTERA *
000 C*****
000 WRITE(6,2040)
000 2040 FORMAT(/4X,59HCOORDENADAS DE PUNTOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS DE F
000 1RONTERA,/,4X,54HPUNTO,19X,14Y,23X,14Y/)
000 DO 40 J=1,N
000 40 READ(5,1020) X(1),Y(1)
000 40 WRITE(6,2050) I,X(1),Y(1)
000 2050 FORMAT(9X,12,15X,E12.5,12X,E12.5)
000
000 C*****
000 C LECTURA DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA *

```

```

00      FI=VALOR DEL POTENCIAL EN EL NUDO I SI KODE=0,          *
00      VALOR DE LA DERIVADA DEL POTENCIAL EN EL NUDO I SI KODE=1 *
00      C*****
00      WRITE(6,2060)
00      2060 FORMAT(1H1,11X,23HCONDICIONES DE FRONTERA, //9X,4HNUDO,4X,6HCODIGO,
00      157,15HVALOR PRESCRITO/)
00      DO 50 I=1,N
00      REAL(5,1040) KODE(I),FI(I)
00      1040 FORMAT(15,F10.0)
00      50 WRITE(6,2070) I,KODE(I),FI(I)
00      2070 FORMAT(10X,I3,SX,I1,SX,E12.5)
00      RETURN
00      END
00
00      SUBROUTINE FMAT(Y,Y,YM,YM,G,H,FI,DFI,KODE,NX)
00
00      C*****
00      C SE OBTIENEN LAS MATRICES G Y H, PARA FORMAR EL SISTEMA: *
00      C A X = F *
00      C*****
00      COMMON N,L,NC(5),M
00      DIMENSION X(1),Y(1),XM(1),YM(1),G(NX,NX),H(NX,NX),FI(1),KODE(1)
00      DIMENSION DFI(1)
00
00      C*****
00      C OBTIENE LAS COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO Y LAS ALMACENA *
00      C EN LOS ARREGLOS XM Y YM *
00      C*****
00      X(N+1)=X(1)
00      Y(N+1)=Y(1)
00      DO 10 I=1,N
00      XM(I)=(X(I)+X(I+1))/2.
00      10 Y(I)=(Y(I)+Y(I+1))/2.
00      IF (I-1) 40,40,30
00      20 XM(NC(1))=(X(NC(1))+X(1))/2.
00      YM(NC(1))=(Y(NC(1))+Y(1))/2.
00      DO 30 K=2,M
00      XM(NC(K))=(X(NC(K))+X(NC(K-1)+1))/2.
00      30 YM(NC(K))=(Y(NC(K))+Y(NC(K-1)+1))/2.
00
00      C*****
00      C OBTIENE LAS MATRICES G Y H *
00      C*****
00      40 DO 140 I=1,N
00      DO 140 J=1,N
00      IF (I-1) 100,100,50
00      50 IF (J-NC(1)) 70,80,70
00      60 KK=1
00      GO TO 110
00      70 DO 90 K=2,M
00      IF (J-NC(K)) 90,80,90
00      80 KK=NC(K-1)+1
00      GO TO 110
00      90 CONTINUE
00      100 DFI(I)
00      110 IF (I-J) 120,130,120

```

```

120 CALL INTE (XM(I), YM(I), X(J), Y(J), X(KK), Y(KK), H(I, J), G(I, J))
GO TO 140
130 CALL INLO (X(J), Y(J), X(KK), Y(KK), G(I, J))
H(I, J)=4.*ATAN(1.)
140 CONTINUE

C*****
C SE ARREGLA EL SISTEMA DE ECUACIONES QUE SE RESOLVERA
C*****
DO 160 J=1, N
IF (KODE(J)) 160, 160, 150
150 DO 160 I=1, N
CH=G(I, J)
G(I, J)=-H(I, J)
H(I, J)=-CH
160 CONTINUE

C*****
C ORIGINALMENTE DFI CONTIENE EL VECTOR DE TERMINOS
C INDEPENDIENTES. DESPUES DE RESOLVER EL SISTEMA CONTIENE
C LOS VALORES DE LAS INCOGNITAS
C*****
DO 170 I=1, N
DFI(I)=0.0
DO 170 J=1, N
DFI(I)=DFI(I)+H(I, J)*FI(J)
170 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE INTE(XP, YP, X1, Y1, X2, Y2, H, G)

C*****
C EN ESTA SUBROUTINA SE OBTIENEN LOS VALORES DE LOS
C ELEMENTOS FUERA DE LA DIAGONAL DE LAS MATRICES
C H Y G. SE EMPLEA INTEGRACION NUMERICA (FORMULA
C DE CUATRO PUNTOS DE GAUSS) A TRAVES DE LOS ELE-
C MENTOS DE FRONTERA
C*****
C DIST=DISTANCIA DEL PUNTO BAJO CONSIDERACION A LOS
C ELEMENTOS DE FRONTERA
C RA=DISTANCIA DESDE EL PUNTO BAJO CONSIDERACION A
C LOS PUNTOS DE INTEGRACION EN LOS ELEMENTOS DE
C FRONTERA
C*****
DIMENSION YCO(4), XCO(4), OME(4)
YSI(1)=0.26113491
YSI(2)=-YSI(1)
YSI(3)=0.33998104
YSI(4)=-YSI(3)
OME(1)=0.347854285
OME(2)=OME(1)
OME(3)=0.45514515
OME(4)=OME(3)
AX=(X2-X1)/2.
AY=(Y2-Y1)/2.
BX=(X1+X2)/2.

```

```

AY=(Y2-Y1)/2.
AV=(AY*AX
AV=(Y2-Y1)/2.
IF (AX) 10,20,10
10 TANG=AY/AX
TANG2=TANG*TANG
DIST=ABS(TANG*YP-YP+Y1-TANG*X)/SQRT(TANG2+1.)
GO TO 30
20 DIST=ABS(YP-Y1)
30 SIG=(X1-XP)+(Y2-YP)-(X2-XP)*(Y1-YP)
IF (SIG) 40,50,50
40 DIST=-DIST
50 GO TO 30
H=0.
DO 60 I=1,4
XCO(I)=AX*XS(I)+BX
YCO(I)=AY*XS(I)+BY
YCO(I)=(XP-XCO(I))*(YP-YCO(I))+(YP-YCO(I))
RA=SQRT(XP-XCO(I))*(YP-YCO(I))
GET=OME(I)*SQRT(AY2+AV2)
SR=ALOG(1./SR)*GET
H=H+DIST*GET/RA2
RETURN
END
SUBROUTINE INLO(X1,Y1,X2,Y2,B)

```

 SE OBTIENEN LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL
 DE LA MATRIZ G

```

AY=(Y2-X1)/2.
AV=AX*AX
AV=(Y2-Y1)/2.
AY2=AY*AY
SR=SQRT(AX2+AY2)
GR=ALOG(1./SR)+1.
RETURN
END

```

SUBROUTINE SLNDF(A,B,D,N,MX)

 SOLUCION DE UN SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES.
 SE EMPLEA EL METODO DE ELIMINACION GAUSSIANA.
 SE PROPORCIONA UN PIVOTE PARA INTERCAMBIAR
 RENGLONES EN CASO DE ENCONTRARSE UN CERO EN
 LA DIAGONAL.
 N=NUMERO REAL DE INCOGNITAS
 NX=DIMENSION DE LA MATRIZ A, EN RENGLONES Y COLUMNAS

 DIMENSION A(NY,NX),B(NX)
 EP=0.00000
 N=N-1
 DO 100 K=1,N1
 EL=K+1
 EA=K*(K)

```

AY=(Y2-Y1)/2.
AX=AY*AY
BY=(Y2-Y1)/2.
IF (AX) 10,20,10
10 TANG=AY/AX
TANGC=TANG*TANG
DIST=ABS(1/TANG*(YP-YP+Y1-TANG*X1))/SQRT(TANG2+1.)
GO TO 30
20 DIST=ABS(YP-Y1)
30 SIG=(X1-XP)*(Y2-YP)-(X2-XP)*(Y1-YP)
IF (SIG) 40,50,50
40 DIST=-DIST
50 G=0.
H=0.
DO 60 I=1,4
XCO(I)=AX*XSI(I)+BX
YCO(I)=AY*XSI(I)+BY
RA=SQRT((XP-XCO(I))*(XP-XCO(I))+(YP-YCO(I))*(YP-YCO(I)))
RA2=RA*RA
OST=OME(I)*SQRT(AY2+AY2)
G=G+ALOG(1./RA)*OST
60 H=H+(DIST*OST/RA2)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE INLO(X1,Y1,X2,Y2,G)

```

```

*****
***** SE OBTIENEN LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL
***** DE LA MATRIZ G
*****

```

```

AX=(Y2-X1)/2.
AX2=AX*AX
AY=(Y2-Y1)/2.
AY2=AY*AY
SR=SQRT(AX2+AY2)
G=2.*SR*(ALOG(1./SR)+1.)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SLNDP(A,B,D,N,NX)

```

```

*****
***** SOLUCION DE UN SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES.
***** SE EMPLEA EL METODO DE ELIMINACION GAUSSIANA.
***** SE PROPORCIONA UN PIVOTE PARA INTERCAMBIAR
***** RENGLONES EN CASO DE ENCONTRARSE UN CERO EN
***** LA DIAGONAL.
*****
***** N=NUMERO REAL DE INCOGNITAS
***** NX=DIMENSION DE LA MATRIZ A, EN RENGLONES Y COLUMNAS
*****

```

```

DIMENSION A(NX,NX) B(NX)
EP=0.000001
N1=N-1
DO 100 K=1,N1
K1=K+1
C=A(K,K)

```

```
IF (ABS(C)-EPS) 10,10,60
```

```
C*****
C INTERCAMBIA RENGLONES PARA OBTENER COEFICIENTES NO NULOS
C EN LA DIAGONAL PRINCIPAL
C*****
```

```
10 DO 40 J=K1,N
   IF (ABS(A(J,K))-EPS) 40,40,20
20 DO 30 L=K,N
   C=A(K,L)
   A(K,L)=A(J,L)
30 A(J,L)=C
   C=B(K)
   B(K)=B(J)
   B(J)=C
   C=A(K,K)
   GO TO 40
40 CONTINUE
50 WRITE(4,2000) K
2000 FORMAT(4X,24HSINGULARIDAD EN EL RENGLON ,15)
   D=0.0
   GO TO 140
```

```
C*****
C DIVIDE EL RENGLON J, ENTRE EL COEFICIENTE DE LA
C DIAGONAL
C*****
```

```
60 C=A(K,K)
   DO 70 J=K1,N
70 A(K,J)=A(K,J)/C
   B(K)=B(K)/C
```

```
C*****
C ELIMINA LA INCOGNITA X(K) DEL RENGLON I
C*****
```

```
DO 90 I=K1,N
   C=A(I,K)
   DO 80 J=K1,N
80 A(I,J)=A(I,J)-C*A(K,J)
90 B(I)=B(I)-C*B(K)
100 CONTINUE
```

```
C*****
C OBTIENE LA ULTIMA INCOGNITA
C*****
```

```
IF (ABS(A(N,N))-EPS) 50,50,110
110 B(N)=B(N)/A(N,N)
```

```
C*****
C SUSTITUCION REGRESIVA PARA CONOCER LAS
C DEMAS INCOGNITAS
C*****
```

```
DO 120 L=1,N1
   N=N-L
   K1=K+1
   DO 120 J=K1,N
120 B(K)=B(K)-A(K,J)*B(J)
```



```

C*****
C OBTIENE EL DETERMINANTE DEL SISTEMA
C*****
      D=1.0
      DO 130 I=1,N
    130 D=D*A(I,I)
    140 RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE INTER(FI,DFI,KODE,CX,CY,X,Y,SOL)

```

```

C*****
C OBTIENE EL VALOR DEL POTENCIAL PARA PUNTOS INTERNOS
C SECCIONA LOS ARREGLOS FI Y DFI DE TAL FORMA QUE EL
C POTENCIAL SE ALMACENA EN FI Y SU DERIVADA EN DFI
C*****
      COMMON N,L,NC(5),M
      DIMENSION FI(1),DFI(1),KODE(1),CX(1),CY(1),X(1),Y(1),SOL(1)
      DO 20 I=1,N
        IF (KODE(I)) 20,20,10
    10 CH=FI(I)
        FI(I)=DFI(I)
        DFI(I)=CH
    20 CONTINUE

```

```

C*****
C OBTIENE EL VALOR DEL POTENCIAL PARA PUNTOS INTERNOS
C*****
      DO 110 K=1,L
        SOL(K)=0.0
        DO 100 J=1,N
          IF (M-1) 80,80,30
    30 IF (J-NC(1)) 50,40,50
    40 KK=1
        GO TO 90
    50 DO 70 LK=2,M
          IF (J-NC(LK)) 70,60,70
    60 KK=NC(LK-1)+1
        GO TO 90
    70 CONTINUE
    80 KK=J+1
    90 CALL INTE (CX(K),CY(K),X(J),Y(J),X(KK),Y(KK),A,B)
    100 SOL(K)=SOL(K)+DFI(J)*B-FI(J)*A
    110 SOL(K)=SOL(K)/(2.*PI)
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE OUTPUT(XM,YM,FI,DFI,CX,CY,SOL)

```

```

C*****
C SE LISTAN LAS COORDENADAS DE LOS NUDOS DE
C FRONTERA Y LOS VALORES DEL POTENCIAL Y DE
C LA DERIVADA DEL POTENCIAL ASOCIADOS CON ELLOS.
C ADENAS SE IMPRIMEN LOS VALORES DEL POTENCIAL
C PARA LOS PUNTOS INTERNOS DONDE SE REQUISIRA
C*****
      COMMON N,L,NC(5),M
      DIMENSION XM(1),YM(1),FI(1),DFI(1),CX(1),CY(1),SOL(1)
      WRITE(6,2000)
      FORMAT(//4X,10#RESULTADOS,//4X,17#NUDOS DE FRONTERA,//11X,1#X,17X,
    11#Y,11X,9#POTENCIAL,3X,22#DERIVADA DEL POTENCIAL/)
      DO 10 I=1,N
    10 WRITE(6,2010) YM(I),YM(1),FI(I),DFI(I)
    2010 FORMAT(4X,4(S14.7,3X))
      WRITE(6,2020)
    2020 FORMAT(//4X,15#PUNTOS INTERNOS,//11X,1#X,17X,1#Y,11X,9#POTENCIAL/)
      DO 20 K=1,L
    20 WRITE(6,2030) CX(K),CY(K),SOL(K)
    2030 FORMAT(4X,3(S14.7,3X))
      RETURN
      END

```

Tabla 1. Datos requeridos para el programa SPPBEC

5			
2.0	2.0	}	Coordenadas de puntos internos
4.0	2.0		
4.0	4.0		
2.0	4.0		
3.0	3.0		
0.0	0.0	}	Coordenadas de puntos extremos de los elementos de frontera
2.0	0.0		
4.0	0.0		
6.0	0.0		
6.0	2.0		
6.0	4.0		
6.0	6.0		
4.0	6.0		
2.0	6.0		
0.0	6.0		
0.0	4.0	}	Condiciones de frontera
0.0	2.0		
1			
1			
1			
0			
0			
0			
1			
1			
1			
0	300.0		
0	300.0		
0	300.0		

Tabla 2. Resultados obtenidos al aplicar el programa SPPBEC

```

*****
* PROGRAMA PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS POTENCIALES BIDIMENSIONALES. *
* SE EMPLEA EL METODO DE INTEGRACION DE ELEMENTOS DE FRONTERA. SE *
* EMPLEAN ELEMENTOS CON FUNCIONES CONSTANTES. *
* ADAPTACION HECHA POR: *
* D. RAFAEL GRANADA M. *
* JOSE A. BARRIO V. *
* INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAN - 1982 *
*****

```

*** EJEMPLO DE FLUJO DE CALOR EN UNA PLACA CUADRADA ***

DATOS:

NUMERO DE ELEMENTOS DE FRONTERA = 12
 NUMERO DE PUNTOS INTERNOS DONDE SE OBTIENEN LAS FUNCIONES = 5

COORDENADAS DE PUNTOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS DE FRONTERA

PUNTO	X	Y
1	0.	0.
2	.20000E+01	0.
3	.40000E+01	0.
4	.60000E+01	0.
5	.60000E+01	.20000E+01
6	.60000E+01	.40000E+01
7	.60000E+01	.60000E+01
8	.40000E+01	.60000E+01
9	.20000E+01	.60000E+01
10	0.	.60000E+01
11	0.	.40000E+01
12	0.	.20000E+01

CONDICIONES DE FRONTERA

NUDO	CODIGO	VALOR PRESCRITO
1	1	0.
2	1	0.
3	1	0.
4	0	0.
5	0	0.
6	0	0.
7	1	0.
8	1	0.
9	1	0.
10	0	.30000E+03
11	0	.30000E+03
12	0	.30000E+03

Tabla 4. Resultados obtenidos al aplicar el programa SPPBEL al ejemplo de flujo de calor

RESULTADOS			
NUDOS DE FRONTERA			
X	Y	POTENCIAL	DERIVADA DEL POTENCIAL
0.	0.	.3000000E+03	.2402480E+02
.2000000E+01	0.	.2032184E+03	0.
.4000000E+01	0.	.9668136E+02	0.
.6000000E+01	0.	0.	-.2402480E+02
.6000000E+01	.2000000E+01	0.	-.5317394E+02
.6000000E+01	.4000000E+01	0.	-.5317394E+02
.6000000E+01	.6000000E+01	0.	-.2402480E+02
.4000000E+01	.6000000E+01	.9668136E+02	0.
.2000000E+01	.6000000E+01	.2032184E+03	0.
0.	.6000000E+01	.3000000E+03	.2402480E+02
0.	.4000000E+01	.3000000E+03	.5317394E+02
0.	.2000000E+01	.3000000E+03	.5317394E+02
PUNTOS INTERNOS			
X	Y	POTENCIAL	
.2000000E+01	.2000000E+01	.3003337E+03	
.4000000E+01	.2000000E+01	.9960726E+02	
.4000000E+01	.4000000E+01	.9960726E+02	
.2000000E+01	.4000000E+01	.2003337E+03	
.3000000E+01	.3000000E+01	.1499999E+03	

Tabla 5. Resultados obtenidos al aplicar el programa SPPBEL al ejemplo de flujo de calor (pero con dos nudos en las esquinas)

RESULTADOS			
NUDOS DE FRONTERA			
X	Y	POTENCIAL	DERIVADA DEL POTENCIAL
.1000000E-03	0.	.2980062E+03	0.
.2000000E+01	0.	.2000175E+03	0.
.4000000E+01	0.	.9998247E+02	0.
.5999900E+01	0.	.1999816E+01	0.
.6000000E+01	.1000000E-03	0.	-.4980017E+02
.6000000E+01	.2000000E+01	0.	-.5019492E+02
.6000000E+01	.4000000E+01	0.	-.5019492E+02
.6000000E+01	.5999900E+01	0.	-.4980017E+02
.4000000E+01	.6000000E+01	.1999816E+01	0.
.4000000E+01	.6000000E+01	.9998247E+02	0.
.2000000E+01	.6000000E+01	.2000175E+03	0.
.1000000E-03	.6000000E+01	.2980062E+03	0.
0.	.5999900E+01	.3000000E+03	.4980017E+02
0.	.4000000E+01	.3000000E+03	.5019492E+02
0.	.2000000E+01	.3000000E+03	.5019492E+02
0.	.1000000E-03	.3000000E+03	.4980017E+02
PUNTOS INTERNOS			
X	Y	POTENCIAL	
.2000000E+01	.2000000E+01	.1999816E+03	
.4000000E+01	.2000000E+01	.1000478E+02	
.4000000E+01	.4000000E+01	.1000478E+02	
.2000000E+01	.4000000E+01	.1999816E+03	
.3000000E+01	.3000000E+01	.1499999E+03	

Tabla 6. Resultados obtenidos para u y $\partial u/\partial n$ con varios métodos para el ejemplo de flujo de calor

Nudos de frontera					
Nudo*	Teoría	Elementos constantes	Elementos lineales	Elementos lineales con dos nudos en las esquinas	Elementos isoparamétricos
1	300.00	252.20	300.00	298.00	300.00
4	-50.00	-52.90	-24.00	-50.13	-50.00
6	-50.00	-52.90	-24.00	-50.13	-50.00
9	300.00	252.20	300.00	298.00	300.00
Puntos internos					
Nudo	Teoría	Elementos constantes	Elementos lineales	Elementos lineales con dos nudos en las esquinas	Elementos isoparamétricos
A	200.00	200.30	200.40	200.00	201.38
B	100.00	99.70	99.60	100.00	100.01
C	150.00	150.00	150.00	150.00	149.79

* La numeración de estos nudos corresponde al caso de elementos constantes.

Tabla 9. Resultados obtenidos al aplicar el programa SPPBEL al problema de flujo laminar

RESULTADOS			
PUNTOS DE FRONTERA			
X	Y	POTENCIAL	DERIVADA DEL POTENCIAL
0.	0.	0.	-.5599994E+00
.6000000E+00	0.	0.	-.1049571E+01
.1200000E+01	0.	0.	-.9578343E+00
.1700000E+01	0.	0.	-.9187911E+00
.2200000E+01	0.	0.	-.8658090E+00
.3000000E+01	0.	0.	-.7827562E-01
.3118200E+01	.4716000E+00	0.	-.1145463E+01
.3356700E+01	.7656000E+00	0.	-.1909181E+01
.3553800E+01	.8950000E+00	0.	-.2273223E+01
.3714300E+01	.9583000E+00	0.	-.2424940E+01
.3856500E+01	.9897000E+00	0.	-.2720193E+01
.4000000E+01	1.000000E+01	0.	-.1184460E+01
.4000000E+01	.1160000E+01	.3692998E+00	0.
.4000000E+01	.1330000E+01	.7491174E+00	0.
.4000000E+01	.1540000E+01	.1149580E+01	0.
.4000000E+01	.1760000E+01	.1589876E+01	0.
.4000000E+01	.2000000E+01	.2000000E+01	.7922971E+00
.3800000E+01	.2000000E+01	.2000000E+01	.1871728E+01
.3600000E+01	.2000000E+01	.2000000E+01	.1682376E+01
.3300000E+01	.2000000E+01	.2000000E+01	.1583006E+01
.3000000E+01	.2000000E+01	.2000000E+01	.1436666E+01
.2700000E+01	.2000000E+01	.2000000E+01	.1308021E+01
.2300000E+01	.2000000E+01	.2000000E+01	.1181107E+01
.2000000E+01	.2000000E+01	.2000000E+01	.1118751E+01
.1700000E+01	.2000000E+01	.2000000E+01	.1077229E+01
.1200000E+01	.2000000E+01	.2000000E+01	.1023446E+01
.6000000E+00	.2000000E+01	.2000000E+01	.1091396E+01
0.	.2000000E+01	.2000000E+01	.5574289E+00
0.	.1600000E+01	.1600000E+01	-.6979002E-01
0.	.1200000E+01	.1200000E+01	.2490240E-01
0.	.8000000E+00	.8000000E+00	-.3798977E-02
0.	.4000000E+00	.4000000E+00	.8268675E-01
PUNTOS INTERNOS			
X	Y	POTENCIAL	
.1180000E+01	.1250000E+01	.1229639E+01	
.2000000E+01	.2100000E+00	.8275552E+00	
.3200000E+01	.9530000E+00	.4208210E+00	
.3000000E+01	.1450000E+01	.1214794E+01	
.3560000E+01	.1535000E+01	.1204970E+01	
.3780000E+01	.1320000E+01	.7538341E+00	

Tabla 10. Resultados obtenidos al aplicar el programa SPPBEL al problema de flujo laminar (pero con dos nudos en las esquinas)

RESULTADOS			
NUDOS DE FRONTERA			
X	Y	POTENCIAL	DERIVADA DEL POTENCIAL
.1000000E-03	0.	0.	-.9984270E+00
.6000000E+00	0.	0.	-.9920856E+00
.1200000E+01	0.	0.	-.9667827E+00
.1700000E+01	0.	0.	-.9145135E+00
.2200000E+01	0.	0.	-.8623641E+00
.2899000E+01	0.	0.	-.9287832E-01
.3000100E+01	.1410000E-01	0.	-.8215602E-01
.3118200E+01	.4716000E+00	0.	-.1150722E+01
.3356700E+01	.7556000E+00	0.	-.1913809E+01
.3553800E+01	.8950000E+00	0.	-.2311011E+01
.3714300E+01	.9585000E+00	0.	-.2419324E+01
.3854500E+01	.9897000E+00	0.	-.3708974E+01
.3979900E+01	1.000000E+01	.1843681E+00	0.
.4000000E+01	1.000100E+01	.1838278E+00	0.
.4000000E+01	1.160000E+01	.4364279E+00	0.
.4000000E+01	1.330000E+01	.7769600E+00	0.
.4000000E+01	1.540000E+01	.1177691E+01	0.
.4000000E+01	1.740000E+01	.1576729E+01	0.
.4000000E+01	1.999900E-01	.1992951E+01	0.
.3999900E+01	2.000000E+01	.2000000E+01	.1748634E+01
.3800000E+01	2.000000E+01	.2000000E+01	.1750891E+01
.3500000E+01	2.000000E+01	.2000000E+01	.1690643E+01
.3000000E+01	2.000000E+01	.2000000E+01	.1571782E+01
.2000000E+01	2.000000E+01	.2000000E+01	.1432436E+01
.2700000E+01	2.000000E+01	.2000000E+01	.1305471E+01
.2300000E+01	2.000000E-01	.2000000E+01	.1179825E+01
.2000000E+01	2.000000E+01	.2000000E+01	.1117962E+01
.1700000E+01	2.000000E+01	.2000000E+01	.1074562E+01
.1200000E+01	2.000000E+01	.2000000E+01	.1032819E+01
.6000000E+00	2.000000E+01	.2000000E+01	.1014357E+01
.1000000E-03	2.000000E+01	.2000000E+01	.9969860E+00
0.	.1999900E+01	.1998086E+01	0.
0.	.1600000E+01	.1600000E+01	.6133155E-02
0.	.1200000E+01	.1200000E+01	.1072485E-01
0.	.8000000E+00	.8000000E+00	.1097201E-01
0.	.4000000E+00	.4000000E+00	.7128471E-02
0.	.1000000E-03	.1193519E-01	0.
PUNTOS INTERNOS			
X	Y	POTENCIAL	
.1180000E+01	.1350000E-01	.1229723E+01	
.2000000E+01	.9100000E+00	.8278013E+00	
.3200000E+01	.9530000E+00	.4225567E+00	
.3000000E+01	.1450000E+01	.1216777E+01	
.3540000E+01	.1535000E+01	.1211256E+01	
.3780000E+01	.1320000E+01	.7740663E+00	

Tabla 11. Valores de u para algunos puntos internos mostrados en la fig 4.5

Nudo	Elemento finito	Elementos constantes	Elementos lineales	Elementos Lineales con dos nudos en las esquinas	Diferencias finitas curvilíneas
A	1.15	1.27	1.23	1.23	1.23
B	0.80	0.84	0.83	0.83	0.83
C	0.40	0.43	0.42	0.42	0.42
D	1.21	1.22	1.22	1.22	1.21
E	1.21	1.21	1.21	1.20	1.21
F	0.77	0.76	0.75	0.76	0.77

Tabla 12. Valores de u y $\partial u/\partial n$ para algunos puntos de la frontera mostrados en la fig 4.6

Nudo	Elemento finito	Elementos constantes	Elementos lineales	Elementos lineales con dos nudos en las esquinas	Elementos isoparamétricos	Colocación y mínimos cuadrados
1	-0.80	-1.54	-0.56	-0.99	-0.80	-0.75
5	-0.76	-0.55	-0.87	-0.86	-0.72	-0.65
6	-0.50	-0.45	-0.08	-0.09	0.0	0.0
10	-1.95	-2.49	-2.43	-2.42	-1.80	-1.90
12	0.0	0.19	0.00	0.18	0.0	0.0
13	0.34	0.57	0.37	0.44	0.39	0.40
14	0.69	0.97	0.75	0.78	0.76	0.72
15	1.11	1.38	1.17	1.18	1.67	1.15
16	1.54	1.80	1.59	1.58	1.57	1.55
17	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
20	1.46	1.50	1.58	1.57	1.10	1.60
26	1.18	0.93	1.02	1.03	0.70	1.00

Tabla 13. Resultados obtenidos al aplicar el programa SPBEC al problema de una cavidad en un medio infinito bajo presión interna uniforme

RESULTADOS					
NUDOS DE FRONTERA					
X	Y	DESPLAZAMIENTO X	DESPLAZAMIENTO Y	FUERZA DE SUP. X	FUERZA DE SUP. Y
-.7498500E+00	-.2872950E+01	-.4244856E-03	-.1584249E-03	-.2583000E+02	-.9650000E+02
-.1487200E+01	-.2575850E+01	-.8200231E-03	-.1420372E-03	-.5000000E+02	-.5000000E+02
-.2103200E+01	-.2103200E+01	-.1159720E-03	-.1159720E-03	-.7071000E+02	-.7071000E+02
-.2575850E+01	-.1487200E+01	-.1420372E-03	-.1420372E-03	-.8640000E+02	-.5000000E+02
-.2872950E+01	-.7498500E+00	-.4244856E-03	-.1584249E-03	-.2583000E+02	-.9650000E+02
-.2874300E+01	0.	-.1640152E-03	0.	-.1000000E+02	-.4125643E-02
-.2872950E+01	-.7498500E+00	-.4244856E-03	-.1584249E-03	-.2583000E+02	-.9650000E+02
-.2575850E+01	-.1487200E+01	-.1420372E-03	-.1420372E-03	-.8640000E+02	-.5000000E+02
-.2103200E+01	-.2103200E+01	-.1159720E-03	-.1159720E-03	-.7071000E+02	-.7071000E+02
-.1487200E+01	-.2575850E+01	-.8200231E-03	-.1420372E-03	-.5000000E+02	-.8640000E+02
-.7498500E+00	-.2872950E+01	-.4244856E-03	-.1584249E-03	-.2583000E+02	-.9650000E+02
0.	-.2874300E+01	0.	-.1640152E-03	-.1258293E-09	-.1000000E+02
-.7498500E+00	-.2872950E+01	-.4244856E-03	-.1584249E-03	-.2583000E+02	-.9650000E+02
-.1487200E+01	-.2575850E+01	-.8200231E-03	-.1420372E-03	-.5000000E+02	-.8640000E+02
-.2103200E+01	-.2103200E+01	-.1159720E-03	-.1159720E-03	-.7071000E+02	-.7071000E+02
-.2575850E+01	-.1487200E+01	-.1420372E-03	-.1420372E-03	-.8640000E+02	-.5000000E+02
-.2872950E+01	-.7498500E+00	-.4244856E-03	-.1584249E-03	-.2583000E+02	-.9650000E+02
-.2874300E+01	0.	-.1640152E-03	0.	-.1000000E+02	-.4125643E-02
-.2872950E+01	-.7498500E+00	-.4244856E-03	-.1584249E-03	-.2583000E+02	-.9650000E+02
-.2575850E+01	-.1487200E+01	-.1420372E-03	-.1420372E-03	-.8640000E+02	-.5000000E+02
-.2103200E+01	-.2103200E+01	-.1159720E-03	-.1159720E-03	-.7071000E+02	-.7071000E+02
-.1487200E+01	-.2575850E+01	-.8200231E-03	-.1420372E-03	-.5000000E+02	-.8640000E+02
-.7498500E+00	-.2872950E+01	-.4244856E-03	-.1584249E-03	-.2583000E+02	-.9650000E+02
0.	-.2874300E+01	0.	-.1640152E-03	-.1258293E-09	-.1000000E+02
-.4000000E+01	0.	-.1204830E-03	-.1204900E-13	-.5723505E+02	-.5711458E-10
-.2828400E+01	-.2828400E+01	-.8519320E-03	-.8519320E-03	-.5611072E-01	-.5717841E+02
-.4000000E+01	0.	-.1204830E-03	-.1194490E-13	-.5723505E+02	-.5711458E-10
-.2828400E+01	-.2828400E+01	-.8519320E-03	-.8519320E-03	-.5611072E-01	-.5717841E+02
-.6000000E+01	0.	-.8030046E-03	-.6550316E-14	-.2529804E+02	-.2529450E-02
-.1000000E+02	0.	-.6318005E-03	-.1472784E-14	-.9160023E+01	-.9102602E+01
-.2000000E+02	0.	-.2403926E-03	-.3198330E-14	-.2276506E+01	-.2276702E+01
-.5000000E+02	0.	-.2638978E-04	-.1979319E-14	-.3662200E+00	-.1154432E-11
-.2000000E+03	0.	-.2089934E-04	-.8211817E-14	-.2276506E-01	-.4579119E-12
-.1000000E+04	0.	-.4817989E-05	-.4618353E-13	-.9105998E-03	-.7487202E-13

PUNTOS INTERIORES						
X	Y	DESPLAZAMIENTO X	DESPLAZAMIENTO Y	SIGMA X	TAU XY	SIGMA Y
-.4000000E+01	0.	-.1204830E-03	-.1204900E-13	-.5723505E+02	-.5711458E-10	-.5711458E-10
-.2828400E+01	-.2828400E+01	-.8519320E-03	-.8519320E-03	-.5611072E-01	-.5717841E+02	-.5711072E-01
-.4000000E+01	0.	-.1204830E-03	-.1194490E-13	-.5723505E+02	-.5711458E-10	-.5711458E-10
-.2828400E+01	-.2828400E+01	-.8519320E-03	-.8519320E-03	-.5611072E-01	-.5717841E+02	-.5711072E-01
-.6000000E+01	0.	-.8030046E-03	-.6550316E-14	-.2529804E+02	-.2529450E-02	-.2529450E-02
-.1000000E+02	0.	-.6318005E-03	-.1472784E-14	-.9160023E+01	-.9102602E+01	-.9102602E+01
-.2000000E+02	0.	-.2403926E-03	-.3198330E-14	-.2276506E+01	-.2276702E+01	-.2276702E+01
-.5000000E+02	0.	-.2638978E-04	-.1979319E-14	-.3662200E+00	-.1154432E-11	-.3662200E+00
-.2000000E+03	0.	-.2089934E-04	-.8211817E-14	-.2276506E-01	-.4579119E-12	-.4579119E-12
-.1000000E+04	0.	-.4817989E-05	-.4618353E-13	-.9105998E-03	-.7487202E-13	-.9105998E-03

Tabla 14. Esfuerzos radiales en puntos internos para el ejemplo de la cavidad circular (kg/cm^2)

Distancia al centro de la cavidad (cm)	Método de elementos de frontera	Teoría de la elasticidad
4	-57.23	-56.25
6	-25.29	-25.00
10	- 9.10	- 9.00
20	- 2.27	- 2.25
50	- 0.36	- 0.36
200	- 0.227×10^{-1}	- 0.225×10^{-1}
1000	- 0.910×10^{-3}	- 0.9×10^{-3}

Tabla A.1 Ceros y pesos para la Cuadratura de Gauss

n	ξ_i	ω_i
1	0.00000000	2.00000000
2	<u>+0.57735027</u>	1.00000000
3	<u>+0.77445966</u> <u>0.00000000</u>	0.55555555 0.88888888
4	<u>+0.86113631</u> <u>+0.33998104</u>	0.34785485 0.65214515
5	<u>+0.90617984</u> <u>+0.53846931</u> <u>0.00000000</u>	0.23692688 0.47862867 0.56888888
6	<u>+0.93246951</u> <u>+0.66120938</u> <u>+0.23861918</u>	0.17132449 0.36076157 0.46791393
7	<u>+0.94910791</u> <u>+0.74153118</u> <u>+0.40584515</u> <u>0.00000000</u>	0.12948496 0.27970539 0.38183005 0.41795918
8	<u>+0.96028985</u> <u>+0.79666647</u> <u>+0.52553241</u> <u>+0.18343464</u>	0.10122853 0.22238103 0.31370664 0.36268378
9	<u>+0.96816024</u> <u>+0.83603111</u> <u>+0.61337143</u> <u>+0.32425342</u> <u>0.00000000</u>	0.08127439 0.18064816 0.26061069 0.31234708 0.33023935
10	<u>+0.97390653</u> <u>+0.86506336</u> <u>+0.67940957</u> <u>+0.43339539</u> <u>+0.14887434</u>	0.06667134 0.14945135 0.21908636 0.26926672 0.29552422

Tabla A.2 Ceros y pesos para la Cuadratura de Gauss logarítmica

n	ξ_i	ω_i
2	0.11200820	0.71853931
	0.60227690	0.28146068
3	0.06389079	0.51340455
	0.36899706	0.39128004
	0.76688030	0.09461540
4	0.04144848	0.38346406
	0.24527491	0.38687531
	0.55616545	0.19043512
	0.84898239	0.03922548
5	0.02913447	0.29789347
	0.17397721	0.34977622
	0.41170252	0.23448829
	0.66731417	0.09893045
	0.89477136	0.01891155
6	0.02163400	0.23876366
	0.12958339	0.30828657
	0.31402044	0.24531742
	0.53865721	0.14200875
	0.75691533	0.05545462
	0.92266885	0.01016895
7	0.01671935	0.19616938
	0.10018567	0.27030264
	0.24629424	0.23968187
	0.43346349	0.16577577
	0.63235098	0.08894322
	0.81111862	0.03319430
	0.94084816	0.00593278
8	0.01332024	0.16441660
	0.07975042	0.23752561
	0.19787102	0.22684198
	0.35415399	0.17575408
	0.52945857	0.11292403
	0.70181452	0.05787221
	0.84937932	0.02097907
	0.95332645	0.00368641

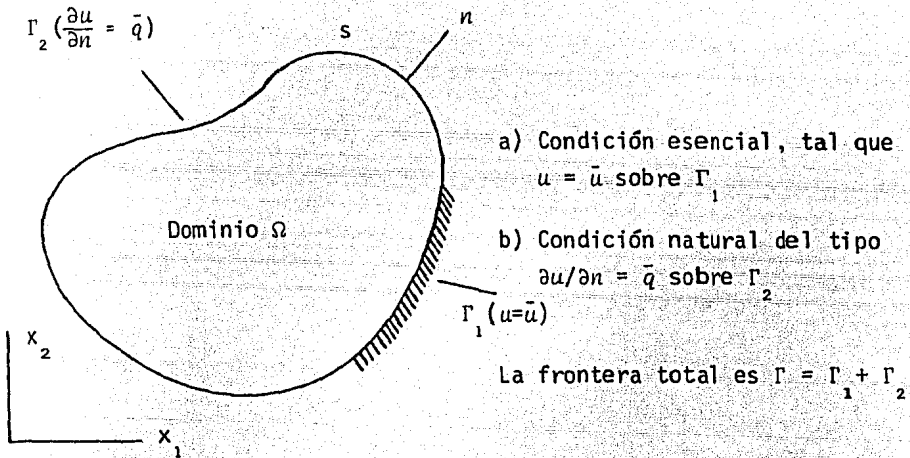


Fig 2.1 Definición de las condiciones de frontera en un dominio cerrado Ω .

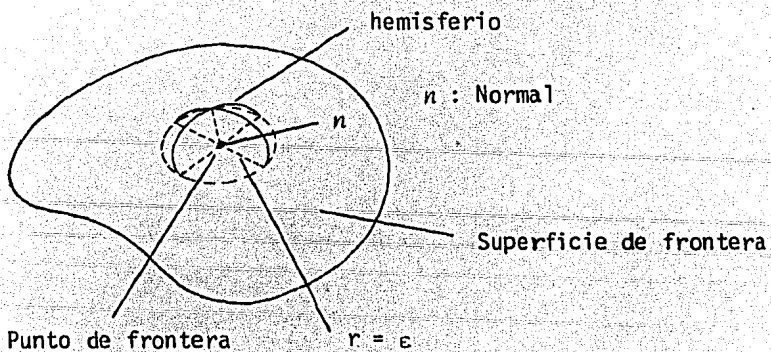


Fig 2.2 Superficie de frontera supuesta hemisférica para fines de integración.

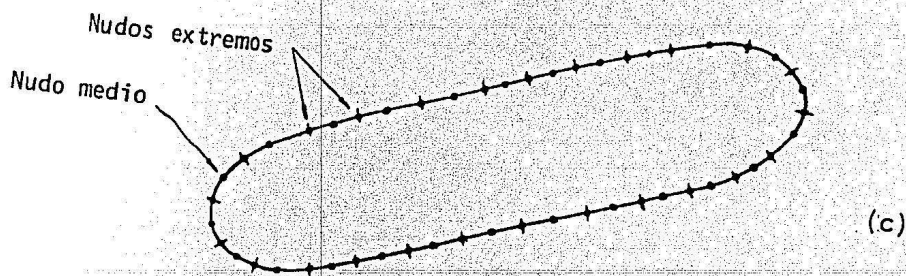
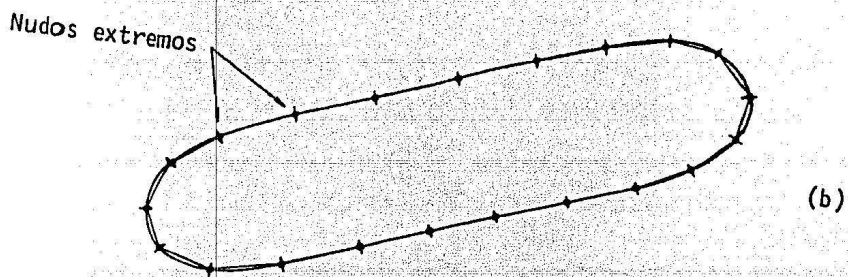
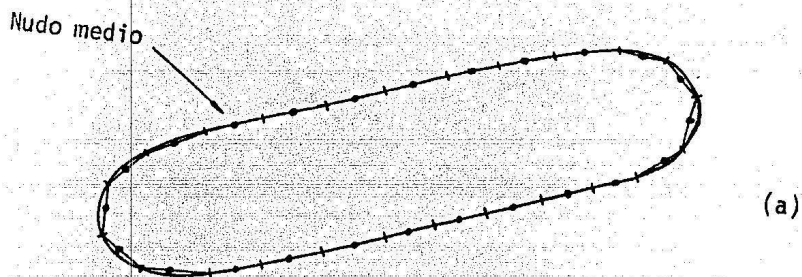


Fig. 2.3. Diferentes tipos de elementos de frontera: (a) elementos constantes, (b) elementos lineales, (c) elementos cuadráticos

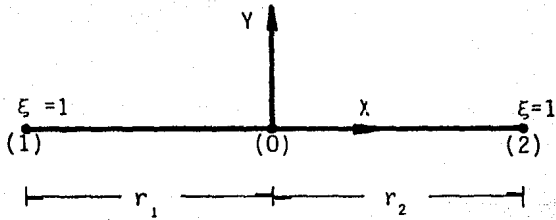


Fig. 2.4 Coordenadas de elementos lineales

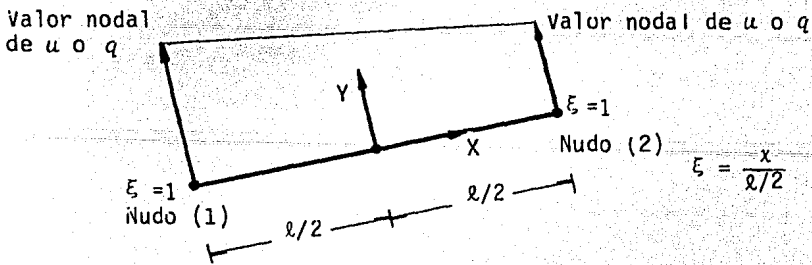


Fig. 2.5 Elemento lineal (variación lineal de u y q)

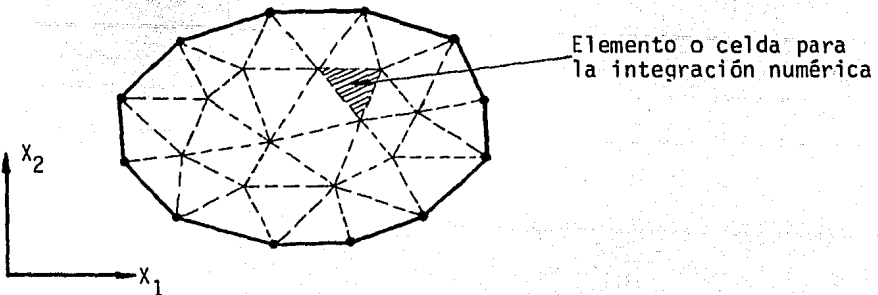


Fig. 2.6 Elementos internos y de frontera

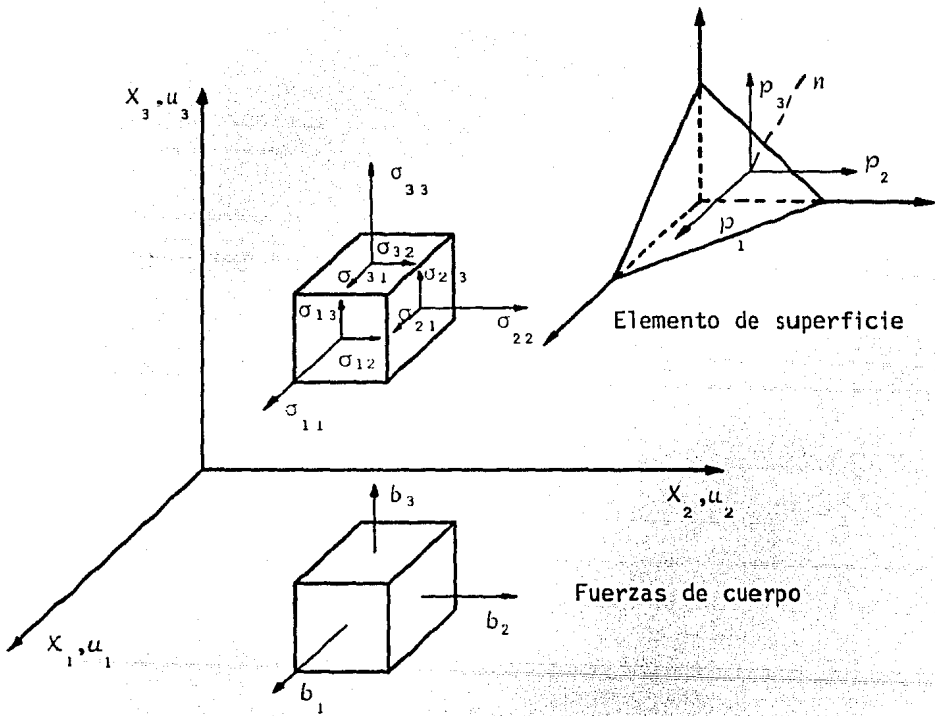


Fig. 3.1. Notación para fuerza, esfuerzo y desplazamiento

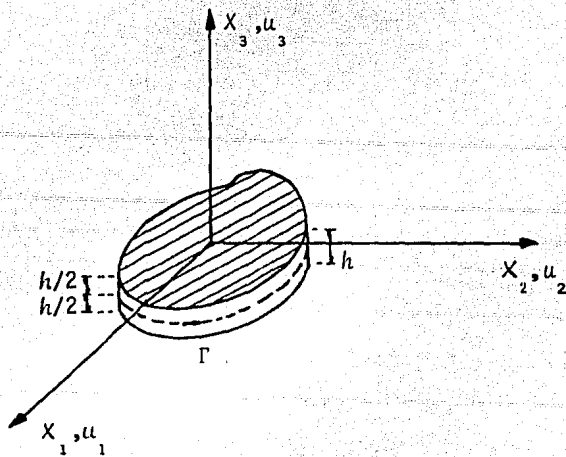


Fig. 3.2 Sólido prismático

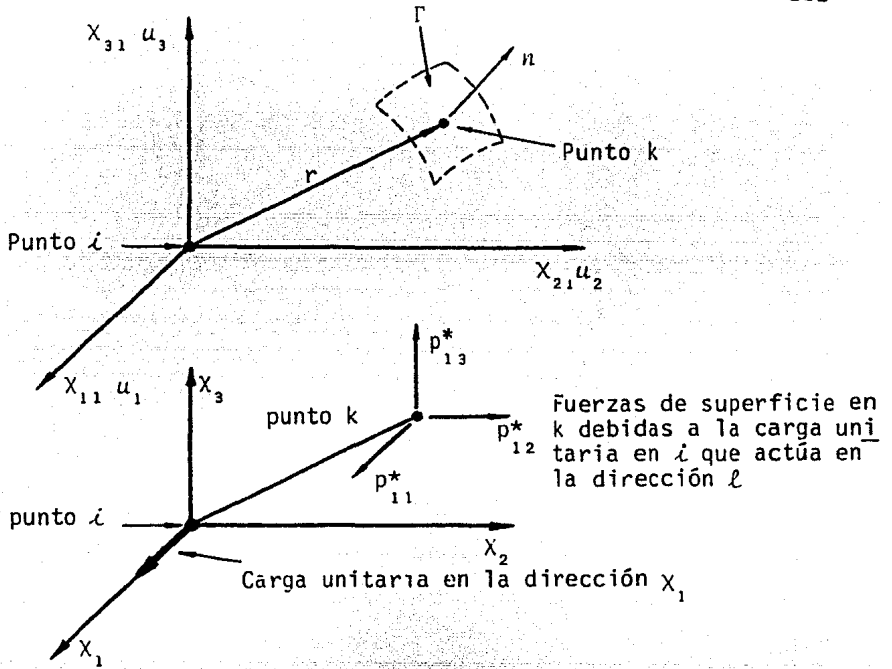


Fig 3.3 Caso tridimensional

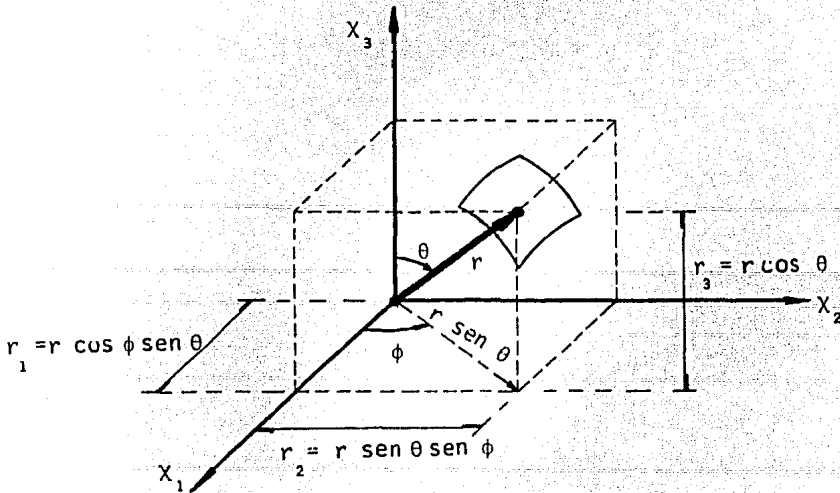


Fig 3.4 Definiciones geométricas

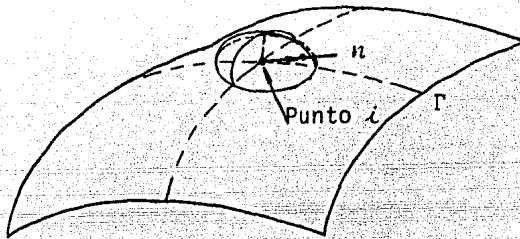


Fig. 3.5 Superficie de frontera Γ_e supuesta hemisférica para fines de integración

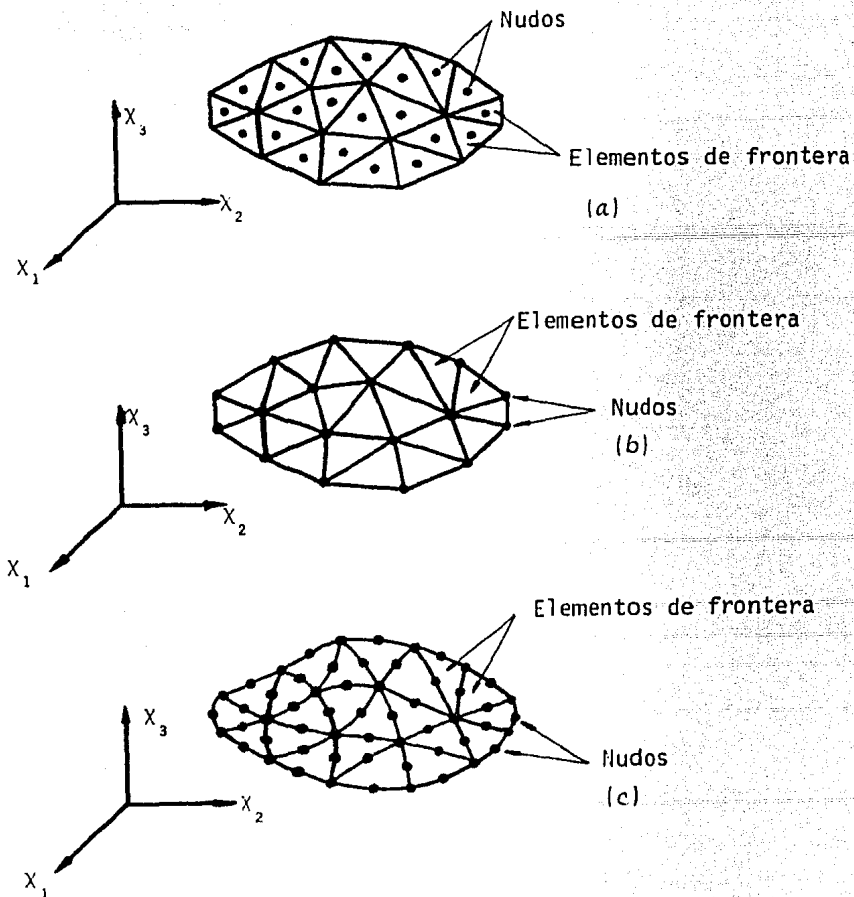


Fig. 3.6 Cuerpo tridimensional dividido en (a) elementos de frontera constantes, (b) elementos de frontera lineales y (c) elementos de frontera cuadráticos.

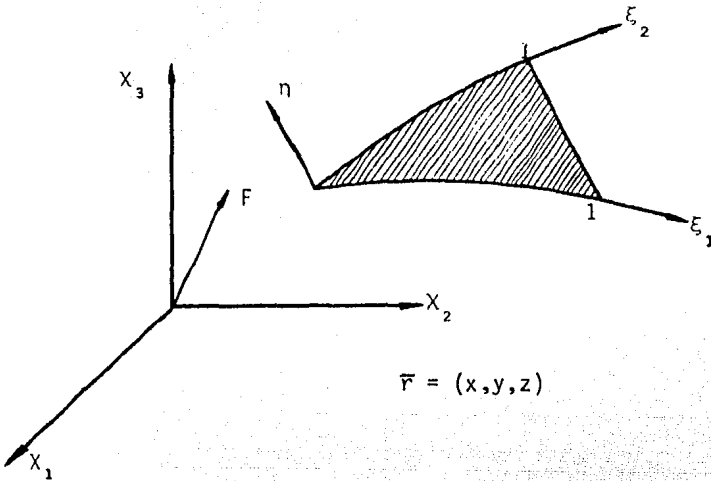
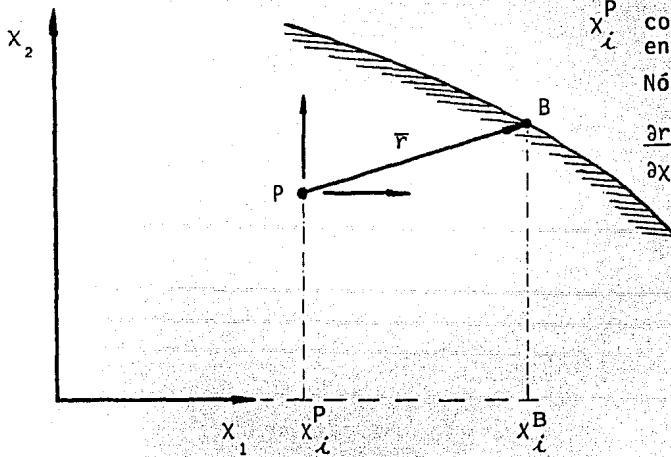


Fig. 3.7 Sistema de coordenadas para un elemento de frontera



x_i^B coordenada del punto de frontera en la dirección 'i',

x_i^P coordenada del punto P en la dirección 'i'

Nótese que:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = r_{,i} = (x_i^B - x_i^P) / r$$

Fig. 3.8 Definición de derivadas

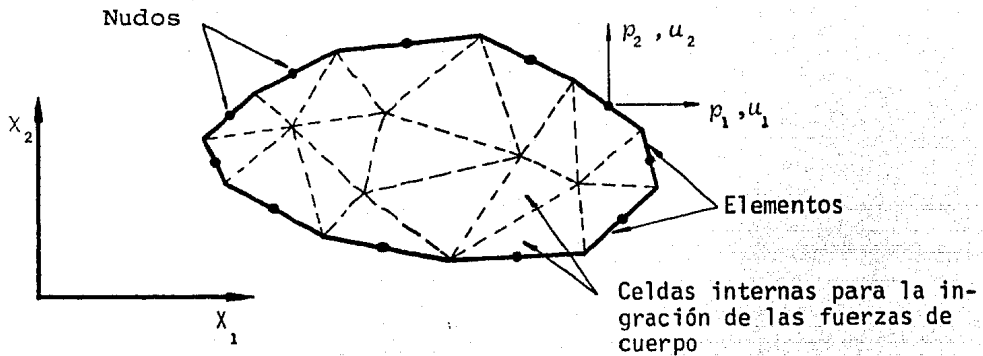


Fig. 3.9 División de un cuerpo bidimensional en elementos de frontera y celdas internas

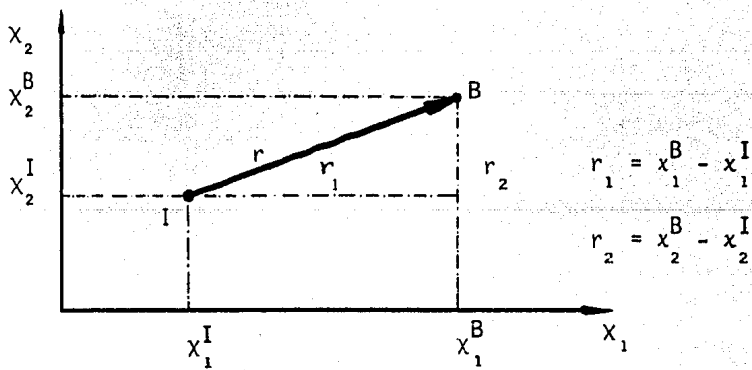


Fig. 3.10 Definición geométrica de los puntos I y B

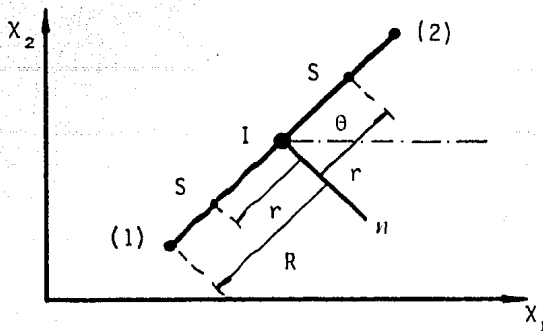


Fig. 3.11 Definición de elemento

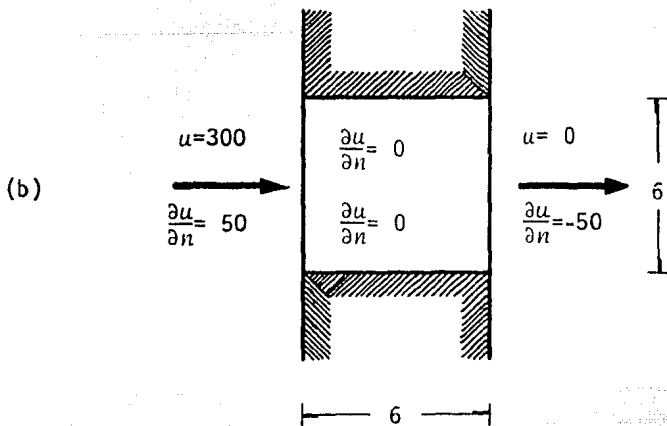
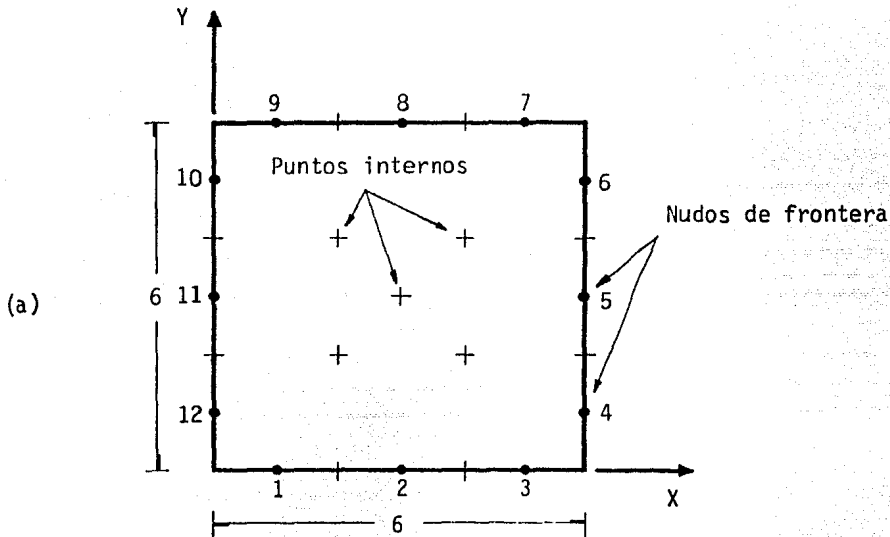


Fig. 4.1. Problema de potencial simple; (a) definiciones geométricas, (b) condiciones de frontera

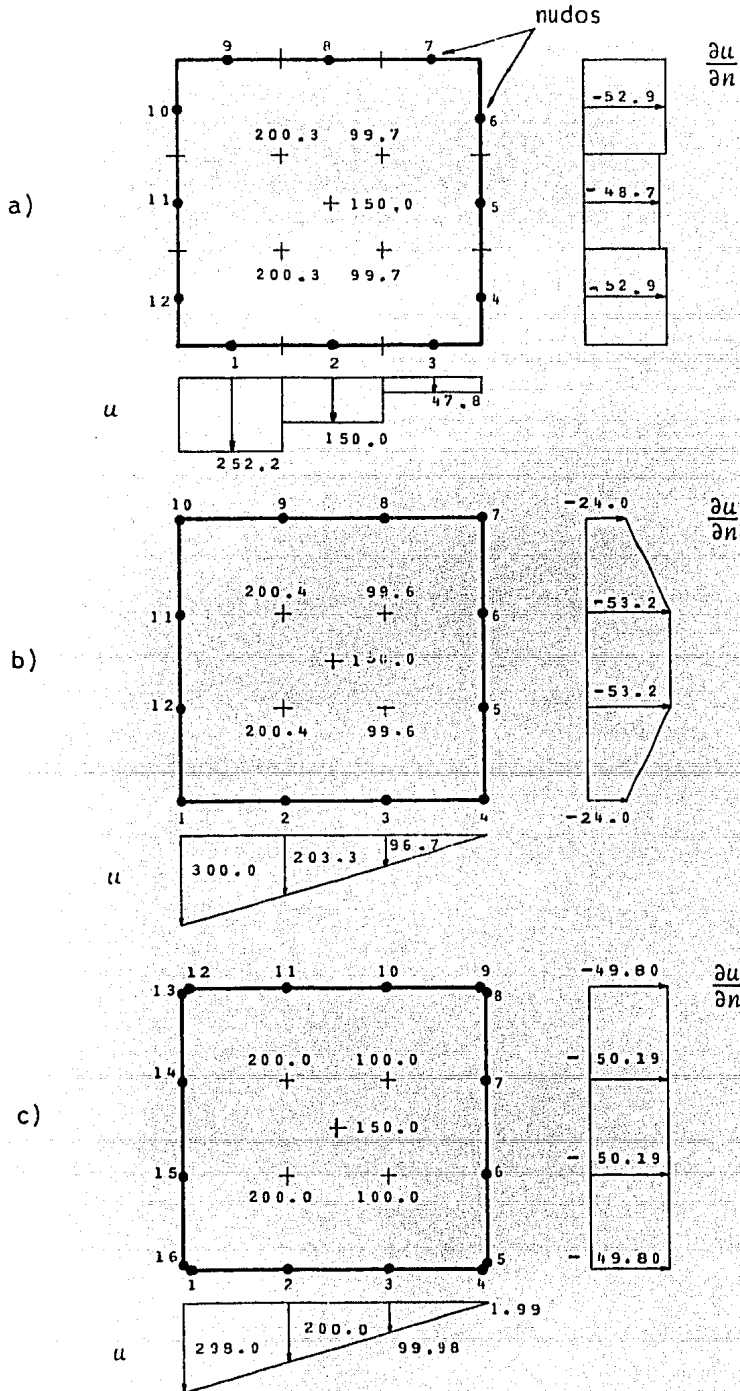


Fig 4.2 (a) Solución con elementos constantes. (b) Solución con elementos lineales. (c) Solución con elementos lineales con dos nudos en las esquinas.

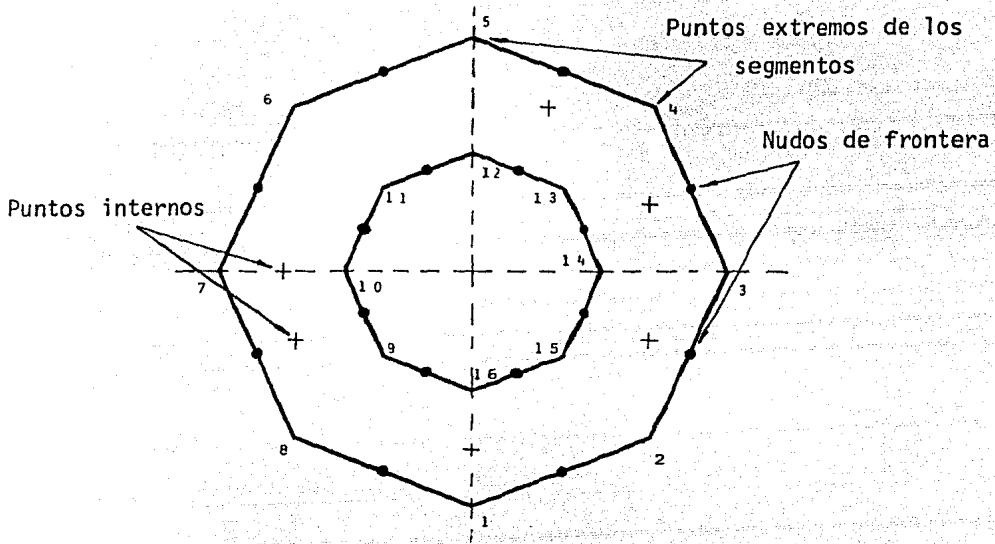


Fig. 4.3 Octaedro con un agujero

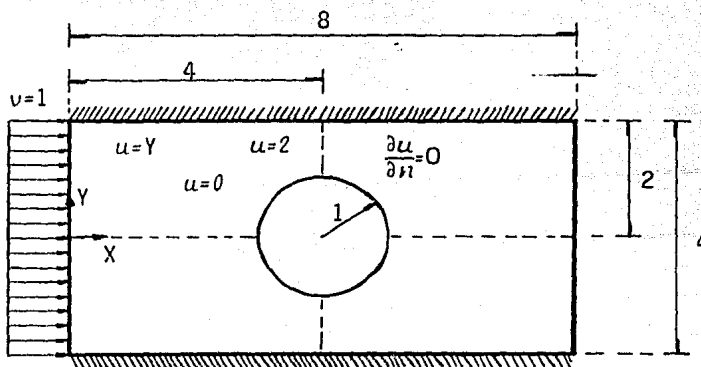


Fig. 4.4. Flujo laminar alrededor de un cilindro entre dos placas paralelas

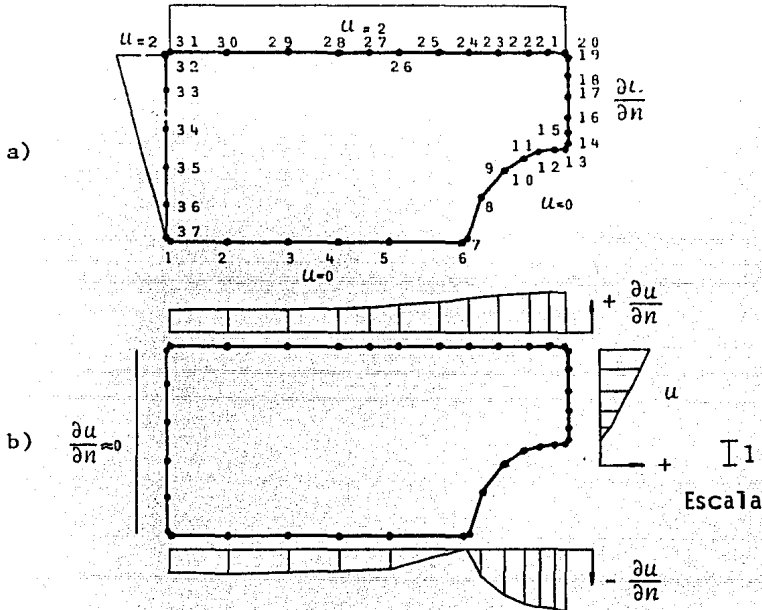


Fig 4.7 Condiciones de frontera prescritas y solución para elementos lineales con dos nudos en las esquinas. (a) Valores de u y $\frac{\partial u}{\partial n}$ prescritos en toda la frontera. (b) Valores obtenidos para u y $\frac{\partial u}{\partial n}$ en toda la frontera.

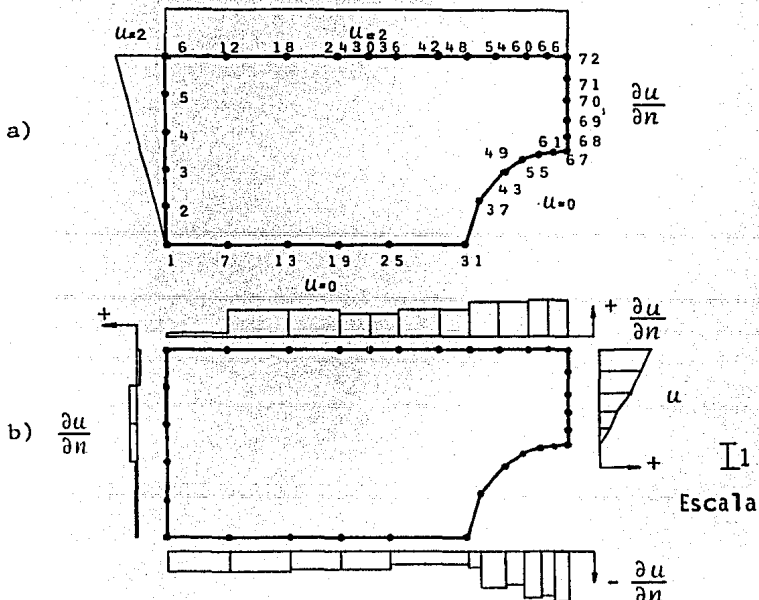


Fig 4.8 Condiciones de frontera prescritas y solución para elementos finitos. (a) Valores de u y $\frac{\partial u}{\partial n}$ prescritos en toda la frontera. (b) Valores obtenidos para u y $\frac{\partial u}{\partial n}$ en toda la frontera.

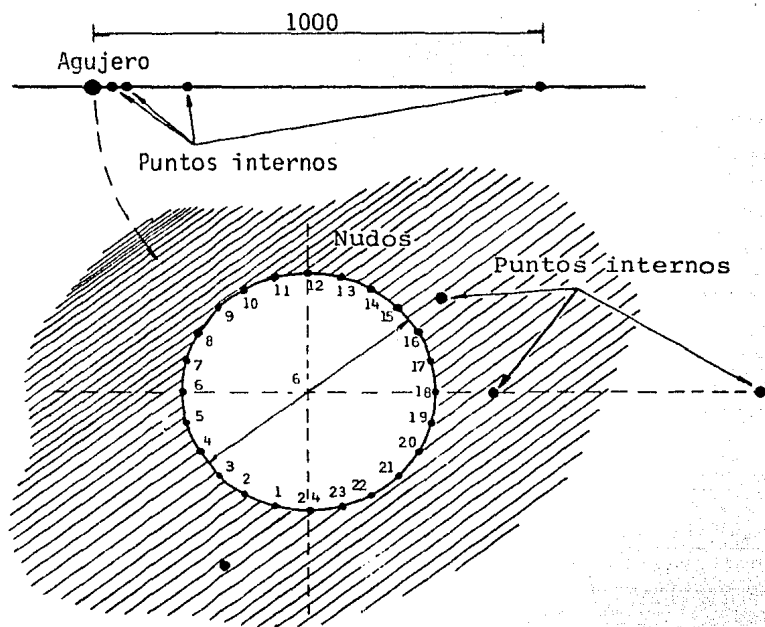


Fig. 4.9 Cavity circular bajo presión interna

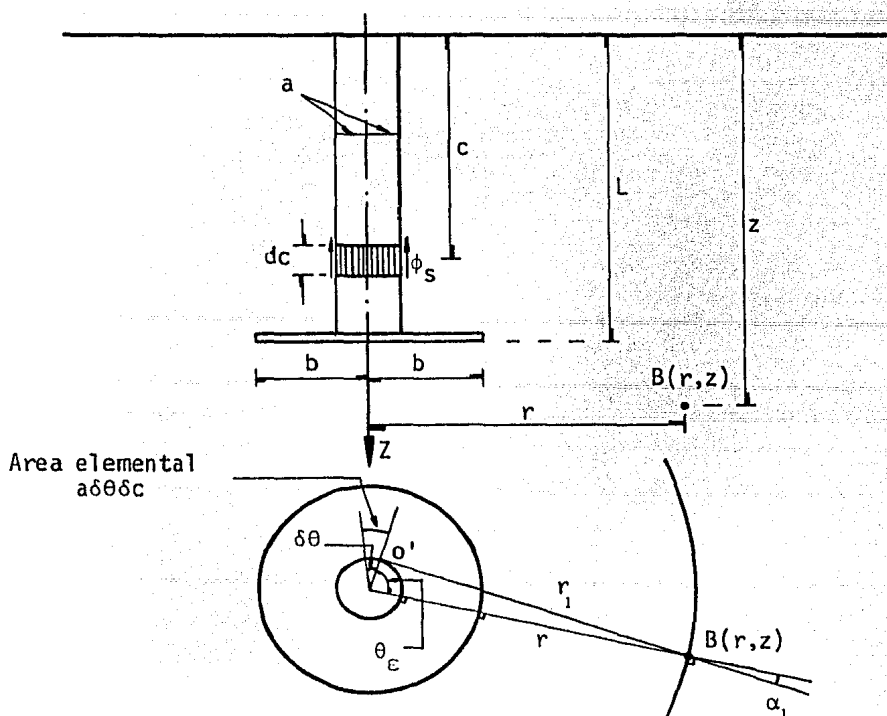


Fig. 4.10 Integración en el pilote para los desplazamientos debidos a ϕ_s

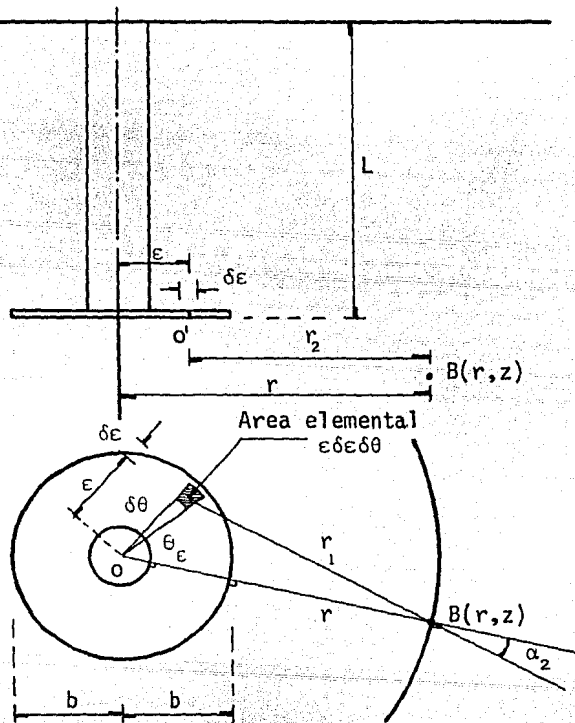


Fig. 4.11 Integración en la base de un pilote para los desplazamientos debidos a ϕ_s

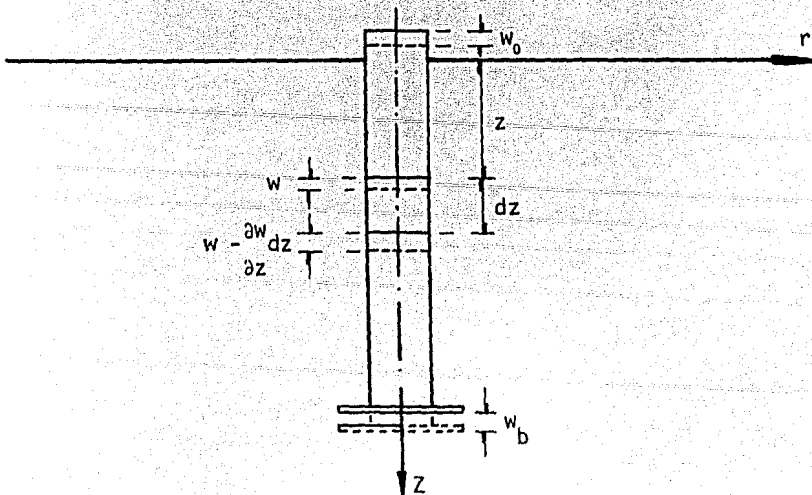


Fig 4.12 Desplazamiento vertical en el dominio de un pilote compresible

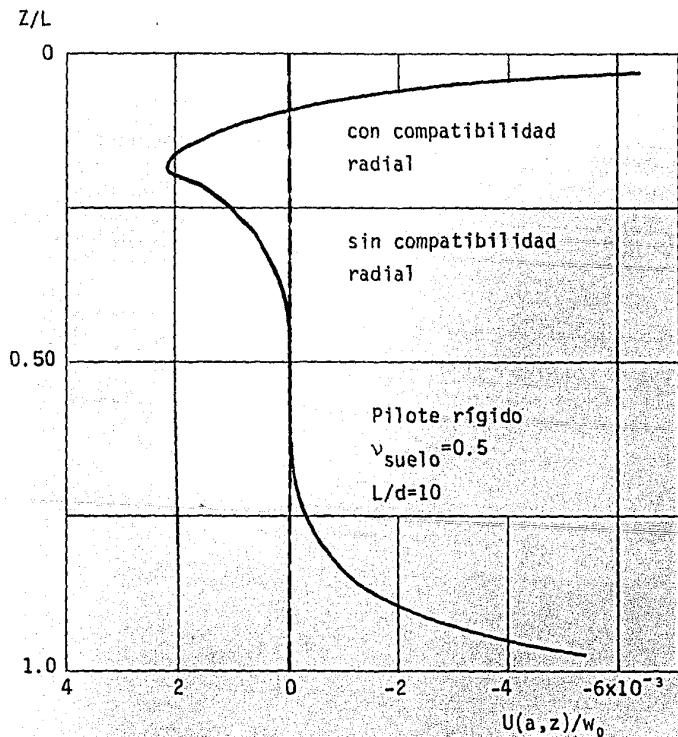


Fig. 4.13 Desplazamiento radial en la interfase pilote-suelo

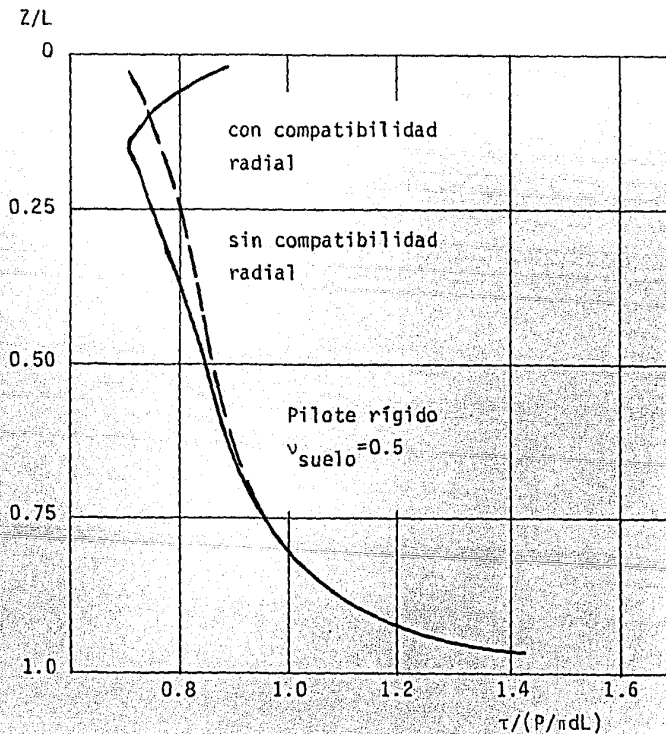


Fig. 4.14 Esfuerzo cortante en un pilote

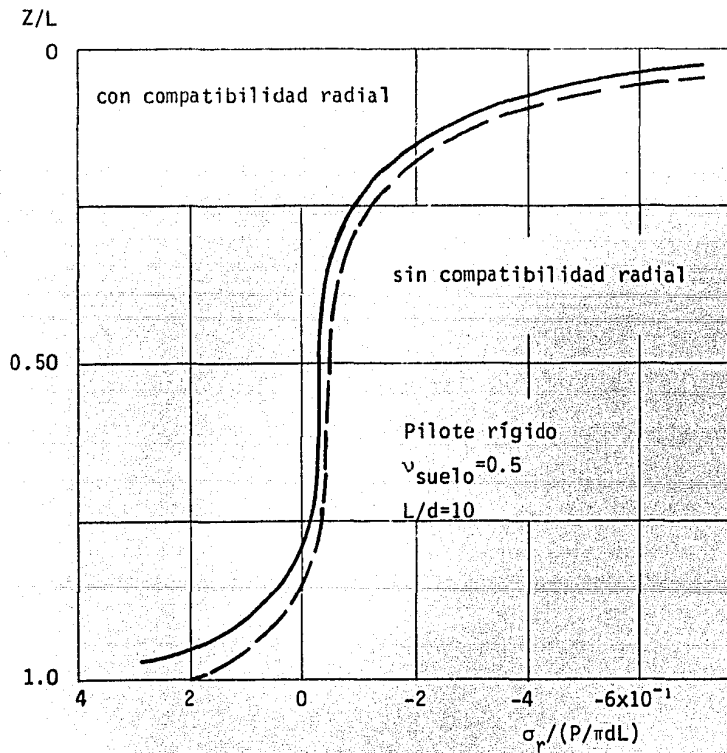


Fig. 4.15 Esfuerzo radial en el pilote

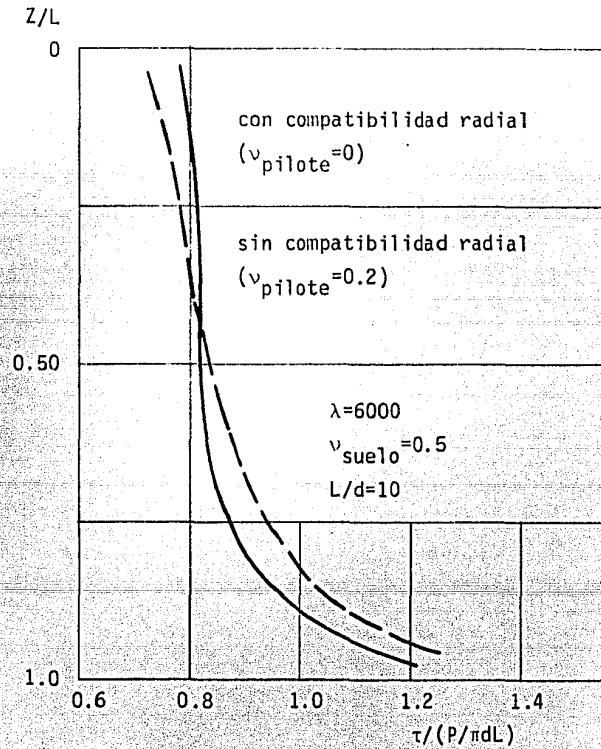


Fig. 4.16 Esfuerzo cortante en un pilote compresible

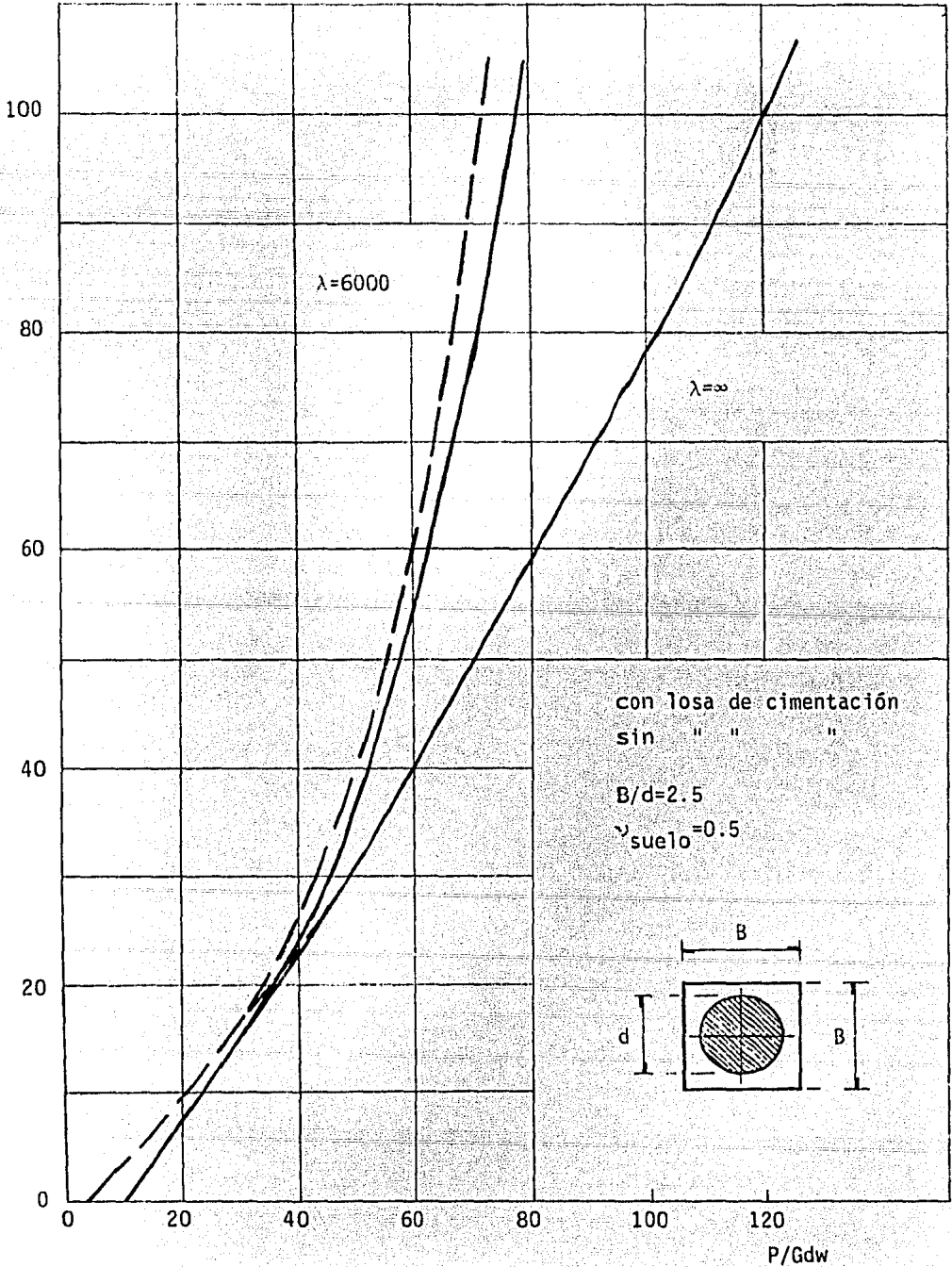


Fig. 4.17 Respuesta de un pilote con y sin losa de cimentación

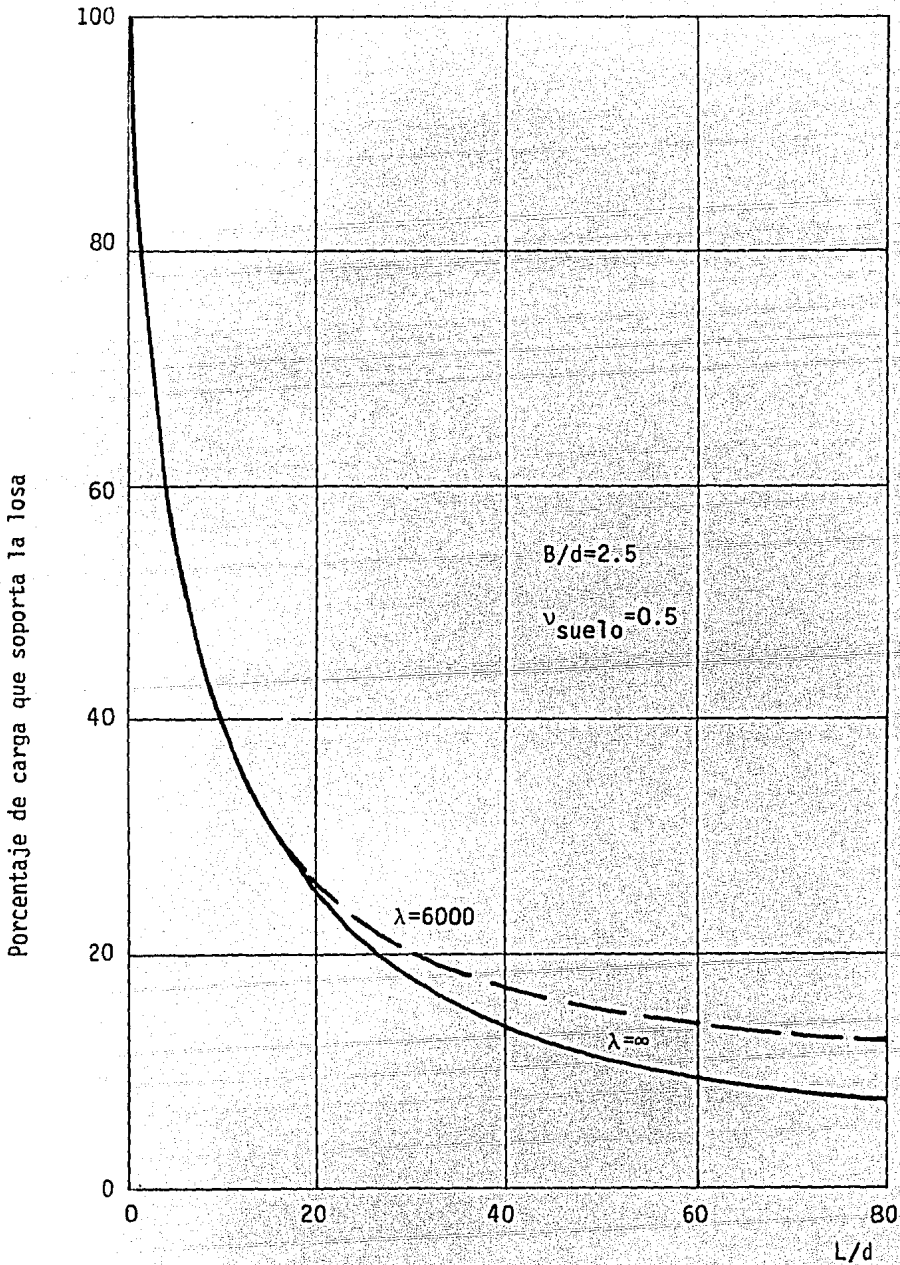


Fig. 4.18 Distribución de carga entre la losa y un pilote

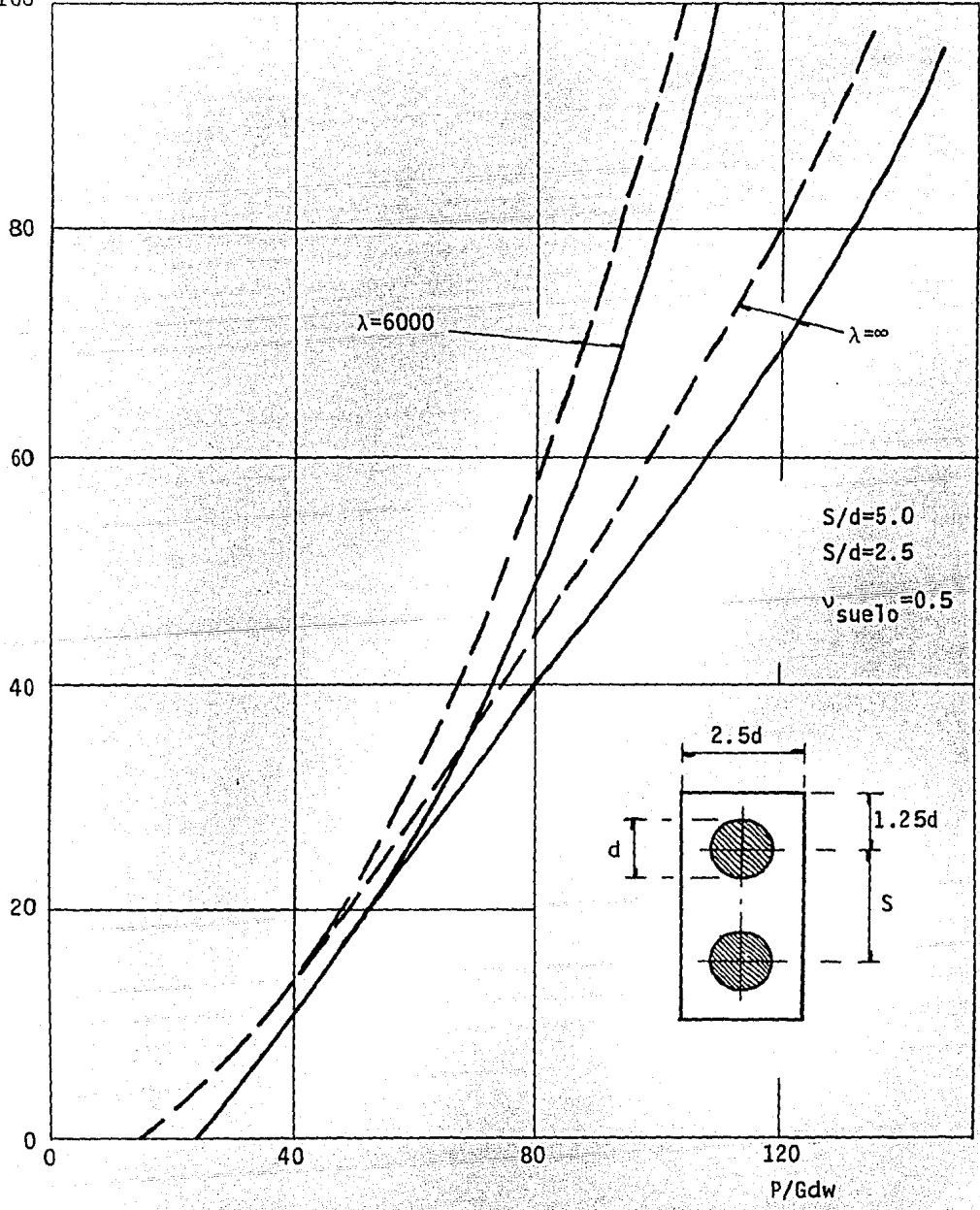


Fig. 4.19 Respuesta carga axial-desplazamiento vertical de un grupo de 2 pilotes con losa rectangular

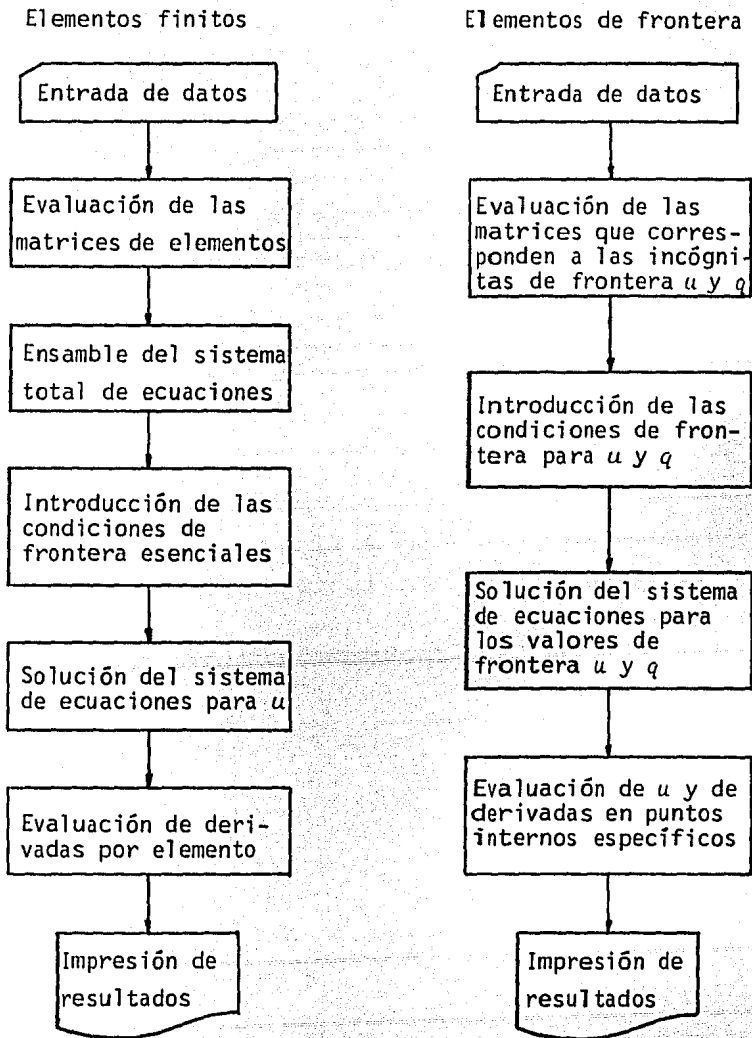


Fig. B.1. Diagrama de flujo para elementos finitos versus elementos de frontera

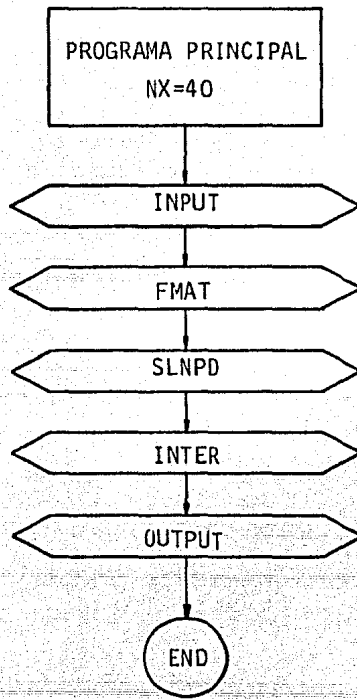


Fig. B.2. Diagrama de macro-flujo para elementos de frontera

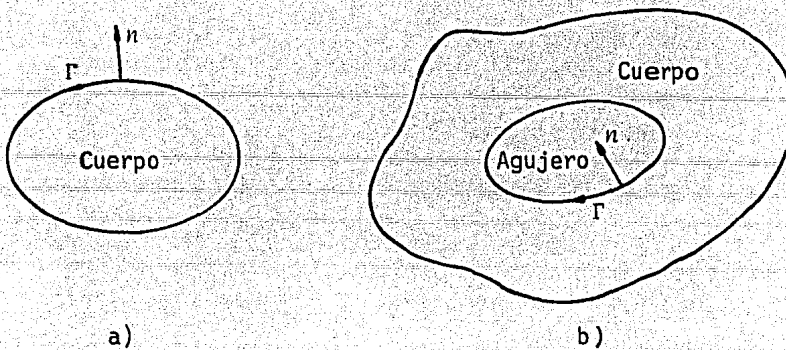


Fig. B.3. Forma de enumerar para: (a) superficies externas, (b) superficies internas

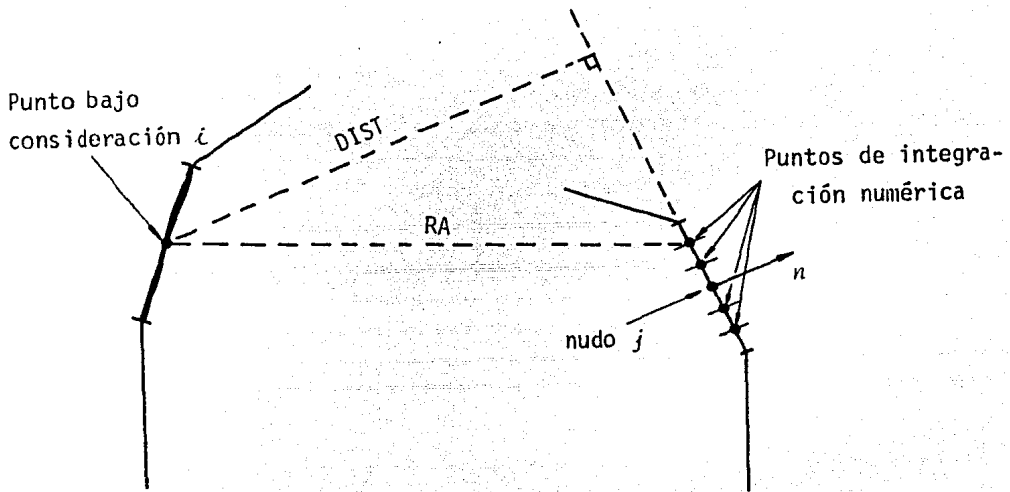


Fig. B.4 Definiciones geométricas

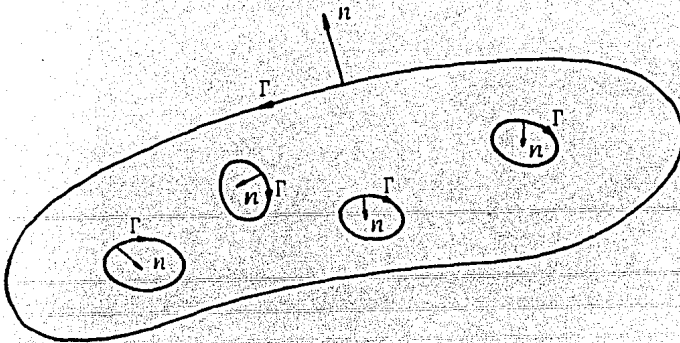


Fig. C.1 Cuerpo con agujeros