



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

28  
34

**"METODO NUMERICO PARA EL CALCULO DE  
REFRACCION DEL OLEAJE"**

**TESIS:**

*Que para obtener el Titulo de  
INGENIERO CIVIL*

*Presentan:*

**Victor Javier Bourguett Ortíz  
Juan Antonio González Castro**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

1.	INTRODUCCION	3
2.	TEORIAS DEL OLEAJE	6
2.1	Generalidades	6
2.2	Teoría de Airy	9
2.2.1	Ecuaciones Básicas del Movimiento - Ondulatorio	9
2.2.2	Celeridad y Longitud de Ola	13
2.2.3	Celeridad de Grupo y Energía de Pro- pagación	16
2.3	Teoría de Stokes	18
2.4	Teoría de Grestner o Trocoidal	22
2.5	Teoría de la Ola Solitaria	24
2.6	Teoría Cnoidal	28
2.7	Rangos de Aplicación de las Teorías del O- leaje	30
3.	REFRACCION DEL OLEAJE	33
3.1	Conceptos Preliminares	33
3.2	Aspecto Geométrico	35
3.2.1	Ley de Snell	35
3.2.2	Principio de Huygen	38
3.3	Aspecto Energético de la Refracción	39
3.4	Zonas de Convergencia y Cústicas	42
4.	METODOS PARA LA CONSTRUCCION DE <u>RE</u> <u>FRACCION</u>	52
4.1	Aspectos Generales	52
4.2	Método de los Frentes de Ola	53
4.3	Método de las Ortogonales	56

4.4	Método de las Ortogonales mediante Plantilla	59
4.4.1	Procedimiento para cuando $\alpha$ es menor de $80^\circ$	59
4.4.2	Procedimiento para cuando $\alpha$ es mayor de $80^\circ$ . Método R/J	62
4.5	Comparación de los Alcances de los Métodos - Gráficos	63
4.6	Método Numérico	66
4.6.1	Antecedentes	66
4.6.2	Ecuación del Rayo de Onda	66
4.6.3	Cálculo de una Ortogonal	69
5.	PROGRAMA DE COMPUTADORA "REFRA"	72
5.1	Generalidades	72
5.2	Datos de Entrada	74
5.3	Secuencia de Cálculo	77
5.4	Manejo de Mallas de Batimetría	80
5.5	Cálculo de la Curvatura	82
5.6	Listado del Programa	84
6.	EJEMPLO DE APLICACION	98
7.	CONCLUSIONES	106
	BIBLIOGRAFIA	109
	REFERENCIAS	111

## 1. INTRODUCCION .

El cálculo de diagramas de refracción de oleaje es necesario para estudios de estabilidad playera (acarreo y depósito de sedimentos) así como para el diseño de obras de protección portuaria.

La necesidad de calcular diagramas de refracción, aunada a la posibilidad de emplear un método numérico para ello, hicieron realidad la utilización de la computadora.

En consecuencia el programa aquí presentado elimina la tediosa labor manual de los métodos gráficos, proporciona mayor precisión en los resultados y permite un gran ahorro del tiempo de cálculo.

Este programa para computadora es el resultado de una serie de inquietudes surgidas a partir de la utilización del trabajo desarrollado por Harrison y Wilson (1964). Dicho trabajo realizaba el cálculo de diagramas de refracción a partir del método numérico de Griswold (1963) y tenía severas limitaciones que complicaban su uso. En la SCT, se ha empleado una versión modificada de tal programa realizada por Gaillard en 1980.

La intención de este trabajo fue elaborar un modelo matemático que cumpliendo con las hipótesis del método numérico y de la teoría de refracción, resultara accesible para los usuarios en cuanto a la preparación de datos y a la aplicación práctica de resultados y permitiera una reducción del tiempo de cálculo.

El programa de refracción " Refra ", posee algunas modificaciones sobre la versión de Harrison y Wilson y son las siguientes:

a) La posibilidad de emplear hasta tres mallas de batimetría

con diferente precisión (se pueden además, definir diferentes avances de frente de ola por sí así se deseara). Esto hace posible la ejecución del cálculo de diagramas en una sola corrida del programa.

b) Introducción del cálculo automático de la amplitud local - del oleaje y obtención de coeficientes de refracción correspondientes a los canales de energía, formados por ortogonales adyacentes.

c) Definición de la posición de los puntos en metros mas bien que en unidades de mallas, para librarse a nivel de la definición - de los datos y de la explotación de los resultados de cálculo de las características particulares de la red de mallas representativa de los fondos utilizados.

Gracias a éstas modificaciones el cálculo de diagramas se realiza en forma más eficiente sin detrimento de la precisión; Además se obtienen los coeficientes de refracción en la salida de resultados.

El segundo capítulo presenta las diferentes teorías de oleaje (Airy, Grestner, Ola Solitaria, Stokes y Cnoidal) con la finalidad de plantear sus rangos de aplicación y de este modo justificar el empleo de la teoría de Airy (la que se presenta con mayor detalle) en el cálculo de longitudes y celeridades de ola.

La teoría de refracción de oleaje se describe en el capítulo tres, tratándola conforme a las dos soluciones clásicas, Ley de Snell y Principio de Huygen, desde el punto de vista geométrico y energético. También se incluye una sección sobre la interpretación del cruce de ortogonales a partir de la geometría óptica.

Este fenómeno ocurre con cierta frecuencia durante el cálculo de diagramas de refracción, por lo que aquí se hacen algunos comentarios a las fallas propias de la teoría en tales zonas de convergencia.

Los métodos para el cálculo de diagramas de refracción están descritos en el capítulo cuarto y en él se incluyen en forma breve los métodos gráficos (de los frentes y de las ortogonales), - así como el método numérico del que emana el programa " Refra " .

El capítulo cinco, presenta en forma clara la descripción del funcionamiento del programa " Refra " . Se incluye un listado del programa, que cuenta con los comentarios que a nuestro juicio son de interés y hacen más sencilla la comprensión del funcionamiento del mismo.

El ejemplo elegido, presentado en el capítulo seis, corresponde al estudio de refracción efectuado para la zona de Kobah, Quintana Roo. Para este ejemplo se da la justificación correspondiente a la elección de los parámetros empleados como datos para el cálculo. También se muestra un diagrama correspondiente al estudio de refracción, realizado para la zona de Altamira, Tamps., con la finalidad de ejemplificar el fenómeno de reflexión total.

Finalmente, en el capítulo siete, damos a conocer nuestras conclusiones, con la idea de recalcar los beneficios que se obtienen al emplear el programa " Refra " .

## 2. TEORIAS DEL OLEAJE.

### 2.1. Generalidades.

La acción de un agente perturbador como el viento sobre la superficie de una masa de agua, establece un espectáculo que nos es muy familiar; las olas. La altura de ola (  $H$  ) es definida como la distancia vertical entre una cresta y un valle del tren de olas. A su vez la longitud de ola (  $L$  ) se define como la distancia horizontal entre dos crestas o valles sucesivas. Otra característica cuantificable es el período (  $T$  ), al cual se define como el tiempo en el cual pasan dos crestas sucesivas por un punto fijo de observación. La celeridad de la ola (  $C$  ), es la velocidad con la cual viaja el tren de ola y se define como la relación  $L / T$ .

La relación adimensional comunmente usada para describir el perfil característico de la ola es  $H/L$  (esbeltez).

Es importante hacer notar que la altura de ola es independiente de los otros parámetros mencionados, aunque como primera aproximación se puede poner en función de la longitud de ola.

Las olas marítimas tienen un gran rango de períodos. La fig. 2 es un diagrama realizado por Munk en 1951 y muestra los tipos predominantes de oleaje según su clasificación por rango de períodos y agentes generadores.

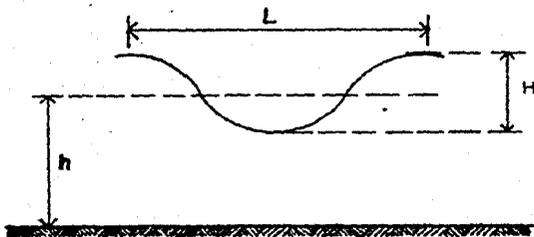


Fig. 1 Definición de términos.

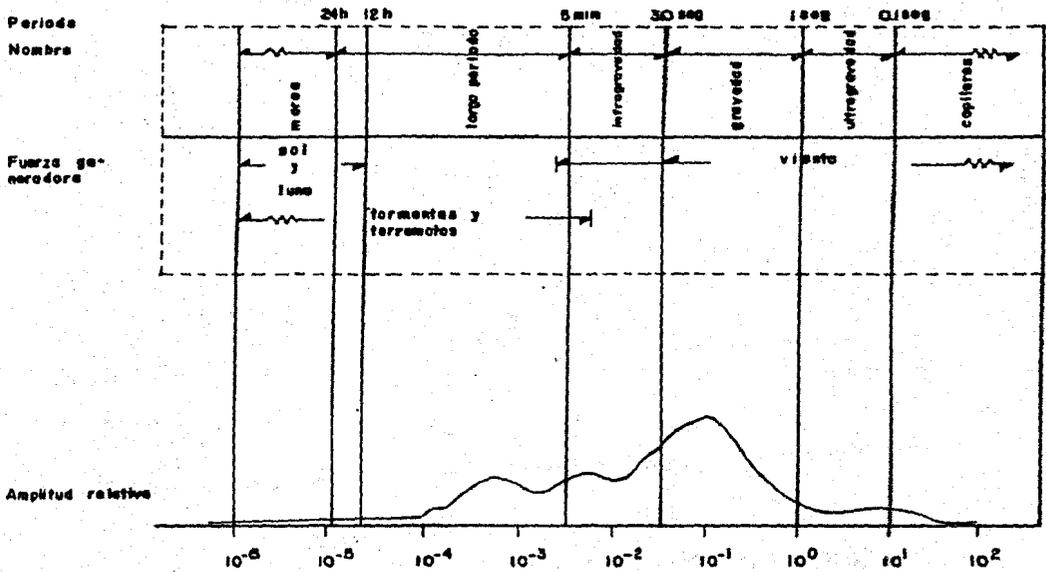


Fig. 2—Clasificación de las olas conforme a su período y a las fuerzas generadoras, --- (según Munk 1969).

Las olas de período corto son las capilares ; tienen un período menor a 0.07 seg., su longitud de ola es menor a 1.7 cm y su altura máxima es de 1 o 2 mm. Debido a que su principal fuerza restauradora es la tensión superficial son conocidas como olas capilares.

En olas de mayor período el agente restaurador es la gravedad por lo que se conocen como olas de gravedad, tal como se muestra en la fig. 2 .

Las olas de mayor concentración de energía son las olas de viento. El oleaje local (sea), es generado y desarrollado por el viento, y sus períodos normalmente son menores de 15 seg., así mismo la mayor altura reportada es de 34 m. El oleaje distante (swell), es generado por el viento y se propaga fuera de la zona de origen, se caracteriza por ser más regular y de mayor período que el oleaje local.

Las olas de largo período tienen un importante papel en la preservación y explotación de las zonas costeras así como en la prevención de desastres, ejemplos de éstas son: agitación en un vaso portuario, tsunamis (generados por terremotos submarinos) - cuyos períodos pueden variar desde varios minutos hasta una hora , tormentas generadas por perturbaciones meteorológicas como tifones, huracanes, etc. y por último las mareas.

A continuación se hará una breve descripción de las cinco más importantes teorías que existen para describir el oleaje, así como un análisis de sus rangos de aplicación.

## 2.2. Teoría de Airy.

### 2.2.1. Ecuaciones Básicas del Movimiento Ondulatorio.

Las alturas de ola que se presentan en los mares generalmente son muy pequeñas en comparación con sus longitudes de ola. Apoyándose en este hecho Airy desarrolló su teoría que se describe a continuación.

Se hace la hipótesis de que la ola se propaga en una masa de agua de profundidad constante donde el eje "x" tiene el sentido de la propagación del oleaje y el eje "y" la dirección vertical, como se muestra en la fig. 3.

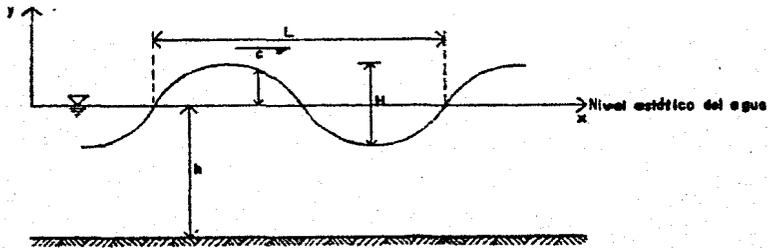


Fig. 3 Características de las olas progresivas.

La viscosidad se desprecia debido a que sus efectos son mínimos y se considera la ola en estado estacionario. Con estas hipótesis el movimiento de la ola puede ser considerado como movimiento irrotacional de un fluido ideal. (1).

En el flujo existe una función escalar  $\phi(x, y, z)$  tal que :

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad 1.$$

donde  $V_x$ ,  $V_y$  y  $V_z$  son los componentes de la velocidad.

Como consideramos el flujo bidimensional e incomprensible, la ecuación de continuidad se simplifica (2)., y tenemos que:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad 2.$$

y como  $\text{div } V = 0$  implica que  $\text{div grad } \phi = 0$  (3).

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad 3.$$

que es la ecuación de Laplace, por lo que la función potencial - que la satisface es armónica. (4).

La ecuación 3, tiene solución en la región definida por  $-h \leq y \leq \eta$  y  $-\infty < x < \infty$ , donde  $\eta$  es la distancia medida a partir del nivel de agua estático y  $h$  la profundidad del océano en ese punto. Ahora tomemos en cuenta las condiciones de frontera;

a) considerando el fondo del mar impermeable

$$(V_y)_{y=-h} = \left( \frac{d\phi}{dy} \right)_{y=-h} = 0 \quad 4.$$

lo que significa que la componente vertical de la velocidad en el fondo es cero.

b) la presión en la superficie del mar, debe ser igual a la atmosférica, esto equivale de acuerdo a la ecuación de Bernoulli a

$$\frac{P}{\rho} = \frac{d\phi}{dt} - \frac{1}{2} (V_x^2 + V_y^2) - gy \quad 5.$$

donde  $P$  = Presión

$\rho$  = Densidad del Fluido

$g$  = Aceleración de la gravedad.

Como habíamos mencionado, esta teoría es válida en olas de -  
pequeña amplitud, ésto es :  $(H / L) \ll 1$  y  $(h / H) \gg 1$  ; la so-  
lución obtenida para la superficie del agua es:

$$\eta ( x, t ) = \frac{H}{2} \cos \left( \frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right) \quad 6.$$

Con lo que se obtiene un perfil de forma senoidal de período  
T, longitud de ola L y altura H, como el de la figura 4.

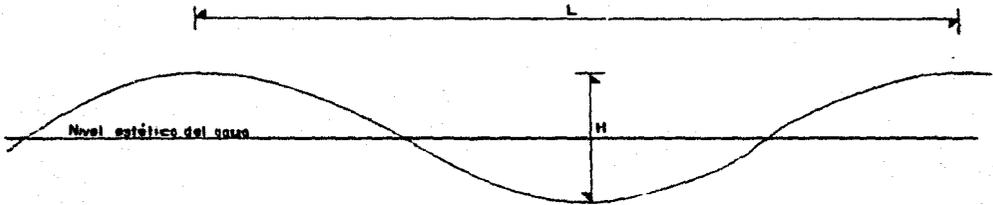


Fig. 4 Onda senoidal de período T.

Los factores  $2\pi / L$  y  $2\pi / T$  nos lo encontraremos repeti-  
das veces y se expresarán como K y  $\sigma$  respectivamente; K es llamada  
comunmente número de ola. El inverso del período f, es la frecuen-  
cia de la ola, así que  $\sigma$  es la frecuencia en radianes. Usando es-  
ta notación tenemos:

$$\eta ( x, t ) = \frac{H}{2} \cos ( Kx - \sigma t ) \quad 7.$$

si damos este perfil como válido y de acuerdo con 5., nos permite  
proponer una solución de la forma

$$\phi = f(y) \sin ( Kx - \sigma t ) \quad 8.$$

sustituyendo 8. en 3. se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - K^2 f = 0 \quad 9.$$

cuya solución general es de la forma:

$$f = A e^{Ky} + B e^{-Ky} \quad 10.$$

donde A y B son constantes. Entonces tenemos:

$$\phi = (A e^{Ky} + B e^{-Ky}) \text{ sen}(Kx - \sigma t) \quad 11.$$

sustituyendo en las ecuaciones 4. y 5., que son las de las condiciones de frontera y obteniendo una solución distinta de:

$$A = 0, \quad B = 0$$

$$A e^{-Kh} - B e^{Kh} = 0 \quad 12.$$

$$(\sigma^2 - gK)A + (\sigma^2 + gK)B = 0$$

calculando el determinante tenemos que la frecuencia angular está dada por:

$$\sigma^2 = gK \tanh Kh \quad 13.$$

## 2.2.2. Celeridad y Longitud de Ola.

Si llamamos  $C$ , a la relación  $\sigma / K$  y reordenando la ecuación 13. llegamos a :

$$C = \sqrt{\frac{g}{K} \tanh Kh} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}} \quad 14.$$

que es la expresión de la celeridad de ola. Si ahora sustituimos  $C = L / T$  y reacomodando la ecuación 14.

$$C = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \quad 15.$$

Entonces la longitud de ola es :

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \quad 16.$$

esta ecuación es implícita. En la figura 5. podemos ver que para valores de  $(h/L) > 0.5$  la  $\tanh (2\pi h / L) \cong 1$ ; esta aproximación tiene aplicación en aguas profundas, donde  $h$  es grande en comparación con  $L$  y por lo tanto la longitud de ola en aguas profundas es :

$$L_0 = \frac{g T^2}{2\pi} \quad 17.$$

y la región de aguas profundas está definida por  $h \geq (L / 2)$ .

Así mismo la celeridad de ola en aguas profundas es:

$$C_0 = \frac{g T}{2\pi} \quad 18.$$

el error que se comete con esta aproximación es 0.4 por ciento, - aceptable en problemas de Ingeniería.

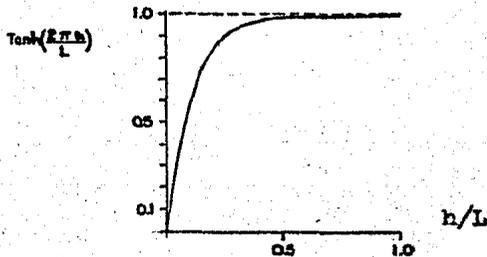


Fig. 5 Gráfica de la  $\tanh$  para diferentes  $h/L$ .

En el caso de que la profundidad sea muy pequeña comparada con la longitud de ola, se puede hacer la siguiente aproximación:

$$\tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) = \frac{2\pi h}{L}$$

tomando como límite superior el valor de  $(h/L) = 0.05$ , para esta aproximación se garantiza que el error será menor de 2 por ciento.

A esta zona se le llama de aguas superficiales.

En base a éstas consideraciones podemos hacer una clasificación de las regiones de interés.

aguas profundas  $\frac{h}{L_0} \geq \frac{1}{2}$

aguas intermedias  $\frac{1}{2} > \frac{h}{L}$

aguas superficiales  $\frac{h}{L} \leq \frac{1}{20}$

De acuerdo con esta clasificación para aguas superficiales la expresión de la celeridad es función sólo de la profundidad

$$C = \sqrt{gh}$$

En el rango de aguas intermedias, se puede usar una aproximación para el cálculo de la longitud de ola y es:

$$L = b L_0 \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi h}{L_0}\right)} \quad 20.$$

donde b vale ; 0.955 si  $h / L_0 \leq 0.2$

0.973 si  $0.2 < h / L_0 \leq 0.39$

0.996 si  $0.4 \leq h / L_0 \leq 0.5$

el error que se comete es menor del 3 por ciento.

### 2.2.3. Celeridad de Grupo y Energía de Propagación.

Consideremos dos olas armónicas simples con igual altura de ola, tal que sus longitudes y celeridades sean aproximadamente iguales, si las superponemos tenemos que :

$$\eta = \frac{H}{2} \cos ( Kx - \sigma t ) + \frac{H}{2} \cos ( K'x - \sigma t ) \quad 21.$$

$$\eta = H \cos \left( \frac{K+K'}{2} x - \frac{KC+K'C'}{2} t \right) \cos \left( \frac{K-K'}{2} x - \frac{KC-K'C'}{2} t \right) \quad 22.$$

Es bien sabido que la superposición de varias soluciones es otra solución en la teoría lineal. Por lo tanto la ecuación 22 es también solución a la teoría de olas de pequeña amplitud.

Si analizamos la ecuación 22. puede verse que la longitud, período y celeridad de la ola son :  $L = \frac{4\pi}{(K+K')}, T = \frac{4\pi}{(KC-K'C')}, C = \frac{KC-K'C'}{K+K'}$

y como  $K = K'$  y  $C = C'$  ;  $L = 2\pi / K$  ,  $T = 2\pi / KC$  y  $C = C$ . Es decir que las características de esta ola son las mismas que las de la ola individual.

Regresemos a la ola expresada como  $\cos \left( \frac{K+K'}{2} x + \frac{KC+K'C'}{2} t \right)$

cuyas longitud y período son grandes comparadas con las de la ola individual, el perfil de la ola , tomada de la ola compuesta en un tiempo  $t$  es como el que se muestra en la figura 6. La velocidad de propagación de la envolvente de un tren de olas se conoce como la celeridad de grupo  $C_g$  y está dada por :

$$C_g = \frac{KC + K'C'}{K + K'} = \frac{f(KC)}{f(K)} \quad 23.$$

o reordenando

$$C_g = \frac{d(KC)}{dK} = C + K \frac{dC}{dK} = C + L \frac{dC}{dL} \quad 24.$$

sustituyendo la ecuación 14. en 24. obtenemos :

$$C_g = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{4\pi h}{L} \frac{1}{\sinh(4\pi h/L)} \right) C \quad 25.$$

si a  $\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{4\pi h}{L} \frac{1}{\sinh(4\pi h/L)} \right) C$  le llamamos n, entonces:

$$C_g = nC \quad 26.$$

la energía total por unidad de ancho de frente es:

$$E_t = \frac{\rho g h^3 L}{8} \quad 27.$$

la potencia o trabajo promedio es :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dy dt = \frac{1}{8} C_g \rho g h^3 L \quad 28.$$

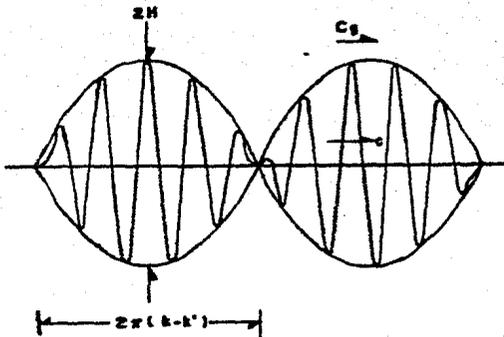


Fig. 6 Superposición de olas y su envolvente.

### 2.3. Teoría de Stokes.

La teoría de Airy omite los términos de orden superior en sus ecuaciones. Si la altura de ola es grande respecto a la longitud de ola, la solución de esa teoría es incorrecta, así que en ocasiones será necesario tomar en cuenta los términos de orden superior para representar el movimiento de las olas.

El desarrollo teórico es esencialmente el mismo de la teoría de Airy considerando además los términos de orden superior. Stokes (1847-1880) consideraba olas de pequeña amplitud sobre el nivel del agua en reposo en profundidad finita.

La expresión que describe el perfil de la ola en la aproximación de 2do. orden es:

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(Kx - \sigma t) + \frac{\pi}{8} \frac{H^2}{L} \frac{\cosh(Kh) [2 + \cosh(2Kh)]}{\sinh(Kh)} \cos [2(Kx - \sigma t)] \quad 29.$$

en aguas profundas se reduce a :

$$\eta_0 = \frac{H_0}{2} \cos 2\pi \left( \frac{x}{L_0} - \frac{t}{T} \right) + \frac{\pi H_0^2}{4L_0} \cos 4\pi \left( \frac{x}{L_0} - \frac{t}{T} \right) \quad 30.$$

Se observa que si la relación  $H / L$  es pequeña, se reduce al perfil senoidal de la teoría de Airy. Los efectos de los términos superiores se muestran en la figura 7., donde se compara una ola de amplitud finita con una senoidal de la misma altura. La suma de los términos superiores realza la cresta y contrae el valle. Conforme la ola se propaga hacia la costa los máximos se hacen más pronunciados.

En la aproximación de 2do. orden las expresiones de longitud y celeridad resultan iguales a la de Airy, pero para las expresiones en la aproximación de 3er. orden, dependen de la profundidad,

período y altura y son :

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh \left( \frac{2\pi h}{L} \right) \left[ 1 + \left( \pi \frac{H}{L} \right)^2 \frac{\cosh (8\pi h/L) + 8}{8 \sinh^2 (2\pi h/L)} \right] \quad 31.$$

En aguas profundas la relación es :

$$C_0 = \frac{gT}{2\pi} \left[ 1 + \left( \frac{\pi H_0}{L_0} \right)^2 \right] \quad 32.$$

La esbeltez de la ola  $H/L$  es la causa del pequeño incremento en  $C_0$  respecto a la calculada con Airy. La gráfica de la figura 8. compara los valores de la celeridad calculados (ecuación - 32) con los valores medidos de la celeridad en el laboratorio (5).

Como el máximo valor que puede tomar la relación  $H_0/L_0$  antes de que rompa la ola es 0.142 luego entonces el límite es :

$$1 + \left( \pi \frac{H_0}{L_0} \right)^2 = 1.2$$

es decir un 20 % de incremento debido a la amplitud finita como máximo .

Para aguas intermedias la esbeltez máxima es (6)

$$\left( \frac{H}{L} \right)_{\max} = 0.142 \tanh ( Kh ) \quad 33.$$

Danel (1952) demostró que esta relación da resultados satisfactorios (7). Hunt (1953) ha demostrado que la solución de Stokes para aguas profundas debe ser limitada para olas de esbeltez menor de 0.005 ( $H/L < 0.005$ ), aunque con ciertos refinamientos, puede tomarse como válida para relaciones ( $H/L < 0.001$ ) en aguas superficiales.

Una particularidad importante en la teoría de Stokes es que la trayectoria que describen las partículas no es cerrada. (fig. 9)

Estas conducen a un flujo no periódico o transporte de masa en la dirección de propagación de la ola, la velocidad de dicho transporte (  $U$  ) en aguas superficiales es :

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi H}{L} \right)^2 C \frac{\cosh ( 2K(y+h) )}{\sinh ( Kh )} \quad 34.$$

y en aguas profundas

$$U_0 = \left( \frac{\pi H_0}{L_0} \right)^2 C_0 e^{2Ky} \quad 35.$$

integrando la ecuación con respecto a la profundidad

$$q = \frac{\pi}{4} \frac{H_0^2}{T} \quad 36.$$

gasto sólido por unidad de ancho de frente transportado por unidad de tiempo.

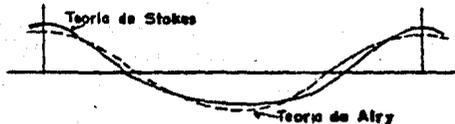


Fig. 7 Comparación entre perfiles teóricos de olas con la misma longitud y periodo.

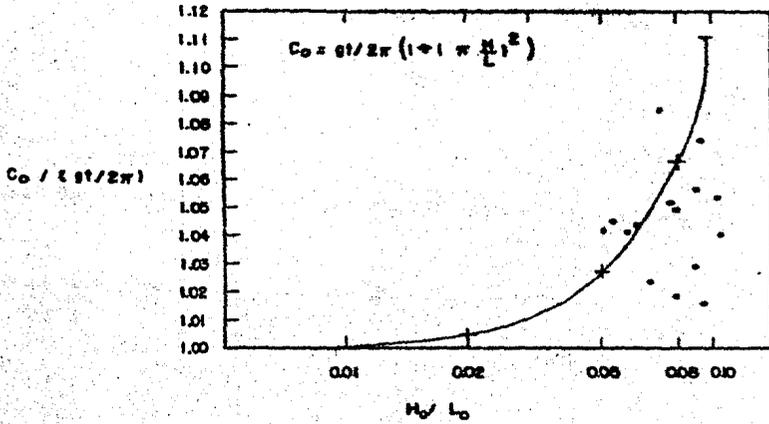


Fig. 8 — Comparación entre celeridades teóricas y medidas para una ola (stokes) en aguas profundas mostrando el efecto de la esbeltez. Aunque la comparación no es muy convincente los datos no muestran un incremento en la celeridad para valores de la esbeltez grandes. (Morrison 1951).

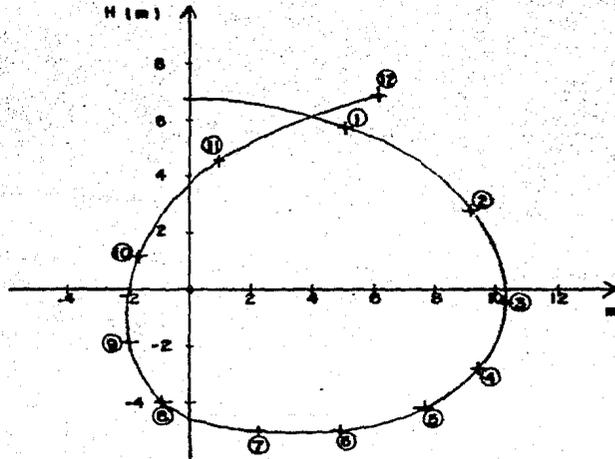


Fig. 9 — Trayectoria que describe una partícula de agua. (Skjelbreia, 1959)

#### 2.2.4. Teoría Gerstner o Trocoidal.

Entre las teorías de oleaje para amplitud finita, ésta solo es solución exacta en aguas profundas y fue desarrollada en 1802.

Esta teoría tiene muchas aplicaciones en Ingeniería Civil - dada su exactitud y facilidades de aplicación. La solución satisface las condiciones de presión en la superficie del agua y continuidad.

En suma, estudios experimentales demuestran que el perfil trocoidal da una solución muy cercana al perfil de la ola en fondo horizontal.

Entre sus inconvenientes se cuentan : no predice el transporte de masa y supone un campo de velocidades rotacional. Lo que es peor en la teoría trocoidal, las partículas rotan en sentido opuesto al que podría presentarse debido el esfuerzo del viento sobre la superficie del agua.

La curva trocoide es generada por el movimiento del punto A - (fig. 10) interior en un círculo, cuando el círculo rota a lo largo de la línea.

De la fig. 10. si  $r$  es el radio del círculo, entonces la longitud de ola es  $L = 2\pi R$ . La altura de ola  $H = 2r$ , donde  $r$ , es la distancia radial desde el centro del círculo al punto A. Para un ángulo de rotación  $\theta$ , la superficie bajo el nivel de la ola es :

$$\eta = \frac{H}{2} (1 - \cos \theta) \quad 37.$$

Como  $H / L$  es pequeña, el perfil de superficie es muy semejante al de Stokes y en  $H \neq 0$  es senoidal .. En el límite la ola correspondiente a la de aguas profundas es la de Airy.

La posición de la cresta y valle en relación al nivel medio es :

$$H_c = H_s + \frac{\pi H^2}{4L} \quad 38.$$

$$H_v = \frac{H}{2} - \frac{\pi H^2}{4L} \quad 39.$$

Nótese que la cresta está más arriba de la mitad de la altura sobre el nivel medio y el valle menos de  $0.5 H$ , abajo del nivel medio.

La energía está dada por :

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi H}{L} \right)^2 \right) \quad 40.$$

La expresión de la celeridad, es la misma que la solución general de la ecuación de Airy.

En general la teoría de Stokes es teórica y experimentalmente más firme que la trocoidal, los resultados arrojan diferencias muy pequeñas. Sin embargo, debido a su facilidad de aplicación es más usada en problemas ingenieriles la de Gerstner.

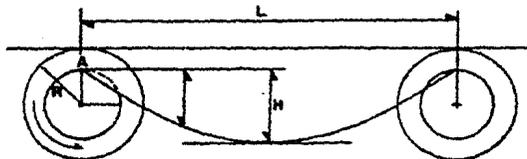


Fig. 10 Curva trocoidal generada por el movimiento del punto A, interior de un círculo, cuando el círculo rota a lo largo de la línea.

### 2.5. Teoría de la Ola Solitaria.

La ola solitaria, como su nombre lo indica, es una ola progresiva formada por una sola cresta, no es oscilatoria como las ondas examinadas y no hay en consecuencia, período y longitud asociados a ella.

Pareciera entonces que la ola solitaria no nos es de utilidad en el caso de ondas periódicas como con las que tratamos, sin embargo en el mar, cuando las olas pasan a aguas superficiales, sus crestas se elevan y son separadas por amplios valles pudiendo asemejarse con una serie de ondas solitarias. Ya se ha visto en otras teorías que en aguas superficiales, no es tan significativo el período como la profundidad. Por lo tanto por su similitud a ondas reales y por su simplicidad se ha visto que tiene amplia aplicación a estudios en las zonas cerca de la playa.

Scott Russell (1844) estudió la ola solitaria en el laboratorio. Las primeras consideraciones teóricas fueron desarrolladas más tarde por Bousinesq (1872), Rayleigh (1876) y Mc Cowan (1891) con grandes aproximaciones. Las soluciones de Bousinesq son las mejores, excepto para la velocidad orbital, donde la solución más aproximada es la de Mc Cowan.

El perfil y la notación de la onda solitaria se muestran en la fig. 11 y la ecuación del movimiento de cresta es:

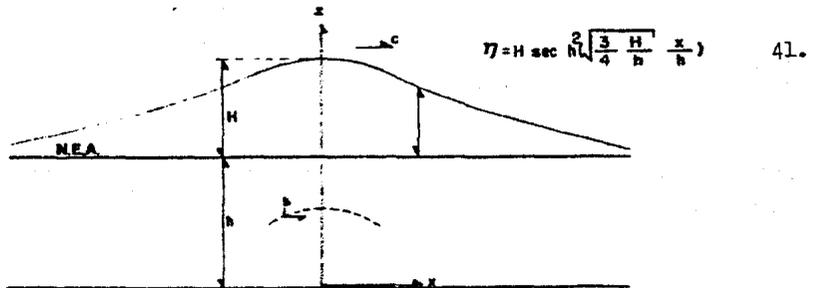


Fig. 11 Notación asociada a la ola solitaria.

Donde  $\eta$  es la coordenada vertical, arriba del nivel de aguas tranquilas a una distancia  $x$ , de la cresta. " H " es la altura de ola, y " h " la profundidad abajo del nivel de aguas tranquilas.

Dada la repetición del término  $H / h$ , se la ha abreviado como  $\gamma = H / h$ .

La celeridad es dada por la ecuación de orden superior según Laitons (1959) como:

$$C = \sqrt{gh} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2}\gamma - \frac{3}{20}(\gamma)^2 + \dots \right) \right] \quad 42.$$

que da una celeridad mayor a la de la teoría de Airy en aguas superficiales. La ola solitaria toma en cuenta lo finito de la al tura de ola. La ecuación anterior es aproximadamente igual a

$$C = \sqrt{g(h + H)} \quad 43.$$

Ecuación determinada empíricamente por Russell (1844) y obtenida como primera aproximación por Bousinesq (1872). Las dos relaciones se desvían un poco para valores muy grandes de  $\gamma$  aunque para propósitos prácticos, la segunda relación es satisfactoria.

Conforme la ola solitaria avanza en aguas más bajas, la altura de ola se incrementa progresivamente hasta una condición inesta ble donde rompe. La inestabilidad también se alcanza, cuando la ve locidad de la cresta es igual a la velocidad de la ola o cuando el ángulo en la cresta es de 120 grados. Valiéndose de este criterio, Mc Cowan demostró teóricamente que el punto crítico de rompiente - se tendría cuando

$$\gamma_{\text{máx}} = 0.78$$

Medidas experimentales de Sverdrup y Munk (1946) en playas de poca pendiente estuvieron de acuerdo con tal valor.

La energía total por unidad de cresta está dada por

$$E_{\text{sol}} = 1.54 g \rho (\gamma)^{1/2} h^3 \quad 45$$

La ola solitaria es de traslación, es decir, las partículas de agua se mueven solo en dirección de avance de la ola.

Las partículas que se hallan a una distancia  $x = 10 h$  de la cresta están en reposo. Las partículas se mueven hacia adelante y hacia arriba alcanzando su máxima velocidad en el instante en que pasa la cresta, una vez sucedido esto, las partículas alcanzan la profundidad que antes ocupaban. Hay por lo tanto un transporte neto de agua. Esta descarga por unidad de longitud de cresta es igual al volumen contenido en la parte de arriba del nivel de aguas tranquilas y está dada por :

$$Q = 4h \sqrt{0.33 \gamma} \quad 46.$$

La suposición de que las olas son una secuencia de olas solitarias se satisface con suficiente aproximación si la longitud de las olas es  $L = 2 \pi / M$ , o si el período  $T$ , es mayor a un período dado por :

$$T = \frac{2\pi}{M} \sqrt{h/g} \quad 47.$$

donde  $M$  es función de  $\gamma$ .

La expresión dada por Bagnold (1947); Housley y Taylor (1957).

encontraron que esta ecuación no es del todo satisfactoria para definir la región de aplicación.

Más adelante se verá que la ola solitaria es un caso límite de la teoría oscilatoria más general, la teoría Cnoidal.

Esto, más las dudas en la aplicación de la teoría a olas oscilatorias y periódicas, hacen cuestionable el uso de la ola solitaria en estudios de zonas muy cercanas a la playa.

Observaciones han demostrado que cuando la ola solitaria viaja en pendientes muy inclinadas acercándose a la playa, los cambios observados en amplitud, velocidad y perfil, se desvían marcadamente de la ola teórica.

### 2.6. Teoría Cnoidal.

La teoría de ondas cnoidales, fué primero desarrollada por Korweg y Vries (1895). En 1957 Littman demostró la existencia de olas periódicas de éste tipo.

La onda cnoidal es una onda periódica que puede tener agudas crestas separadas por amplios valles y que sería aplicable para la descripción de la ola, justo fuera de la zona de rompiente. fig. 12

La onda cnoidal tiene sobre la ola solitaria, la ventaja de ser periódica. En el límite, cuando el período tiende a infinito, tendríamos a la ola solitaria como caso particular de la ola cnoidal. En el otro extremo para períodos pequeños, la onda cnoidal tiene como límite a la onda de Airy. Pareciera entonces que pudiera aplicarse simplemente la teoría de la ola cnoidal ignorando las otras teorías, desafortunadamente las matemáticas de la teoría son difíciles, por lo que en la práctica, la aplicación de la teoría cnoidal se limita a un pequeño rango de aplicación. Por su comparativa simplicidad las otras teorías se usan en vez de la teoría cnoidal, siempre que ofrezcan aproximaciones aceptables a las olas reales. Por ejemplo si el período es largo, se aplicaría la teoría de la ola solitaria, antes que la cnoidal.

El perfil de la ola cnoidal está dado por :

$$\eta = H \operatorname{cn}^2 \left[ 2K(k) \left( \frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right), k \right] \quad 4B$$

donde  $K(k)$  es la integral elíptica completa de primer orden del módulo  $k$ .

El término (cn) expresa la función elíptica de Jacobi, por eso la teoría se conoce como cnoidal.

Masch y Wiegel (1961) desarrollaron gráficas para las principales propiedades de la ola cnoidal, para valores de  $h$ ,  $H$  y  $L$ , dados; estas gráficas son usadas donde se aplica la teoría cnoidal.

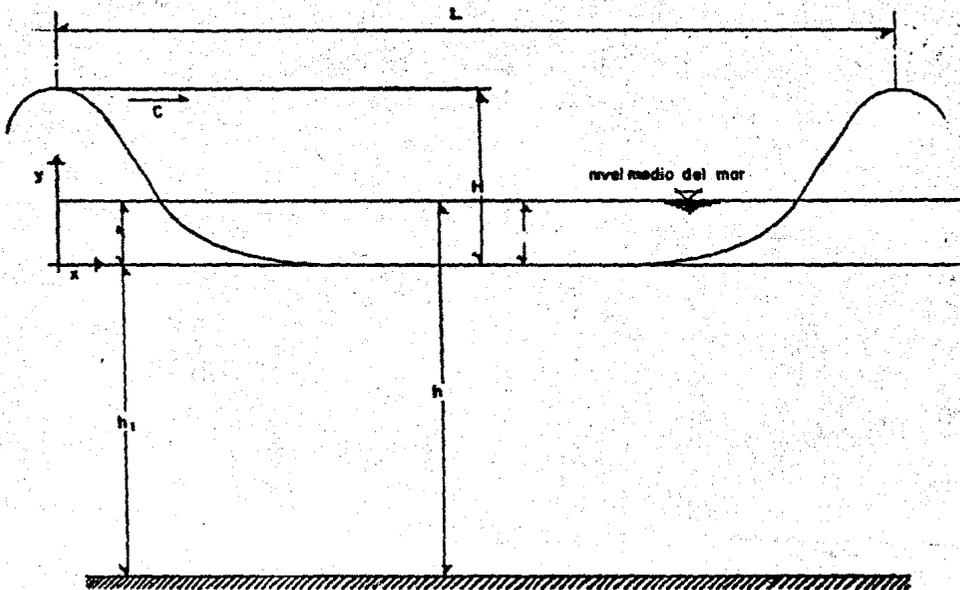


Fig. 12.- Esquema que define una ola cnoidal

## 2.7. Rangos de Aplicación de las Teorías de Oleaje.

Habiendo examinado cinco teorías de oleaje, hay hasta este momento alguna confusión acerca de los rangos de aplicación. Como decidir cual de las teorías se aplica a algún problema en particular.

Al ver en forma individual las distintas teorías se mencionaron las hipótesis involucradas para la obtención de soluciones y como afectan sus rangos de aplicación. En otros casos se señaló simplemente que las olas teóricas se asemejan estrechamente a las olas reales dentro de ciertos rangos de profundidad.

En esta sección cuantificaremos y pondremos límites numéricos a tales rangos de aplicación. Generalmente las regiones de aplicación están definidas en términos de las relaciones de  $H/h$ ,  $H/L$ ,  $h/L$  o sus inversos. La figura 13 ha sido construida usando las relaciones  $H/h$  y  $H/L$  para resumir las regiones de aplicación.

El cálculo de  $H/h$  y  $H/L$  define un punto sobre la figura 13; dependiendo de la región a la que pertenece se señala la teoría que debe utilizarse para describir el movimiento de oleaje.

La construcción de la fig. 13 se basa en las siguientes consideraciones:

1.- Las regiones más amplias están dadas por las teorías más simples; por ejemplo la aplicación de la complicada teoría cnoidal se restringe a una región estrecha.

2.- El límite sobre el cual las olas se hacen inestables y rompen es tomando la ecuación  $(H/L)_{\text{máx.}} = 0.142 \tanh(kh)$ .

En la región de aplicación de la teoría Cnoidal se toma como límite  $(H/h)_{\text{máx.}} = 0.78$ .

3.- Para obtener la solución de la teoría de Airy se supone que el término de la relación de Bernoulli  $(v_x^2 + v_y^2) / 2$  es pequeño y puede ser despreciado. Esto define un límite de aplicación

de la teoría de Airy el cual es :

$$0.5 (v_x^2 + v_y^2) < 0.05gH$$

i.e. 5 % de  $gH$ . Muir y Wood (1969) demostró que éste equivale a :

$$\frac{H}{L} < \frac{1}{16} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$$

La curva correspondiente a esta relación se muestra en la fig 13, separando las regiones de aplicación de la teoría de Airy y la de Stokes.

4.- Como se ha visto en la sección de la teoría Cnoidal el valor del módulo  $K$  es importante en la determinación de la forma de la ola; para  $K = 0$ , la ola corresponde a la teoría de Airy, mientras que para  $K = 1$ , la ola se reduce a la forma de la ola solitaria.

Esto sugiere que el valor de  $K$  podría ser un buen criterio para decidir cual teoría se acerca más a la realidad. De acuerdo con investigaciones de Keller (1943), Litman (1957), Ursell (1953) y Longuet-Higgins (1956), se determinó el límite de la teoría de Airy como  $(L^3 H / h^3) = (32 \pi^2 / 3)$ . Esta forma la línea recta que se para la región de aplicación de la teoría de Airy de la región correspondiente a la teoría Cnoidal.

5.- Housley y Taylor determinaron la región de aplicación de la teoría de la ola solitaria comparando mediciones teóricas y experimentales de la celeridad de la ola. La ecuación de la línea que separa la región de aplicación de la ola solitaria de la región de la teoría Cnoidal es

$$\frac{H}{h} = \frac{1600}{(T\sqrt{g}/h)^{1.5}}$$

6.- Debido a la dificultad de aplicación de la teoría Cnoidal su rango de aplicación es pequeño y en muchas ocasiones se utilizan las teorías de Airy o de Stokes en la región correspondiente a la teoría Cnoidal.

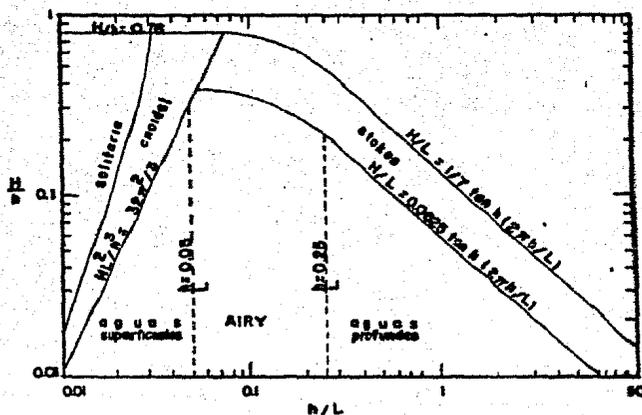


Fig. 13 Rangos de aplicación de las teorías de oleaje en función de  $H/h$  y  $h/L$ .

### 3. REFRACCION DEL OLEAJE.

#### 3.1. Conceptos Preliminares.

Se denomina refracción del oleaje al fenómeno en virtud del cual un frente de ola sufre una modificación en su trayectoria de propagación hacia la costa. Existen dos tipos de refracción, la generada por el fondo del mar y la producida por corrientes marítimas o algún otro agente capaz de modificar la trayectoria de propagación del frente de ola en cuestión.

En la refracción producida por el fondo del mar, la variación de la celeridad a lo largo del frente de ola que se mueve con un ángulo respecto a las líneas batimétricas, se produce debido a que la parte en aguas más profundas se mueve más rápido que la parte en aguas menos profundas. Esta variación causa que el frente tienda a adoptar la forma de las líneas batimétricas.

La refracción asociada con la configuración del fondo marino, determina la altura de ola en cualquier profundidad para un conjunto de olas incidentes desde aguas profundas. El fenómeno como se ve, tiene por lo tanto una influencia significativa en la altura de ola, además de contribuir en la distribución de la energía a lo largo de la costa.

La deformación que sufre el frente de ola al descomponerse en varias partes con diferentes trayectorias (convergencias y divergencias en la energía de la ola) tiene influencia en el diseño de las estructuras que habrán de disipar dicha energía y en el proceso de formación de la playa por los efectos de erosión y depósito de sedimentos.

El otro tipo de refracción producida por corrientes principalmente, ocurre cuando el frente intercepta la corriente con un cierto ángulo. La magnitud de esta refracción depende del ángulo de incidencia y de la fuerza de la corriente. Por ejemplo, las corrien-

tes de bajamar contrarias a las olas incidentes incrementan poco a poco la altura de ola y alteran el fondo marino, propiciando una mayor pendiente. También las corrientes principales en los océanos tales como las corrientes del golfo, pueden tener efectos sobre la altura, longitud y dirección de llegada de las olas que alcanzan la costa.

### 3.2. Aspecto Geométrico.

La disminución de la celeridad de la ola con el decremento de la profundidad puede considerarse análogo al decremento de la velocidad de la luz con el incremento del índice de refracción del medio transmisor. Existen dos soluciones clásicas para el problema y que trataremos a continuación : Ley de Snell y Principio de Huygen.

#### 3.2.1. Ley de Snell.

En base a la analogía mencionada O'brien (8) sugirió el uso de la ley de Snell de la geometría óptica para la solución del problema de la refracción del oleaje debido al cambio de profundidad.

La validez de esta hipótesis fue verificada experimentalmente por Chao (9).

Llamemos rayo u ortogonal a las líneas perpendiculares al frente de ola en el mismo sentido de su propagación. Fig. 14.

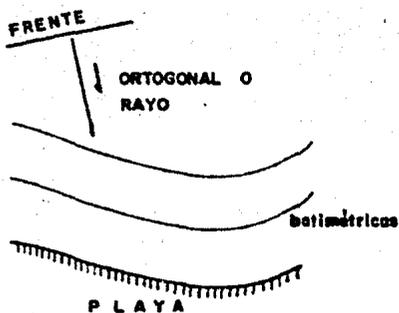


Fig. 14 Definición de ortogonal o rayo.

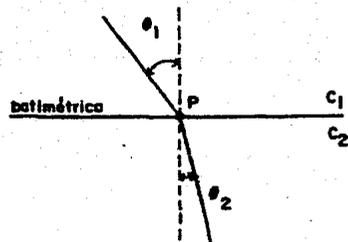


Fig. 15 Refracción de una ortogonal.

Un rayo u ortogonal dado, es desviado o refractado siempre que se encuentre una superficie donde la celeridad tiene un nuevo valor, fig. 15. La magnitud de esta refracción depende del cociente  $C_1/C_2$ , que es la celeridad en el medio 1 (desde el cual incide) - dividido por la celeridad en el medio 2 (al cual pasa) y del ángulo de incidencia  $\theta_1$ , que se define como el ángulo formado por el rayo incidente y la normal a la línea batimétrica. El ángulo de refracción  $\theta_2$ , se define como el ángulo que forma el rayo refractado con la normal a la batimétrica.

Podemos obtener fácilmente una relación entre  $C_1, C_2, \theta_1$ , y  $\theta_2$ , como se indica a continuación. En la fig. 16 se muestran varios frentes de ola y sus correspondientes rayos en la dirección de propagación. Cuando uno de estos frentes alcanza una profundidad menor, se observa que en un extremo de éste disminuye la celeridad antes de que suceda lo mismo en el otro y en consecuencia el ángulo del frente de ola cambia.

La relación que se pretende establecer se obtiene por geometría al considerar los triángulos semejantes de la fig. 16 que tienen la hipotenusa común  $x$  ( 10 ).

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{l_1}{x} \qquad \text{sen } \theta_2 = \frac{l_2}{x} \qquad 48.$$

luego entonces

$$\frac{l_1}{\text{sen } \theta_1} = \frac{l_2}{\text{sen } \theta_2}$$

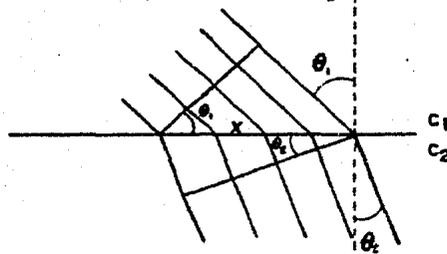


Fig. 16 Refracción de un frente de ola.

Sea  $t$  el tiempo que tarda la ola que se propaga en avanzar la distancia  $l_1$  en el medio 1 y  $l_2$  en el medio 2; entonces :

$$l_1 = C_1 t ; \quad l_2 = C_2 t \quad 49.$$

así pues combinando obtenemos :

$$\frac{C_1}{\sin \theta_1} = \frac{C_2}{\sin \theta_2} \quad 50.$$

que es la ecuación conocida como la ley de Snell de la refracción.

Si tomamos a  $\theta_2$  como incógnita puede verse que para valores de  $C_2 > C_1$ , se puede presentar el caso de que  $(C_2 / C_1) \sin \theta_1 > 1$ , produciéndose el fenómeno de reflexión total, un ejemplo de este fenómeno se muestra en el capítulo de ejemplos de aplicación y se debe a un aumento brusco de la profundidad.

### 3.2.2. Principio de Huygen.

El principio de Huygen permite saber donde estará un frente de onda en un momento cualquiera si se conoce su posición actual, siendo ésto válido para cualquier fenómeno ondulatorio.

El principio dice : " Todos los puntos de un frente de onda se pueden considerar como centros emisores de ondas esféricas secundarias. Después de un tiempo  $t$ , la nueva posición del frente de onda será la superficie tangencial a esas ondas secundarias " .

Sea el frente de onda  $PQ$  en el instante  $t = t_0$ . De acuerdo al principio de Huygens considerense varios puntos como centros emisores de ondas secundarias. En un tiempo  $t = t_0 + t$  el radio de dichas ondas será  $Ct$  donde  $C$  es la celeridad en el medio en que se propaguen las ondas. El plano tangente a las esferas  $P' Q'$  resulta paralelo a  $PQ$  a una distancia  $Ct$  medida perpendicularmente a él.

En la figura 17 se muestra dicho principio. El tratamiento geométrico del problema de refracción es idéntico al mostrado en la figura 16.

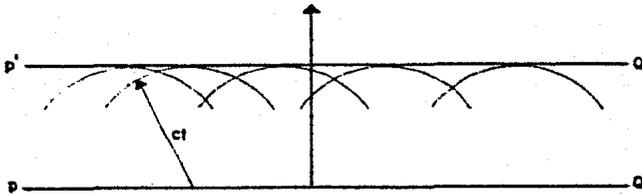


Fig. 17 Principio de Huygen.

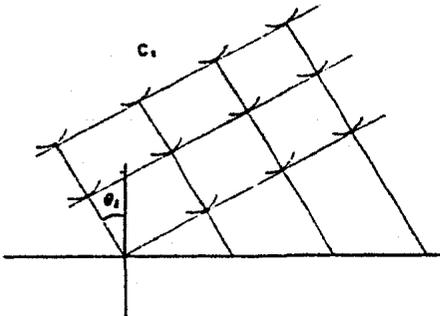


Fig. 18 Refracción de un frente.

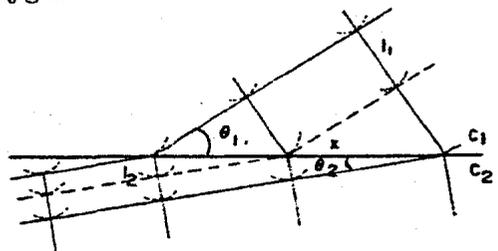


Fig. 19 Refracción de un frente.

### 3.3. Aspecto Energético de la Refracción.

En el análisis de refracción se supone que en el avance del frente hacia la costa no existe flujo de energía hacia los costados y la energía de cada canal permanece constante. En aguas profundas la energía de la ola transmitida hacia adelante es solo un medio de la total.

$$\bar{E}_o = \frac{1}{2} b_o C_o \quad 51.$$

donde

$b_o$  es la distancia entre ortogonales en aguas profundas y el subíndice  $o$  se usará para indicar aguas profundas.

En aguas superficiales la energía transmitida entre las mismas ortogonales es

$$\bar{E} = n b C \quad 52.$$

$b$  es el espaciamiento entre ortogonales en aguas superficiales. igualando 51 y 52

$$\bar{E}_o = \frac{1}{2} b_o C_o = n b C \bar{E} \quad 53.$$

reordenando

$$\frac{\bar{E}}{\bar{E}_o} = \frac{1}{2} \frac{1}{n} \left( \frac{b_o}{b} \right) \left( \frac{C_o}{C} \right) \quad 54.$$

Usando la ecuación 27

$$\frac{E}{E_0} = \frac{H^2}{H_0^2} \quad 55.$$

y

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{E}{E_0}} \quad 56.$$

igualando 54 y 56

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{1}{2n} \frac{C_0}{C} \frac{b_0}{b}} \quad 57.$$

si llamamos  $K_s$  a

$$\sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{n} \left( \frac{C_0}{C} \right)}$$

tenemos que :

$$\frac{H}{H_0} = K_s \sqrt{\frac{b_0}{b}} \quad 58.$$

El término  $K_s$ , es conocido como coeficiente de arrastre o de o; al otro término  $\sqrt{b}/b_0$ , se le llama coeficiente de refracción. Por lo tanto la altura de ola en cualquier punto es :

$$H = H_0 K_s K_r \quad 59.$$

En las aplicaciones prácticas de la refracción por efecto del fondo del mar es necesario establecer algunas hipótesis que se enumeran a continuación :

- 1.- Es aplicable la teoría de olas de pequeña amplitud.
- 2.- Entre ortogonales la energía es constante, es decir no hay transmisión lateral de energía.
- 3.- La dirección de avance del frente es perpendicular a él mismo.
- 4.- Los cambios de batimetría son graduales.
- 5.- La celeridad de propagación de la ola es función del período y de la profundidad.
- 6.- Los efectos de corrientes, vientos y reflexión en la playa son despreciables.

### 3.4. Zonas de Convergencia y Cústicas.

Una de las aplicaciones de mayor importancia de la teoría de la refracción consiste en la localización de zonas de convergencia de energía que deben ser consideradas para la localización de estructuras marítimas en sitios seguros o para la implantación de protección en estructuras ya existentes.

Uno de los problemas a que se enfrenta el proyectista de estructuras marítimas es la determinación del tipo de agitación de la zona donde se construirá la obra. Ocasionalmente se estudia la ola de diseño en un sitio donde ocurra una fuerte convergencia de ortogonales, generalmente acompañada de la formación de una cústica.

En hidráulica marítima se define a la cústica como el lugar geométrico de uno o más puntos sucesivos donde se han cruzado ortogonales adyacentes (Fig. 20). Para la mejor comprensión del fenómeno Arthur realizó un estudio analítico de la formación de cústias utilizando para ello una configuración del fondo teórico como se muestra en la figura 21. La curva formada por el semicírculo y el eje y (línea continua) divide dos zonas :

a) A la derecha tenemos : aguas profundas es decir la profundidad es mayor a  $L_0 / 2$ .

b) A la izquierda la profundidad es aquella que satisface la siguiente relación

$$\frac{C}{C_0} = A$$

Propagándose sobre dicha configuración consideremos un frente de olas en aguas profundas en el instante  $t = 0$ , propagándose en la dirección contraria al eje x.

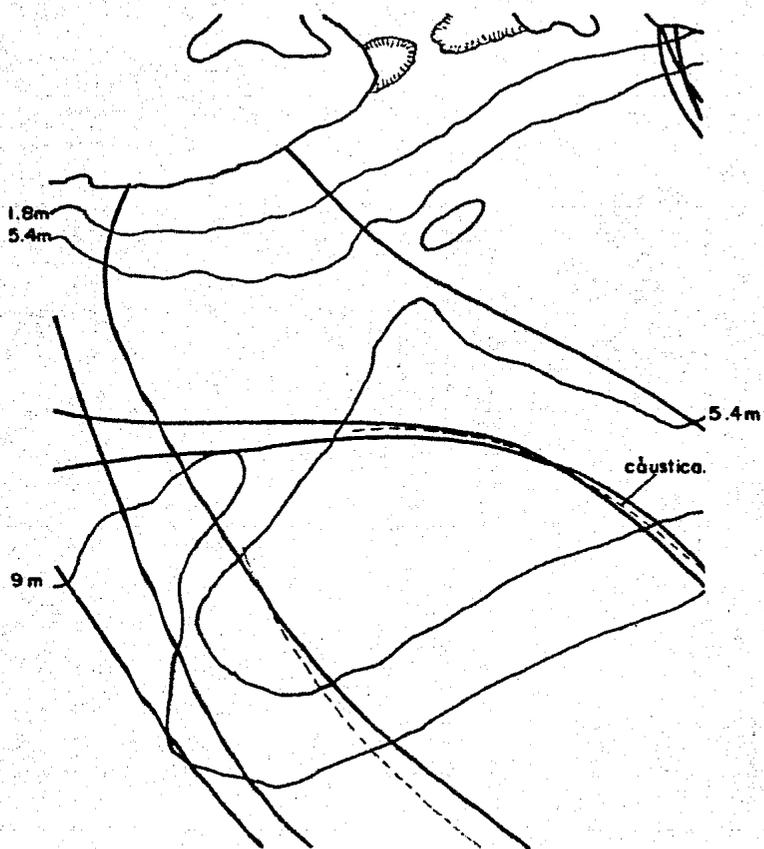


Fig. 20—Formación de la cáustica para olas de 8 segundos dirección este-sureste en Vieques beach (Griswold 1963).

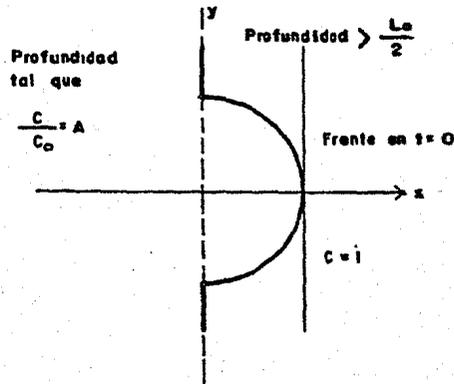


Fig. 21 Sistema coordenado y notación para el ejemplo de una curva cáustica.

La solución analítica (1) en coordenadas polares para una ortogonal entrando en el área circular, definida por

$$R^2 = x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{es :}$$

$$\frac{dR}{R \sqrt{\left( \frac{R}{C/C_0} \sin \theta \right)^2 - 1}} = -d\theta \quad 60.$$

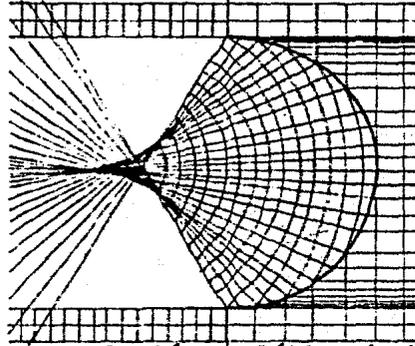
donde

$R$  radio del círculo

$\theta_0$  es el ángulo entre el eje  $x$  y la línea formada por el origen y el punto donde la ortogonal, cruza la línea del círculo unitario.

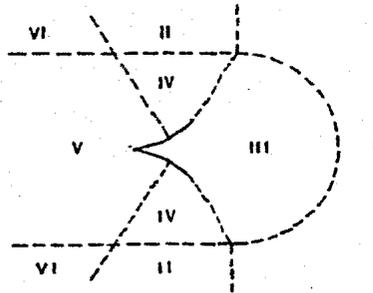
Arthur resolvió analíticamente el problema y dedujo una expresión para el coeficiente de refracción suponiendo que la ecuación 60 era válida en la zona de convergencia, esta ecuación conduce a un valor infinito del coeficiente de refracción en los puntos de cruce de ortogonales, pertenecientes a la cáustica.

Fig. 22 — Diagrama de refracción para un fondo como el de la fig. 21 y corresponde al ejemplo de ocurrencia de cáusticas estudiado por Arthur (Pierson 1951)



La figura 22 muestra la solución analítica de Arthur para el ejemplo de la figura 21 con un valor de la relación de celeridades  $C / C_0 = 0.5$ . En la figura 23, se presentan los resultados en zonas con diferentes coeficientes de refracción.

Fig. 23 — Representación esquemática de las diferentes zonas de la fig. 22.



En las zonas I y II el coeficiente de refracción es 1, lo mismo sucede en la zona VI con las olas provenientes de la zona II. Por lo que respecta a la zona III son aplicables las ecuaciones deduci

das por Arthur para el coeficiente de refracción. En la zona IV el coeficiente de refracción es cero. Las zonas V y VI formadas por olas que han pasado a través de la cáustica representan un problema de interpretación complejo, apoyándose en la geometría óptica, es posible dibujar frentes en estas zonas como si se hubieran propagado más allá de la cáustica. La luz sufriría un retrasamiento en la fase de  $180^\circ$  al pasar a través de la cáustica; bajo esta consideración son válidas las ecuaciones del coeficiente de refracción en estas zonas. En las olas marítimas la aplicación de esta analogía está sujeta a ciertos problemas de interpretación.

Ciertamente puede decirse :

Las figuras 22 y 23 no muestran en forma conveniente la realidad por dos razones:

a) En la frontera de las zonas II y IV la teoría de la refracción dice que no hay transmisión lateral de energía de una zona a la otra. Sin embargo la teoría de la difracción arrojaría valores de la altura de ola en la zona IV.

b) La teoría de la refracción arroja valores de la altura de ola infinitos a lo largo de la cáustica. En la naturaleza y antes de formarse la cáustica ocurre una transmisión lateral de energía por difracción y eventualmente una parte del frente rompe resultando una apariencia caótica del mar y no alturas de ola infinitas.

Ahora bien, el tratamiento analítico de las alteraciones que experimentan las olas en una zona de convergencia y su propagación más allá de las cáusticas no es fácil. Por un lado la existencia de fenómenos no lineales hacen dudosa la validez de la teoría lineal y por otro, la hipótesis de no ocurrencia de difracción que sustenta el tratamiento clásico del fenómeno de refracción pierde totalmente su significado.

Pierson realizó un estudio analítico del fenómeno de propagación de las olas en las cercanías de la cáustica, basándose en la geometría óptica, llegando a la conclusión de que la ola sufre un retraso de fase gradual en su propagación a través de la cáustica, que se inicia antes de que el frente alcance la cáustica y termina a una cierta distancia delante de ella.

Pierson efectuó entonces estudios teóricos y experimentales - usando una batimetría semejante a la utilizada por Arthur. La fig. 24 muestra un diagrama de refracción teórico sin considerar el retraso en la fase. La figura 25 es un diagrama donde sí se ha tomado en cuenta el retraso en la fase  $180^\circ$ . La figura 26 fué obtenida de una fotografía de un ensayo experimental; los frentes trazados en la línea continua no son afectados por la cáustica formando trenes de ola independientes, que se cruzan en una zona situada más allá de la cáustica. Los frentes de línea discontinua experimentan una modificación gradual de la fase al pasar a través de la cáustica y corresponden teóricamente a un conjunto de ortogonales involucradas por definición en la formación de una cáustica. Un ensayo con trenes de ola de menor período (0.6 del anterior) produjo la desaparición de la cáustica (ver fig. 27), y la formación de dos trenes de ola cruzados del tipo de la figura 28, pero con frentes curvos.

Resumiendo podemos decir que cuando las olas en el curso de su propagación entran en una zona de bajos, puede originarse una cáustica que estará acompañada de la formación de dos trenes de ola que se propagan independientemente cruzandose entre sí, formandose un tercer frente que atraviesa la cáustica, caracterizado por un retraso en la fase que aumenta conforme pasa a través de la -

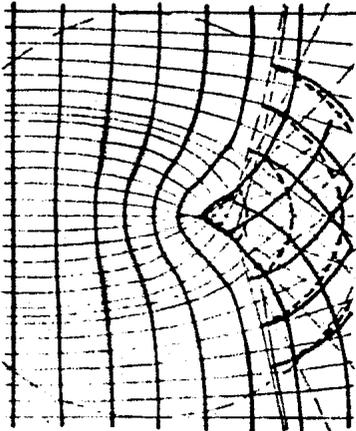


Fig. 24 — Diagrama de refracción teórico, sin cambio de fase para un bajo del tipo "vidrio de reloj" (Pierson, 1951)

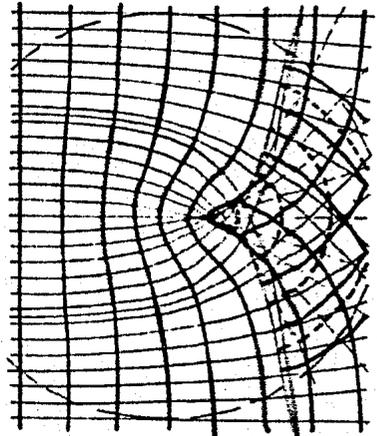


Fig. 25 — Diagrama de refracción teórico, con cambio de fase para un bajo del tipo "vidrio de reloj" — (Pierson, 1951)

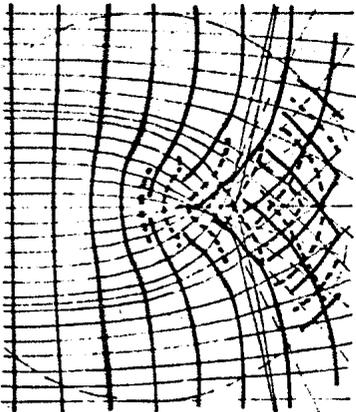


Fig. 26 — Diagrama de refracción reconstruido a partir de la fotografía de un ensayo realizado por Pierson para un fondo del tipo "vidrio de reloj" (Pierson, 1951)

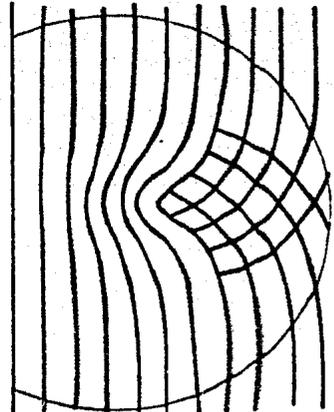
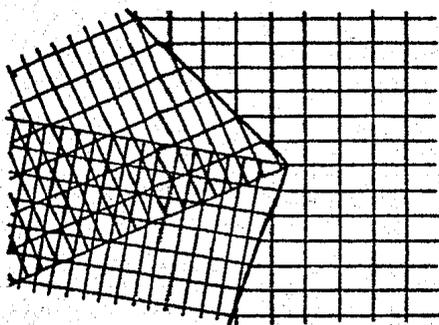
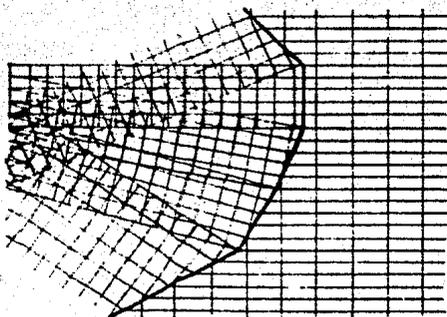


Fig. 27 — Diagrama de refracción reconstruido a partir de la fotografía de un ensayo realizado por Pierson para un fondo del tipo "vidrio de reloj". Se empleó un periodo de 0.6 del periodo utilizado para el ensayo del diagrama de la Fig. 26



Ejemplo de trenes de ola cruzados.



Ejemplo de cruce múltiple trenes de ola.

cáustica hasta hacerse igual a  $180^\circ$  . Con ésto queda explicado en cierto modo el aspecto geométrico de la refracción con formación de un tercer frente. Para la resolución del aspecto energético existen dos alternativas : considerar que la propagación se efectúe sin transmisión lateral de energía, continuando la distancia entre ortogonales adyacentes después de su cruzamiento como una medida de la altura de ola. En estas condiciones el coeficiente de refracción  $K_r$  calculado, ofrece valores adecuados para la altura de ola en la zona situada adelante de la cáustica. La segunda alternativa consiste en considerar la dispersión lateral de energía ocasionando un amortiguamiento importante en la altura de ola en la zona situada adelante de la cáustica. La segunda alternativa consiste en considerar la dispersión lateral de energía ocasionando un amortiguamiento importante en la altura de ola en la zona situada adelante de la cáustica. La energía no se disipa, sino que se distribuye en un área tal que la altura de ola es muy pequeña. De acuerdo con ésto puede verse que el aspecto geométrico está resuelto satisfactoriamente, no así el energético, para el cual se han efectuado otros estudios como el de Whalin (1971) que concluye :

1.- La difracción de energía es un fenómeno muy importante en la zona de convergencia de los casos analizados, todos caracterizados por la formación de una cáustica, resulta que un porcentaje entre 22 y 85 por ciento de la energía total transmitida era difractada, dependiendo el porcentaje en cada caso de la posición del punto analizado relativa al vértice de la cáustica.

Luego entonces para preveer en forma conveniente la altura de ola en la zona de convergencia es necesario considerar los fenómenos de refracción y difracción a la vez.

2.- En la zona de convergencia de ortogonales, debe tenerse cuidado con la hipótesis de que la ola es de pequeña amplitud, la cual puede no cumplirse al incrementarse la altura de ola entre dos ortogonales.

3.- La energía reflejada por el fondo, es prácticamente despreciable confirmando la hipótesis de partida. Por su parte la energía disipada por fricción con el fondo se transforma en una disminución en la altura de ola por estos dos efectos combinados, resultó ser inferior a 5 por ciento.

4.- En resumen se puede decir que en las zonas de convergencia es necesario considerar una altura de ola y un perfil de ola de proyecto, que incluyan : formación de una concentración de energía por refracción en interacción con un mecanismo de transmisión lateral de energía a lo largo del frente y los efectos no lineales

La difracción actuará reduciendo el valor de la altura de ola calculado por la teoría lineal de la refracción. En cuanto a los efectos no lineales, pueden actuar en ambos sentidos sobre la altura de ola de proyecto. Es por tanto indispensable tomarlos en cuenta en el cálculo de diseño de estructuras marítimas.

#### 4. METODOS PARA LA CONSTRUCCION DE DIAGRAMAS DE REFRACCION.

##### 4.1. Conceptos Generales.

Conforme a lo explicado en el capítulo anterior, al propagarse el oleaje de aguas profundas hacia aguas superficiales, la celeridad de la ola es afectada por la profundidad. Para conocer las características del oleaje en aguas superficiales es necesaria la construcción de diagramas de refracción o planos de olas.

Existen dos alternativas para trazar diagramas de refracción, los métodos gráficos y los métodos numéricos. Es a partir de 1948 cuando se comienzan a calcular los diagramas de refracción, utilizando para ello métodos gráficos, los cuales proporcionan resultados satisfactorios en cuanto a dar un panorama general del fenómeno pero adolecen de ciertas desventajas de las que se hablará más adelante. Los métodos numéricos (1963) surgen como herramienta para automatizar el cálculo de diagramas de refracción, solucionando con ello los problemas inherentes a los métodos gráficos y generando mayor confiabilidad en los resultados obtenidos.

En las siguientes secciones se describen las técnicas de trazo para los métodos gráficos (frentes de ola y ortogonales), análisis de ventajas y desventajas de los mismos y la deducción de ecuaciones básicas del método numérico así como la técnica de cálculo utilizada.

#### 4.2. Método de los Frentes de Ola.

Este método fue propuesto por Johnson en 1948 y se basa en el principio de Huygen. Los frentes de ola se trazan con ayuda de una regleta como la ilustrada en la figura 29, en la cual se relacionan los avances de los frentes de ola con las diferentes profundidades mediante la relación  $h / L_0$ . Los avances ( $nL$ ) se determinan en función del período de ola y de la escala del plano de batimetría; el valor de  $h$  se puede calcular mediante la relación :

$$n = 0.0163 \ S/T^2 \quad 61.$$

donde  $S$  = escala del plano.

$T$  = período de la ola en segundos.

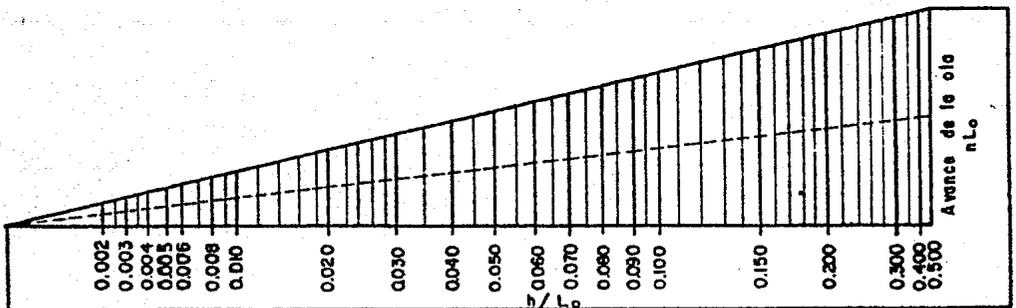


Fig. 29 — Regleta para la construcción de diagramas de refracción por el método de los frentes de ola.

El cateto mayor de la regleta ilustra la variación de la relación  $h/L_0$  de la zona de aguas superficiales hasta el límite de a -

guas profundas ( $h = L_0 / 2$ ). El valor máximo de  $nL$ , corresponde a aguas profundas por lo que  $L_0$ , se denomina  $nL_0$ .

A continuación se describe el procedimiento para la construcción de diagramas de refracción por el método de los frentes de ola:

- 1.- Determinar la relación  $h/L_0$  para cada batimétrica y tabular los resultados.
- 2.- En aguas profundas y con la dirección a estudiar se traza el frente de ola inicial.
- 3.- Se divide el frente en segmentos de tamaño  $b_0$ .
- 4.- Se coloca la regleta en forma tal que el cateto ( $h/L_0$ ) - sea tangente con el último frente de ola.
- 5.- Se hace coincidir a la batimétrica más cercana con su correspondiente valor de  $h/L_0$  sobre la línea punteada. El punto formado por la línea de avance y la hipotenusa será el punto perteneciente al siguiente frente, como se ilustra en la figura 30.

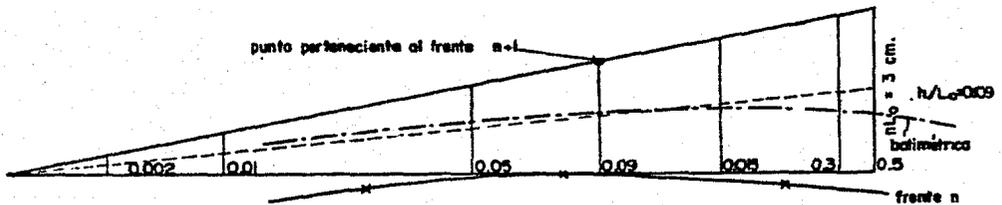


Fig. 30

- 6.- Se desliza la regleta sobre el mismo frente hasta intersectar la misma batimétrica o una inmediata para definir otro punto del frente en construcción.

7.- Se ven los puntos obtenidos, quedando definido el nuevo frente.

8.- A partir de los puntos que dividen el frente inicial en segmentos, se trazan ortogonales a los frentes construidos.

9.- Se repiten los pasos anteriores hasta terminar.

### 4.3. Método de las Ortogonales.

Este método fue propuesto por Arthur R. S. (1952) y se basa en la ley de Snell. Con una ayuda para la construcción del diagrama conviene realizar las siguientes operaciones :

a) Se suavizan las pequeñas irregularidades de la batimetría ya que no son de interés y si dificultan el trazo.

b) Construcción de una tabla (Tabla I) donde se relacionen las celeridades de las batimétricas  $i$  e  $i+1$ , utilizadas en la ley de Snell (ecuación 63).

T A B L A I .  
Características de la ola.

$T =$ sg	$C_0 =$ m/sg
Profundidad $h$	Relación de celeridades $C_i / C_{i+1}$ .
$h_1$	$C_1 / C_2$
$h_2$	$C_2 / C_3$
$h_i$	$C_i / C_{i+1}$
$h_n$	$C_{n-1} / C_n$ .

#### Procedimiento de Construcción.

1.- Se traza una línea paralela y equidistante a ambas batimétricas línea  $O - O'$  de la figura 31.

2.- Se lleva una paralela a  $O - O'$  hasta la intersección del rayo incidente con la batimétrica  $h_i$  (punto A) ; llamemos  $\alpha$  i al ángulo formado por dicha paralela y una línea perpendicular al rayo en el punto A.

3.- Se prolonga el rayo hasta intersectar a  $O - O'$  definiendo al punto B.

4.- Se traza una perpendicular al rayo en tal punto y sobre de ella se toma una distancia arbitraria a partir de B llamando C

al punto extremo. La distancia  $\overline{BC}$  se considera unitaria.

5.- A la misma escala de  $\overline{BC}$  se traza un segmento de círculo - con centro en C y radio  $C_i / C_{i+1}$  (este último valor se obtiene de la tabla 1). La intersección de éste círculo con la línea  $O-O'$  define el punto D. Con esto se cumple que :

$$CE = BC \operatorname{sen} \alpha_i = \operatorname{sen} \alpha_i \quad 62.$$

$$CE = DC \operatorname{sen} (\alpha_{i+1}) = \frac{C_i}{C_{i+1}} \operatorname{sen} (\alpha_{i+1}) \quad 63.$$

$$\text{de 62 y 63 } \operatorname{sen} \alpha_{i+1} = \frac{C_{i+1}}{C_i} \operatorname{sen} \alpha_i \quad 64.$$

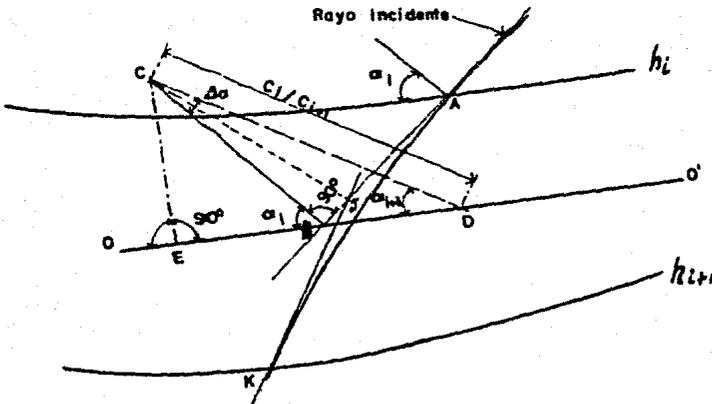


Fig. 31

En la figura 31 puede verse que el ángulo formado por CB y CD es :

$$\Delta \alpha = \alpha_i - \alpha_{i+1} \quad 65.$$

6.- A partir de CD se mide un ángulo igual a  $\Delta\alpha/2$  y con él, se traza una línea hasta intersectar a AB (puntos).

7.- Pasando por J se traza una perpendicular a CD que será la dirección del rayo al cortar la batimétrica  $h_{i+1}$  en el punto K de la figura 31.

8.- Si se desea suavizar el rayo entre las batimétricas ya estudiadas se puede proceder como se indica en la misma figura 30.

En A se traza una perpendicular al rayo, lo mismo se hace en K, donde se intersecten las perpendiculares se hace centro y se traza un segmento de círculo de A a K. En caso de no requerir mucha precisión, el trazo puede hacerse a mano y en forma aproximada.

#### 4.4. Método de las Ortogonales mediante Plantilla.

Para aplicar este método se requieren dos o más batimétricos a diferente escala, aunque el procedimiento es el mismo para cualquier escala. El detalle de la batimetría depende de la aproximación deseada y es recomendable suavizar las pequeñas irregularidades ya que no tienen influencia apreciable en el cálculo.

Se calculan las relaciones  $C_i / C_{i+1}$  para cada batimétrica y se marcan entre éstas. A continuación se dibuja un frente en aguas profundas, recto y perpendicular a la dirección de estudio. Se dibujan las ortogonales al frente separadas una distancia  $b_0$  a escoger; mientras menor sea  $b_0$ , el cálculo será más fidedigno. De acuerdo al ángulo  $\alpha$  que forme el frente de ola con la batimétrica existen dos procedimientos y se describen a continuación.

##### 4.4.1. Procedimientos para cuando $\alpha$ es menor de $80^\circ$ .

Comenzando con cualquier ortogonal y valiéndose de la plantilla de la figura 32 se siguen los siguientes pasos :

I) Se traza una línea media equidistante a las batimétricas - por cruzar, se extiende la ortogonal incidente hasta dicha línea y se traza una tangente a la línea media en la intersección de ésta con la ortogonal.

II) Orientando la línea " ortogonal " de la plantilla a lo largo de la ortogonal incidente y con el punto marcado con 1.0 coincidiendo en la intersección de la ortogonal con la línea media. Se establece así el punto de giro figura 33.

III) Rótese la plantilla alrededor del punto de giro hasta que el valor de  $C_n / C_{n+1}$  correspondiente a la batimétrica por cruzar intersecte la tangente a la línea media. La "ortogonal" de la

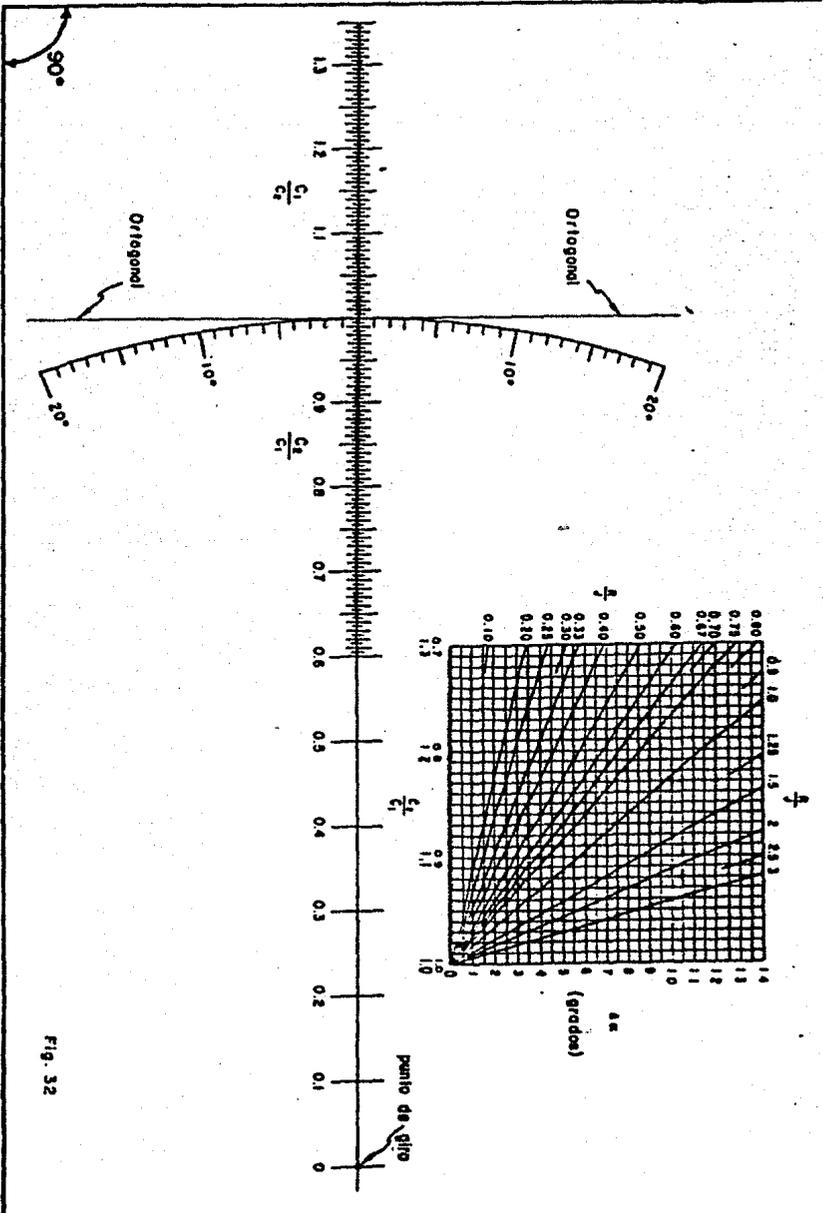


Fig. 32

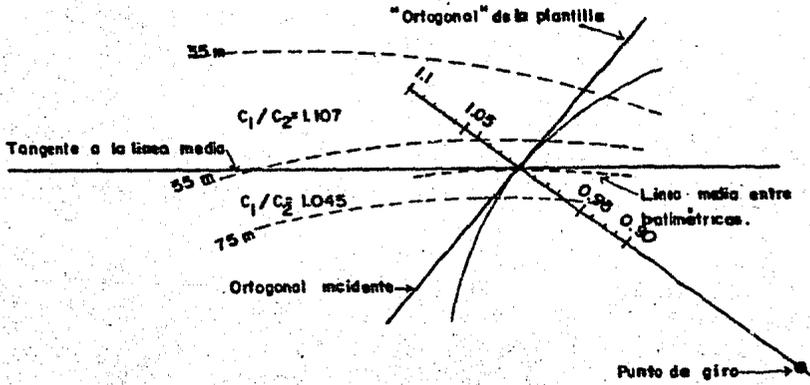


Fig. 33

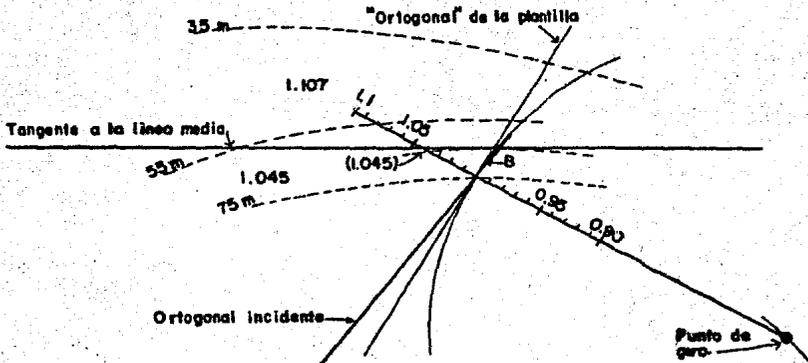
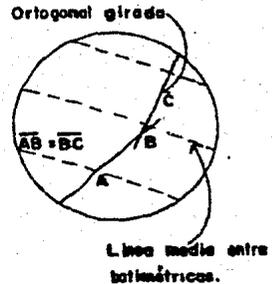


Fig. 34



plantilla ahora apunta en la dirección de la ortogonal refractada.

En esa posición, se traza una paralela a la ortogonal de la plantilla que intersecte a la ortogonal incidente en un punto que equidiste de las dos batimétricas, no necesariamente sobre la línea media, quedando así definida la ortogonal refractada, fig. 34.

Se repiten los pasos anteriores cuantas veces sea necesario.

Si la ortogonal será construída de aguas superficiales hacia aguas profundas, puede emplearse el mismo método, usando sobre la plantilla la relación  $C_{n+1} / C_n$  en vez de  $C_n / C_{n+1}$ .

#### 4.4.2. Procedimiento para cuando $\alpha$ es mayor de $80^\circ$ . Método - R / J.

A cualquier profundidad, cuando  $\alpha$  es mayor de  $80^\circ$ , el método anterior no puede ser empleado. La ortogonal ya no parece cruzar las batimétricas sino que más bien tiende a correr casi paralela a éstas. En tales casos, la batimetría será cruzada por la ortogonal con una secuencia de quiebres.

Con relación a la figura 32, el intervalo por cruzar se divide en pequeños subintervalos mediante líneas transversales. El espaciamiento R de las líneas transversales se fija como una proporción entera de las distancias transversales J. Se calcula la relación  $C_{n+1} / C_n$  correspondiente a todo el intervalo.

En la figura 32 se encuentra graficada la variación del ángulo  $\Delta\alpha$  como función de la relación  $C_{n+1} / C_n$  para diferentes valores de R / J. El valor  $\Delta\alpha$  es la deflexión que ha de sufrir la ortogonal incidente en el centro del subintervalo.

Se prolonga la ortogonal incidente hasta la mitad del segmento, se lee  $\Delta\alpha$  de la gráfica ya mencionada y se gira la ortogonal - este ángulo.

El procedimiento se repite para cada subintervalo hasta que  $\alpha$  es menor de  $80^\circ$ . En éste punto debe sustituirse este procedimiento por el anterior ya que de otro modo pueden inducirse errores.

#### 4.5. Comparación de los Alcances de los Métodos Gráficos.

##### Ventajas del Método de los Frentes de Ola.

1.- Se obtienen las crestas directamente y permiten visualizar la acción del oleaje. En algunos casos las crestas de ola pueden ser correlacionadas directamente con las obtenidas de fotografías aéreas.

2.- Es un método fácilmente comprensible y de sencilla aplicación. No es necesario que el dibujante entienda la teoría del oleaje para construir los diagramas.

3.- Cuando los frentes son dibujados adecuadamente, es fácil, relativamente, interpretar el cruce de ortogonales.

4.- El método es de fácil supervisión. Un supervisor entrenado, con un rápido escrutinio de los frentes y de la batimetría, puede realizar una revisión visual satisfactoriamente detallada del diagrama.

5.- Los diagramas son fáciles de explicar a gente no técnica. Las posiciones progresivas de los frentes se indican en el diagrama y a partir de su forma y curvatura la mayoría de la gente puede observar si existe convergencia o divergencia.

### Desventajas del Método de los Frentes de Ola.

1.- Las crestas son a menudo suavizadas cuando debieran separarse para indicar el cruce de ortogonales. Nada propio del método prohíbe separar las crestas.

2.- Deben utilizarse planos a diferentes escalas para cada período considerado. Dado que cambiar un plano de escala puede provocar errores humanos.

### Ventajas del Método de las Ortogonales.

1.- Es más fácil la construcción de ortogonales y enseguida de los frentes, que realizarlo a la inversa.

2.- Mide directamente el cambio de dirección del frente.

3.- Se descubren automáticamente las cáusticas aunque no son localizadas con precisión.

4.- Es relativamente sencillo calcular el coeficiente de refracción.

### Desventajas del Método de las Ortogonales.

1.- Se requiere mayor especialización para la construcción de diagramas de refracción por este método, que por el de los frentes de ola.

Existen posibles errores en la construcción de una ortogonal.

El trazo de  $\Delta\alpha$  en el punto en el que debe girar la ortogonal puede provocar un error en cada paso de construcción. Una ortogonal puede ser localizada incorrectamente debido a que el tiempo con que hace el recorrido hacia la playa, tal vez no sea el mínimo. Los errores sufridos por una ortogonal, en su construcción, -

no son derivados de la construcción de cualquier otra. Si la persona que construye el diagrama lo hace con la mayor aproximación posible y no permite la influencia visual de las ortogonales próximas, el diagrama no contendrá errores acumulados.

Como puede expresarse en lo explicado con anterioridad respecto de los alcances, se infiere sin duda, que el método de las ortogonales es más aproximado.

Los métodos gráficos nos permiten ciertas áreas del océano y en ciertos sectores a lo largo de la playa, predecir la altura de la ola, ya que gran cantidad de la energía de aguas profundas no puede ser tomada en cuenta mediante las técnicas actuales. Por lo anterior y recordando la posible formación de cáusticas, las consideraciones teóricas de cálculo, deberían involucrar conceptos más refinados que los conceptos de ortogonal y cresta.

## 4.6. Método Numérico

## 4.6.1. Antecedentes.

Después de tratar los métodos gráficos clásicos de construcción de diagramas de refracción se observa lo largo y tedioso de su proceso así como su subjetividad. La confiabilidad del diagrama está limitada por la escala del plano y la habilidad del dibujante.

El objetivo del método numérico es la construcción de diagramas de refracción, limitados en precisión sólo por el conocimiento detallado del fondo marino y en velocidad por el tipo de computadora usada.

A continuación se deduce la ecuación básica para el tratamiento numérico, por el método de las ortogonales, del problema de refracción de oleaje y el procedimiento de cálculo aquí utilizado.

## 4.6.2. Ecuación del Rayo de Onda.

Partiendo del principio de Fermat, según el cual, un rayo que viaja de un punto a otro, recorre la distancia en el mínimo tiempo.

Las ecuaciones paramétricas de un rayo que forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$ , son :

$$dx = ds \cos \alpha \quad 66.$$

$$dy = ds \sin \alpha \quad 67.$$

como muestra la figura 35.

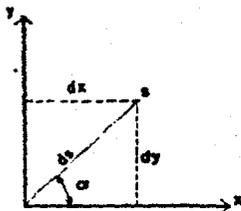


Fig. 35

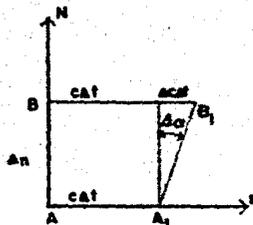


Fig. 36

Si  $C$ , es la celeridad de la ola, ésta recorre la distancia  $ds$  a lo largo del rayo en un tiempo  $dt$ , entonces :

$$ds = C dt \quad 68.$$

Sean  $A$  y  $B$ , dos puntos de un mismo frente en un tiempo  $t$  separados  $\Delta n$  a lo largo del frente  $n$  (figura 36). Si  $C$ , varía  $\Delta C$ , - entre los puntos  $A$  y  $B$ , podemos aplicar el principio de Huygen; usando circunferencias de radio  $C\Delta t$  y  $(C + \Delta C)\Delta t$ , obtendremos la posición de los puntos  $A_1$  y  $B_1$ , de este diferencial de frente en el tiempo  $t + \Delta t$ . La rotación  $\Delta \alpha$  es ( 12 ):

$$\text{Tan } \Delta \alpha = - \frac{\Delta C \Delta t}{\Delta n} \quad 69.$$

Para ángulos muy pequeños

$$\Delta \alpha = - \frac{\Delta C \Delta t}{\Delta n} \quad 70.$$

en el límite cuando  $\Delta n \rightarrow 0$

$$\frac{D \alpha}{D t} = - \frac{D c}{D n} \quad 71.$$

que es la ecuación diferencial del rayo de ola.

Si se introduce como variable la abscisa curvilínea  $S$ , a lo largo del rayo

$$CU = \frac{D \alpha}{D s} = \frac{1}{C} \frac{D \alpha}{D t} = \frac{1}{C} \frac{D c}{D n} \quad 72.$$

a la que llamaremos curvatura  $C U$  de la ortogonal, y es igual al logaritmo del gradiente de velocidad a lo largo del frente de ola.

La derivada de  $C$  en la dirección de  $n$  es :

$$\frac{D c}{D n} = \frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dn} \quad 73.$$

o de la figura 37

$$\frac{D}{D n} = - \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{cos} \alpha \frac{\partial}{\partial y} \quad 74.$$

por lo tanto

$$C U = \left( \frac{\partial C}{\partial x} \operatorname{sen} \alpha - \frac{\partial C}{\partial y} \operatorname{cos} \alpha \right) \frac{1}{C} \quad 75.$$

## 4.6.3. Cálculo de una Ortogonal.

Un rayo u ortogonal, es definido por un conjunto de puntos cu ya posición es calculada cada cierto intervalo de tiempo. Las coordenadas de cada uno de estos puntos, son calculadas, basándose en las coordenadas del punto precedente ( independientemente del resto de las ortogonales ) en base a la ecuación diferencial del rayo de ola ( ecuación 75), utilizando como procedimiento de cálculo el método iterativo que se describe a continuación :

Sean  $X_n$  ,  $Y_n$  las coordenadas del punto  $n$  y  $\alpha_n$  el valor del ángulo que forma la ortogonal con el eje  $x$  en el instante  $t$ .

Pretendemos calcular el punto  $n+1$  de coordenadas  $X_{n+1}$ ,  $Y_{n+1}$  y ángulo  $\alpha_{n+1}$  correspondiente al instante  $t + \Delta t$ .

En el punto  $n$ , puede conocerse la aproximación numérica de las derivadas de primer orden de la celeridad  $\partial C / \partial x_n$  ,  $\partial C / \partial y_n$  combinando las ecuaciones 71 y 74 obteniéndose :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial x_n} \text{ sen } \alpha_n - \frac{\partial C}{\partial y_n} \text{ cos } \alpha_n \quad 76.$$

Si suponemos que el valor de  $d\alpha / dt$  es igual en los puntos  $n$  y  $n+1$ , obtenemos un primer valor de la variación en el ángulo :

$$\Delta \alpha = C U \cdot C \cdot \Delta t \quad 77.$$

y por tanto valores aproximados de  $X_{n+1}$  ,  $Y_{n+1}$  y  $\alpha_{n+1}$

$$\bar{\alpha} = \alpha_n + \frac{\Delta \alpha}{2} \quad 78.$$

$$X_{n+1} = X_n + C_n \Delta t \cos \bar{\alpha} \quad 79.$$

$$Y_{n+1} = Y_n + C_n \Delta t \sin \bar{\alpha} \quad 80.$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta \alpha \quad 81.$$

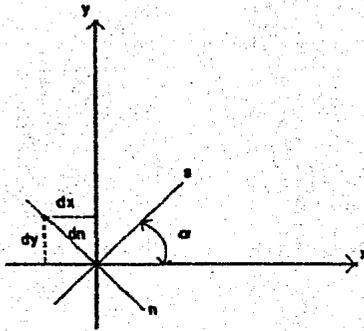


Fig. 37

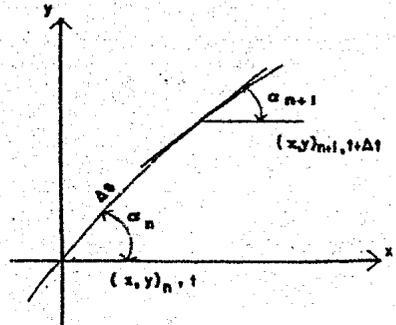


Fig. 38

Con el conocimiento de la posición aproximada del punto  $n+1$ , podemos calcular valores de las derivadas de primer orden de la celeridad y de  $d\alpha / dt$  para esta nueva posición, se vuelve a va-luar  $\Delta \alpha$ , utilizando como  $C$  y  $C U$  los siguientes valores

$$C U = \frac{C U_n + C U_{n+1}}{2} \quad 82.$$

$$C = \frac{C_n + C_{n+1}}{2} \quad 83.$$

y para obtener una nueva aproximación del punto  $n+1$ , se utilizan - las expresiones siguientes :

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_n + \Delta \alpha / 2 \quad 84.$$

$$X_{n+1} = X_n + C \Delta t \cos \bar{\alpha} \quad 85.$$

$$Y_{n+1} = Y_n + C \Delta t \sin \bar{\alpha} \quad 86.$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta \alpha \quad 87.$$

Este proceso para la obtención de la posición real del punto  $n+1$  y su respectivo ángulo de propagación  $\alpha_{n+1}$ , se repite hasta satisfacer las siguientes consideraciones :

$$\Delta \alpha_i - \Delta \alpha_{i-1} < \pm .005^\circ$$

$$\frac{C_i - C_{i-1}}{C_i} \times 100 < 0.5 \text{ por ciento.}$$

## 5. PROGRAMA DE COMPUTADORA " REFRA "

### 5.1. Generalidades.

El análisis numérico estudia los procesos por los cuales pueden resolverse problemas matemáticos con operaciones algebraicas; también selecciona los procedimientos más adecuados para la solución de un problema particular. A tales procedimientos se les denomina métodos numéricos y por sus características son útiles para desarrollar programas de computadora.

En la actualidad una gran parte de los cálculos ingenieriles, se efectúan a través de programas en computadora. El cálculo de diagramas de refracción del oleaje es una de las actividades que de manera muy generalizada aún se desarrollan a través de métodos gráficos manuales. Estos métodos son de aplicación lenta y tediosa e introducen errores humanos muy importantes para casos donde la batimetría es muy irregular y complicada.

En el capítulo anterior se describió un método numérico para el cálculo de la refracción del oleaje. En este capítulo se desarrolla una alternativa para automatizar el cálculo : el programa " Refra " .

El programa " Refra " calcula a partir de un frente de ola inicial la trayectoria de propagación de las ortogonales viajando a través de un campo de celeridades. El cálculo se realiza con base al principio de Fermat y de manera independiente de la ley de Snell

La información que proporciona el programa es :

- a) Coordenadas de los puntos que describen la trayectoria de cada ortogonal.
- b) Dirección de propagación en cada punto calculado.

- c) Celeridad de ola en cada punto calculado.
- d) Celeridad de grupo en cada punto calculado.
- e) Profundidad en cada punto calculado.
- f) Altura de ola y coeficiente de refracción en el canal de - energía formado por las ortogonales  $i$  e  $i-1$ .

Esta información permite la construcción de un diagrama de refracción de alta confiabilidad amén de configurar una valiosa ayuda para el estudio de acarreo litoral, problemas de agitación, etc.

### 5.2. Datos de Entrada.

Los datos necesarios para el cálculo son divididos en tres grupos:

a) Batimetría : Como se ha mencionado las ortogonales se propagan sobre un campo de celeridades. Este es generado a partir de una malla de profundidades, obtenida como se indica a continuación:

Sobre un plano batimétrico de la zona de estudio se traza un sistema de ejes coordenados  $(x, y)$ , hecho esto, se trazan líneas paralelas a cada uno de los ejes con intervalos constantes  $dx$  en la dirección del eje  $x$  y  $dy$  en la dirección del eje  $y$ , ver fig. 39.

En los puntos definidos por las intersecciones se obtiene la profundidad correspondiente. Estos puntos formarán la matriz de profundidades de orden  $MM \times NN$ , donde  $MM$  es el número de secciones paralelas al eje  $y$  y  $NN$  el número de secciones paralelas al eje  $x$ .

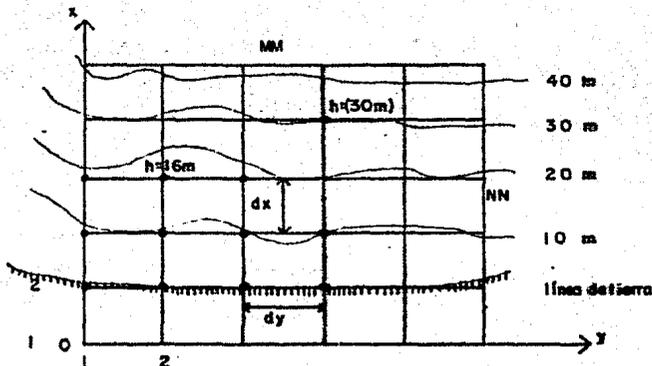


Fig. 39 — Matriz de profundidades de orden  $MM \times NN$  y espaciamento entre secciones  $dx$  y  $dy$ .

b) Frente de Ola Inicial. Estos datos constituyen las condiciones iniciales del cálculo; el frente de ola puede ser recto o estar formado por segmentos rectos de diferente trayectoria. Los datos necesarios son : período de ola  $T$  , número de ortogonales  $N$  R A, coordenadas del punto de origen de cada ortogonal  $X_1, Y_1$  , ángulo con que se inicia el recorrido de cada ortogonal  $A_1$ , altura de ola entre las ortogonales  $i$  e  $i-1, A M P l$ .

La dirección de propagación inicial  $A_1$ , se determina midiendo el ángulo que forma la ortogonal  $i$ ésima con la parte positiva del eje  $x$ , ver figura 40 .

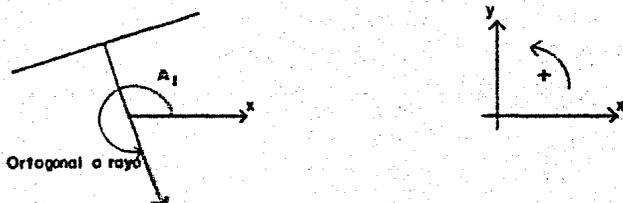


Fig. 40 — Dirección de propagación de la ortogonal.

c) Otras Variables. Estas variables conforman un grupo heterogéneo y comprende : letrero identificador del estudio XLEID, el parámetro NFESC que determina a cada cuantos frentes de ola calculados se imprimen en el listado de resultados, la variable AV controla el intervalo que existe entre los puntos calculados de la trayectoria de la ortogonal (debe proporcionarse en longitudes de ola) mientras menor sea el valor de AV, la precisión del cálculo y el tiempo de ejecución aumentarán.

Otros datos necesarios son las coordenadas del punto de origen de la malla de batimetría (  $X_0$ ,  $Y_0$  ) referidas a un eje principal que se establezca. Por último tenemos la variable NM, que es el número de mallas utilizadas en el cálculo.

Frecuentemente se dispone de planos de batimetría de la zona de estudio con diferente detalle. Para aprovechar esta información existen dos formas de utilizar el programa: la primera consiste en realizar por separado el cálculo para cada una de las batimetrías disponibles y, la segunda en efectuar un solo cálculo manejando toda la información disponible simultáneamente obteniéndose un gran ahorro en tiempo. En esta segunda modalidad se requiere una modificación en los datos de entrada, la cual se trata en la sección 54.

### 5.3. Secuencia de Cálculo.

La secuencia del cálculo se divide en dos partes. La primera conforma la lectura y generación de datos para realizar el cálculo y la segunda describe el proceso de cálculo de la trayectoria de propagación de cada ortogonal, desde el frente de ola inicial hasta que sale de la zona de estudio.

a) Lectura de Datos: batimetría, condiciones iniciales, etc.

Se calcula una tabla de celeridades para profundidades enteras ( $k$ ) resolviendo la ecuación 88 apoyándose en un método iterativo mixto de aproximaciones sucesivas y bipartición hasta que los valores calculados tengan como error máximo 0.1 por ciento.

$$C(k) = C_0 \tanh\left(\frac{2\pi k}{T CI}\right), \quad 88$$

donde

$k$  profundidad, varía de 1 hasta la profundidad de aguas profundas.

$C_0$  celeridad de aguas profundas.

$CI$  valor de la celeridad para la iteración  $i-1$ , en cada iteración se modifica de acuerdo a la siguiente relación:

$$CI_i = \frac{C(k)_{i-1} + CI_{i-1}}{2} \quad 89$$

donde  $i$  = iésima iteración para el cálculo de la celeridad de la profundidad ( $k$ ), el valor inicial de  $CI$  es 30.

Cálculo del campo de celeridades. Para cada valor de la profundidad ( $k$ ) de la matriz de batimetría se calcula su celeridad

asociada con la expresión 90 que garantiza que el error sea menor a 0.1 por ciento, en el cual  $k = \text{INT}(h)$

$$C(h) = C(k) + (h-k) (C(k+1) - C(k)) \quad 90$$

b) Conforme se vió en 4.6.3. conocido un punto  $n (X, Y, \alpha)_n$ , de la trayectoria de la ortogonal para determinar el siguiente punto de dicha trayectoria las operaciones se realizan en la siguiente secuencia :

b.1.) Cálculo de la Trayectoria CUn con una aproximación numérica (sección 5.5.) determinación del cambio en el ángulo de propagación  $\Delta \alpha$  (ec. 77) cuando el rayo avanza una distancia finita en su trayectoria. Con el ángulo promedio  $\bar{\alpha}$  (ec. 78.) se determina la posición aproximada del punto  $n+1 (X, Y, \alpha)_{n+1}$ .

b.2.) La curvatura del rayo es calculada para este nuevo punto CUn+1, se promedia en el valor de la curvatura en el punto  $n - CUn$ , obteniéndose a partir de éste valor  $\overline{CU}$  un nuevo valor de  $\overline{CU}$  y se valúa la posición aproximada del punto  $n+1 (X, Y, \alpha)_{n+1}$ .

El punto b.2. se repite hasta cumplir con los criterios de error. Cuando éstos se satisfacen se procede al cálculo de celeridad de grupo y profundidad. Si de acuerdo al parámetro NFESC, la información correspondiente a éste punto se va a imprimir en el listado de resultados, también se calcula el coeficiente de refracción  $K_r$  y la altura de ola AMP; en caso contrario el procedimiento se repite a partir del punto b.1. utilizando CUn+1 como CUn,  $\alpha_{n+1}$  como  $\alpha_n$  y  $(X, Y)_{n+1}$  como  $(X, Y)_n$ .

La trayectoria de la ortogonal se calcula en esta forma hasta que sale del campo de celeridades. Cumplida esta condición se procede al cálculo de la trayectoria de la siguiente ortogonal.

#### 5.4. Manejo de Mallas de Batimetría.

La precisión en el cálculo está estrechamente vinculada al detalle con que se conozca la batimetría. A mayor conocimiento de la batimetría, menor espaciamiento entre frentes calculados y por ende mayor precisión. Para la zona de aguas profundas el detalle con que se conoce la batimetría es poco, la variación en el ángulo de propagación es prácticamente nula, por ello el intervalo entre frentes (puntos) calculados de la trayectoria de la ortogonal puede ser grande sin demérito en la exactitud. En regiones de menor profundidad la modificación en el ángulo de propagación entre frentes de cálculo se incrementa notablemente y, se requiere conocer la batimetría con mayor detalle.

Congruente a estos lineamientos el programa " Refra " , dispone como alternativa de explotación óptima, el manejo simultáneo de hasta tres mallas de batimetría, con lo cual se cubre la zona de interés con diferente detalle. Una malla comprende la zona de aguas profundas y aguas superficiales con poco detalle y se usará cuando las ortogonales se propaguen en aguas profundas. La segunda malla comprende la zona de aguas intermedias (con mucho mayor detalle) y se utiliza cuando el rayo se propague en aguas superficiales. Una tercera malla por ejemplo podría comprender la zona de un canal con excelente precisión,utilizable sólo en aquellas ortogonales que atravesarán esa zona.

El uso de varias mallas requiere que : los ejes de éstas sean paralelos siendo necesario el conocimiento de las coordenadas del punto de origen de cada malla, respecto a un eje principal, así como las características de cada una de las mallas; MM, NN, dx,dy; el

avance AV en cada una de ellas. La figura 41 muestra una disposición tipo de las mallas, donde se observa que la mayor de ellas en vuelve por completo a las restantes, la intermedia a su vez a la menor. Además se requiere que el avance en una malla menor, debe ser submúltiplo del avance en la malla superior inmediata.

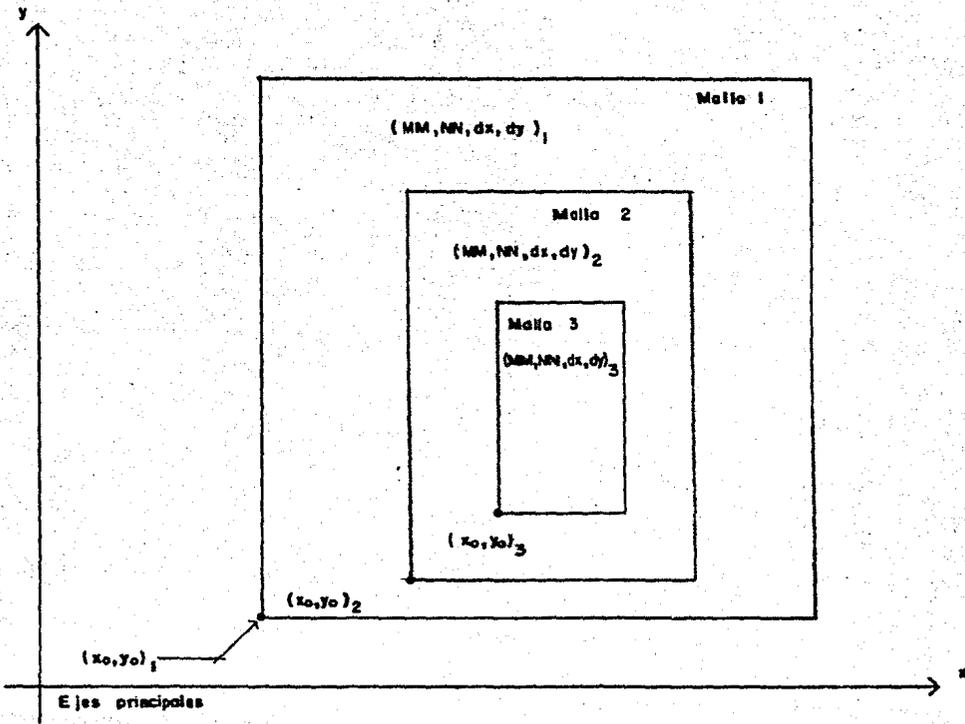


Fig. 41

### 5.5. Cálculo de la Curvatura.

El cálculo de la curvatura para un punto  $i$ , cualesquiera de la trayectoria de una ortogonal se realiza con la secuela que se indica a continuación :

Determinación de la celda de la malla en que se encuentra el punto  $i$ , con base a las expresiones 91 y 92. Los valores de  $I$ ,  $J$ ,  $J+1$ ,  $I+1$ , definen la celda de la malla, como se ilustra en la figura 42.

$$I = \text{INT} ( X / \Delta x ) \quad 91$$

$$J = \text{INT} ( Y / \Delta y ) \quad 92$$

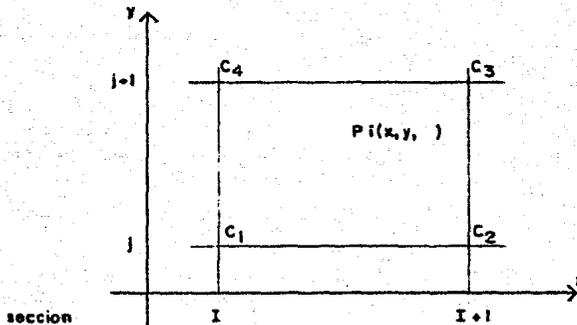


Fig. 42 - Celda para el cálculo de la curvatura  $C_{ui}$ .

En cada uno de los puntos que definen la celda se conoce la celeridad :  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ . Con estos valores se realiza un ajuste por mínimos cuadrados para obtener las aproximaciones numéricas a las derivadas parciales de 1er. orden  $\partial C / \partial x$  y  $\partial C / \partial y$ , a partir de los cuales se valúa la celeridad y curvatura correspondientes al punto  $P_i$  con las expresiones 93 y 94

$$C = E_1 + \frac{\partial C}{\partial x} XL + \frac{\partial C}{\partial y} YL \quad 93$$

$$CU = \left( \frac{\partial C}{\partial x} \operatorname{sen} \alpha - \frac{\partial C}{\partial y} \cos \alpha \right) / C \quad 94$$

donde :

$$E_1 = \frac{3C_1 + C_2 - C_3 + C_4}{4}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_3 + C_2 - C_1 - C_4}{2 dx}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{C_4 + C_3 - C_2 - C_1}{2 dy}$$

$$XL = X - I \cdot dx$$

$$YL = Y - J \cdot dy$$

### 5.6. Listado del Programa.

El programa " Refra " , se desarrolló en lenguaje FORTRAN-IV, y consta de un programa principal y seis subrutinas. En el listado del programa aparecen una serie de comentarios que permiten identificar la secuela del cálculo aquí propuesto.

PROGRAMA WEPRA (TAPE1, TAPE2, TAPE3)

C\*\*\*\*\*

C

PROGRAMA PARA EL CALCULO DE REFRACCION DE OLAJE POR EL METODO NUMERICO DE INTERACCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DEL RAYO DE OLA.

C

LOS DATOS QUE PUEDE EL PROGRAMA PARA EL CALCULO SON: PERIODO DE LA OLA.

C

BATIMETRIA DE LA ZONA DE ESTUDIO, Y DE ACUERDO A LA EXACTITUD DESEADA SE DAN 1, 2 O 3 MALLAS SUPERPUESTAS CON DIFERENTE PERCISION.

C

CARACTERISTICAS DE CADA UNA DE LAS MALLAS UTILIZADAS Y DIMENSIONES, COORDENADAS DEL ORIGEN, ESPACIAMIENTO ENTRE SECCIONES EN LAS DOS DIRECCIONES.

C

AVANCE DEL FRENTE EN CADA UNA DE LAS MALLAS. NUMERO DE CRUCIALES Y SUS CARACTERISTICAS Y COORDENADAS, ANGULO DE PROPAGACION Y ALTURA DE OLA.

C

LOS RESULTADOS QUE SE OBTIENEN PARA CADA UNA DE LAS MALLAS SON: COORDENADAS DE CADA CRUCIAL SOBRE EL FRENTE (MAX).

C

ANGULO DE PROPAGACION (GRADOS).

C

ALTURA DE OLA PARA CADA CANAL DE ENERGIA.

C

COEFICIENTE DE REFRACCION PARA CADA CANAL DE ENERGIA.

C

VELOCIDAD DE OLA.

C

VELOCIDAD DE GRUPO.

C

PROFUNDIDAD EN CADA PUNTO DE ORTOGONAL PERPECTIVO AL FRENTE (MAX).

C

ARCHIVOS UTILIZADOS:

C

TAPE1 BATIMETRIA MALLA # 1

C

TAPE2 BATIMETRIA MALLA # 2

C

TAPE3 BATIMETRIA MALLA # 3

C

TAPES DATOS DE ENTRADA.

C

TAPES RESULTADOS.

C

OBSERVACIONES:

C

LA MALLA # 1 SERA LA DE MAYORES DIMENSIONES

C

LA MALLA # 3 SERA LA DE MENORES DIMENSIONES

C

LA MALLA # 2 DEBE ESTAR CONTENIDA EN LA # 1

C

Y LA # 3 EN LA # 2.

C

EL AVANCE EN LA MALLA # 2 DEBE SER SUBMULTI-

C

PLE DEL AVANCE EN LA MALLA # 1. IDEM # EN # 3.

C

C\*\*\*\*\*

REAL MATV1, MATV2, PATV3

COMMON/UMD/MATV1(8), MATV2(1,1), PATV3(1,1), C(4), XLEID(12)

COMMON/ODS/CRX(200), BATMAT(200), T, AV(3)

COMMON/TRI/CXY, NGC, PAX, N, HIT, NFESC

COMMON/CGA/VDX(3), VCY(3), DX(3), DY(3), YG(3), YC(3), XB(3), YB(3), NN

1, NN(3), NN(3)

DIMENSION X(400), Y(400), A(400), CE(400), CE(400), AMP(400), XP(400)

1, YP(400), CGP(400), H(400)

C\*\*\*\*\*

C XLEID ES EL LETREDO DE IDENTIFICACION (12A6)  
 C TT ES EL PERIODO DE LA OLA, EN SEG.  
 C NRA ES EL NUMERO DE RAYOS.  
 C NM ES EL NUMERO DE MALLAS. (NM MENOR O IGUAL A 3)  
 C NFESC ES EL PARAMETRO QUE INDICA CADA CUANTOS FRENTES DE LOS QUE  
 C SE CALCULEN, SERAN ESCRITOS  
 C FORMAT (F5.1,315)

```

*****
  READ(5,400) XLEID
400  FORMAT(12A6)
  WRITE(6,200) XLEID
  FORMAT(1M1,120(1M*))///T50,*,#PERIODO DE LA OLA, ///11,*,15
  1///120(1M*)///)
  FEAT(5,20) TT,NRA,NF,NFESC
  T=TT
  20  FORMAT(F5.1,315)
  WRITE(6,21) TT,NRA,NF,NFESC
  21  FORMAT(F5,*,PERIODO=*,F5.1,*,SEG=,T5,*,NUMERO DE RAYOS=,I5,
  *,NUMERO DE MALLAS=,I5/T5,*,NFESC=*,I5/)

```

```

26  DO 1000 I=1,NM
*****
C AV(I) AVANCE DEL RAYO EN LA MALLA I
C X0(I) ES LA ABSCISA DEL ORIGEN DE LA MALLA I RESPECTO AL EJE X
C RA PRINCIPAL DE REFERENCIA.
C ICEN (ORCENADA).
C FORMAT (F5.1,2F10.3)

```

```

  READ(5,402)AV(I),X0(I),Y0(I)
402  FORMAT(F5.1,2F10.3)
  CALL MATCEL (I)
  WRITE(6,403)I,AV(I),I,X0(I),I,Y0(I)
403  FORMAT(I5,*,AV=,I5,*,*,F5.3,*,X0=,I1,*,*,F10.3,*,Y0=,I1,
  *,*,F10.3)
  WRITE(6,13)I,PM(I),I,NN(I),I,DX(I),I,DY(I)
  13  FORMAT(I5,*,PM=,I5,*,*,I5,*,*,I5,*,*,I5,*,*,DX=,I1,*,*,F10.3,
  *,*,DY=,I1,*,*,F10.3)
1000 CONTINUE
*****

```

```

C LECTURA DE LAS CONDICIONES INICIALES. FRETE INICIAL (MAX=)
C SON LOS DATOS DE CADA UNA DE LAS ORTOGONALES:
C X(I) Y Y(I) SON LAS COORDENADAS DEL PUNTO INICIAL.
C A(I) ES EL ANGULO DE PROPAGACION DE LA ORTOGONAL EN GRAS -
C K05
C AMP(I) ES LA ALTURA DE OLA EN EL CANAL DE ENFUECA FORMADO
C POR LAS ORTOGONALES I Y I-1.
C FORMAT (4F10.3)

```

```

*****

```

```

DO 15 L=1,NPA
READ(5,6)X(1),Y(1),A(1),AMP(1)
FCRPA(1) = (4F10.4)
PA=1
M=L
C
15 CPLL KAYN(1),Y(1),A(1),CF,CG,F,ND,Y(1),CG(1),NP)
CONTINUE
STOP
END
    
```

OLIC REFERENCE MAP (L=1)

SN	TYPE	RELLOCATION					
	REAL	ARRAY		10547	AMP	REAL	ARRAY
	REAL	ARRAY	DO	310	BATVAT	REAL	ARRAY
	REAL	ARRAY	END	10107	CE	REAL	ARRAY
	REAL	ARRAY		11027	LCP	REAL	ARRAY
	REAL	ARRAY	DO	0	CRY	REAL	TRIP
	REAL	ARRAY	CUA	11	DY	REAL	ARRAY
	REAL	ARRAY		12624	I	INTEGER	
	INTEGER			3	MATV1	REAL	ARRAY
2	REAL	ARRAY	END	26115	MATV3	REAL	ARRAY
	INTEGER		T-1	4	MII	INTEGER	TRIP
	INTEGER	ARRAY	CUA	3	N	INTEGER	TRIP
C	INTEGER		TR1	1	NGC	INTEGER	TRIP
	INTEGER		CUA	34	NN	INTEGER	ARRAY
	INTEGER			12623	NSA	INTEGER	
	REAL		DO	12622	TI	REAL	
	REAL	ARRAY	CUA	1	VY	REAL	ARRAY
	REAL	ARRAY		27	XB	REAL	ARRAY
D	REAL	ARRAY	END	17367	XP	REAL	ARRAY
	REAL	ARRAY	CUA	13447	Y	REAL	ARRAY
	REAL	ARRAY	CUA	20207	YH	REAL	ARRAY
	REAL	ARRAY	CUA				

1 MODF 6204 TAPE2 10260 TAPE3 2054

6 FMT TYPE ARG 1 11

ABELS

FMT	12575	13	FMT	0	15
FMT	12514	21	FMT	0	26
FMT	12536	402	FMT	12552	403
FMT		0	1000		

SUBROUTINE PAVN(X,Y,A,AMP,CE,CG,H,IP,YF,CGF,PI)

C\*\*\*\*\*

C SUBROUTINA QUE CONTROLA EL CALCULO DE RESULTADOS E IMPRESION DE  
 C LES MISMOS. VERIFICA SI SE CONTINUA O NO EL CALCULO  
 C DEL FRENTE MAX+1.

C\*\*\*\*\*

REAL MATV1,MATV2,MATV3  
 COMMON/UND/MATV1(6,14),MATV2(1,1),MATV3(1,1),C(4),PLLI(12)  
 COMMON/DOS/CXX(20),BATMAT(20),I,AV(3)  
 COMMON/TRI/CXY,NGO,MAX,N,MIT,NFESC  
 DIMENSION X(1),Y(1),A(1),AMP(1),CE(1),CG(1),IP(1),YF(1),CGF(1),H(1)  
 NPR=NFESC  
 IF(NFESC.EQ.1) NPR=2

ANG=A(1)  
 A(1)=A(1)+C\*.0174537525  
 CALL SUPER(X(1),Y(1),A(1),CU,LC)

16

IF(LL-3)GOTO 15  
 CE(1)=CXY  
 CALL CALCG(Y,CXY,CGE,HEI)  
 CG(1)=CGE  
 H(1)=HEI

403

WRITE(6,403)XLEID,I,N,MAX,Y(1),Y(1),ANG,AMP,CE(1),CG(1),H(1)  
 FDRPAT(1H),T6,12AC7IT,PPERIODC=\*,F5-1,\*,SEGO,C,\*,FRAYO NO. \*,I3/15,  
 1\*MAX,\*,5X,\*,4,\*,6X,\*,Y,\*,8X,\*,ANGLO=,5X,\*,ALTUFAR,\*,4X,\*,CEL=,7),  
 2\*CGE,\*,7X,\*,PROF,\*,6X,\*,CREP=,17,\*,2F9.2,\*,E11,2,\*,4F10.3)

IF(N.EQ.1) GO TO 3

C CALCULO DE LA DISTANCIA (90) ENTRE LAS ORTOGONALES X Y L-1  
 C SOBRE EL FRENTE MAX+1.

DISTG=(X(1)-XP(1))\*\*2+(Y(1)-YP(1))\*\*2  
 DISTO=SQRT(DISTG)  
 MAX=MAX+1

C EL LIMITE ACTUAL EN EL NUMERO DE FRENTE ES 400.

IF(MAX-400)399,15,15

399

LL=1  
 IF(NP.NE.1) CALL VERIF (X(MAX-1),Y(MAX-1),LL)  
 CALL MOVE (X,Y,A,CE,CG,H,CU,LL)  
 IF(H(MAX).LT.C.3)GO TO 15  
 IF(MIT.EQ.3) GO TO 15

ANGLE=A(MAX)+57.29577951  
 XXX=X(MAX)  
 YYY=Y(MAX)  
 IF(MAX.NE.1) AMP(MAX)=O.  
 IF(MAX.NE.NPP) GO TO 22  
 NPR=NPR+NFESC  
 IF(N.EQ.1) GO TO 21  
 IF(NP.LT.MAX) GO TO 21

C CALCULO DE LA DISTANCIA (18) ENTRE LAS ORTOGONALES X Y L-1

```

C MEDIDA SOBRE EL FRETE MAX.
C
DIST=(X(MAX)-XP(MAX))*#2+(Y(MAX)-YP(MAX))*#2
DIST=SQRT(DIST)
REF=DIST/DISTO
IF(DIST.EQ.O.) REF=.001
CREF=1./REF

C CALCULO DE COEFICIENTE DE ARRASTE Y ALTURA DE OLA.
C
RAP2=(CG(MAX)+CGP(MAX))/(CG(1)+CGP(1))
AMP(MAX)=AMP(1)/SQRT(REF*RAP2)
21 WRITE(6,12) MAX,X,X,Y,Y,CREF,AMP(MAX),REF,AMP(1)
12 FORMAT(I7,2F9.2,F11.2,5F10.3)
C
22 IF(INGO.EQ.1) GO TO 3
15 WRITE(6,13)
13 FORMAT(I5,*RAYO DETENIDO*)
C
NP=MAX-1
DO 1 I=1,NP
XP(I)=X(I)
YP(I)=Y(I)
CGP(I)=CG(I)
1 CONTINUE
RETURN
END
    
```

OLIC REFERENCE MAP (R=1)

S

SN	TYPE	RELOCATION	ADDRESS	OPERATION	DATA TYPE	ARRAY	OPERANDS
	REAL	ARRAY	F.P.	0 AMP	REAL	ARRAY	F.P.
	REAL			342 ZFLL	REAL		
	REAL	DDS		310 BATHAT	REAL	ARRAY	F.P.
	REAL	ARRAY	UND	0 CE	REAL	ARRAY	F.P.
	REAL	ARRAY	F.P.	346 CPE	REAL		
	REAL	ARRAY	F.P.	347 CREF	REAL		
	REAL			0 CXY	REAL	ARRAY	DDS
	REAL	TRI		345 CYS	REAL		
0	REAL			0 F	REAL	ARRAY	F.P.
	REAL			351 I	INTEGER		
	INTEGER			0 P1V1	REAL	ARRAY	F.P.
2	REAL	ARRAY	UND	26115 MATV3	REAL	ARRAY	F.P.
	INTEGER			4 BIT	INTEGER		TR
	INTEGER	TRI		5 NFESC	INTEGER		
	INTEGER	TRI		341 NP	INTEGER	*UNDIF	
	INTEGER	F.P.		332 NPR	INTEGER		
	REAL			348 REF	REAL		
	REAL	DDS		0 X	REAL	ARRAY	F.P.
0	REAL	ARRAY	UND	0 XP	REAL	ARRAY	F.P.

SUBFCUTINE MOVE (X,Y,AA,CE,CG,H,CG,LL)

C\*\*\*\*\*

C SUBROUTINA QUE EFECTUA EL AVANCE DEL =YS= LSI=LSI=NSC=...  
C MENTE LA ECUACION ( )

C\*\*\*\*\*

C REAL MATV1,MATV2,MATV3

C COMMON/UNO/MATV1(61,140),MATV2(1,1),MATV3(1,1),L=1,2,3

C COMMON/DCS/CXX(200),BAMAT(200),T,AV(3)

C COMMON/TRI/CXY,NGG,MAX,NN,HIT,NFESC

C COMMON/COA/VDX(3),VDY(3),VX(3),VY(3),X(3),Y(3),Z(3),H(3),

C 1,MM(2),NN(3)

C DIMENSION Y(1),Y(1),A(1),CE(1),H(1),CG(1)

C VA=AV(1)

C IF(MAX=2) 102,102,104

102 CUBAR=CU

CEBAR=CE\*(MAX-1)

104 M=MAX-3

LF=IFIX((AV(1)/VA))+1

NGG=1

C

C ITERACION PARA CALCULO DE LOS PUNTOS... SI ESTAMOS EN LA PALLA... LF=...

C SI ESTAMOS EN OTRA PALLA SE CALCULAN... LF=1... PUNTOS...  
C

C DO 41, MX=2, LF

HIT=1

C

C ITERACION PARA EL CALCULO DE CEBERIDAD Y CUMPLATE... HASTA SATISFACER

C LAS CONDICIONES DE ERROR MAXIMO PERMISIBLE.

C

DO 20, IT=1, 20

D=VA\*1+CEBAR

DELA=CUBAR\*D

AA=ALX\*(M)+DELA

DEL2=DELA/2

ABAR=A\*(MX+M)+DEL2

CORD=D

IF(ABS(DEL2).GT..001) CORD=D\*(DEL2)/D

DELX=CORD\*COS(ABAR)

DELY=CORD\*SIN(ABAR)

XX=X\*(MX+M)+DELX

YY=Y\*(MX+M)+DELY

IF(XX.LE.XC)IF(CEBAR.NE.CG)IF(MX.GE.17)GO TO 17

IF(YY.LE.YC)IF(CEBAR.NE.CG)IF(MY.GE.17)GO TO 17

CALL SUPER (XX,YY,AA,CGU,LL)

IF(NGG.EQ.2) GO TO 17

C

C CALCULO DE PROMEDIOS Y VERIFICACION DEL ERROR.

C

CEBAP=CEBAR

CEBAR=(CE\*(MX+M)+CXY)/2

VARCE=ABS(CEBAR-CEBAP)/CEBAP

IF(CXY) 17, 17, 10

CUBAR=(CU+CGU)/2

IF(LI=1) 17, 17, 10

91

```

37 CUUPP=CUBAR
5 IF(MAX=2) 7,7,9
7 IF(IT=1) 20,20,9
9 IF(ABS(CUUP-CUBAR)-(,00009/D)) 14,14,20
19 IF(VARCE.LT.C05) GO TO 6
20 CUUP=CUBAR

```

```

C IF(ABS(CUUPP-CUBAR)-(,00009/D)) 16,16,17
C

```

```

C SI MIT=3 O NGO=2 EL RAYO SE DETIENE. PUEDE SER POR SALIRSE DE
C LA ZONA DE ESTUDIO, POR CURVATURA NO CONVERGENTE A UN VALOR O
C POR PROFUNDIDAD MENOR DE 0.3 M.
C

```

```

17 MIT=3
GO TO 38
C

```

```

C LA CURVATURA OSCILA ENTRE LOS VALORES Y CALCULA LA ORTOGONAL
C CON UN VALOR PROMEDIO.
C

```

```

18 CUBAR=(CURAP+CUUP)/2.
IF(LF.EQ.2) GO TO 20
IF((X.EQ.LF) GO TO 30
MXM)=MX-1
MAXM)=MAX-1

```

```

31 WRITE(6,31) MXM1,MAX,-MXM1
FORPAT(18,CURVATURA APROXIMADA PARA EL FRENTE AUXILIAR.
1 12, ENTRE LOS FRENTE #13, Y #131
GO TO 6
30 WRITE(6,32) MAX
32 FORPAT(18,CURVATURA APROXIMADA PARA MAX.
GO TO 41

```

```

6 NGO=1
X(M+MX+1)=XX
Y(M+MX+1)=YY
A(M+MX+1)=AA
CU=CLU

```

```

41 CONTINUE
C

```

```

C COORDENADAS (X,Y), ANGULO Y CELERIDAD DEL RAYO PARA EL FRENTE MAX.
C

```

```

X(MAX)=XX
Y(MAX)=YY
A(MAX)=AA
CE(MAX)=CXY
C

```

```

CALL CALCG (T,CXY,CGE,FE)
H(MAX)=FE
CG(MAX)=CGE

```

```

38 RETURN
END

```

LIC REFERENCE MAP (R=1)



93

```

YB(I)=YB(I)+FPH(I)-I*DX(I)
YR(I)=YB(I)+CAN(I)-I*DY(I)
MX=HM(I)
NY=HN(I)

```

C

REWIND I

```

*****

```

C

GENERACION DE LAS MATRICES DE CELERIDAD MATV

C

LECTURA DE DATOS DE BATIMETRIA EN LA CINTA 1

C

SE LEEN DE LA SIGUIENTE FORMA :

C

KK(I) ALUCOS DE MM(I) ELEMENTOS RECORRIDOS EN FLUATL  
(9F6.2,5X).

C

ES DECIR SI MM(I) ES 3 Y MM(I) ES 4 SON

C

0.0	10.0	15.0	30.0
0.0	11.2	17.6	25.5
0.0	9.3	14.8	25.7
0.0	8.4	13.5	27.3

C

C

C

C

```

*****

```

DO 3001 J=1,NY

READ(I,30)(BATMAT(I),J)=2,FPH)

30

FORMAT(9F6.1,8X)

DO 2001 II=1,FX

IF(BATMAT(II))10,10,14

14

IF(BATMAT(II)-AP) 6,5,5

5

BATMAT(II)=C\*(I)

GO TO 9

9

XP=BATMAT(II)

K\*XF

IF(K.NE.0) GO TO 11

BATMAT(II)=XP\*(XX(I)

GO TO 9

11 BATMAT(II)=C\*(K+1)\*(XP-FLUAT(K))\*(C\*(K+1)-C\*(I-1))

10 IF(BATMAT(II).LE.C.C) BATMAT(II)=C.C

IF(I-2) 15,10,17

9

C

C

MATV1 ES LA MATRIZ DE CELERIDADES DE LA MALLA 1

C

MATV2 ES LA MATRIZ DE CELERIDADES DE LA MALLA 2

C

MATV3 ES LA MATRIZ DE CELERIDADES DE LA MALLA 3

C

C

C

C

C

C

END

## SUBROUTINE SUPER (X,Y,A,CO,LL)

```

C*****
C
C SUBROUTINA QUE EJECUTA LA LOCALIZACION DE LA CELDA DE LA MALLA (CO)
C EN QUE SE ENCUENTRA EL PUNTO DE COORDENADAS (X,Y). EL
C CALCULO DE LOS COEFICIENTES USADOS EN LAS ECUACIONES DE
C CELERIDAD Y CUFVATURA.
C CALCULO DE LA CELERIDAD Y CUFVATURA CON LOS COEFICIENTES
C I=1 Y ( ) . RESULTADO DE UN AJUSTE DE MINIMOS CUADRADOS
C A UN PLANO.
C*****
REAL MATV1,MATV2,MATV3
COMMON/UNO/MATV1(81,140),MATV2(1,1),MATV3(1,1),A(4),LL(1)
COMMON/DOS/CYX(200),BATHAT(200),T,AV(5)
COMMON/TRI/CYX,YGOS,MAX,N,MII,NFEL
COMMON/CUA/VOX(3),VDY(3),VX(3),VY(3),XO(3),YO(3),X(3),Y(3),
1,MM(3),MM(3)
DIMENSION ET(3)
LL=1
IF(MM(NE-1)) CALL VERIF (X,Y,LL)
C
IF(LL.EQ.4) GO TO 11
X=X-XO(LL)
Y=Y-YO(LL)
I=X*VDX(LL)+1
J=Y*VDY(LL)+1
IF(LL.EQ.1) GO TO 22
ZI=0.0
ZJ=0.0
22 FI=I
FJ=J
XL=X-(FI-1)*VX(LL)
YL=Y-(FJ-1)*VY(LL)
IF(MAX-1) 1,1,4
IF(FI-FJ) 1,2,1
2 IF(ZJ-FJ) 1,3,1
1 ZI=FI
ZJ=FJ
501 IF(LL=2) 501,502,503
C(1)=MATV1(I,J)
C(2)=MATV1(I+1,J)
C(3)=MATV1(I+1,J+1)
C(4)=MATV1(I,J+1)
GO TO 317
502 C(1)=MATV2(1,J)
C(2)=MATV2(I+1,J)
C(3)=MATV2(I+1,J+1)
C(4)=MATV2(1,J+1)
GO TO 317
503 C(1)=MATV3(I,J)
C(2)=MATV3(I+1,J)
C(3)=MATV3(I+1,J+1)
C(4)=MATV3(I,J+1)
C
C CALCULO DE COEFICIENTES DETERMINADOS POR EL AJUSTE.

```

95

```

317 E(1)=(C(1)+C(2)-C(3)+C(4))/4
      E(2)=(C(3)+C(2)-C(1)-C(4))/2
      E(3)=(C(4)+C(3)-C(2)-C(1))/2
3     E=E(2)+VDX(LLL)
      EY=F(3)+VDY(LLL)

```

C

C

C

C

C

CALCULO DE CELEPIDAD Y CLPVATUPA.

```

CXY=E(1)+EX*XL+EY*YL
IF(CXY.LE.0.0) CXY= 0.1
CU=(EY*SIN(A)-EY*COS(A))/CXY
X=X+XG(LLL)
Y=Y+YG(LLL)
GO TO 19

```

11

19

NGO=2

RETURN

END

## IDLIC REFERENCE MAP (R=1)

IS

IF

SN	TYPE	RELOCATION						
1A7	REAL	F.P.	521	AV	REAL	ARRAY	LLS	
	REAL	ARRAY	26116	C	REAL	ARRAY	UNL	
	REAL	F.P.	0	CXX	REAL	ARRAY	DOS	
	REAL	TRI	6	DX	REAL	ARRAY	CUA	
	REAL	ARRAY	175	E	REAL	ARRAY		
	REAL	CUA	174	EY	REAL			
	REAL		170	FJ	REAL			
	INTEGER		164	J	INTEGER			
	INTEGER	F.P.	0	MATV1	REAL	ARRAY	UND	
2	REAL	ARRAY	26115	MATV3	REAL	ARRAY	LFD	
	INTEGER	TRI	4	MIT	INTEGER		TRI	
	INTEGER	ARRAY	3	M	INTEGER		TRI	
C	INTEGER	TRI	1	NGC	INTEGER		TRI	
	INTEGER	CUA	34	NN	INTEGER	ARRAY	CUA	
	REAL	DOS	0	VDX	REAL	ARRAY	CUA	
	REAL	ARRAY	0	X	REAL		F.P.	
	REAL	ARRAY	171	XL	REAL			
D	REAL	ARRAY	14	XG	REAL	ARRAY	CUA	
	REAL	F.P.	25	Yc	REAL	ARRAY	CLS	
	REAL		17	YD	REAL	ARRAY	CUA	
	REAL		166	ZJ	REAL			

TYPE ARG5

REAL 13 LIBRARY

SIN

REAL

LIBRARY

F

3

SUBROUTINE VERIF (P=1,LL)

```

C*****
C
C   SUBROUTINA QUE VERIFICA EN QUE PALLA SE ENCUENTRA EL PUNTO DE
C   COORDENADAS ( X , Y ).
C*****
C   COMMON/COA/VDX(3),VDY(3),DX(3),DY(3),XC(3),YC(3),XF(3),YF(3),NM
C   1,MM(3),NN(3)

```

```

C
C   DO 10 LA=1,NM
C   IF(X,GT,YB(LA)) GO TO 111
C   IF(Y,GT,YB(LA)) GO TO 111
C   IF(V,LT,YO(LA)) GO TO 111
C   IF(X,LT,YO(LA)) GO TO 111
10 CONTINUE

```

```

C
C   GO TO 72
111 IF(LL-2) 71,72,72
71 LL=4
   GO TO 44
72 LL=LA-1
44 PEOF=
   END

```

COLIC REFERENCE MAP (P=1)

S  
F

SN	TYPE	FELOCATION						
	REAL	ARRAY	COA	11	NY	REAL	ARRAY	COA
	INTEGER	ARRAY	COA	0	LE	INTEGER	ARRAY	F.P.
	INTEGER	ARRAY	COA	30	NM	INTEGER	ARRAY	COA
	INTEGER	ARRAY	COA	0	VDX	REAL	ARRAY	COA
	REAL	ARRAY	COA	0	X	REAL	ARRAY	F.P.
	REAL	ARRAY	COA	14	YD	REAL	ARRAY	COA
	REAL	ARRAY	F.P.	25	YF	REAL	ARRAY	COA
	REAL	ARRAY	COA					

ABELS

30 44  
22 111

0 71

INDEX	FROM-TO	LENGTH	PROPERTIES
LA	12 17	128	OPT EXITS

KS: LENGTH  
31

SUBROUTINE CALCG(T,CE,CG,ME)

```

C*****
C
C SUBROUTINA QUE CALCULA LA CELERIDAD EN GRUPO Y PROFUNDIDAD
C DEL PUNTO ( X , Y ) DEL FRENTE MAX.
C*****
C
C
C

```

```

MINF=C.780655*T*T
WL=CE*T
WLR=CE/(1.50131*T)
IF(WLR.GT.99993) GO TO 1
ME=0.07597745*WL*ALCG(1.+WLR)/2(1.-WLR)
DISA=1./((1.-WLR+WLR)
DEN=0.1591549*WLR*DISA*WL/ME
CG=CE*(1.+DEN)/(2.*DEN)

```

```

GO TO 2
1
CG=CE/2
ME=MINF
2
RETURN
END

```

DLIC REFERENCE MAP (R=1)

S  
G

SN	TYPE	RELOCATION			
	REAL	F.P.	0	CG	REAL
	REAL	F.P.	51	DISA	REAL
	REAL	F.P.	48	MINF	REAL
	REAL	F.P.	47	WL	REAL

```

TYPE ARGS
REAL 1 LIBRARY

```

ABELS

36 2

LENGTH 538 43  
 ZC00B CH USED

## 6. EJEMPLO DE APLICACION

A continuación se ilustra con un caso práctico la utilización del programa "Refra" y la manera como éste proporciona la salida de resultados.

La zona de Kobah en el estado de Quintana, Roo., es el sitio de interés para los estudios de refracción de nuestro ejemplo. El análisis de la información estadística indica que la dirección Sur y período de 8 segundos es la de mayor incidencia en la zona y por este motivo es la que aquí se estudia.

Para la digitización de batimetría se eligió un sistema coordinado cuyo eje Y es paralelo a la playa con dirección -- positiva hacia el NE y el eje X tiene dirección positiva hacia el SE. Para el ejemplo se emplea la segunda modalidad del programa "Refra" es decir, la batimetría se representa mediante dos mallas. La primera malla tiene su origen coincidiendo con el del sistema de ejes arriba mencionado y cuenta con 20 secciones paralelas al eje Y --MM(1)-- y con 74 secciones paralelas al eje X --NN(1)-- . Tales secciones tienen separaciones --DX(1) y DY(1)-- de 500 metros. Esta malla se eligió con esas separaciones debido a que su finalidad era la de representar la zona de aguas profundas así como las regiones que no son de interés para nuestro estudio. La segunda malla tiene su -- origen en  $X_0(2) = 2,130$  y  $Y_0 = 6,500$  respecto de los ejes principales; está formado por 12 secciones paralelas al eje Y --MM(2) y 26 secciones paralelas al eje X --NN(2)-- con separaciones --DX(2), DY(2) de 100 m. El objeto de utilizar esta segunda malla es representar con mayor detalle la variación de la profundidad en aguas superficiales, lo que permitirá detectar fenómenos que pudieran generarse en esta zona. Tal es el caso --

del fenómeno de reflexión total sobre el canal de navegación que se presentó en el estudio de refracción realizado para el puerto de Altamira, Tamps., para la dirección SE y período de 10 segundos (Vease plano anexo ). En este plano de refracción puede observarse como la ortogonal 8 al incidir sobre el canal de navegación se ve sometida a reflexión total, ésto ocasiona una ampliación considerable del ancho del canal de energía formado por esa ortogonal y la ortogonal 7. Por tal motivo, la altura de ola asociada a dicho canal se ve bastante disminuída. Por otra parte, el cruce de ortogonales provocado también por la reflexión puede tener las interpretaciones contempladas en el capítulo 3. En el canal de energía se trazaron las ortogonales 7' y 7" como auxiliares. Es posible observar como la ortogonal 7" penetra al canal de navegación e inmediatamente quiebra describiendo posteriormente una trayectoria paralela al eje del canal. El mencionado quiebre se debe a la refracción sufrida por la ortogonal al penetrar al canal de navegación. El hecho de que las mallas no sean más cerradas obedece a la disponibilidad de memoria en la computadora, la que desde luego está limitada.

Para la zona de Kobah, el frente de ola inicial empleado tiene una longitud de 6,200 metros y está situado entre las batimétricas 58 y 150. Se definieron sobre el mencionado frente los puntos iniciales de 32 ortogonales (NRA) separadas entre sí una distancia de 200 metros.

La zona de cálculo de refracción es reducida en cuya batimetría se observa una pendiente considerable, por ello, para la zona de aguas profundas se eligió un avance de una longitud de ola -L- (longitud de ola local) que es un avance me

dio ya que en cálculos de refracción para otras zonas con pendiente más suave se han utilizado avances hasta de 3 longitudes de ola local con resultados satisfactorios.

La relación existente entre los avances de frentes de ola, en las zonas empleadas para el cálculo de refracción, debe ser un número entero tal y como se menciona en el capítulo 5. Bajo esta restricción se tenían las siguientes posibilidades: 0.5, 0.33, 0.25, 0.2 y 0.1 de longitud de ola local y -- buscando racionalizar el tiempo de cómputo (lo oneroso del método) se optó por un avance de frente de ola -AV(2)- intermedio, 0.25 longitudes de ola, sin detrimento de la precisión.

Con la finalidad de racionalizar tanto la salida de resultados como el tiempo de ejecución sin menoscabo de la precisión, se limitan el número máximo de ortogonales y el avance mínimo de frentes de ola; con la misma finalidad, se imprimieron resultados para cada 3 frentes de ola de cálculo ----- (NFBSO).

A continuación se presentan los resultados de salida del cálculo de refracción de algunas ortogonales así como el plano de refracción trazado a partir de los resultados de tal -- cálculo.

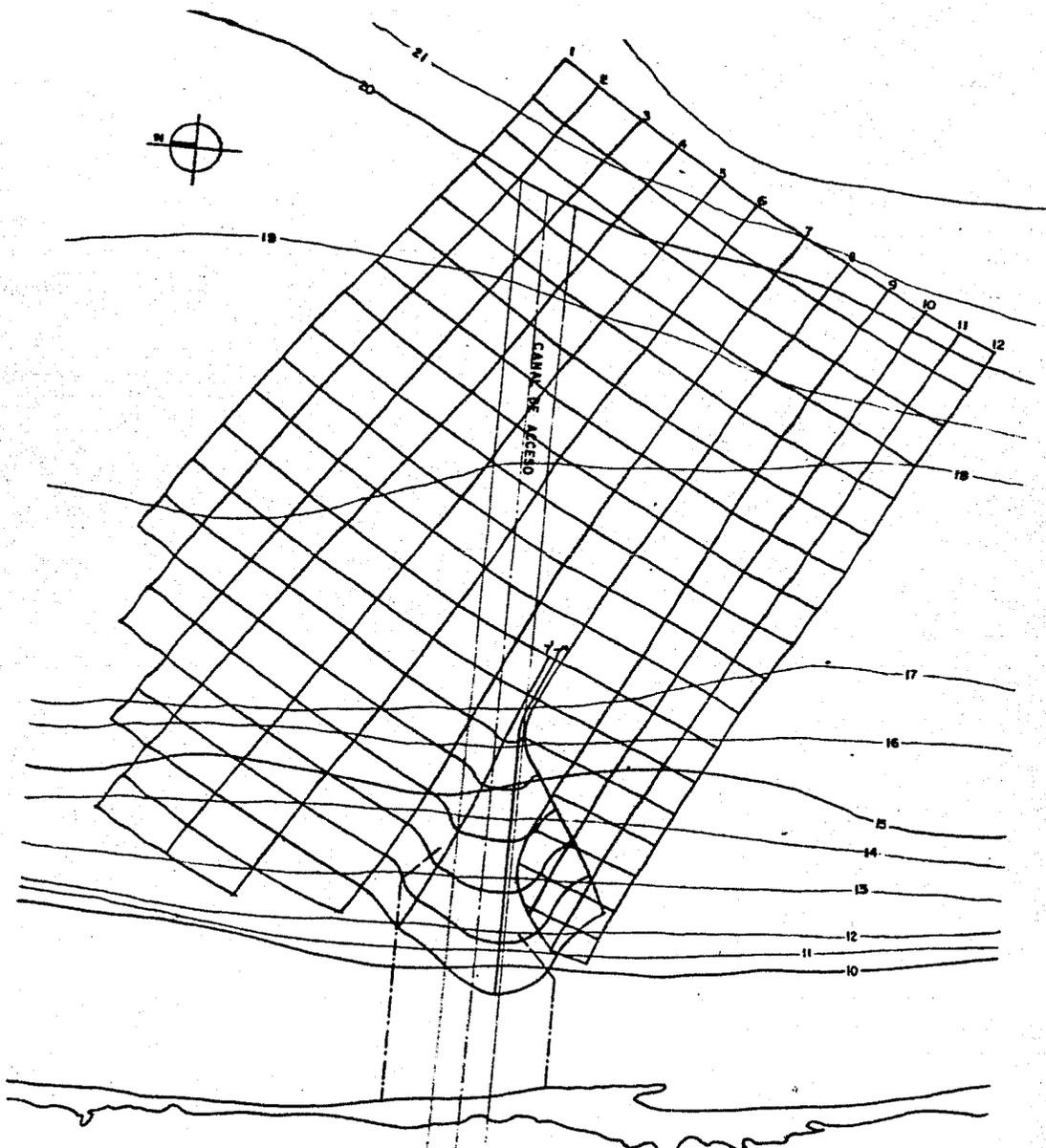
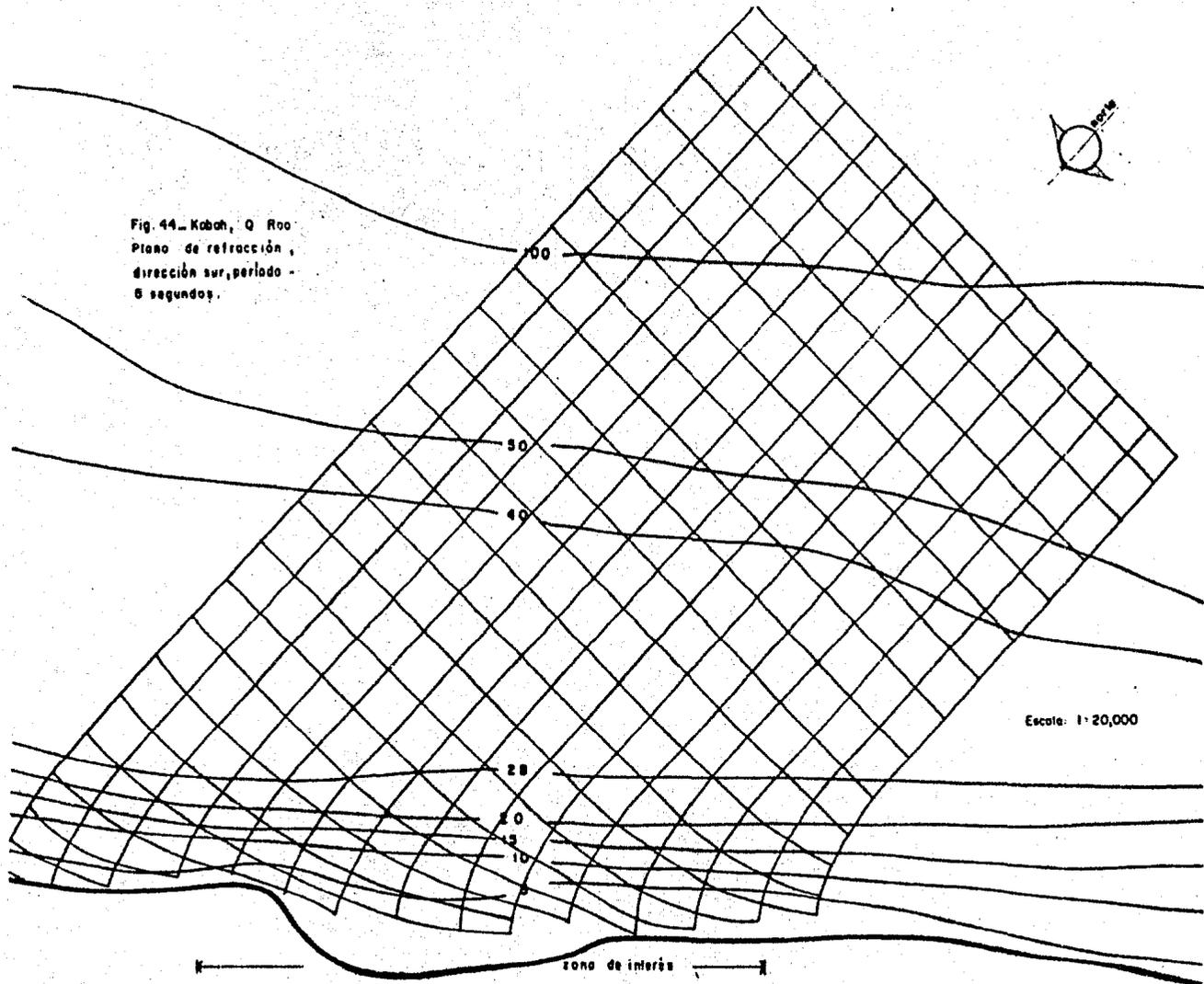


Fig. 2 — Plano de refracción de Altamira, Tompa, dirección SE, período 10 seg.

Esc. 1 : 33 333 1/3

Fig. 44.-Koboh, Q Roo  
Plano de refracción,  
dirección sur, período -  
6 segundos.



REFRAC= A.OSEC

RAYO NO. 10

NO	X	Y	ANGULO	ALTURA	CEL	CGR	PROF.	CPEN
1	7121.04	5121.04	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	
3	7041.18	5222.78	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
6	6970.98	5333.08	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
9	6910.78	5444.14	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
12	6870.57	5554.39	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
15	6840.37	5667.54	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
18	6820.17	5776.74	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
21	6813.97	5889.99	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
24	6812.77	6001.14	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
27	6811.56	7012.24	135.00	.999	12.445	6.365	49.999	.999
30	6810.36	7223.02	135.00	.994	12.417	6.422	46.058	.994
33	6809.15	7433.05	135.00	.989	12.367	6.476	43.215	.989
36	6807.94	7641.51	135.00	.982	12.335	6.554	40.024	.982
39	6806.73	7849.48	135.00	.976	12.292	6.621	37.792	.976
42	6805.52	8055.59	135.00	.970	12.248	6.680	36.049	.970
45	6804.31	8260.38	135.00	.962	12.203	6.734	34.593	.962
48	6803.10	8463.53	135.00	.959	12.149	6.795	33.103	.959
51	6801.89	8665.54	135.00	.956	12.089	6.857	31.668	.956
54	6800.68	8867.11	135.00	.951	11.998	7.160	25.561	.951
57	6799.47	9037.17	141.88	.882	10.371	7.492	15.703	.882
60	6798.26	9176.57	146.53	.850	8.808	7.159	9.841	.850
63	6797.05	9272.46	153.50	.822	6.573	5.928	4.899	.822
66	6795.84	9326.26	161.56	0.800	4.295	4.086	1.922	.800
69	6794.63	9357.60	167.44	0.000	2.701	2.658	.755	.658

RAYO DEFINICION

MAX	X	Y	ANGULO	ALTURA	C&L	CCR	PREF.	CPFF
1	8564.15	6564.15	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	
3	8455.39	6737.00	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
6	8244.15	6948.20	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
9	8032.99	7159.40	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
12	7821.75	7370.60	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
15	7610.51	7581.80	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
18	7399.27	7793.00	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
21	7188.03	8004.21	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
24	6976.79	8215.41	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
27	6765.55	8426.61	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
30	6554.31	8637.81	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
33	6343.07	8849.01	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
36	6132.83	9060.21	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
39	5921.59	9271.42	135.00	1.000	12.443	6.369	49.654	1.000
42	5710.35	9482.62	135.00	.996	12.435	6.367	48.333	1.000
45	5499.11	9693.82	135.00	.993	12.413	6.375	45.671	.999
48	5287.87	9905.02	135.14	.988	12.367	6.360	41.775	.997
51	5076.63	10116.22	135.32	.980	12.324	6.375	39.277	.995
54	4865.39	10327.42	135.46	.974	12.277	6.362	37.155	.994
57	4654.15	10538.62	135.62	.968	12.223	6.370	35.235	.992
60	4442.91	10750.82	135.81	.961	12.159	6.365	33.342	.989
63	4231.67	10962.02	136.11	.952	12.093	6.352	30.567	.985
66	4020.43	11173.22	136.44	.943	11.928	7.001	28.620	.974
69	3809.19	11384.42	136.25	.905	11.352	7.329	21.485	.951
72	3597.95	11595.62	140.25	.950	10.064	7.481	17.264	.925
75	3386.71	11806.82	145.33	.955	9.227	7.302	11.132	.875
78	3175.47	12018.02	157.36	.963	6.850	6.142	5.445	.840
81	2964.23	12229.22	157.61	1.089	5.075	4.786	2.787	.823
84	2752.99	12440.42	161.81	1.712	3.430	3.707	1.545	.814
87	2541.75	12651.62	163.21	1.232	3.140	3.073	1.027	.813
90	2330.51	12862.82	164.65	1.466	2.560	2.524	.678	.811
93	2119.27	13074.02	166.24	1.672	2.086	2.060	.444	.810

RAYO DETENIDO

MAX	X	Y	ANGULO	ALTLRA	COL	CGR	PROF.	CPEF
1	5480.00	7460.00	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
3	9339.28	7620.88	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
6	5128.07	7632.68	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
9	0916.87	8043.28	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
12	8705.67	8254.48	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
15	8494.47	8465.68	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
18	8283.27	8676.88	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
21	8072.07	8888.08	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
24	7860.86	9099.28	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
27	7649.66	9310.48	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
30	7438.46	9521.68	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
33	7227.26	9732.88	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
36	7016.06	9944.08	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
39	6804.85	10155.28	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
42	6593.65	10366.48	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
45	6382.45	10577.68	135.00	1.000	12.445	6.365	50.001	1.000
48	6171.25	10788.88	135.02	.999	12.437	6.362	48.477	1.000
51	5960.04	10999.75	135.04	.999	12.429	6.416	46.797	.999
54	5748.84	11210.12	135.14	.998	12.394	6.467	43.533	.998
57	5538.19	11419.71	135.23	.985	12.363	6.517	41.470	.987
60	5327.60	11628.13	135.37	.979	12.317	6.586	38.917	.980
63	5117.13	11835.42	135.51	.974	12.269	6.653	36.826	.974
66	4907.16	12041.11	135.68	.967	12.213	6.722	34.914	.967
69	4697.28	12245.30	135.89	.961	12.143	6.802	32.930	.961
72	4488.61	12447.33	136.16	.951	12.052	6.893	30.906	.951
75	4279.13	12645.64	136.62	.939	11.878	7.039	27.859	.939
78	4070.72	12838.90	137.50	.918	11.667	7.179	25.008	.918
81	3867.91	13031.22	140.35	.879	10.724	7.476	17.514	.879
84	3659.07	13165.65	145.33	.871	9.470	7.369	11.961	.871
87	3483.59	13286.66	150.91	.917	8.152	6.992	8.193	.917
90	3319.82	13360.67	160.91	1.036	5.742	5.319	3.633	.933
93	3194.81	13394.75	188.13	1.232	3.860	3.735	1.576	.767
96	3108.76	13409.07	172.97	1.496	2.561	2.525	.678	.761

RAYO DETENIDO

## CONCLUSIONES.

El modelo matemático para la simulación de la propagación del oleaje desarrollado en este trabajo responde a la necesidad de automatizar, mediante un programa de computadora, la laboriosa tarea de calcular diagramas de refracción .

El método numérico utilizado, fue comparado con soluciones analíticas exactas, encontrándose diferencias menores al 0.2 por ciento. Además ha sido utilizado en diversas partes del mundo, con resultados satisfactorios.

Luego entonces, mediante la utilización del programa " Refra " se obtienen diagramas de refracción confiables ( tan precisos como se desee ) en un tiempo mínimo, sustituyendo con grandes ventajas a los métodos gráficos . Además se obtiene información acerca de la altura de ola y coeficiente de refracción la cual será sumamente útil en otros problemas de ingeniería marítima.

La flexibilidad del programa permite al usuario decidir la forma de utilización de " Refra " eligiendo : precisión en el cálculo; volumen de salida de resultados y la opción de utilizar más de una malla de batimetría.

Se recomienda utilizar esta última modalidad cuando se disponga de batimetría con diferente detalle; teniéndose un considerable ahorro en tiempo total de cálculo, amén de facilitarse la detección de fenómenos especiales (cáusticas, reflexión total, etc.).

La utilización de coordenadas en unidades de longitud referidas a un sistema de ejes principales (que propone al usuario) facilita sobremanera la interpretación de resultados.

La única limitante del programa es la capacidad de memoria -

disponible para almacenar los datos de batimetría que son las que requirieren más memoria.

Sin embargo, la interpretación de resultados debe efectuarse con mucho cuidado, siempre han de tomarse en cuenta las limitaciones propias de la teoría de la refracción. Si una ortogonal del análisis pertenece a una zona de convergencia, los valores de la altura de ola deben ser tomados con cierta reserva en virtud de no ser válidas en esta zona las hipótesis base del método numérico. En estos casos se recomienda efectuar un análisis de refracción interactuando con un mecanismo de transmisión lateral de energía (difracción) para conocer con precisión la altura de ola en esta zona. Si la ortogonal pertenece a una zona de divergencia los valores numéricos del coeficiente de refracción pueden no representar la realidad por estar muy alejadas las ortogonales adyacentes; es recomendable considerar un mayor número de ortogonales para poder representar con mayor certidumbre la realidad.

La utilización de una superficie plana -ajustada por mínimos cuadrados- en la resolución numérica de la ecuación diferencial del rayo de ola, se justifica después de haberse consultado la investigación al respecto realizada por Harrison y Wilson ( 1963 ) y Covas ( 1981 ). En ésta se concluye que después de haberse efectuado análisis con superficies de diferentes grados, la más cercana a la realidad es la superficie plana.

Los ejemplos incluidos son suficientemente ilustrativos. En el ejemplo de Kobah no se presentan fenómenos importantes, las ortogonales siguen trayectorias esperadas. En el otro ejemplo ( Altamira ) debido a la existencia del canal se presentan zonas de convergencia y divergencia, teniéndose inclusive una reflexión total; en estos casos es recomendable usar más de una malla y utilizar ortogonales auxiliares.

Finalmente, puede decirse que el cálculo numérico de diagramas de refracción tiene grandes ventajas sobre el cálculo gráfico y que éstas se incrementan conforme la batimetría se complica. Asimismo es necesario utilizar con criterio los resultados obtenidos y no perder de vista las limitaciones inherentes al método numérico.

## BIBLIOGRAFIA.

- 1.- Arthur R. S. et al., The Direct Construction of Wave Rays, - Transactions of the American Geophysical Union., Vol. 33 - No. 6 , 1952.
- 2.- Berezowsky Verduzco M., Estudio de Refracción del Oleaje en la Zona de Laguna Verde, Ver., Tesis (Ing. Civil) Facultad de Ingeniería U.N.A.M. 1973.
- 3.- Control Data Corporation, Fortran Extended Versión 4 Reference Manual, C.D.C., Publications and Graphical Division, Sunnyvale, Calif. 1981.
- 4.- Covas J. M. A. Modelos Matemáticos para Ó Estudio da Propagação e Deformação das Ondas de Gravidade O Cálculo Automático de Diagramas de Refracção, Mem. No. 555, Lab. Nal. de Engenharia Civil, Lisboa 1981.
- 5.- Crawford F. Jr. , Ondas, Ed. Reverté, Barcelona 19 .
- 6.- Facultad de Ingeniería, U.N.A.M., Apuntes de Matemáticas III, México 1980.
- 7.- Fenves S., Métodos de Computación en Ingeniería Civil, Ed. - Limusa, México 1976.
- 8.- Gaillard P., Numerical Calculation of Wave Diffraction in - Harbours with Basin of Unequal Depth; Sogreah I. C., Grenoble, Francia., Nov. 1980.
- 9.- Griswold G., Numerical Calculation of Wave Refraction, Journal of Geophysical Research, Vol. 68 No. 6, Marzo 15, 1963.
- 10.- Harrison H., Wilson W.S., Development of a Method for Numerical Calculation of Wave Refraction, Washington D.C. , U. S.- Army Coastal Engineering Research Center Technical Mem. No.- 6 , 1964.

- 11.- Horikawa K., Coastal Engineering, Ed. John Wiley & Sons, - Tokio 1978.
- 12.- Johnson J. W., O'brien M. P. e Isaacs, Graphical Construc - tion of Wave Refraction Diagrams, Washington, D.C., U. S. Na vy Departament Hidrographic Office, Publ. No. 605, 1948.
- 13.- Kraushaar e Ingard, Introducción al Estudio de la Mecánica , Materia y Ondas, Ed. Reverté, S.A., Barcelona, España 1966.
- 14.- Mc. Kraken D. D., Programación Fortran IV, Ed. Limusa, Méxi - co 1979.
- 15.- Mc. Kraken D. D. y Dorn W. S., Métodos Numéricos y Progra - mación Fortran, Ed. Limusa, México 1980.
- 16.- Pierson W. J. Jr., The Interpretation of Crossed Orthogonals in Wave Refraction Phenomena, Washington Beach Erosion Bo - ard, Tech. Mem. No. 21 1951.
- 17.- Pinl D., Beach Erosion and Sedimentation, Ed. Prentice Hall\_ Inc. 1976.
- 18.- Sotelo Avila G., Hidráulica General, Vol. I Fundamentos, Ed. Limusa, México 1979.
- 19.- Spencer A. J. M. et al., Matemáticas para Ingeniería, Vol. I, Ed. CECSA, México 1980.
- 20.- Spiegel Murray R., Análisis Vectorial, Ed. Mc. Graw Hill, Mé - xico 1969.
- 21.- Streeter V. et al., Fluid Mechanics, 7a. edición, Ed. Mc. - Graw Hill, Tokio 1979.
- 22.- U. S. Army Coastal Engineering Research Center, Shore Pro - tection Manual, Vol. I, Washington 1975.
- 23.- Wiegel R. L. Oceanographical Engineering, Ed. Prentice Hall\_ Inc., Englewood, Cliffs 1964.

## REFERENCIAS.

- 1.- Horikawa K., Coastal Engineering, pags. 7 - 9.
- 2.- Sotelo Avila G., Hidráulica General Fundamentos, pags. -  
412 y 413.
- 3.- Spiegel Murray R., Análisis Vectorial, pags. 106 - 108.
- 4.- Streeter V. et al, Fluid Mechanics, pags. 308 - 310.
- 5.- Pinl D., Beach Process and Sedimentation, pags. 48 y 49
- 6.- Horikawa K., op, cit. pags. 30 y 31.
- 7.- Pinl D., op. cit. pag. 52.
- 8.- U. S. Army Coastal Engineering Research Center, Shore Pro  
tection Manual, pags. 2-64 y 2-65.
- 9.- Idem.
- 10.- Crawford F. Jr., Ondas, pags. 192 - 194
- 11.- Pierson W. J. Jr., The Interpretation of Crossed Orthogo-  
nals in Wave Refraction Phenomena., pags. 7 y 8.
- 12.- Griswold M. Gale, Numerical Calculation of Wave Refrac -  
tion -, pags. 1715 - 1723.