UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ingeniería

28
19

# ESTABILIDAD ELASTICA EN COLUMNAS

T E S I S

Que para obtener el título de:

INGENIERO CIVIL

P r e s e n t a :

Edgardo Pascual Arauco Camargo

México, D. F. 1983

# ESTABILIDAD ELASTICA EN COLUMNAS

## CAPITULOS

CAPITULO I

# INTRODUCCION

El propósito de esta tesis, es el de interpretar el comportamiento de una columna esbelta en el rango elástico como base, para establecer criterio de diseño; este elemento puede estar sujeto a diferentes sistemas de cargas, el ingeniero civil debe conocer el comportamiento de los elementos estructurales que componen una estructura para el mejor dimensionamiento de éstas. Para el estudio de la estabilidad elástica de una columna esbelta, resulta adecuado conocer el comportamiento del elemento estructural, estudiando su respuesta bajo solicitaciones de magnitud creciente, desde que se inicia el proceso de carga hasta que se llegue a un estado de falla ; que en este caso sera el pandeo de dicho elemento que se ha de estudiar.

El estudio se basa en la ley de Hooke y se realiza mediante los métodos convencionales de análisis elástico y por medio de las fórmulas de la resistencia de materiales aplicadas en ese intervalo, los cuales no son aplicables cuando los esfuerzos sobrepasan el límite de proporcionalidad del material.

En el segundo capítulo de esta tesis donde se estudia la teoría de estabilidad; se trata del estudio referente a una columna aislada que se define como una pieza recta sometido a compresión, lo suficientemente delgado respecto a su longitud para que bajo la acción de una carga gradualmente creciente rompa por flexión lateral ó pandeo, ante una carga mucho menor que la necesaria para romperla por aplastamiento; diferenciandose de un ele-- corto sometido a compresión, aunque este cargado excéntricamente experimenta un pandeo lateral despreciable ; fallando ésta por aplastamiento como se muestra en unas fotografías realizadas en el laboratorio que se incluyen en esta parte de la tesis. En esta parte de la tesis también se define la carga crítica de Euler que es- el inicio del análisis de las columnas con efecto de esbeltéz, donde parte de una columna ideal; entendiendose por este tipo de columna compuesta por un material homogéneo de sección recta constante y sometida a una carga axial de compresión, aunque las columnas suelen tener - siempre pequeñas imperfecciones de material y de fabricación, así como una inevitable excentricidad accidental en la aplicación de la carga. Entendiéndose por esbeltéz a la reducción de resistencia de un elemento sujeto a compresión axial ó flexo-compresión, debida a -- que la longitud del elemento es grande en comparación - de las dimensiones de su sección transversal; fallan -- por inestabilidad.

En este capítulo también se estudia la columna mensionada con diferentes estados de equilibrio, como su pandeo elástico con diferentes restricciónes en sus apoyos; -- que para calcular el esfuerzo se tendrá que considerar- la longitud efectiva de cada tipo de restricción.

En el tercer capítulo se estudia el límite de la aplicación de la fórmula de Euler para la inestabilidad elástica; como la columna es un elemento estructural básico su estudio se inició hace muchos años, y el problema de la determinación de la resistencia de las piezas comprimidas aisladas, cargadas dentro del intervalo elástico fue resuelto en sus aspectos fundamentales por el -- suizo Leonhard Euler en el año de 1757, quien hizo un - análisis teórico de la carga crítica para columnas es--

beltas basadas en la ecuación diferencial de la elástica. Ahora se sabe que este análisis esta limitado hasta que las tensiones alcansen el límite de proporcionalidad, esta aclaración la hizo Lamarle en 1845. En este inciso de este capítulo se agrega una generalización para el rango inelástico.

En este capítulo también se ve un estudio basado en la fórmula de Euler para el dimensionamiento y revisión de columnas a carga axial tanto en materiales de acero como de madera; que tienen una semejanza a un requisito de una columna ideal, el cual debe ser de un material homogéneo; aunque esto no es real ya que la madera puede tener nudos y el acero llega a fabricarse con esfuerzos residuales, pero estos materiales son los más próximos a cumplir esta condición y además son de uso en las construcciones.

En el cuarto capítulo se estudian columnas esbeltas a flexocompresión, que son elementos estructurales sometidos a la acción simultánea de fuerzas normales de compresión y momentos flexionantes. El cual puede estar alrededor de uno de sus ejes centroidales y principales de sus secciones transversales o tener componentes según los dos ejes centroidales; las barras en compresión axial no existen prácticamente en estructuras reales sino que se presentan siempre acompañadas por flexión; en esta tesis se estudia únicamente las columnas flexocomprimidas de eje recto y sección transversal constante la que constituye la mayor parte de las columnas de los marcos utilizados en edificios. Este estudio que se realiza son con los materiales de más uso en el tipo de construcción realizadas en la práctica; los cuales vienen siendo el acero y el concreto reforzado.

Para el diseño de columnas a flexocompresión de acero se realiza un estudio inicial de cómo se presenta el fenómeno llegando a unos diagramas de interacción para el cálculo el cual se basa en la teoría de estabilidad de Euler. Para el diseño de columnas de concreto reforzado a flexocompresión se aplica el método de la ACI 1971, este estudio también tiene principios basados en la teoría de Euler osea en el análisis elástico de elementos sujetos a carga axial y flexión; en los cuales se utilizan unos nomogramas para encontrar un coeficiente para el uso de las fórmulas que especifica este método; las cuales se desarrollaron para una columna de comportamiento lineal pero pueden utilizarse en forma aproximada para columnas de concreto reforzado; y asi con ciertas consideraciones y con más detalle se estudia este fenómeno en el capítulo mensionado.

En el quinto capítulo complemento este estudio teórico dados desde columnas ideales hasta las columnas reales; como se estudia en los capítulos anteriores, para su mejor entendimiento y mejor aplicación agrego unos ejemplos específicos para cada inciso de los temas tratados; los cuales se encuentran detalladamente explicados para su comprensión. En estos ejemplos existen ciertas explicaciones amplias para saber utilizar los diagramas que son ayuda para el diseño; específicamente éstos diagramas son para columnas de concreto reforzado.

Como último capítulo agrego mis conclusiones a este trabajo.

# CAPITULO II

## II.- TEORIA DE ESTABILIDAD

### II.1.- INTRODUCCION

En este capítulo de la tesís estudíaremos la obtención de la carga crítica de Euler, el cual proviene o se deriva de un fenómeno de elementos esbeltos. Antes de entrar específicamente en lo que trata este inciso, explicaré este fenómeno aplicado a las columnas para su mejor entendimiento de análisis ya que siempre es necesario conocer el problema para poder estudiarlo.

Para los fines de análisis una columna puede definirse como una pieza recta sobre la cual aparece ó actúa una fuerza axial de compresión aislada y de material homogéneo; aunque las columnas reales no estan casi nunca aisladas sino ligadas con otros elementos estructurales, de manera que su comportamiento depende en gran parte, del de las estructuras en conjunto; también no estan en compresión pura, pero para el estudio, la columna aislada cargada axialmente constituye un antecedente necesario en la solución del problema, como base de diseño de columnas comprimidas a flexocompresión.

En el diseño de una columna esbelta no podemos basarnos en el cálculo de esfuerzos, sino en la investigación del estado de equilibrio entre las cargas exteriores e interiores de la columna. El que eventualmente, puede llegar a ser inestable, para valores reducidos de los esfuerzos; la resistencia de una columna a compresión no depende de la magnitud de los esfuerzos, sino de las condiciones que originan el equilibrio inestable, caracterizado por incrementos muy grandes de las deformaciones correspondientes a pequeños aumentos de la carga. La característica fundamental del fenómeno de pandeo es precisamente, la pérdida repentina de resistencia que acompaña a la aparición de fuertes deformaciones, independientemente de que los esfuerzos hayan o no llegado al punto de fluencía en el instante en que comienza la columna a torcerse encorvandose lateralmente; iniciado ésto los desplazamientos laterales hacen que los esfuerzos crezcan rápidamente y se entre pronto en el intervalo inelástico, de manera que la falla por pandeo se presente en este intervalo. Se pone de relieve algunas características de este fenómeno de pandeo y algunos procedimientos básicos para su análisis en columnas delgadas cargadas axialmente y sometidas simultáneamente a flexión. Determinando la carga crítica axial de Euler,

## II.2.- CARGA CRITICA DE EULER

La carga crítica de Euler o carga de inestabilidad elástica se le analizará como una columna muy esbelta verticalmente y articulada donde existirá flexión como se muestra en la (fig.1), - sus tensiones son proporcionales a la deformación no existiendo variación alguna si se añade una fuerza axial P en cada extremo (fig. 2). Si hacemos que P aumente en forma creciente y de tal manera que $F_1$ disminuye simultáneamente pero que la deformación d no varíe, el momento flector en el centro:

$$M = \frac{F_1}{2} \left(\frac{L}{2}\right) + Pd \qquad (1)$$

y el límite cuando $F_1$ ha disminuido hasta anularse:

$$F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M = Pd \qquad (2)$$

Por lo tanto como se indica en la (fig.3) y tomando en cuenta la ecuación (2) que para que la columna permanezca flexada sin empuje lateral la carga P es la carga crítica para mantener esta condición queda como:

$$M = P_{cr}d \qquad (3)$$

Analizando la (fig.3). Si aumentamos la carga $P_{cr}$ aumentará la deformación d y así sucesivamente hasta que la columna rompa - por pandeo, encontrandose que esta falla es bastante me - - -

nor a la de la resistencia última del material. Por el contrario si P disminuye ligeramente por debajo de su valor crí

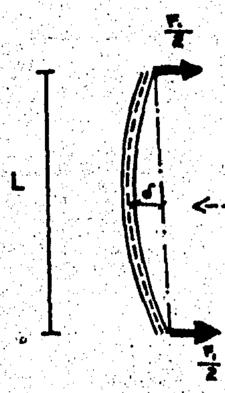



fig.1

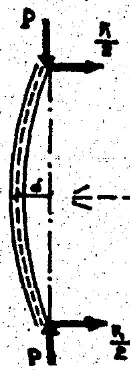



fig.2

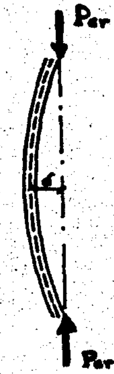



fig.3

tico disminuye la flecha ó deformación $\delta$, lo que a su vez hace disminuir M, vuelve a disminuir $\delta$, etc. y la columna terminará por enderezarse por completo. Pero lo que interesa es la falla por pandeo que sufre la columna, ésto se puede explicar que la falla en este caso no sea debido al hecho de que la resistencia del material se haya agotado, sino que el estado de equilibrio en que la pieza se encontraba se ha perdido; esta pérdida repentina del equilibrio es lo que caracteriza el comportamiento de este tipo de piezas.

Podemos concluir que el problema que presentó la columna de pandeo es de estabilidad mas no de resistencia.

Ahora si queremos aumentar la carga P de tal manera que sobrepase $P_{cr}$. Existirá una configuración recta que también es de equilibrio teóricamente si el material es homogéneo y no exista una excentricidad accidental, pero será un estado inestable, porque basta una fuerza accidental para que la falla sobrevenga. Pero según las prácticas en laboratorio y la experiencia; se ha demostrado que no es posible sobrepasar la carga crítica y ni siquiera poder llegar a ella sin que ocurra la falla por pandeo, por las imperfecciones de algún tipo son inevitables.

Así, pues la carga crítica puede interpretarse como la carga axial máxima a la que puede someterse una columna permaneciendo recta, aunque en equilibrio inestable de manera que un pequeño empuje lateral haga que flexe y quede flexada, como la (fig.2).

Despues de esta aplicación de la estabilidad de una columna podemos obtener la fórmula del suizo Leonhard Euler; que es un análisis teórico de las cargas críticas para columnas esbeltas el cual se encuentra basado en la ecuación diferencial de la elástica:

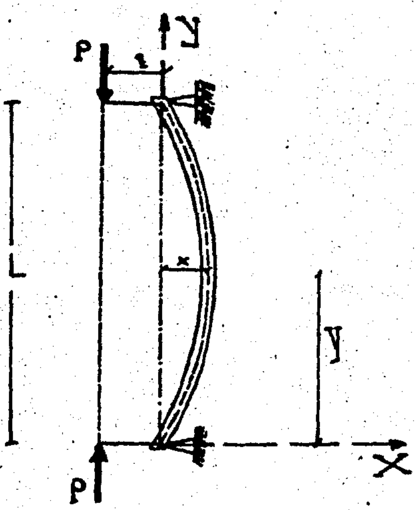



Fig. 4

Sea la siguiente columna que se muestra en la (fig.4) con las restricciones siguientes:

- Apoyado de tal manera que se pueda deslizar verticalmente en su parte superior.
- Articulado en su parte inferior

Donde:

L= longitud de la columna

X= flecha en un punto cualquiera.

q= excentricidad.

P= carga creciente.

y= ordenada donde se encuentra la flecha.

Analizando la (fig.4) el momento elástico que opera en la curva elástica en cualquier punto de la ordenada Y es:

$$M = Pq + Px$$

$$M = P(q + x) \qquad (1)$$

La ecuación diferencial de la elástica es:

$$X'' = \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{M}{EI} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2): $X'' + \frac{Px}{EI} = -\frac{Pq}{EI}$ (3)

Vemos que $\frac{P}{EI}$ es constante $\Rightarrow$ lo hacemos igual a:

$$K^2 = \frac{P}{EI} \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (3):

$$X'' + K^2X = - K^2q \tag{5}$$

Vemos que la ecuación (5) es la misma que la ecuación (2) osea la misma ecuación diferencial de la elástica de la columna, -- que es lineal, con coeficientes constantes, no homogénea, por- lo que nos interesa resolverlo para encontrar la flecha en cada punto de la columna:

$\Rightarrow$ por los operadores de Cauchi:

$$D^2X + K^2D^oX = - K^2q \tag{6}$$

$$(D^2 + K^2)X = -K^2q \tag{7}$$

Resolviendo la ecuación diferencial correspondiente tenemos:

$$(D^2 + K^2)X = 0 \tag{8}$$

$$D^2 + K^2 = 0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow D^2 = -K^2 \qquad \therefore \; D_1 = 0 + K_i$$

$$D_2 = 0 - K_i$$

La solución de la ecuación complementaria es:

$$X = e^{oY}(C_1 \cos Ky + C_2 \operatorname{sen} Ky)$$

$$Xc = C_1 \cos Ky + C_2 \operatorname{sen} Ky \tag{10}$$

Vemos que :

$$-K^2q = Se^{oY}$$

$$\Rightarrow S = -K^2q \tag{11}$$

$$(D - 0)X = 0 \tag{12}$$

Sustituyendo (12) en (5):

$$(D - 0)(D^2X + K^2D^oX) = 0 \tag{13}$$

$$(D - 0)(D^2 + K^2)X = 0 \tag{14}$$

$$(D - 0)(D^2 + K^2) = 0 \tag{15}$$

Resolviendolas se encuentran las raíces siguientes:

$$r_1 = 0 \quad , r_2 = 0 + K_i \quad , r_3 = 0 - K_i$$

La solución general es:

$$Xg = Se^{\circ Y} + e^{\circ Y}(C_1 \cos Ky + C_2 \operatorname{sen} Ky) \tag{16}$$

Como la ecuación particular es:

$$Xp = Xg - Xc \qquad \text{pero:} \quad Xp = Se^{\circ Y}$$

$$Xp = S \tag{17}$$

Llevando (17) a (6):

$$D^2S + KD^{\circ}S = -K^2q$$

Como la derívada segunda respecto a S es igual a cero y la derívada $D^{\circ}$ es igual a lo mismo:

$$0 + K^2S = -K^2q \ , \Rightarrow S = -q \tag{18}$$

Llevando (18) a (17):

$$Xp = -q \tag{19}$$

Quedando la solución de la ecuación general (6) como:

$$Xg = Xc + Xp \tag{20}$$

Sustituyendo (10), (19) a (20) queda:

$$Xg = C_1 \cos Ky + C_2 \operatorname{sen} Ky - q \tag{21}$$

$$\Rightarrow X = C_1 \cos ky + C_2 \operatorname{sen} Ky - q \tag{22}$$

Que viene siendo la ecuación analítica de la curva elástica. Procedemos ahora a obtener los valores de las constantes arbitrárias, para que la solución sea concreta; lo haremos por las condiciones de frontera:

Constantes arbitrárias: $C_1$, $C_2$

Las condiciones de frontera son como se muestra en la (fig.4):

1ª Si $y = 0$, se tiene $x = 0$

2ª Si $y = L$, se tiene $x = 0$

Sustituyendo la primera condición en (22):

$$0 = C_1 + 0 - q$$

$$\therefore C_1 = q \tag{23}$$

Sustituyendo la igualdad (23) y la segunda condición de frontera en (22) respectivamente:

$$X = q \cos Ky + C_2 \text{ sen } Ky - q \qquad (24)$$

$$0 = q \cos KL + C_2 \text{ sen } KL - q$$

Despejando $\Rightarrow$

$$C_2 = \frac{q - q \cos KL}{\text{sen } KL} = \frac{q(1-\cos KL)}{\text{sen } KL} \qquad (24')$$

Para resolver (24') hagamos la expresión:

$$\left(\frac{1-\cos KL}{\text{sen } KL}\right) = \left(\frac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\right) \quad \text{, Donde } KL = \alpha$$

Vemos que: $1 - \cos\alpha = 2 \text{ sen}^2 \frac{\alpha}{2}$

y: $\text{sen}\,\alpha = 2 \text{ sen } \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$

Sustituyendo estos valores tenemos:

$$\frac{2 \text{ sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \text{ sen } \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{sen } \frac{\alpha}{2}}{\text{sen } \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

Quedando entonces la expresión anterior como:

$$\left(\frac{1 - \cos KL}{\text{sen } KL}\right) = \tan \frac{KL}{2}$$

Sustituyendo en (24') queda:

$$C_2 = q \tan \frac{KL}{2} \qquad (25)$$

Luego sustituimos (25) en (24):

$$X = q \cos Ky + q \tan \frac{KL}{2} \text{ sen } Ky - q \qquad (26)$$

La ecuación (26) viene siendo la ecuación de la elástica final con el valor de sus constantes arbitrárias. Como dijimos al comienzo de este análisis, que lo que queremos es encontrar la ecuación de la flecha en el punto máximo; haremos las siguientes consideraciones:

La flecha máxima se representará como d, el cual será en el punto medio cuando la ordenada sea igual a :

$$y = \frac{L}{2} \qquad (a)$$

$$\Rightarrow X = d_{max} \qquad (b)$$

Por consiguiente:
Sustituyendo (a), (b) en (26) que es la ecuación de la elástica tenemos:

$$d = q \cos \frac{KL}{2} + q \tan \frac{KL}{2} \operatorname{sen} \frac{KL}{2} - q$$

$$\therefore d = q(\cos \frac{KL}{2} + \tan \frac{KL}{2} \operatorname{sen} \frac{KL}{2} - 1) \qquad (c)$$

Pero simplificando C, haciendo la expresión:

$$\cos \frac{KL}{2} + \tan \frac{KL}{2} \operatorname{sen} \frac{KL}{2} = \cos \alpha + \tan \alpha \operatorname{sen} \alpha$$

Donde: $\frac{KL}{2} = \alpha$ ; vemos entonces que por igualdades tenemos que:

$$\cos \alpha + \tan \alpha \operatorname{sen} \alpha = \frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha \quad (d)$$

Sustituyendo (d) en (c), la expresión de la ecuación de la flecha máxima es:

$$d = q(\sec \frac{KL}{2} - 1) \qquad (27)$$

Observando la ecuación (27) vemos que existen las siguientes - consideraciones:

1ª $d = 0$, si el ángulo $K = 0$, cuando la carga $P = 0$.
2ª $d = 0$, si la excentricidad es $q = 0$.
3ª $d \rightarrow \infty$; cuando $\frac{KL}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, osea $\sec \frac{KL}{2} \rightarrow \infty$

Ahora para encontrar la carga crítica tenemos que hacer uso de la tercera condición, la cual viene siendo la "condición crítica". Entonces cuando:

$$\frac{KL}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$KL = \pi$$

Elevando al cuadrado ambos miembros tenemos:

$$K^2 L^2 = \pi^2$$

Despejando: $$K^2 = \frac{\pi^2}{L^2}$$

Pero como:

$K^2 = \frac{P}{EI}$ , sustituímos en (a):

$$\frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{L^2} \qquad \text{(a)}$$

Concluímos que el valor de la carga P en (b) es la " carga crítica $P_{cr}$ ".

Finalmente:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (28)$$

Nota.- Aún cuando la excentricidad $q = 0$, y si $\frac{KL}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (90°) resulta que la secante $\sec \frac{KL}{2} \rightarrow \infty$ ; por lo tanto la flecha máxima d tiende a $\infty$ ($d \rightarrow \infty$); por lo cual el valor de la carga -- crítica $P_{cr}$ dada en la ecuación (28) es cierta tambien en la - columna de carga axial.

Una vez encontrada la ecuación de la elástica, la flecha máxima y la carga crítica; encontrarémos el momento máximo de una- columna.

Fijandonos en la (fig.4) vemos que:

$$M = P(q + d) \qquad \text{(a)}$$

Pero sabemos que la flecha máxima es:

$$d_{max} = q\ (\sec \frac{KL}{2} - 1) \qquad \text{(b)}$$

Si sustituímos (b) en (a) encontrarémos el momento máximo:

$$M_{max} = P\ \left[q + q(\sec \frac{KL}{2} - 1)\right]$$

$$= P\ (q \sec \frac{KL}{2})$$

Finalmente:

$$M_{max} = Pq\ (\sec \frac{KL}{2}) \qquad (29)$$

Haciendo $\frac{M_{max}}{Pq} = \sec \frac{KL}{2}$ ; para poder hacer una gráfica que nos relacione ($P_{cr}$ , $\frac{M_{max}}{Pq}$) que se muestra en la (fig.5), tenemos - que:

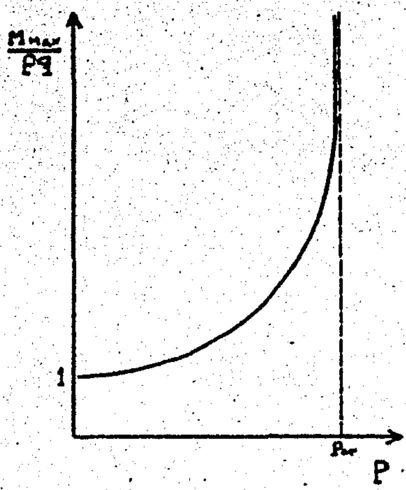



fig. 5

- Sí $K = 0 \Rightarrow \sec \frac{KL}{2} = \sec 0 = 1$

- Sí $KL \rightarrow \quad \Rightarrow K = \frac{\pi}{L}$

Pero como: $K^2 = \frac{P}{EI}$

$$\therefore \frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Esta relación se caracteríza por- la gráfica que se hace asintótica, osea la relación:

$$\left(P_{cr} , \frac{M_{max}}{Pq}\right) \rightarrow \infty$$

Cuando:

$$P \rightarrow P_{cr}$$

Finalmente podemos encontrar el esfuerzo en columnas basando-nos en la fórmula de la escuadrilla; volviendo a la (fig.4) notamos que en la parte exterior de la columna existen esfuerzos de tensión, y en el interior de compresión como se muestra en-la (fig.6); sabemos que la fórmula de la escuadrilla es de la-forma siguiente:

$$f = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}}{S} \qquad \text{(a)}$$

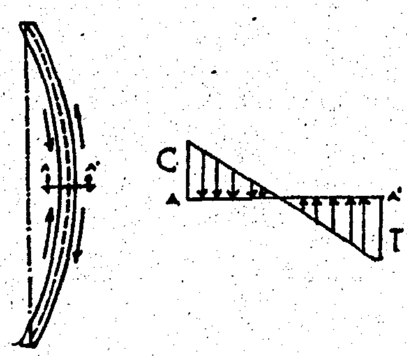



fig. 6

Sí sustituimos la ecuación (29) en (a) queda de la forma:

$$f = \frac{P}{A} + \frac{Pq \sec \frac{KL}{2}}{S}$$

$$f = P\left( \frac{1}{A} + \frac{q \sec \frac{KL}{2}}{S}\right) \qquad (30)$$

Donde f es el esfuerzo en la co-lumna considerando flexión y car-ga axial.

## II.3.- ESTADOS DE EQUILIBRIO

La carga crítica corresponde digamos a una forma simplista de un equilibrio de transición, otra intermedia y finalmente el equilibrio de falla o calapso; para ello son posibles tres configuraciones de equilibrio una recta, una ligeramente deformada ó intermedia y finalmente la de pandeo, que es la falla a la que nos referimos.

En este trabajo estamos tomando, tres estados de equilibrio los cuales ya fueron mencionados; en muchos libros se estudia solamente dos estados de equilibrio, que son la estable y la inestable, pero en un estudio de pandeo de columnas no se sabe en que estado de equilibrio se produce la falla de pandeo, es por eso la necesidad de estudiar tres casos; en pocos libros se estudian estos tres casos, donde se agrega un caso intermedio entre los dos estados anteriores, en el cual se presenta la misma duda ya mencionada. Viendo esta situación, en este trabajo para su mejor entendimiento se explicarán tres casos de estado de equilibrio, ayudados a visualizarlos por medio de gráficas.

Primer estado de equilibrio.- Sea la siguiente columna, en el cual se encuentran las siguientes restricciones: empotrada en su parte inferior, el cual no permite ningún desplazamiento horizontal; y libre en su extremo superior si durante esta condición de equilibrio se aplica una fuerza transversal al eje longitudinal de la pieza H y se somete a una carga axial P, ésta sufrirá una deformación pequeña (siendo P menor que $P_{cr}$) y al cesar la acción de la carga transversal la pieza regresa a su posición original. En este caso existiría la configuración recta, el cual vendría a ser el esta

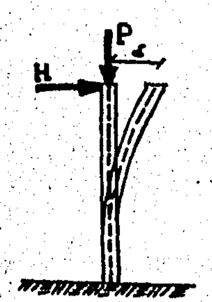



fig.7 Equilibrio estable.

do de equilibrio estable como se muestra en la (fig.7).
Osea explicado de otra manera si hacemos actuar las cargas:

$$\begin{array}{l} H \neq 0 \\ P \neq 0 \end{array} \implies \delta \neq 0$$

Cuando se quitan las cargas:

$$\begin{array}{l} H = 0 \\ P = 0 \end{array} \implies \delta = 0$$

Quiere decir que no existe deformación al cargar la columna y luego descargarla, osea podemos definir una estructura estable si tiende a retornar a su posición original, despues de que haya sufrido pequeñas perturbaciones (fuerzas, desplazamientos) aplicadas a la misma son suprimidas. Queriendo decir que la estructura se comporta elásticamente antes de alcanzar, el límite elástico con cargas inferiores.

Segundo estado de equilibrio.- Tomando la columna anterior para su estudio en la cual se aplicó una carga axial P y una fuerza horizontal H, si hacemos la misma operación que la anterior donde la carga P es mayor que la carga crítica $P_{cr}$, la pieza no regresará a su estado original, existirá en ella una deformación al dejar de aplicar las cargas P y H; a esta deformación tambien se le conoce como deformación residual . A este estado de equilibrio se le conoce como el estado de equilibrio inestable, el cual se mues en la (fig.8).

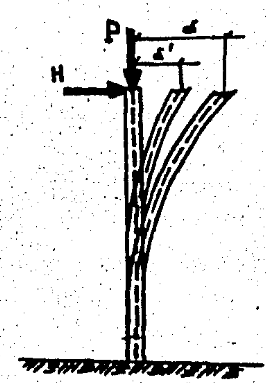



fig.8 Equilibrio inestable.

Explicado de otra manera lo que se quiere dar a entender es; cuando se hace actuar las cargas:

$$\begin{array}{l} H \neq 0 \\ P \neq 0 \end{array} \implies \delta \neq 0$$

Ahora quitando las cargas tenemos que:

$$\begin{matrix} H = 0 \\ P = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \delta = \delta'$$

Osea existe una deformación residual $\delta'$, al cargar la columna y luego descargarla.

Tercer estado de equilibrio.- Refiriendonos una vez mas a la columna con las mismas restricciones de los casos anteriores . Aplicando las mismas cargas P y H, donde la carga P es igual a la carga crítica $P_{cr}$ ; vemos que con este sistema de carga se presenta de inmediato la falla o calapso de pandeo. A este estado se le denomina estado de equilibrio de inestabilidad ó pandeo este estado se muestra en la (fig 9).

A este tercer caso de equilibrio se le llama efecto de esbeltéz o efecto de pandeo en columnas; donde se presentan dos tipos de pandeo los cuales tienen las siguientes características y condiciones:

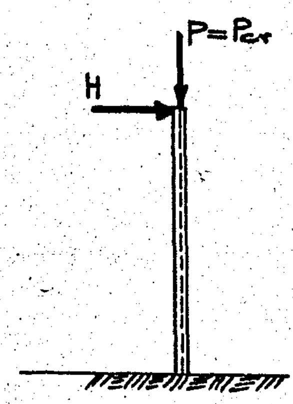



fig.9 Equilibrio de inestabilidad.

cuando al llegar la carga P a la carga crítica $P_{cr}$ y no se supera el límite de proporcionalidad se le denomina "pandeo elástico".

Osea cuando: $P = P_{cr}$ y $F_m \leq F_{lp}$ se le llama pandeo elástico donde:

P =carga axial actuante

$P_{cr}$=carga crítica

$F_m$ =esfuerzo del material

$F_{lp}$=esfuerzo de límite de proporcionalidad. Es el punto donde se pierde el estado elástico

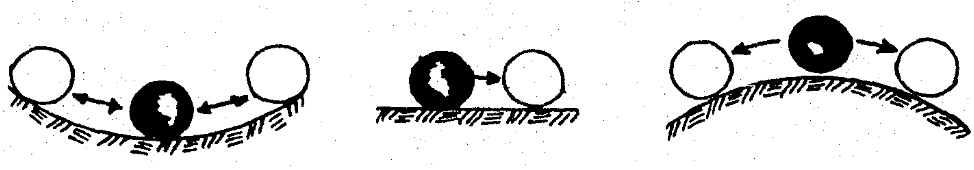
Ahora si sucede que cuando la carga P, no llega a la carga crítica $P_{cr}$ pero supera el límite de proporcionalidad; osea:

$P < P_{cr}$ y $F_m > F_{lp}$

Se le denomina "pandeo inelástico".
Normalmente se trabaja con columnas que no fallen por pandeo - en ninguno de sus dos casos, donde la carga crítica $P_{cr}$, es la- máxima que se pueda aplicar teóricamente para que suceda este- tipo de falla, por lo que para los diseños se considera una -- carga de servicio que es menor que la carga crítica el cual es afectado por un coeficiente de seguridad K obteniendose de la- siguiente manera:

$$P_{servicio} = K P_{cr}$$

Despues de este paréntesis siguiendo con los estados de equilibrio mencionados, se pueden comprender fácilmente por medio de gráficas donde se observa una esfera rígida que descansa sobre tres superficies diferentes; cóncava, plana y convexa tal como se muestra en la (fig.10).



(a) Estable (b) Inestable (c) Inestabilidad

figura 10

En el primer caso (fig.10-a), si se le impone a la esfera un - desplazamiento pequeño mediante la aplicación de una fuerza -- que es retirada inmediatamente, la esfera regresará a la posición de equilibrio inicial, por lo cual se encuentra en un estado de equilibrio estable. En el segundo caso (fig.10-b), si se aparta la esfera de su posición de equilibrio inicial al -- aplicarle una fuerza, permanecerá en la posición desplazada, - por lo cual se encuentra en un equilibrio inestable. Finalmente el tercer caso (fig.10-c), corresponde al estado de equilibrio de inestabilidad ya que al desplazarse la esfera ésta se- alejará de su posición original.

Se puede concluir que desde un punto de vista práctico, una configuración de un sistema es estable, si dada una perturbación no cause que el sistema se aparte excesivamente y desastrosamente de la configuración original. En sentido matemático la estabilidad de una configuración de un sistema se define como aquel estado de equilibrio para el cual una perturbación infinitesimal sólo provoca una desviación infenigesimal de la configuración original, y, transcurrido un cierto tiempo, regresa a la posición original. De los otros dos estados no concluimos con su punto de vista práctico ya que la configuración de un sistema estable es la más importante y la que se ha de estudiar.

## II.4.- PANDEO ELASTICO DE COLUMNAS CON DIFERENTES RESTRICCIONES EN SUS EXTREMOS.

En el estudio que se esta realizando en este trabajo sobre la carga de Euler "$P_{cr}$", representa el momento en el cual una columna empieza a fallar por pandeo. Si representamos por medio de una gráfica la relación entre carga y deformación ($P, \delta$); veremos el comportamiento de un material determinado de cómo varía respecto a su excentricidad, donde se puede visualizar el pandeo elástico y el inelástico.

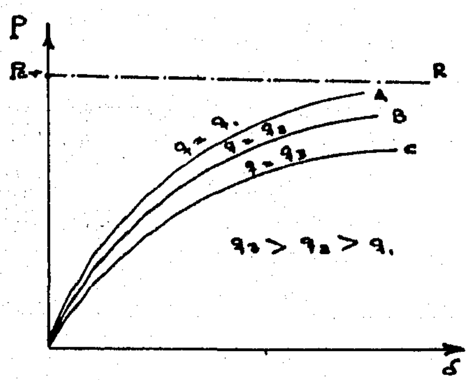



fig.20

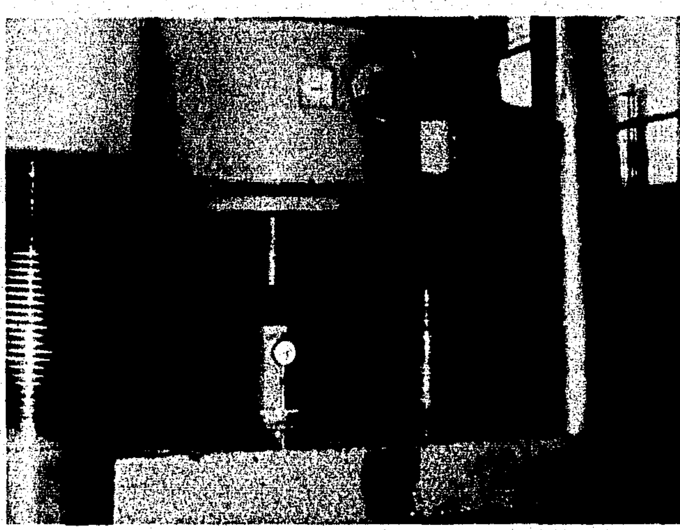
Si seleccionamos un valor particular de la excentricidad $q_1 = 0$, se puede formar una curva como la mostrada en la (fig.20), y podríamos encontrar diferentes curvas con diferentes excentridades.

Analizando la (fig.20), si $q_2 > q_1$, entonces el valor de la flecha $\delta$, crecerá más rápidamente a medida que se va aumentando la carga P. Análogamente sucede con $q_3 > q_2$ ; como resultado de- estas conclusiones veremos que las curvas (a), (b) y (c) son - de columnas que empiezan a pandearse con una carga menor que - la carga crítica, esto se debe a las excentricidades accidentales que no se pueden evitar y sus gráficas (P, $\delta$ ), se hacen -- asintóticas con la recta horizontal (R), que proviene al aplicar teóricamente el valor de la carga crítica con una excentricidad q = 0, quiere decir que una columna le aplicamos una carga P creciente colocado axialmente la columna no sufrirá ninguna deformación; pero cuando la carga P llegue a ser igual a la carga crítica $P_{cr}$ , empezará a deformarse constantemente llegando así a la falla por pandeo elástico a compresión con carga - axial.

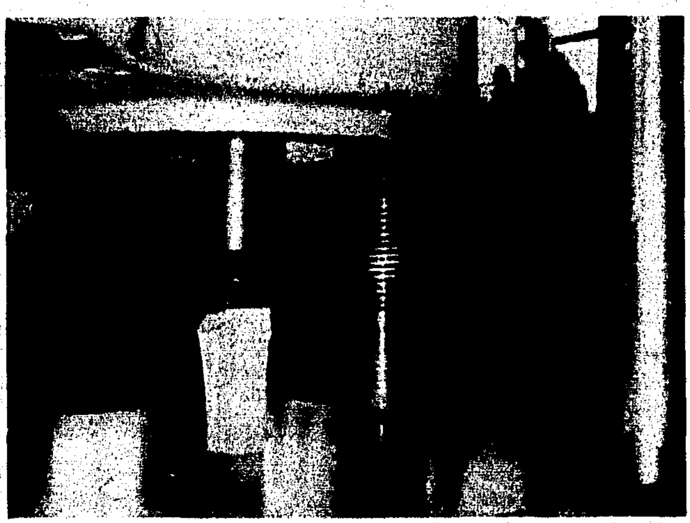
Este tipo de falla de pandeo se presenta en columnas largas ó- esbeltas; la explicación anterior nos sirve para conocer cómo- sí se deben tomar en cuenta las excentricidades para poder obtener una mayor resistencia al pandeo. Recalco que este fenómeno no se presenta en una columna corta, ya que en esta pieza antes de fallar por pandeo, fallará por aplastamiento; este fenómeno de falla por aplastamiento en columnas cortas se realizó en laboratorio para obtener la resistencia máxima de una columna de madera, como se muestra en las fotografías (1) y (2).

Al comenzar el estudio de columnas esbeltas con ciertas res--- tricciones en sus apoyos es necesario mencionar que se realizará con columnas idealizadas ya que en la práctica se presentan con restricciones que no se pueden conocer, como explicaré posteriormente; además en el laboratorio no se puede cumplir con- todos los requisitos que teóricamente se me mencionan para realizar el ensaye. Pero se trata de cumplir lo máximo posible - ya que siempre existe una excentricidad accidental por el operador, o tambien el material no es del todo homogéneo, existiendo inexactitud en el ensaye o falla del equipo, produciendose gráficas de las configuraciones del tipo (a), (b) y (c) - de la (fig.20).

Otro ensaye realizado en laboratorio el cual se muestra en las



Fotografía Nª 1



Fotografía Nª 2

* Columnas cortas realizadas en el ensaye de laboratorio don-- de no existe problema de pandeo. El elemento falla por aplas-- tamiento cuando la carga alcanza el valor de fluencia $P_y=A\ {}_y$.

Fotografía Nº 3. Columna doblemente articulada antes de aplicar la carga crítica $P_{cr}$.

Fotografía Nº 4. Columna doblemente articulada una vez aplicada la carga crítica $P_{cr}$, donde se obserba la falla de pandeo en la pieza.

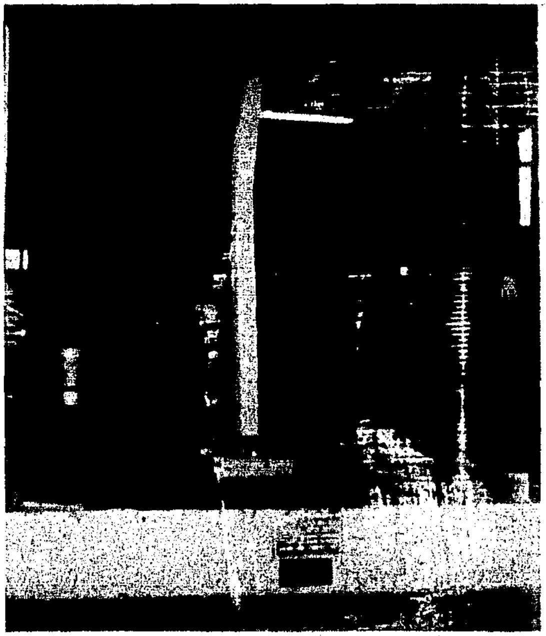
Fotografía Nª 5. Columna empotrada en su base y articulada en su extremo superior, antes de aplicar la carga crítica - $P_{cr}$.

En las siguientes fotografías (3) y (4), donde se- muestra a una columna doblemente articulada, la - cual fue tambien practicada en laboratorio con el- fin de mostrar el fenómeno de efecto de esbeltez- en columnas largas o al-- tas. Donde el pandeo se - presenta por flexión en - uno de los plano principales de la columna; igno-- rando la posibilidad de - que haya torción alrede-- dor del eje longitudinal, esto sirve para ilustrar- algunos aspectos fundamentales de este fenómeno de falla.

Las columnas largas se -- pandearán dentro del in-- tervalo plástico, el fenómeno empieza bajo esfuer- zos menores que el correspondiente al límite de proporcionalidad y la carga crítica $P_{cr}$ es menor que la carga de fluencia - $P_y$ ( si la columna es suficientemente larga, la carga crítica- de pandeo puede ser una fracción muy reducida de la fuerza que ocacionaría la plastificación total).

Este tipo de columna que se muestra en las fotografías (3) y - (4) se estudiarán mas adelante considerando ciertas condicio-- nes y suposiciones para encontrar su carga crítica.

En un siguiente ensaye mas realizado en laboratorio sobre una- columna empotrada en su base y articulada en su extremo supe-- rior, con columna larga; fue sometida también a fallar por es- tabilidad con su respectiva carga crítica a compresión (colum-



Fotografía Nº 6. Columna empotrada en su base y articulada en su extremo superior, después de aplicada la carga crítica $P_{cr}$. Se observa la falla por estabilidad.

na de material de madera), como se muestra en las fotografías (5) y (6), antes de aplicar su respectiva carga crítica para observar el mismo fenómeno de pandeo. Esta columna con este tipo de restricción se estudiará mas adelante para encontrar su fórmula de esfuerzo crítico.

En estos ensayes realizados en laboratorio, nos percatamos que las columnas llegan a fallar por pandeo antes de llegar a la carga crítica, calculadas teóricamente; con el cual se concluye que esta observación se deba a las imperfecciones antes mencionadas (excentricidad accidental, falla del equipo de ensaye, etc.), y sobre todo que es difícil alcanzar una excentricidad nula ($q = 0$), para que la carga sea colocada axialmente. Debido a estos errores incontrolables no se puede verificar con exactitud la fórmula de Euler. La fórmula de Euler considera deformaciones infinitamente pequeñas; es la razon por la cuál al obtener valores teóricos y prácticos varían pero son aproximados, ya que la discrepancia es razonable y aceptable.

El estudio que se realizará en este trabajo de columnas con diferentes restricciones, para la obtención de su carga crítica $P_{cr}$ será teórico suponiendo que no existe ninguna de las imperfecciones antes nombradas; donde la columna debe ser perfecta mente recta y con la carga aplicada axialmente a lo largo de su eje; esto viene siendo una idealización de las columnas reales en las que siempre hay curvaturas iniciales en el eje, y excentricidades en el momento de aplicar la carga.

Analizaremos cuatro tipos de columnas ideales:

1ª.- Columna en cantiliver.

2ª.- Columna doblemente articulada.

3ª.- Columna doblemente empotrada en sus extremos.

4ª.- Columna empotrada en su base, y articulada en su extremo superior.

En este trabajo deduciremos la forma de llegar a la carga crítica en la columna en cantiliver; de donde por analogía se podrán deducir las fórmulas para los casos 2ª y 3ª; tambien se deducirá la columna del 4ª caso ya que es un caso especial, el cual no se puede obtener por analogía de las enteriores.

Primer caso.- Columna empotrada en su base y libre en el extremo superior (columna en cantiliver). Considerando una columna esbelta de sección transversal constante y doblemente simétrica, sujeta a la acción de una fuerza axial creciente de compresión P. Suponiendo además que la columna es perfectamente recta, que el material que esta compuesto es homogéneo y elástico.

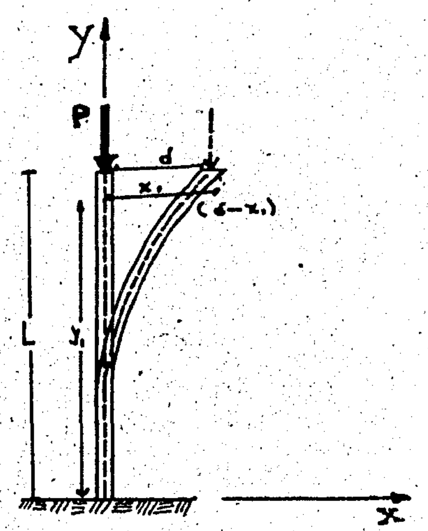



Fig. 20. Columna en cantiliver.

En estas condiciones la forma recta corresponde a un estado de equilibrio entre las fuerzas exteriores e interiores, puesto que en cualquier sección transversal hay un conjunto de fuerzas interiores, uniformemente distribuidas, cuya resultante tiene la misma intensidad y línea de acción que P.

Entonces el momento elástico ectuante que opera en la curva -- elástica en cualquier punto, como se muestra en la (fig.21) es:

$Mx = - P(d - X)$ (1)

La ecuación de la elástica es: $X'' = \frac{d^2x}{dv^2} = - \frac{M}{EI}$ (2)

Sustituyendo (1) en (2): $X'' = \frac{P(d - x)}{EI}$

Simplificando: $X'' = \frac{Pd - Px}{EI} = \frac{Pd}{EI} - \frac{Px}{EI}$

Como ya definimos el coeficiente: $K^2 = \frac{P}{EI}$

Sustituyendo queda: $X'' = K^2d - K^2x$ (2')

$X'' + K^2x = K^2d$

Donde (2') es la ecuación diferencial de la elástica. Cuya solución de ésta ecuación es: $X = C_1 \cos Ky + C_2 \text{ sen } Ky + d$ (3)

En esta ecuación falta definir las constantes $C_1$ y $C_2$, entonces por las condiciones de frontera tenemos:

Cuando $y = 0$, entonces $x = 0$ (a)

Cuando $y = 0$, entonces $x' = 0$ (b)

Llevando la primera condición de frontera (a), a la ecuación-(3): $0 = C_1 \cos (0) + C_2 \text{ sen } (0) + d$

$0 = C_1 + d$

$C_1 = -d$ (c)

Para econtrar la segunda constante debemos derivar la ecuación de la elástica (3) con respecto a y:

$X'' = -C_1K \text{ sen } (0) + KC_2 \cos (0)$ (4)

Llevando ahora la segunda condición de frontera (b) a (4):

$0 = -KC_1 \text{ sen } (0) + KC_2 \cos (0)$

$0 = KC_2$

Como: $K \neq 0$

$C_2 = 0$ (d)

Observamos que las dos constantes $C_1$ y $C_2$ quedaron definidas - el cual analizamos sus respectivos valores.

En la ecuación anterior para que la $C_2$ sea igual a cero se necesita que la constante K sea diferente de cero porque si no no existiría carga actuante P; y al no haber carga no existiría deformación. Ahora ya tenemos definidos las dos constantes arbitrarias (c) y (d), los cuales lo llevamos a la ecuación tres quedando:

$$X = -d \cos Ky + d$$
$$X = d\,(1 - \cos Ky) \qquad (32)$$

Fijandonos en la (fig. 21) nos damos cuenta que cuando y = 1, la abcisa $x = \delta$ ; el cual sustituimos en la ecuación (32) quedando:

$$X = d\,(1 - \cos Ky)$$

$$d = d - d \cos KL$$

$$d - d = -d \cos KL, \Rightarrow 0 = d \cos KL$$

Esta igualdad se cumplirá siempre y cuando el ángulo KL se cumpla para valores cuando en la gráfica (22) el senonoide del coseno se haga nula. Los cuales son:

$KL = n\frac{\pi}{2}$ donde, n = 1,3,5..n

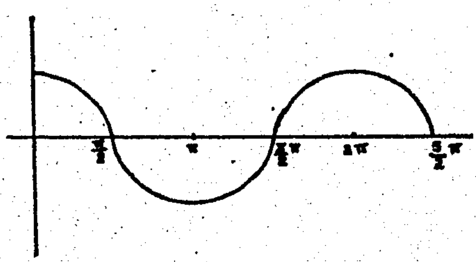


Fig. 22. Cos KL

Estos valores son para diferentes modos de pandeo en este tipo de columna. El valor que nos interesa para el estudio es en el primer modo de pandeo el cual ocurre cuando $KL = \frac{\pi}{2}$ , osea cuando n = 1, que es el valor mas bajo que se le puede asignar para la deformación mas pequeña, porque si n aumenta la deformación de la columna llega a adquirir mayor número de curvas en su eje longitudinal como se muestra en la figura ---

fig. (23). Entonces haciendo el siguiente análisis:

$KL = \frac{\pi}{2}$

$K^2L^2 = \frac{\pi^2}{4}$

$K^2 = \frac{\pi^2}{4L}$

Como $K^2 = \frac{P}{EI}$

$\frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{4L}$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad = \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \qquad (33)$$

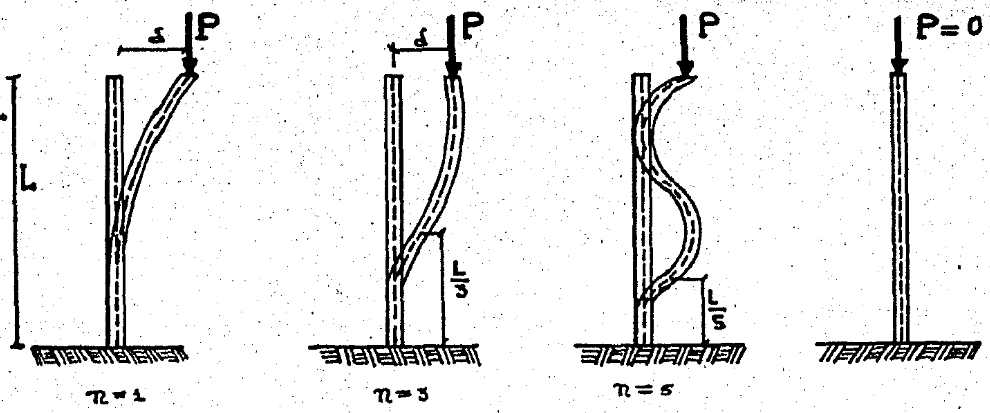



Fig. 23. Modos superiores de pandeo que se estan estudiando en una columna en cantilíver.

Segundo caso.- Columna doblemente articulada, libremente apoyada en sus extremos, tomando en cuenta todas las consideraciones y suposiciones que se realizaron para el primer caso se tomaran en cuenta para el estudio de esta columna.

La carga axial P es creciente, análogamente que el primer caso se puede aconsiderar a esta columna como empotrada en el punto tangente de la curva elástica, el cual se localiza a una distancia de la ordenada $\frac{L}{2}$, como se muestra en la (figura 24).

Por lo tanto sustituyendo los valores en la fórmula de Euler - para una columna en cantiliver:

Fórmula (33) para una columna en cantiliver: $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(4L)}$

Sustituyendo en la ecuación (33) la longitud L por $\frac{L}{2}$: tenemos:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2 EI}{4\,\frac{L^2}{4}} =$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (34)$$

Este tipo de columnas no existen en las estructuras reales como ya se habian mencionado y solo se obtienen en experiencias de laboratorio con ensayes muy cuidadosos.

La fórmula de Euler se ha deduciendo partiendo de la suposición básica de que los dos extremos de la columna estan articulados; por consiguiente sólo permite calcular la carga o esfuerzo crítico de columnas con esas condiciones de apoyo, ya que si cambian las restricciones en los extremos de una barra comprimida se modifica su capacidad para resistir fuerza axial. Su importancia estriba en que a partir de los resultados obtenidos para ella pueden deducirse las cargas o esfuerzos críticos correspondientes a cualquier otra condición de apoyo, por lo que se le da el nombre de "caso fundamental". Porque considerando la columna como un elemento aislado, con condiciones de apoyo bien definidas es fácil obtener la carga crítica correspondiente a cada caso particular; partiendo de la fundamental.

Como explicamos ahora que la columna doblemente articulada es un caso fundamental veremos el porqué se usa la ecuación diferencial aproximada para encontrar la carga crítica. Como podemos observar en la (fig. 24), la flecha máxima $\delta$, es lo suficientemente pequeña para que no exista diferencia apreciable entre la longitud inicial de la columna y su proyección sobre un eje vertical. En estas condiciones la pendiente $\frac{dy}{dx}$ es pequeña y puede aplicarse la ecuación diferencial aproximada de la elástica de una viga.

La fórmula para este tipo de columnas para diferentes modos de pandeo tiene la forma: $P = n^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, donde $n = 0, 1, 2 \ldots, n$.
El valor $n = 0$ no tiene sentido, ya que sería la carga $P = 0$.
Para los demás valores de n la columna flexará en las formas

indicadas en la (fig. 25). De estas posibles soluciones, la -- más importante es la (fig.25-a). Las otras soluciones ocurren para cargas mayores, pero son posibles físicamente si la columna tiene - las sujetaciones laterales en el- punto medio o en los tercios de - la luz, respectivamente, que la - obligan a tomar précisamente esta forma.

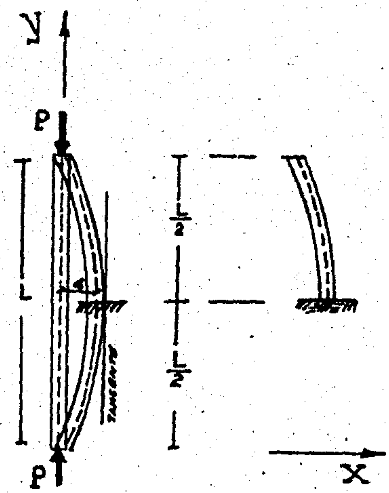
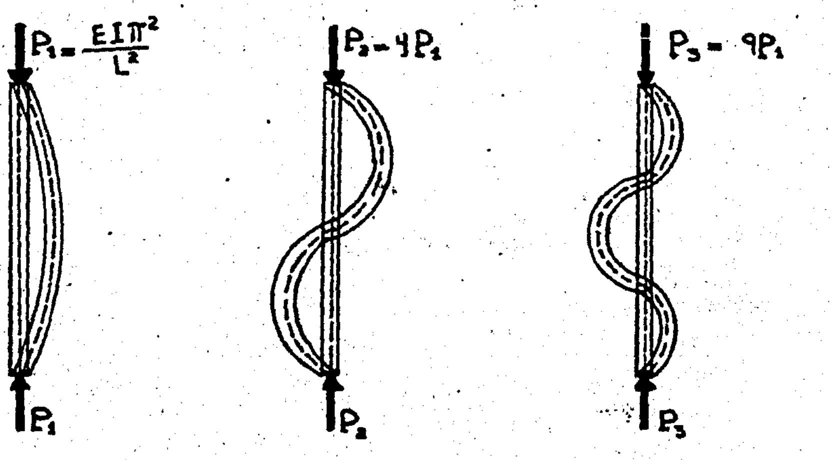



Fig.24. Columna doblemente articulada

La carga crítica para una columna articulada en sus extremos es como ya se definió en la ecuación - (34), donde para la obtención de- esta ecuación su análisis se realizó en el inciso dos de éste capítulo donde se estudio una columna con efecto de esbeltéz.




(a) n=1

(b) n=2
Sujeción en el centro

(c) n=3
Sujeción a los tercios de la luz

Fig. 25. Modos de pandeo en una columna doblemente articulada.

Tercer caso.- Columna doblemente empotrada, en los cuales los- apoyos restringen el giro pero permiten el desplazamiento vertical; en este caso tambien se toma en cuenta todas las cosideraciones y suposiciones que se tomaron en cuenta para el estudio del primer caso de una columna en cantiliver. Comprendiendo pues, que la carga es axial y creciente, al pandearse este- tipo de columna, como se muestra en la (fig.26),- aparecen en los apoyos - momentos reactivos que - impiden la rotación de - sus extremos; esos momentos y las fuerzas axia-- les de compresión son -- equivalentes a la carga- P aplicadas excéntrica-- mente como se muestra en la (fig.26); los puntos- de inflexión (puntos de- momento nulo), localizado en las intersecciones de la línea de acción de P con el eje deformado,- dividen la barra en tres secciones; la central comprendida entre ellos, de longitud $\frac{L}{2}$, se encuentra exactamente en las mismas condiciones que el caso fundamental o que del primer caso de una columna en cantiliver. Por consiguiente la carga crítica de pandeo de la columna do-- blemente empotrada se determinará utilizando la fórmula deducida para una columna en cantiliver, pero empleando al aplicarla la longitud del tramo que se encuentra en las mismas condiciones que esta, en lugar de su longitud real.

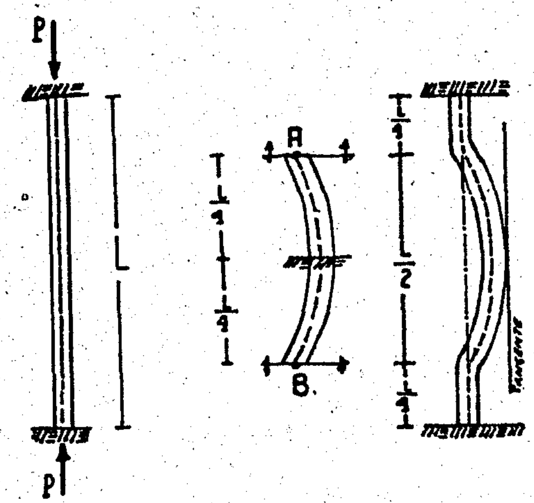



Fig. 26. Columna doblemente empotrada.

Osea: longitud del primer caso = longitud del tercer caso entre cuatro; es decir $(L)_{I} = \left(\frac{L}{4}\right)_{III}$

Por lo tanto: $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = \frac{\pi^2 EI}{4(\frac{L}{4})^2} = \frac{\pi^2 EI}{\frac{4L^2}{16}} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} =$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{0.25L^2}$$

El cual se puede dar de la forma siguiente introduciendo dentro del paréntesis en coeficiente de L tenemos:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2} \qquad (35)$$

La columna doblemente empotrada es, pues, cuatro veces más resistente que la columna doblemente articulada.

Cuarto caso.- Columna empotrada en su base y articulada en su extremo superior, con carga axial creciente; tomando tambien como base de partida para su análisis todas las consideraciones y suposiciones del caso uno de una columna en cantiliver.

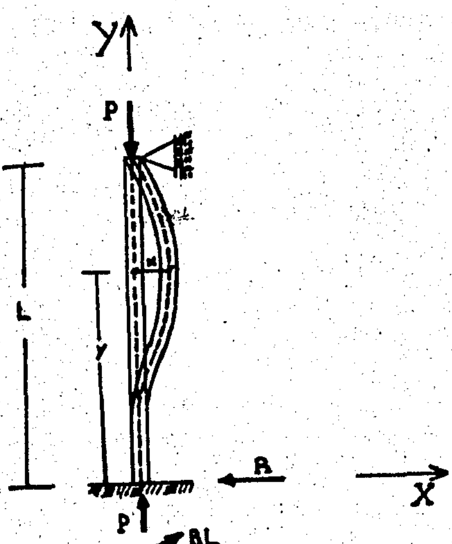



Fig.27. Columna empotrada en su base y articulada en su extremo superior.

La columna se encuentra en un estado de equilibrio interno y externo como se muestra en la representación gráfica de la (fig.27); como se dijo anteriormente para la obtención de su carga crítica deduciremos su fórmula.

De la figura vemos que el momento actuante en la columna en cualquier punto es:

$$M = Px + Ry - RL \qquad (1)$$

Como no conocemos la flecha x y tampoco conocemos la reacción horizontal R que se genera, por lo que tendrémos que hacer consideraciones.

nes posteriormente.
Como sabemos que estamos en pandeo elástico con el cual se derivan pequeñas deformaciones podemos aplicar la ecuación de la elástica:

$$X'' = -\frac{M}{EI} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) queda:

$$X'' = -\frac{Px}{EI} - \frac{Ry}{EI} + \frac{Rl}{EI}$$

$$X'' + \frac{Px}{EI} = \frac{R(l-y)}{EI} \qquad (3)$$

Sabemos que:

$$K^2 = \frac{P}{EI}$$

=> Sustituyendo en la ecuación (3):

$$X'' + K^2X = \frac{R}{EI} \quad (l-y) \qquad (5)$$

Donde la ecuación (5) es una ecuación diferencial de segundo orden de coeficientes constantes, no homogénea; porque existe un segundo miembro. Resolviendo la ecuación diferencial anterior:

$$X'' + K^2X = 0 \qquad (6)$$

$$D^2X + K^2D^\circ X = 0$$

$$D^2X + K^2X = 0$$

$$(D^2 = K^2)X = 0 \qquad (7)$$

$$(D^2 + K^2) = 0$$

$$D^2 = -K^2 \qquad (8)$$

Las raíces complejas de la ecuación (8) son:

$$\beta_1 = 0 + K_i$$

$$\beta_2 = 0 - K_i$$

Por lo cual la solución general de la ecuación (7), (por los -

antecedentes de matemáticas IV), que es la solución complementaria de la ecuación diferencial (5) tiene la forma:

$$Xc = e^{o y} C_1 \cos Ky + e^{o y} C_2 \operatorname{sen} Ky$$

$$Xc = C_1 \cos Ky + C_2 \operatorname{sen} Ky \tag{9}$$

Ahora debemos determinar de la ecuación (5) una solución particular que la cual sumada a la ecuación complementaría, nos da la solución general. Entonces la expresión generalizada del segundo miembro de la ecuación (5) como solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea es:

$$\frac{R}{EI}(l-y) = \frac{Rl}{EI} - \frac{Ry}{EI}$$

Si hacemos : $S_1 = \frac{Rl}{EI}$, y $S_2 = \frac{-R}{EI}$

Sustituyendo tenemos:

$$\frac{R}{EI}(l-y) = S_1 + S_2\, y \tag{10}$$

Vemos que la solución generalizada (10), corresponde a una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes, que tiene dos raíces reales repetidas de valor cero en su ecuación algebráica asociada, por lo que dicha ecuación diferencial es:

$$(D - 0)(D - 0)X = 0$$

$$(D - 0)^2 = 0 \tag{11}$$

Aplicando el operador $(D - 0)^2$, de la ecuación diferencial (11) a ambos miembros de la ecuación diferencial (5) y así se tiene

$$(D - 0)^2 (X'' + K^2 X) = 0 \tag{12}$$

Donde el segundo miembro se hace igual a cero, porque aplicando el operador $(D - 0)^2$ a $\frac{R}{EI}(l - y)$ es igual a cero.

La ecuación diferencial (12) toma la siguente forma:

$$(D - 0)^2 (D^2 + K^2) X = 0 \tag{13}$$

Cuya solución particular para determinados valores de constantes arbitráreas que satisfacen la ecuación (5). La ecuación algebráica asociada a (13) es:

$$(D - 0)^2 (D^2 + K^2) = 0$$

Cuya solución es:

$$\beta_1 = 0 \qquad \alpha_1 = 0 + K_i$$

$$\beta_2 = 0 \qquad \alpha_2 = 0 - K_i$$

Entonces la solución general de (13) es:

$$Xg = S_1 e^{\circ Y} + S_2 e^{\circ Y} y + e^{\circ Y} C_1 \cos Ky + e^{\circ Y} C_2 \operatorname{sen} Ky$$

$$Xg = S_1 + S_2 y + C_1 \cos Ky + C_2 \operatorname{sen} Ky \qquad (14)$$

Para determinar la solución particular de (13) restemos de (14) la ecuación (9); miembro a miembro:

$$Xg = Xp + Xc$$

$$Xp = Xg - Xc$$

Entonces sustituyendo y restando tenemos;

$$Xp = S_1 + S_2 y \qquad (15)$$

Determinemos los valores $S_1$ y $S_2$ para los cuales la ecuación particular Xp verifique a (5) entonces requerimos:

$$X'p = S_2$$

$$X'p = 0$$

Llevando a (5) la ecuación particular Xp resulta:

$$0 + K^2 (S_1 + S_2 y) = \frac{R}{EI} (l-y)$$

Osea

$$S_1 K^2 + S_2 K^2 y = \frac{Rl}{EI} - \frac{Ry}{EI}$$

Comparando los coeficientes obtenemos:

(a) $S_1 K^2 = \frac{Rl}{EI}$ como sabemos que $K^2 = \frac{P}{EI}$

Entonces sustituyendo: $\frac{S_1 P}{EI} = \frac{Rl}{EI}$

Por lo tanto $S_1 = \frac{Rl}{P}$ (16)

(b) $S_2K^2 = -\frac{R}{EI}$ ; $S_2 \frac{P}{EI} = -\frac{R}{EI}$

Por lo tanto $S_2 = -\frac{R}{P}$ (17)

Llevando los valores (16) y (17) a (15) tenemos:

$$Xp = \frac{Rl}{P} - \frac{Ry}{P} \qquad (18)$$

Sustituyendo en (14) $S_1$ y $S_2$, por sus valores dados en (16) y (17) obtendrémos la solución general de la ecuación diferencial (5):

$$X = \frac{Rl}{P} - \frac{Py}{P} + C_1 \cos Ky + C_2 \operatorname{sen} Ky$$

$$X = C_1 \cos Ky + C_2 \operatorname{sen} Ky + \frac{R}{P}(l-y) \qquad (19)$$

La igualdad (19) es la ecuación analítica de la elástica de la columna en el cual existen tres constantes $C_1$, $C_2$ y R; entonces tenemos que requerir de condiciones de frontera. Regresando a la (fig.27) vemos que existen tres condiciones:

1ª Si $y = 0$, entonces $x = 0$

2ª Si $y = 0$, entonces $x' = 0$ (porque no hay rotación)

3ª Si $y = l$, entonces $x = 0$

Aplicando la primera condición de frontera a la ecuación (19):

$$0 = C_1 + \frac{Rl}{P} \qquad (a)$$

Aplicando la segunda condición de frontera a (19) despues de derivarlo previamente:

Derivando: $X' = -C_1K \operatorname{sen} Ky + C_2K \cos Ky - \frac{R}{P}$

Sustituyendo: $0 = C_2K - \frac{R}{P}$ (b)

Aplicando la tercera condición de frontera a (19) queda:

$$0 = C_1 \cos Kl + C_2 \operatorname{sen} Kl \qquad (c)$$

El cual forma un sistema de ecuaciones con tres ecuaciones homogéneas, cuya solución tiene dos posibilidades; la solución trivial y la solución no trivial:

La primera solución sería la trivial donde: $C_1=0$, $C_2=R.=0$.
Por lo tanto $X = 0$ en todo punto de la columna, el cual carece de interés en este análisis.
La segunda solución no trivial donde llevamos a un determinante los coeficientes e igualando a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{P} \\ 0 & K & -\frac{1}{P} \\ \cos Kl, & \operatorname{sen} Kl, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo la determinante: $(0 + 0 + 0) - (\frac{Kl}{P} \cos Kl - \frac{1}{P} \operatorname{sen} kl$

$$= \frac{1}{P} \operatorname{sen} Kl - \frac{Kl}{P} \cos Kl$$

$$= \operatorname{sen} Kl - kl \cos kl$$

$$kl \cos kl = \operatorname{sen} kl$$

$$kl = \tan kl \qquad (21)$$

Vemos que la ecuación (21) es de la forma trigonométrica:

$$\varphi = \tan \varphi$$
$$Z = \varphi$$
$$Z = \tan \varphi$$
$$(\varphi , Z)$$

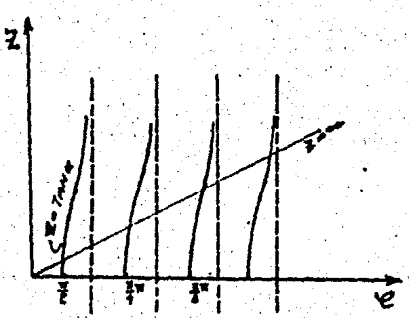


Fig.28.

Cuya solución es mostrada en la (fig. 28).
Entonces la primera solución de la ecuación diferencial (21) diferente de cero se tiene cuando:
$\varphi = 4.493$
Osea $kl = 4.493$

$$K^2 l^2 = 20.19$$

Como: $K^2 = \frac{P}{EI}$ entonces:

$$\frac{Pl^2}{EI} = 20.19$$

$$P = \frac{20.19\ EI}{L^2} \qquad (22)$$

La igualdad (22) el valor de 20.19 lo podemos dar en funsión - de $\pi^2$. Además vemos que para este valor de P se inicia el -- pandeo entonces será P la carga crítica $P_{cr}$.

$$* \tilde{2}0.19 = {}^{2}$$

$$= \frac{20.19}{2} = \frac{20.19}{9,8696} \Rightarrow P_{cr} = \frac{2.04\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{0.49\ L^2} =$$

$$= 2.04$$

Finalmente:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2} \qquad (36)$$

De las ecuaciones (20) se obtienen resolviendo:

$$\mathring{C}_1 = -\frac{LR}{P} \qquad (23)$$

$$\bar{C}_2 = +\frac{R}{PK} \qquad (24)$$

Llevando las ecuaciones (23) y (24) a la (19), para así obte-- ner la ecuación analítica de la elástica de la columna:

$$X = \frac{lR}{P} \cos Ky + \frac{R}{PK} \text{sen } ky + \frac{R}{P} (l-y)$$

Reduciendo:

$$X = \frac{R}{PK} \quad \text{sen } ky - kl \cos ky + k(l-y) \qquad (25)$$

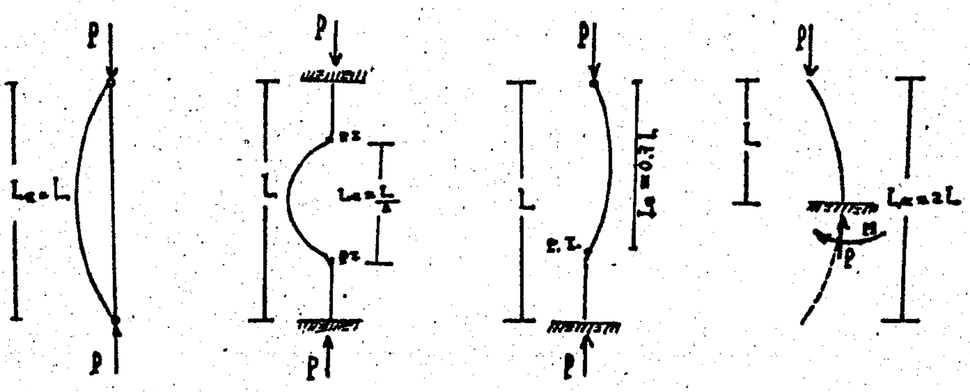
En la ecuación (25) vemos que la incognita de la reacción horizontal R es indeterminada porque se presenta en el momento de- pandeo, el cual conduce a una flecha indeterminada.

Pero nos preguntamos que beneficio sacamos de este análisis anterior que se realizó para encontrar la ecuación análitica de- la elástica si no se llega a determinar, porque falto encon--- trar la reacción R. Pues bien el beneficio es que de esta manera pudimos determinar el valor de la carga crítica $P_{cr}$ para- una columna empotrada en su base y articulada en su extremo superior el cual era el fin de este análisis.

## II.5.- LONGITUD EFECTIVA DE LOS MIEMBROS EN COMPRESION.

El concepto de longitud efectiva está basado en gran parte en su utilización en las fórmulas de Euler, y su uso en otros tipos de fórmulas puede o no ser correcto. La longitud efectiva se llama tambien en ocaciones, longitud sin soporte o longitud sin arriostrar. Esta terminología puede ser confusa en vista de que la longitud efectiva puede ser mayor o menor que la distancia entre apoyos la cual es la longitud real no soportada. Mediante el uso adecuado de esta longitud efectiva la mayor parte de las fórmulas deducidas para columnas biarticulares pueden aplicarse a columnas con otras condiciones de extremo.

Nosotros hemos estudiado cuatro casos de columnas como se muestra en la (fig.29), con diferentes tipos de apoyo. En esta figura se señala la longitud efectiva encontrada en su deducción para obtener su carga crítica de cada uno.




(a) (b) (c) (d)

Fig.29. Longitudes efectivas de columnas: (a) columna biarticulada, (b) columna doblemente empotrada, (c) columna con un extremo empotrado y el otro articulado, (d) columna con un extremo empotrado y el otro libre.

Se dan muchas definiciones sobre la longitud efectiva de pandeo o estabilidad pero son poco entendible en esta tesis se definirá de una forma comprensible para su mejor entendimiento como sigue:

La longitud efectiva de pandeo de una columna a compresión con carga axial, se llama a la distancia que existe entre dos puntos de inflexión, el cual se genera cuando la columna se pandea; esta distancia depende del sistema de apoyos, del sistema de cargas, o del sistema de desplazamientos horizontales.
Ahora resumiendo las fórmulas de Euler de los casos estudiados que se muestra en la (figura 29) estan dados en las igualdades (33), (34), (35) y (36) obtenidas en el inciso anterior que son:

A) Columna biarticulada o doblemente articulada. —— $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ (34)

B) Columna doblemente empotrada en sus extremos. —— $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2}$ (35)

C) Columna empotrada en su base y libre en su extremo superior. —— $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$ (33)

D) Columna empotrada en su base y articulada en su otro extremo. —— $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$ (36)

Si nos fijamos en estas igualdades encontramos que todos tienen casi las mismas componentes, variando únicamente en la parte del denominador por el coeficiente numérico que acompaña la longitud L. Por lo tanto podemos escribir la fórmula general de Euler por analogía, para su aplicación general de la forma siguiente:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$ Carga crítica de Euler o fundamental. (37)

En esta expresión KL es la longitud efectiva de la columna definida , es decir la distancia entre puntos de inflexión del eje deformado; K = 1, para extremos articulados, K = 0.5 para extremos empotrados, y tiene valores intermedios para restricciones elásticas comprendida entre esos límites; como el caso de una columna con extremo empotrado y el otro articulado la K = 2 y para la columna de un extremo empotrado y el otro libre K = 0.7; si un extremo de la columna puede desplazarse linealmente respecto al otro, en dirección perpendicular al eje-original, K puede crecer indefinidamente. Entonces vemos que - en la igualdad de la carga crítica fundamental o de Euler el - coeficiente K varía con el tipo de apoyo, y al producto KL se- le conoce como "longitud efectiva de pandeo" de la columna en- cuestión.

En la (fig.30) se dan los valores de K para varias condiciones de apoyo idealizadas, en el que se suponen las restricciones - que impiden las rotaciones y translaciones de los extremos son ciento por ciento efectivas o no existen.

Puede suponerse que se presenta una condición de empotramiento

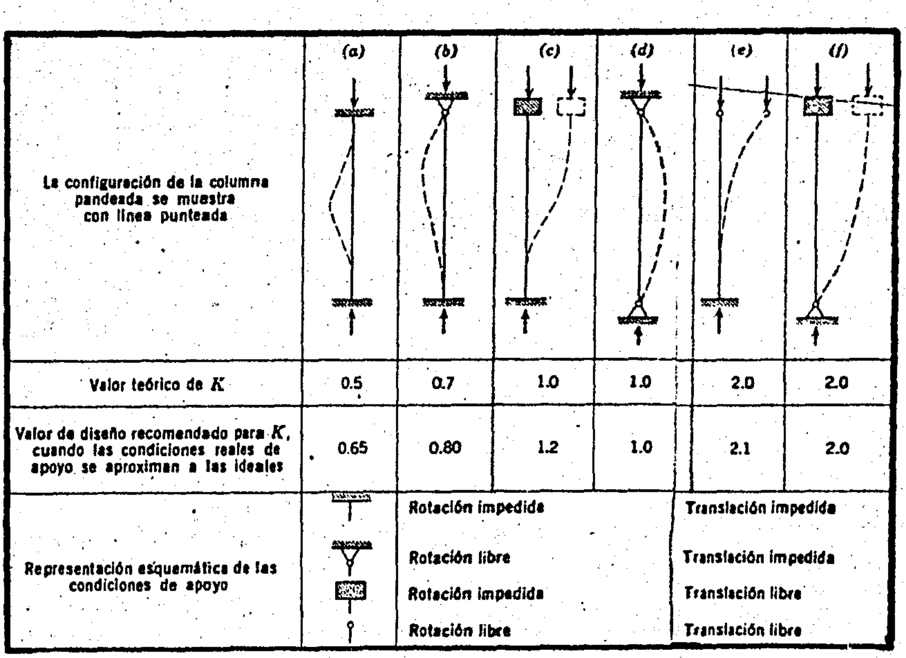



Fig.30. Valores de los coeficientes K para columnas aisladas - con diversas condiciones de apoyo.

perfecto en la base (caso a, b, c y e de la fig.30), cuando la columna esta ligada a alguna cimentación rígida, cuyas rotacio nes son despreciables por medio de una conexión diseñada para-resistir el momento de empotramiento y obvenida mediante una -base de placa y anclas o ahogada la columna en el cimiento una longitud adecuada; cuando el comportamiento del extremo inferior es incierto, respecto a la existencia de rotaciones, debe considerarse articulado (caso d y f,fig.30).Las rotaciones del-extremo superior se suponen en impedidas cuando la columna esta unida rígidamente a una trabe aperaltada de regidez muhcas-veces mayor que la suya propia; si los desplazamientos linea--lea de la trabe estan impedidos por medio de contraventeos o -muros de rigidez, la columna se encuentra en el caso (a), y --cuando pueden presentarse esos desplazamientos estan en el caso (f) ó (c) de la (fig.30).

La suposición que hay articulaciones en los extremos superio--res, casos b y d , puede deberse a que las trabes tengan una -rigidez muy reducida a la forma en que esten conectadas con --las columnas.

Los valores de K recomendados para diseño son una modificación de los teóricos hechas teniendo en cuenta que tanto las articulaciones perfectas como los empotramientos absolutos son irrealizables.

Todas las configuraciones de la (fig.30), y otras correspon---dientes a condiciones de apoyo que no aparecen en ella se re--presentan en un senoide referida a ejes adecuados; la carga --$P_{cr}$ que hace posible la deformación sinusoidal del miembro es-la carga crítica elástica que corresponde a cada una de las --condiciones de borde, y puede calcularse utilizando y concepto de longitud efectiva.

Todas las fórmulas anteriores pueden asemejarse al caso fundamental como anteriormente se explicó, quiere decir que siempre se utilizará esta fórmula poniendo en su término L la longitud efectiva Le en su lugar. Esta longitud resulta como se dijo a la distancia entre dos puntos de inflexión de la curva elástica o las articulaciones, si las hay. La longitud efectiva de-una columna, Le en el caso fundamental es L pero en los casos-

es 2L, 0.7L y 0.5L, respectivamente para el caso general Le=KL como al término K se le denomina "factor de longitud efectiva" el cual depende de las restricciones de los extremos.
Para caso más generales para obtener el valor del factor de -- longitud efectiva K, para cualquier columna que se pueda encontrar en una estructura compuesta de marcos donde intervienen - columnas, vigas, conexiones entre ellas, así como tambien puede haber elementos de contraventeo; el valor de K esta en función de las rigideces de los elementos que concurren a los extremos de la columna en estudio, para casos de pandeo elástico. Un marco puede fallar por pandeo de alguno de los tres tipos siguientes: pandeo de conjunto, pandeo lateral de un entrepiso, pandeo de una o varias columnas individuales.
Entonces tenemos que revisar cada columna por pandeo para el - cual se necesita su factor de longitud efectiva K el cual se - obtiene con los nomogramas de las (fig.31,32), (esta explica-- ción se dará con nomogramas realizados gráficamente para su entendimiento de su uso; mas adelante en el capítulo V se pre-- sentarán los nomogramas dibujados a escala), como sigue.

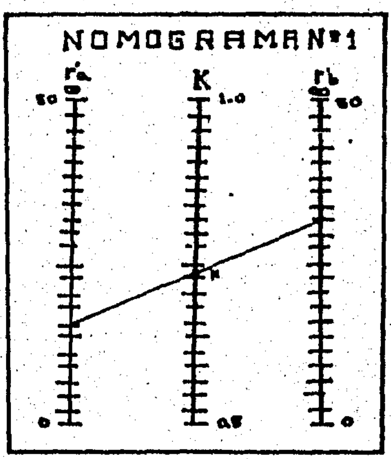



Fig.31. Obtención de K para marcos contraventeados.

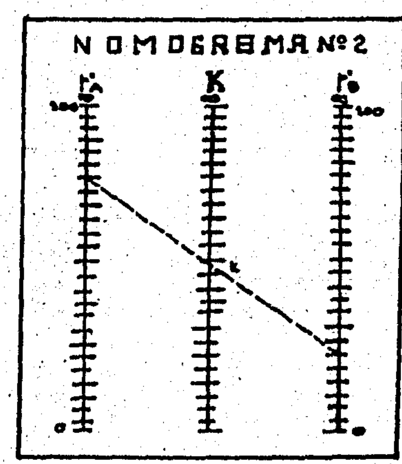



Fig.32. Obtención de K para marcos no contraventeados.

Los parámetros $r'_a$ y $r'_b$ son; $r'_a = \left[\dfrac{\sum(\frac{I}{L})\text{col.}}{\sum(\frac{I}{L})\text{trab.}}\right]$ en el nudo a.

Donde los índices a y b corresponden a cada uno de los extremos de la columna que se esta considerando.

La $\sum(\frac{I}{L})_{col.}$ representa la suma de los cocientes $\frac{I}{L}$ de todas las columnas que concurren en el extremo en el que se calcular (osea la columna en estudio y la que ésta inmediatamente arriba o abajo de ella), y $\sum(\frac{I}{L})_{trab.}$ la de las vigas que llegan al nudo y se encuentran en el plano en el que se estudia el pandeo; los momentos de inercia corresponden a ejes normales a ese plano. Para que se tengan en cuenta en la determinación de r, tanto vigas como columnas deben estar unidas rígidamente con el nudo, pues si estan conectadas en él mediante una articulación no contribuyen en nada a la resistencia.

En extremos de columnas articulados (en la cimentación por ejemplo), les corresponde un valor de $r'_a = \infty$ en teoría pero en el diseño práctico puede tomarse $r'_a = 1$, a menos que el apoyo este diseñado como una articulación sin fricción; análogamente aunque $r'_a = 0$ en teoría cuando el extremo de la columna esta empotrado, conviene suponerlo igual a 1, en columnas ligadas a zapatas diseñadas para resistir momentos.

Cuando se conocen las condiciones de apoyo de alguna de las vigas en el extremo opuesto al nudo en estudio se mejoran los resultados multiplicando su rigidez $\frac{I}{L}$ por 1.5 si el extremo esta articulado y por 2.4 si esta fijo angularmente, cuando no hay desplazamientos lineales de los nudos; y por 0.5 si esta articulado y los nudos si pueden desplazarse. Entonces la intersección de la escala central del nomograma y una línea recta trazada entre $r'_a$ y $r'_b$ proporciona el coeficiente K buscado.

## II.6.- ESFUERZO EN COLUMNAS ASOCIADAS A CARGA CRITICA.

El esfuerzo en una columna sometida a pandeo esta asociado a - la carga crítica. Osea a partir de la carga crítica puede obternerse el esfuerzo crítico de pandeo, simplemente dividiendola entre el área de la sección recta de la pieza, pero antes - veremos la validez de la carga crítica de pandeo el cual quedó definida por la ecuación (37), siendo idealizado mediante las siguientes hipótesis:

a).- El material es linealmente elástico y no exede en ningún caso el esfuerzo correspondiente a su límite de proporcionalidad.

b).- El módulo elástico del material es el mismo en tensión -- que en compresión.

c).- El material es perfectamente homogéneo e isotrópico.

d).- El miembro es perfectamente recto inicialmente, y la aplicación de la carga axial es perfectamente concéntrica con el centróide de su sección transversal.

e).- Los extremos del miembro son articulaciones perfectas sin fricción.

f).- La sección del miembro no se tuerce y sus elementos no sufren pandeo local.

g).- El miembro se encuentra totalmente libre de esfuerzos residuales.

h).- Se puede utilizar la aproximación de deformaciones pequeñas para definir la curvatura del eje deformado de la columna.

Para un miembro ideal como éste, la inestabilidad se caracteriza por una deflexión "y" igual a cero con cargas "P" que aumentan hasta el valor crítico $P_{cr}$, y por una bifurcación en el - punto de carga crítica, ya sea con "y" igual a cero ó con una- "y" indeterminada, que satisfaga la solución matemática. En la (fig. 33) se muestra esta relación mediante la línea llena -- OAB.

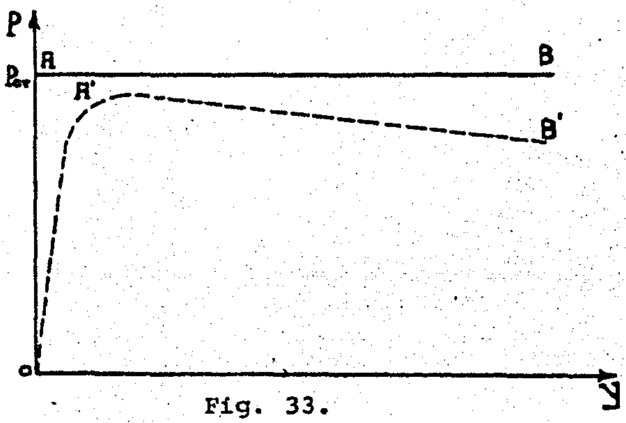



Fig. 33.

En realidad, como las condiciones (c) y (d) no pueden satisfacerse por completo ni aún con cuidado y presición extremos, la deflexión lateral crece en forma progresiva, pero tiene un incremento súbito con cargas cercanas a $P_{cr}$, lo cual se muestra por medio de la línea punteada OA'B' (fig.33).

Para una columna ideal que satisfaga la hipótesis de (a) hasta (h), el esfuerzo axial esta distribuido uniformemente sobre la sección transversal para todos los valores de carga hasta llegar a la carga crítica, y por lo tanto el esfuerzo crítico $f_{cr}$ puede definirse como sigue:

Para el caso general de columnas:

El esfuerzo esta dado por: $f_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$ (1)

Sabemos que la carga fundamental es: $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$ (2)

Por lo tanto sustituyendo (2) en (1): $f_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{A(KL)^2}$ (3)

La ecuación (3) la transformarémos de una forma concreta, para su fácil aplicación y entendimiento; entonces realizando operaciones:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL)^2 \frac{A}{I}} \quad (4)$$

Sabemos que el radio de gîro es:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{I}{A} \qquad (5)$$

Modificando (4):

$$f_{cr} = \frac{\frac{\pi^2 E}{(KL)^2}}{\frac{I}{A}} \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en (4) tenemos:

$$f_{cr} = \frac{\frac{\pi^2 E}{(KL)^2}}{r^2} \qquad (7)$$

Finalmente de manera general el esfuerzo crítico en una columna cargada axialmente conocido como: "Fórmula de Euler".

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \qquad (38)$$

En la expresión (38) el número $\frac{KL}{r}$ se conoce con el nombre de: "Relación de Esbeltez" de la pieza.

Para las columnas estudiadas anteriormente sus respectivos esfuerzos son los siguientes:

a).- Columna doblemente articulada: (K = 1) $\quad f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$ (38)

b).- Columna en cantilíver: (K = 2) $\quad f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{2L}{r}\right)^2}$ (39)

c).- Columna doblemente empotrada: (K = 0,5) $\quad f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{0.5\,L}{r}\right)^2}$ (40)

d).- Columna empotrada y articulada: (K = 0.7) $\quad f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{0.7\,L}{r}\right)^2}$ (41)

Cuando las condiciones de apoyo de los extremos de una columna son las mismas en todas las direcciones el cálculo del esfuerzo crítico debe hacerse considerando el radio de giro mínimo de la sección. Diremos en este caso que el pandeo ocurre alrededor del eje menor momento de inercia y con ello podemos establecer que la pieza al pandearse se flexionará alrededor de ese eje.

Cuando las condiciones de apoyo son diferentes en direcciones distintas, deberá investigarse el pandeo al menos en dos direcciones perpendiculares y se utilizará para el cálculo del esfuerzo crítico el mayor de ambos valores de la relación de esbeltéz.

La obtención de las fórmulas presentadas anteriormente se basa en la hipótesis fundamental de que la columna se comportará elásticamente hasta la aparición del fenómeno de pandeo; por lo tanto dichas fórmulas no son válidas en piezas en que el esfuerzo crítico de pandeo es mayor que el esfuerzo en el límite de proporcionalidad del material de que estan compuestos. El cual este tema se estudiará en el capítulo II, para el dimencionamiento de columnas.

# CAPITULO III

## III.- DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE COLUMNAS BASADAS EN LA TEORIA DE EULER.

### III.1.- LIMITE DE LA APLICACION DE LA FORMULA DE EULER.

La obtención de la fórmula de Euler, que permite calcular la carga crítica de piezas rectas comprimidas axialmente, está basada en la suposición fundamental de que la pieza se comporta elásticamente hasta la iniciasión del pandeo, como lo demuestra el que en la ecuación básica de equilibrio aparezca el módulo de elásticidad E, que se conserva en la fórmula final. -- Las ecuaciones (1) y (2) no son aplicables a columnas cortas -

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \qquad (1)$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{KL}{r})^2} \qquad (2)$$

o de longitud intermedia, en la que se alcanza el límite de -- proporcionalidad antes que el esfuerzo crítico de pandeo elástico.

La fórmula (2) es válida unicamente para el intervalo de valores de la relación de esbeltéz a los que corresponden esfuerzos críticos no mayores que el límite de proporcionalidad --- ($\sigma_{cr} \leq \sigma_{LP}$), ya que Euler hizo un análisis teórico de la carga crítica para columnas esbeltas basado en la ecuación diferencial de la elástica. Ahora se sabe que este análisis solamente es válido hasta que las tensiones alcancen el límite de proporcionalidad. En los tiempos de Euler no se habían establecido los conceptos de tensión, ni de límite de proporcionalidad, por lo que él no tuvo en cuenta la existencia de un límite superior de la carga crítica.

De la ecuación se puede concluir que el límite de proporciona-

lidad del material es el límite superior del esfuerzo con el cuál la columna se pandeará elásticamente.
Ahora sabemos que una columna tiende a pandearse siempre en la dirección que es más flexible. Como la resistencia a flexión varía con el momento de inercia, el valor de I en la fórmula de Euler es siempre el menor momento de inercia de la sección recta. La tendencia a pandearse tiene lugar, pues, respecto del eje principal de momento de inercia mínimo de la sección recta.
Si estudiamos las componentes de la fórmula de Euler, a groso modo encontrarémos de la fórmula (1):

$\pi^2$ = es una constante.

E = es la rigidez que presenta un material, (módulo de elasticidad), si su valor es grande quiere decir que el material es poco deformable; por lo tanto la carga crítica sería mayor.

I = es el momento de inercia; es algo positivo a la deformación de la pieza según la forma que tenga. Al crecer el momento de inercia, crece tambien la carga crítica, originandose el pandeo en el eje de momento de inercia menor.

L = viene siendo la longitud efectiva de pandeo, osea es la que esta dependiendo del coeficiente de columna K según sean las restricciones en los apoyos. Si al aumentar la longitud efectiva de pandeo, la carga crítica tenderá a ser menor ya que la columna será mas esbelta.

La fórmula de Euler llamada así a la ecuación (1), demuestra tambien que la carga crítica que puede producir el pandeo no depende de la resistencia del material, sino de sus dimensiones y del módulo elástico. Por éste motivo, dos barras de idénticas dimensiones una de acero de alta resistencia, y otra de acero suave, pandearán bajo la misma carga crítica, ya que aunque sus resistencias son muy diferentes tienen prácticamente el mismo módulo elástico. Así, pues, para aumentar la resistencia al pandeo, interesa aumentar lo más posible el momento de inercia de la sección. Para un área dada, el material debe distribuirse tan lejos como sea posible del centro de gravedad y de tal manera que los momentos de inercia respecto a los ejes principales sean iguales, o lo más parecido posible. Como se dijo anteriormente para que la fórmula de Euler sea aplicable, la tensión que se produzca en el pandeo no debe exceder al límite de proporcionalidad. Osea el de $\frac{P}{A}$ es la tensión media en la columna cargada con su carga crítica, y se llama tensión crítica. Su límite superior es la tensión en el límite de proporcionalidad. Por convenio, se definen como columnas largas o muy esbeltas aquellas a la que se puede aplicar la fórmula de Euler. La esbeltéz mínima, que fija el límite inferior de aplicación de la fórmula de Euler, se obtiene sustituyendo en la ecuación (2) los valores conocidos, del límite de proporcionalidad y del módulo elástico de cada material y también con los diferentes tipos dentro de cada material. Entonces:

$$f_{cr} \leq f_{LP}$$

Donde $f_{cr}$ es el esfuerzo crítico, y $f_{LP}$ es el esfuerzo de límite de proporcionalidad. Entonces dicha fórmula de Euler es aplicable en columnas a partir de que:

$$f_{cr} = f_{LP}$$

Por lo cual el esfuerzo de límite de proporcionalidad debe ser igual a:

$$f_{LP} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{KL}{r})^2}$$

De donde:

$$(\frac{KL}{r})^2 = \frac{\pi^2 E}{f_{LP}}$$

Quedando:

$$\frac{KL}{r} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_{LP}}}$$

En resumen la fórmula de Euler es aplicable a las columnas cuyo módulo de esbeltéz es:

$$\frac{KL}{r} \geq \frac{\pi^2 E}{f_{LP}} \qquad (3)$$

Donde: $\frac{KL}{r}$ = módulo de esbeltéz

$\sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_{LP}}}$ = coeficiente de columna

Podemos concluír entonces que:

A) Sí, $\frac{KL}{r} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_{LP}}}$ se trata de una columna esbelta o llamadas tambíen largas y su falla será por "estabilídad".

B) Sí, $\frac{KL}{r} < \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_{LP}}}$ Se trata de una columna no esbelta, en el- cual se encuentran las columnas cortas e - intermedias.

Un diagrama típico esfuerzo de formación a la compresión para- una probeta en la que se impide el pandeo se puede representar como en la (fig.1) en el intervalo de esfuerzos.

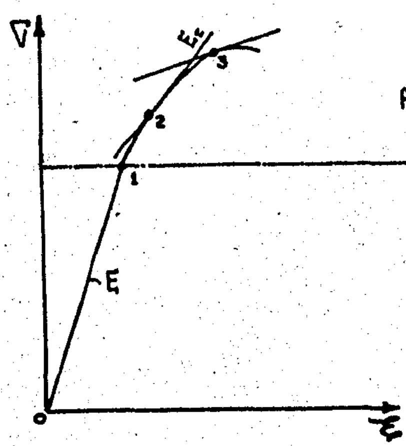



Fig.1. Diagrama esfuerzo de formación de - compresión.

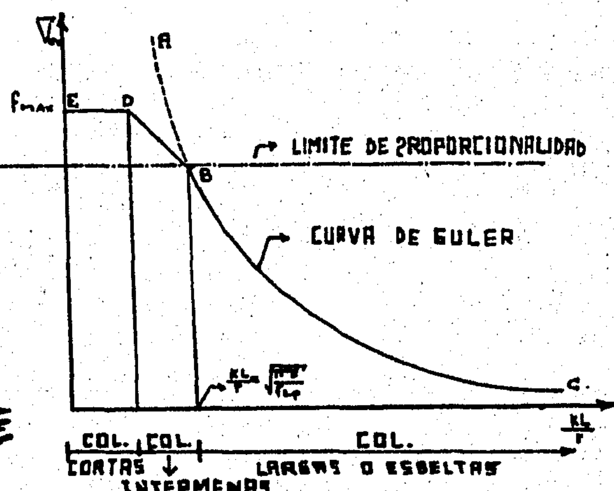



Fig.2. Gráfica del esfuerzo crítico en columnas- en función de la re- lación de esbeltéz.

De 0 hasta 1 el material se comporta elasticamente. Sí el es- fuerzo en una columna en pandeo no excede de este intervalo la columna se pandeará elasticamente. La hipérbola correspondien te a la ecuación $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{KL}{r})^2}$, es aplicable en este caso. Esta porción de la curva se indica como el tramo BC en la (fig.2) Es importante reconocer que esta curva no representa el comportamiento de una columna sino más bien el de un número infinito de columnas ideales de diferente longitud. La hipérbola que corresponde a la región que no esta situada en el intervalo útil se indica en la (fig.2) por medio de una curva punteada. Una columna con una relación $(\frac{KL}{r})$ correspondiente al punto B de la (fig.2) será la columna de más corta longitud hecha de material y tamaño dados, que se pandearán elasticamente, una columna más corta, con una relación $\frac{KL}{r}$ aún menor, no se pandeará en el límite de proporcionalidad del material. En el diagrama esfuerzo - deformación (fig.1), esto significa que el nivel de esfuerzos en la columna ha pasado del punto 1 y alcanzado quizá un cierto punto 2, Este nivel de esfuerzos más alto se puede decir que, en efecto, se ha creado una columna de material diferente, puesto que la rigidez del mismo ya no esta representada por el módulo de elasticidad. En este punto, la rigidez del material esta dada instantáneamente por la tangente la gráfica esfuerzo - deformación, es decir, por el módulo elástico tangencial (o referido a la tangente) $E_t$. La columna permanecerá estable si su nueva rigidez a la flexión $E_t I$ en 2 es suficientemente grande y podrá soportar una carga mayor. A medida que la carga aumenta, el nivel de esfuerzos se eleva también, en tanto que el módulo referido a la tangente disminuye. Una columna de material aún menos rígido actúa bajo una carga creciente. La sustitución del módulo elástico tangencial $E_t$, en vez del módulo elástico normal E, es entonces la única modificación necesaria para obtener las fórmulas de pandeo elástico aplicables en el intervalo inelastico. En consecuencia, la fórmula generalizada de Euler, o bien la fórmula del módulo referido a la tangente será:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(\frac{KL}{r})^2} \tag{4}$$

Como los esfuerzos correspondientes a los módulos referidos a- la tangente se pueden obtener a partir del diagrama esfuerzo - deformación a la compresión, la relación $\frac{KL}{r}$ a la cual se pan-- deará una columna con estos valores se puede obtener de la e-- cuación (4). Una gráfica que represente este comportamiento - para valores intermedios y bajos de $\frac{KL}{r}$ esta dada en la (fig.2) por la curva desde el punto D a B. Los ensayes en columnas in- dividuales verifican esta gráfica con notable exactitud.

En conclución en el intervalo de D a B el pandeo es inelástico por lo tanto no se puede aplicar la fórmula de Euler (2); Se - usará en éstos casos la fórmula (4) para su determinación; en- este tramo una columna puede fallar por pandeo ó por resisten- cia del elemento ya que los ensayes se realizan sin poder cum- plir con todos los requisitos de hipótesis,

Existe un intervalo último como se muestra en la (fig.2), el - de E a D. Las cuales son llamadas columnas cortas, estas co-- lumnas tienen su falla por aplastamiento ó llamadas también de resistencia, hasta un determinado módulo de esbeltéz.

Una gráfica del esfuerzo crítico en columnas en función de la- relación de esbeltéz, presenta la siguiente configuración, co- mo se muestra en la (fig.3) realizada en la práctica.

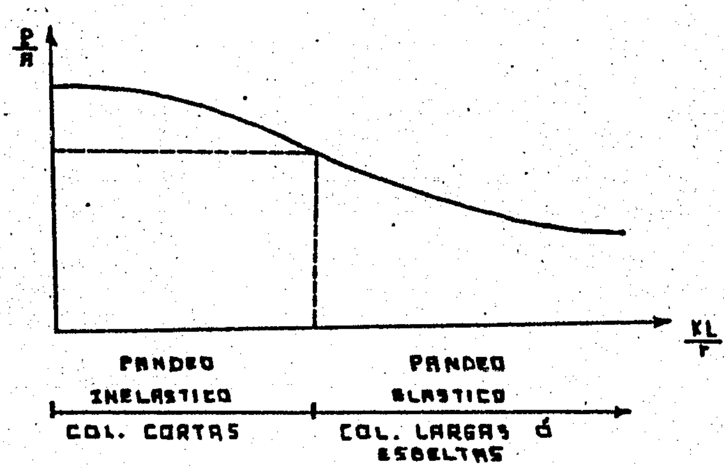



Fig.3

Nota.- Durante años después del siglo XVIII la teoría de Euler era incorrecta, pues arrojaba resultados que no concordaban con los obtenidos experimentalmente, esto se debía que en ese entonces las columnas tenían una esbeltéz muy reducida osea fallaban en el rango inelástico, bajo cargas mucho menores que las predichas por la fórmula de Euler. Por este motivo las columnas se diseñaron durante largo tiempo utilizando fórmulas empíricas deducidas de información de pruebas de laboratorio. Dicho problema fue atacado por primera vez por Engeser en 1889 en que publicó su teoría del módulo tangente de acuerdo con ella, la resistencia máxima de una columna que empieza a pandearse en el intervalo inelástico se obtiene sustituyendo en la fórmula de Euler el módulo de elasticidad E por el módulo tangente $E_t$. Dada la gráfica esfuerzo deformación de un material, se puede obtener de ella el módulo tangente para cualquier esfuerzo, si se supone que ese esfuerzo es el crítico dará una columna determinada, se puede aplicar a la fórmula (4):

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(\frac{KL}{r})^2} \qquad (4)$$

y despejar el valor de $\frac{kl}{r}$ que corresponden al esfuerzo crítico considerado. Explicaremos esto paso a paso,; sea la siguiente gráfica, esfuerzo-deformación que puede ser de un material de concreto ó madera que tiene la siguiente configuración como se muestra en la (fig. 4).

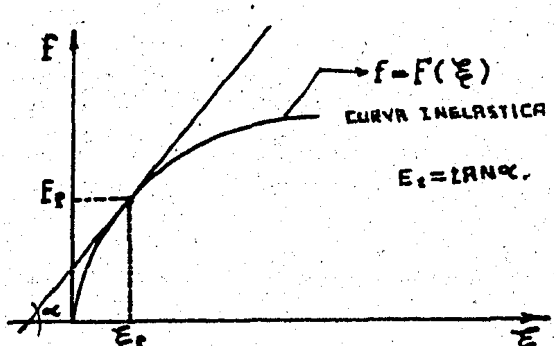


Fig. 4.

Donde:

$f_{cr}$ = esfuerzo de proporcionalidad.

$\xi_p$ = deformación de proporcionalidad.

Entonces hay que definir el módulo tangente $E_t$ para aplicar la fórmula (4) para cualquier esfuerzo, suponiendo que ese esfuerzo es el crítico. Tenemos entonces de la gráfica:

$$E = \frac{df}{dE}$$

Osea:

$$E_t = \frac{f_p}{\xi_p} \quad \text{(a)}$$

La curva tiene como función: $f = F(\xi)$ (b)

Sabemos que la derivada de una función es la tangente:

$$E_t = F'(\xi) \quad \text{(c)}$$

Ahora despejamos de la fórmula (4) el módulo de esbeltéz:

$$\frac{KL}{r} = \sqrt{\frac{\pi^2 E_t}{f_{cr}}} \quad \text{(d)}$$

Para encontrar los puntos de la gráfica escojamos unos valores arbitrarios de las deformaciones, para encontrar su respectivo esfuerzo por medio de la igualdad (b):

Definiendo deformaciones arbitrarias: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$

Sustituyendo en la ecuación (b) encontramos sus funciones respéctivas: $f_1 = F(\xi_1)$, $f_2 = F(\xi_2)$, $f_3 = F(\xi_3)$, ..., $f_n = F(\xi_n)$

Ahora encontramos las derivadas de cada punto, las cuales vienen siendo el módulo tangente:

$$E_{t1} = F'(\xi_1),\ E_{t2} = F^2(\xi_2), \ldots, E_{tn} = F^n(\xi_n).$$

Luego calculamos $\frac{KL}{r}$ usando la igualdad (d) para cada módulo -- tangente encontrados anteriormente:

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E_{t1}}{f_1}},\ \left(\frac{KL}{r}\right)_2 = \sqrt{\frac{\pi^2 E_{t2}}{f_2}},\ \ldots, \left(\frac{KL}{r}\right)_n = \sqrt{\frac{\pi^2 E_{tn}}{f_n}}$$

Posteriormente graficamos la función ($\frac{KL}{r}$, $f_{cr}$) con el cuál obtendrémos una curva; una vez trazada ésta curva, podemos diseñar cualquier columna de un material del cual se haya dado su función. Este diseño se realizará entrando con el módulo de - esbeltéz de la columna ($\frac{KL}{r}$) a la curva (pero del mismo mate--- rial), en las abcisas, hasta interceptar la curva, en este ---

punto se traza una paralela a las abcisas hasta llegar al eje de las ordenadas, obteniendo de esta manera el $f_{cr}$ con el que se diseñará dicha pieza.

Para su mejor entendimiento se pone al alcance el "ejemplo Nº1" que explica todos los pasos anteriores, en el capítulo V de esta tesis.

Como se dijo anteriormente el análisis de la teoría de Engesser del módulo tangente; se basa en la hipótesis de que la deformación de todas las fibras de la sección transversal esta controlada por la ley $(\frac{df}{d})=E_t$, osea que no tiene lugar ninguna descarga de las fibras. Sin embargo, si la columna esta ligeramente curvada, cualquier incremento en la curvatura origina un aumento del esfuerzo de compresión en el lado cóncavo y una disminución del mismo en el lado convexo (fig.5). Osea explicado de otra manera este fenómeno es que comenzando la flexión de una columna cargada más allá del límite de proporcionalidad los esfuerzos en el lado cóncavo se incrementan de acuerdo a la ley que correspondan según el diagrama esfuerzo-deformación, pero en los del lado convexo disminuyen, siguiendo la ley de Hooke, de manera que su resistencia máxima no es función ni del módulo de elasticidad "E" ni de la tangente "$E_t$", sino de un módulo "$\bar{E}$" comprendido entre los dos. Este concepto, propuesto por Considere y desarrollado por Bon Karman, conduce a la llamada teoría del módulo reducido, donde: $E_t < E_r < E$, y su esfuerzo crítico se da por:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E_r}{(\frac{L}{r})^2}$$

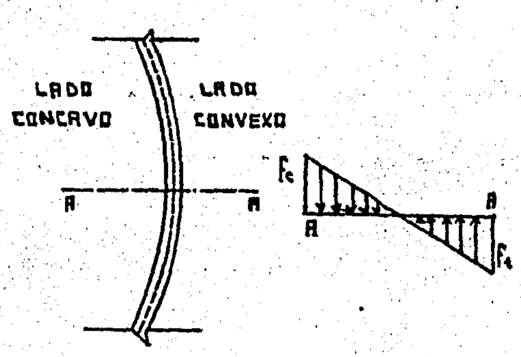



Fig.5. Columna Flexionada.

A partir de entonces se aceptó esta teoría "del módulo reducido" como la solución correcta del problema del pandeo inelástico de columnas; desde el punto de vista del concepto clásico de inestabilidad es efectivamente correcta, puesto que indica la carga para la que una columna perfectamente recta y cargada axialmente pueda tener además, otras configuraciones en equilibrio cercanas a la recta. Sin embargo, más adelante aparecieron dudas sobre ella, pues resultados experimentales cuidadosos obtenidos con especímenes de secciones transversales, de diversas formas indicaron que las cargas de pandeo reales se encuentran entre las predichas por las dos teorías, del módulo tangente y del módulo reducido, más cerca generalmente de las primeras que de las segundas.

El verdadero significado de las dos teorías fue aclarado finalmente por Shanley, en 1947, poniendo así fin a una controversia que duró más de cincuenta años. Donde Shanley ha demostrado que el esfuerzo crítico depende de las condiciones que preceden al pandeo.

En todas las teorías que tratan para pandeo inelástico se admiten las hipótesis siguientes:

1.- Los desplazamientos laterales del eje de la columna son pequeños en comparación con las dimensiones de sus secciones transversales.

2.- Las secciones transversales permanecen planas y normales al eje deformado, después de la flexión.

3.- El diagrama esfuerzo-deformación del material de la columna da la relación entre esfuerzo y deformación en cualquiera de sus fibras longitudinales.

4.- El plano de flexión es un plano de simetría de todas las secciones transversales.

En conclución, sobre este inciso podemos decir que la obtención de la carga crítica con la teoría del módulo tangente no es totalmente correcta desde un punto de vista estricto, pero se ha demostrado que en la práctica da resultados muy aceptables.

Por lo mencionado anteriormente la deducción de la teoría del-módulo tangente en esta tesis es satisfactoria para el pandeo-inelástico, por consecuencia no se explican y analizan las demas teorías en esta tesis ya que para tratar estos temas se --tendría que realizar un trabajo completo, para abarcar todos -sus análisis para su buena explicación y comprensión; es el motivo por el cual se da un bosquejo general de cada una de ---ellas.

## III.2.- DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE COLUMNAS DE ACERO CARGADAS AXIALMENTE.

Para el diseño de columnas de acero a carga axial, son en base a experimentos ideales para la explicación del fenómeno de estabilidad elástica que se esta tratando en esta tesis pero se-puede dar el caso que se puedan presentar en la práctica, como tambien en columnas de madera que se estudiara mas adelante.
Existen diversos y variados métodos para su revisión y dimen--sionamiento, estudiaremos el método de la "Colum Research ---Coucil" (C.R.S.) más conocida por sus siglas, este método tambien se enseña en el curso de mecánica de materiales de la facultad. El cual se basa de acuerdo a la teoría de Euler para-pandeo elástico.
La CRS nos dice que para el caso de columnas de acero cuya falla al pandeo sucede con el esfuerzo máximo; el cual viene ---siendo el esfuerzo crítico de Euler:

$$f_{max} = f_{cr} \tag{1}$$

Si sustituimos en la igualdad anterior por sus términos:

$$f_{max} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \tag{2}$$

El esfuerzo de compresión $f_{compr.}$ en la sección crítica por --efecto de la carga crítica $P_{cr}$, es sumada a otro esfuerzo de -compresión inicial el cual se debe a elementos de perfiles como por ejemplo "I" y la "H" que tienen esfuerzos residuales --

producidos por el enfriamiento irregular que experimentan en - la última etapa de su fabricación el que esta considerado como

$$f_r = \frac{f_y}{2}$$

El cuál llevado a las condiciones límites se da como:

$$f_r = \frac{f_y}{2} \tag{3}$$

La CRS para el análisis hace tambien la siguiente considera--- ción, dice que el esfuerzo de compresión debe ser menor ó --- igual que el esfuerzo de fluencia, que llevado al caso límite- esta dado por: $f_{compr.} = f_y$ (4)

Pero finalmente, el esfuerzo de compresión total esta dado por la suma del esfuerzo máximo dada en la ecuación (1) más el es- fuerzo residual que viene siendo consecuencia de la fabrica--- ción de la cero, por consiguiente:

$$f_{compr.} = f_{max} + f_r \tag{5}$$

Si en la igualdad (5) sustituimos las igualdades (4) y (3) ten drémos: $f_y = f_{max} + \frac{f_y}{2}$

Despejando: $f_{max} = f_y - \frac{f_y}{2}$

$$f_{max} = \frac{f_y}{2} \tag{6}$$

Igualando las ecuaciones (2) y (6) queda:

$$\frac{f_y}{2} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{KL}{r})^2} \tag{7}$$

De la ecuación (7) despejamos el módulo de esbeltéz para que - así quede definido el límite de aplicación de este método:

$$\frac{KL}{r} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{f_y}} \tag{8}$$

La CRS designa al segundo miembro de la igualdad (8) como ---

"Coeficiente de columna" ($C_c$); el cual en una columna de acero se estudiará su estabilidad a partir de este coeficiente y la relación de esbeltéz.

Por lo tanto, el coeficiente de columna esta dado por la igualdad siguiente:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{fy}} \tag{9}$$

Entonces podemos hacer ciertas concluciones:

Si, $\frac{KL}{r} \geq C_c$ entonces la columna tiene un comportamiento elástico al pandeo.

Si, $\frac{KL}{r} < C_c$ entonces la columna tiene un comportamiento inelástico al pandeo.

La fórmula del esfuerzo crítico de Euler dada en (1), se puede aplicar cuando el módulo de esbeltéz es mayor ó igual que el coeficiente de columna; y cuando el módulo de esbeltéz es menor se aplica la fórmula de Euler pero con el módulo tangente. Ahora para comparar el esfuerzo máximo que puede tolerar ése esfuerzo real al límite de fluencia, dividamos la ecuación (1) entre el esfuerzo de fluencia para que así podamos obtener el esfuerzo máximo de compresión de una columna de acero, con carga axial y de comportamiento elástico al pandeo:

$$\frac{f_{max}}{f_y} = \frac{\pi^2 E}{f_y\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \tag{10}$$

Por otra parte, podemos exprezar la ecuación (9) de la forma siguiente:

$$\frac{\pi^2 E}{f_y} = \frac{C_c^2}{2} \tag{11}$$

la igualdad (11) lo podemos sustituir en la igualdad (10), para simplificarlo; quedando:

$$\frac{f_{max}}{f_y} = \frac{C_c^2}{2\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$$

Por lo tanto:

$$f_{max} = \frac{C_c^2}{2\left(\frac{KL}{r}\right)^2} f_y \tag{12}$$

En resúmen se puede decir que en una columna de acero estructural sujeta a carga axial, su esfuerzo máximo de compresión si el pandeo es elástico, esta dado en la igualdad (12) que se puede admitir con respecto a su módulo de esbeltéz teniendo en cuenta que es aplicable si $\frac{KL}{r} \geq C_c$ , por tratarse de pandeo elástico. Pero si ahora nos preguntamos qué pasa si $\frac{KL}{r} < C_c$ , osea si el módulo de esbeltéz es menor que el coeficiente de columna entonces el procedimiento que se lleva a cabo para este caso, es empírico, puesto que la deducción de la fórmula que se da en la igualdad (13), no tiene una deducción analítica sino que viene siendo el resultado de múltiples ensayes que se realizaron con algunas semejanzas al de origen analítico. Cosa que no se explica en este trabajo por tratarse de un tema fuera de esta tesis; la fórmula viene siendo la siguiente:

$$f_{max} = \left[ \frac{1-(\frac{KL}{r})^2}{2C_c^2} \right] f_y \qquad (13)$$

Para visualizar un poco más este método, se presenta a continuación la gráfica de las fórmulas (12) y (13) en la (fig.6).

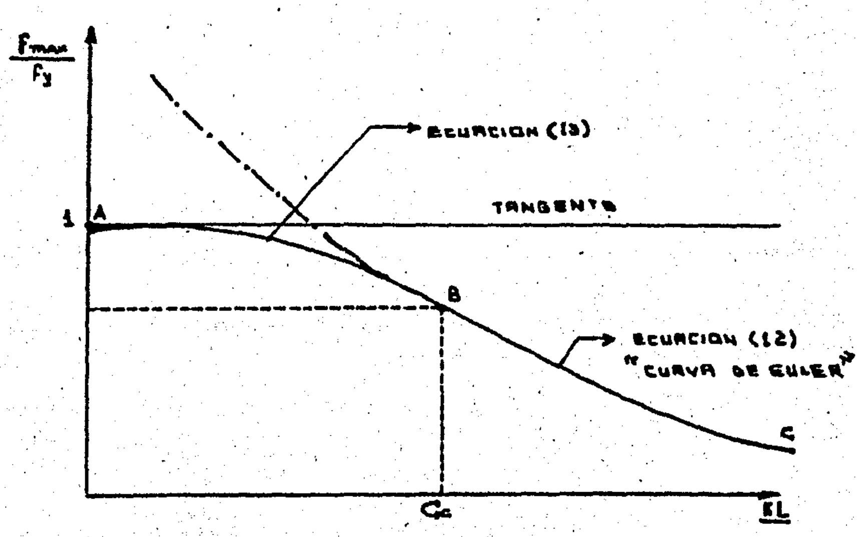



Fig.6. Gráfica esfuerzo máximo, con el módulo de esbeltéz.

La gráfica de la (fig.6) se traza dando valores al módulo de esbeltéz $\frac{KL}{r}$ de donde se obtiene $f_{max}/f_y$ , esta relación se puede graficar para diferentes materiales.

Ahora, como nosotros no podemos permitir que el diseño de las columnas de acero a compresión no se realize con el esfuerzo máximo (por sino fallaría), entonces se realizará con un esfuerzo de trabajo que debe ser menor que el esfuerzo máximo; el cual viene llamandose "esfuerzo admisible $f_a$"; el cual esta dado por el esfuerzo máximo afectado por un coeficiente de seguridad (CS).

$$f_a = \frac{f_{max}}{CS} \tag{14}$$

La elección del coeficiente de seguridad utilizado en el diseño de miembros comprimidos se basa escencialmente en las mismas consideracines que, para barras sometidas a cualquier otro tipo de solicitación. Intervienen en ella fundamentalmente, la presición con que se conocen las cargas que obrarán sobre el miembro durante la vida útil de la estructura y las propiedades mecánicas del material de que esta compuesto, la mayor ó menor exactitud de los métodos empleados en el análisis y diseño, la calidad de mano de obra utilizada en la construcción, la importancia del elemento en consideración dentro de la estructura en conjunto, y la trascendencia de una posible falla de ésta.

Como en todos los casos, deben entenderse con toda claridad a qué condición se refiere el coeficiente de seguridad empleado en un diseño; así, cuando se trate de piezas en tensión indica seguridad respecto al flujo plástico o a la ruptura del material, cuando este no es ductil ó esta sometido a condiciones de carga que ocacionan fallas del tipo frágil; en cambio en piezas comprimidas debe referirse a su resistencia al pandeo, menos cuando tengan una esbeltéz tan reducida que falle por aplastamiento.

Al juzgar la seguridad de los miembros comprimidos debe adoptarse un punto de vista prudente, ya que la falla de la columna puede ocacionar el calapso de toda la estructura mientras que el flujo plástico de una pieza en tensión, o el del patín tendi do de una viga, no representa en general un peligro grave, sinó únicamente produce deformaciones locales excesivas además hay una serie de defectos en la aplicación de la carga,(deformaciones iniciales por la excentricidad] etc. Qué juegan un papel secundario en piezas sometidas a tensión, por ejemplo, pero que pueden afectar considerablemente la resistencia al pandeo de las columnas. Se representa tambien el problema de si el factor de seguridad debe ser constante, independientemente de la relación de esbeltéz, o si debe variar de ésta.

Las consideraciones que determinan el valor de CS pueden dividirse en dos grupos: las variaciones no intencionales en las condiciones de carga, la falta de exactitud de los métodos de análisis y diseño, la diferencia entre los valores supuestos y reales de la propiedades geométricas de las secciones transversales de los elementos estructurales, etc., tienen la misma importancia en todas las partes de la estructura y afectan a columnas cortas y largas por igual, mientras que las imperfecciones accidentales, las diferencias entre las propiedades reales de los materiales y las supuestas, la impresición en la estimación del grado de regidez existentes en los extremos etc. son factores intimamente ligados con el diseño de columnas y pueden tener mayor ó menor importancia según se trate de una columna robusta o de una esbelta.

Las excentricidades no intencionales en la aplicación de la carga, las curvas iniciales del eje y los esfuerzos residuales, ocacionan efectos más marcados en columnas con relación de esbeltéz media que en las largas; las variaciones en las características mecánicas del material sobre todo en el esfuerzo de fluencia afectan apreciablemente la resistencia de columnas cortas y muy poco la de las largas, cuya capacidad de la carga es función del módulo de elasticidad E que es prácticamente constante; en cambio un error en la estimación de la longitud efectiva tiene mayor importancia en la determinación de la resistencia de una columna larga que en la de una corta, puesto que el esfuerzo crítico varía poco en una zona amplia de relaciones de esbeltéz reducidas. En consecuencia, podemos decir que en vista de los multiples factores que intervienen en la resistencia de barras rectas comprimidas y dado que la influencia de algunos de ellos es mayor en las cortas que en las largas mientras que en otros sucede lo contrario o bien son independientes de la relación de esbeltéz, es, difícil decidir si el factor de seguridad debe ó no ser función de la relación $\frac{L}{r}$ ; de hecho existen los dos criterios. Sin embargo, en los últimos tiempos se obtienen resultados más razonables si se incluyen en el diseño un CS variable, función de la esbeltéz de las columnas, así por ejemplo las especificaciones alemanas (DIN 4114), utilizan un CS = 2.5, en el intervalo elástico aceptando la fórmula de Euler para el cálculo de esfuerzos críticos y de CS = 1.5 para el inelástico.

Hasta 1961 las fórmulas recomendadas por el Instituto Americano de la Construcción de Acero (AISC) estaban basadas en un CS constante, independiente de la relación de esbeltéz, pero se modificó en la revisión de especificaciones efectuadas en 1961, en el que se introdujo un coeficiente variable, que se ha mantenido hasta la fecha; el AISC recomienda en columnas largas que fallan por pandeo elástico e inelástico los siguientes factores de seguridad:

- Si, el pandeo es elástico $(\frac{KL}{r} \geq C_c)$; entonces: $FS_1 = \frac{23}{12} \doteq 1.92$
- Si, el pandeo es inelástico $(\frac{KL}{r} < C_c)$; entonces:

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(\frac{KL}{r})}{8C_c} - \frac{(\frac{KL}{r})^3}{8C_c^{\,3}}$$

Entonces finalmente podemos sustituir en la ecuación (14) los factores respectivos para los dos tipos de pandeo:

$$f_a = \frac{f_{max}}{FS_1}, \Rightarrow f_a = \frac{C_c^{\,2}}{2(FS_1)(\frac{KL}{r})^2} f_y \qquad \text{PARA PANDEO ELASTICO} \qquad (17)$$

Realizando análogamente lo anterior para obtener el esfuerzo admisible $f_a$ en una columna de pandeo inelástico:

$$f_a = \frac{f_{max}}{FS_2}, \quad \Rightarrow \quad f_a = \frac{1}{FS_2}\left[1 - \frac{(\frac{KL}{r})^2}{2C_c^2}\right] f_y \qquad \text{PARA PANDEO INELASTICO} \qquad (18)$$

Concluimos que con estas dos fórmulas obtenidas, esta explicado el método y uno se encuentra en capacidad de dimensionar o revisar una columna de acero estructural sujeta a carga axial.

Nota: La AISC para el diseño de piezas comprimidas, y reglamento del D.F. se siguen criterios análogos.

Para facilitar su aplicación, evitando la necesidad de calcular en forma directa el esfuerzo admisible o permisible como es llamado por la AISC, en cada caso particular, se han tabulado los resultados proporcionados por las ecuaciones, de manera que conociendo el tipo de acero usado en una columna y su relación de esbeltéz en la tabla se lee directamente el esfuerzo permisible $f_a$. La (fig.7) nos da la tabla que proporciona los esfuerzos permisibles para cero A - 36 que es la más usada en México en construcciones de gran embergadura.

Las fórmulas de la AISC con las cuales se realiza esta tabla en la (fig.7), de una forma resumida son las siguientes:

1.- Para pandeo elástico:

(Fórmula de Euler)

$$\sigma_p = \frac{\pi^2 E}{1.92\,(\frac{KL}{r})^2}$$

2.- Para pandeo inelástico:

$$\sigma_p = \frac{\left[1 - \frac{(\frac{KL}{r})^2}{2C_c^2}\right]\sigma_y}{CS}$$

Donde: $CS = \text{coeficiente de seguridad} = \frac{5}{3} + \frac{3(\frac{L}{r})}{8C_c} - \frac{(\frac{L}{r})^3}{8C_c^3}$

Fig.7. Esfuerzos admisibles en kg/cm² para miembros en compresión (acero A 36)

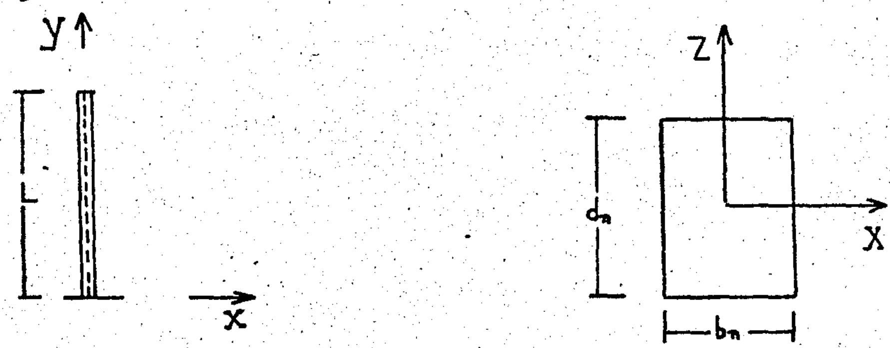
| Miembros Principales y Secundarios con $\frac{Kl}{r}$ no mayor de 120 | | | | | | Miembros Principales con $\frac{Kl}{r}$ de 121 a 200 | | | | Miembros Secundarios* con $l/r$ de 121 a 200 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{Kl}{r}$ | $F_a$ Kg/cm² | $\frac{Kl}{r}$ | $F_a$ Kg/cm² | $\frac{Kl}{r}$ | $F_a$ Kg/cm² | $\frac{Kl}{r}$ | $F_a$ Kg/cm² | $\frac{Kl}{r}$ | $F_a$ Kg/cm² | $\frac{Kl}{r}$ | $F_a$ Kg/cm² | $\frac{Kl}{r}$ | $F_a$ Kg/cm² |
| 1 | 1516 | 41 | 1344 | 81 | 1072 | 121 | 713 | 161 | 405 | 121 | 716 | 161 | 510 |
| 2 | 1513 | 42 | 1338 | 82 | 1064 | 122 | 702 | 162 | 400 | 122 | 709 | 162 | 506 |
| 3 | 1510 | 43 | 1332 | 83 | 1056 | 123 | 693 | 163 | 395 | 123 | 703 | 163 | 503 |
| 4 | 1507 | 44 | 1326 | 84 | 1048 | 124 | 682 | 164 | 390 | 124 | 696 | 164 | 501 |
| 5 | 1504 | 45 | 1320 | 85 | 1040 | 125 | 671 | 165 | 386 | 125 | 689 | 165 | 498 |
| 6 | 1501 | 46 | 1315 | 86 | 1031 | 126 | 662 | 166 | 381 | 126 | 682 | 166 | 495 |
| 7 | 1498 | 47 | 1308 | 87 | 1024 | 127 | 651 | 167 | 376 | 127 | 674 | 167 | 492 |
| 8 | 1494 | 48 | 1303 | 88 | 1015 | 128 | 641 | 168 | 372 | 128 | 667 | 168 | 489 |
| 9 | 1491 | 49 | 1297 | 89 | 1007 | 129 | 631 | 169 | 368 | 129 | 661 | 169 | 487 |
| 10 | 1488 | 50 | 1290 | 90 | 998 | 130 | 622 | 170 | 364 | 130 | 654 | 170 | 484 |
| 11 | 1484 | 51 | 1284 | 91 | 991 | 131 | 612 | 171 | 359 | 131 | 648 | 171 | 482 |
| 12 | 1480 | 52 | 1278 | 92 | 982 | 132 | 603 | 172 | 355 | 132 | 641 | 172 | 480 |
| 13 | 1477 | 53 | 1271 | 93 | 973 | 133 | 593 | 173 | 351 | 133 | 635 | 173 | 477 |
| 14 | 1473 | 54 | 1265 | 94 | 965 | 134 | 585 | 174 | 347 | 134 | 629 | 174 | 475 |
| 15 | 1469 | 55 | 1259 | 95 | 956 | 135 | 576 | 175 | 343 | 135 | 623 | 175 | 473 |
| 16 | 1465 | 56 | 1252 | 96 | 948 | 136 | 567 | 176 | 339 | 136 | 617 | 176 | 471 |
| 17 | 1461 | 57 | 1245 | 97 | 939 | 137 | 560 | 177 | 335 | 137 | 612 | 177 | 469 |
| 18 | 1457 | 58 | 1239 | 98 | 930 | 138 | 551 | 178 | 331 | 138 | 606 | 178 | 467 |
| 19 | 1453 | 59 | 1233 | 99 | 921 | 139 | 543 | 179 | 328 | 139 | 600 | 179 | 465 |
| 20 | 1448 | 60 | 1226 | 100 | 913 | 140 | 536 | 180 | 324 | 140 | 596 | 180 | 463 |
| 21 | 1444 | 61 | 1218 | 101 | 903 | 141 | 528 | 181 | 321 | 141 | 590 | 181 | 461 |
| 22 | 1440 | 62 | 1212 | 102 | 894 | 142 | 521 | 182 | 317 | 142 | 585 | 182 | 459 |
| 23 | 1435 | 63 | 1205 | 103 | 885 | 143 | 513 | 183 | 314 | 143 | 580 | 183 | 458 |
| 24 | 1431 | 64 | 1198 | 104 | 877 | 144 | 506 | 184 | 310 | 144 | 576 | 184 | 456 |
| 25 | 1426 | 65 | 1191 | 105 | 867 | 145 | 499 | 185 | 307 | 145 | 571 | 185 | 454 |
| 26 | 1422 | 66 | 1184 | 106 | 858 | 146 | 493 | 186 | 304 | 146 | 566 | 186 | 453 |
| 27 | 1417 | 67 | 1177 | 107 | 849 | 147 | 486 | 187 | 300 | 147 | 562 | 187 | 451 |
| 28 | 1412 | 68 | 1170 | 108 | 840 | 148 | 480 | 188 | 297 | 148 | 558 | 188 | 450 |
| 29 | 1407 | 69 | 1162 | 109 | 830 | 149 | 473 | 189 | 294 | 149 | 553 | 189 | 449 |
| 30 | 1402 | 70 | 1155 | 110 | 821 | 150 | 467 | 190 | 291 | 150 | 549 | 190 | 447 |
| 31 | 1397 | 71 | 1148 | 111 | 811 | 151 | 461 | 191 | 288 | 151 | 545 | 191 | 446 |
| 32 | 1392 | 72 | 1140 | 112 | 802 | 152 | 454 | 192 | 285 | 152 | 541 | 192 | 445 |
| 33 | 1387 | 73 | 1133 | 113 | 792 | 153 | 449 | 193 | 282 | 153 | 537 | 193 | 444 |
| 34 | 1382 | 74 | 1126 | 114 | 783 | 154 | 443 | 194 | 279 | 154 | 534 | 194 | 443 |
| 35 | 1377 | 75 | 1118 | 115 | 773 | 155 | 437 | 195 | 276 | 155 | 529 | 195 | 442 |
| 36 | 1371 | 76 | 1110 | 116 | 763 | 156 | 432 | 196 | 274 | 156 | 526 | 196 | 441 |
| 37 | 1365 | 77 | 1103 | 117 | 753 | 157 | 426 | 197 | 271 | 157 | 522 | 197 | 440 |
| 38 | 1360 | 78 | 1095 | 118 | 743 | 158 | 420 | 198 | 268 | 158 | 520 | 198 | 439 |
| 39 | 1355 | 79 | 1088 | 119 | 733 | 159 | 416 | 199 | 265 | 159 | 516 | 199 | 438 |
| 40 | 1349 | 80 | 1080 | 120 | 723 | 160 | 410 | 200 | 262 | 160 | 513 | 200 | 437 |

* $K = 1$ para miembros secundarios.

## III.3.- DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE COLUMNAS DE MADERA.

El diseño de columnas de madera sujetas a carga axial esta basado en la fórmula de Euler, el cuál por disposiciones según el método son aplicables a elementos estructurales de madera maciza de cualquier especie. El diseño estructural se hará sobre - la base de esfuerzos permicibles en condiciones de servicio semejante al de acero; se supondrá que la carga axial que comprime al la columna de madera es paralela a las fibras.

Para empezar su análisis de la madera a carga axial con la fórmula de Euler se requerirá que el pandeo sea elástico; entonces tenemos las siguientes configuraciones en la (fig.8); donde se observa una columna de madera sujeta a carga axial sin especificar su tipo de apoyo, esto se hace con el fin de estudiar la madera para diferentes restricciones en sus apoyos; se observa -- tambien su respectiva sección transversal de forma geométrica - rectangular.




Sección longitudinal                    Sección transversal

Fig.8. Columna de madera a carga axial

Por las características antes mencionadas para el estudio del - diseño no vamos a apoyar en el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal (RCDF - 76).

Ahora empezaremos el análisis teórico, si nos fijamos en la --- (fig.8) la sección transversal de la columna esta considerada - con dimensiones netas en las dos direcciones, esto se debe a -- que la madera se encuentra sujeta a los fenómenos del medio ambiente; este material se interperfza, osea reduce un poco sus - dimensiones geométricas por la pérdida de humedad en sus fibras es el motivo por el cual según el RDF-76 se diseñan estos miembros estructurales de madera con dimensiones netas, que son las siguientes en sus dos direcciones:

- En dirección al eje x: $b_n = b - 1$ (cms.)
- En dirección al eje z: $d_n = d - 1$ (cms.)

Tambien se hace la consideración que la carga axial actuante en la columna de madera es creciente, el cual puede producir falla de estabilidad en cualquiera de sus dos ejes X ó Z (en este caso el efecto de esbeltéz o pandeo se producirá alrededor del -- eje Z ya que la dimensión d es mayor que b) para lo tanto para su estudio suponemos que el pandeo que se presenta en la columna de madera será en el plano (X,Y) osea alrededor del eje Z y este fenómeno será del tipo elastico por lo que nos vamos a la- fórmula de Euler para empezar su estudio:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{KL}{r})^2} \qquad (1)$$

Si observamos todos los terminos nos damos cuenta que: $\pi^2$ es un terrmino constante, el módulo de elasticidad E depende de las - caracteristicas del material, el coeficiente de columna K depende del tipo de apoyo en los extremos de la columna, y el termi- L es la longitud natural de la columna. Entonces vemos que to-- dos los terminos estan definidos por lo que unicamente nos queda es aplicar un factor de seguridad, para que así se trabaje - con esfuerzos permisibles en el diseño de estos mienbros.

Aparte haremos algunas transformaciones a la formula (1), para- columna de sección rectangular. Simplificaremos el radio de -- giro que en este caso es alrededor del eje Z, ya que será a su alrededor donde se producira el pandeo; por ser el que presenta- menor momento de inercia alrededor del eje mencionado.

Tenemos entonces:

sabemos que el radio de giro es $r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ (2)

donde: $I_z = \dfrac{d_n b_n^3}{12}$ (3)

$A_n = d_n b_n$ (4)

Ahora sustituimos las igualdades (3) y (4), en la (2) tenemos:

$$r_z = \sqrt{\frac{\frac{d_n b_n^3}{12}}{d_n b_n}} = \sqrt{\frac{d_n b_n^3}{12 d_n b_n}} = \sqrt{\frac{b_n^2}{12}} =$$

$$r_z^2 = \frac{b_n^2}{12} \qquad (5)$$

esta igualdad lo sustituimos en la fórmula de Euler dado en (1)

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\frac{12(kl)^2}{b_n^2}}$$

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12\left(\frac{KL}{b_n}\right)^2} \qquad (6)$$

La fórmula (6) viene siendo el esfuerzo crítico transformado -- con el cuál la columna de madera se pandeara, motivo por el -- cual necesitamos diseñar dicho miembro con un esfuerzo menor -- que el esfuerzo crítico para que no se presente este fenómeno - de estabilidad. El RDF-76 da un valor de coeficiente de seguridad el cual puede variar de numerosos efectos que le pase ó se le haga pasar a la madera, usaremos el factor de seguridad para reducir más especificamente la fórmula (6) de:

F.S.=2.75

por lo tanto el esfurzo de trabajo ($f_{cd}$), llamado también esfuerzo admisible es el esfuerzo crítico considerado como máximo - entre el factor de seguridad:

$$f_{cd} = \frac{f_{cr}}{F.S.}$$

Sustituyendo valores y haciendo operaciones para su reducción - tenemos:

$$f_{cd} = \frac{\pi^2 E}{(2.75)(12)\left(\frac{KL}{b_n}\right)^2}$$

$$f_{cd} = \frac{0.3E}{(\frac{KL}{b_n})^2} \tag{6}$$

Ahora ya se tiene la fórmula con el cuál para poder hacer uso - de el, como se menciono anteriormente el pandeo tiene que ser - elástico , y para que se cumpla este requisito indispensable el esfuerzo de trabajo $f_{cd}$ tiene que ser menor ó igual que el es-- fuerzo de límite de proporcionalidadaceptado en la madera como- esfuerzo permisible para columnas cortas del mismo material $f_{cp}$. Entonces tenemos::

$$f_{cd} = f_{cp}$$

en consecuencia la fórmula (6) es solo aplicable a partir de -- que el esfurzo de trabajo $f_{cd}$ sea igual que el esfuerzo de límite de proporcionalidad $f_{cp}$, como su límite máximo que puede tomar:

$$f_{cd} = f_{cp} \tag{7}$$

Por lo tanto por igualdades de miembros llevemos la igualdad -- (7) a la fórmula (6), resultando como:

$$f_{cp} = \frac{0.3\ E}{(\frac{KL}{b_n})^2} \tag{8}$$

Por consecuencia la fórmula (6) es aplicable para el módulo de- esbeltéz que resulta de la igualdad (8) osea:

$$\frac{KL}{b_n} = \sqrt{\frac{0.3\ E}{f_{cp}}}$$

Este módulo de esbeltéz es el coeficiente de columna "$C_c$" en la madera (semejante a la del acero) y lo representarémos como:

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3\ E}{f_{cp}}} \tag{10}$$

A continuación damos un resúmen, para el diseño de columnas de- madera sujetas a carga axial, de sección rectangular, maciza, - paralela a las fibras, a compresión de un material homogéneo y recto osea se trata de una columna ideal, como:

A.- Para pandeo elástico:

Si, $\frac{KL}{r} \geq C_c$ entonces $f_{cd} = \frac{0.3\ E}{(\frac{KL}{b_n})^2}$

B.- Para pandeo inelástico:

Si, $\frac{KL}{r} < C_c$ entonces $f_{cd} = f_{cp}$

Y para su mejor visualización se presenta la gráfica de los esfuerzos admisibles, con el cociente $\frac{KL}{b_n}$ ; dada en la (fig.9).

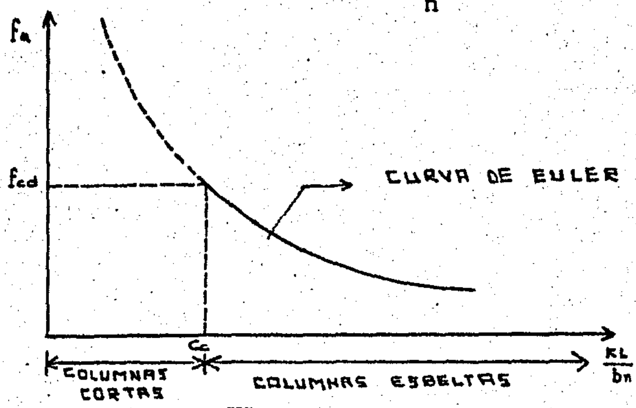



Fig.9. Gráfica ($f_a$, $\frac{KL}{b_n}$) para una columna de madera.

Pero si nos damos cuenta la forma anterior de como se explica el diseño, no nos define claramente el rango comprendido de -- los tres tipos de columnas que son: las cortas, intermedias y las esbeltas; ya que en la práctica no se necesita conocer una columna de detalle, porque casi siempre se trabaja en el rango elástico. Pero para su mejor comprensión y conocimiento complemento un estudio de una columna sujeta a carga axial P, paralela a las fibras de sección rectangular maciza que tenga como restricciones en sus apoyos doble articulación se tomará entonces el coeficiente de longitud K = 1.

Entonces partiendo de la fórmula (6) donde se da el esfuerzo - admisible de la columna de madera con K = 1 se tiene:

$$f_a = \frac{0.3\ E}{(\frac{L}{b_n})^2}$$

Introduciendo ahora un coeficiente de límite de columna que se representará con la letra S el cuál será el coeficiente que se para el efecto de estabilidad en el rango elástico al rango inelástico el cuál esta dado de la forma siguiente:

$$S = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E}{5C}} = 0.702\sqrt{\frac{E}{C}} \tag{11}$$

Donde: C = coeficiente de la madera a la compresión parela a las fibras.

Entonces con este dato C que se obtiene en laboratorio el término S es el que anteriormente se dió como coeficiente de columna $C_c$ dado para la madera que estaba en función del esfuerzo del límite de proporcionalidad; ahora con la transformación este coeficiente esta dado en función de la variable C con unas transformaciones, el cuál viene siendo el esfuerzo último de la madera realizada en el laboratorio.

Por lo consecuente decimos que la fórmula (6) para el cálculo del esfuerzo admisible en columnas de madera es aplicable. Si el pandeo de tal miembro es elástico; lo anterior se cumple si

$$\frac{L}{b_n} \geq S \tag{12}$$

A estas columnas de madera cuyo pandeo es elástico a la carga axial se les llama columnas largas.

Ahora para identificar una columna corta sujeta a la carga axial será aquella cuyo módulo es medido por numerosos ensayes en el laboratorio como:

$$\frac{L}{b_n} \leq 11 \tag{13}$$

En estas columnas el esfuerzo admisible a la carga axial que se le acepta es el del esfuerzo último de la madera:

$$f_a = C \tag{14}$$

Ahora viene el porqué de este análisis de una columna biarticulada al pandeo. Ahora se puede identificar a la columna intermedia, aquella cuyo módulo de esbeltéz este comprendido dentro del intervalo, que por deducción se obtiene:

$$11 < \frac{L}{b_n} < S \tag{15}$$

Para su mejor visualización de estas columnas intermedias para el cálculo de su esfuerzo admisible, el laboratorio forestal - propone la siguiente expresión:

$$f_a = C\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{L}{Sd}\right)^4\right] \qquad (16)$$

Ahora para visualizar este estudio se presenta un gráfica de - esfuerzo admisible con el módulo de esbeltéz; para las fórmu-- las dadas en (6), (13) y (16) dadas en la (fig.10).

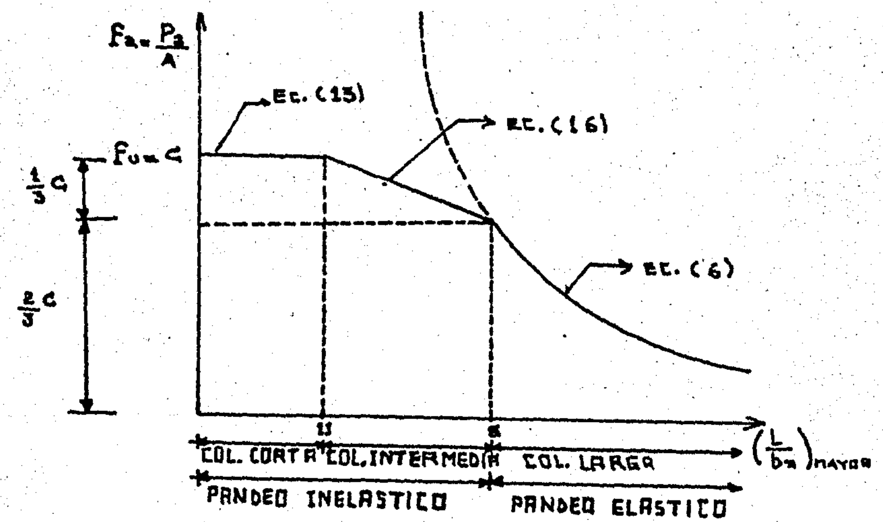



Fig.10. Gráfica ($f_a$, $\frac{L}{b_n}$) para una columna de madera biarticulada.

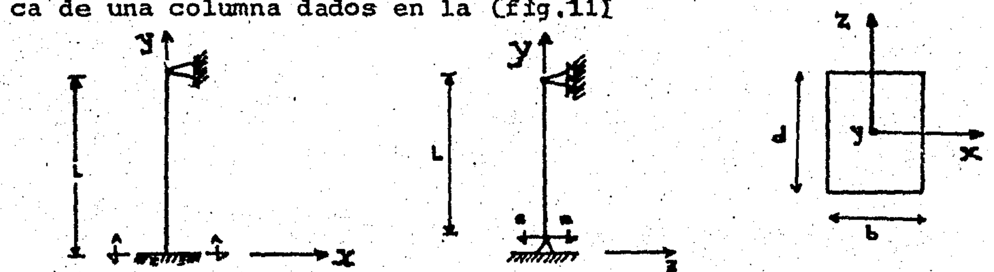
El estudio anterior se realizó para diferenciar los tres ran-- gos de columnas existentes; el cuál se realizó con muchas con- sideraciones para una columna de madera sujeta a carga axial P paralelo a las fibras, de sección rectangular maciza y doble-- mente articulada en sus apoyos.

Para otras columnas cuya condición de apoyo sean diferentes se establece un proceso similar asignandole a K el coeficiente de longitud efectiva que le corresponda.

Este estudio realizado para el diseño de una columna biarticu- lada es complicado para realizarlo para diferentes columnas --

con apoyos diferentes. Pero en forma general es mejor aplicar el reglamento del D.F. para el diseño de columnas de madera dadas al comienzo de este inciso. Se presentan un ejemplo para - una columna biarticulada con las fórmulas (6), (13) y (16) en- el ejemplo número 6 y por las fórmulas generales se da el ejemplo 7 en el capítulo V de esta tesis.

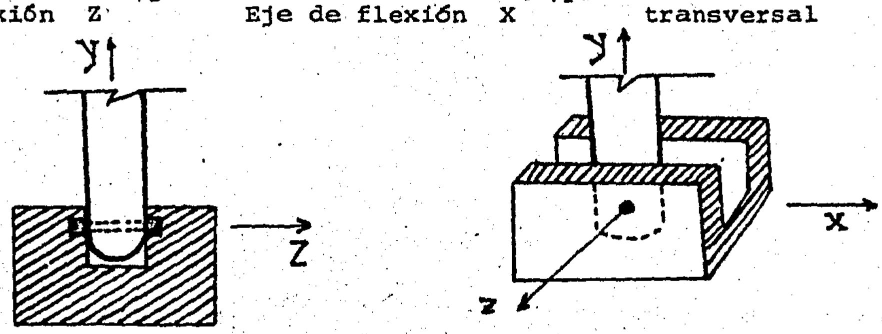
Ahora pongo de conocimiento una nota importante para la aplicación de las fórmulas, el cómo determinar la relación de esbeltéz, para el diseño de una columna de madera que tenga diferentes restricciones en los apoyos en diferentes planos de fle--- xión; el cual se explica a continuación apoyado con una gráfica de una columna dados en la (fig.11)




Plano de flexión (X,y)
Eje de flexión Z

Plano de flexión (Z,y)
Eje de flexión X

Sección transversal

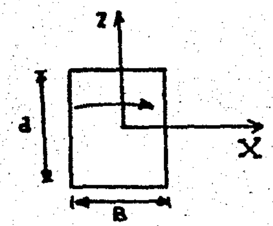



Sección B-B

Sección A-A

Fig.11. Columna de madera con apoyos diferentes en dos planos- de acción.

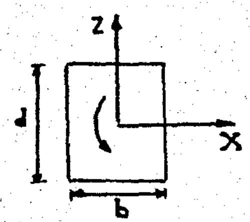
Vemos que en la (fig.11), en el plano (X, y) que actúa la co-- lumna se encuentra empotrado en su base inferior y articulada- en su extremos superior; por consecuente su relación de esbel-




téz, y el pandeo ocurrirá alrededor del eje Z:

$$\frac{K_z L}{b_n} \qquad \text{(a)}$$

En el plano (Z,y) esta articulada en su base y en el extremo superior tambien se encuentra articulada por lo que el pandeo ocurrirá alrededor del eje X, por lo que su relación de esbeltéz se calculará como:




$$\frac{K_x L}{d_n} \qquad \text{(b)}$$

Se nota que en las relaciones de esbeltéz dados en (a) y (b) el denominador cambia, esto se debe a como se hizo una reducción para simplificar la fórmula de Euler hecha anteriormente para encontrar el esfuerzo admisible $f_{cd}$ ; el radio de giro r (componente de la fórmula $f_{cd}$) se obtuvo transformando el momento de inercia I, el cual sustituido por sus valores de la sección transversal dadas en la (fig.8) y tomando en cuenta que se esta trabajando especificamente con secciones de geometría rectangular; se llegó a un radio de giro igual a la dimensión neta $b_n$ al cuadrado entre 12, donde $b_n$ es la dimensión de la sección transversal paralelo al plano de flexión osea perpendicular al eje de pandeo; el cual se sustituyó posteriormente en el esfuerzo crítico de Euler afectado por un valor de seguridad encontrandose el esfuerzo admisible.

El coeficiente de longitud K se determina de acuerdo a las restricciones que se presentan en el plano de pandeo (esto se explicará detalladamente en el ejemplo que se verá en el capítulo V).

Bueno ahora el diseño de la columna se realiza con el mayor de ambos valores de las relaciones de esbeltéz dados en las igual dades (a) y (b); con este valor conociendo previamente si el pandeo ocurre en el rango elástico e inelástico determinamos el esfuerzo admisible $f_{cd}$.

A continuación se da un resúmen de los pasos de cálculo para la aplicación de la fórmula;

1.- Si de las relaciones de esbeltéz $(\frac{KL}{b})_n$ ó $(\frac{KL}{d})_n$, el que tenga

el mayor valor lo representaremos como $(\frac{KL}{b})_{mayor}$, el cual se comparará con el coeficiente de columna $C_c$:

Si $(\frac{KL}{b})_{mayor} < C_c$, entonces $f_{cd} = f_{cp}$

Si $(\frac{KL}{b})_{mayor} \geq C_c$, entonces $f_{cd} = \dfrac{0.3\ E}{(\frac{KL}{b})_{mayor}}$

$$\text{Donde } C_c = \sqrt{\frac{0.3\ E}{f_{cp}}}$$

El reglamento del Distrito Federal especifica algunos valores que debe tomar el coeficiente de longitud K para ciertas irregularidades que existen en la madera, como por ejemplo los nudos (porque sino vendrían siendo los mismos que ya se demostró para los cuatro tipos de columnas ideales estudiadas).

| CONDICIONES DE APOYO EN LOS EXTREMOS DEL ELEMENTO | K |
|---|---|
| Columna doblemente empotrada | 0.65 |
| Columna empotrada o fija en un extremo y articulada en el otro extremo, sin desplazamiento lateral | 0.80 |
| Columna con los dos extremos fijos, con desplazamiento lateral | 1.20 |
| Columna doblemente articulada | 1.00 |
| Columna en cantiliver | 2.00 |

Ahora cuando la madera se clasifique de acuerdo al reglamento del D.F. como se muestra en la siguiente tabla que esta de acuerdo a la norma DGNCL8-1946, los esfuerzos permicibles correspondientes a la especie de columnas sujetas a carga axial a compresión paralela a las fibras será;

| TIPO DE MADERA | $f_{cp}$ (Kg/cm$^2$) |
|---|---|
| Selecta | 70 |
| Primera | 50 |
| Segunda | 25 |
| Tercera | 17 |

Una aplicación de este tema completo se da en el capítulo V en el ejemplo 7.

A continuación se presenta la siguiente tabla para tipos de madera dando su esfuerzo permisible en piezas cortas sin pandeo- $f_{bp}$ :

| TIPO DE MADERA | $f_{bp}$ (Kg/cm$^2$) |
|---|---|
| Selecta | 80 |
| Primera | 60 |
| Segunda | 30 |
| Tercera | 20 |

CAPITULO IV

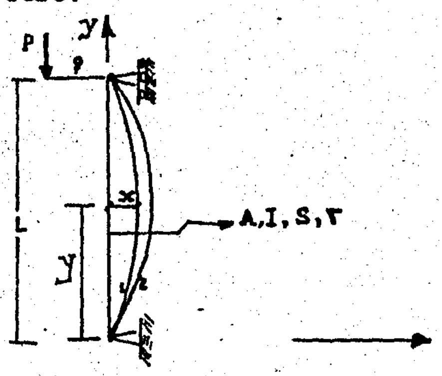
# IV.- COLUMNAS ESBELTAS A FLEXOCOMPRESION.

## IV.1.- DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE COLUMNAS A FLEXOCOMPRESION

En el diseño de columnas largas sometidas a flexocompresión que se tratará en esta tesis, se explicará primero el fenómeno que-se esta tratando. Estas barras a flexocompresión son elementos estructurales que tienen una acción simultánea de fuerzas normales a sección de compresión y momentos flexionantes transversales, los cuales suceden alrededor de un solo eje centroidal o tener componentes según los dos ejes principales de su sección transversal. Es importante su análisis, como se estudio en el capítulo II, las piezas comprimidas axialmente no existen prácticamente en las estructuras reales, en lo que debido a su construcción con diversos miembros que las componen, la compresión se presenta casi siempre acompañada por flexión. Estudiaremos barras de eje recto y sección transversal constante, que son las que se presentan en marcos de edificios ó cuerdas superiores de las armaduras, cuando actúan sobre ella cargas aplicadas fuera de los nudos. Aunque en estos dos casos existe diferencia en la manera que reciben la solicitación de flexión, porque la flexión puede deberse también a cargas paralelas al eje de la columna que no coincidan con el ó por cargas excentricas en sus extremos perpendiculares a su sección.

Al deformarse el eje recto de la barra por el efecto de las cargas transversales o de los pares aplicados en sus extremos las-fuerzas axiales producen momentos flexionantes secundarios, proporcionales a su intensidad y a la magnitud de los desplazamientos laterales de los puntos del eje, como se muestra en la-(fig.1), en la que se genera un aumento de las deformaciones, creando así para su estudio un proceso de interacción, en el cual opera un momento en función del otro y así sucesivamente -

hasta ir incrementando la deformación, que hacen que las piezas flexocomprimidas presenten una respuesta no lineal, aún en el intervalo en que el material con que estan hechas estas piezas cumplan con la Ley de Hooke. La importancia de este fenómeno depende de la esbeltéz de las piezas, de la magnitud de la fuerza normal y de las condiciones existentes en sus extremos, que hacen que la columna se flexione en curvatura simple ó doble, aceleran o restringen las rotaciones, e impiden o permiten los desplazamientos lineales de un extremo con respecto al otro.




$M_1 = P_q$ Momento de primer orden.

$M_2 = P(q+x)$ Momento de segundo orden.

Osea se produce

$M_2 = P_q + P_x$

$M_2 = M_1 + P_x$

Fig.1.- Pieza larga a flexocompresión.

Una barra flexocomprimida puede fallar por alguna de las causas que se enumeran a continuación, o por una combinación de dos o más de ellas.

1.- Porque se alcance su resistencia máxima bajo momento y fuerza axial combinados, al formarse articulaciones plásticas en la sección o secciones en las que el momento tiene su mayor intensidad.

2.- Por inestabilidad en el plano de los momentos ocasionada por exceso de flexión en ese plano, teniendo en cuenta la acción simultánea de la fuerza normal.

3.- Por pandeo lateral debido a flexotorsión.

4.- Por pandeo debido a compresión axial, alrededor de los ejes de momento de inercia mínimo.

5.- Por pandeo local.

Cualquiera de las últimas cuatro fallas se presentan en el rango elástico dependiendo de la mayor o menor esbeltéz de las piezas en consideración, o de los elementos que la forman.

La condición uno es crítica en piezas cortas y de paredes gruesas, en las que no hay posibilidad de falla por inestabilidad - y puede serlo también en piezas largas en las que en determinadas condiciones de apoyo y carga pueden formarse articulaciones plásticas en uno de los dos extremos, producidas por fuerzas de menor intensidad que las que ocasionarían la falla por pandeo,- (aunque esta condición no corresponde necesariamente al colapso de la pieza suele considerarse indeseable en problemas de diseño, excepto en algunos casos de estructuras diseñadas plásticamente y aunque en ellos corresponde con frecuencia a las cargas máximas que pueden soportar las piezas).

La segunda condición es crítica en barras flexionadas alrededor de sus ejes de menor momento de inercia y también cuando la flexión se presenta en el plano de mayor resistencia pero el pan-- deo lateral está impedido por las características geométricas - de las secciones transversales (tubos, secciones en cajón) o -- por la presencia de elementos exteriores de contraventeo.

La tercera condición, la falla por pandeo lateral se presenta - en miembros de sección I ó similar, flexionadas alrededor de -- sus ejes de mayor momento de inercia y desprovistos de elemen-- tos exteriores adecuados de contraventeo ; se caracteriza por - una flexión lateral de la barra en un plano perpendicular a la- de aplicación de las cargas, acompañadas por un retorcimiento - alrededor del eje longitudinal.

La condición cuarta es crítica la fuerza axial es mucho más importante que la flexión (el comportamiento se aproxima al de -- una columna a compresión axial).

La quinta condición cuando las relaciones ancho-grueso, de los- elementos planos que corresponden a la composición de una colum na están por arriba de ciertos límites que se estudían para una columna compuesta.

De manera análoga a lo que sucede en otros elementos estructurales, es difícil en general saber de antemano cuál será la forma de falla de una columna flexocomprimida sometida a solicitaciones conocidas, por lo cual es necesario calcular varias cargas de colapso; donde la menor corresponderá a la capacidad de carga real de la pieza.

Como conclución podemos decir para el diseño de piezas largas sometidas a flexocompresión, se estudiarán en el rango elástico las cuales serán columnas de sección transversal constante sobre las que actúan fuerzas axiales de compresión P y pares de momentos aplicados en los extremos, que les obligan a flexionarse en uno ó en sus dos planos de simetría, donde se distinguen dos problemas diferentes. El primero es el que se presenta debido a que las deformaciones por flexión no son despreciables y por ello en el cálculo de los momentos flexionantes debe tenerse en cuenta el momento que se esta produciendo como producto de la aplicación de la carga axial a la columna a lo largo de su eje longitudinal. El segundo problema es el que se refiere como el más sobresaliente en este trabajo y es el que se debe a la inestabilidad ó pandeo de la columna.

Para visualizar el primer caso si vemos la (fig.1), esta se deforma por flexión en curvatura simple en la cual esta actuando en sus extremos una fuerza P de compresión el cuál produce momentos debido a la excentricidad q, la carga axial produce entonces momentos de primer orden ($M_1$=Pq) y momentos de segundo orden ($M_2$=Pq+Px) los cuales se producen del resultado del primero.

La obtención de la ecuación de la flecha con el cual se basó para obtener el momento máximo, y posteriormente encontrando el esfuerzo máximo basandonos en la fórmula de la escuadrilla debido a carga y flexión es con el que se parte para encontrar las fórmulas de interacción que se deducirán en el siguiente inciso de este capítulo.

## IV.2.- DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE COLUMNAS ESBELTAS DE ACERO A FLEXOCOMPRESION

Por lo que se refiere a columnas esbeltas de acero a flexocompresión de eje recto y sección transversal constante, osea columna larga, se han realizado un gran número de estudios y existen muchos trabajos referentes al problema de inestabilidad de piezas sometidas a flexocompresión.

Sin embargo, en esta tesis se presentará un procedimiento de diseño, que es muy usado en la práctica, que es por un lado suficientemente simple para el uso rutinario y por otro incluye todos los factores que se han presentado que tienen influencias - referente al problema de pandeo de columnas, y se pueda tener - una continuidad del estudio inicial de este trabajo teórico hasta su aplicación, práctica en el cual intervinieron otros factores que se añaden al problema que se estudió por separado. El procedimiento para el diseño consiste, en la aplicación de las fórmulas de interacción que se presentan en seguida a columnas- de acero a flexocompresión con flexión alrededor de un eje principal de la sección de la columna esbelta, y del cuál se hará - una prolongación por una columna que tenga flexocompresión alrededor de los dos ejes principales de la columna. Entonces las- ecuaciones de interacción para el diseño elástico de una columna larga flexocomprimida se analizarán de la siguiente forma:

Para este análisis, nos basarémos en una columna biarticulada de sección rectangular constante en todo su eje longitudinal como- se muestra en la (fig.1). Entonces del estudio realizado en esta tesis en el capítulo II.3, encontrarémos que el esfuerzo - de una columna considerando flexión y carga axial; basandonos - en la fórmula de la escuadrilla resultó:

$$f = P\left(\frac{1}{A} + \frac{P_q \sec \frac{KL}{2}}{S}\right)$$

que se le asignó a esta fórmula el número (30) de ese capítulo. A esta fórmula se le dará una transformación para trabajarla en función de esfuerzos últimos, y realizando ciertas transformaciones para encontrar la fórmula de interacción para su mejor aplicación. Por consiguiente partiendo de este esfuerzo:

$$f = \frac{P}{A} + \frac{Pq}{S} \sec \frac{KL}{2} \qquad (1)$$

Nosotros sabemos que el módulo de sección y la constante $K^2$ que se consideró para representar un término son los siguientes:

$$S = \frac{I}{y} = \frac{I}{C} \qquad (2)$$

$$K^2 = \frac{P}{EI} \quad , \qquad \Rightarrow \quad K = \sqrt{\frac{P}{EI}} \qquad (3)$$

Sustituyendo los términos (2) y (3) en (1) tenemos:

$$f_{max} = \frac{P}{A} + \frac{PqC}{I} \sec \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Ahora hacemos el siguiente artificio: si en el 2º término del 2º miembro introduzco L a la raíz, y multiplicando el cociente por $\pi$; introducimos $\pi$ del denominador a la raíz tendrémos:

$$f_{max} = \frac{P}{A} + \frac{PqC}{I} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{PL^2}{\pi^2 EI}} \qquad (4)$$

Por otra parte la carga crítica para una columna biarticulada — es: $P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$

El cual lo podemos expresar de la forma siguiente:

$$\frac{1}{P_{cr}} = \frac{L}{\pi^2 EI} \qquad (4')$$

Sustituyendo el término dado en (4') en la fórmula (4) tenemos:

$$f_{max} = \frac{P}{A} + \frac{PqC}{I} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \qquad (5)$$

Ahora por efecto de seguridad la C R S nos dice que la carga de servicio debe ser menor que la carga crítica, para el cual se especifica un factor de seguridad igual a 1.92.

$$\Rightarrow \quad P = \frac{P_{cr}}{1.92} = 0.52\, P_{cr}$$

Por lo tanto queda:

$$\frac{P}{P_{cr}} = 0.5$$

Entonces si la relación $\frac{P}{P_{cr}} = 0.5$, resulta la transformación siguiente:

$$\text{Sec}\ \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \doteq \frac{1}{1-P/P_{cr}}$$

El cual lo sustituimos en la fórmula (5):

$$f_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pqc}{I}\left(\frac{1}{1-\frac{P}{P_{cr}}}\right) \qquad (6).$$

Asignando como efecto de notación los términos de la fórmula -- (6) como:

$$\left.\begin{aligned} f_u &= f_{max} \\ f_a &= \frac{P}{A} \\ f_b &= \frac{Pqc}{I} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

En consecuencia sustituyendo (7) en (6) queda simplificado de - la forma:

$$f_u = f_a + f_b\left(\frac{1}{1-\frac{P}{P_{cr}}}\right) \qquad (8)$$

Dividiendo la fórmula (8) entre el esfuerzo último $f_u$ queda:

$$\frac{f_a}{f_{u_1}} + \frac{f_b}{f_{u_2}\left(1-\frac{P}{P_{cr}}\right)} \leq 1 \qquad (9)$$

Por otra parte tenemos que:

$$\frac{P}{P_{cr}} = \frac{f_a}{f_{cr}} \qquad (10)$$

$f_{u_1} \sim F_a$ que es el esfuerzo permisible de la columna en compresión - simple. (11)

$f_{u_2} \sim F_b$ que es el esfuerzo permisible de compresión debido a flexión. (12)

Con las consideraciones anteriores la fórmula (9) quedaría de - la forma siguiente:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b(1 - \frac{f_a}{f_{cr}})} \leq 1 \qquad (13)$$

Dividiendo ahora el esfuerzo crítico entre un factor de seguridad que de acuerdo a la CRS vamos a aplicar un factor de seguridad igual a 1.92.

$$f_{cr} \sim F'_e = \frac{f_{cr}}{FS} \qquad (14)$$

Ahora debemos aplicar un coeficiente correctivo Cm al esfuerzo máximo de compresión debido a flexión $f_b$.

$$f_b Cm \qquad (15)$$

Sustituyendo (14) y (15) en la ecuación (13) tenemos:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b Cm}{F_b(1 - \frac{f_a}{F'_e})} \leq 1 \qquad (16)$$

Quedando finalmente la fórmula (16) de interacción para el diseño de columnas de acero a la flexocompresión en un solo eje.

Nota.- Si en la ecuación (16) se cumple que es igual a uno, entonces quiere decir que la estabilidad esta en equilibrio.

Ahora si $\frac{f_a}{F_a} = 0.15$, se observa que el término correctivo se hace aproximadamente igual a uno quedando la fórmula (16) reducida a:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1 \qquad (17)$$

Donde la fórmula (17) de interacción es también para el diseño de columnas de acero a la flexocompresión en un solo eje.

A continuación haremos un resúmen de las fórmulas y términos de interacción para columnas de acero a flexocompresión alrededor de un eje:

A).- Si, $\frac{f_a}{F_a} = 0.15$

función de esfuerzos últimos, y realizando ciertas transformaciones para encontrar la fórmula de interacción para su mejor aplicación. Por consiguiente partiendo de este esfuerzo:

$$f = \frac{P}{A} + \frac{Pq}{S} \sec \frac{KL}{2} \qquad (1)$$

Nosotros sabemos que el módulo de sección y la constante $K^2$ que se consideró para representar un término son los siguientes:

$$S = \frac{I}{y} = \frac{I}{C} \qquad (2)$$

$$K^2 = \frac{P}{EI} \quad , \qquad \Rightarrow \quad K = \sqrt{\frac{P}{EI}} \qquad (3)$$

Sustituyendo los términos (2) y (3) en (1) tenemos:

$$f_{max} = \frac{P}{A} + \frac{PqC}{I} \sec \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Ahora hacemos el siguiente artificio: si en el 2º término del 2º miembro introduzco L a la raíz, y multiplicando el cociente por $\pi$; introducimos $\pi$ del denominador a la raíz tendrémos:

$$f_{max} = \frac{P}{A} + \frac{PqC}{I} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{PL^2}{\pi^2 EI}} \qquad (4)$$

Por otra parte la carga crítica para una columna biarticulada -- es: $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

El cual lo podemos expresar de la forma siguiente:

$$\frac{1}{P_{cr}} = \frac{L}{\pi^2 EI} \qquad (4')$$

Sustituyendo el término dado en (4') en la fórmula (4) tenemos:

$$f_{max} = \frac{P}{A} + \frac{PqC}{I} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \qquad (5)$$

Ahora por efecto de seguridad la C R S nos dice que la carga de servicio debe ser menor que la carga crítica, para el cual se específica un factor de seguridad igual a 1.92.

$$\Rightarrow \quad P = \frac{P_{cr}}{1.92} = 0.52\ P_{cr}$$

Por lo tanto queda:

$$\frac{P}{P_{cr}} = 0.5$$

Entonces si la relación $\frac{P}{P_{cr}} = 0.5$, resulta la transformación siguiente:

$$\operatorname{Sec} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \doteq \frac{1}{1-P/P_{cr}}$$

El cual lo sustituimos en la fórmula (5):

$$f_{max} = \frac{P}{A} + \frac{PqC}{I} \left(\frac{1}{1-\frac{P}{P_{cr}}}\right) \qquad (6)$$

Asignando como efecto de notación los términos de la fórmula (6) como:

$$\left.\begin{aligned} f_u &= f_{max} \\ f_a &= \frac{P}{A} \\ f_b &= \frac{PqC}{I} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

En consecuencia sustituyendo (7) en (6) queda simplificado de la forma:

$$f_u = f_a + f_b \left(\frac{1}{1-\frac{P}{P_{cr}}}\right) \qquad (8)$$

Dividiendo la fórmula (8) entre el esfuerzo último $f_u$ queda:

$$\frac{f_a}{f_{u_1}} + \frac{f_b}{f_{u_2}\left(1-\frac{P}{P_{cr}}\right)} \leq 1 \qquad (9)$$

Por otra parte tenemos que:

$$\frac{P}{P_{cr}} = \frac{f_a}{f_{cr}} \qquad (10)$$

$f_{u_1} \sim F_a$ que es el esfuerzo permisible de la columna en compresión simple. (11)

$f_{u_2} \sim F_b$ que es el esfuerzo permisible de compresión debido a flexión. (12)

Con las consideraciones anteriores la fórmula (9) quedaría de la forma siguiente:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_{b}(1-\frac{f_a}{f_{cr}})} \leq 1 \tag{13}$$

Dividiendo ahora el esfuerzo crítico entre un factor de seguridad que de acuerdo a la CRS vamos a aplicar un factor de seguridad igual a 1.92.

$$f_{cr} \sim F'_e = \frac{f_{cr}}{FS} \tag{14}$$

Ahora debemos aplicar un coeficiente correctivo Cm al esfuerzo máximo de compresión debido a flexión $f_b$.

$$f_b Cm \tag{15}$$

Sustituyendo (14) y (15) en la ecuación (13) tenemos:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b Cm}{F_b(1-\frac{f_a}{F'_e})} \leq 1 \tag{16}$$

Quedando finalmente la fórmula (16) de interacción para el diseño de columnas de acero a la flexocompresión en un solo eje.

Nota.- Si en la ecuación (16) se cumple que es igual a uno, entonces quiere decir que la estabilidad esta en equilibrio.

Ahora si $\frac{f_a}{F_a} = 0.15$, se observa que el término correctivo se hace aproximadamente igual a uno quedando la fórmula (16) reducida a:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1 \tag{17}$$

Donde la fórmula (17) de interacción es también para el diseño de columnas de acero a la flexocompresión en un solo eje.

A continuación haremos un resúmen de las fórmulas y términos de interacción para columnas de acero a flexocompresión alrededor de un eje:

A).- Si, $\frac{f_a}{F_a} = 0.15$

Se usará la fórmula: $\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1$

B).- Si, $\frac{f_a}{F_a} > 0.15$

Se usará la fórmula: $\frac{f_a}{F_a} + \frac{Cmf_b}{(1-\frac{f_a}{F'_e})F_b} \leq 1$

Ahora identificarémos cada uno de los términos de la fórmula de interacción:

1.- $f_a = \frac{P}{A}$ , esfuerzo actuante a compresión simple de servicio-igual a la carga axial entre el área de la sección

2.- $F_a$ = esfuerzo permicible a la compresión axial de la columna, se determina dependiendo del tipo de pandeo si es-elástico ó inelástico por carga axial (definido al estudiar las columnas de acero sujetas a carga axial por el método del AISC dadas a conocer en el capítulo --- III.2).

Nota.- Existen para cierto tipo de acero una tabula -- ción donde se encuentran las relaciones de esbeltéz y-con su respectivo esfuerzo admisible, osea en estas tablas $F_a = f(KL/r)$;un ejemplo de esta tabla se da en el capítulo III-fig.7 para un acero A-36.

3.- $f_b = \frac{M}{S}$ , es el esfuerzo actuante normal de compresión debi-a la flexión.

4.- $F_b$ = esfuerzo permisible de compresión debido a la flexión.

a) Para columnas en cajón:

$F_b = 0.6\ F_y$ donde: $F_y$ = esfuerzo de fluencia.

b) Para columnas de sección I ó ⌶:

$F_b$ , se determinará de acuerdo a la definición del-estudio de la estabilidad de elementos sujetos a la flexión; como sigue:

Donde para una sección I,que se muestra en la --- (fig.2).

Donde por pandeo lateral y flexión,

$$F_b = \frac{843\ 700C_b}{\frac{Ld}{bt}} \qquad \text{(I)}$$

Donde:

$$C_b = 1.75 - 1.05 \left(\frac{M_1}{M_2}\right) + 0.3 \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2$$

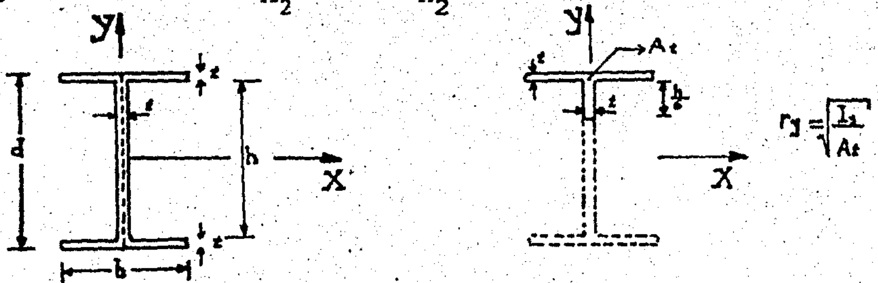



Fig. 2

Hay dos casos para diferentes tipos de pandeo:

- Si, $\frac{KL}{r_y} \geq C_c'$ entonces $F_b = \dfrac{11.95 \times 10^6 C_b}{\left(\frac{KL}{r_y}\right)^2}$ PARA PANDEO ELASTICO. (II)

- Si, $\frac{KL}{r_y} < C_c'$ entonces $F_b = \left[\dfrac{2}{3} - \dfrac{F_y \left(\frac{KL}{r_y}\right)^2}{10.76 \times 10^6 C_b}\right] F_y$ (III)

PARA PANDEO INELASTICO.

Donde: - $C_c' = \dfrac{35.86 \times 10^6 C_b}{F_y}$

- $r_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{A}}$ ; radio de giro de una "T" formada por el pantín y 1/6 del alma con respecto al eje vertical del eje de simetría.

Donde el esfuerzo permisible $F_b$ debe ser el mayor de los valores de las parejas (I) y (II) ó (I) con (III); dependiendo el tipo de pandeo que se haya generado.

En ninguno de los casos anteriores $F_b > 0.6F_y$.

5.- $F'_e = \frac{f_{cr}}{FS} = \frac{\pi^2 E}{1.92(\frac{KL}{r})^2} =$ , esfuerzo de Euler.

Donde: - $FS = 1.92$

$\Rightarrow F'_e = \frac{10\ 480\ 000}{(\frac{KL}{r})^2}$ - $E = 2.038 \times 10^6$

6.- Cm, es el coeficiente correctivo y se define como sigue:

a) Para miembros a compresión en los que haya posibilidad de traslación ó desplazamiento lateral relativo de sus extremos:


$$Cm = 0.85$$

b) Para miembros en compresión doblemente empotrados ó que pertenecen a marcos arriostrados, osea sin desplazamiento lateral que no se permite - la traslación relativa lateral de los extremos:

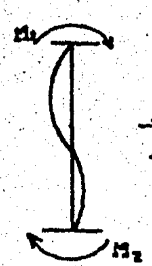

$\frac{M_1}{M_2} > 0\ (+)$

Fig.a

$$Cm = 0.6 + 0.4\,\frac{M_1}{M_2} \geq 0.4$$

Donde: la relación $\frac{M_1}{M_2}$ tiene -- las siguientes condiciones:

- $M_1$ y $M_2$ son los momentos en los extremos del miembro siendo siempre $M_1 \leq M_2$.
- $\frac{M_1}{M_2}$ esta relación es positiva (+), cuando la curvatura es simple osea los momentos son - de signos iguales, como se observa en la (fig.a).
- $\frac{M_1}{M_2}$ esta relación es negativa




$\frac{M_1}{M_2} < 0\ (-)$

Fig.b

cuando la curvatura es doble, osea los momentos son de diferente signo como se observa en la (fig.b).

c) Para miembros a compresión que formen parte de marcos arriostrados que no permiten la traslación lateral de las juntas ó doblemente empotrados y con continuidad y con cargas laterales entre sus apoyos:

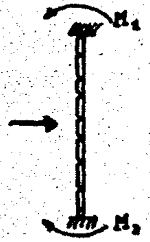


Fig.c

$Cm = 0.85$

$Cm = 1$

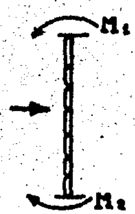


Fig.d

respectivamente como se muestran en las (fig.c y d).

Ahora para la aplicación de fórmulas de interacción de columnas de acero a flexocompresión biaxial, osea que existe flexión en los dos sentidos; prolongarémos las fórmulas (16) y (17), añadiendo en el primer miembro de cada una de ellas un término que tenga en cuenta la flexión alrededor del segundo eje principal, donde este término es semejante al segundo término de la fórmula solamente que esta referido al otro plano de flexión. Sea la siguiente sección que se muestra en la (fig.3).

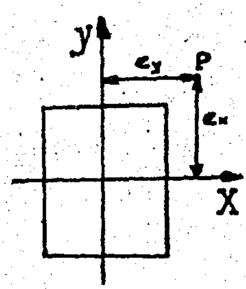


Fig.3

Para este caso entonces tenemos que la fórla de interacción será si:

A).- $\frac{f_a}{F_a} = 0.15$

entonces: $$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1 \qquad (18)$$

B).- $\frac{f_a}{F_a} > 0.15$

entonces:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_{mx} f_{bx}}{F_{bx}(1-\frac{f_a}{F'_{ex}})} + \frac{C_{my} f_{by}}{F_{by}(1-\frac{f_a}{F'_{ey}})} = 1 \qquad (19)$$

Una aplicación de éste inciso se presenta en el capítulo V de esta tesis para su mejor entendimiento y comprensión.

## IV.3.- DISEÑO DE COLUMNAS ESBELTAS DE MADERA A FLEXOCOMPRESION.

En este inciso estudiaremos el caso de columnas de madera a la flexocompresión, donde este material es muy usado para las construcciones reales; el procedimiento para llevar a cabo su revisión así como su diseño esta basado también en una fórmula de interacción que para el caso de flexocompresión simple es la siguiente:

$$\frac{\frac{P}{A_n}}{f_{cd}} + \frac{\frac{M}{S} + \frac{P}{A_n}\frac{6eB}{d_e}}{f_{bd}C_f} \leq 1 \qquad (1)$$

Una representación gráfica de cómo se representa esta flexocompresión simple lo verémos en la (fig.1) de este inciso en una sección transversal de una columna que tiene geometría rectangular. Para el estudio de este tipo de columnas se realizará con columnas de madera de sección rectangular con las fibras paralelas a su eje longitudinal, maciza y esbeltas.

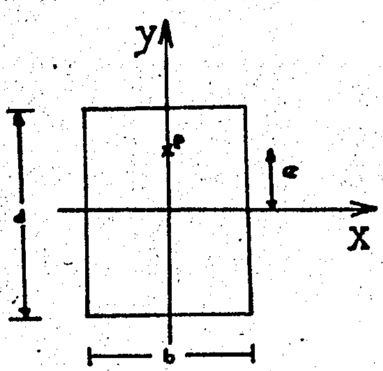


Fig.1

Lo más importante para el diseño y revisión de columnas de madera es saber aplicar correc tamente la fórmula de interacción dada en (1).

Significado de cada uno de los términos de la fórmula de interacción:

1.- $P$ Carga axial.

2.- $A_n$ Area neta de la sección transversal del elemento.

3.- $S$ Módulo de la sección transversal con respecto al eje de flexión.

4.- $M$ Momento flexionante actuante (en la Fig.1, $M$ es el momento alrededor del eje x; y se representa como $M_x$).

5.- $e$ Excentricidad de la carga P, y esta dado como:

$e_{mín} = \frac{1}{10} d$ ; donde d es la dimensión paralela a plano de flexión.

6.- $d_e$ Dimensión de la sección transversal en la dirección de la excentricidad e.

7.- $\beta$ Coeficiente por efecto de esbeltéz de la pieza, teniendo los siguientes valores:

-$\beta = 1$; en pandeo inelástico osea cuando:

$$\frac{KL}{b} \leq C_c = \sqrt{0.3\,\frac{E}{f_{cp}}}$$

-$\beta = 1.25$; en pandeo elástico osea cuando:

$$\frac{KL}{b} \geq C_c = \sqrt{0.3\,\frac{E}{f_{cp}}}$$

Donde: $f_{cp}$ = esfuerzo de compresión admisible de la madera, paralelo a las fibras para las columnas cortas.

$E$ = módulo de la elasticidad de la madera.

8.- $f_{cd}$ Esfuerzo admisible de compresión axial con pandeo de la columna.

$$-f_{cd} = \frac{0.3\,E}{\left(\frac{KL}{b}\right)^2} \leq f_{cp}\text{; para pandeo elástico.}$$

$$f_{cd} = f_{cp}\text{; para pandeo inelástico.}$$

9.- $f_{bd}$ Esfuerzo permisible de flexión con pandeo. Teniendo los siguientes valores:

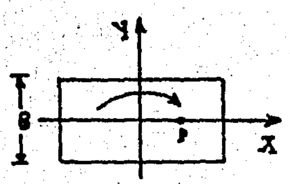
$-f_{bd} = f_{bp}$ ; ($f_{bp}$ = esfuerzo permisible de flexión sin pandeo en piezas cortas dada en el capítulo III.3).

Cuando $Cs \leq 10$, siendo:

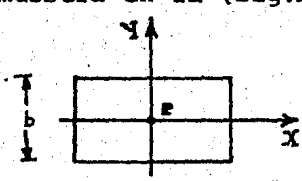
$$Cs = 1.4\sqrt{\frac{d_e l}{B^2}}$$

Donde: - l = longitud de la columna entre soportes que evitan el pandeo lateral.

- B = dimensión de la sección transversal en la dirección perpendicular al plano de flexión, en pandeo por flexión, como se muestra en la (fig.a).
- b = dimensión de la sección transversal en la dirección en que se considera el pandeo por compresión axial (dimensión paralela al plano de flexión) como se muestra en la (fig.b)




Eje de flexión y
Plano de flexión Zx
Fig.a




Eje de flexión x
Plano de flexión Zy
Fig.b

$$-f_{bd} = f_{bp}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{C_s}{C_k}\right)^4\right], \text{ cuando: } 10 < C_s \leq C_k$$

$$\text{siendo } C_k = \sqrt{\frac{3}{5}\ \frac{E}{f_{bp}}}$$

$$-f_{bd} = \frac{0.4\ E}{C_s^2}, \quad \text{cuando: } C_k < C_s \leq 50$$

10.- $C_f$ Coeficiente que modifica el esfuerzo permisible por flexión, por efecto de seguridad.

$$-C_f = 0.81\ \frac{d^2 + 922}{d^2 + 568}$$

$-C_f = 1$ , cuando: $d \leq 30\,cm.$

donde: d = dimensión paralela al plano de flexión, dado en cm.

Un ejemplo de aplicación de esta fórmula de interacción de columna de madera se presenta en el capítulo V.
Una prolongación para columnas de madera a flexocompresión doble de la fórmula de interacción dada en (1), añadiendo un término más al primer miembro semejante al segundo término de éste nos dará la fórmula para diseñarlo y revisarlo. Que para el caso mencionado la fórmula de interacción se da de la forma siguiente:

$$\frac{\frac{P}{A_n}}{f_{cd}} + \frac{\frac{M_x}{S_x} + \frac{P}{A_n}\,\frac{6e_xB_x}{d_{ex}}}{f_{bdx}C_{fx}} + \frac{\frac{M_y}{S_y} + \frac{P}{A_n}\,\frac{6e_yB_y}{d_{ey}}}{f_{bdy}C_{fy}} \leq 1 \qquad (2)$$

donde: $- M_x = P\ e_x$

$- M_y = P\ e_y$

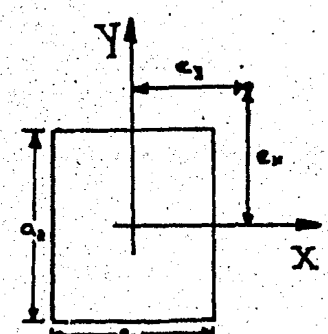
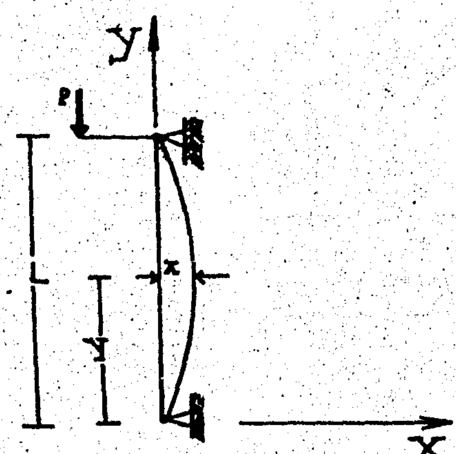



Fig. 2

Una figura que representa la flexocompresión doble en la sección rectangular de una columna de madera, se muestra en la (fig.2).
Un ejemplo práctico para la aplicación de la fórmula de interacción (2) se da en al capítulo V de esta tesis.

## IV.4.- DISEÑO DE COLUMNAS ESBELTAS DE CONCRETO REFORZADO A FLEXOCOMPRESION.

El comportamiento de columnas esbeltas a la flexocompresión de concreto reforzado, puede hacer que la carga última se reduzca por deflexiones laterales de la pieza provocadas por flexión; en la (fig.1) se ilustra este efecto para el caso especial de una columna inicialmente recta con flexión en curvatura simple provocada por la carga P, el cual esta aplicado a una excentricidad igual a q en cada extremo. La deformación por flexión de la columna hace que la excentricidad de la carga en la sección crítica sea $(q + x)$ en que x es la excentricidad adicional debido a la deflexión en esa sección. En consecuencia, el momento flexionante máximo aumenta hasta $P(q + x)$ a esto comúnmente se le conoce como el efecto Px. La importancia de las deflexiones laterales debidas a la flexión depende del tipo de carga en la columna y de las condiciones en los extremos el momento Px ó momento adicional, a veces se ha denominado momento secundario aunque ese término tiende a implicar que el momento es de importancia secundaria, en tanto que en algunos caso puede tener mucho significado.




$M_o = Pq$ Momento de primer orden.

$M_1 = Pq + Px$

Donde: $Px$ = Momento adicional.

Por lo tanto:

$M_1 = M_o + Px$ Momento de segundo orden.

Fig.1. Columna de concreto reforzado a flexocompresión

Una columna corta se define como aquélla en que la carga última no se reduce por las deformaciones de flexión debido a que las excentricidades adicionales x ó son despreciables u ocurren lejos de la sección crítica. En cambio una columna esbelta se define como aquella en que el momento flexionante amplificado provocado por la excentricidad adicional reduce la carga última El comportamiento de la columna que se ve en la (fig.1), bajo carga creciente está ilustrado en el diagrama de interacción para la sección crítica de la columna dada en la (fig.2), si la excentricidad adicional x es despreciable, el momento máximo M es igual a Pq en todas las etapas de la carga y se seguirá una trayectoria P-M al aumentar la carga. Este es el comportamiento de una columna corta, y gradualmente ocurre una falla del material de la sección cuando se llega a la línea de interacción.

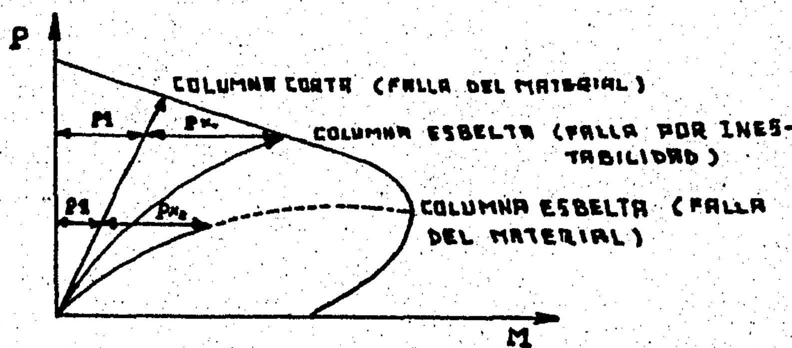



Fig.2. Diagrama de interacción para una sección de columna de concreto reforzado que ilustra el comportamiento P-M de columnas cortas y largas hasta la falla.

Si la columna es esbelta, el momento máximo M es igual a P(q+x) y debido a que x aumenta más rapidamente a niveles de carga elevada, la trayectoria P-M es curva. Pueden ocurrir dos comportamientos de columnas esbeltas. Primero una columna puede ser estable bajo la deflexión $x_1$ pero despues de alcanzar la línea de interacción ocurre una falla del material de la sección este tipo de falla generalmente ocurre en las columnas de edifi cios que están arriostradas contra deflexiones laterales. En segundo lugar la columna puede hacerse inestable antes de alcanzar la línea de interacción. Esta falla puede ocurrir en columnas no arriostradas.

Se puede ilustrar el comportamiento de columnas esbeltas para determinadas condiciones de carga y extremos, utilizando diagramas de interacción de columnas esbeltas el cual fue realizado por Mac Gregor y asociados.

En el comportamiento de columnas las principales variables que afectan la resistencia de columnas esbeltas con como sigue:

1.- El grado de restricción rotacional en el extremo, A mayor rigidéz del sistema de vigas que llegan a la columna, mayor será la resistencia de ésta.
2.- El grado de restricción lateral, Una columna no arriostrada (contraventeada) contra desplazamientos de extremos es apreciablemente, más débil que otra arriostrada.
3.- La cuantía de refuerzo de acero y la resistencia de los materiales. Ambos afectan la rigidéz a flexión y resistencia de la sección de la columna.
4.- La duración de la carga. El flujo plástico del concreto durante cargas sostenidas aumenta las deflexiones de la columna, y por tanto normalmente disminuye la resistencia de las columnas esbeltas.

Ahora para el diseño de los miembros de compresión se puede basar en los momentos y fuerzas que se encuentran de un análisis de segundo orden de la estructura, tomando en cuenta que las rigideces reales de los miembros, los efectos de las deflexiones en los momentos y fuerzas, y los efectos de la duración de la carga. Las secciones pueden estan proporcionadas para resistir estas acciones sin modificación, debido a que ya se tomó en cuenta el efecto de la esbeltéz de la columna al determinar las acciones.

El principal factor a incluir en este análisis de segundo orden es el momento Px. Mac Gregor ha resumido todos los métodos para desarrollar esos análisis, Se puede idealizar la estructura como una marco plano con elementos lineales. Se deben tomar relaciones realistas de momento curvatura para proporcionar valores exactos para deflexiones y momentos adicionales, y además - debe tomarse en cuenta el efecto de la carga axial en la rigidéz rotacional de los miembros a compresión. Los momentos máximos determinados deben incluir el efecto de los desplazamientos y rotaciones en el marco.

El enfoque más racional es utilizar este tipo de análisis para determinar las acciones de columnas para el diseño de secciones pero debido a su complejidad el análisis depende de la disponibilidad de programas de computadora escritos adecuadamente.

En el diseño de columnas de concreto reforzado a flexocompresión simple, se utiliza el análisis estructural convencional de primer orden, basados en rigideces relativas aproximadas y en - ignonar el efecto de desplazamientos laterales de miembros para determinar los momentos y fuerzas de un marco, se deben modificar las acciones así encontradas para tomar en cuenta los efectos de segundo orden. Entonces se proporcionan las secciones - para que resistan las acciones modificadas, el procedimiento dado por el A C I para este propósito es el método amplificador - de momentos, semejante al utilizado en las especificaciones del Instituto Norteamericano de Construcción del Acero.

El método establece en el intervalo elástico la relación considerando un momento amplificado, y sin tener en cuenta problemas de inestabilidad, (como se estudio en el primer inciso de este - capítulo). La relación (1) proporciona una aproximación para el momento flexionante máximo en las columnas con momentos iguales en los extremos y flexionadas en curvatura simple.

$$M_{max} \doteq \frac{M_o}{1-(\frac{P}{P_c})} \qquad (1)$$

Donde: - $M_o = Pq$ Momento máximo de análisis de primer - orden.

- $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$ Es la carga crítica elástica para el - pandeo, en el plano del momento aplicado.

- P          Carga aplicada a la columna.

En este caso, el momento máximo y la deflexión máxima de la columna ocurre a la mitad de la altura.

Ahora si los momentos de los extremos son desiguales la ecuación (1) es demaciado conservadora, especialmente cuando los momentos de los extremos son de distinto signo.

Para el caso de momentos desiguales de los extremos, se estima el momento máximo de la columna sustituyendo $M_o$ por un momento uniforme equivalente a $C_m M_o$ que produce la misma resistencia de columna esbelta que la obtenida del patrón de momentos reales, consecuentemente la ecuación es:

$$M_{max} = \frac{C_m M_o}{1-(\frac{P}{P_c})} \tag{2}$$

Donde: $C_m$ = Factor correctivo según A C I.

Entonces el método se vuelve como un método amplificado quedando como:

$$M_{max} = dM_o \tag{3}$$

Considerando que la carga y el momento último a resistir, encontrados utilizando un análisis de primer orden, son $P_u$ y $M_u = P_u q$. Entonces la carga y momentos utilizados en el diseño de las secciones son $P_u$ y el dado en la ecuación (3) donde d es el factor de amplificación de momentos.

$$d = \frac{C_m}{1- \frac{P}{P_c}} \tag{4}$$

Donde:

a) $C_m = 0.6 + 0.4 \left(\frac{M_1}{M_2}\right)$ Aplicable a columnas que no tengan desplazamientos relativos y cargas intermedias.

$C_m = 0.4$

b) $C_m = 1$ Aplicable a columnas con desplazamiento lateral.

c) $M_1$, $M_2$ Momentos en los extremos de la columna

d) $\frac{M_1}{M_2} > 0$, (+) Esta relación será positiva si la columna se deforma en curvatura simple.

e) $\frac{M_1}{M_2} < 0$, (-) Esta relación es negativa cuando la curvatura es doble.

f) $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$ Es la carga crítica de Euler --- elástica para el pandeo para el plano del momento aplicado.

Donde:

- K= Factor de longitud efectiva para las columnas que varía:
  - $0.5 \leq K \leq 1$ para marcos contraventeados.
  - $K > 1$ para marcos no contraventeados.
- L= Longitud real de la columna.
- $EI = \left(\frac{E_c I_g}{5} + E_s I_s\right) \frac{1}{1+\beta d}$

Donde: * $EI$ = Rigidéz a flexión de la columna.

* $E_c$ = Módulo de elasticidad del concreto.

  $E_c \doteq 10\sqrt{f'_c}$

* $I_g$ = Momento de inercia de la sección bruta del concreto de la columna alrededor del eje centroidal, ignorando el refuerzo.

* $E_s$ = Módulo de elasticidad del acero.

* $I_s$ = Momento de inercia del refuerzo alrededor del eje centroidal de la sección transversal de la columna.

* $\beta d$ = Factor correctivo.

  $\beta d = \frac{M_{cm}}{M_{tot.}}$ , $0 \leq Bd \leq 1$

  $M_{cm}$ = Momento máximo de diseño por carga muerta.

$M_{tot.}$ = Momento máximo de diseño por carga total

$$- \; EI = \frac{E_c I_g}{2.5(1+\beta d)}$$

, esta fórmula se usará si el porcentaje de acero, dado en el área ($A_g$) es pequeña.

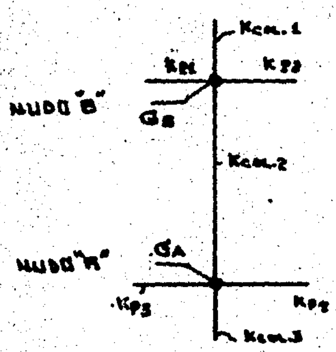
g) $P = P_u$ Carga última en la columna.

El A C I presenta dos nomogramas para la determinación del factor de longitud K como se explica en el capítulo segundo de esta tesis donde el parámetro "G" es:

$$G = \frac{\sum K_{col.}}{\sum K_{piso.}}$$

Donde: $K_{col.} = \frac{I}{L}$ de los elementos verticales que concurren al nudo.

$K_{piso.} = \frac{I}{L}$ de los elementos horizontales que concurren al nudo.



$$G_A = \frac{K_{col.2} + K_{col.3}}{K_{p3} + K_{p4}}$$

$$G_B = \frac{K_{col.1} + K_{col.2}}{K_{p3} + K_{p4}}$$

Fig. 3. Cálculo de parámetros para el cálculo de K.

Nota.- Los nomogramas de la (fig.4), que son los nomogramas para determinar el coeficiente de longitud K para marcos contraventeados y marcos no contraventeados; se desarrollaron para columnas de comportamiento lineal pero puede usarse en forma aproximada para columnas de concreto reforzado.

Se pueden calcular los valores de K si se conocen los de "G" en cada junta y se pueden obtener utilizando los nomogramas de --- Jackson y Moreland, como se muestra en la (fig.4).

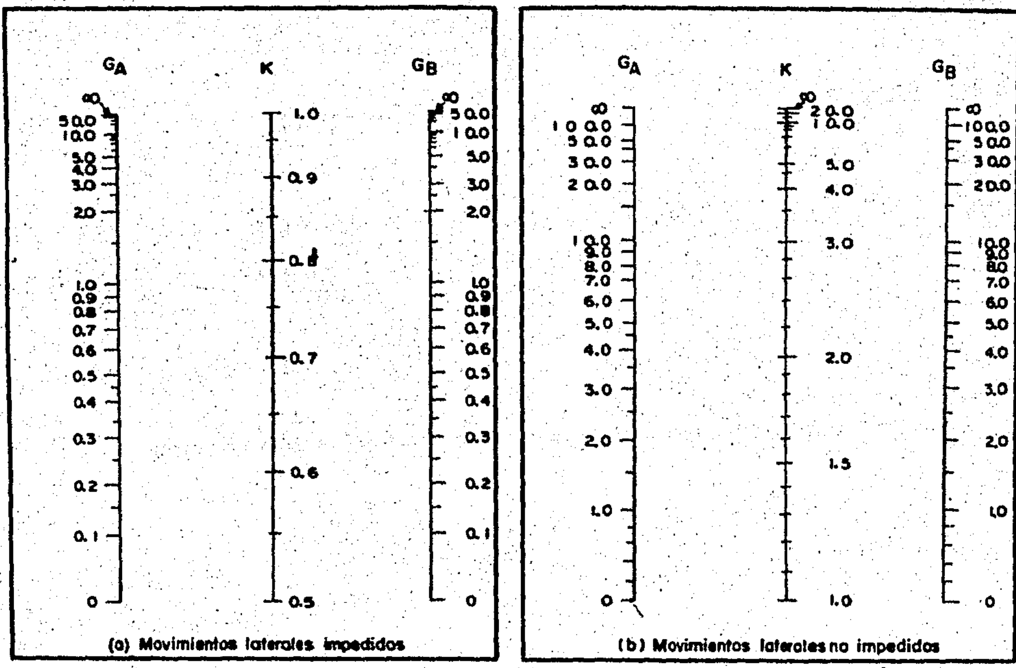



Fig.4 -- *Factores K de longitud efectiva*

Al determinarse "$G_A$" y "$G_B$" como se muestra en la (fig.3), los valores de EI utilizados deben tomar en cuenta el agrietamiento del concreto y la cuantía del acero.
Para el uso de las ecuaciones amplificadoras donde es evidente- el método de diseño es conservador en la mayoría de los casos.- El A C I requiere que se le considere a las columnas como esbeltas en marcos contraventeados, osea cuando no tienen desplaza-- miento lateral (restringidos).

$$34-12 \frac{M_1}{M_2} \leq \frac{KL}{r} < 100 \qquad (5)$$

en marcos no contraventeados osea con desplazamiento lateral -- (no restringidos).

$$22 \leq \frac{KL}{r} < 100 \tag{6}$$

Para columnas con; $\frac{KL}{r} > 100$ (7)

En este caso no se puede hacer uso de la aplicación del Método-Simplificado estudiado anteriormente y dado por la ecuación (3), sino que debe hacerse un análisis de segundo orden.
Pero si la relación de esbeltéz cae dentro de los intervalos fijados en las ecuaciones (5) y (6), en este caso sí se puede --- aplicar el método simplificado, porque la columna a la que uno- este estudiando tiene problemas de esbeltéz, entonces aplica el momento de segundo orden de A C I dada en la ecuación (3).
Finalmente de estas comparaciones, si en algunos de los intervalos (5) y (6) la relación de esbeltéz resulta menor que el intervalo fija;, entonces no se tiene problema de esbeltéz; quedando en este caso como resultado el que se obtenga en el momento- de primer orden. Osea se trata de una columna corta.
En marcos no contraventeados, se debe calcular el valor de d para todo el piso, suponiendo que todas las columnas están cargadas tomando P y $P_c$ como la sumatoria $\sum P$ y $\sum P_c$, para todas -- las columnas de esa planta. Al diseñar cada columna individual de esta planta, se debe tomar d como el mayor de los valores -- mencionados antes calculados para toda la planta ó el valor calculado para la columna individual, suponiendo que sus extremos- estan arriostrados. En las columnas que no esta arriostradas,- se deben diseñar las vigas para los momentos amplificados de -- los extremos de las columnas en las juntas. Cuando las columnas estan sujetas a flexión biaxial, se deben amplificar el momento alrededor de cada eje, usando el valor de d calculado - para cada eje. En los manuales de la A C I se dispone de auxiliares de diseño para el método amplificador de momento. Aunque el manual de diseño de columnas se basa en el código A C I de -

1963 que utilizó un enfoque de factor de reducción para el diseño de columnas esbeltas, el manual incluye también auxiliares - de diseño para el método mplificador de momentos. El manual de diseño más reciente contiene algunos ejemplos de aplicaciones - del método amplificador de momentos.

Nota.- Para el cálculo del radio de giro r de la relación de- esbeltéz es: r ≐ 0.30 veces el lado menor en columnas rectangulares.

r ≐ 0. 25 veces el diámetro en columnas circulares.

Para su mejor entendimiento y conocer su aplicación práctica -- del método se pone un ejemplo en el capítulo V de esta tesis.

Con la obtención del momento amplifidado, como se explica en este inciso para una columna de concreto reforzado sujeto a la -- flexocompresión en un plano (si existe flexocompresión biaxial- se obtiene por separado el momento amplificado en el otro pla-- no) se diseña la columna esbelta como una columna corta sujeta- a flexocompresión simple ó biaxial dependiendo su caso, usando- sus respectivas fórmulas para los diagramas de interacción, pero introduciendo el momento amplificado en cada caso por el valor del momento simple.

Un método para determinar la flexocompresión de columnas cortas alrededor de dos ejes, es el que ha desarrollado Bresler haciendo uso de los diagramas de interacción, el cual explicaremos por que este es un metodo muy simple para calcular los valores maximos de la carga de compresión que actua a excentricidades $e_x$, y $e_y$ en secciones rectangulares con refuerzo simétrico. Ademas este método nos servira para explicar como se introduce el mo-- mento amplificado en las fórmulas respectivas para diseñar una- columna esbelta. Sea entonces la siguiente sección transversal- que se muestra el la fig.5 de concreto reforzado a flexocompresión biaxial.

Donde: $P_r$= carga ultima actuante en la columna.

$M_x = P_r e_x$

$M_y = P_r e_y$

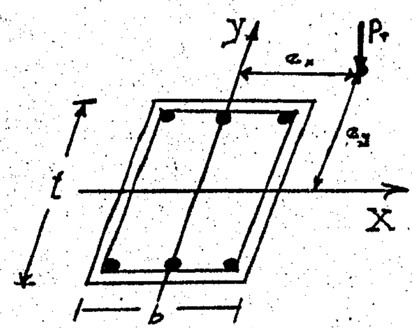



fig. 10 Columna a flexocompresión biaxial.

En donde los momentos $M_x$ y $M_y$ son momentos de primer orden. Pero ahora para considerar la esbeltez se trabaja con los momentos amplificados ; donde el momento flexionante ultimo en la dirección X es :

$$M_{rx} = d_x M_x$$

Y el momento flexionante el la dirección Y es:

$$M_{ry} = d_y M_y$$

Entonces con los elementos mecánicos conque se diseña una columna de concreto reforzado por este método son tres :

$P_r$

$M_{rx}$ , $e_x$

$M_{ry}$ , $e_y$

y la fórmula de Breesler es la siguiente:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} - \frac{1}{P_o}$$

Donde: P = Carga normal máxima que actua a excentricidades $e_x$, y $e_y$ de la columna ( máxima capacidad).

$P_x$ = Carga normal máxima a una axentricidad $e_x$ contenida en un plano de simetría ( $e_y$ = 0).

$P_y$ = Carga normal máxima a una exentricidad $e_y$ contenida en el plano de simetría normal al anterior ( $e_x$=0 )

Puede verse que la ecuación de Breesler reduce un problema complicado a una combinación de soluciones más simples: dos de flexocompresión en un plano de simetría y una de compresión axial para elementos simétricos.

La capacidad de carga de la columna debe ser mayor o igual que-la carga actuante $P_r$ a la que ha de trabajar la columna.

$$P \geq P_r$$

Para la determinación de $P_x$, $P_y$ y $P_o$ se tiene que proponer - la sección si no esta dado como dato; osea los lados geométricos b y t además para terminar el diseño de la columna hay - que dar el área de acero que necesite el cual debe estar uniformemente distribuido alrededor de toda la sección; quiere decir- en todo el perímetro de la sección antes del recubrimiento.

Para su mejor entendimiento y conocer su aplicación práctica -- del método de Breesler se pone el ejemplo número 13, para una - columna a flexocompresión en sus dos planos, y el ejemplo número 12 para el diseño de una columna a flexocompresión simple -- usando los diagramas de interacción con el momento amplificable.

la carga actuante $P_r$ a la que ha de trabajar la columna.

$$P \geq P_r$$

Para la determinación de $P_x$, $P_y$ y $P_o$ se tiene que proponer - la sección si no esta dado como dato; osea los lados geométricos b y t además para terminar el diseño de la columna hay - que dar el área de acero que necesite el cual debe estar uniformemente distribuido alrededor de toda la sección; quiere decir- en todo el perímetro de la sección antes del recubrimiento.

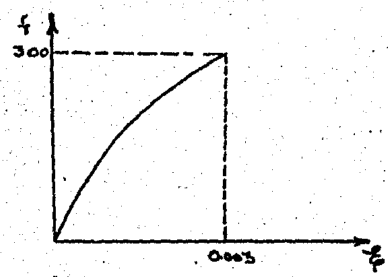
Para su mejor entendimiento y conocer su aplicación práctica -- del método de Breesler se pone el ejemplo número 13, para una - columna a flexocompresión en sus dos planos, y el ejemplo número 12 para el diseño de una columna a flexocompresión simple -- usando los diagramas de interacción con el momento amplificable.

# CAPITULO V

## V.- EJEMPLOS DE APLICACION

### EJEMPLO 1

Dada la gráfica esfuerzo de formación unitaria de un material, trazar un diagrama esfuerzo crítico-relación de esbeltéz --- ($f_{cr}$ , $\frac{KL}{r}$) que permita diseñar columnas esbeltas de ese material. El esfuerzo que produce el aplastamiento del material es de 300 kg/cm$^2$ y la ecuación de la gráfica es:




$$f^2 = 3 \times 10^7 \varepsilon \qquad (1)$$

A).- Se fija el rango de valores que le vamos a dar al material.

B).- Asignamos las deformaciones unitarias $\varepsilon$ los siguientes valores, dentro del rango que corresponden a la gráfica.

$\varepsilon_1 = 0.0001$, $\varepsilon_2 = 0.0002$, $\varepsilon_3 = 0.0003$, $\varepsilon_4 = 0.0004$, $\varepsilon_5 = 0.0005$, $\varepsilon_6 = 0.001$, $\varepsilon_7 = 0.002$, $\varepsilon_8 = 0.003$.

C).- Calculamos los valores correspondientes del esfuerzo utilizando la ecuación de la curva (1) de donde:

$$f = \sqrt{3 \times 10^7 \varepsilon} = 5477.23\sqrt{\varepsilon} \qquad (2)$$

Entonces sustituyendo en la ecuación (2) los valores de $\varepsilon$, obtenemos la segunda columna de la tabla I.

D).- Necesitamos ahora calcular el módulo de esbeltéz (KL/r), como el módulo $E_t = df/d\varepsilon$ , osea derivando la ecuación de la curva; entonces partiendo de la ecuación (1) tenemos:

$$2f \frac{df}{d\varepsilon} = 3 \times 10^7 \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{d\varepsilon} = \frac{3 \times 10^7}{2f} \qquad (3)$$

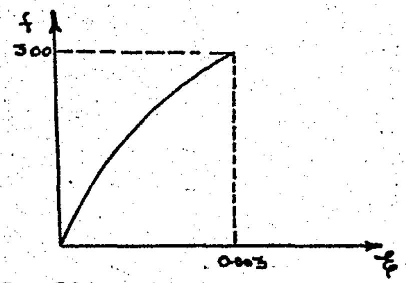
Sustituyendo en la igualdad (3), la ecuación (2) tenemos:

# CAPITULO V

## V.- EJEMPLOS DE APLICACION

### EJEMPLO 1

Dada la gráfica esfuerzo de formación unitaria de un material,- trazar un diagrama esfuerzo crítico-relación de esbeltéz --- ($f_{cr}$ , $\frac{KL}{r}$) que permita diseñar columnas esbeltas de ese mate-- rial. El esfuerzo que produce el aplastamiento del material es- de 300 kg/cm$^2$ y la ecuación- de la gráfica es:




$$f^2 = 3 \times 10^7 \xi \qquad (1)$$

A).- Se fija el rango de valores que le vamos a dar al material.

B).- Asignamos las deformaciones unitarias $\xi$ los siguientes valores, dentro del rango que corresponden a la gráfica.

$\xi_1 = 0.0001$, $\xi_2 = 0.0002$, $\xi_3 = 0.0003$, $\xi_4 = 0.0004$,

$\xi_5 = 0.0005$, $\xi_6 = 0.001$, $\xi_7 = 0.002$, $\xi_8 = 0.003$.

C).- Calculamos los valores correspondientes del esfuerzo utilizando la ecuación de la curva (1) de donde:

$$f = \sqrt{3 \times 10^7 \xi} = 5477.23\sqrt{\xi} \qquad (2)$$

Entonces sustituyendo en la ecuación (2) los valores de $\xi$, obtenemos la segunda columna de la tabla I.

D).- Necesitamos ahora calcular el módulo de esbeltéz (KL/r), - como el módulo $E_t = df/d\xi$ , osea derivando la ecuación de la curva; entonces partiendo de la ecuación (1) tenemos:

$$2f \frac{df}{d\xi} = 3 \times 10^7 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{df}{d\xi} = \frac{3 \times 10^7}{2f} \qquad (3)$$

Sustituyendo en la igualdad (3), la ecuación (2) tenemos:

$$\frac{df}{d} = \frac{3 \times 10^7}{2(5477.23\sqrt{\xi})} = \frac{2738.6}{\sqrt{\xi}} \Rightarrow f' = \frac{df}{d} = \frac{2738.6}{\sqrt{\xi}}$$

Como se dijo que $f' = E_t$ entonces el módulo de esbeltéz -- queda dado de la forma siguiente:

$$E_t = \frac{2738.6}{\sqrt{\xi}} \qquad (5)$$

E).- Entonces la ecuación (5), sirve para encontrar el módulo - tangente $E_t$, para los valores de las deformaciones unita-- rias; que se da en la tercera columna de la tabla I.

F).- Ahora nos falta calcular el módulo de esbeltéz que debe te ner una columna del material propuesto de comportamiento in elástico, para que cada uno de los esfuerzos determinados- sean críticos. Para esto aplicamos la fórmula:

$$\frac{KL}{r} = \sqrt{\frac{\pi^2 E_t}{f_c}} \qquad (6)$$

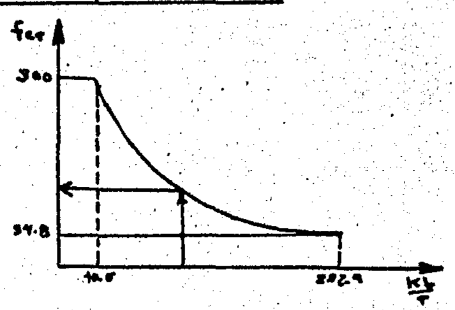
Sustituyendo en (6) los valores de los módulos tangentes - obtenidos en el paso quinto, y sus respectivos esfuerzos - obtenidos en el tercer paso; obtenemos la cuarta columna - de la tabla I.

G).-

TABLA I

| $\xi$ | f | $E_t$ | KL/r |
|---|---|---|---|
| 0.0001 | 54.7723 | 273 861.05 | 222.29 |
| 0.0002 | 77.459 | 193 649.01 | 157.14 |
| 0.0003 | 94.868 | 158 113.75 | 128.30 |
| 0.0004 | 109.54 | 136 930.52 | 111.09 |
| 0.0005 | 122.47 | 122 474.38 | 99.37 |
| 0.001 | 173.20 | 86 602.47 | 70.24 |
| 0.002 | 244.94 | 61 237.94 | 49.67 |
| 0.003 | 300.00 | 50 000.00 | 40.50 |

H).-Por fin realizamos la gráfica ($f_{cr}$, KL/r), el cual viene sien do la curva para diseñar cual--- quier columna de ese material; - entrando con su módulo de esbel- téz a la curva para obtener su - respectivo esfuerzo crítico.



EJEMPLO 2

Determinar la carga crítica que produciría el pandeo de una co-- lumna de acero A-36 de sección tubular. Como la mostrada en la figura, la columna es de 8m. de altura y esta biarticulada en -- sus extremos. Considerese que $f_y = 2530$ kg/cm$^2$ y $E = 2.039 \times 10^6$ kg/cm$^2$. Calcular tambien el valor del esfuerzo admisible que -- opera en la misma columna y la carga de servicio.

Datos:

L = 8m. = 800 cms

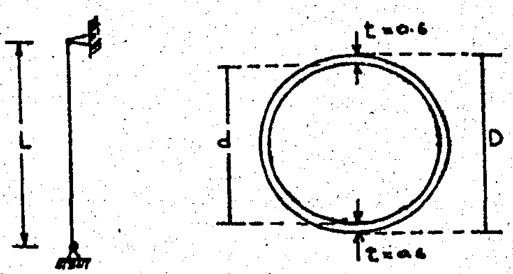
K = 1 para col. biarticuladas.

$E = 2.039 \times 10^6$ kg/cm$^2$

$f_y = 2530$ kg/cm$^2$

D = 30.50 cms

d = 29.30 cms




Solución:

a) Determinación de $P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$ (1)

Vemos que para aplicar (1) nos falta el momento de inercia I , el cual es:

$$I = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(30.50)^4}{64} - \frac{\pi(29.30)^4}{64} =$$

$$I = 6,300.86 \text{ cm}^4$$

Sustituyendo en (1) tenemos:

$$P_{cr} = \frac{(3.14)^2(2'039,000)(6,300.86)}{(1 \times 800)^2} =$$

$$P_{cr} = 198,\ 123.75 \text{ kgs} =$$

$$\underline{P_{cr} = 198 \text{ ton,}}$$

b) Cálculo del esfuerzo admisible:

$$- C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{f_y}} = \sqrt{\frac{(2)(3.14)^2(2.039 \times 10^6)}{2530}} = 126.3$$

$$- r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{6,300.86}{56.36}} = 10.57 \text{ cms}$$

- $\frac{KL}{r} = \frac{(1)(800)}{10.57} = 75.23$

Vemos que:

$$\frac{KL}{r} = 75.23 < C_c = 126.13$$ El pandeo es in--elástico.

Como el pandeo es inelástico, usamos la fórmula:

$$f_a = \left[ 1 - \frac{(\frac{KL}{r})^2}{2C_c^2} \right] \frac{f_y}{FS_2} \qquad (2)$$

Donde:

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8\ C_c} - \frac{(KL/r)^3}{8\ C_c^3} = \frac{5}{3} + \frac{3(75.23)}{8(26.13)} - \frac{(75.23)^3}{8(26.13)^3} =$$

$$FS_2 = 1.86$$

Sustituyendo valores en (2) tenemos:

$$f_a = \left[ 1 - \frac{75.23^2}{2(126.13)^2} \right] \frac{2530}{1.86} =$$

$$f_a = 1{,}113\ kg/cm^2$$

c) Con el valor del esfuerzo admisible podemos calcular la carga de servicio de la columna:

$$P = Af_a \qquad (3)$$

- $A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(30.50^2 - 29.30^2) = 56.36\ cms^2$

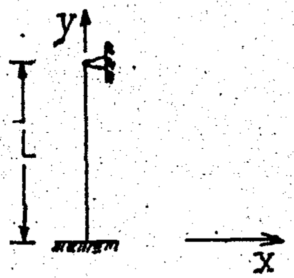
Sustituyendo los valores en (3) queda:

$$P_s = (56.36)(1{,}113) = 62{,}728.68\ kg$$

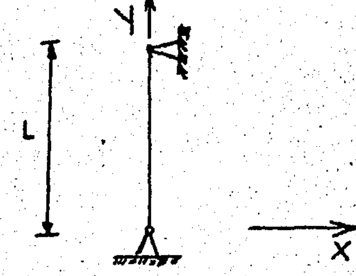
$$P_s = 62.72\ ton.$$

EJEMPLO 3

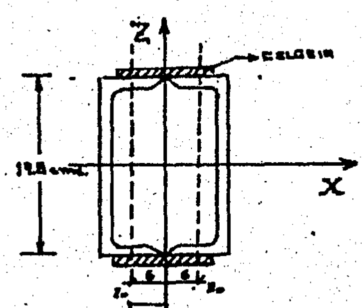
Determinar la capacidad de carga de una columna de acero A-36,- de 8ms. de altura en el plano XY esta empotrado en su base y articulada en el extremo superior, y en su plano ZY esta biarticulada en los extremos; la sección de la columna esta formada - por dos canales CPS-7", de peso igual a 14.58 kg/m cada uno, -- unidas entre si por elementos que forman una celosía. Considerar $E = 2.039 \times 10^6$ kg/cm$^2$ y $f_y = 2530$ kg/cm$^2$.



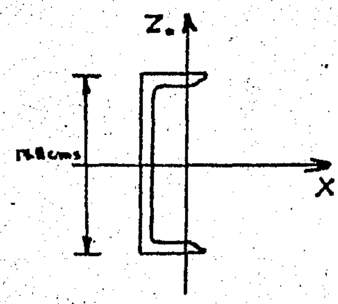

Plano de flexión (X,Y)
Eje de flexión "Z".




Plano de flexión (Y,Z)
Eje de flexión "X".




Sección transversal




Nota.- La celosía no modifica la geometría de la sección.

Los valores que se usen para "K" serán los que se recomienda.

Características de un -- perfil CPS-7" de 14.58 - kg/m de acuerdo al ma--- nual A H M S A son:

$A_o = 18.39$ cm$^2$

$I_{x_o} = 878.20$ cm$^4$

$r_x = 6.91$ cm

$I_{z_o} = 40.79$ cm$^4$

$r_z = 1.50$ cm

Solución:

Determinaremos las propiedades geométricas de la sección de la columna:

$$A = 2A_o = 2(18.39) = 36.78 \text{ cm}^2$$

$$I_x = 2I_{x_o} = 2(878.20) = 1{,}756.4 \text{ cm}^4$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{1{,}756.4}{36.78}} = 6.91 \text{ cm}$$

$$I_z = 2(I_{z_o} + A_o d^2) = 2(40.79 + 18.39 \times 6^2) = 1{,}405.76 \text{ cm}^4$$

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{1{,}405.6}{36.78}} = 6.18 \text{ cm}$$

Calculamos ahora el módulo de esbeltéz de los diferentes planos

En el plano de flexión (X,Y):

$K_x = 0.8$, porque esta empotrado y articulado

$$\Rightarrow \left(\frac{K_x L}{r_z}\right)_z = \frac{(0.8)(800)}{6.18} = 103.55$$

En el plano de flexión (Z,Y):

$K_z = 1$, porque esta biarticulado

$$\Rightarrow \left(\frac{K_z L}{r_x}\right)_x = \frac{(1)(800)}{6.91} = 115.77$$

Por lo tanto tenemos que trabajar con el módulo de esbeltéz mayor, que va a ser en el plano de flexión donde se va a pandear la columna.

$$\Rightarrow \left(\frac{KL}{r}\right)_x > \left(\frac{KL}{r}\right)_z$$

Por lo tanto el módulo de esbeltéz será:

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_x = 115.77$$

Calculamos ahora el coeficiente de columna.

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{f_y}} = \sqrt{\frac{2(3.14)^2(2.039 \times 10^6)}{2,530}} = 126.13$$

Comparando el coeficiente de columna con el módulo de esbeltéz, para saber el tipo de pandeo que se va a presentar en la columna.

$$\frac{KL}{r} = 115.77 < C_c = 126.13$$

Por lo tanto el pandeo es del tipo "ineslástico" y la fórmula a usarse es la siguiente:

$$f_a = \frac{f_{max}}{FS_2} = \left[ 1 - \frac{(\frac{KL}{r})^2}{2C_c^2} \right] \frac{f_y}{FS_2} \qquad (1)$$

Donde:

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(\frac{KL}{r})}{8C_c} - \frac{(\frac{KL}{r})^3}{8C_c^3} = \frac{5}{3} + \frac{3(115.77)}{8(126.13)} - \frac{(115.77)^3}{8(126.13)^3} =$$

$$FS_2 = 1.91$$

Sustituyendo valores en (1) tenemos:

$$f_a = \left[ 1 - \frac{(115.77)^2}{2(126.13)^2} \right] \frac{2,530}{1.91} =$$

$$f_a = 766.63 \text{ kg/cm}^2$$

Con este valor del esfuerzo admisible podemos calcular la carga de servicio de la columna:

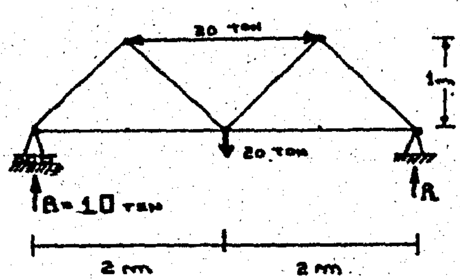
$$P = Af_a$$

$$= (36.78)(766.63) = 28,196.84 \text{ kgs.}$$

$$\Rightarrow \quad P = 28.19 \text{ ton}$$

EJEMPLO 4

Diseñar la cuerda superior de la armadura de la figura, hecha de acero A-36, libremente apoyada de acuerdo con el sistema de cargas que se propone. Usando el manual A H M S A .




Del análisis de la armadura se obtiene que la cuerda superior esta sujeta a la acción de una carga de compresión de 20 ton. Despreciamos el peso propio del miembro. Podemos considerar que dicho miembro es una columna biarticulada con carga axial de compresión. Para poder determinar el esfuerzo admisible usaremos la tabla correspondiente del manual de acero de Monterrey.

El valor de K = 1, para columnas biarticuladas pero se puede tomar la K recomendable de K = 0.8, 0.9.

La sección se escoge a criterio y con experiencia en el diseño. Sabemos que el esfuerzo de fluencia para un acero A-36 es del orden de $f_y$ = 2,530 a 2,580 kg/cm$^2$.

Para determinar el esfuerzo de diseño de acuerdo al criterio y la experiencia se puede tomar como la mitad del esfuerzo de fluencia $f_y$ = 1,265 kg/cm$^2$ redondeandolo a $f_y$ = 1,000 kg/cm$^2$.

Ahora encontramos el area necesaria para este esfuerzo:

$$f = \frac{P}{A} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{P}{f} = \frac{20{,}000}{1{,}000} = 20 \text{ cm}^2$$

Que viene siendo el area de la sección transversal para la columna en estudio. Para elegir la geometría de la sección, la experiencia nos dice que sean ángulos(porque pueden ser cualquier sección) ; el cual tendremos que revisar para revisar su capacidad de carga que puede soportar, como puede ser de cualquier forma geométrica su sección puede variar su capacidad de carga , aunque todas tengan la misma área por las limitaciones-

de su esbeltéz de la columna al pandeo.
Entonces para elegir la sección a revisar suponemos que el es-- fuerzo admisible sea de un 40% del esfuerzo de fluencia.

$$f_a = 0.4\ f_y$$

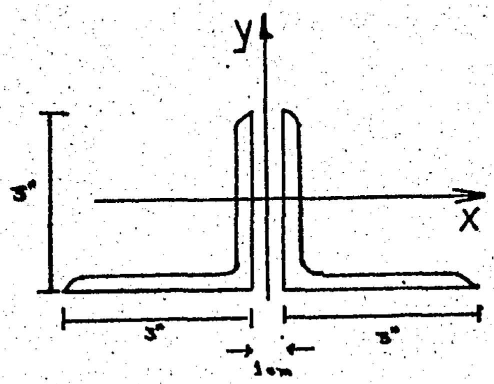
$$f_a = (0.4)(2{,}530) =$$

$$f_a \doteq 1{,}000\ \text{kg/cm}^2$$

De donde el área necesaria de la sección transversal del miem-- bro deberá ser del orden:

$$A = \frac{P}{f} = \frac{20{,}000}{1{,}000} = 20\ \text{cm}^2$$

Que viene siendo el área igual al que se obtuvo anteriormente - de otra manera.
Ahora del manual de la fundidora de Monterrey proponemos una -- sección transversal formada por dos ángulos de lados iguales de 3" x 3" x 1/4" como sigue:




La separación de ambos canales tambien se propone. Lo consideraremos de 1 cm en-- tre los cuales colocarémos- atiesadores para garantizar la integración de la sec--- ción y para lograr que el - pandeo suceda alrededor del eje x ó y; formando las ar- ticulaciones en los extre-- mos de la pieza de modo que la sección solo pueda girar alrededor de los ejes x ó y.
Calcularémos primero su módulo de esbeltéz:

$\left(\frac{KL}{r}\right)_x = ?$ Tomando: $K_x = 0.9$

$L_x = 200$ cm (longitud del miembro).

$r_x = 2.36$ (dato del manual).

$$\Rightarrow \left(\frac{KL}{r}\right)_x = \frac{(0.9)(200)}{2.36} = 76.27$$

• $\left(\frac{KL}{r}\right)_y = ?$ Tomando: $K_y = 0.9$

$L_y = 200$ cm

$r_y = 3.5$ cm

$$\Rightarrow \left(\frac{KL}{r}\right)_y = \frac{(0.9)(200)}{3.5} = 51.43$$

Como:

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_x > \left(\frac{KL}{r}\right)_y$$

Tomamos el mayor módulo de esbeltéz:

$$\left(\frac{KL}{r}\right) = 76.27 \doteq 76$$

Con este valor podemos entrar directamente a la tabla del capítulo III - figura 7 para calcular su respectivo esfuerzo admisible que es el siguiente:

$$\underline{f_a = 1,110 \text{ kg/cm}^2}$$

Este valor también se puede obtener por la teoría de carga axial para obtener su esfuerzo permisible $f_a$.

Entonces la carga admisible o de servicio del miembro en estudio será:

$$P_s = Af_a$$

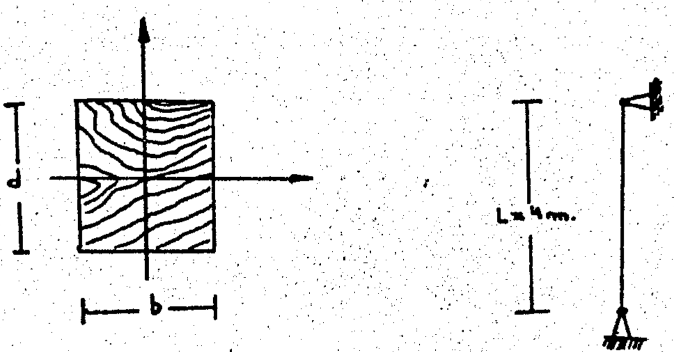
$$= (20)(1,110) = 22,200 \text{ kg}$$

$$\underline{P_s = 22.2 \text{ ton}}$$

Observamos que la carga de servicio de la sección que se diseñó para revisarlo, es ligeramente mayor que la carga en el miembro que esta actuando en la estructura real, osea de 20 ton. Por lo tanto se acepta la sección propuesta en el diseño ya que pasó la revisión satisfactoriamente.

EJEMPLO 5

Diseñar la siguiente columna de madera, proponiendo su sección-si debe tener una longitud de 4 m y debe soportar una carga de-55 ton ; donde la madera tiene un módulo de elasticidad de --- $E = 112{,}592\ kg/cm^2$ y su esfuerzo último $f_u = 102\ kg/cm^2$. La columna estará biarticulada y debe ser de sección rectangular.




Datos:

$L = 4\ m = 400\ cm$

$P_s = 55\ ton$

$E = 112{,}592\ kg/cm^2$

$f_u = C = 102\ kg/cm^2$

Solución:

Primeramente vamos a conocer el coeficiente de límite de columna S,

$$S = 0.702 \sqrt{\frac{E}{C}} = 0.702 \sqrt{\frac{112{,}592}{102}} =$$

$$S = 23.32$$

Ahora a criterio y arbitrariamente proponemos una sección de la columna de 25 x 25; del cual calculamos su módulo de esbeltéz.

$$\frac{KL}{d_n} = \frac{(400)(1)}{25 - 1} = \frac{400}{24} = 16.667$$

Como siguiente paso comparamos el valor del módulo de esbeltéz-con el coeficiente de columna.

$$\frac{L}{d_n} < S$$

Y por otra parte vemos que el módulo de esbeltéz cae dentro del intervalo de columnas intermedias. Osea:

$$11 < \frac{L}{d_n} \leq S$$

Entonces la fórmula a usarse es:

$$f_a = \frac{P}{A} = C\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{L}{Sd}\right)^4\right] = 102\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{400}{23.32 \times 24}\right)^4\right] =$$

$$f_a = \frac{P}{A} = 93.3 \text{ kg/cm}^2$$

Por lo tanto la carga de servicio será:

$$P_s = f_a A = (93.3)(24)^2 = 53,642.8$$

$$P_s \doteq 53.64 \text{ ton}$$

Como la carga de trabajo real es de 55 ton y la $P_s$ de la sec--- ción supuesta es menor, no podemos aceptar este diseño. Por - lo tanto se propone otra sección de 26 x 26.

Entonces: $\frac{L}{d_n} = \frac{400}{26 - 1} = 16$

Como: $11 < \frac{L}{d_n} = 16 < S = 23.32$

La columna sigue siendo intermedia. Por lo tanto:

$$f_a = 102\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{400}{23.32 \times 25}\right)^4\right] = 94.46 \text{ kg/cm}^2$$

La carga de servicio será:

$$P_s = A_n f_a = (25)^2 (94.46) = 59,037.5 \text{ kg}$$

$$\underline{P_s \doteq 59 \text{ ton}}$$

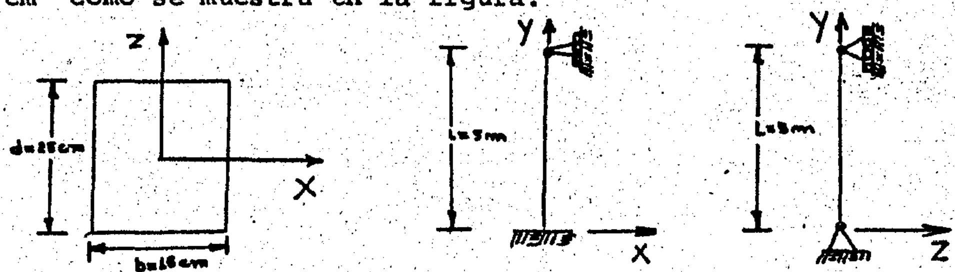
Vemos que la carga de servicio de la sección supuesta es mayor- que la carga de servicio real. Osea:

$$P_s \text{ (supuesta)} > P_s \text{ (real)}$$

Por lo tanto esta proporción de la columna se puede aceptar co- mo buena, aunque este un poco excedida; Pero para que sea la - ideal es cosa de ir variando la geometría de la sección, osea - también hasta que la carga de servicio de la sección supuesta - sea igual a la carga de servicio real.

EJEMPLO 6

Determinar la carga axial admisible en condiciones de servicio para una columna de madera de primera, que presenta en el plano XY mostrada en la figura; esta empotrada en la base y articulada en su extremo superior, y en el plano ZY esta articulada en sus dos extremos; la sección de la madera es de 15 x 25 cms y la altura de la columna es de 5 m. Considerar que E = 70,000 $kg/cm^2$ como se muestra en la figura.




Solución:

Como primer paso nos dicen que la columna de madera es de primera; de donde del reglamento obtenemos el esfuerzo del límite de proporcionalidad $f_{cp}$ es:

$f_{cp} = 50\ kg/cm^2$

Y a continuación como segundo paso calculamos las relaciones de esbeltéz para los diferentes planos que actúa.

A) Relación de esbeltéz en el plano XY:

- $K_x = 0.8$ (columna empotrada y articulada en sus extremos).
- $L = 5\,m = 500$ cms (longitud real de la columna).
- $b_n = 15 - 1 = 14$ cms

Entonces: $\frac{K_x L}{b_n} = \frac{(0.8)(500)}{14} = 28.6$ (a)

B) Relación de esbeltéz en el plano ZY:

- $K_z = 1$ (columna biarticulada).

Entonces: $\frac{K_z L}{d_n} = \frac{(1)(500)}{25 - 1} = 20.8$ (b)

Comparando los valores de las relaciones de esbeltéz, para trabajar en el diseño con el mayor de ambos, vemos que el valor dado en (a) resultó mayor que (b); entonces la relación de esbeltéz para el diseño será:

$$\left(\frac{K_z L}{d_n}\right) = 28.6 \qquad (1)$$

Como tercer paso calculamos el coeficiente de columna:

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3\ E}{f_{cp}}} = \sqrt{\frac{(0.3)(70,000)}{50}} =$$

$$C_c = 20.49 \qquad (2)$$

Comparando (1) con (2) resulta:

$$\frac{K_z L}{b_n} = 28.6 \qquad C_c = 20.49$$

Por lo tanto como la relación de esbeltéz resultó mayor se trata de una columna que tiene "pandeo elástico"; y la fórmula a usar para encontrar el esfuerzo admisible es el siguiente:

$$f_{cd} = \frac{0.3\ E}{\left(\frac{KL}{b}\right)^2_{mayor}} = \frac{(0.3)(70,000)}{(28.6)^2} =$$

$$f_{cd} = 25.7\ kg/cm^2$$

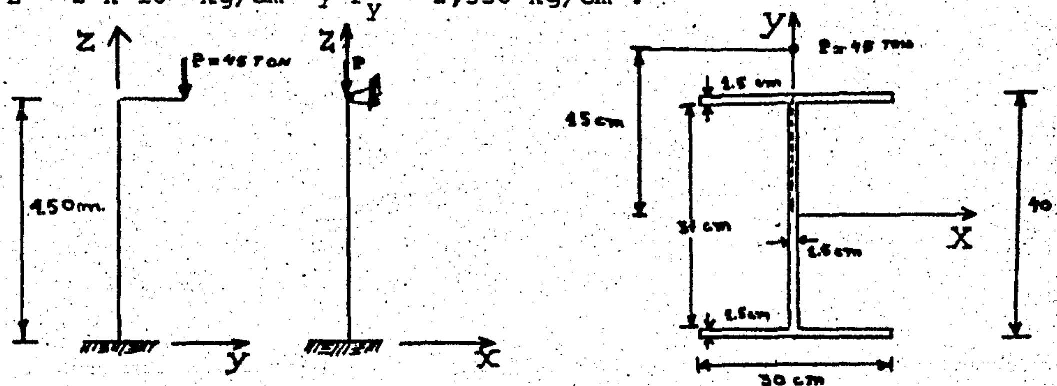
Ahora pasamos a determinar la carga axial admisible que es la solución de este problema.

$$P = A_n f_{cd} = (24)(14)(25.7) = 8,635\ kg$$

$$\Rightarrow \quad P = 8.6\ ton$$

EJEMPLO 7

Se tiene una columna de acero A-36 de 4.5 m de altura, empotrada en la base y libre en el extremo superior en el plano YZ. En el plano XZ la columna esta empotrada en la base y articulada en el extremo superior; revisar si la sección I propuesta es adecuada para resistir una carga de 45 toneladas aplicada a 45 centímetros del eje X como se muestra en la figura. Se da como dato $E = 2 \times 10^6\ kg/cm^2$ y $F_y = 2{,}530\ kg/cm^2$.




1).- Cálculo de las características geométricas de la sección:

$$- A = 2(30 \times 1.5) + (37 \times 1.5) = 145.50\ cm^2$$

$$- I_x = \frac{(30)(40)^3}{12} - 2\left(\frac{14.25 \times 37^3}{12}\right) = 39{,}699.125\ cm^4$$

$$- I_y = 2\left(\frac{1.5 \times 30^3}{12}\right) + \frac{(37)(1.5)^3}{12} = 6{,}760\ cm^4$$

$$- r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{39{,}699.13}{145.5}} = 16.52\ cm$$

$$- r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{6{,}760.4}{145.5}} = 6.82\ cm$$

2).- Cálculo de los módulos de esbeltéz en los planos ZY y ZX respectivamente.

a) $\left(\frac{KL}{r}\right)_{ZY} = \left(\frac{2 \times 450}{16.82}\right) = 54.5$

b) $\left(\frac{KL}{r}\right)_{ZX} = \left(\frac{0.7 \times 450}{6.82}\right) = 46.19$

Como: $(\frac{KL}{r_x}) > (\frac{KL}{r_y})$ el pandeo por carga axial se presenta en el plano ZY.

3).- Cálculo de los elementos mecánicos que operan sobre la sección de la columna.

- $P = 45{,}000$ kg
- $M_x = 45{,}000 \times 45 = 2'025{,}000$ kg-cm
- $M_y = 0$ (osea existe flexocompresión en un solo eje)

Como la columna esta sujeta a flexocompresión simple para revisar la sección aplicamos la fórmula de interacción en el plano ZY que es la siguiente:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_m f_b}{F_b(1 - f_a/F'_e)} \quad \text{, siempre y cuando se cumpla } \frac{f_a}{F_a} > 0.15$$

4).- Cálculo de los esfuerzos actuantes.

$$- f_a = \frac{P}{A} = \frac{45{,}000}{145.5} = 309.28 \text{ kg/cm}^2$$

$$- f_{bx} = \frac{M_x C}{I_x} = \frac{2'025{,}000(20)}{39{,}699.125} = 1{,}020.17 \text{ kg/cm}^2$$

5).- Cálculo de los esfuerzos permicibles:

a) Cálculo del esfuerzo permicible por carga axial $F_a$.

Determinación del tipo de pandeo en la columna por carga axial:

$$- C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(2 \times 10^6)}{2{,}530}} = 124.91$$

$$- \frac{KL}{r_x} = 54.48$$

Como: $C_c > \frac{KL}{r_x}$, entonces el pandeo por carga axial es "inelástico".

Entonces el esfuerzo admisible se calculará con la fórmula siguiente:

$$F_a = \frac{1}{FS_2}\left[1 - \frac{(\frac{KL}{r})^2}{2C_c^2}\right] F_y \leq 0.6F_y$$

Donde: $FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(\frac{KL}{r})}{8C_c} - \frac{(\frac{KL}{r})^3}{8C_c^3} = \frac{5}{3} + \frac{3(54.48)}{124.91} - \frac{(54.48)^3}{8(124.91)^3} = 1.82$

Sustituyendo este valor en la fórmula $F_a$:

$$F_a = \frac{1}{1.82} \left[ 1 - \frac{54.5^2}{2(124.91)^2} \right] (2,530) = 1,257.91 \text{ kg/cm}^2$$

Por otra parte $F_a$ debe ser menor que: $0.6F_y = 0.6(2,530) = 1,518$

Como: $F_a = 1,257.91 < 1,518$ entonces $F_a = 1,257.91$ kg/cm$^2$

Ahora obteniendo el primer término de la fórmula:

$$\frac{f_a}{F_a} = \frac{309.28}{1,257.91} = 0.246 \qquad (1)$$

Como este término resultó mayor que 0.15 se debe aplicar la fórmula completa.

b) Cálculo del esfuerzo permicible por flexión.

$$F_b = \frac{843,700C_b}{\frac{Ld}{bt}}$$

Donde:
- $C_b = 1.75 - 1.05\frac{M_1}{M_2} + 0.3(\frac{M_1}{M_2})^2$

  $M_1 = M_2 = 2.025 \times 10^6$ kg-cm

  Entonces: $C_b = 1.75 - 1.05(1) + 0.3(1) = 1$
- $L = 450$ cm
- $d = 40$ cm
- $b = 30$ cm
- $t_p = 1.5$ cm

Por lo tanto sustituyendo valores en la fórmula tenemos:

$$F_b = \frac{843,700(1)}{\frac{(450)(40)}{(30)(1.5)}} = 2,109.25 \text{ kg/cm}^2$$

Comparando con $0.6F_y$ el cual no debe superar; osea:

$$0.6F_y = (0.6)(2,530) = 1,518 \text{ kg/cm}^2$$

Como:

$$F_b = 2{,}109.25 > 1{,}518$$

Entonces:

$$F_b = 1{,}518 \text{ kg/cm}^2 \qquad \text{(I)}$$

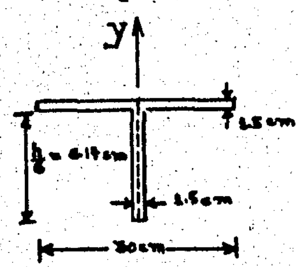
Cálculo de $F_b$ dependiendo del tipo de pandeo:

$$- C_c' = \sqrt{\frac{35.86 \times 10^6}{F_y}\, C_b} = \sqrt{\frac{35.86 \times 10^6 (1)}{2{,}530}} = 119.05$$

$$- \frac{KL}{r_y} = ?$$

$$*I_y = \frac{1.5 \times 30^3}{12} + \frac{6.17 \times 1.5^3}{12} =$$

$$I_y = 3{,}376.74 \text{ cm}^4$$




$$*A = (1.5)(30) + (1.5)(6.17) =$$

$$A = 54.26 \text{ cm}^2$$

$$*r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{3{,}376.7}{54.26}} = 7.89 \text{ cm}$$

$$\therefore \frac{KL}{r_y} = \frac{(2)(450)}{7.89} = 114.08$$

Como $C_c' = 119.05 > \frac{KL}{r_y} = 114.08$ , por lo tanto el pandeo - es inelástico; y en consecuencia $F_b$ se determinará con la- fórmula:

$$F_b = \left[\frac{2}{3} - \frac{F_y (KL/r_y)^2}{107.6 \times 10^6 C_b}\right] F_y =$$

$$= \left[\frac{2}{3} - \frac{2{,}530(114.08)^2}{107.6 \times 10^6 (1)}\right] 2{,}530 = 912.48 \text{ kg/cm}^2 \qquad \text{(II)}$$

Como $F_{b(I)} > F_{b(II)}$, el esfuerzo permicible por flexión final es: $F_b = 1{,}518 \text{ kg/cm}^2$

6).- Cálculo del segundo término de la fórmula de interacción.- Para esta determinación falta calcular $F_e'$ que se calcula - como:

$$F_e' = \frac{10'480{,}000}{(KL/r)^2} = \frac{10'480{,}000}{(54.48)^2} = 3{,}530.9 \text{ kg/cm}^2$$

Entonces el segundo término esta dado como:

$$\frac{C_m f_b}{F_b\left(1-\frac{f_a}{F'_e}\right)} = \frac{0.85(1,020.17)}{1,518\left(1-\frac{309.28}{3,530.9}\right)} = 0.63 \qquad (2)$$

Sumando los términos (1) y (2) que son los valores de la fórmula de interacción tenemos:

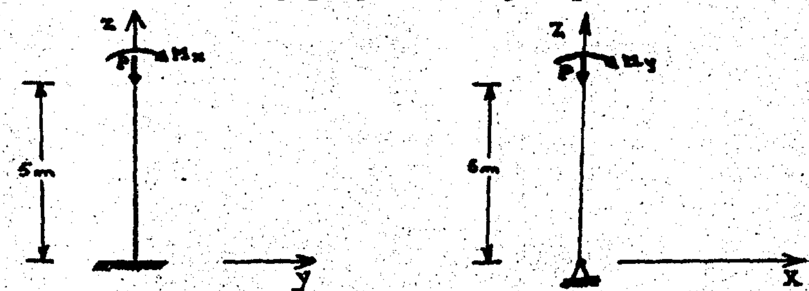
$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_m f_b}{F_b(1- f_a/F'_e)} = 0.25 + 0.63 < 1$$

$$= 0.88 < 1$$

Por lo tanto como el valor de la fórmula de interacción resultó menor que 1, la condición propuesta de la sección I es aceptable.

EJEMPLO 8

Determinar si la siguiente sección en cajón de la columna de -- acero sujeta a flexocompresión doble, osea respecto a sus dos - planos principales como se muestra en la figura; es adecuada para las condiciones de apoyo y las cargas que sobre ella actuan.



Datos:

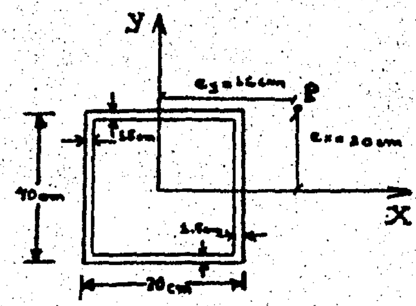
$P = 50$ ton

$e_x = 20$ cm

$e_y = 16$ cm

$F_y = 2{,}530$ kg/cm$^2$

$E = 2 \times 10^6$ kg/cm$^2$



Solución:

1).- Cálculo de las características geométricas de la sección.

- $A = (40)(20) - (37)(17) = 171$ cm$^2$

- $I_x = \dfrac{(20)(40)^3}{12} - \dfrac{(17)(37)^3}{12} = 34{,}908.25$ cm$^4$

- $I_y = \dfrac{(40)(20)^3}{12} - \dfrac{(37)(17)^3}{12} = 11{,}518.25$ cm$^4$

- $r_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{A}} = \sqrt{\dfrac{34{,}908.25}{171}} = 14.28$ cm

- $r_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{A}} = \sqrt{\dfrac{11{,}518.25}{171}} = 8.20$ cm

2).- Cálculo de los módulos de esbeltéz en los planos ZY y ZX - respectivamente.

a) $(\frac{KL}{r})_{ZY} = (\frac{2 \times 500}{14.28}) = 70.02$

b) $(\frac{KL}{r})_{ZX} = (\frac{1 \times 500}{8.2}) = 60.97$

Como: $(\frac{KL}{r_x}) > (\frac{KL}{r_y})$ el pandeo por carga axial se presentará en el plano ZY.

3).- Cálculo de los elementos mecánicos que operan sobre la sección de la columna.

- $P = 50,000$ kg
- $M_x = Pe_x = (50,000)(20) = 1'000,000$ kg-cm
- $M_y = Pe_y = (50,000)(16) = 800,000$ kg-cm

4).- Cálculo de los esfuerzos actuantes.

- $f_a = \frac{P}{A} = \frac{50,000}{171} = 292.39 \text{ kg/cm}^2$
- $f_{bx} = \frac{M_x C}{I_x} = \frac{(1'000,000)(20)}{34,908.25} = 572.93 \text{ kg/cm}^2$
- $f_{by} = \frac{M_y C}{I_y} = \frac{(800,000)(10)}{11,518.25} = 694.55 \text{ kg/cm}^2$

5).- Cálculo de los esfuerzos permicibles.

a) $F_a = ?$

- $C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(2 \times 10^6)}{2,530}} = 124.92$
- $\frac{KL}{r_x} = 70.02$

Como: $C_c > \frac{KL}{r_x}$ entonces el pandeo por carga axial es -- "inelástico".

Entonces el esfuerzo admisible se calculará con la fórmula siguiente:

$$F_a = \frac{1}{FS_2}\left[1 - \frac{(\frac{KL}{r})^2}{2C_c^2}\right] F_y \leq 0.6F_y$$

Donde:

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(\frac{KL}{r})}{8C_c} - \frac{(\frac{KL}{r})^3}{8C_c^3} = \frac{5}{3} + \frac{3(70.02)}{8(124.91)} - \frac{(70.02)^3}{8(124.91)^3} =$$

$FS_2 = 1.85$

Sustituyendo este valor en la fórmula de $F_a$:

$$F_a = \frac{1}{1.85}\left[1 - \frac{(70.02)^2}{2(124.91)^2}\right](2,530) = 1,152.70 \text{ kg/cm}^2$$

Por otra parte $F_a$ debe ser menor que: $0.6F_y = 0.6\ (2,530) =$

$0.6F_y = 1,518 \text{ kg/cm}^2$

Como:

$F_a = 1,152.70 < 0.6F_y = 1,518;\ \Rightarrow F_a = 1,152.70 \text{kg/cm}^2$

Nota.- Obtenemos el coeficiente $f_a/F_a$ para saber qué fórmula de interacción se debe usar en este caso.

$$\frac{f_a}{F_a} = \frac{292.39}{1,152.70} = 0.25 \qquad (1)$$

Como este término resultó mayor que 0.15 se debe aplicar la fórmula de interacción completa para columnas de acero sujetas a la flexocompresión en sus dos planos principales dado en el capítulo IV (fórmula 19).

b) Cálculo del esfuerzo permicible por flexión.

$F_b = 0.6F_y = 0.6(2,530) = 1,518 \text{ kg/cm}^2$

Entonces: $F_{bx} = F_{by} = 1,518 \text{ kg/cm}^2$ (por ser sección cajón).

6).- Cálculo del segundo y tercer término de la fórmula de interacción respectivamente.

a) Determinación del segundo término.

- $C_{mx} = 0.85$ (por existir translación lateral de uno de sus extremos).
- $F'_{ex} = \frac{10'480,000}{\left(\frac{KL}{r}\right)_x^2} = \frac{10'480,000}{(70.02)^2} = 2,137.55 \text{ kg/cm}^2$

Por lo tanto:

$$\frac{C_{mx} f_{bx}}{F_{bx}\left(1 - \frac{f_a}{F'_{ex}}\right)} = \frac{0.85(572.93)}{1,518\left(1 - \frac{292.39}{2,137.55}\right)} = 0.37 \qquad (2)$$

b) Determinación del tercer término.

- $C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4$ ; Donde: $M_1 = 8$ ton - m

$M_2 = 0$

$C_m = 0.6$

- $F'_{ey} = \frac{10'480,000}{(\frac{KL}{r})_y^2} = \frac{10'480,000}{(60.97)^2} = 2,819.21 \text{ kg/cm}^2$

Por lo tanto: $\frac{C_{my} f_{by}}{F_{by}(1 - \frac{f_a}{F'_{ey}})} = \frac{0.60(694.55)}{1,518(1 - \frac{292.39}{2,819.21})} = 0.30$ (3)

7).- Finalmente, sumando los términos (1), (2) y (3) que son -- los valores de la fórmula de interacción; tenemos:

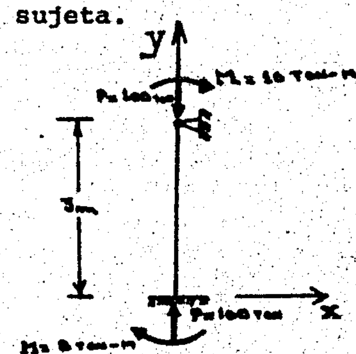
$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_{mx} f_{bx}}{F_{bx}(1 - \frac{f_a}{F'_{ex}})} + \frac{C_{my} f_{by}}{F_{by}(1 - \frac{f_a}{F'_{ey}})} = 0.25 + 0.37 + 0.30 \leq 1$$

$$= 0.92 \leq 1$$

Por lo tanto, como el valor de la fórmula resultó menor -- que 1 , la condición propuesta de la sección en cajón es - aceptable.

EJEMPLO 9

En la siguiente columna de acero A-36 como se muestra en la figura; se quiere revisar si dicha pieza es satisfactoria para -- las condiciones de carga a la cual esta sujeta.



Datos:

Area de la sección, $A = 98\ cm^2$

Momento de inercia de la sección - respecto al eje Z, $I_z = 39,232\ cm^4$

Peralte de la sección paralelo al plano de flexión, $d = 50$ cm.

$F_y = 2,530$; sección cajón.

Solución:

1) Cálculo del esfuerzo a compresión simple.

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{100,000}{98} = 1,020.4\ kg/cm^2$$

2) Cálculo del esfuerzo normal de compresión debido a flexión.

$$f_{bz} = \frac{M_z C}{I_z} = \frac{(10)(10)^5(25)}{39,232} = 637.23\ kg/cm^2$$

3) Cálculo de los esfuerzos permicibles.

a) $F_a = f(\frac{KL}{r})$

- $K = 0.8$, recomendado para una columna empotrada en su - base y articulada en su extremo superior.

- $$\left(\frac{KL}{r}\right)_z = \frac{(0.8)(300)}{\sqrt{\frac{39,232}{98}}} = \frac{240}{20} = 12$$

Para $(\frac{KL}{r})_z = 12$ ; de la tabla de la (fig.7, capítulo III) obtenemos: $F_a = 1,480\ kg/cm^2$

Nota.- Obtenemos la relación $f_a/F_a$ para seleccionar la fórmula.

$$\frac{f_a}{F_a} = \frac{1,020.4}{1,480} = 0.68 > 0.15$$

Por lo tanto usamos la fórmula para columna de acero sujeta a flexocompresión simple dado en el capítulo IV (fórmula 16).

b) Cálculo del esfuerzo permicible debido a flexión.

$$F_b = 0.60F_y = 0.6(2,530) = 1,518 \text{ kg/cm}^2$$

4).- Cálculo del segundo término de la fórmula de interacción.

- $C_m$ = ? , como $M_1$ = 8 ton-m , $M_2$ = 10 ton-m y los momentos son de signo contrario generando curvatura doble, la relación $M_1/M_2$ será negativa; tenemos:

$$\frac{M_1}{M_2} = -0.8, \quad \text{por lo tanto} \quad C_m = 0.6 + 0.4(-0.8) = 0.28$$

Vemos que $C_m$ resultó menor que el límite inferior 0.4 entonces se usará un coeficiente correctivo de:

$$C_m = 0.4$$

$$- F'_e = \frac{10'480,000}{(\frac{KL}{r})_z^2} = \frac{10'480,000}{(12)^2} = 72,778 \text{ kg/cm}^2$$

En consecuencia: $$\frac{C_m f_b}{F_b(1-\frac{f_a}{F'_e})} = \frac{(0.40)(637.2)}{(1-\frac{1,020.40}{72,778})1,518} = 0.17 \qquad (2)$$

5).- Finalmente sustituyendo (1) y (2) que son los valores de la fórmula de interacción tenemos:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_m f_b}{(1-\frac{f_a}{F'_e})F_b} = 0.68 + 0.17 < 1$$

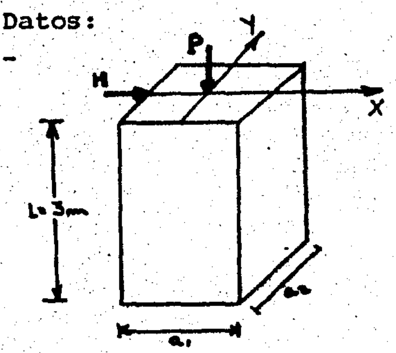
$$= 0.85 < 1$$

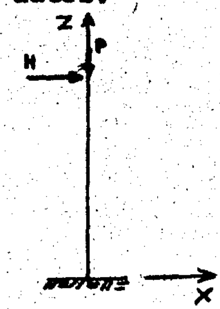
Como el valor obtenido resultó menor que 1, lo que significa que la columna con las condiciones de carga actuantes tiene una sección correcta osea esta adecuada para trabajar.

EJEMPLO 10

Diseñar la columna de madera sujeta a flexocompresión simple, considerando los siguientes datos.

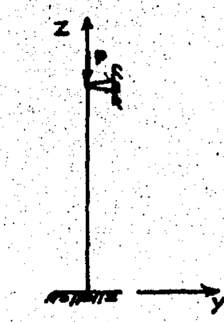
Datos:




Plano ZX

Eje de flexión Y




Plano ZY

Eje de flexión X

- $P = 4{,}000$ kg
- $H = 250$ kg
- $E = 40{,}000$ kg/cm$^2$
- $f_{bp} = 60$ kg/cm$^2$
- $f_{cp} = 50$ kg

* Se debe cumplir con la condición de: $2 < \frac{a_1}{a_2} \leq 3$

Solución:

1) Para resolver este problema se aplicará la fórmula dada en el capítulo IV.3 (fórmula 1).
2) Se proponen las siguientes dimensiones de la sección transversal. $a_1 = 40$ cm

   $a_2 = 15$ cm

   Vemos que $a_1/a_2 = 40/15 = 2.67$, entonces se cumple con la condición de diseño $2 < 2.67 \leq 3$.
3) Cálculo de los términos de la fórmula de interacción.
   a) $A_n = (a_{1n})(a_{2n}) = (40 - 1)(15 - 1) = 546$ cm$^2$
   b) $f_a = \frac{P}{A_n} = \frac{4{,}000}{546} = 7.32$ kg/cm$^2$

   c) Para obtener $f_{cd}$ debemos conocer qué tipo de pandeo se presenta en la columna para aplicar la fórmula res--

pectiva .

- Cálculo del módulo de esbeltéz que rige en la columna.

  * Plano XZ: $(\frac{KL}{b})_y = \frac{(2)(300)}{39} = 15.38$

  * Plano YZ: $(\frac{KL}{b})_x = \frac{(0.8)(300)}{14} = 17.14$

  Como $(\frac{KL}{b})_y < (\frac{KL}{b})_x$ ; entonces $\frac{KL}{b} = 17.14$

- Cálculo del coeficiente de columna.

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3E}{f_{cp}}} = \sqrt{\frac{(0.3)(40,000)}{50}} = 15.49$$

Como $\frac{KL}{b} > C_c$ el pandeo que se producirá en la columna de-madera a carga axial, será elástico. Por lo tanto se apli cará la fórmula:

$$f_{cd} = \frac{0.3E}{(\frac{KL}{b})^2} = \frac{(0.3)(40,000)}{(17.14)^2} = 40.85 \text{ kg/cm}^2$$

e) Cálculo del momento actuante.

$$M = HL = 250(300) = 75,000 \text{ kg-m}$$

f) Cálculo del esfuerzo de flexión actuante.

$$f_1 = \frac{M}{S} = \frac{75,000}{\frac{(14)(39)^2}{6}} = \frac{75,000}{3,549} = 21.13 \text{ kg/cm}^2$$

g) Excentricidad de la carga: $e = e_{min} = \frac{1}{10}(a_1) = \frac{39}{10} =$

$$e = 3.9 \text{ cm}$$

h) Coeficiente por efecto de esbeltéz de la pieza.

   $\beta = 1.25$; por ser pandeo elástico.

i) Dimensión de la sección transversal en dirección de la-excentricidad; $d_e = 39$ cm

j) Cálculo del esfuerzo permicible por flexión $f_{bd}$ el -- cual depende de dos parámetros $C_s$ y $C_k$; entonces:

$$C_s = 1.4\sqrt{\frac{d_e L}{B^2}} = 1.4\sqrt{\frac{(39)(300)}{(14)^2}} = 10.82$$

Como $C_s > 10$ entonces se debe calcular $C_k$

$$C_k = \sqrt{\frac{3}{5}\frac{E}{f_{bp}}} = \sqrt{\frac{3}{5}\frac{40,000}{60}} = 20$$

Como $C_s$ cae dentro del intervalo: $10 < C_s < C_k$ entonces para la obtención $f_{bd}$ se aplicará la fórmula:

$$f_{bd} = f_{bp}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{C_s}{C_k}\right)^4\right] = 60 \quad 60 \quad 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{10.82}{20}\right)^4 =$$

$$f_{bd} = 58.29 \text{ kg/cm}^2$$

k) Cálculo del coeficiente que modifica el esfuerzo permisible por flexión, por efecto de seguridad $C_f$.

Como el peralte de la sección en el plano de flexión es $a_1 = 39$ cm, y por otro lado se tiene que esta dimensión es mayor que 30, entonces para calcular $C_f$ aplicamos la fórmula:

$$C_f = 0.81\,\frac{d^2 + 922}{d^2 + 568} = 0.81\,\frac{(39)^2 + 922}{(39)^2 + 568} = 0.95$$

4).- Sustituyendo todos los valores obtenidos en el paso (3), pasamos a aplicar la fórmula de interacción para una columna de madera sujeta a flexocompresión simple dado como sigue:

$$\frac{\frac{P}{A_n}}{f_{cd}} + \frac{\frac{M}{S} + \frac{P}{A_n}\frac{6eB}{d_e}}{f_{bd}C_f} = \frac{7.32}{40.85} + \frac{(21.13)+(7.39)\left(\frac{6\times3.9 \times 1.25}{39}\right)}{58.29(0.95)} =$$

$$= 0.18 + 0.48 < 1$$

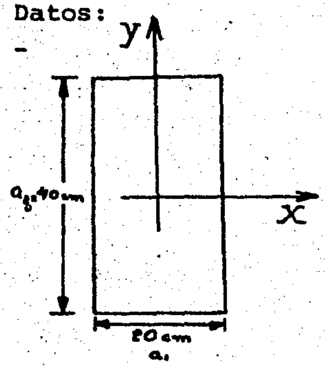
$$= 0.66 < 1$$

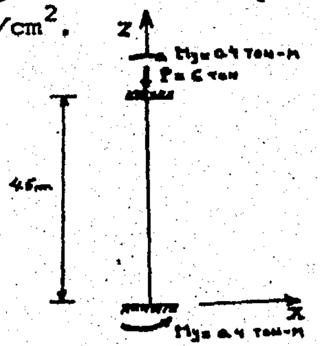
Como el valor obtenido al aplicar la fórmula de interacción resultó menor que 1, la sección transversal propuesta para la columna de madera esta satisfactoria pero un poco sobrada.

EJEMPLO 11

Investigar si la columna de madera de sección maciza, sujeta a flexocompresión doble, mostrada en la figura; tiene capacidad - para resistir las cargas de servicio que sobre ella actuan. Considerar $E = 40,000\ kg/cm^2$.

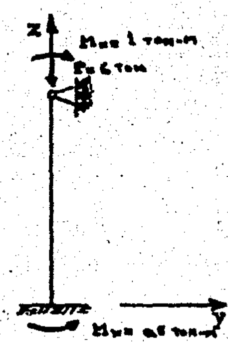
Datos:




Plano de flexión XZ

Eje de flexión Y




Plano de flexión ZY

Eje de flexión X

- $E = 40,000\ kg/cm^2$
- $f_{cp} = 50\ kg/cm^2$
- $f_{bp} = 60\ kg/cm^2$

Solución:

1) Para resolver este problema se aplicará la fórmula dada en - el capítulo IV.3 (fórmula 2).
2) Cálculo de los términos de la fórmula de interacción.
   a) $A_n = (a_{1n})(a_{2n}) = (20 - 1)(40 - 1) = 741\ cm^2$
   b) $f_a = \frac{P}{A_n} = \frac{6,000}{741} = 8.10\ kg/cm^2$
   c) Para determinar $f_{cd}$ debemos conocer qué tipo de pandeo se presenta en la columna para aplicar la fórmula respectiva.
   - Cálculo del módulo de esbeltéz que rige en la columna.

     * Plano XZ $= \frac{KL}{b_y} = \frac{(0.65)(450)}{19} = 15.39$

     * Plano YZ $= \frac{KL}{b_x} = \frac{(0.8)(450)}{39} = 9.23$

Como $\frac{KL}{b_y} > \frac{KL}{bx}$ ; entonces $\frac{KL}{b} = 15.34$

- Cálculo del coeficiente de columnas.

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3E}{f_{cp}}} = \sqrt{\frac{0.3(40,000)}{50}} = 15.49$$

Como $\frac{KL}{b} < C_c$ , el pandeo que se producirá en la columna de madera a carga axial, será inelástico. Por lo que:

$$f_{cd} = f_{cp} = 50 \text{ kg/cm}^2$$

Nota.- Con los valores obtenidos anteriormente podemos calcular ya el primer término de la fórmula de interacción como:

$$\frac{f_a}{f_{cd}} = \frac{8.10}{50} = 0.16 \qquad (1)$$

3) Cálculo del segundo término de la fórmula de interacción.

a) Cálculo del esfuerzo actuante en el plano YZ.

$$f = \frac{M_x}{S_x} = \frac{100,000}{\frac{(19)(39)^2}{6}} = 20.76 \text{ kg/cm}^2$$

b) $e_x = e_{mín} = \frac{1}{10}(a_{2n}) = 0.1(39) = 3.9$ cm

c) $\beta_x = 1$; por ser pandeo inelástico.

d) $d_{ex} = a_{2n} = 39$ cm

e) Cálculo del esfuerzo permicible por flexión $f_{bdx}$ el cual depende de los parámetros $C_s$ y $C_k$; entonces:

$$C_s = 1.4\sqrt{\frac{d_e L}{B^2}} = 1.4\sqrt{\frac{(39)(450)}{19^2}} = 9.76$$

Como $C_s < 10$, no se calcula ya $C_k$, quedando:

$$f_{bdx} = f_{bp} = 60 \text{ kg/cm}^2$$

f) $C_{fx} = 0.81 \frac{d^2 + 922}{d^2 + 568}$ ; porque $a_{2n} > 30$

$$C_{fx} = 0.81 \frac{(39)^2 + 922}{(39)^2 + 568} = 0.95$$

Por lo tanto sustituyendo todos los valores obtenidos anteriormente:

$$\frac{\frac{M_x}{S_x} + \frac{P}{A_n}\,\frac{6e_x\beta_x}{d_{ex}}}{f_{bdx}C_{fx}} = \frac{20.76 + 8.10\left(\frac{6\times 3.9 \times 1}{39}\right)}{60(0.95)} =$$

$$= \frac{20.76 + 4.86}{57} = 0.45 \qquad (2)$$

4) Cálculo del tercer término de la fórmula de interacción.

a) $f = \frac{M_x}{S_x} = \frac{40,000}{\frac{39(19)^2}{6}} = 17.05 \text{ kg/cm}^2$

b) $e_y = e_{min} = \frac{1}{10}(a_{1n}) = 0.1\ (19) = 1.9$ cm

c) $\beta_y = 1$ , porque $\frac{KL}{b_y} = 15.39 < C_c = 15.49$, tratandose de pandeo inelástico.

d) $d_{ey} = a_{1n} = 19$ cm

e) Cálculo de $f_{bdy}$.

$$C_s = 1.4\sqrt{d_{ey}L/B^2} = 1.4\sqrt{\frac{19(450)}{39^2}} = 3.32$$

Como $C_s < 10$, no se calcula ya $C_k$ quedando:

$$f_{bdy} = f_{bp} = 60 \text{ kg/cm}^2$$

f) $C_{fy} = 1$ ; porque $a_{1n} < 30$

Por lo tanto sustituyendo todos los valores obtenidos anteriormente:

$$\frac{\frac{M_y}{S_y} + \frac{P}{A_n}\,\frac{6e_y\beta_y}{d_{ey}}}{f_{bdy}C_{fy}} = \frac{17.05 + 8.10\left(\frac{6\times 1.9 \times 1}{19}\right)}{60 \times 1} =$$

$$= 0.365 \qquad (3)$$

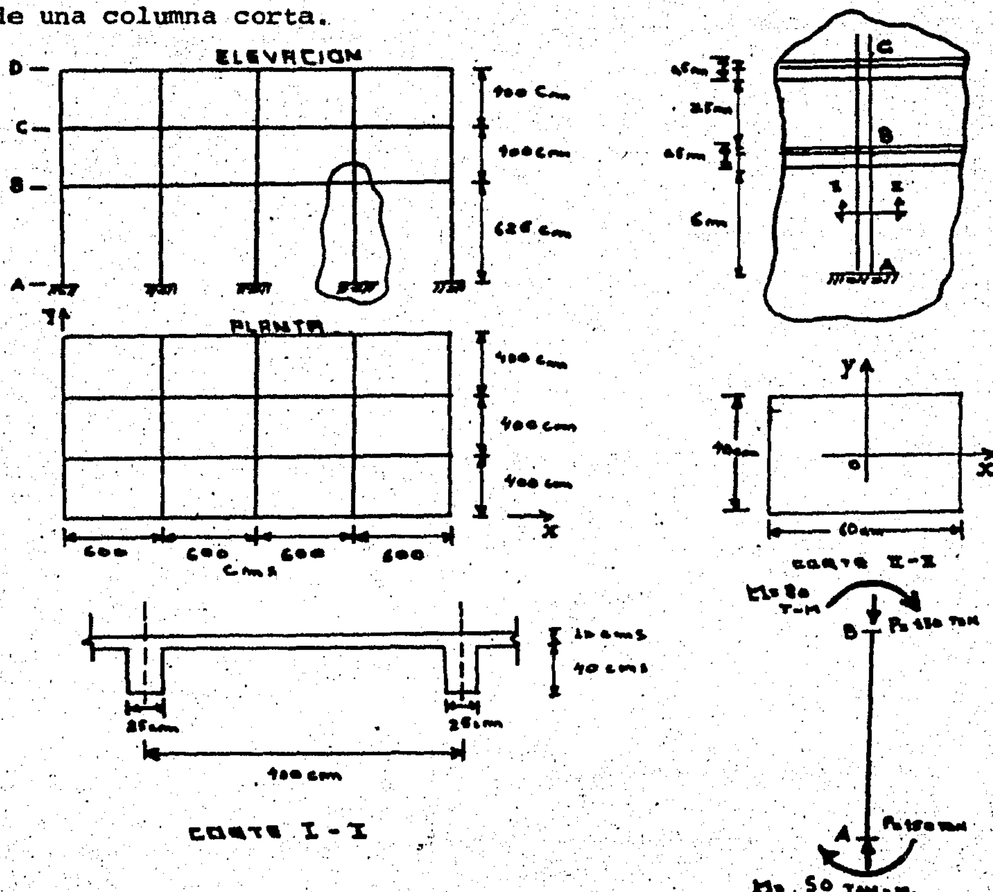
5) Haciendo la suma de (1), (2) y (3):

$0.16 + 0.45 + 0.365 = 0.975 < 1.0$

Por lo tanto la sección propuesta es adecuada.

EJEMPLO 12

En la siguiente columna de concreto reforzado que se especifica en la figura mostrada calcular su momento amplificado, y posteriormente diseñarlo basandose en los diagramas de interacción - de una columna corta.



Datos:

- La columna tiene desplazamiento en la dirección 0-X.
- Momento total por CM + CV + S = 80 ton-m.
- Momento por carga muerta = 8 ton-m.
- Acero de $F_y$ = 4,000 kg/cm$^2$.

- $f'_c = 200\ kg/cm^2$.

**Solución:**

Como primer paso para diseñar la columna encontremos el momento amplificado de la columna A-B.

$$M_{max} = dM. \qquad (I)$$

Donde el término $d$ es igual a:

$$d = \frac{C_m}{1 - \frac{P_r}{P_{cr}}} \qquad (1)$$

A continuación determinarémos los valores de las componentes de la fórmula (1), que es la que se aplica para momentos desigua-- les en los extremos del miembro.

a) $C_m = 1$; porque existe el desplazamiento de la columna.

b) $P_r = 150$ ton; que es la carga actuante de la columna.

c) $$P_{cr} = \frac{\pi^2 EIcol.}{(KL)^2} \qquad (2)$$

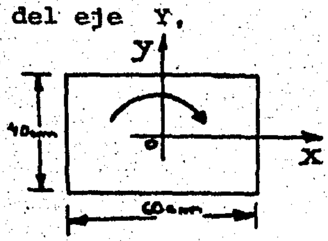
Donde: * Para calcular $EI_{col.}$ tenemos que aplicar la siguiente fórmula:

$$EI_{col.} = \frac{E_c I_g}{2.5(1+\beta_d)} \qquad (3)$$

Donde:

- $E_c = 10,000\sqrt{f'_c} = 10,000\sqrt{200} = 14.2 \times 10^4\ kg/cm^2$

- Cálculo del momento de inercia $I_g$ alrededor - del eje Y.




$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{40(60)^3}{12} =$$

$$I_g = 720,000\ cm^4$$

- $$\beta_d = \frac{M_{cm}}{M_{total.}} = \frac{8}{80} = 0.1$$

Sustituyendo los valores anteriores en (3):

$$EI_{col.} = \frac{(14.2 \times 10^4)(720{,}000)}{2.5(1+0.1)} = 3.71 \times 10^{10}\ kg/cm^2$$

* Para calcular el factor de longitud K, calculémos prevíamente $G_A$ y $G_B$ para entrar al nomograma.

- Nudo A.

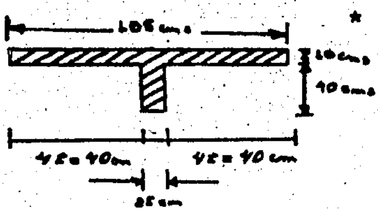
$$G_A = \frac{K_{col.}}{K_{trab.}} = \frac{\frac{I}{L}\,col.}{\frac{I}{L}_{trab.}} = \frac{\frac{720{,}000}{600}}{\infty} = 0$$

$G_A = 0$, esto se debe porque este extremo esta empotrado.

- Nudo B.

$$G_B = \frac{K_{col.}}{K_{trab.}} = \frac{\frac{I}{L}\,col.}{\frac{I}{L}_{trab.}}$$

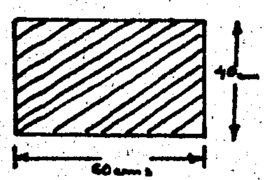
Para encontrar $G_B$, falta encontrar el valor del momento de inercia de las trabes y de las columnas.



* $$\bar{Y} = \frac{(105)(10)(45) + (25)(40)(20)}{(105)(10) + (40)(25)} = 32.8\ cm$$

$$I_t = \frac{(105)(10)^3}{12} + (105)(10)(45-32.8)^2 + \frac{(25)(40)^3}{12} + (25)(40)(32.8-20)^2 =$$

$$I_{trabe} = 462{,}205\ cm^4$$



* $$I_{col.} = \frac{(40)(60)^3}{12} = 720{,}000\ cm^4$$

Por lo tanto:

$$G_B = \frac{\frac{720{,}000}{350} + \frac{720{,}000}{600}}{2\left(\frac{462{,}000}{600}\right)} = 2.1$$

Entonces la longitud efectiva de pandeo es entrando con $G_A = 0$ y $G_B = 2.1$ en el nomograma correspondiente al de una columna con posibilidades de desplazamiento entre sus nudos; obteniéndoseK = 1.28.

Entonces $L_e = KL = (1.28)(600) = 768$ cm

Sustituyendo ahora, todos los valores obtenidos anterior mente en la fórmula (2) tenemos:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2(3.71 \times 10^{10})}{768} = 6.2 \times 10^5 \text{ kg} = 620 \text{ ton}$$

A continuación podemos encontrar el valor de d.

$$d = \frac{1}{1 - \frac{150}{620}} = 1.32$$

Por lo tanto el momento amplificado es:

$$M_{max} = dM_o = 1.32(\text{Momento máximo actuante en la col.})$$

$$= 1.32(80) =$$

$$M_{max} = 105.6 \text{ ton-m}$$

En consecuencia vemos que la carga crítica de pandeo, en el -- ejemplo resultó de 620 ton, y el factor de ampliación de momento, de 1.32. Esto indica que los momentos flexionantes de la columna, obtenidos de un análisis de primer orden, deben incrementarse en 30% para considerar los efectos de esbeltéz. Los momentos flexionantes en las trabes que restringen a las columnas -- también deben incrementarse, ya que no sería posible que las columnas resistan el momento amplificado, si las trabes no pueden resistirlo también. El incremento en las trabes que concurren- en un nudo dado, debe ser igual al incremento de momentos en -- las columnas que concurren en el mismo nudo, para que pueda conservarse el equilibrio de momentos en el nudo.

El refuerzo de la columna debe calcularse de tal manera que pueda resistir una carga axial de 150 ton y un momento flexionante de 105.6 ton-m. Esto se realizará utilizando los diagramas de- interacción del I.I. para columnas cortas, con refuerzo distribuido únicamente en las caras perpendiculares al plano de fle-- xión.

Entonces de la sección de la figura tenemos que:

$b = 40$ cm

$t = 60$ cm

$d = 55$ cm

Al diagrama de interacción entramos con:

* $\frac{d}{t} = \frac{55}{60} = 0.9$

* $\alpha = \frac{N_r}{bt\beta_3 f'_c} = \frac{150,000}{(40)(60)(0.85)(200)} = 0.36$

* $\beta = \frac{M_r}{bt^2\beta_3 f'_c} = \frac{105.6 \times 10^5}{(40)(60)^2(0.85)(200)} = 0.43$

De donde obtenemos:

$W = 0.79$

Y el porcentaje de acero es:

$$P = \frac{W\beta_3 f'_c}{f_y} = \frac{(0.79)(0.85)(200)}{200} = 0.033$$

Quedando dentro del intervalo de limitaciones de refuerzo que - es: $P_{min} = 0.01 < P = 0.033 < P_{max} = 0.08$

Entonces:

$$A_s = Pbt = (0.033)(40)(60) = 79.2 \text{ cm}^2$$

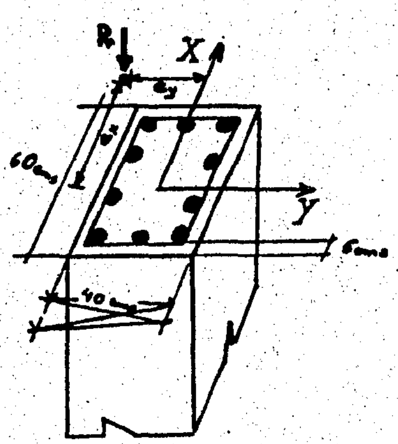
Finalmente el diseño queda, usando varillas del número 8:

$$\text{No. de varillas} = \frac{79.2}{5.07} = 15.62 \doteq 16$$

Donde quedarán repartidas 8 varillas en cada lado perpendicular al plano de flexión.

EJEMPLO 13

Investigar si la siguiente sección transversal de una columna - esbelta de concreto reforzado que se propone es satisfactoria - para resistir los siguientes elementos mecánicos de carga como- se muestra en la figura. Si en la columna actua una carga últi ma de 120 toneladas produciendo flexocompresión alrededor de -- los dos ejes principales, donde los momentos flexionantes - de segundo orden son:




$M_{rx} = P_r e_x = 42$ ton-m

$M_{ry} = P_r e_y = 25$ ton-m

y el esfuerzo de fluencia del- acero es de $f_y = 4{,}200$ kg/cm$^2$ con un concreto de $f'_c = 250$ -- kg/cm$^2$; el área de acero será de 10 varillas del No. 8 con - un área de 50 cm$^2$ y $C_v = 0.15$.

Solución:

Como se trata de una columna sometida a flexocompresión biaxial; usaremos la fórmula de Bresler.

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} - \frac{1}{P_o} \tag{1}$$

A continuación determinaremos las componentes de la fórmula de- Bresler.

A).- $P_o = 0.85 f_c^* A_c + A_s f_y^*$ (a)

Donde:
- $f_c^* = 0.9\,(1 - C_v) f'_c = 0.9(1-0.15)(250) =$

  $f_c^* = 191.25$ kg/cm$^2$
- $f_y^* = 0.8 f_y = 0.8(4{,}200) = 3{,}360$ kg/cm$^2$
- $A_c = 40(60) = 2{,}400$ cm$^2$

Por lo tanto sustituyendo los valores en (a):

$P_o = 0.85(191.25)(2,400) + (50)(3,360) = 558,150$ kg.

B).- Obtención de $P_x$ usando los diagramas del Instituto de Ingeniería.

Para escoger el diagrama de interacción encontramos:

$* \; t_x = 60$ cm

$* \; d_x = 55$ cm

Por lo tanto $\frac{d_x}{t_x} = \frac{55}{60} = 0.91 \doteq 0.9$

$$* \; W = p\frac{f_y^*}{f_c''} = \left(\frac{50}{2,400}\right)\frac{0.8(4,200)}{0.85(191.25)} = 0.43$$

$$* \; \frac{e_x}{t_x} = \frac{42/P_r}{t_x} = \frac{42x10^5/120x10^3}{60} = 0.58$$

Con: $\left\{ \begin{array}{l} d_x/t_x = 9 \\ W = 0.43 \\ e_x/t_x = 0.58 \end{array} \right\}$ Obtengo del diagrama de interacción del I.I. $\left\{ \alpha = 0.42 \right.$

De donde:

$$\alpha = \frac{N_r}{btf_c''} \Rightarrow N_{rx} = \alpha btf_c'' = 0.42(40)(60)(162.50) =$$

$N_{rx} = 163,860$ kg

Como: $N_{rx} = P_x$

$P_x = 163.8$ ton

C).- Obtención de $P_y$.

Con: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d_y}{t_y} = \frac{35}{40} = 0.9 \\ W = 0.43 \\ \frac{e_y}{t_y} = \frac{25/P_r}{t_y} = \frac{25 \times 10^5/120 \times 10^3}{40} = 0.52 \end{array} \right.$

Obtengo: $\alpha = 0.48$

De donde: $P_y = \alpha btf_c'' = (0.48)(40)(60)(162.5) = 187,200$ kg

$P_y = 187.2$ ton

Sustituyendo los valores de $P_o$, $P_x$ y $P_y$ en la fórmula (1) tenemos:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{163.8} + \frac{1}{187.2} - \frac{1}{558.15}$$

Por lo tanto:

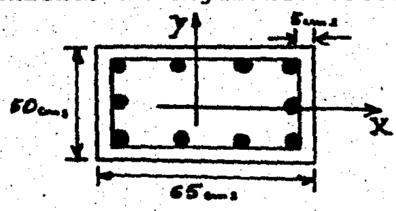
$$P = 103.5 \text{ ton}$$

Vemos que la sección propuesta esta escaso porque no soportará la carga última. Osea:

$$P = 103.5 \text{ ton} < P_u = 120 \text{ ton}$$

En consecuencia proponemos otra sección con dimensiones mayores en la sección para que la columna trabaje satisfactoriamente.

Proponiendo la siguiente sección:




$$A_c = 50(65) = 3{,}250 \text{ cm}^2.$$

A).- $P_o = 0.85\ (191.25)(3{,}250) + (50)(3{,}360) = 696{,}328$ kg

$P_o = 696.3$ ton

B).- Con: * $d_x/t_x = 60/65 = 0.92 \doteq 0.9$

$$* \ W = \left(\frac{50}{3{,}250}\right)\frac{(3{,}360)}{162.5} = 0.31$$

$$* \ e_x/t_x = 35/65 = 0.53$$

Obtengo: $\alpha = 0.4$

De donde: $P_x = \alpha btf''_c = (0.4)(50)(65)(162.5) = 211{,}250$ kg

$P_x = 211.2$ ton

C).- Con: * $d_y/t_y = 45/50 = 0.9$

$$* \ W = 0.31$$

$$* \ e_y/t_y = 20.80/50 = 0.41$$

Obtengo: $\alpha = 0.51$

De donde: $P_y = \alpha btf''_c = 0.51(50)(65)(162.5) = 269{,}343$ kg

Sustituyendo valores en (1) tenemos:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{211.25} + \frac{1}{269.34} - \frac{1}{696.32}$$

Por lo tanto:

$$P = 146.2 \text{ ton} > P_u = 120 \text{ ton}$$

Vemos entonces que esta sección propuesta esta un poco sobrada con respecto a la carga última pero se puede considerar como correcta.

# CAPITULO VI

## CONCLUSIONES

En consecuencia del estudio realizado en esta tesis, donde el - elemento estructural que se seleccionó para su análisis fue de- una columna esbelta; cuando sufre el problema de falla debido - al fenómeno de pandeo o de inestabilidad que en conclusión práctica se llega a la determinación de su diseño estructural.

Para poder diseñar una columna esbelta ya en la vida práctica,- donde en esta pieza actua un sistema de fuerzas normales de compresión y momentos flexionantes, así como otros elementos mecánicos; fue necesario estudiar primeramente con una columna --- ideal el cual tiene muchas consideraciones para su análisis. Este tipo de columnas no existen en la realidad, pero para poder- establecer un estudio teórico para formar un conjunto de reglas ó preceptos de la materia en estudio, como códigos ó métodos -- que fijan ciertas instituciones científicas, es necesario un estudio inicial.

El estudio realizado por Euler, quien fue el que analizó en sus aspectos fundamentales el problema de estabilidad en una columna esbelta, fue con muchas consideraciones que no se pueden realizar en la práctica; así como por ejemplo una de las caracte-- rísticas de la columna ideal son de que sean de un material homogéneo ó que la carga de aplicación debe ser axial, estas dos- consideraciones no se pueden llevar a cabo porque primeramente- no existe un elemento cien por ciento homogéneo, y la carga por más cuidado que tenga el operador no podrá hacerlo actuar axialmente osea siempre existe una excentricidad accidental que hace que exista flexión en la columna. Estas imperfecciones hacen - que el resultado de ciertas prácticas en el laboratorio no arrogen valores semejantes como los que se obtienen aplicando la -- teoría de Euler; pero su discrepancia es poca ya que varía muy poco. En resúmen el estudio realizado por Euler con una columna ideal sometida a compresión con una carga axial, fue como ba se para analizar una columna a flexocompresión, el cual sí se presenta en la realidad; donde éstas columnas sometidas a flexocompresión no estan casi nunca aisladas sino ligadas a otros elementos estructurales, de manera que su comportamiento depende, en gran parte, desde la estructura en conjunto; tampoco estan en general, como se dijo anteriormente, sometidas a flexocompresión pura; pero este análisis de Euler de la columna cargada axialmente constituye un antecedente necesario en la solución del problema, mucho más complejo, de la columna como parte de una estructura reticular, por lo que en todos los códigos de construcción la columna aislada es la base del diseño de las piezas comprimidas y flexocomprimidas. Siendo este un estudio de un conjunto de consideraciones, proposiciones y conclusiones los cuales estan mantenidos con razonamientos.

La solución de Euler es correcta para los casos en que la columna falla por pandeo debido a flexión, en uno de sus planos de inercia principales, bajo esfuerzos de compresión menores que el límite de proporcionalidad del material de que estan compuestas, pero sus resultados no fueron aceptados de inmediato, pues los materiales de construcción empleados en su época de madera y piedra, formaban columnas sumamente robustas que no fallaban por pandeo sino por aplastamiento, para las que no era aplicable su teoría; como también para el pandeo de una pieza recta comprimida axialmente puede ser ocasionado tambien por torción alrededor de su eje longitudinal o por una combinación de flexión y torción; en estos casos no es válida la teoría de Euler. Pero esta teoría de Euler es buena para aplicarse, con la aclaración de Lamarle el cual establecíó el límite de proporcionalidad como límite a esta teoría.

Por otra parte, el la extensión de la teoría de las columnas al intervalo inelástico se debe a los trabajos de Engesser, Considere y Von Karman. Pero las teorías de Considere y Von Karman son complementarios satisfactorios para esta generalización al rango inelástico, aunque dicho problema fue atacado por primera vez por Engesser que publicó su teoría del módulo tangente. Co mo conclusión a este estudio que se basa en la suposición de -- que para un determinado valor del esfuerzo crítico, es posible- una configuración deformada de equilibrio, esto es, un estado - de equilibrio indiferente, y que la deformación que se presenta depende del módulo de elasticidad tangente correspondiente a -- ese esfuerzo crítico; esta suposición implica la aplicación de- la fórmula de Euler sustituyendo E por $E_t$. Esta obtención de- la carga crítica con la teoría del módulo tangente no es total- mente correcta desde un punto de vista estricto, pero se ha de- mostrado en la práctica que da resultados muy aceptables.

Finalmente como una observación para la solución del problema - de pandeo, que se presente en la práctica, se puede resolver es te problema si ya se ha presentado el fenómeno en las columnas- debido a cualquier error que se haya tenido en su diseño ó cons trucción; es contraventeando las columnas en el punto crítico - de su flecha, con un puntal que tenga una magnitud de fuerza -- aproximadamente a un dos por ciento de la carga que esta actuan do en la columna verticalmente; esta solución tambien se puede- utilizar como prevención para que en una columna no se tenga el problema de inestabilidad.

La teoría de Euler que se estudia en este trabajo para la esta- bilidad elástica de columnas, en general viene siende para que- un ingeniero tenga conocimiento y debe tomar en cuenta en el di seño de estos elementos que fallan por pandeo, el comportamien- to de estos; para que asi sabiendo como se va a presentar el fe nómeno de esbeltéz pueda hacer algunas modificaciones al apli-- car los reglamentos especificados para este objetivo; y no dise ñar una columna esbelta sin saber como se comporta y como se -- presentará la falla, por eso mismo es bueno tener esta informa- ción para poder predecir por qué fue la falla en columnas esbel tas de una estructura si es que se han presentado. Este estu-- dio de Euler no tiene una trascendencia pero a cambio se puede- obtener seguridad, eficiencia y economía.

Por otro lado, otro fin de este trabajo fue para que sirva a --

los estudiantes como una ayuda para tener información para el estudio de la Mecánica de Materiales, que se imparten en la facultad, teniendo una referencia completa de esta recopilación ya que para esta materia los libros que abarcan todos los temas estudiados así como acero, madera y concreto reforzado se encuentran separados y dispersos. Además le sirva para estudios posteriores ya que se trata de un trabajo amplio, donde se explica detalladamente en resúmen y conclusiones del autor basandose en los libros dados en la bibliografía de esta tesis.

## REFERENCIAS


1.- Diseño de Estructuras de Acero
Bresler, Lin y Scalzi
Editorial Limusa - México

2.- Estructuras de Acero
Comportamiento y Diseño
Oscar de Buen López de Heredia
Editorial Limusa - México

3.- Introducción a la Mecánica de Sólidos
Egor P. Popov
Editorial Limusa - México

4.- Resistencia de Materiales
Ferdinand L. Singer
Harla, S.A. de C.V., México, B.Aires, Bogotá, Sao Paulo

5.- Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado
Oscar M. González Cuevas - Francisco Robles F.V.- Juan Casillas G. de L. - Roger Díaz de Cossío
Editorial Limusa - México

6.- Estructuras de Concreto Reforzado
R. Park y T. Paulay
Editorial Limusa - México

7.- Efectos de Esbeltéz
Apuntes de Mecánica de Materiales
José Luis Sánchez Martínez
Facultad de Ingeniería