



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIRECCION  
60-1-242

28  
41

Señor ADONIS JAURES CALDERON TORRES,  
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor M.I. José Luis Camba Castañeda, para que lo desarrolle como TRABAJO ESCRITO en opción de tesis para su Examen Profesional de la carrera de INGENIERO CIVIL.

"MOMENTOS HIPERESTATICOS EN VIGAS CONTINUAS PREEFORZADAS"

- I. Introducción.
- II. Método de la carga equivalente.
- III. Efecto de la curvatura invertida de tendones.
- IV. Ejemplos.
- V. Conclusiones.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares del trabajo escrito, el título del trabajo realizado.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Cd. Universitaria, 2 de diciembre de 1983  
EL DIRECTOR

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N T R O D U C C I O N

## CAPITULO UNO

Actualmente la mayor parte de las construcciones de concreto preesforzados consisten de vigas estáticamente determinadas, pisos y paneles para cubierta de techos y unidades de muro; una de las razones para que ésto suceda, es que una gran proporción de los elementos preesforzados son precolados y la estructura llega al lugar en piezas tal como las estructuras de acero y hay que hacer costos extras y un poco de esfuerzo para obtener continuidad en los mismos. En contraste con el concreto reforzado para el cual la condición de continuidad es casi natural ya que en la mayoría de los casos los elementos se cuelan en el campo. Pero en relación a esto último la ventaja de los elementos precolados es, que se evita la formación del elemento, el apuntalamiento y el tensar en el campo.

Además, para claros continuos el diagrama del máximo momento de diseño tiene picos locales usualmente en los soportes internos. Para estructuras de concreto no preesforzado el momento se puede controlar con gran facilidad cortando las varillas donde no son necesarias. Por otro lado en miembros preesforzados al refuerzo principal es frecuentemente un tendón continuo

de sección transversal constante, cuya área se encuentra a partir de la sección de mayor momento, para claros contínuos en -- que los momentos varíen grandemente a lo largo de toda la longi tud, esto puede resultar un diseño antieconómico.

Las pérdidas por fricción pueden ser grandes para claros contínuos preesforzados, por lo cual el perfil del tendón está destinado a tener algunos cambios de curvatura.

Finalmente, como será discutido con mas detalle, las vi gas preesforzadas estáticamente indeterminadas desarrollan un momento secundario que es resultado del preesfuerzo, introdu-- ciendo cierta complicación en el proceso de diseño.

Sin embargo, hay ventajas importantes asociadas con es tructuras indeterminadas de concreto preesforzado, en cuanto a estructuras de otro tipo. Los momentos de diseño son menores, - para claros y cargas dadas, que para estructuras determinadas. La rigidez se incrementa y la deflexión se reduce. Para Tendo-- nes postensados contínuos sobre algunos claros, se requieren -- unos pocos enclajes y el costo del estiramiento o esfuermien to se reduce grandemente. Las juntas rígidas en marcos contí-- nuos las provee de un importante mecanismo para resistir cargas horizontales, tales como las inducidas por el viento o fuerzas

sísmicas.

Este trabajo tiene como finalidad la comparación de los momentos de diseño en elementos de concreto preesforzado contínuos; cuando estos se calculan considerando el perfil del cable como una parábola a lo largo de todo el claro rematando con picos en los soportes interiores Fig. 1 o cuando el perfil es parabólico tanto en el claro como en los soportes interiores, teniendo en cuenta que en estos últimos la parábola está invertida Fig.2, esto se hace mas claro con las siguientes figuras:

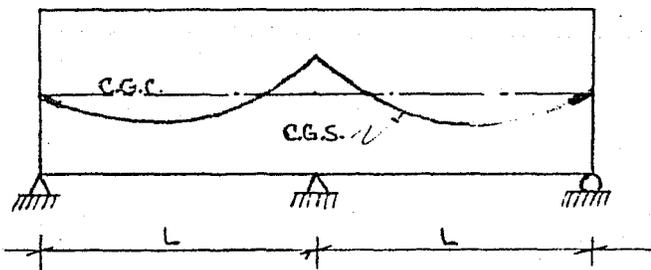


FIG. 1

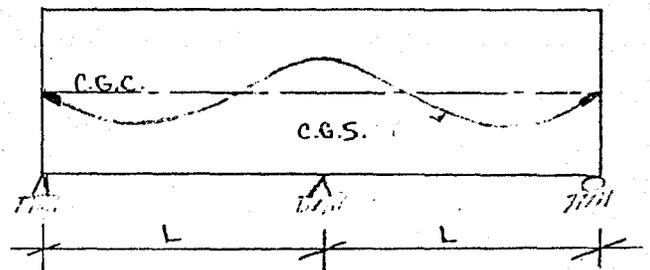


FIG. 2

Para el desarrollo del primer caso utilizaremos uno de los métodos tradicionales, el de la carga equivalente o balanceada, cuyo desarrollo se hace en el capítulo dos; para el se--

gundo caso se utilizará el método anterior pero, con ciertas interpretaciones hechas por el Ing. Roberto Park y estas interpretaciones se presentan íntegras en el capítulo tres.

En el capítulo cuatro se presentan varios ejemplos en los cuales se observarán las diferencias de una manera objeti--va; en el capítulo cinco se dan algunas conclusiones representativas del problema y por último se dan algunas referencias utilizadas en el trabajo.

## CAPITULO DOS

### METODO DE LA CARGA EQUIVALENTE O BALANCEADA.

El concepto de la carga equivalente o balanceada ofrece una alternativa aproximada en la determinación de la fuerza de preesfuerzo y la exentricidad, requeridas. La fuerza de preesfuerzo y el perfil del tendón pueden ser establecidos de manera que las cargas externas que actúen sean exactamente contrarrestadas por las fuerzas transversales resultantes del preesfuerzo. El resultado neto, para ese conjunto particular de cargas externas, es que la viga está sujeta a compresión axial solamente y no tiene momento flexionante. Además, si todas las cargas son de naturaleza sostenida (como es la fuerza de preesfuerzo) el miembro no tendrá deflexión vertical. La selección de la carga a ser balanceada es directamente proporcional al juicio del diseñador. Usualmente la carga balanceada seleccionada es la suma del peso propio y la carga muerta sobreimpuesta, pero puede incluir una fracción de la carga viva prevista.

Los fundamentos de la aproximación del método que en Europa se le denominaba momento balanceado y al introducirse en

américa por los 60's se le llamó "METODO DE LA CARGA BALANCEADA" es ilustrado en la viga simplemente soportada y uniformemente -- cargada que se muestra en la figura 3.

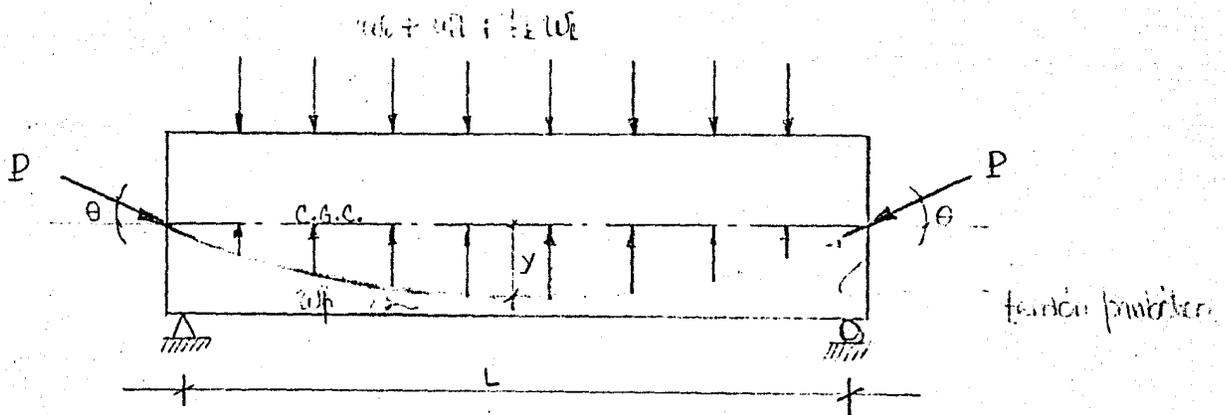


FIG. 3

La viga se diseñará para una carga balanceada consistente de su peso propio  $w_0$ , la carga superimpuesta  $w_d$  y una parte fraccional de la carga viva indicada por  $K_b w_l$ . Desde el punto de vista de que la carga es uniformemente distribuida, es razonable adoptar un tendón que tenga forma parabólica. Esto es fácilmente demostrado ya que un tendón parabólico produce una carga uniformemente distribuida hacia arriba igual a:

$$w_p = \frac{8Py}{L^2}$$

Donde  $P$  es la magnitud de la fuerza de preesfuerzo, y  $f_b$  es la flecha máxima del tendón medida con respecto a la cuerda entre los puntos finales y  $L$  es el claro.

Si la carga hacia abajo es exactamente igual a la carga hacia arriba del tendón, estas se cancelan y no se producen esfuerzos flexionantes y esto se muestra como sigue:

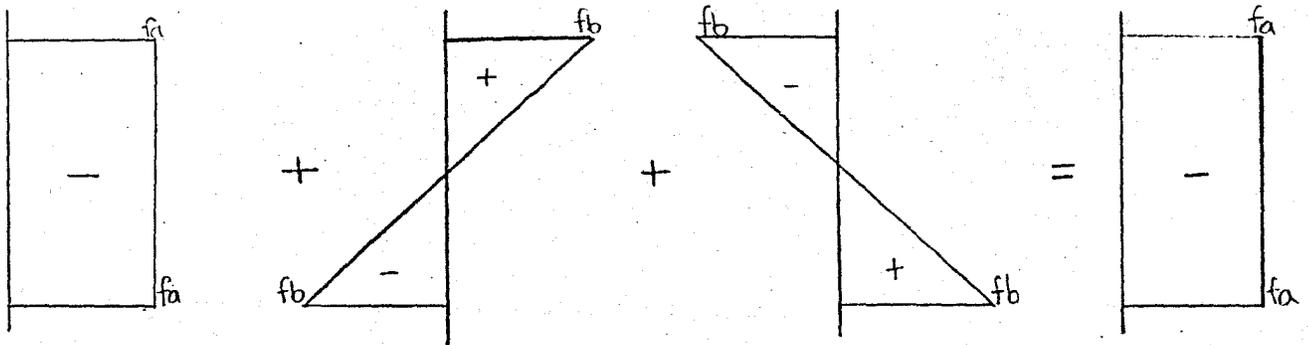


FIG. 4

A esto se le denomina "estado o condición de carga balanceada" en el elemento.

Los esfuerzos de flexión debidos a la exentricidad del preesfuerzo son iguales y opuestos a los esfuerzos flexionantes resultantes de la carga externa. El esfuerzo resultante neto es una compresión uniforme  $f_a$  igual al que es producido por la fuerza axial  $P \cos \theta$ . Excluyendo los efectos que dependen del tiempo,

la viga no mostraría deflexión vertical.

Sin embargo, si la carga viva es quitada o incrementada, los esfuerzos flexionantes y deflexiones resultarían de la parte no balanceada de la carga. Los esfuerzos, debido a esta carga diferencial, pueden ser calculada y sobreimpuesta a los de compresión axial, obteniendo así los esfuerzos netos para el estado no balanceado, esto es.

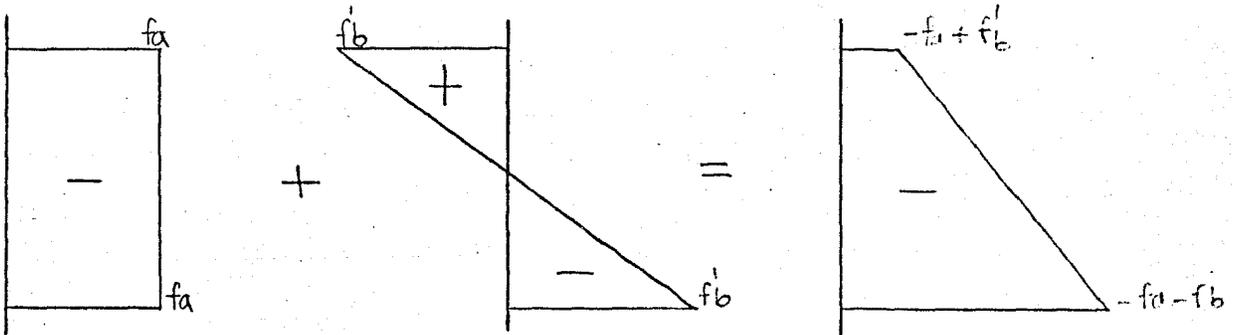


FIG.5

Otras cargas diferentes a la uniformemente distribuida obligaría a utilizar otras configuraciones de tendones, por ejemplo, si la carga externa consiste de una carga concentrada a mitad del claro se usará un perfil del tendón que varíe linealmente con cero excentricidad en los soportes y máxima en el centro del claro; y así sucesivamente se pueden utilizar otros perfiles dependiendo del tipo de carga que se tenga.

Es evidente que para claros simples diseñados por el concepto de carga balanceada, es necesario para el tendón tener excentricidad cero en los soportes, porque el momento debido a las cargas sobreimpuestas es cero en ese punto, cualquier tendón excentrado produciría un momento no balanceado (dentro de la misma carga equivalente) igual a la componente horizontal del preesfuerzo por su excentricidad.

Para claros continuos sobre soportes esta restricción no es aplicable. En la figura No. 6, si la fuerza de preesfuerzo es la misma en el soporte interior para los dos lagos adyacentes y si la pendiente del tendón es la misma en ambos lados, luego el momento flexionante neto aplicado a la trabe en ese punto es cero.

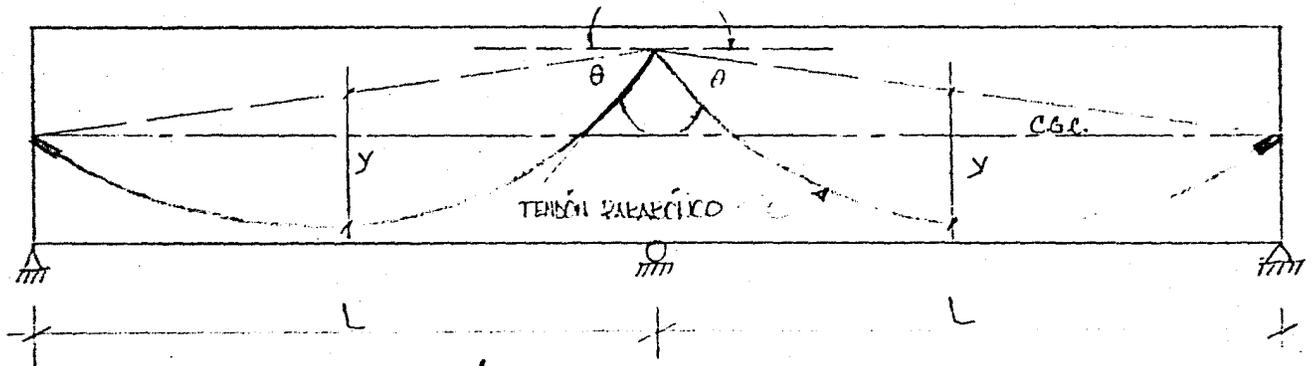


FIG. 6

La carga no balanceada, solamente es la fuerza resultante vertical del cambio de pendiente del tendón. Esto ocurre direc

tamente en el interior del soporte. En tales casos, el tendón puede ser colocado a la máxima excentricidad permitida por el recubrimiento de concreto maximizando la fuerza de preesfuerzo requerida para soportar la carga establecida; en los apoyos externos se puede mantener el cable con cero excentricidad.

Para este caso de vigas estáticamente indeterminadas sí se excluye el peso propio del miembro, los esfuerzos de compresión "C" coinciden con el centroide del acero de preesfuerzo y el momento primario sería igual a la distancia entre los centros de acero y de concreto por la fuerza de preesfuerzo, pero esto causaría una tendencia de la viga a deflectarse, la cual es restringida por el sistema de redundantes de los soportes. Debido a lo anterior aparecen reacciones en estos soportes dando lugar a momentos secundarios en la viga. Para estos casos el momento total en cualquier sección es la suma de los momentos primarios y secundarios.

Este momento total puede ser establecido directamente, sin considerar las contribuciones separadas de los momentos, mediante el método de la carga equivalente.

La aproximación de la carga equivalente está basada sobre la consideración de las fuerzas transversales que son apli-

casas a un miembro dondequiera que haya un cambio en el alineamiento de los tendones de preesfuerzo. Esas fuerzas producen momentos, justamente como cualquier otro sistema de cargas externas. Los esfuerzos resultantes de estos momentos pueden ser combinados con el de compresión axial uniforme,  $P/A_c$ , debido al preesfuerzo para obtener los esfuerzos totales en cualquier sección. El momento así obtenido incluye los efectos primario y secundario.

Si las cargas equivalentes debidas al preesfuerzo fueran exactamente iguales y opuestas a las cargas aplicadas, esto hace que todas las fuerzas transversales se cancelen. Para esta única condición de carga balanceada, no hay momento flexionantes aplicados a la viga. No existen esfuerzos flexionantes, solamente esfuerzos axiales que son producidos por la componente longitudinal de la fuerza de preesfuerzo. Para tal condición no hay desplazamientos de la viga, solamente acortamiento axial y la cuestión de determinación sería irrelevante.

El método de la carga equivalente simplifica el análisis y diseño de vigas indeterminadas por la eliminación (en el análisis de carga de servicio) de la necesidad de calcular las reacciones y momentos secundarios debidos al preesforzamiento. Cuan-

do tales momentos secundarios deben ser encontrados ( en el análisis de la carga última ) el método de la carga balanceada provee el camino mas conveniente para obtener esos momentos secundarios substrayendo el momento primario del total.

### CAPITULO TRES

#### EFFECTO DE LA CURVATURA INVERTIDA EN TENDONES

Como ya se mencionó, idealmente en miembros continuos - los tendones parabólicos serán puntiagudos en los soportes interiores, por ejemplo, de la forma que se ve en la figura 7:

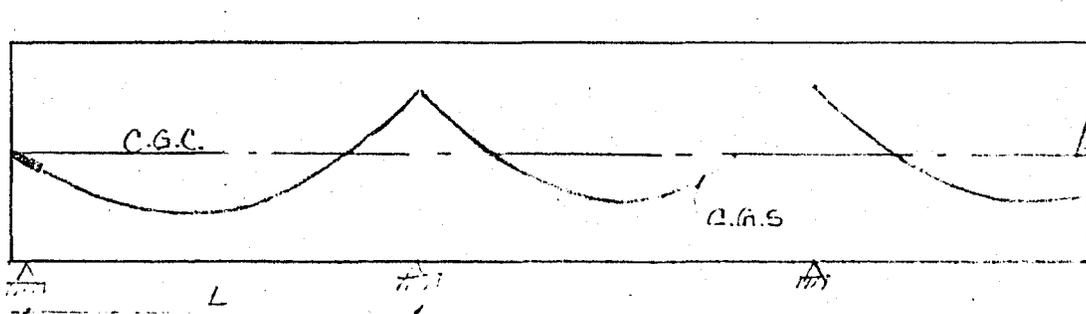


FIG. 7

de manera que se produce una carga uniformemente distribuida hacia arriba a lo largo de toda la longitud del miembro.

En la práctica esto no es posible. Los altos esfuerzos de flexión en el concreto y las grandes pérdidas de fricción en tales picos, podrían reducirse teniendo una pequeña longitud de curvatura inversa en los soportes interiores. Las parábolas continuas hacia arriba y hacia abajo pueden usarse como se muestra en la figura 8;

Las cargas equivalentes inducidas sobre la viga por un tendón como el de la figura anterior, serán; fig. 8

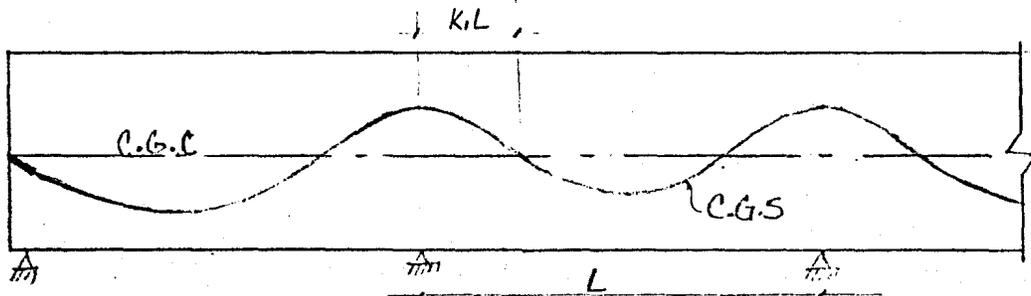


FIG. 8

Esto ha sido establecido para la mayor parte de tendones revestidos, naturalmente, y con valores de  $K_I$  que van de 0.10 a 0.15 del claro  $L$ .

No es difícil tomar la forma actual del tendón dentro de los cálculos cuando determinemos los momentos resultantes del preesfuerzo. Las cargas equivalentes y los momentos finales para los perfiles del tendón hechos de una serie de parábolas pueden ser determinados como sigue:

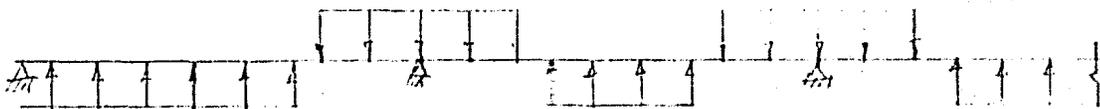


FIG. 9

Para claro interior, tendremos:

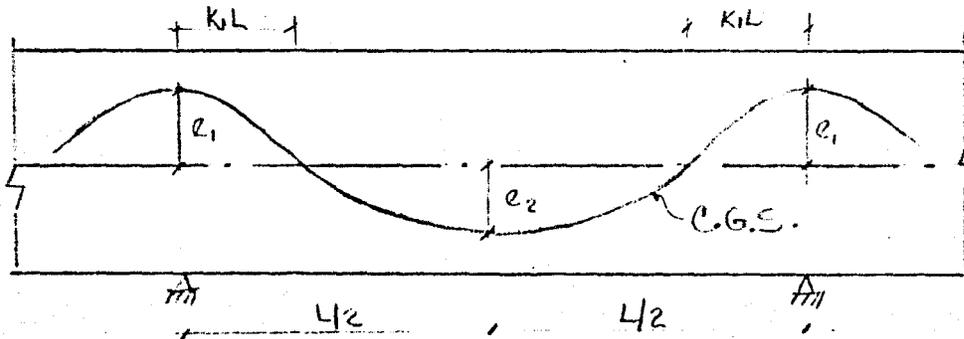


FIG. 10

El perfil es una curva suave hecha de parte de tres parábolas;  $k_1L$  es la distancia desde el apoyo al punto de inflexión (curvatura inversa). Las cargas equivalentes serán:

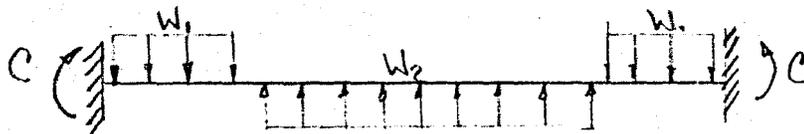


FIG. 11

Y la geometría de la mitad del tendón es la sig.

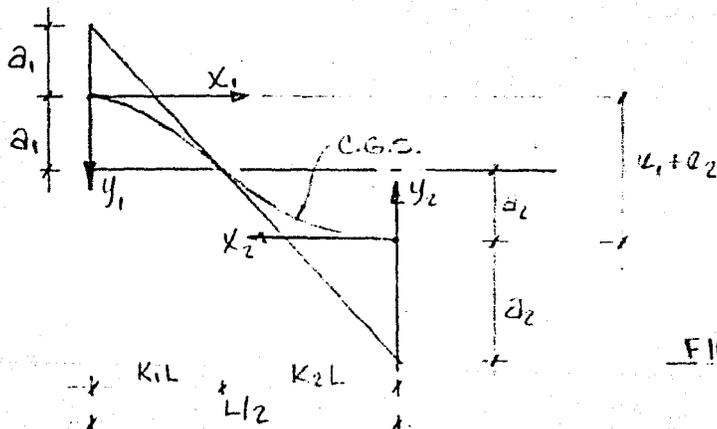


FIG. 12

La ecuación del perfil del tendón puede fácilmente ser escrita tomando el origen de las coordenadas para cada parábola en el punto de pendiente cero, como se observa en la figura 12, Por ej., la ecuación de la parábola en el soporte está dada como sigue;

$$Ax_1^2 + Bx_1 + C = 0 \text{ ————— Ec. de la parábola.}$$

Si derivamos la ec. con respecto a  $x_1$ , tendremos:

$$2Ax_1 + B = 0 \quad C = 0$$

$$\text{si } x_1 = 0 \quad B = 0$$

como ya tenemos los valores acondicionados de B y C iguales a --cero, de la ecuación resultante e igualándola a  $y_1$ , se tiene;

$$Ax_1^2 = y_1 \text{ ————— (a)}$$

$$\text{si } x_1 = 0 \quad y_1 = 0 \quad A = 0$$

$$\text{si } x_1 = k_1 L \quad y_1 = a_1 \quad A(k_1 L)^2 = a_1 \quad A = \frac{a_1}{k_1^2 L^2}$$

∴ Sustituyendo A en la ec. (a) obtendremos:

$$y_1 = \frac{a_1 x_1^2}{k_1^2 L^2} \quad \text{-----Ec. (1)}$$

Siguiendo igual procedimiento para la parábola cuyo origen sea el centro del claro se obtiene que:

$$y_2 = \frac{a_2 x_2^2}{(0.5 - k_1)^2 L^2} \quad \text{-----Ec. (2)}$$

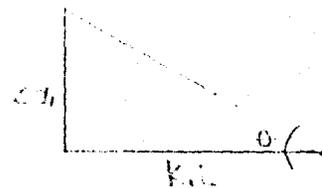
Para determinar las cargas uniformes equivalentes  $W_1$  y  $W_2$ , se considera la geometría del tendón ilustrada en la figura 12. De esta y por triángulos semejantes,

$$\frac{2a_1}{k_1 L} = \frac{2a_2}{k_2 L} = \frac{2(e_1 + e_2)}{0.5 L}$$

$$a_1 = 2(e_1 + e_2)k_1 \quad \text{y} \quad a_2 = 2(e_1 + e_2)k_2$$

Por lo tanto de la ec.  $W = F_0/L$ , se tiene que:

$$W_1 = F \frac{2a_1/k_1 L}{k_1 L} = \frac{2Fa_1}{k_1^2 L^2}$$



$$W_1 = \frac{4F(e_1 + e_2)}{k_1 L^2} \quad \text{-----Ec. (3)}$$

$$W_2 = F \frac{2a_2/k_2 L}{k_2 L} = \frac{2Fa_2}{k_2^2 L^2}$$

$$W_2 = \frac{4F(e_1 + e_2)}{k_2 L^2} \quad \text{-----Ec. (4)}$$

Observemos de estas ecuaciones el equilibrio requerido, - - -

$W_1 k_1 L = W_2 k_2 L$ , está satisfecho por las ecuaciones (3) y (4).

Los momentos de empotramiento para estas cargas serán:

$$C = \pm \frac{2}{3} F(e_1 + e_2) (1 - k_1) \quad \text{-----Ec. (5)}$$

Esta ecuación muestra que el efecto de  $k_1 = 0$  es para reducir los momentos de empotramiento y por lo tanto el momento resultante del preesfuerzo en los soportes internos.

Para el claro exterior, se tiene:

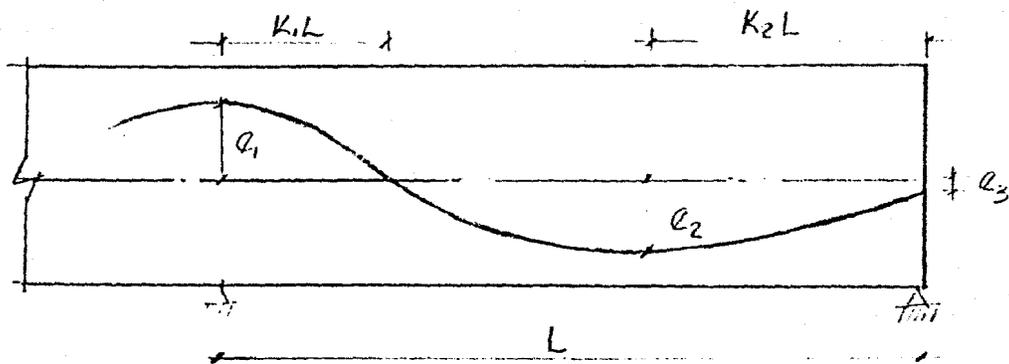


FIG. 13a

El perfil es una curva suave hecha de tres partes de parábola;  $k_1L$  y  $k_2L$ , son las distancias de los soportes a los puntos de curvatura inversa para determinar las cargas equivalentes mostradas en la fig. 13b.

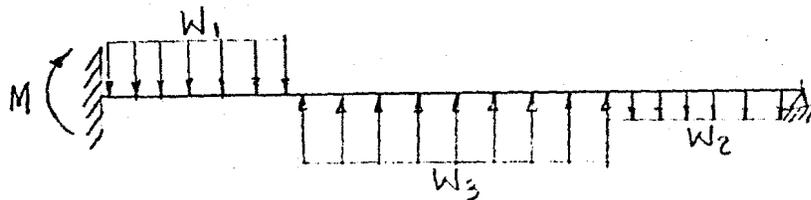


FIG. 13b

consideraremos la geometría del tendón ilustrada en la fig.13c

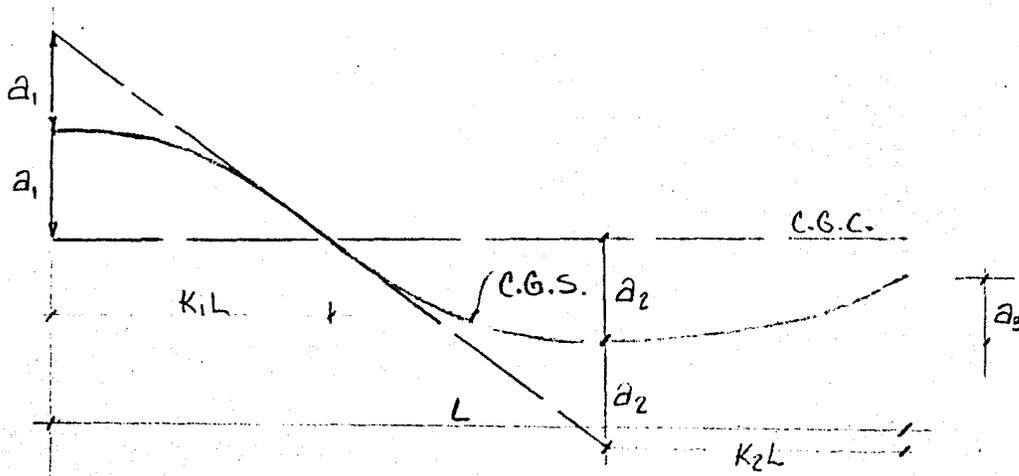


FIG. 13c.

Las ecuaciones para el perfil del tendón pueden ser escritas de una manera similar a las ecuaciones (3) y (4).

También por triángulos semejantes:

$$\frac{2a_1}{k_1L} = \frac{2a_2}{L(1-k_1-k_2)} = \frac{2(e_1 + e_2)}{L(1-k_2)}$$

$$a_1 = (e_1 + e_2) \frac{k_1}{1-k_2} \quad \text{y} \quad a_2 = (e_1 + e_2) \frac{1-k_1-k_2}{1-k_2}$$

También:

$$a_3 = e_2 - e_3$$

Y como; 
$$W = \frac{F8}{L}$$

$$W_1 = F \frac{2a_1/k_1 L}{k_1 L} = \frac{2F(e_1 + e_2)}{k_1(1-k_2)L^2} \text{-----Ec. (6)}$$

$$W_2 = F \frac{2a_2/L(1-k_1-k_2)}{L(1-k_1-k_2)} = \frac{2F(e_1 + e_2)}{(1-k_1-k_2)(1-k_2)L^2} \text{-----Ec. (7)}$$

$$W_3 = F \frac{2a_3/k_2 L}{k_2 L} = \frac{2F(e_2 - e_3)}{k_2^2 L^2} \text{-----Ec. (8)}$$

El momento de empotramiento para esta carga, con los soportes finales picudos como en la fig. 13b; pueden ser:

$$M = \frac{F}{4} e_3 k_2^2 + e_2 (3-3k_1 + k_1^2) + k_2 (2-k_1) + e_1 (1-k_1+k_2)^2 - k_1(1-k_2) \text{-----Ec. (9)}$$

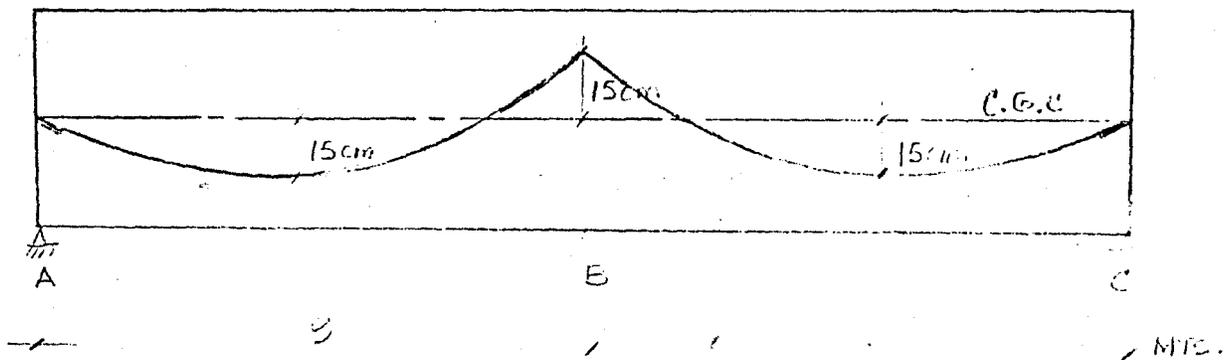
Es evidente que el chequeo de esfuerzos en miembros usando las ecs. (5) y (9) para los momentos de empotramiento no es mucho mas difícil que usando la simplificación en los momentos de empotramiento la cual asume el perfil del tendón picudo o puntiagudo.

## CAPITULO IV

### EJEMPLOS

La viga rectangular mostrada tiene un ancho  $b = 30$  cm. y un peralte total  $h = 55$  cm., es preesforzada usando un tendón parabólico continuo en cada claro, con excentricidades como se indican. La viga estará sujeta a una fuerza de preesfuerzo efectiva después de las pérdidas. De 90 ton., las diferencias en tensión a lo largo del claro no se tomaron en cuenta.

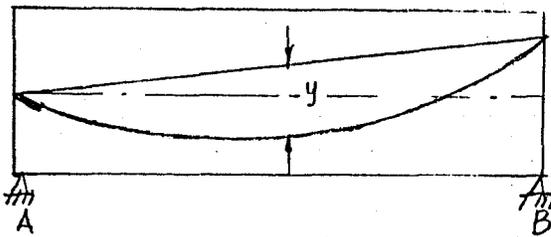
Establezca los momentos primarios, secundarios y total resultantes del preesfuerzo así como también la localización de la línea de presiones y los esfuerzos en el concreto en el soporte B debidos al preesfuerzo.



a) Utilizando el método de la carga equivalente, se observa que un tendón parabólico teniendo una flecha total --- igual a producirá una carga hacia arriba uniformemente distribuida sobre la viga igual a:

$$W_p = \frac{8P}{l^2}$$

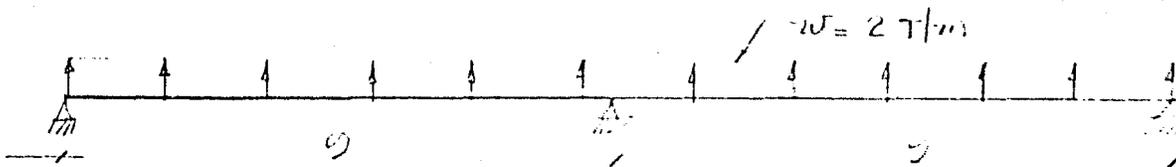
Para el caso presente, la flecha, medida con respecto a la línea entre la localización del tendón en los soportes de su claro, es de 22.5 cm., esto es:



Sustituyendo se tiene:

$$W_p = \frac{8 \times 90 \times 0.225}{9^2} = 2 \text{ Ton/m.}$$

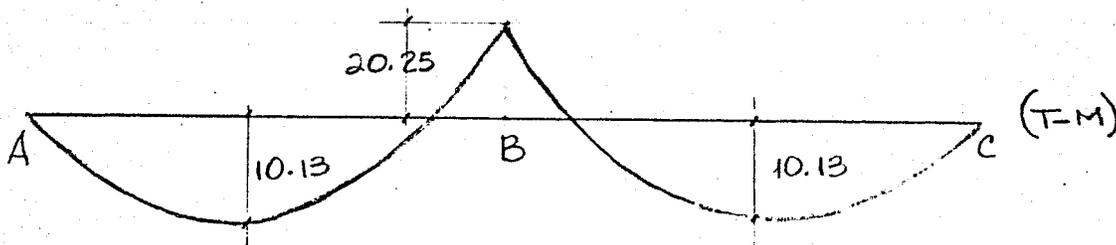
Actuando hacia arriba, así:



Por lo que la viga se analiza para esta carga y como la carga y, claros son simétricos, los momentos en ambos lados del apoyo central, serán iguales a:

$$\text{Membrotramiento} = \frac{Wl^2}{8} = \frac{2 \times 81}{8} = \underline{20.25 \text{ Ton-m.}}$$

Y el diagrama de momentos final, será:

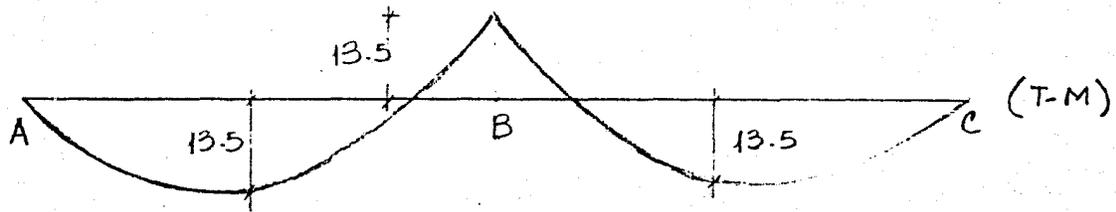


Estos son los momentos finales debidos al preesfuerzo, e incluyendo la contribución tanto del momento primario, como del secundario.

Los momentos primarios son fácilmente establecidos multiplicando la excurtividad del tendón por el valor de la fuerza  $P_e$ , esto es:

$$M \text{ primario} = 0.15 \times 90 = + \underline{13.50 \text{ T-m}}$$

Y su diagrama de momento será:

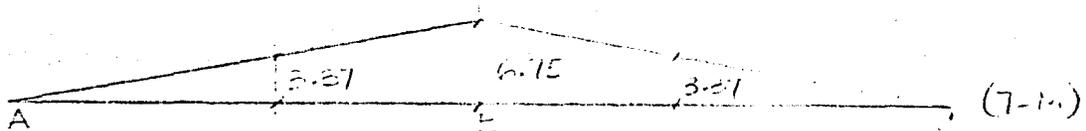


Los momentos secundarios se determinarán substrayendo al momento total el momento primario entonces.

$$\text{En el apoyo B} = + 20.25 - (+13.50) = - \underline{6.75 \text{ Ton-m}}$$

$$\text{A mitad del claro} = 10.13 - (+13.50) = - \underline{3.37 \text{ Ton-m}}$$

Y su diagrama de momentos será:

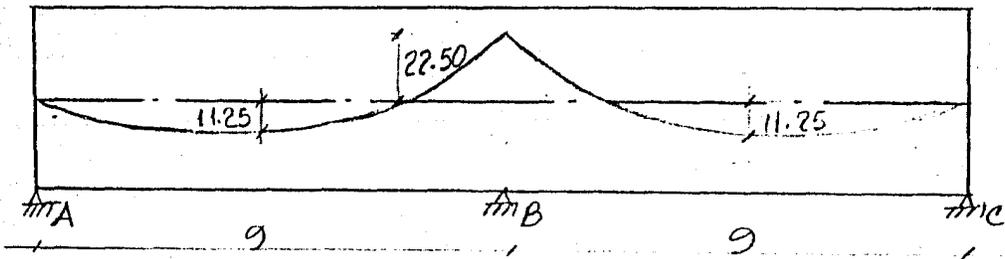


b) Ahora vamos a obtener la localización de la línea de presión, la cual es igual al momento total entre  $P_e$  en cualquier sección.

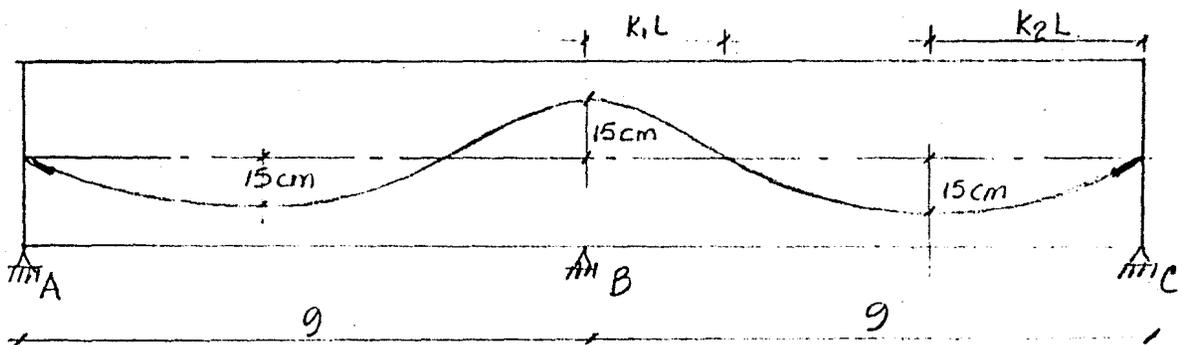
$$\text{En el apoyo B: } e^* = - \frac{20.25 \times 10^2}{90} = - \frac{20.50}{90} \text{ cms.}$$

$$\text{En el centro del claro: } e^* = \frac{10.13 \times 10^2}{90} = \underline{11.12 \text{ cms}}$$

Y el perfil del cable quedaría de la manera siguiente:



Ahora veamos para la misma trabe, el efecto de la curvatura invertida de los tendones.



Como los valores de  $K_1$ , van de  $0.1L$  a  $0.15L$ , Supongamos que  $K_1 = 0.15L = 1.35$  m. y  $K_2 = 0.5L$  para este caso en el que la excentricidad en los soportes externos es igual a  $0$ ,  $e_3 = 0$ , y donde la carga  $W_2 = 0$ , se tiene; que el momento de empotramiento en B, será igual a:

$$M_B = \frac{Pe}{4} \left[ e_2 (3 - 3K_1 + K_1^2) + K_2 (2 - K_1) + e_3 (1 - K_1 + K_2)^2 - K_1 (1 - K_2) \right]$$

$$M_B = \frac{90}{4} \left[ 0.15 (3 - 3(0.15) + (0.15)^2) + 0.5 (2 - 0.15) + 0.15 (1 - 0.15 + 0.5)^2 - 0.15 (1 - 0.5) \right] + 17.70 \text{ T-m.}$$

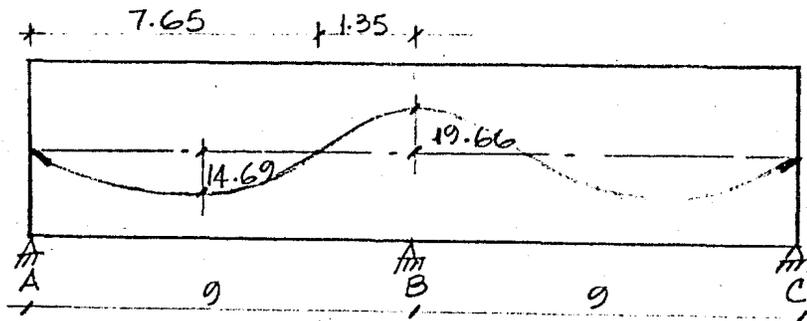
Para ver la localización de la línea de presiones; se tiene:

$$e^*B = - \frac{17.70 \times 10^2}{90} = - 19.67 \text{ cms.}$$

$$e^* = 15 - \frac{4.67}{15} = \underline{14.69 \text{ cms.}}$$

La excentricidad efectiva en el centro del claro es igual a:

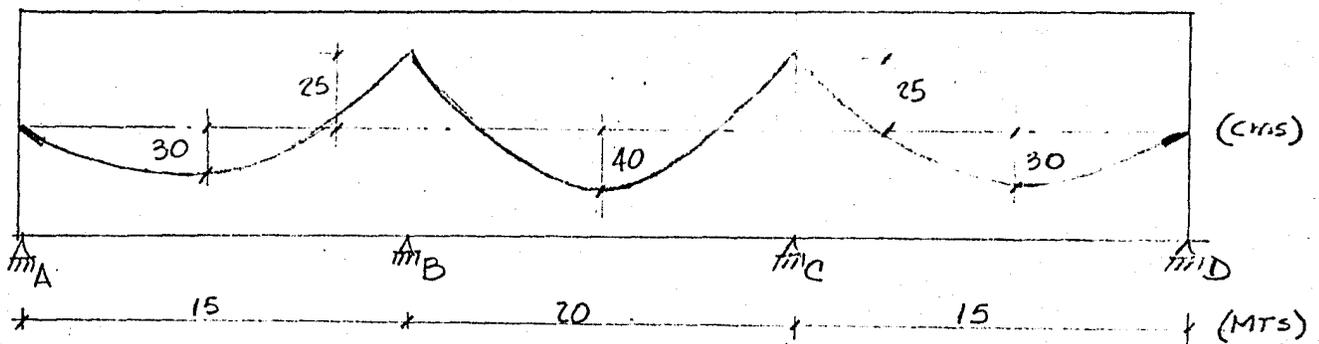
Y así, el perfil del cable quedará:



### Ejemplo 2

La viga mostrada de tres claros es preesforzada y se usa un tendón parabólico continua en cada claro, las excentricidades se muestran en la, fig. La fuerza de preesfuerzo a la que está sometida, después de las pérdidas es de 130 Ton.

El cable se estirará por los dos extremos de la misma, y se supone que las diferencias de tensión a lo largo de la vida no se tomarán en cuenta. Calculece los momentos totales en los apoyos B y C además la localización de la línea de presiones.



a) Por el método de la carga equivalente, se observa que en los claros exteriores, se producirá una carga hacia arriba uniformemente distribuida igual a:

$$w_p = \frac{8PY}{L^2}$$

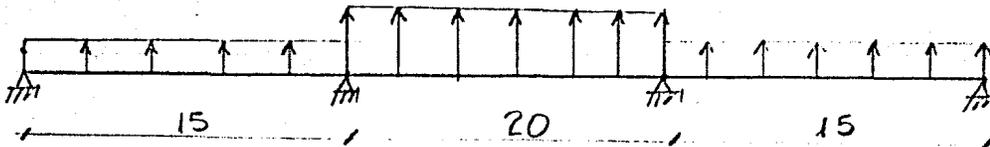
Y en el claro interior igual a:

$$W_p = \frac{12PY}{L^2}$$

— Claro exterior;  $W_p = \frac{8 \times 130 \times (0.3 + 0.125)}{15^2} = 1.96 \text{ T/m.}$

— Claro exterior;  $W_p = \frac{12 \times 130 \times (0.4 + 0.25)}{20^2} = 2.54 \text{ T/m.}$

Luego las cargas equivalentes serán:



Calculemos los momentos Totales, como las cargas mostradas y utilizando el método de la distribución de momentos; esto es:

Momento Emprotramiento Claro exterior:

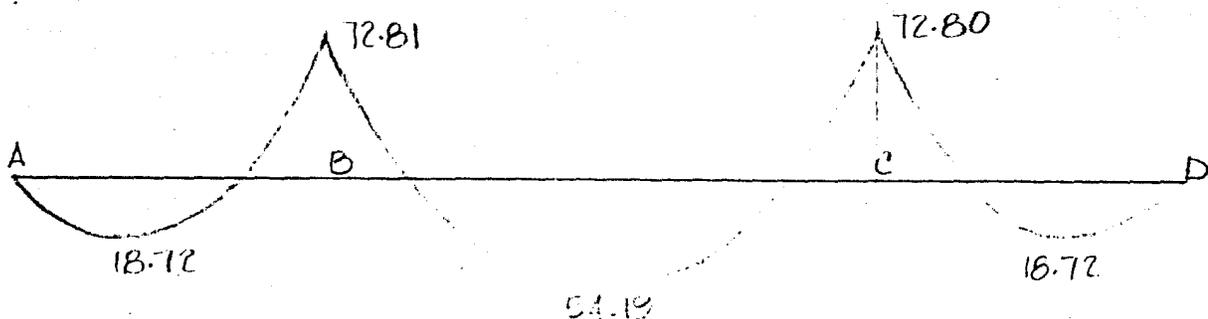
$$M = \frac{1.96 \times 15^2}{12} = + 36.75 \text{ T.m.}$$

Momento Empotramiento Claro interior:

$$M = \frac{2.54 \times 20^2}{12} = + 84.67 \text{ T.m.}$$

<u>K</u>						
EK	1.0	0.5	0.5	0.5	0.5	1.0
M.E.P	36.75	-36.75	84.67	-84.67	36.75	-36.75
M.D	-36.75	-23.96	-23.96	23.96	23.96	36.75
M.T	-11.98	-18.38	11.98	-11.98	18.37	11.98
M.D	11.98	3.20	3.20	3.20	3.20	11.98
M.T	1.60	5.99	- 1.60	1.60	- 5.99	- 1.60
M.D	- 1.60	- 2.20	- 2.19	2.20	2.19	1.60
M.T	- 1.10	- 0.80	1.10	- 1.10	0.80	1.10
M.D	1.10	- 0.15	- 0.15	0.15	0.15	- 1.10
M.T	- 0.07	0.55	0.07	- 0.07	- 0.55	0.07
M.D	0.07	- 0.31	0.31	0.31	0.31	- 0.07
M <sub>T</sub> (-)	0.00	-72.81	72.81	-72.80	72.79	0.00
ΣM <sub>T</sub> (+)		18.72		54.19		18.72

El diagrama de momentos final, será:



a) Y así se puede llenar este inciso diciendo que los momentos totales en los apoyos B y C son iguales a + 72.81 T.m, en este caso en los dos apoyos los momentos son iguales debido a la simetría general de la viga.

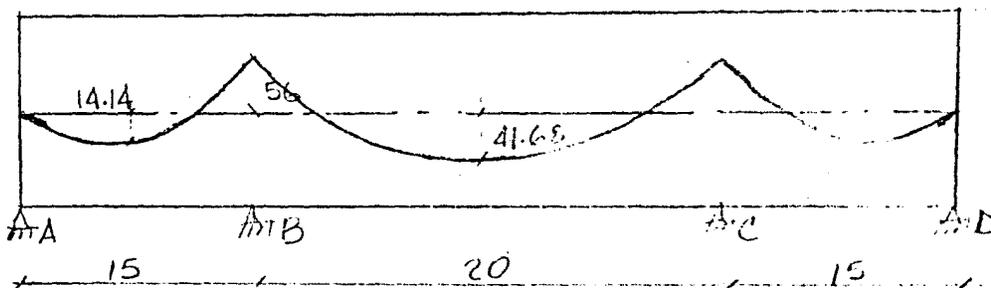
b) Ahora, veamos la ubicación de la línea de presiones después del análisis de momentos:

$$e_B^* = e_C^* = \frac{72.81 \times 10^2}{130} = 56.01 \text{ cms.}$$

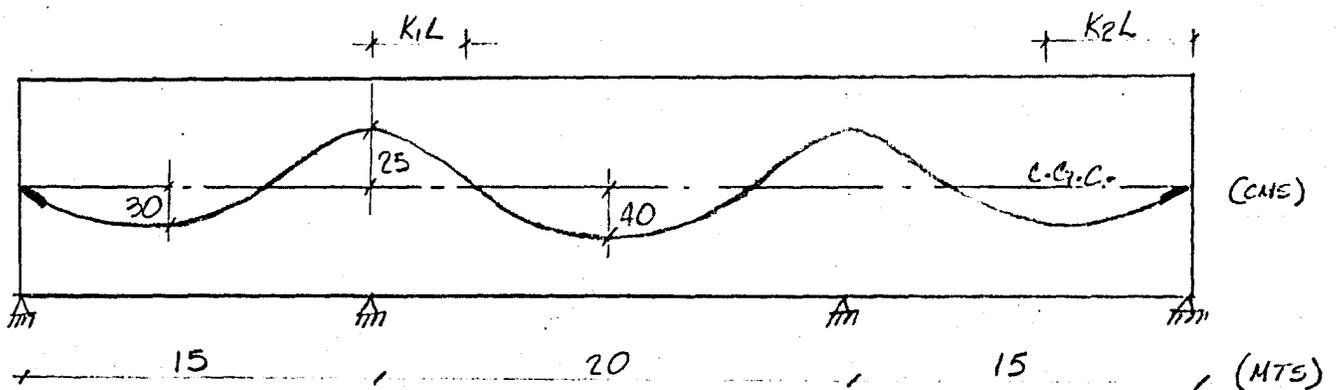
$$e_{\text{interior}}^* = \frac{54.19 \times 10^2}{130} = 41.68 \text{ cms.}$$

$$e_{\text{exterior}}^* = \frac{18.72 \times 10^2}{130} = 14.14 \text{ cms.}$$

Y así, el perfil del cable será:



Ahora veamos el mismo ejemplo 2, pero considerando el efecto de la curvatura invertida de los tendones en los apoyos internos, esto es, <sup>E</sup> por y c:



a) Primero calculemos para el claro exterior, el momento en  $B_j^{yc}$  usando la ec. (9); tenemos:

$$M_B = \pm \frac{Pe}{4} \left[ e_3 k_2^2 + e_2 (3 - 3k_1 + k_1^2) + k_2 (2 - k_1) + e_1 (1 - k_1 + k_2)^2 - k_1 (1 - k_2) \right]$$

$$M_B = \pm \frac{130}{4} \left[ \begin{array}{l} 0 \times 0.5^2 \\ 0.0 \end{array} + 0.3 \begin{array}{l} (3 - 3(0.15) + (0.15)^2) \\ 2.57 \end{array} + 0.5 \begin{array}{l} (2 - 0.15) \\ 0.93 \end{array} + 0.25 \begin{array}{l} (1 - 0.15 + 0.5)^2 \\ 1.82 \end{array} - 0.15 \begin{array}{l} (1 - 0.5) \\ 0.08 \end{array} \right]$$

$$M_B = + 48.26 \text{ T-m.}$$

b) Para el claro interior el momento en B y C, usando la ec. (5) será:

$$M_B = + \frac{2}{3} P e (e_1 + e_2) (1 - k_1)$$

$$M_B = + \frac{2}{3} (130) (0.15 + 0.40) (1 - 0.15)$$

$$M_B = + 40.52 \text{ T - m.}$$

Como los momentos en B y C no son iguales cuando se calcula en el claro interior y en el exterior, utilicemos la distribución de momentos para equilibrarlos.

K

EK	0.5	0.5	0.5	0.5
M.E.P.	-48.26	40.52	-40.50	48.26
M.D.	3.87	3.87	- 3.87	- 3.87
M.T.		- 1.94	1.94	
M.D.	0.97	0.97	- 0.97	0.97
M.T.	43.42	43.42	43.42	43.42
M.D.				
M.T.				
M.D.				
M.T.				
M.D.	43.42	43.42	43.42	43.42
$M_t (-)$				

$\Sigma M_t (+)$                       38.56                      51.56                      38.56

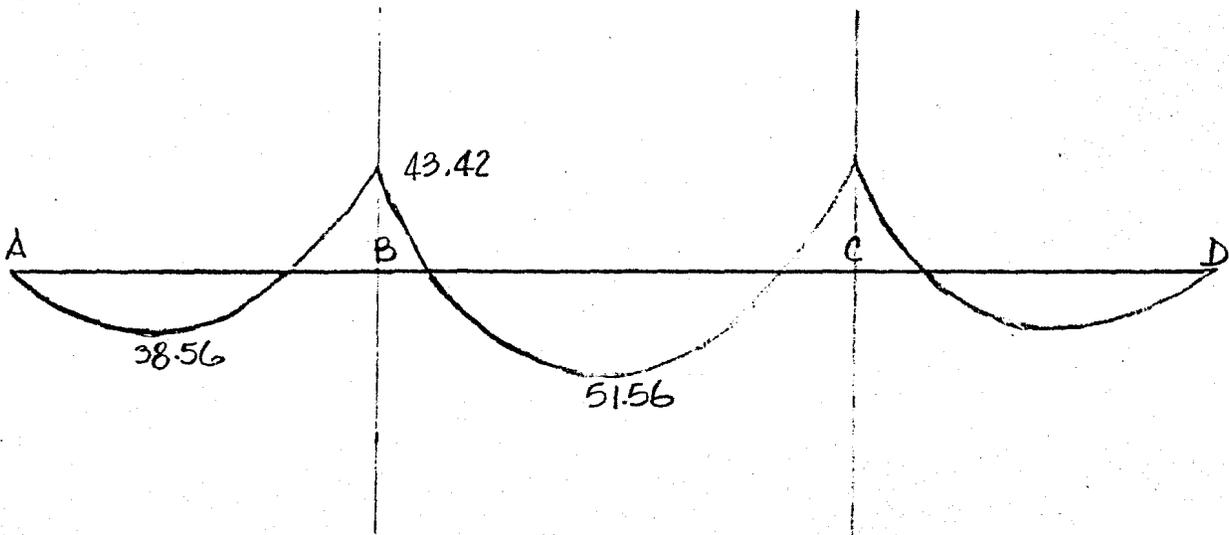
$$e^* \varphi B y C = \pm \frac{43.42 \times 10^2}{130} = \underline{33.40 \text{ cms}}$$

$$e^* \text{ interior} = 40 - \frac{840}{25} = \underline{39.66 \text{ cms}} \text{ y el M} = 0.3966 \times 130 = \underline{5156 \text{ T-m}}$$

$$e^* \text{ exterior} = 30 - \frac{840}{25} = \underline{29.66 \text{ cms}} \text{ y el M} = 0.2966 \times 130 =$$

38.56 T - m

El diagrama de momentos final, será:



La localización de la línea de presiones, es:

$$e_B^* e_C^* = \frac{43.42 \times 10^2}{130} = 33.40 \text{ cms}$$

$$e_{CL}^* \text{ interior} = \frac{51.56 \times 10^2}{130} = 39.66 \text{ cms}$$

$$e_{CL}^* \text{ exterior} = \frac{38.56 \times 10^2}{130} = 29.66 \text{ cms}$$

## CAPITULO QUINTO

### CONCLUSIONES

1. Se puede observar que los momentos cuando se usa el cable invertido, siempre son menores que cuando se utiliza el cable con picos en los soportes interiores, y será mas notorio a medida de que aumenta el grado de hiperestaticidad; también asumimos que sucede lo mismo en tendones exteriores.

2. Al realizar operaciones para encontrar los momentos con el perfil del cable picudo y con el cable invertido se observa que en uno y otro caso se encuentran con suma facilidad. Pero con el método de la viga balanceada obtenemos los momentos totales en el último caso.

3. Usando el método del cable invertido, se obtiene un ahorro en el área de acero y de concreto debido a los momentos menores.

4. De lo anterior también se puede tener un ahorro en el tensoldado y en el anclaje del acero de preesfuerzo.

5. No se revisaron los esfuerzos permisivos dentro -  
de ningún cálculo de los esfuerzos solamente se puso como una -  
nota adicional al final del trabajo.

6. Hay que tener en cuenta la colocación del cable -  
al construir, que sea la correcta, para que así el método uti -  
lizado ofrezca los resultados esperados.

7. Aunque se tomó solamente el método de la carga -  
balanceada para calcular los momentos, existen muchos métodos -  
para hacerlo dentro de los cuales se recomienda el método de -  
superposición o de deflexiones que se encuentra en la ref. (1)

## BIBLIOGRAFIA

- Design of prestressed concrete  
Arthur Nilson. John Wiley and Sons 1978
- Prestressed Concrete Structures  
T.Y.LIN. John Wiley and Sons
- Artículo sobre el efecto de la curvatura invertida en tendones. R. Park.