

24  
201

FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS DE ESFUERZOS  
EN CABEZAS  
DE CONTRAFUERTE

Desarrollo y Práctica  
de la Función  
de Esfuerzos  
de Airy

MARIO I. TRUJILLO MARTINEZ

Tesis Profesional

México, D. F.

1982





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Al Pasante señor MARIO INOCENCIO TRUJILLO MARTINEZ,  
P r e s e n t e .

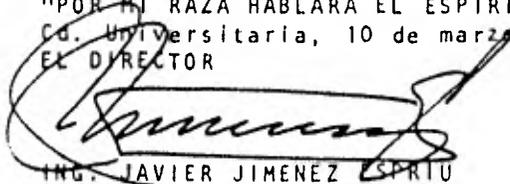
En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor M. I. Carlos Espinosa González, para que lo desarrolle como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"ANALISIS DE ESFUERZOS EN CABEZAS DE CONTRAFUERTE"  
(Desarrollo y práctica de la función de esfuerzos de Airy)

- I. Introducción.
- II. Función de Airy.
- III. Solución del problema mediante diferencias finitas.
- IV. Ejemplo de aplicación.
- V. Conclusiones.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

A t e n t a m e n t e  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Cd. Universitaria, 10 de marzo de 1982  
EL DIRECTOR

  
ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

  
JJE/OPLH/ser

# Indice

<u>CAP.</u>		<u>PAG.</u>
1.-	INTRODUCCION .....	1
1.1	Objetivo del trabajo .....	1
1.2	Alcance del tema .....	5
2.-	LA FUNCION DE AIRY .....	7
2.1	Conceptos preliminares .....	7
2.2	Planteo del problema .....	8
2.3	Las ecuaciones de equilibrio .....	9
2.4	La función de esfuerzos.....	14
2.5	Condiciones de frontera.....	15
3.-	SOLUCION DEL PROBLEMA MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS .....	17
3.1	Deducción de las ecuaciones en diferencias finitas .....	17
3.2	La Función de Esfuerzos de Airy en términos de diferencias finitas.....	20
3.3	Cálculo de $\theta(x,y)$ en puntos próximos a la frontera de la sección estudiada ...	24
3.4	Mecánica de Solución .....	25
4.-	EJEMPLO DE APLICACION .....	29
4.1	Identificación del problema.....	29
4.2	Identificación numérica de puntos de frontera y adyacentes a esta.....	30
4.3	Planteo y solución del sistema de ecuacio nes en función de $\theta$ y su interpretación.	40
5.-	CONCLUSIONES AL TRABAJO.....	52
A.-	APENDICE A..... (Listado, archivo de datos y soluciones al programa GAUSS 1 para resolver la ma- triz del problema).	54

B.-	APENDICE B .....	67
	(Listado, arreglo de datos y cuadro solución del programa ELEMEC para resolver las ecuaciones de esfuerzos del problema)	
C.-	BIBLIOGRAFIA .....	73

# CAPITULO 1

## INTRODUCCION

### 1.1 OBJETIVO DEL TRABAJO .

DENTRO DEL DIMENSIONAMIENTO DE PRESAS GRANDES Y PEQUEÑAS, EXISTEN DIVERSIDAD DE PROBLEMAS POR RESOLVER, TANTO CON LAS PRESAS DE MATERIALES SUeltOS, COMO CON LAS PRESAS DE MATERIALES CEMENTADOS; CONSIDERANDO QUE EN CADA CASO EXISTE DIVERSIDAD TAMBIÉN DE APLICACIÓN DE CRITERIOS. SIN EMBARGO, TODOS Y CADA UNO DE LOS CASOS, TIENE UN PROBLEMA EN COMÚN : DETERMINAR LA MAGNITUD DE LOS ESFUERZOS QUE CADA UNO DE LOS MATERIALES QUE COMPONEN LA PRESA, SEGÚN EL TIPO, DESARROLLAN FRENTE A LAS DISTINTAS SOLICITACIONES A LAS QUE SE VEN SOMETIDOS, YA SEA POR EFECTOS PERMANENTES ( CARGA HIDROSTÁTICA, PESO PROPIO, ETC. ), O POR EFECTOS SIMPLEMENTE OCASIONALES ( SISMO POR EJEMPLO ) O ACCIDENTALES, SEGÚN SE LES QUIERA CONSIDERAR,

AUNQUE PARA LOS DOS CASOS DE PRESAS MENCIONADOS SE REQUIERE UN SINO MÚLTIPLO DE ESTUDIOS Y CONSIDERACIONES TÉCNICAS, TODOS ENCAMINADOS A DETERMINAR LA CONFIABILIDAD DE LA ESTRUCTURA POR CONSTRUIR, LOS PROBLEMAS POR RESOLVER PARA LLEGAR A TENER FACTORES Y ELEMENTOS DE SEGURIDAD DE LA OBRA, SON DE ORDEN Y CARACTERÍSTICAS DISTINTAS :

PARA LAS PRESAS DE MATERIALES SUeltOS ( FIGURA 1 ) SE HACE INDISPENSABLE ESTUDIAR LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS DISTINTOS MATERIALES POR UTILIZAR A FIN DE SABER QUE TAN RESISTENTES PUEDEN SER ANTE FENÓMENOS TALES COMO : FILTRACIONES EXCESIVAS, TUBIFICACIÓN, AGRIETAMIENTO, LICUACIÓN O FLUJO DEL MATERIAL O LO MÁS FRECUENTE, EL DESLIZAMIENTO DE TALUDES. TODOS LOS FENÓMENOS MENCIONADOS, SON LOS MÁS COMUNES DE ENFRENTAR EN UNA PRESA DE MATERIALES SUeltOS, EN TÉRMINOS GENERA-

### 1.- presa homogénea.

COMPACTADAS Y DE RELLENO HIDRAULICO -construidas casi exclusivamente de tierra compactada, protegidas aguas arriba por una chapa de enrocamiento para protegerla contra el oleaje y un dren o filtra al pie del talud de aguas abajo, talud que también se protege con enrocamiento o rezaga suelta para evitar la erosión

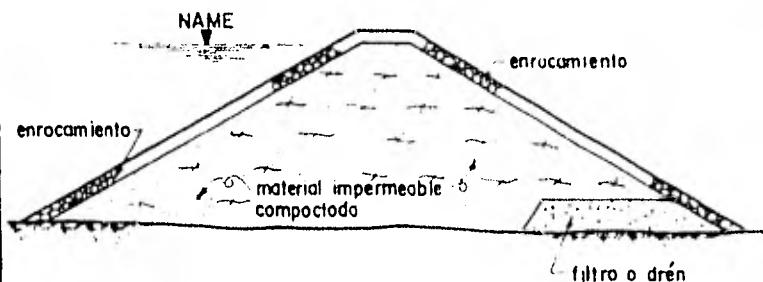


figura 1.1.- presa homogénea

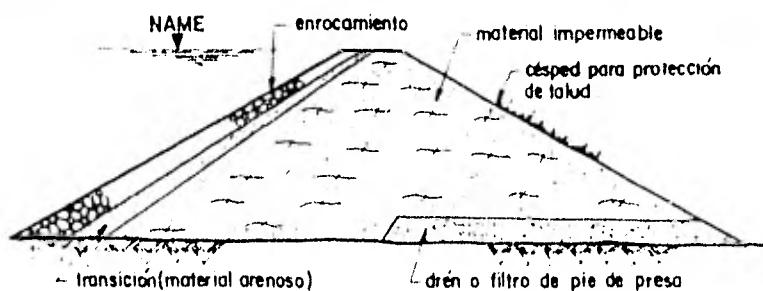


figura 1.2.- otro tipo de presa homogénea

### 2.- presas de enrocamiento.

El material que predomina en este tipo de presas es la roca.

- Las construidas con corazón de material impermeable
- Las que se construyen con pantalla impermeable ya sea de concreto o de asfalto.

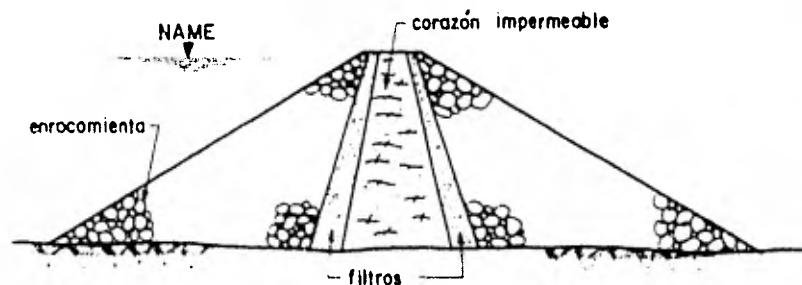


figura 1.3.- presa de enrocamiento con corazón impermeable

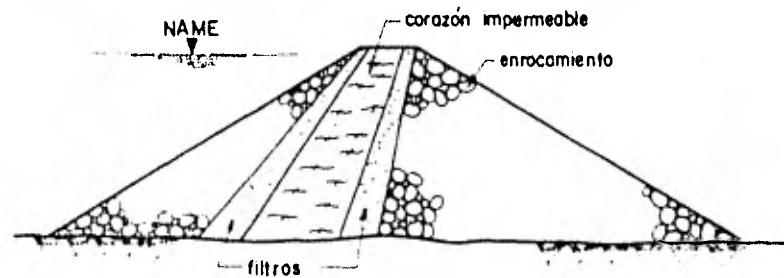


figura 1.4.- presa de enrocamiento con corazón impermeable inclinado.

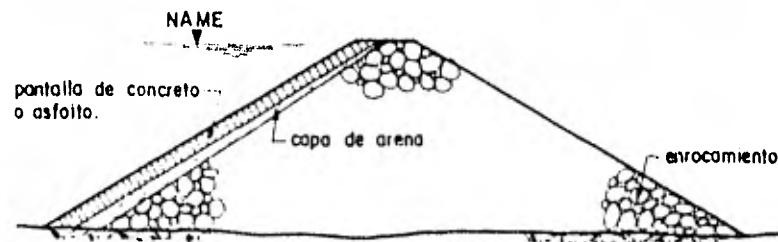


figura 1.5.- presa de enrocamiento con pantalla impermeable

### 3.- pr

Estas pr  
gradual.

- EL CORA
- EL FILTR
- LAS TRA
- gas.
- LA CHA
- rocas gr
- últimos

## 2.- presas de enrocamiento.

El material que predomina en este tipo de presas es la roca.

- a) Las construidas con corazón de material impermeable
- b) Las que se construyen con pantalla impermeable ya sea de concreto o de asfalto.

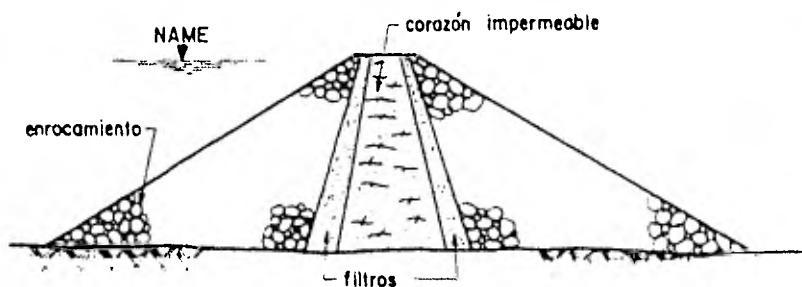


figura 1.3.- presa de enrocamiento con corazón impermeable

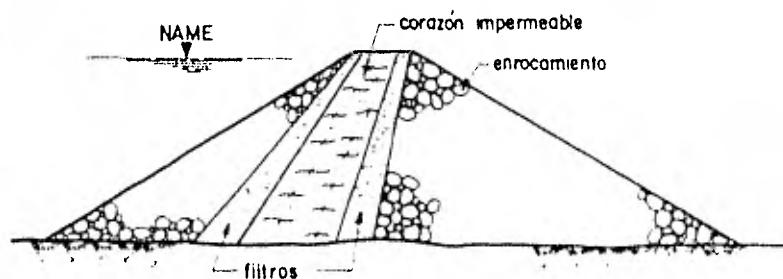


figura 1.4.- presa de enrocamiento con corazón impermeable inclinado.

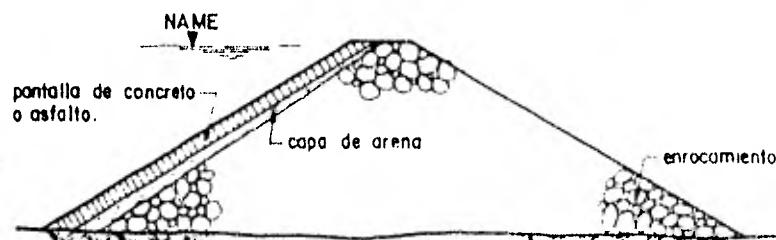


figura 1.5.- presa de enrocamiento con pantalla impermeable

## 3.- presas de materiales graduados.

Estas presas son las que se construyen con materiales colocados de manera gradual.

- EL CORAZON construido a base de suelos finos e impermeables (arcilla p.e.j)
- EL FILTRO a base de arena u otros materiales filtrantes adecuados.
- LAS TRANSICIONES Y RESPALDOS a base de arenas gruesas, gravas a rezagas
- LA CHAPA DE ENROCAMIENTO constituida principalmente de rezagos grandes, rocas grandes y grandes boleos, a veces producto del arrastre del rio estos últimos.

- ① CORAZON IMPERMEABLE
- ② FILTRO
- ③ GRAVA Y ARENA
- ④ REZAGA
- ⑤ ENROCAMIENTO
- ⑥ MATERIALES DE ARRASTRE DEL RIO

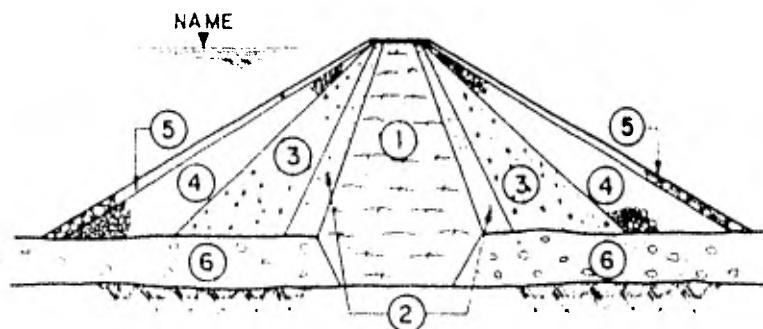


figura 1.6.- presa de materiales graduados

U.N.A.M. FACULTAD DE INGENIERIA

TRABAJO ESCRITO PARA EXAMEN  
PROFESIONAL

CLASIFICACION GENERAL DE LAS  
PRESAS DE MATERIALES SUELTOS

FIG  
1

pasante  
TRUJILLO MARTINEZ MARIO

Mexico, D.F. Febrero de 1982

LES. ÉSTOS, SIN VARIAR DEMASIADO, SON PRODUCIDOS POR DISTINTOS ESFUERZOS GENERADOS POR LAS PRESIONES HIDROSTÁTICAS Y DE PORO; POR ESTO MISMO Y DADA LA MAGNITUD DE LOS ESFUERZOS PREVIAMENTE ESTUDIADOS Y DETERMINADOS, SE LLEVA A CABO EL DISEÑO DE LA SECCIÓN MÁXIMA DE LA CORTINA DE ACUERDO A LA SELECCIÓN DE LOS MATERIALES ADECUADOS PARA SU CONSTRUCCIÓN.

HASTA AQUÍ SE PUEDE DESTACAR Y COMPRENDER FACILMENTE QUE EL ESTUDIO DE LOS ESFUERZOS A LOS QUE VAN A TRABAJAR NUESTROS MATERIALES, SE LLEVAN A EFECTO -- DESDE UN PUNTO DE VISTA TOTALMENTE GEOTÉCNICO.

POR OTRO LADO, ESTAN LAS PRESAS DE MATERIALES CEMENTADOS ( FIGURA 2 ) - QUE COMO SU NOMBRE LO INDICA, ESTÁN CONSTRUÍDAS A BASE DE CONCRETO Y QUE EN ALGUNOS CASOS, COMO EN EL DE LAS PRESAS DE GRAVEDAD MASIVA, BASAN LA EFICIENCIA DE LA ESTABILIDAD QUE OFRECEN, FUNDAMENTALMENTE EN EL PESO DEL MATERIAL QUE LAS CONSTITUYEN.

DENTRO DE LAS PRESAS DE MATERIALES CEMENTADOS, SE PRESENTA TAMBIÉN LA ALTERNATIVA DE LAS PRESAS DE CONTRAFUERTE, EN CUYO CASO SE DEPENDE DE LA SOLUCIÓN QUE SE DE PARA LA CUBIERTA DE AGUAS ARRIBA DE LA PRESA; ASÍ :

- A ).- EXISTEN LAS QUE SE CONSTRUYE A BASE DE LOSAS PLANAS APOYADAS SOBRE CONTRAFUERTE, CONOCIDAS COMO CORTINAS ÁMBURSEN, O DEL TIPO ÁMBURSEN.
- B ).- LAS QUE ESTÁN CONSTITUÍDAS POR ARCOS EMPOTRADOS EN LOS CONTRAFUERTE,
- C ).- Y LAS QUE POR SOLUCIÓN SE TIENE UNA CUBIERTA FORMADA POR UN ENSANCHAMIENTO O CABEZA QUE SE CONSTRUYE EN EL EXTREMO AGUAS ARRIBA DE LOS CONTRAFUERTE. ESTO ES, LAS PRESAS DE MACHONES MASIVOS.

## 1.- PRESAS DE GRAVEDAD.

- a) PRESAS DE GRAVEDAD MASIVA.- Como su nombre lo indica, estas presas fundan su estabilidad en el peso del material mismo que las constituye: el peso del concreto.
- b) PRESAS DE GRAVEDAD ALIGERADA.- Estas mas propiamente se consideran como presas de machones huecos ya que son una variación precisamente de las presas de contrafuertes a base de machones masivos. Se les conoce como Presas Tipo Marcello.

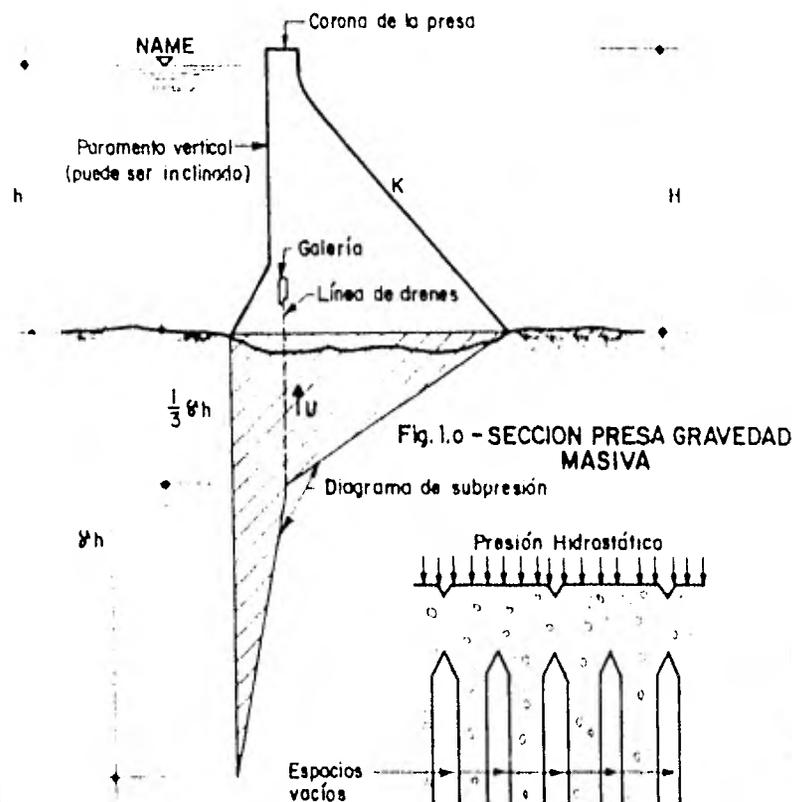
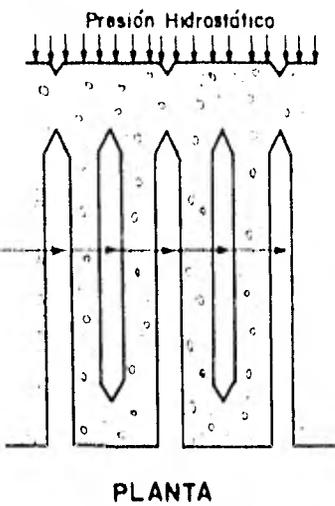


Fig. 1.a - SECCION PRESA GRAVEDAD MASIVA

Fig. 1.b - PRESAS DE GRAVEDAD ALIGERADA (Machones tipo Marcello)



PLANTA

## 2.- PRESAS DE CONTRAFUERTES.

- a) TIPO AMBURSEN.- Básicamente estas presas son constituidas con losas planas apoyadas sobre contrafuertes. Por esto, es que se requiere en gran parte de acero de refuerzo.
- b) MACHONES MASIVOS.- Estas cortinas se forman cuando en el extremo del contrafuerte que está en contacto con el agua, se dispone de un ensanchamiento o cabeza de éste. En su diseño no interviene el acero de refuerzo.
- c) ARCOS O BOVEDAS MÚLTIPLES.- La cubierta aguas arriba de estas cortinas, es una serie de arcos empotrados en los contrafuertes, que en este caso se pueden espaciar mas que en los casos anteriores debido a las ventajas que ofrece un arco. Requieren acero de refuerzo.

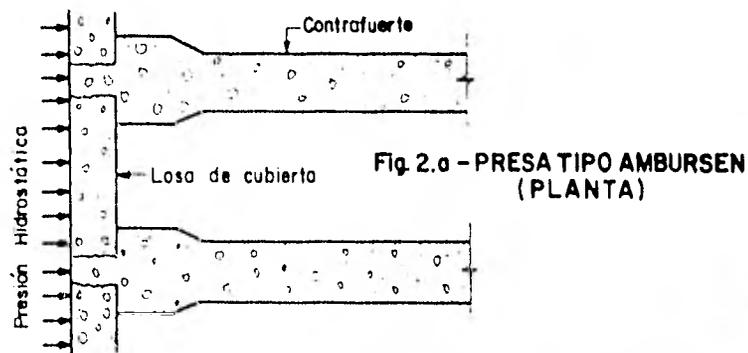
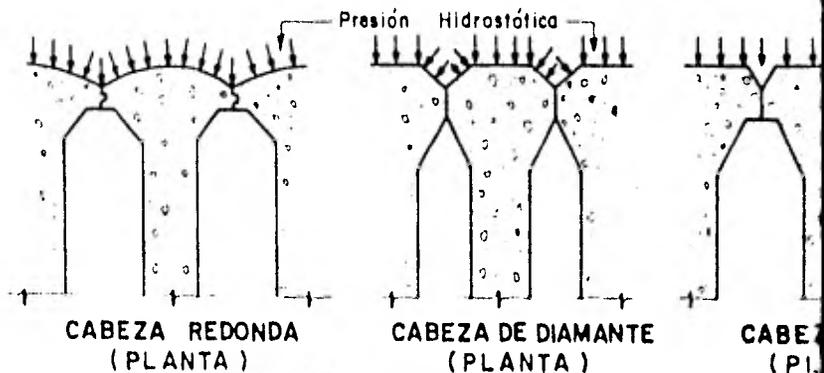


Fig. 2.a - PRESA TIPO AMBURSEN (PLANTA)

Fig. 2.b - VARIACIONES FRECUENTES EN TIPOS DE MACHONES MASIVOS



CABEZA REDONDA (PLANTA)

CABEZA DE DIAMANTE (PLANTA)

CABEZA DE TRIANGULO (PLANTA)

## 2.- PRESAS DE CONTRAFUERTES.

- a) TIPO AMBURSEN - Básicamente estas presas son constituidas con losas planas apoyadas sobre contrafuertes. Por esto, es que se requiere en gran parte de acero de refuerzo.
- b) MACHONES MASIVOS - Estas cortinas se forman cuando en el extremo del contrafuerte que está en contacto con el agua, se dispone de un ensanchamiento o cabeza de éste. En su diseño no interviene el acero de refuerzo.
- c) ARCOS O BOVEDAS MULTIPLES - La cubierta aguas arriba de estas cortinas, es una serie de arcos empotrados en los contrafuertes, que en este caso se pueden espaciar mas que en los casos anteriores debido a las ventajas que ofrece un arco. Requieren acero de refuerzo.

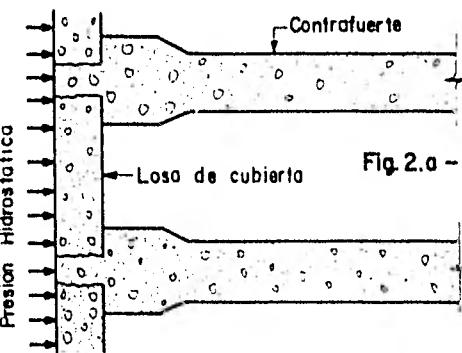
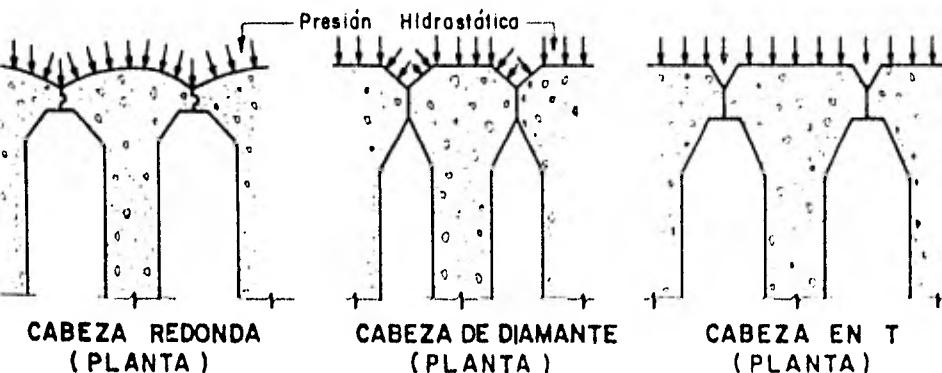


Fig. 2.a - PRESA TIPO AMBURSEN (PLANTA)

Fig. 2.b - VARIACIONES FRECUENTES EN TIPOS DE MACHONES MASIVOS



## 3.- PRESAS DE ARCO BOVEDA.

Este tipo de presa esta diseñado en base a cualquier tipo de cascarón (Esférico, parabólico, etc.) y que basa su resistencia en las características y ventajas que don los arcos que generan una superficie como ésta, para después transmitir los esfuerzos hacia las laderas de empotramiento de la estructura. Tanto en este caso como en el 2-C anterior, se requiere que la boquilla ofrezca condiciones geológicas bastante buenas.

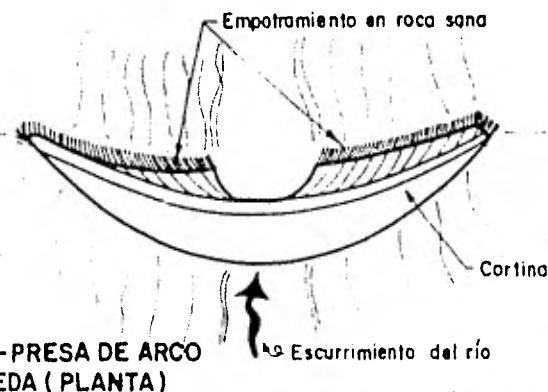


Fig. 3 - PRESA DE ARCO BOVEDA (PLANTA)

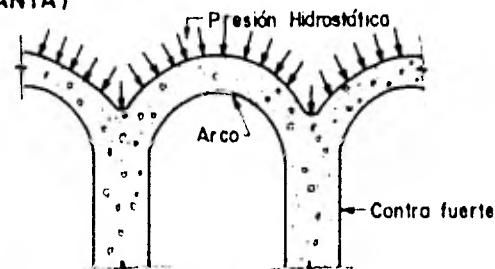


Fig. 2.C - PRESA DE ARCOS MULTIPLES (PLANTA)

U.N.A.M. FACULTAD DE INGENIERIA

TRABAJO ESCRITO PARA EXAMEN PROFESIONAL

CLASIFICACION GENERAL DE LAS PRESAS DE MATERIALES CEMENTADOS

FIG

2

posante  
TRUJILLO MARTINEZ MARIO

Mexico, D. F. Febrero de 1982

ASÍ PUES, ESTAS PRESAS DE CONTRAFUERTE OFRECEN ALGUNAS CARACTERÍSTICAS QUE SE PUEDEN CONSIDERAR COMO VENTAJAS YA QUE UNA PRESA DE ESTE TIPO, NO REQUIERE DE VOLÚMENES DE CONCRETO TAN GRANDES COMO EN UNA PRESA DE GRAVEDAD; POR SUS MISMAS CARACTERÍSTICAS, TAMBIÉN SE REDUCE EL FENÓMENO DE LA SUBPRESIÓN, ETC., SIN EMBARGO TAMBIÉN TIENE UNA DESVENTAJA CONSIDERABLE: LOS ESFUERZOS NORMALES Y CORTANTES MEDIOS QUE SE DESARROLLAN EN LA CIMENTACIÓN, SON MUCHO MÁS GRANDES QUE EN CUALQUIER OTRO CASO, YA QUE AL REDUCIRSE EL ÁREA DE CONTACTO CON EL SUELO, LOS ESFUERZOS QUE SE PRODUCEN, SE CONCENTRAN Y SE TRANSMITEN A LA ESCAZA ÁREA DE CONTACTO QUE SE TENGA.

DADO QUE TAMBIÉN EN ESTE TIPO DE ESTRUCTURAS NO SE UTILIZA ACERO DE REFUERZO Y QUE SOLAMENTE SE APROVECHA LA RESISTENCIA NATURAL DE CONCRETO, SE REQUIERE POR LO TANTO DE UN ANÁLISIS DE ESFUERZOS QUE SE DESARROLLAN DENTRO DE LA MASA CEMENTADA O DE CONCRETO QUE LO HACE DIFERENTE A LOS USADOS EN OTROS CASOS.

EN EL PRESENTE TRABAJO SE PRESENTARÁ EL DESGLOSE DE UN MÉTODO NUMÉRICO-BASADO EN LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD, PARA ANALIZAR Y DETERMINAR LOS ESFUERZOS QUE SE GENERAN EN ESTE TIPO DE ESTRUCTURAS Y QUE CON LOS MÉTODOS TRADICIONALES DE DISEÑO CONOCIDOS Y EMPLEADOS COMUNMENTE HASTA AHORA, NO ES POSIBLE LLEGAR A SOLUCIONES CON TAL GRADO DE APROXIMACIÓN COMO CON EL ANÁLISIS DE ESFUERZOS CON LA FUNCIÓN DE AIRY.

## 1.2 ALCANCE DEL TEMA .

PLANTEADO DEL MODO ANTERIOR EL OBJETIVO DEL TRABAJO, SE ANTOJA LÓGICO QUE ADENÁS DEL PRESENTE CAPÍTULO DE INTRODUCCIÓN, SE MENCIONE EN UN CAPÍTULO APARTE TODOS LOS DETALLES RELATIVOS A LO QUE ES Y COMO SE GENERA LA FUNCIÓN DE AIRY Y COMO FINALMENTE SE APLICA A LOS PROBLEMAS QUE EN SU USO ES INDISPENSABLE,

ÉSTO ES ; PLANTEAR EL PROBLEMA, DEDUCIR, SU SOLUCIÓN, DETERMINAR SU MECANISMO DE SOLUCIÓN Y SEÑALAR LOS ELEMENTOS ADECUADOS QUE SE MANEJAN DURANTE LA MECÁNICA DE SOLUCIÓN. TODO LO ANTERIOR FORMA PARTE DEL PLANTEAMIENTO TEÓRICO DEL PROBLEMA.

PARA DAR UNA IDEA MÁS CONCRETA DEL ANÁLISIS DE ESFUERZOS CON LA FUNCIÓN DE AIRY SE DESTACA UN EJEMPLO REAL LLEVADO PASO A PASO HASTA SU COMPLETA SOLUCIÓN. ÉSTO ES CON LA FINALIDAD DE QUE CUANDO SE CONSULTE ESTE TRABAJO, SE CONVIERTA EN UN AUXILIAR SENCILLO Y FÁCIL DE COMPRENDER ACERCA DE LA TEORÍA Y APLICACIÓN DE ESTOS CONCEPTOS A PROBLEMAS QUE REQUIERAN DE ESTE TIPO DE SOLUCIÓN, TAL Y COMO SE EXPLICARÁ EN LAS PÁGINAS QUE SIGUEN A ESTA INTRODUCCIÓN QUE SIRVIÓ MÁS BIEN DE RESUMEN DE LOS DETALLES MAS SIGNIFICATIVOS QUE CONTIENE ESTE TRABAJO.

# CAPITULO 2

---

## LA FUNCION DE AIRY

### 2.1 CONCEPTOS PRELIMINARES .

PARA LA DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ESFUERZOS DE AIRY, SE PARTIÓ DEL ESTUDIO DE UN "ESTADO DE DEFORMACIONES PLANAS" EN UN MATERIAL DETERMINADO. ES DECIR, SE REALIZÓ MEDIANTE UNA SERIE DE CONSIDERACIONES DE ORDEN TEÓRICO, PERO APLICABLES A MUCHOS MATERIALES UTILIZADOS DENTRO DE LAS DIFERENTES INDUSTRIAS.

DENTRO DE DICHAS CONSIDERACIONES SE DESTACAN LAS SIGUIENTES :

A ),.- ELASTICIDAD .- TODOS LOS MATERIALES ESTRUCTURALES TIENEN UNA PROPIEDAD FÍSICA LLAMADA ELASTICIDAD, LA CUAL PERMITE A DICHOS MATERIALES RECUPERAR SU FORMA ORIGINAL DESPUÉS DE DEFORMARSE BAJO LA APLICACIÓN DE FUERZAS EXTERIORES.

PARA ESTE TRABAJO SE PARTE DE LA SUPOSICIÓN QUE LOS CUERPOS EN ESTUDIO SON PERFECTAMENTE ELÁSTICOS Y QUE RECUPERAN SU FORMA INICIAL DESPUÉS DE SUPRIMIR CUALQUIER SOLICITACIÓN MECÁNICA EXTERIOR QUE PUEDE DEFORMARLO.

B ),.- HOMOGENEIDAD .- SE SUPONE TAMBIÉN EN CUANTO A LA ESTRUCTURA MOLECULAR DE LOS CUERPOS ELÁSTICOS, QUE SON HOMOGÉNEOS Y PRESENTAN CONTINUIDAD EN TODO SU VOLÚMEN. POR LO TANTO, SI SE EXTRAE PARA SU ESTUDIO CUALQUIER ELEMENTO DEL MATERIAL CONSIDERADO, PRESENTARÁ LAS MISMAS PROPIEDADES FÍSICAS QUE TODO EL MATERIAL CONJUNTO.

C ),.- ISOTROPÍA .- SI SUPONEMOS QUE UN MATERIAL ES ISOTROPO, QUIERE DECIR -- QUE SUS PROPIEDADES ELÁSTICAS NO VARIARÁN EN NINGUNA DIRECCIÓN EN QUE SE ESTUDIE.

ES FÁCIL COMPRENDER QUE DENTRO DEL MERCADO NO EXISTE NINGÚN MATERIAL — QUE PRESENTE TALES CARACTERÍSTICAS, NI POR SEPARADO; SIN EMBARGO LA EXPERIENCIA — INDICA QUE LOS RESULTADOS DE ESTUDIOS REALIZADOS BAJO TALES CONDICIONES TEÓRICAS, FUNCIONAN DE UN MODO ADECUADO A COMO SE PLANTEÓ Y COMO SE ESPERABA QUE SUCEDIERA; TALES SON LOS CASOS DE DISEÑO ELÁSTICO PARA ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO, EN LAS CUALES SE COMPRUEBA CON CIERTA CONFIANZA ESTA TEORÍA.

## 2.2 PLANTEO DEL PROBLEMA .

PARA UN ESTUDIO DE DEFORMACIONES EN UN CUERPO ELÁSTICO, SE SUPONE QUE  $E$  EXISTEN LOS NEXOS NECESARIOS QUE IMPIDEN SU MOVIMIENTO COMO CUERPO RÍGIDO, DE TAL-FORMA QUE NO SEA POSIBLE EL DESPLAZAMIENTO DE LAS PARTÍCULAS SIN UNA DEFORMACIÓN-DEL MISMO. DE ESTE MODO SÓLO SE CONSIDERARÁN DEFORMACIONES PEQUEÑAS, YA QUE EN — LA REALIDAD SÓLO SE ADMITEN MATERIALES ESTRUCTURALES QUE SE COMPORTEN ASÍ.

SUPONGAMOS UNA PLACA DELGADA ( FIGURA 3.A ), SUJETA A LA ACCIÓN DE FUERZAS EXTERIORES, DISTRIBUIDAS A LO LARGO Y ANCHO DE SU CONTORNO Y PARALELAS AL PLA-NO DE LA PLACA, SUPONGAMOS TAMBIÉN QUE LAS SECCIONES EXTREMAS DE ESTA PLACA, SE — ENCUENTRAN CONFINADAS ENTRE PLANOS RÍGIDOS Y FIJOS, DE TAL FORMA QUE CUALQUIER -- DESPLAZAMIENTO EN LA DIRECCIÓN AXIAL ES IMPOSIBLE.

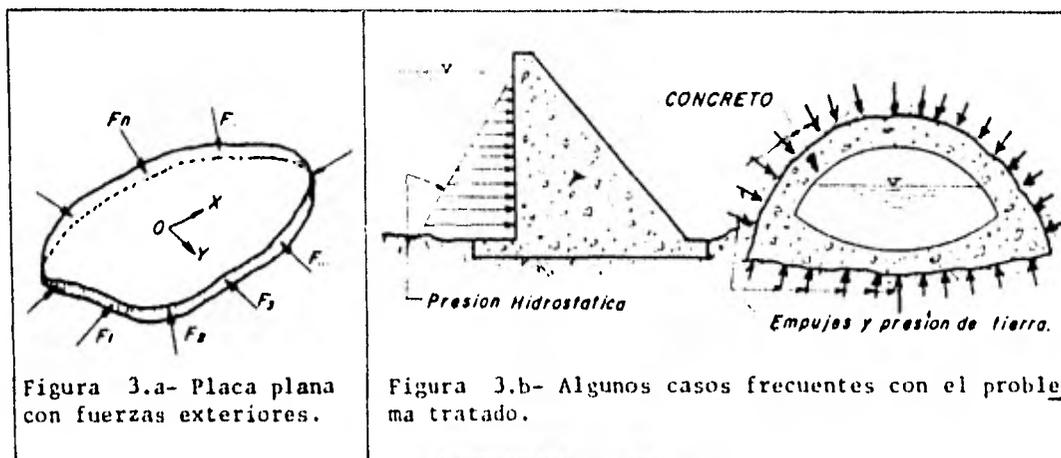


Figura 3.a- Placa plana con fuerzas exteriores.

Figura 3.b- Algunos casos frecuentes con el problema tratado.

DEL PÁRRAFO ANTERIOR SE PUEDE CONSIDERAR UN ESTADO PLANO DE DEFORMACIONES EL CUAL SE DEFINE MEDIANTE LAS SIGUIENTES HIPÓTESIS.

- 1 ).- NO EXISTEN DEFORMACIONES NORMALES UNITARIAS EN DIRECCIÓN AL EJE Z DE UN SISTEMA COORDENADO.
- 2 ).- TAMPOCO EXISTEN DEFORMACIONES ANGULARES EN PLANOS PARALELOS A DICHO EJE
- 3 ).- LAS DEFORMACIONES EN EL PLANO XY SÓLO DEPENDEN DE LAS COORDENADAS ( X.- Y ).
- 4 ).- POR TODO LO ANTERIOR, EL PROBLEMA SE REDUCE A UNO DE ORDEN BIDIMENSIONAL.

TODO LO ANTERIOR NOS CONDUCE A UNA CONCLUSIÓN QUE EXPLICA LO SIGUIENTE:

NI LAS CARGAS EXTERNAS, NI LAS DIMENSIONES DEL CUERPO EN LA DIRECCIÓN - DE Z SE CONSIDERARÁ QUE VARÍEN, EN CONSECUENCIA TAMBIÉN LOS ESFUERZOS CORTANTES - EN LAS CARAS DE LA PLACA SERÁN NULOS Y SOLAMENTE EXISTIRÁ EL NORMAL QUE SE DEFINIRÁ EN FUNCIÓN DE ( X. Y ),

### 2.3 LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO .

BAJO TODAS LAS SUPOSICIONES ANTERIORES, CONSIDEREMOS AHORA EL VOLÚMEN - DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL DE ESPESOR UNITARIO Y DIMENSIONES  $a$  Y  $b$  PARA LAS OTRAS ARISTAS, SOMETIDO A LA ACCIÓN DE LOS ESFUERZOS NORMALES Y TANGENCIALES, COMO SE - MUESTRAN EN LA FIGURA 4.

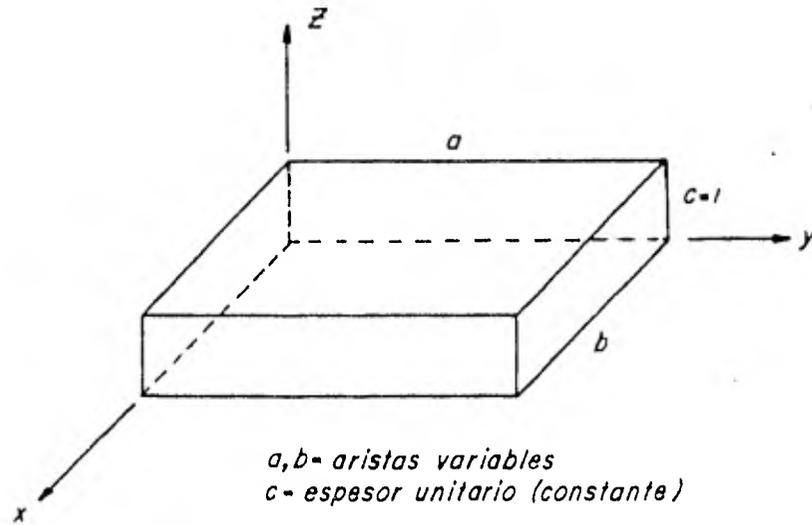


FIGURA 4.a - CUBO DIFERENCIAL CON ESPESOR UNITARIO.

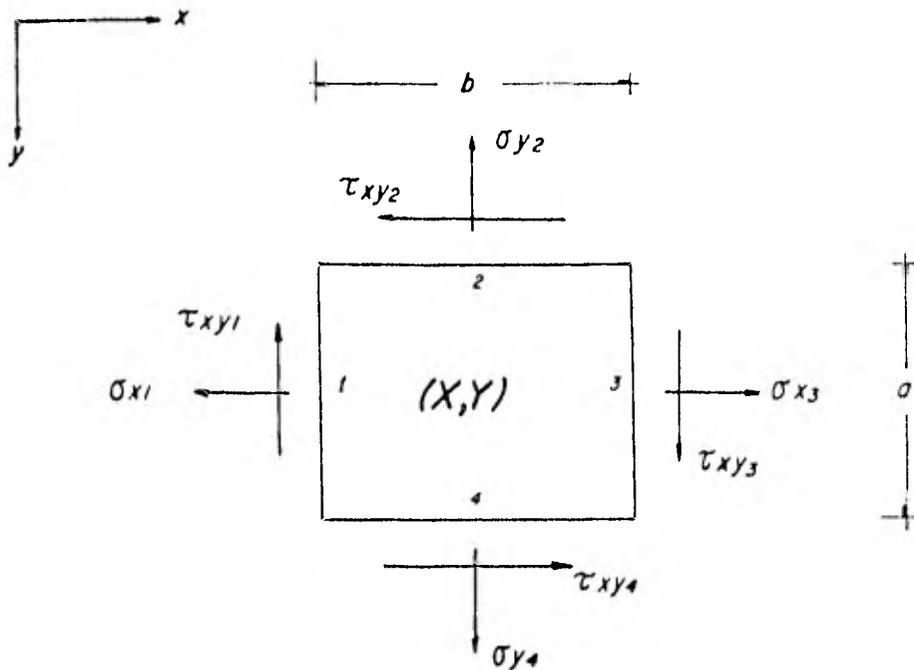


FIGURA 4.b - ESTADO PLANO DE ESFUERZOS.

SE ESTÁ CONSIDERANDO QUE  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  Y SE ESTA DEFINIENDO QUE :

$X, Y =$  COMPONENTES DE LA FUERZA MÁSCICA POR UNIDAD DE VOLUMEN.

PARA PLANTEAR LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN EN LA DIRECCIÓN DE "X", HACEMOS USO DE LA CONDICIÓN DE LA ESTÁTICA  $\sum f_x = 0$ , Y OBTENEMOS :

$$(\sigma_{x_3}) (a) (1) - (\sigma_{x_1}) (a) (1) + (\tau_{xy_4}) (b) (1) - (\tau_{xy_2}) (b) (1) + X_{ab}(1) = 0$$

REDUCIENDO TÉRMINOS :

$$a(\sigma_{x_3}) - a(\sigma_{x_1}) + b(\tau_{xy_4}) - b(\tau_{xy_2}) + X_{ab} = 0$$

DIVIDIENDO TODO ENTRE  $ab$

$$\frac{\sigma_{x_3} - \sigma_{x_1}}{b} + \frac{\tau_{xy_4} - \tau_{xy_2}}{a} + X = 0$$

SI HACEMOS QUE EL VOLUMEN PROPUESTO TIENDA A CERO, ES DECIR QUE  $b \rightarrow 0$  Y QUE  $a \rightarrow 0$ , TENEMOS QUE :

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sigma_{x_3} - \sigma_{x_1}}{b} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} ; \text{ ( VARIACIÓN EN X )}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\tau_{xy_4} - \tau_{xy_2}}{a} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \text{ ( VARIACIÓN EN Y )}$$

DE ESTE MODO, LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO QUEDA EXPRESADA COMO :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

SI PROCEDAMOS DE LA MISMA FORMA EN LA OTRA DIRECCIÓN, TENDREMOS QUE POR LA CONDICIÓN  $\sum f_y = 0$ , OBTENEMOS :

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \gamma = 0$$

RESULTANDO QUE EL SISTEMA DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO ES :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \gamma = 0$$

AHORA BIEN, SI TOMAMOS EN CUENTA QUE DE LAS FUERZAS MÁSCAS QUE ACTÚAN, SOLAMENTE TENEMOS AL PESO PROPIO DEL ELEMENTO ACTUANDO EN DIRECCIÓN DEL EJE Y, EL SISTEMA DE ECUACIONES ( 1 ) SE REDUCE A :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \gamma = 0, \quad \gamma = \text{CTE.}$$

ASÍ PUES, SE CONCLUYE QUE ( 1 ) O ( 2 ) ES EL SISTEMA DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA PROBLEMAS ELÁSTICOS BIDIMENSIONALES.

POR OTRO LADO, TOMANDO EN CUENTA LA CONDICIÓN DE LEVY, DEDUCIDA A PARTIR DE LA ECUACIÓN DE COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES QUE A SU VEZ ES DEDUCIDA CON EL CRITERIO DE LA LEY DE HOOKE GENERALIZADA, SE OBTIENE LA EXPRESIÓN :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (3)$$

QUE EXPRESADA CON OPERADORES DE LAPLACE QUEDA :

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (3')$$

ASÍ PUÉS, SI TENEMOS UN PROBLEMA DE CARÁCTER BIDIMENSIONAL, BASTA CON APLICAR E - INTEGRAR ADECUADAMENTE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ( 2 ) Y ( 3 ), Y QUE SATISFAGAN LAS ECUACIONES DE FRONTERA DADAS POR ( VER FIGURA 5 ) :

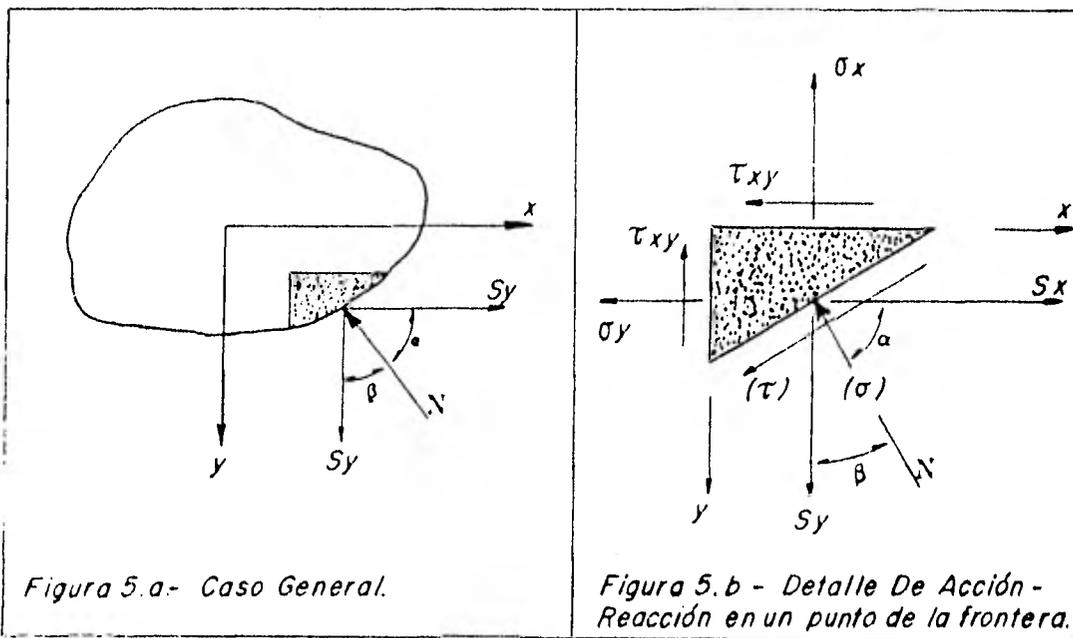
$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta \\ S_y &= \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta \end{aligned} \quad ( 4 )$$

EN DONDE :

$S_x, S_y$  = COMPONENTES DE LAS FUERZAS NORMALES EXTERIORES QUE ACTÚAN EN EL PUNTO- ESTUDIADO, RESPECTO A CADA UNO DE LOS EJES DE UN SISTEMA COORDENADO -- CONVENIDO.

$\alpha$  = ÁNGULO DE LA FUERZA NORMAL RESPECTO AL EJE X.

$\beta$  = ÁNGULO DE LA FUERZA NORMAL RESPECTO AL EJE Y.



## 2.4 LA FUNCIÓN DE ESFUERZOS :

DADO QUE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ESTA EN RESOLVER ADECUADAMENTE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ( 2 ) Y ( 3 ), ENTONCES ES NECESARIO PLANTEAR UN MÉTODO - QUE DE MODO PRÁCTICO NOS LLEVE A CONSEGUIR DICHA SOLUCIÓN.

EN GENERAL PARA RESOLVER ESTAS ECUACIONES SE INTRODUCE EN LA SOLUCIÓN - UNA FUNCIÓN  $\phi ( X, Y )$ , LLAMADA FUNCIÓN DE ESFUERZOS DE AIRY, DEBIDA A QUIEN LA - PROPUSO COMO SOLUCIÓN, O SIMPLEMENTE FUNCIÓN DE ESFUERZOS, CONSIDERANDO PARA ESTO QUE :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - wy; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

EN DONDE :

$$wy = \text{CTE.} = \text{COMPONENTE VERTICAL DEL PESO DEL CUERPO.}$$

DE MODO QUE AL REEMPLAZAR LAS ECUACIONES ( 5 ) EN LAS ECUACIONES ( 3 ) Ó ( 3' ), QUE TENEMOS QUE :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - wy \right) \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - wy \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - wy \right) = 0$$

OPERANDO

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^2 \partial x^2} = 0$$

COMO MATEMÁTICAMENTE SE DEMUESTRA QUE:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^2 \partial x^2}$$

ENTONCES, REDUCIENDO Y REACOMODANDO LA EXPRESIÓN QUEDA:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (6)$$

A PARTIR DE LA ECUACIÓN BIARMÓNICA ( 6 ) QUE DEBE SATISFACER LAS CONDICIONES DE FRONTERA ( 4 ), SE PUEDE PLANTEAR LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA, LA CUAL - - CONSISTE EN RESOLVER ESTA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA OBTENER LA FUNCIÓN  $\phi ( x, y )$  YA MENCIONADA, LA CUAL DEBERÁ DE CUMPLIR CON LA EXISTENCIA Y CONTINUIDAD DE DERIVADAS HASTA DE CUARTO ORDEN.

## 2.5 CONDICIONES DE FRONTERA

EN BASE A LAS ECUACIONES DE FRONTERA ( 4 ), Y HACIENDO USO OTRA VEZ DE LA FIGURA 5, SE PUEDE ESTABLECER UNA ANALOGÍA ENTRE EL CONTORNO ESTUDIADO Y UNA BARRA DE LA MISMA FORMA, CON LO CUAL A TRAVÉS DE UNA INTEGRAL DE LÍNEA, SE OBTIENE QUE:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{pi} = - \sum_{po}^{pi} F_y$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{pi} = \sum_{po}^{pi} F_x \quad (7)$$

$$(\phi)_{pi} = \sum_{po}^{pi} M_{pi}$$

ESTAS ECUACIONES ( 7 ) NOS PERMITEN VALUAR LA MAGNITUD DE  $F_x$  Y  $F_y$  QUE ACTÚAN EN EL CONTORNO DEL CUERPO ESTUDIADO, VALUADAS DESDE EL PUNTO  $P_o$  DE ORIGEN-HASTA EL PUNTO  $P_i$  EN ESTUDIO, EN LOS SENTIDOS "X" E "Y", RESPECTIVAMENTE.  $M$  ES EL VALOR DEL MOMENTO QUE PRODUCEN EN  $P_i$ , LAS FUERZAS QUE ACTÚAN A LO LARGO DEL CONTORNO DESDE EL  $P_o$  INICIAL.

DENTRO DEL CAPÍTULO SIGUIENTE, SE INDICARÁ LA FORMA EN QUE A TRAVÉS DEL USO DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS, SE OBTIENE EL VALOR DE LAS ECUACIONES ( 7 ) CON CIERTA FACILIDAD DE MANEJO.

# CAPITULO 3

## SOLUCION DEL PROBLEMA MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS:

### 3.1 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS .

TANTO PARA EL CASO QUE SE HA ESTADO DESARROLLANDO, COMO EN GENERAL, PARA EL ESTUDIO DE LOS PROBLEMAS DE LA ELASTICIDAD, SE REQUIERE RESOLVER CIERTAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES, SUJETAS A DETERMINADAS CONDICIONES DE FRONTERA.

LA SOLUCIÓN EXACTA DEL PROBLEMA SE OBTIENE INTEGRANDO LA ECUACIÓN BIARMÓNICA ( 6 ). SIN EMBARGO UNA SOLUCIÓN PRÁCTICA SE CONSIGUE RECURRIENDO A MÉTODOS NUMÉRICOS QUE NOS DEN UN VALOR MUY APROXIMADO DE LA SOLUCIÓN DE NUESTRO PROBLEMA. TAL ES EL CASO DEL MÉTODO QUE SE UTILIZARÁ PARA EL PROBLEMA DE ESTE TRABAJO, BASADO EN EL USO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS DENTRO DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL BIARMÓNICA ( 6 ) OBTENIDA ANTERIORMENTE.

CONSIDEREMOS UNA FUNCIÓN CONTÍNUA  $Y ( X )$  QUE ADOPTA EL CONJUNTO DE VALORES  $Y_0, Y_1, Y_2,$  CORRESPONDIENTES A LOS VALORES DE OTRO CONJUNTO DADO POR  $X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2, \dots$  DE DONDE PODEMOS OBTENER LAS PRIMERAS DIFERENCIAS, DADAS POR

$$\begin{aligned}(\Delta_1 Y)_{x_0} &= Y_1 - Y_0 \\(\Delta_1 Y)_{x_1} &= Y_2 - Y_1 \\(\Delta_1 Y)_{x_2} &= Y_3 - Y_2\end{aligned}$$

etc.

RESULTADOS CON LOS QUE PUEDEN OBTENERSE LOS VALORES DE LAS PRIMERAS DERIVADAS DE  $Y ( X )$ , EN CADA PUNTO DADO, AL DIVIDIRLO ENTRE EL INTERVALO  $\delta$  PREVIAMENTE ESTABLECIDO :

$$\begin{aligned} \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x_0} &= \frac{y_1 - y_0}{\delta} \\ \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x_1} &= \frac{y_2 - y_1}{\delta} \\ \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x_2} &= \frac{y_3 - y_2}{\delta} \end{aligned} \quad (8)$$

ETC.

LAS SEGUNDAS DIFERENCIAS SE CONCEPTUAN ASÍ :

$$\begin{aligned} (\Delta_2 y) &= (\Delta_1 y)_{x_1} - (\Delta_1 y)_{x_0} \\ &= (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) \end{aligned}$$

OPERANDO ALGEBRAICAMENTE :

$$(\Delta_2 y)_{x_1} = y_2 - 2y_1 + y_0$$

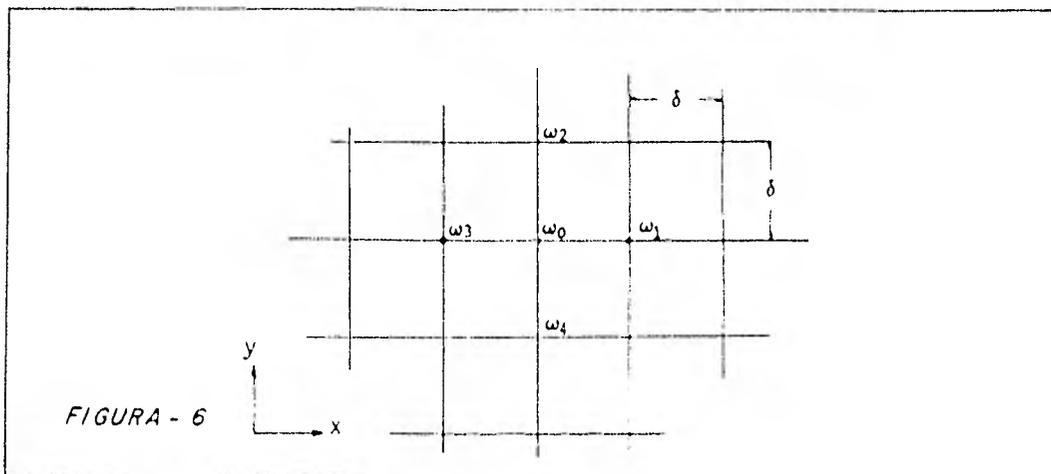
A PARTIR DE ESTE RESULTADO SE OBTIENE QUE :

$$\left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x_1} = \frac{(\Delta_2 y)_{x_1}}{\delta^2} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{\delta^2} \quad (9)$$

QUE ES EL VALOR APROXIMADO DE LA SEGUNDA DERIVADA DE  $y(x)$ , RESPECTO DE LA VARIABLE "X", DOS VECES, EN TÉRMINOS DE DIFERENCIAS FINITAS.

AHORA, EXTENDIENDO EL CONCEPTO HASTA EL CASO DE UNA FUNCIÓN CONTÍNUA - DE DOS VARIABLES  $\omega(x, y)$ , SE PUEDEN EMPLEAR CON TODA SEGURIDAD LOS CONCEPTOS ANTERIORES PARA CALCULAR LOS VALORES APROXIMADOS DE SUS DERIVADAS PARCIALES, MEDIANTE LA CONSIDERACIÓN SIGUIENTE:

SUPONGAMOS QUE SE ESTUDIA EL COMPORTAMIENTO DE UN CUERPO DE SECCIÓN - RECTANGULAR SOBRE LA CUAL SE TIENDE UNA CUADRICULA ( FIGURA 6 ), CUYA SEPARACIÓN DEFINE EL VALOR DEL INTERVALO  $\delta$ , Y QUE SE CONOCEN LOS VALORES DE LA FUNCIÓN -  $\omega(x, y)$  EN CADA UNO DE LOS NODOS DE DICHA CUADRICULA :



ASÍ PUES PODEMOS DECIR QUE PARA EL PUNTO "0"

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \approx \frac{\omega_1 - \omega_0}{\delta}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} \approx \frac{\omega_2 - \omega_0}{\delta} \quad (3')$$

Y DEL MISMO MODO :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \approx \frac{\omega_1 - 2\omega_0 + \omega_3}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \approx \frac{\omega_2 - 2\omega_0 + \omega_4}{\delta^2} \quad (9')$$

BASTANDO LO ANTERIOR COMO EJEMPLO, PODEMOS SEGUIR HASTA DEFINIR LA DERIVADA O DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR QUE NOS INTERESE.

### 3.2 LA FUNCIÓN DE ESFUERZOS DE AIRY EN TÉRMINOS DE DIFERENCIAS FINITAS.

CON TODOS LOS CONCEPTOS ANTERIORMENTE EXPUESTOS, ESTAMOS EN CONDICIÓN DE RESOLVER EL PROBLEMA ELÁSTICO BIDIMENSIONAL QUE ORIGINÓ LA ESTRUCTURA DE LA ECUACIÓN BIARMÓNICA.

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (6)$$

EN DONDE  $\phi(x, y)$ , ES UNA FUNCIÓN ARBITRARIA QUE DEBE SATISFACER LAS CONDICIONES DE CONTINUIDAD Y EXISTENCIA DE POR LO MENOS LAS CUARTAS DERIVADAS PARCIALES RESPECTO A "X" E "Y", Y ADEMÁS DEBE SATISFACER LAS CONDICIONES DE FRONTERA (4), QUE SE DEFINIERON EN EL CAPÍTULO ANTERIOR.

SE SUPONE (PARTE ÚLTIMA DEL CAPÍTULO ANTERIOR), QUE CONOCIENDO LAS FUERZAS QUE ACTÚAN A LO LARGO DEL CONTORNO DE NUESTRA SECCIÓN, PODEMOS CALCULAR  $\phi(x, y)$ , EN TODOS LOS PUNTOS DE SU FRONTERA POR MEDIO DE LAS ECUACIONES (7), ASÍ EL PROBLEMA SE REDUCE A ENCONTRAR EL VALOR DE  $\phi(x, y)$ , QUE SATISFAGA LA ECUACIÓN (6), EN CUALQUIER PUNTO DENTRO DE NUESTRA SECCIÓN EN ESTUDIO.

CON EL USO DEL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS, SUPONGAMOS NUEVAMENTE UNA RED O MALLA CUADRADA, TENDIDA EN TODA EL ÁREA DE DICHA SECCIÓN ( FIGURA 7 ).

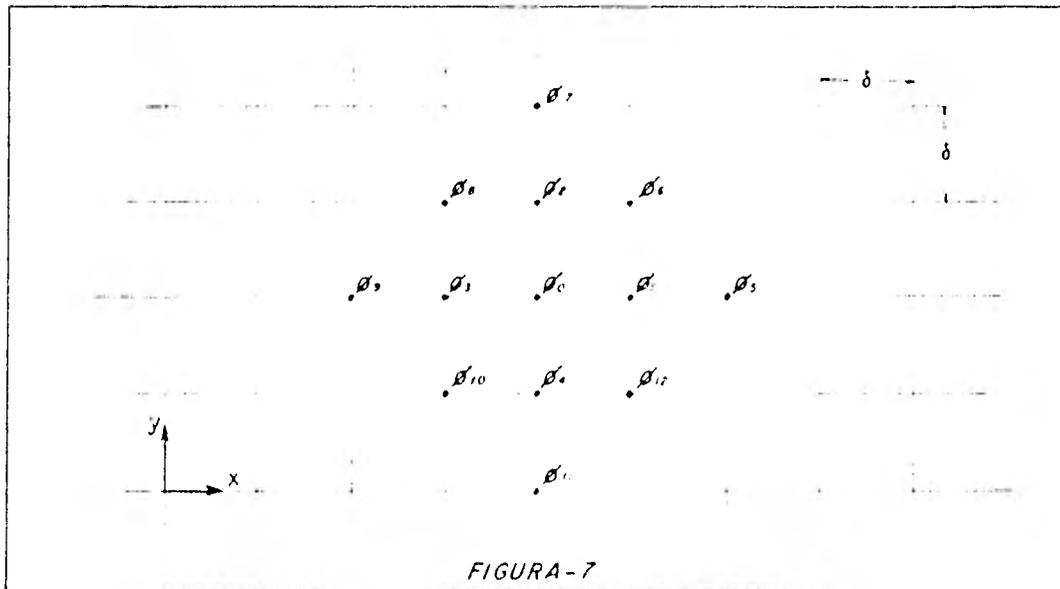


FIGURA-7

CON ESTA MALLA ASÍ TRAZADA PODEMOS OBTENER ENTONCES NUESTRAS SEGUNDAS - DERIVADAS, DE ACUERDO A LO DEFINIDO EN EL PRINCIPIO DE ESTE CAPÍTULO :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 &= \frac{1}{\delta^2} ( \phi_1 - 2\phi_0 + \phi_3 ) \\ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_1 &= \frac{1}{\delta^2} ( \phi_5 - 2\phi_1 + \phi_9 ) \\ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_3 &= \frac{1}{\delta^2} ( \phi_0 - 2\phi_3 + \phi_6 ) \end{aligned} \quad ( 10 )$$

Y CON ESTOS VALORES PODEMOS LLEGAR A DEFINIR, LA DERIVADA DEL ORDEN QUE SE NECESITE, EN FUNCIÓN DE LAS DIFERENCIAS FINITAS. PARA NUESTRO CASO DEFINIREMOS ÚNICAMENTE LAS DE CUARTO ORDEN Y PARA EL PUNTO "0" DE LA RED, LAS CUALES, OMITIENDO EL DESARROLLO, QUEDAN :

$$\left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}\right)_0 = \frac{1}{\delta^4} (6\phi_0 - 4\phi_1 - 4\phi_3 + \phi_5 + \phi_9)$$

$$\left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}\right)_0 = \frac{1}{\delta^4} (6\phi_0 - 4\phi_2 - 4\phi_4 + \phi_7 + \phi_{11}) \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{\delta^4} [4\phi_0 - 2(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + \phi_6 + \phi_8 + \phi_{10} + \phi_{12}]$$

SUSTITUYENDO ESTAS ECUACIONES (11) EN LA ECUACIÓN BIARMÓNICA (6), SE OBTIENE QUE:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta^4} (6\phi_0 - 4\phi_1 - 4\phi_3 + \phi_5 + \phi_9) + \frac{2}{\delta^4} [4\phi_0 - 2(\phi_1 + \\ & + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + \phi_6 + \phi_8 + \phi_{10} + \phi_{12}] + \frac{1}{\delta^4} (6\phi_0 - 4\phi_2 \\ & - 4\phi_4 + \phi_7 + \phi_{11}) = 0 \end{aligned}$$

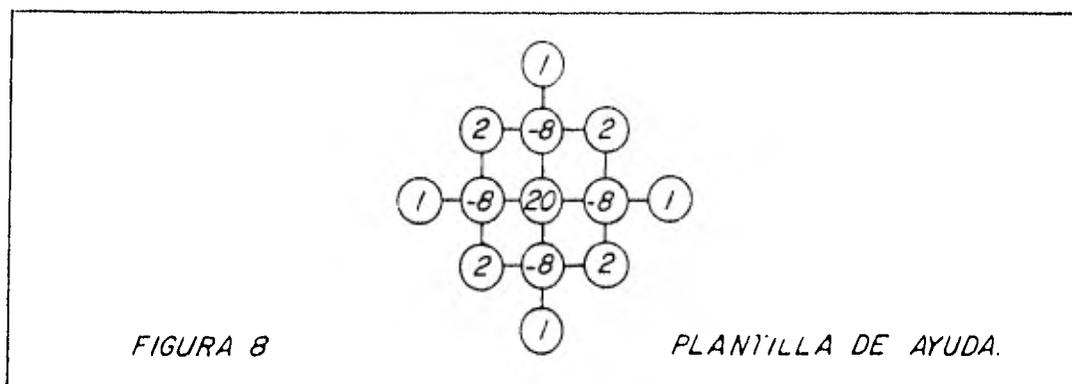
EXPRESIÓN QUE AL OPERARLA ALGEBRICAMENTE Y PRESENTÁNDOLA EN TÉRMINOS DE SU MÍNIMA EXPRESIÓN, QUEDA:

$$\begin{aligned} & 20\phi_0 - 8(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + 2(\phi_6 + \phi_8 + \phi_{10} + \phi_{12}) + \\ & + \phi_5 + \phi_7 + \phi_9 + \phi_{11} = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN: EN TODAS LAS ECUACIONES EN TÉRMINOS DE DIFERENCIAS FINITAS, LA SUMA ALGEBRAICA DE LOS COEFICIENTES QUE AFECTAN A LAS INCOGNITAS EN CUESTIÓN, ES IGUAL A CERO.

LA ECUACIÓN ( 12 ) RECIÉN ESTABLECIDA, ES UNA ECUACIÓN LINEAL SIMPLE, PLANTEADA PARA EL PUNTO " 0 ", LA CUAL COMO SE PUEDE APRECIAR ESTA EN FUNCIÓN DE LOS VALORES DE  $\varnothing ( X, Y )$  EN LOS PUNTOS QUE CIRCUNDAN A  $\varnothing ( X_0, Y_0 )$ . COMO PODRÁ OBSERVARSE, TAMBIÉN EN LA FIGURA ( 7 ), DE TAL MANERA QUE PARA CADA PUNTO QUE SE QUIERA ESTUDIAR ( CADA NODO DE LA RED ), DENTRO DE LA FRONTERA DE LA SECCIÓN, SE PLANTEARÁN OTRAS ECUACIONES IGUALES AUNQUE EN FUNCIÓN DE OTROS VALORES DE  $\varnothing ( X, Y )$  QUE SERÁN LOS QUE CIRCUNDEN AL PUNTO EN CUESTIÓN EN CADA CASO, DEFINIÉNDOSE ASÍ EL NÚMERO DE ECUACIONES POR PLANTEAR EN CADA PROBLEMA QUE SE ATAQUE A TRAVÉS DEL PRESENTE CRITERIO, EL CUAL ESTARÁ DETERMINADO POR EL NÚMERO DE NODOS QUE CONTIENGA LA RED DENTRO DE LA FRONTERA DE LA SECCIÓN ESTUDIADA, YA QUE CADA NODO, CORRESPONDERÁ UN VALOR DE  $\varnothing ( x, y )$ , E IGUALMENTE, PARA CADA NODO SE TENDRÁ QUE PLANTEAR UNA ECUACIÓN LINEAL CON LOS MISMOS PASOS CON QUE SE PLANTEO LA ECUACIÓN ( 12 ) PARA EL PUNTO " 0 ".

OBSERVANDO LA ESTRUCTURA DE LA ECUACIÓN LINEAL ( 12 ) Y LA CONFIGURACIÓN DE LOS PUNTOS ( FIGURA 7 ) QUE INTERVIENEN EN ELLA, PODEMOS ESTABLECER UNA PLANTILLA O DIAGRAMA DE AYUDA PARA PLANTEAR NUESTRAS ECUACIONES EN CADA PUNTO DE LA RED :

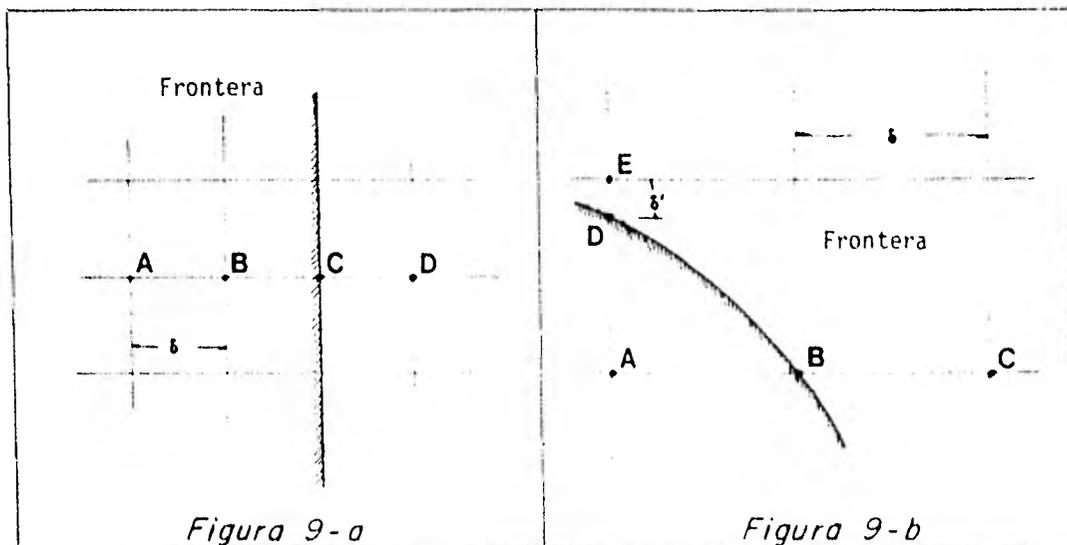


CON LA AYUDA DE ESTA PLANTILLA ( FIGURA 8 ) TENDREMOS LA SEGURIDAD DE NO EQUIVOCARNOS EN DICHO PLANTEAMIENTO, YA QUE COMO SE PUEDE OBSERVAR EL NÚMERO Y SIGNO QUE CONTIENEN LOS CÍRCULOS SON LOS COEFICIENTES QUE DEBEN ADOPTAR EL  $\varnothing$  QUE

LE CORRESPONDA EN ESE LUGAR, AL APLICAR LA PLANTILLA EN EL LUGAR INDICADO (EL CÍRCULO CON EL NÚMERO 20 DEBE UBICARSE EN EL PUNTO QUE SE DESEA ESTUDIAR) EN NUESTRA RED.

### 3.3 CALCULO DE $\emptyset$ ( X, Y ) EN PUNTOS PROXIMOS A LA FRONTERA DE LA SECCION ESTUDIADA .

UN PROBLEMA QUE SIEMPRE SE PRESENTA AL APLICAR LA PLANTILLA DE AYUDA - ( FIGURA 8 ) EN PUNTOS CERCANOS A LA FRONTERA Y QUE ESTAN A UNA DISTANCIA  $\delta$  DE ÉSTA, ES QUE SE HACE NECESARIO CONOCER EL VALOR DE  $\emptyset$  EN PUNTOS FUERA DE ESTA FRONTERA Y QUE TAMBIÉN DISTEN DE ÉSTA UN INTERVALO  $\delta$  :



DE LA FIGURA 9 - a, SI APLICAMOS LA PLANTILLA EN EL PUNTO B NECESITAREMOS CONOCER EL VALOR DE  $\emptyset$  EN EL PUNTO D. SI ESTABLECEMOS QUE :

$$\left( \frac{\partial \emptyset}{\partial x} \right)_C = \frac{\emptyset_D - \emptyset_B}{2\delta}$$

OBTENEMOS QUE :

$$\phi_D = 2\delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_C + \phi_B \quad (13)$$

Y ASÍ O BIEN CON OTRO CRITERIO SIMILAR, PODEMOS PROCEDER PARA CUALQUIER OTRO PUNTO.

SI EL PROBLEMA ES COMO EL QUE SE PRESENTA EN LA FIGURA 9-B CON UN CRITERIO ANÁLOGO AL ANTERIOR SE OBTIENE FACILMENTE QUE :

$$\phi_C = \phi_B + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_B \delta \quad (13')$$

$$\phi_A = \phi_B - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_B \delta$$

Y TAMBIÉN

$$\phi_E = \phi_D + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_D \delta' \quad (13'')$$

SE PUEDE, CON LA FLEXIBILIDAD DEL CRITERIO PARA LAS PRIMERAS DIFERENCIAS, Y DE ESTAS LAS PRIMERAS DERIVADAS, PLANTEAR DEL MODO QUE MAS COMODO PAREZCA LAS ECUACIONES QUE NOS AYUDEN A DEFINIR LOS PUNTOS QUE NO INCLUYA LA FRONTERA Y QUE SEAN NECESARIOS PARA ESTABLECER NUESTRO SISTEMA DE ECUACIONES POR RESOLVER.

### 3.4 MECANICA DE SOLUCION.

A MODO DE QUERER ESTABLECER UNA MECÁNICA DE SOLUCIÓN PARA ATACAR ESTE TIPO DE PROBLEMAS Y TAMBIÉN TRATANDO DE RESUMIR TODO LO EXPUESTO EN LOS PUNTOS ANTERIORES, CONSIDERAMOS DE UN MODO GENERAL LO SIGUIENTE

1).- TENIENDO PERFECTAMENTE DEFINIDO EL PROBLEMA POR RESOLVER, TRAZAR UNA --  
RED SOBRE LA SUPERFICIE DE LA SECCIÓN POR ANALIZAR. EL NÚMERO DE NODOS  
Y DE INCOGNITAS ESTARÁ DEFINIDO POR EL TAMAÑO DE LA CUADRICULA QUE AL --  
MISMO TIEMPO DEFINIRÁ EL VALOR DEL INTERVALO  $\delta$  EL CUAL DEBE DE SER CONS--  
TANTE.

2).- CALCULAR EL VALOR DE  $\phi_i$  Y DE LAS PRIMERAS DERIVADAS DE ESTA FUNCIÓN

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

EN CADA PUNTO DE LA FRONTERA Y CALCULAR  $\phi_i$ , TAMBIÉN EN LOS PUNTOS ADYA--  
CENTES A LA FRONTERA ANTES DICHA.

3).- CONOCIDOS ESTOS VALORES, APLICAR LA PLANTILLA DE AYUDA EN CADA PUNTO IN--  
TERIOR A LA FRONTERA PARA PLANTEAR EL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES --  
POR RESOLVER.

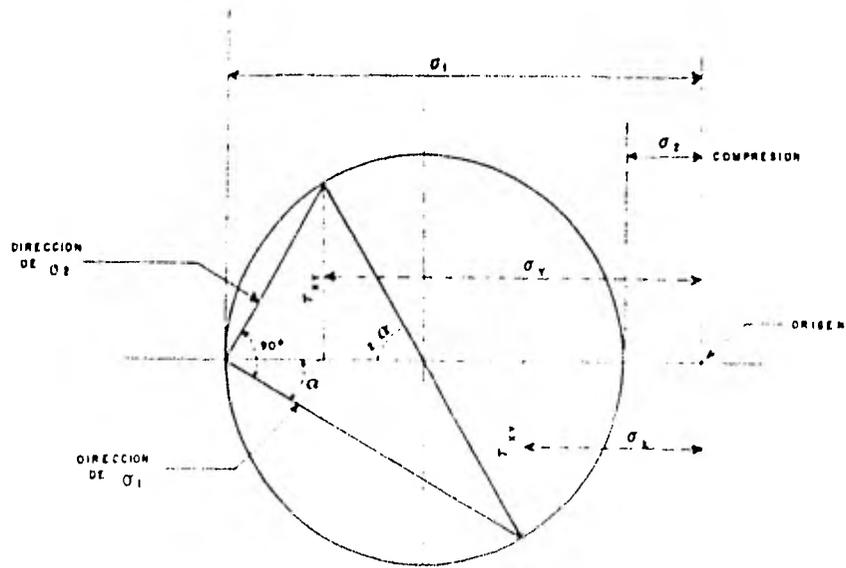
4).- DETERMINADOS ASÍ TODOS LOS VALORES, DE  $\phi(x, y)$ , PARA TODOS LOS PUN--  
TOS DE LA SECCIÓN EN ESTUDIO, CALCULAR A PARTIR DE ÉSTOS LOS VALORES DE  
 $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , DEFINIDOS POR LAS EXPRESIONES SIGUIENTES ( Y PLANTEADAS --  
PARA EL PUNTO "0" ) :

$$\sigma_x = \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{1}{2\delta^2} ( \phi_4 - 2\phi_0 + \phi_2 )$$

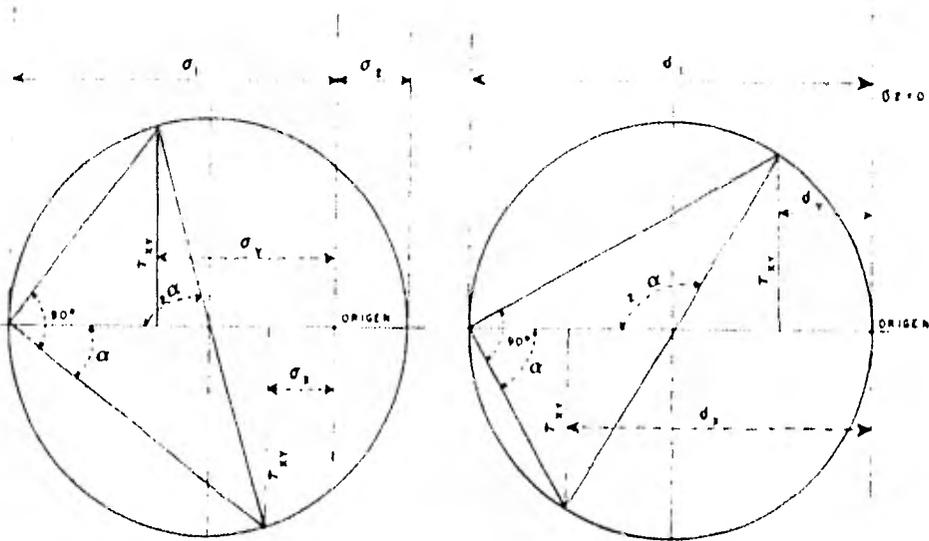
$$\sigma_y = \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{1}{2\delta^2} ( \phi_1 - 2\phi_0 + \phi_3 ) \quad ( 14 )$$

$$\tau_{xy} = - \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)_0 = \frac{1}{4\delta^2} ( \phi_{12} + \phi_3 - \phi_{21} - \phi_4 )$$

5).- UNA VEZ CONOCIDOS  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  Y  $\tau_{xy}$ , SE PROCEDE A CALCULAR EL VALOR DE LOS--



a- Segundo esfuerzo principal en compresion.



b- Segundo esfuerzo principal en tension. c- Segundo esfuerzo principal cero.

**FIGURA 10.- ANALISIS DE ESFUERZOS PRINCIPALES  
MEDIANTE EL CIRCULO DE MOHR.**

ESFUERZOS PRINCIPALES  $\sigma_I$  Y  $\sigma_{II}$ , ASÍ COMO SU DIRECCIÓN EN EL PLANO DE ESFUERZOS MEDIANTE:

$$\begin{aligned}\sigma_I &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{II} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \\ \operatorname{tg} 2 \theta &= \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}\end{aligned}\quad (15)$$

LO CUAL NOS LLEVA A UN ESTUDIO DE ESFUERZOS PRINCIPALES MEDIANTE EL CÍRCULO DE MOHR (VER LA FIGURA 10 )

- 6 ) , - TODO LO ANTERIOR, LLEVADO A GRÁFICAS PARA OBSERVAR EL COMPORTAMIENTO DE LOS ESFUERZOS NORMALES Y TANGENCIALES, ASÍ COMO TAMBIÉN DE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES, NOS AYUDA A FORMAR UN CRÍTERIO EN CUANTO AL COMPORTAMIENTO DE LA ESTRUCTURA ANALIZADA QUE NOS INDICARÁ SI SE ACEPTA O NO LA ALTERNATIVA, CUANDO ASÍ SEA, O EN SU CASO, SI SE TOMAN MEDIDAS PREVENTIVAS CUANDO SE TRATE DE LA REVISIÓN DE UNA OBRA EN CONSTRUCCIÓN.

# CAPITULO 4

## EJEMPLO DE APLICACION

### 4.1 IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA.

EL MÉTODO DESGLOSADO EN ESTE TRABAJO ESTÁ PLANTEADO DE TAL MODO QUE -  
FUNCIONA PARA CASOS EN EL QUE SE TENGA ALGÚN ELEMENTO ESTRUCTURAL ALREDEDOR DE CU  
YA SECCIÓN SE ESTÉN APLICANDO FUERZAS QUE TIENDAN A PROVOCARLE DEFORMACIONES PLA-  
NAS DENTRO DEL CONTORNO DE SU SECCIÓN, PARALELA ÉSTA A LA DIRECCIÓN DE DICHAS - -  
FUERZAS.

PARTICULARIZANDO EL CASO, SE PUEDE PENSAR (COMO SE EJEMPLIFICA EN ESTE  
TRABAJO) EN UNA PRESA DE CONCRETO QUE ESTANDO SOMETIDA A LOS EMPUJES HIDROSTÁTI-  
COS PARA LOS QUE FUE DESTINADA, REQUIERE DE UN ANÁLISIS COMO EL QUE SE PRESENTA -  
EN LOS PÁRRAFOS QUE SIGUEN.

SEGÚN NUESTRO CASO, SE USARÁ PARA EL ANÁLISIS UNA TAJADA HORIZONTAL DE  
LA CABEZA DE UNA PRESA DE MACHONES DEL TIPO MARCELLO, CUYAS DIMENSIONES, A DETER-  
MINADO NIVEL, SE MUESTRAN EN LA FIGURA II. ÉSTA FIGURA MUESTRA LA MITAD DEL MA-  
CHÓN QUE SE ANALIZARÁ YA QUE POR SIMETRÍA DE LA ESTRUCTURA ( VER FIGURA 2.1,B) -  
SE CONSIDERA QUE LA OTRA MITAD SE COMPORTA IGUAL QUE LA PRIMERA.

SE HA DETERMINADO TAMBIÉN LA MAGNITUD DE LA CARGA QUE EN ESTE NIVEL EN  
ESTUDIO ACTÚA:

$$w = 60 \text{ Ton/m}^2 = 6.0 \text{ Kg/cm}^2$$

CON ESTA CARGA SE CALCULA LA REACCIÓN QUE APARECE AGUAS ABAJO AL AISLAR LA SECCIÓN TAL Y COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA 11 Y QUE ES DE:

$$W_1 = 2.15385 \quad W$$

CON LAS DIMENSIONES Y DATOS ANTERIORES, SE PROCEDE A ATACAR EL PROBLEMA SEGÚN SE INDICÓ AL FINAL DEL CAPÍTULO ANTERIOR.

SOBRE LA SECCIÓN ESTUDIADA SE DETERMINÓ UNA DIMENSIÓN PARA LA RED DE APOYO ( FIGURA 12 ) DE

$$\Delta x = \Delta y = 1.8667 \text{ m.}$$

VALOR OBTENIDO DE MODO ARBITRARIO PERO CUIDANDO QUE NO SEA DEMASIADO GRANDE NI DEMASIADO PEQUEÑO, YA QUE CUANDO SUCEDE LO PRIMERO SE OBTIENEN RESULTADOS QUE NO PERMITEN OBTENER CON PRECISIÓN LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE SE PRETENDE, Y CUANDO SUCEDE LO ÚLTIMO SE CORRE EL RIESGO DE PERDERSE ENTRE UN NÚMERO MUY GRANDE DE PUNTOS, LO CUAL CONDUCE TAMBIÉN A UN NÚMERO IGUAL DE ECUACIONES ( COMO LA 6 ) POR PLANTEAR Y RESOLVER. DICHO DE OTRO MODO, ENTRE MAYOR SEA EL TAMAÑO DE  $\Delta$  SE REDUCE EL NÚMERO DE INCÓGNITAS QUE EN EL CASO CONTRARIO CRECERÍA AL REDUCIR EL VALOR DE DICHO  $\Delta$ .

#### 4.2 IDENTIFICACIÓN NUMÉRICA DE PUNTOS DE FRONTERA Y ADYACENTES A ÉSTA.

TENIENDO TOTALMENTE CUBIERTA CON UNA MALLA LA SECCIÓN EN ESTUDIO, SE DEBE DE CALCULAR EL VALOR DE  $\phi$  EN LOS PUNTOS EN DONDE LA RED COINCIDE CON LA LÍNEA DE FRONTERA DE LA SECCIÓN.

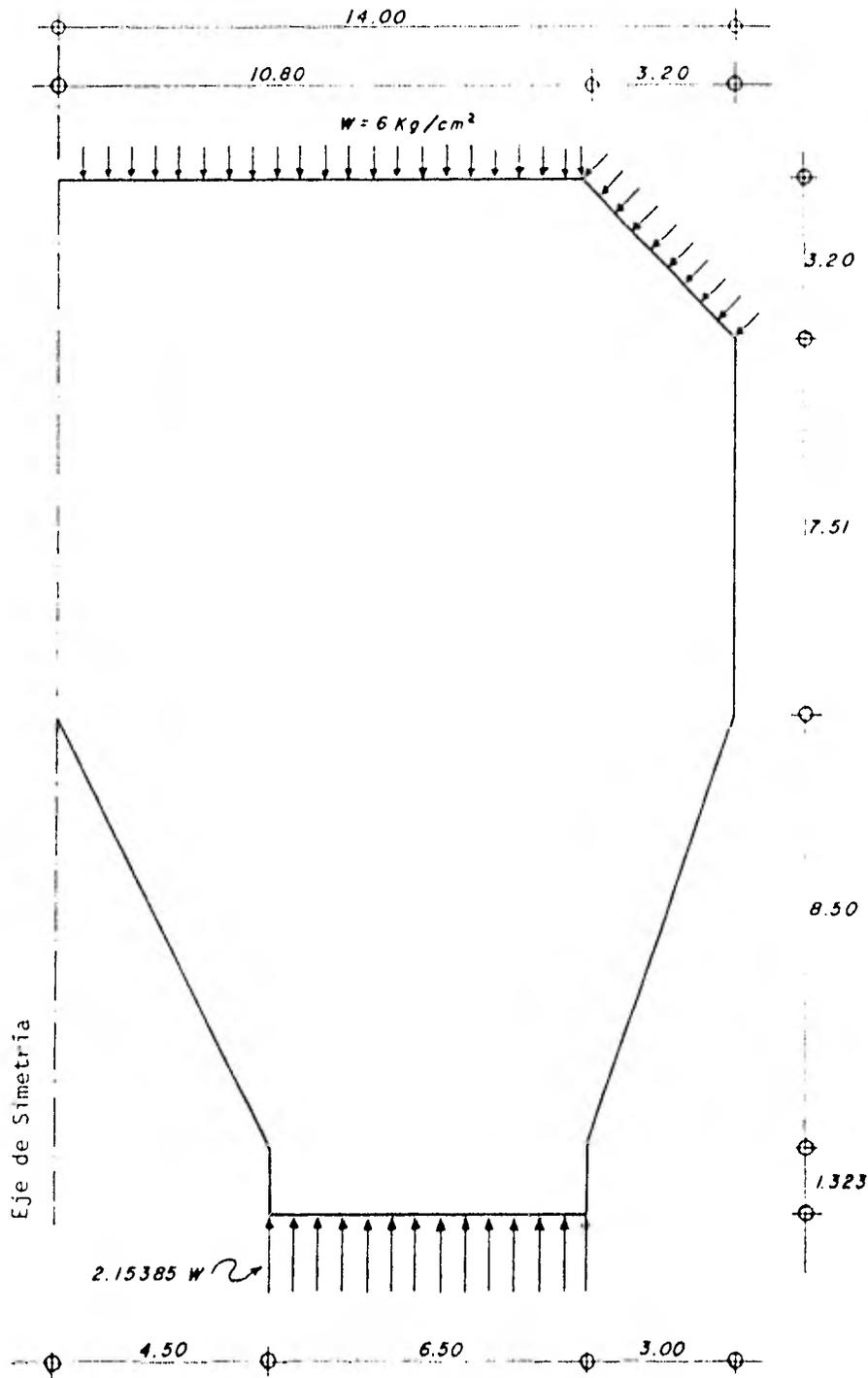


FIGURA 11 . DIMENSIONES Y CARGAS EXTERNAS.

ESC. 1:125  
Acol. en m/s

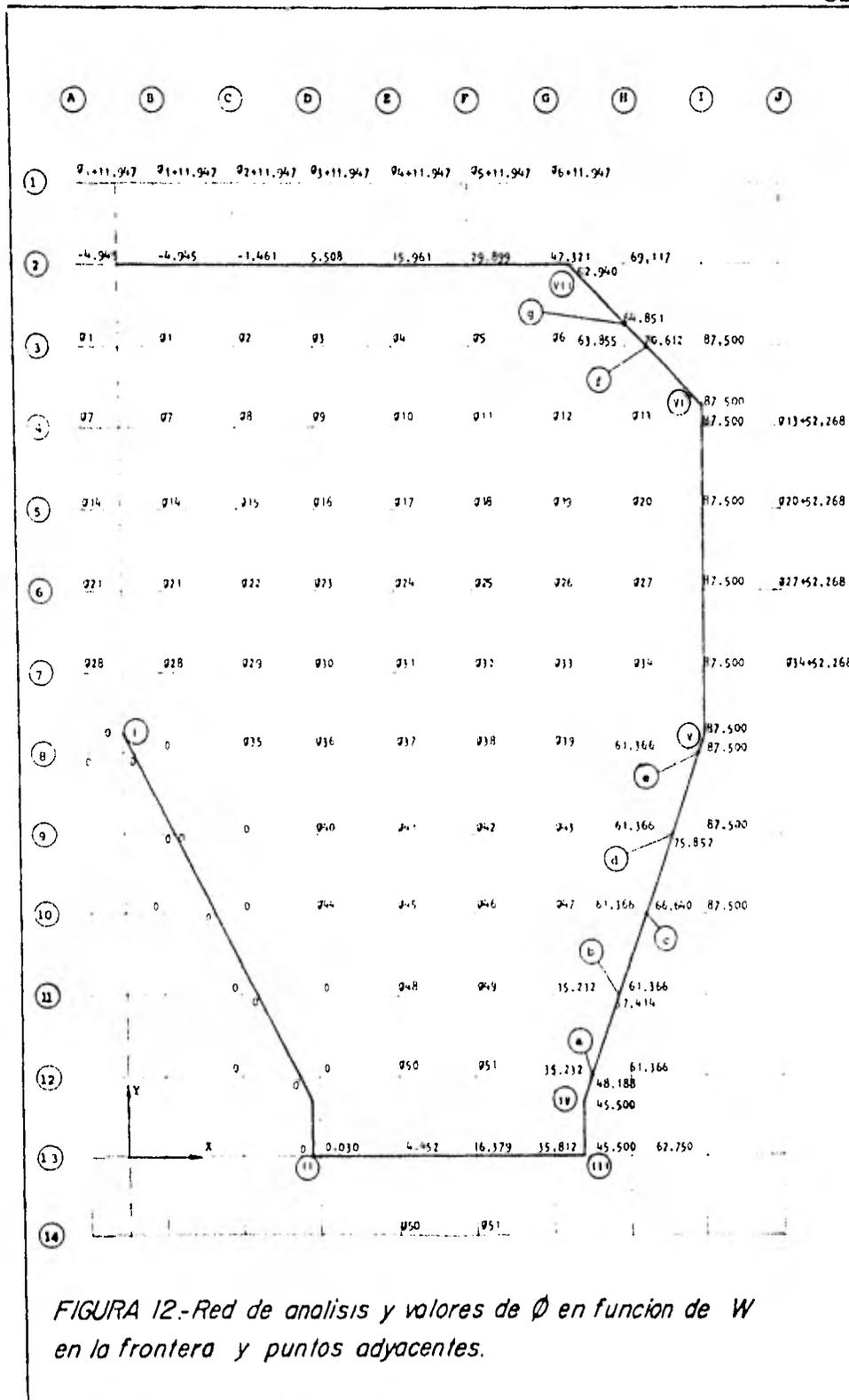


FIGURA 12.-Red de analisis y valores de  $\phi$  en funcion de  $W$  en la frontera y puntos adyacentes.

HACIENDO USO DE LAS ECUACIONES ( 7 ) TENEMOS QUE EL VALOR DE  $\emptyset$  EN ESOS PUNTOS ES IGUAL AL MOMENTO QUE PRODUCEN LAS FUERZAS DESDE UN PUNTO DE ORIGEN, HASTA EL PUNTO ESTUDIADO. CON ESTO, TOMAREMOS COMO ORIGEN AL PUNTO DE COORDENADAS ( 0,000,9,823 ), DE ACUERDO AL SISTEMA INDICADO EN LA FIGURA 12 QUE COINCIDE CON EL EJE DE SIMETRÍA DE LA FIGURA, YA QUE EN ESTE PUNTO, SE CUMPLE LA CONDICIÓN

$$\left( \frac{\partial \emptyset}{\partial x} \right)_{p_c} = 0 \quad ; \quad \left( \frac{\partial \emptyset}{\partial y} \right)_{p_c} = 0 \quad ; \quad (\emptyset)_{p_c} = 0$$

DADO QUE DESDE ESTE PUNTO, HASTA EL DE COORDENADAS ( 4,500,0,000 ) NO ACTÚA NINGUNA FUERZA EXTERNA, ENTONCES PARA EL PUNTO D-13 DE LA CUADRÍCULA DE COORDENADAS ( 4,6665,0,000 ) TENEMOS QUE, ACTÚA LA FUERZA 2.15385 W A LO LARGO DE

$$x = 0.1665 \text{ m. ( VALOR OBTENIDO ANALÍTICAMENTE )}$$

Y QUE EL MOMENTO ESTARÁ DADO POR

$$\emptyset = M = 2.15385 \text{ Wx} \left( \frac{x}{2} \right) = 1.076925 \text{ Wx}^2$$

ES DECIR

$$\emptyset = 1.076925 \text{ w} ( 0.1665 )^2 = 0.030 \text{ w}$$

ASÍ TENEMOS QUE PARA LOS DEMÁS PUNTOS DESDE EL VÉRTICE II HASTA EL VÉRTICE III, SE OBTIENEN LOS VALORES (TODOS EN FUNCIÓN DE W) QUE SE RESUMEN EN EL CUADRO IV-1.

PUNTO	COORDENADAS		X (M)	Ø = MP.
	X	Y		
II	4,500	0,000	0,000	0,000
D - 13	4,6665	0,000	0,1665	0,030 W
E - 13	6,5332	0,000	2,0332	4,452 W
F - 13	8,3999	0,000	3,8999	16,379 W
G - 13	10,2666	0,000	5,7666	35,812 W
III	11,0000	0,000	6,5000	45,500 W

CUADRO IV - 1.- CÁLCULO DE Ø EN PUNTOS DE LA FRONTERA EN LA PARTE AGUAS ABAJO DEL MACHÓN.

EN EL VÉRTICE IV DE COORDENADAS ( 11,000,1,323 ) EL VALOR DE  $\theta$  NO VARÍA, YA QUE EN ESTE PUNTO LAS FUERZAS Y EL BRAZO DE PALANCA SON LOS MISMOS.

DEL VÉRTICE IV AL VÉRTICE V DE COORDENADAS ( 14,000,9,823 ) EL VALOR DEL MOMENTO VARIARÁ, SEGÚN VARÍE LA LONGITUD DEL BRAZO DE PALANCA, DE ACUERDO A LA ECUACIÓN  $[x=(3/8.5) Y]$  QUE DEFINE A LA RECTA QUE UNE A LOS VÉRTICES REFERIDOS.

ASÍ PARA EL PUNTO (a)

$$Y = 1.8667 - 1.323 = 0.5437 \text{ m.}$$

$$x = \frac{3}{8.5} (0.5437) = 0.192 \text{ m.}$$

Y EL VALOR DEL MOMENTO:

$$\theta = M = 6.50 ( 2.15385 W ) \left( \frac{6.50}{2} + X \right)$$

$$= 14 W ( 3.25 + X ) = 14 W ( 3.25 + 0.192 )$$

$$\theta = 48.188 W$$

EN EL CUADRO IV-2 SE RESUMEN LOS CÁLCULOS PARA LOS PUNTOS ENTRE LOS VÉRTICES IV Y V.

EN LOS PUNTOS I-4, I-5, I-6 Y I-7 ASÍ COMO EN EL VÉRTICE VI, EL VALOR DEL MOMENTO NO VARÍA YA QUE NO SE MODIFICAN NI LAS CARGAS, NI EL BRAZO DE PALANCA.

<u>PUNTO</u>	<u>X</u> <u>COORDENADAS</u>	<u>Y</u> <u>COORDENADAS</u>	<u>Y</u> <u>CALCULADA</u>	<u>X</u> <u>CALCULADA</u>	<u>Ø = Mp.</u>
IV	11,0000	1,3230	0,0000	0,0000	54,500 w
a	11,1920	1,8667	0,5437	0,1920	48,188 w
b	11,8510	3,7334	2,4104	0,8510	57,414 w
c	12,5100	5,6001	4,2771	1,5100	66,640 w
d	13,1680	7,4668	6,1438	2,1680	71,852 w
e	13,8270	9,3335	8,0105	2,8270	85,078 w
v	14,0000	9,8230	8,5000	3,0000	87,500 w

CUADRO IV - 2.- CÁLCULO DE Ø EN PUNTOS DE LA FRONTERA SOBRE LA PENDIENTE LARGA DEL MACHÓN.

PARA LA PENDIENTE A CUARENTA Y CINCO GRADOS AGUAS ARRIBA DEL MACHÓN -  
TENEMOS QUE: LA DISTANCIA AGREGADA AL BRAZO DE PALANCA SERÁ

$$X = 1.667 \text{ m. ( CALCULADO ANALITICAMENTE )}$$

Y LA DISTANCIA DEL VÉRTICE VI AL PUNTO (f) ASÍ COMO DEL PUNTO (g) AL VÉRTICE VII  
ES:

$$L = (3.20 - 1.8667) \left( \frac{1}{0.7071} \right) = 1.8856 \text{ m.}$$

ASÍ QUE EL VALOR DEL MOMENTO PARA EL PUNTO (f) ES:

$$\begin{aligned} \emptyset = M &= 14 W ( 3.25 + X ) + W ( L )^2 (1/2) \\ &= 14 W = (3.25 + 1.6667) + W (1.8856)^2 (1/2) \\ \emptyset &= 70.612 W \end{aligned}$$

DEL MISMO MODO

$$\text{PUNTO (g)} \quad \emptyset = 64.851 W$$

$$\text{VÉRTICE VII} \quad \emptyset = 52.940 W$$

SE ACLARA QUE PARA EL CÁLCULO EN EL VÉRTICE VII, AL BRAZO DE PALANCA  
DE LA FUERZA QUE PROVOCA LA CARGA 2.15385 W, SE LE DISMINUYE EN X=0.20 M. AL RE-  
VISAR LA GEOMETRÍA DEL MACHÓN Y LA ACCIÓN DE LAS FUERZAS QUE GENERAN EL MOMENTO -  
(OBSÉRVESE EL SIGUIENTE CÁLCULO),

DEL PUNTO G-2 ( 10,266,20,533 ) AL VÉRTICE VII, EXISTE UNA DISTANCIA  
DE

$$x = (1.8667) (2) - 3.20 = 0.5334 \text{ m.}$$

PARA LA FUERZA QUE SE PRESENTA SOBRE LA PENDIENTE A CUARENTA Y CINCO GRADOS AGUAS ARRIBA DEL MACHÓN, EL BRAZO DE PALANCA CORRESPONDIENTE SE VERÁ -- AUMENTADO CON EL VALOR DE LA PROYECCIÓN DE LA DISTANCIA DEL PUNTO ESTUDIADO AL - VÉRTICE VII. AGREGANDO FINALMENTE EL VALOR DEL MOMENTO QUE PROVOCA LA CARGA W - EN LA DISTANCIA REFERIDA ÚLTIMAMENTE.

POR LO TANTO, LA ECUACIÓN DEL MOMENTO QUEDA ASÍ:

$$\begin{aligned} \emptyset = M &= 14 W (3.25 - 0.20 - x) + \frac{3.20}{0.7071} W \left[ \frac{3.20}{(0.7071)(2)} + 0.7071 x \right] + \\ &+ \frac{x^2}{2} W = \\ &= 14 W (3.05 - x) + 4.5255 W (2.2627 + 0.7071 x) + \frac{x^2}{2} W = \\ &= 14 W (3.05 - 0.5334) + 4.5255 W [2.2627 + 0.7071 (0.5334)] + \\ &+ \frac{(0.5334)^2}{2} W = \\ \emptyset &= 47.321 W \end{aligned}$$

EN EL CUADRO IV-3 SE PRESENTA EL RESUMEN PARA LOS PUNTOS RESTANTES DE LA PARTE AGUAS ARRIBA DEL MACHÓN.

PUNTO	COORDENADAS		X (M)	$\emptyset = Mp.$
	X	Y		
G - 2	10,2666	20,5330	0,5334	47,321 W
F - 2	8,3999	20,5330	2,4001	29,899 W
E - 2	6,5332	20,5330	4,2668	15,961 W
D - 2	4,6665	20,5330	6,1335	5,508 W
C - 2	2,7998	20,5330	8,0002	- 1,461 W
B - 2	0,9331	20,5330	9,8669	- 4,945 W
A - 2	- 0,9331	20,5330	--	- 4,945 W *

\* POR SIMETRÍA DE LA SECCIÓN ( FIG. 12 ) SE CONSIDERA EL MISMO VALOR PARA ESTE PUNTO.

CUADRO IV - 5.- CÁLCULO DE  $\emptyset$  EN PUNTOS DE LA FRONTERA EN LA PARTE AGUAS ARRIBA DEL MACHÓN.

OBSÉRVESE QUE EL PROCEDIMIENTO HASTA AQUÍ DESCRITO, CORRESPONDE A LA ACCIÓN DE UNA INTEGRAL DE LÍNEA SIMPLE A LO LARGO DE TODA LA FRONTERA DE LA SECCIÓN EN ESTUDIO Y NO DE UNA INTEGRAL DE ÁREA COMO FRECUENTEMENTE SE CONFUNDE.

EN RELACIÓN CON EL CÁLCULO DE  $\emptyset$  PARA PUNTOS ADYACENTES A LA FRONTERA, SE TIENE ÚNICAMENTE LO SIGUIENTE:

- A) USANDO NUEVAMENTE LAS ECUACIONES (7) SE CALCULA EL VALOR DE LAS PRIMERAS DERIVADAS DE LA FUNCIÓN  $\emptyset$  EN CADA UNO DE LOS PUNTOS SEGÚN SE NECESITE PARA PASAR AL SIGUIENTE INCISO.
- B) APLICAR SEGÚN SEA EL CASO, LAS ECUACIONES (13), (13') ó (13'') PARA DETERMINAR EL VALOR DE  $\emptyset$  EN LOS PUNTOS EN QUE SE REQUIERA.

DADO LO SENCILLO DEL CÁLCULO DE ESTOS VALORES, SE RECURRE A MENCIONAR LOS LIGERAMENTE POR MEDIO DE LOS ANTERIORES INCISOS. SU RESULTADO, PUEDE VERSE EN LA FIGURA 12.

#### 4.3 PLANTEO Y SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES EN FUNCIÓN DE $\emptyset$ Y SU INTERPRETACIÓN.

SEGÚN LA FORMA DE LA ECUACIÓN (6) Y CON LA AYUDA DE LA PLANTILLA MOSTRADA EN LA FIGURA 8, SE PLANTEA EL SISTEMA DE CINCUENTA Y UNA ECUACIONES LINEALES, CUYA MATRIZ SE PRESENTA EN LA FIGURA 13 PARA SOLUCIONARLA. ÉSTA SOLUCIÓN SE EFECTUÓ A TRAVÉS DE UN PROGRAMA DE COMPUTADORA, EL CUAL APLICA EL MÉTODO DE GAUSS - SEIDEL, QUE SE SELECCIONÓ DE ACUERDO A LAS CARACTERÍSTICAS Y TAMAÑO DE LA MATRIZ. EL LISTADO Y LA SOLUCIÓN DE LA MATRIZ SE PRESENTAN EN UNA APÉNDICE -



AL FINAL DEL CAPÍTULO 5 Y LA RELACIÓN ORDENADA DE LOS VALORES DE  $\theta$  SE MUESTRAN EN EL CUADRO IV-4.

LOS VALORES DEL CUADRO MENCIONADO, SE UBICAN SEGÚN CORRESPONDA, EN LOS NODOS DE LA MALLA SOBRE LA SECCIÓN EN ESTUDIO Y SE CALCULAN LOS VALORES DE PUNTOS FUERA DE DICHA SECCION QUEDANDO FINALMENTE EL ARREGLO DE VALORES QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA 14.

SEGÚN LAS ECUACIONES (14), SE CALCULAN LOS VALORES DE LOS ESFUERZOS  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  Y  $\sigma_{xy}$ , MEDIANTE EL PROGRAMA DE COMPUTADORA QUE SE MUESTRA TAMBIÉN AL FINAL DEL CAPÍTULO 5 OBTENIÉNDOSE EL CUADRO IV-5, RESULTADO DE DICHO PROGRAMA. LAS GRÁFICAS DE VARIACIÓN DE ESTOS ESFUERZOS Y DE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES, (ECUACIONES 15) ESTÁN EN LAS FIGURAS 15, 16, 17, 18 Y 18-A ADJUNTAS A ESTE CAPÍTULO.

ESTE CONJUNTO DE GRÁFICAS Y DIAGRAMAS DE ESFUERZOS DEBEN OBTENERSE A DISTINTOS NIVELES DE LA ESTRUCTURA DE LA PRESA, PARA CON ÉSTO, CONTAR CON LA SUFICIENTE INFORMACIÓN DE APOYO EN QUÉ BASAR UNA DECISIÓN CUALQUIERA QUE ESTA SEA EN RELACIÓN AL DISEÑO O REVISIÓN DE DICHA PRESA.

CONVIENE SEÑALAR QUE, SEGÚN LA FINALIDAD DE ESTE TRABAJO, SE CONSIDERA LO SUFICIENTEMENTE REPRESENTATIVO DEL MÉTODO EN CUESTIÓN LO DESARROLLADO EN ESTE CAPÍTULO, YA QUE SE SEÑALAN CON DETALLE TODOS Y CADA UNO DE LOS PASOS A SEGUIR Y DADO QUE HACER UN CÁLCULO EN OTRO NIVEL DE LA PRESA, REPRESENTA REPETIR TODO LO ANTES EXPUESTO, CON LA VARIACIÓN ÚNICA DE LOS NÚMEROS, SE CONSIDERARÁ HASTA AQUÍ, TERMINADO ESTE EJEMPLO DE APLICACIÓN.

CUADRO IV - 4 .- VALORES DE  $\emptyset$  EN FUNCIÓN DE W

$\emptyset$	VALOR	$\emptyset$	VALOR
1	- 3,970	27	49,600
2	- 1,676	28	1,584
3	4,503	29	4,742
4	14,840	30	12,310
5	28,880	31	24,260
6	45,520	32	39,260
7	1,980	33	52,870
8	2,769	34	40,930
9	8,266	35	2,376
10	18,860	36	9,719
11	33,670	37	21,390
12	50,210	38	35,280
13	63,900	39	49,470
14	3,468	40	6,499
15	5,486	41	17,940
16	11,850	42	30,430
17	23,420	43	44,360
18	39,940	44	3,817
19	58,830	45	15,790
20	61,590	46	26,370
21	3,055	47	39,940
22	5,996	48	14,990
23	13,190	49	22,820
24	25,230	50	8,412
25	42,430	51	18,820
26	68,890		

COORDENADAS X Y	SIGMA X (K/CM2)	SIGMA Y (K/CM2)	TAU XY (K/CM2)	SIGMA 1 (K/CM2)	SIGMA 2 (K/CM2)	ANGULO (RADIANTES)
2	33.927	3.779	-0.000	-33.929	3.999	0.000000
2	3.566	3.950	-1.160	3.261	3.475	0.222567
2	-7.637	1.732	-0.117	1.260	-7.685	-0.013137
2	-1.221	3.475	0.326	3.606	-3.252	0.133979
2	-1.222	3.064	0.491	3.099	-1.857	0.070791
2	-0.125	3.475	-0.243	5.445	-0.205	-0.043076
2	2.727	4.071	-1.359	4.310	1.538	-0.352541
2	0.000	0.000	-1.023	0.000	0.000	1.570796
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.570796
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.570796
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.570796
2	13.321	6.091	0.000	13.331	6.000	-0.000000
3	3.024	3.633	-1.724	3.271	6.001	0.607142
3	-3.975	3.107	-0.612	3.107	5.443	-0.003335
3	3.500	2.433	1.152	2.722	-2.976	0.142925
3	-3.017	3.333	1.009	3.430	-3.135	0.096136
3	-1.915	2.597	-0.172	2.597	-1.913	-0.018925
3	-0.017	2.532	-1.320	1.923	-0.343	-0.200730
3	4.031	11.192	-0.341	12.000	3.276	-0.310406
3	0.000	6.573	-2.724	1.642	-1.643	-0.352631
3	0.000	0.000	0.012	0.012	0.013	1.570796
3	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000000
3	17.110	3.321	3.000	17.110	5.993	0.000000
4	2.210	2.160	-0.571	2.469	6.303	0.414441
4	-0.200	6.274	0.210	3.317	-0.319	0.068791
4	-3.169	3.344	1.349	2.103	-4.003	0.103946
4	-0.321	3.344	0.633	3.332	-3.261	0.058310
4	-2.946	2.545	-0.035	2.546	-2.947	-0.009026
4	-1.037	2.432	-0.173	2.506	-1.127	-0.073922
4	0.424	2.116	-1.153	3.756	0.630	-0.173642
4	-1.954	16.144	-1.270	14.144	-2.055	-0.078721
4	6.375	3.311	-3.176	26.223	6.062	-0.159451
4	0.050	14.314	-4.315	13.732	-1.236	-0.230495
4	-0.103	3.311	0.000	3.301	-0.104	0.000000
5	15.711	6.101	0.000	15.711	6.001	0.000000
5	3.122	2.372	0.472	3.517	6.112	-0.169127
5	0.710	2.359	1.693	2.640	6.547	0.233937
5	-4.713	3.311	-1.651	3.734	-4.911	0.120662
5	-4.713	3.311	-1.421	3.900	-4.804	-0.075933
5	-0.222	3.633	-1.524	3.534	-3.534	-0.172901
5	-0.929	3.311	-1.300	4.119	-1.727	-0.242296
5	3.000	1.000	-1.123	3.796	0.710	0.702716
5	3.321	-0.222	-0.673	3.372	-2.447	0.099000
5	-2.347	-1.113	-1.607	-2.312	-13.113	0.466726
5	4.503	3.407	-2.724	4.310	1.114	0.625436
5	12.017	12.017	0.000	12.017	12.013	0.000000
6	17.043	3.343	-2.000	17.043	5.999	0.000000
6	11.000	4.444	-2.000	11.000	4.477	0.000779

CUADRO IV-5.- RESULTADOS DE LAS ECUACIONES DE ESFUERZOS NORMALES TANGENCIALES Y PRINCIPALES.

X	Y	X <sup>2</sup> (M <sup>2</sup> )	Y <sup>2</sup> (M <sup>2</sup> )	XY (M <sup>2</sup> )	SIGMA X (M/CM <sup>2</sup> )	SIGMA Y (M/CM <sup>2</sup> )	ANGULO (RADIANES)
2	4	4.000	16.000	8.000	4.911	0.716	0.732740
2	5	4.000	25.000	10.000	5.277	-1.705	0.392502
2	6	4.000	36.000	12.000	5.643	-3.619	-0.112024
2	7	4.000	49.000	14.000	6.007	-5.482	-0.743333
2	8	4.000	64.000	16.000	6.372	-7.297	-1.374644
2	9	4.000	81.000	18.000	6.737	-9.062	-2.005955
2	10	4.000	100.000	20.000	7.101	-10.777	-2.637266
2	11	4.000	121.000	22.000	7.466	-12.492	-3.268577
2	12	4.000	144.000	24.000	7.830	-14.207	-3.900000
2	13	4.000	169.000	26.000	8.195	-15.922	-4.531423
3	2	9.000	4.000	6.000	11.924	3.404	0.000000
3	3	9.000	9.000	13.500	12.289	6.482	-0.349334
3	4	9.000	16.000	21.600	12.654	9.560	-0.744551
3	5	9.000	25.000	30.000	13.018	12.638	-1.174768
3	6	9.000	36.000	39.000	13.383	15.716	-1.639985
3	7	9.000	49.000	48.000	13.747	18.794	-2.139202
3	8	9.000	64.000	57.000	14.112	21.872	-2.662419
3	9	9.000	81.000	66.000	14.476	24.950	-3.209636
3	10	9.000	100.000	75.000	14.841	28.028	-3.780853
3	11	9.000	121.000	84.000	15.205	31.106	-4.376070
3	12	9.000	144.000	93.000	15.570	34.184	-4.995287
3	13	9.000	169.000	102.000	15.934	37.262	-5.638504
4	2	16.000	4.000	8.000	19.668	7.337	-0.733467
4	3	16.000	9.000	12.000	20.033	10.415	-1.242684
4	4	16.000	16.000	16.000	20.397	13.493	-1.783901
4	5	16.000	25.000	20.000	20.762	16.571	-2.357118
4	6	16.000	36.000	24.000	21.126	19.649	-2.962335
4	7	16.000	49.000	28.000	21.491	22.727	-3.599552
4	8	16.000	64.000	32.000	21.855	25.805	-4.268769
4	9	16.000	81.000	36.000	22.220	28.883	-4.969986
4	10	16.000	100.000	40.000	22.584	31.961	-5.703203
4	11	16.000	121.000	44.000	22.949	35.039	-6.468420
4	12	16.000	144.000	48.000	23.313	38.117	-7.265637
4	13	16.000	169.000	52.000	23.678	41.195	-8.094854
5	2	25.000	4.000	10.000	27.412	7.337	-0.733467
5	3	25.000	9.000	15.000	27.777	10.415	-1.242684
5	4	25.000	16.000	20.000	28.141	13.493	-1.783901
5	5	25.000	25.000	25.000	28.506	16.571	-2.357118
5	6	25.000	36.000	30.000	28.870	19.649	-2.962335
5	7	25.000	49.000	35.000	29.235	22.727	-3.599552
5	8	25.000	64.000	40.000	29.599	25.805	-4.268769
5	9	25.000	81.000	45.000	29.964	28.883	-4.969986
5	10	25.000	100.000	50.000	30.328	31.961	-5.703203
5	11	25.000	121.000	55.000	30.693	35.039	-6.468420
5	12	25.000	144.000	60.000	31.057	38.117	-7.265637
5	13	25.000	169.000	65.000	31.422	41.195	-8.094854

CUADRO IV-5.- (CONTINUACIÓN)

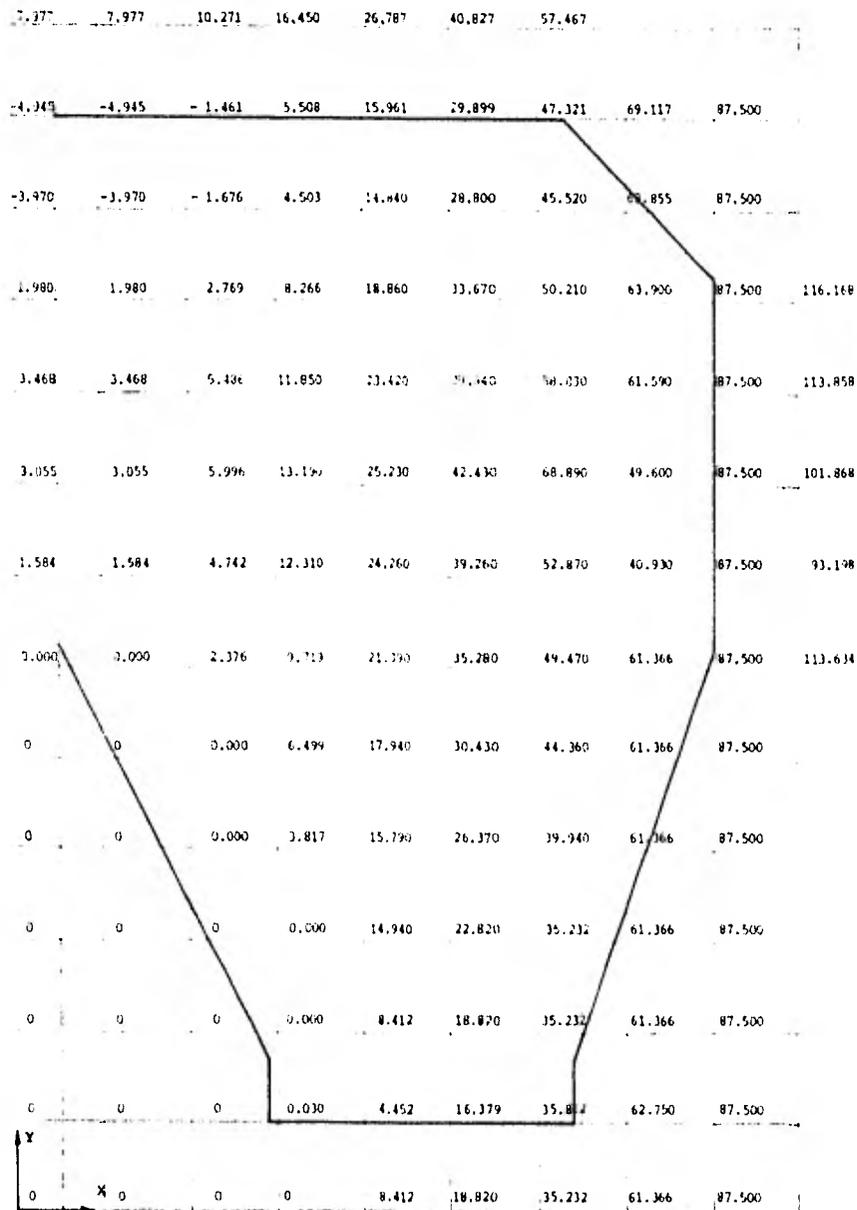
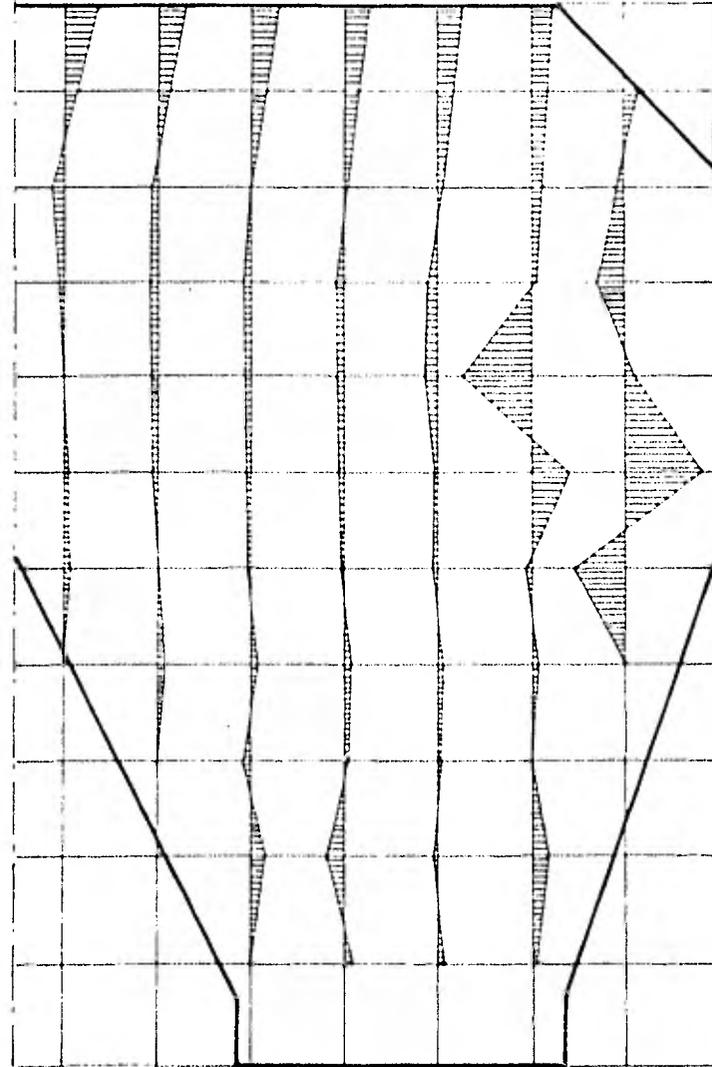


FIG.14.-VALORES DE  $\phi$  EN FUNCION DE W



0 20 50  
  $\text{Kg/cm}^2$

FIGURA 15.- DIAGRAMA DE LOS ESFUERZOS  $\sigma_x$

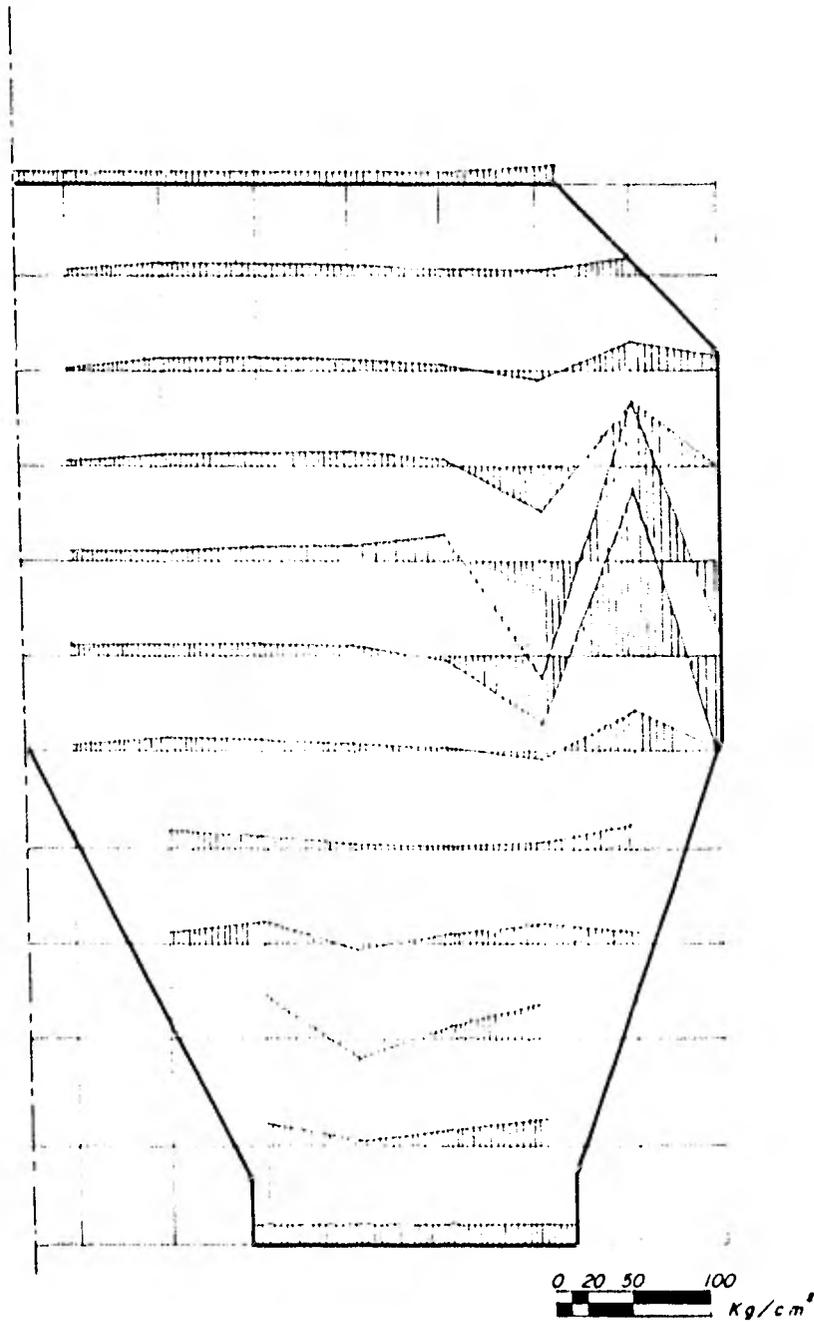
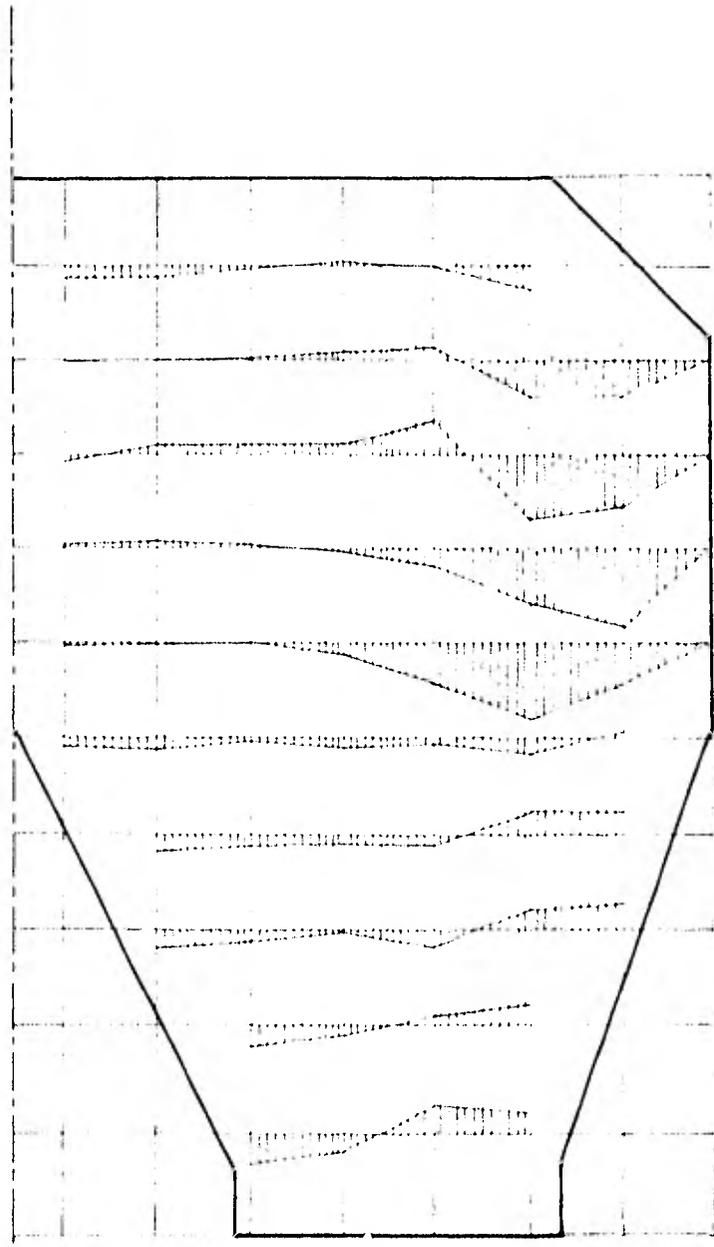


FIGURA 16.- DIAGRAMA DE LOS ESFUERZOS  $\sigma_y$



0 5 10 20  
Kg/cm<sup>2</sup>

FIGURA 17- DIAGRAMA DE LOS ESFUERZOS  $\tau_{xy}$

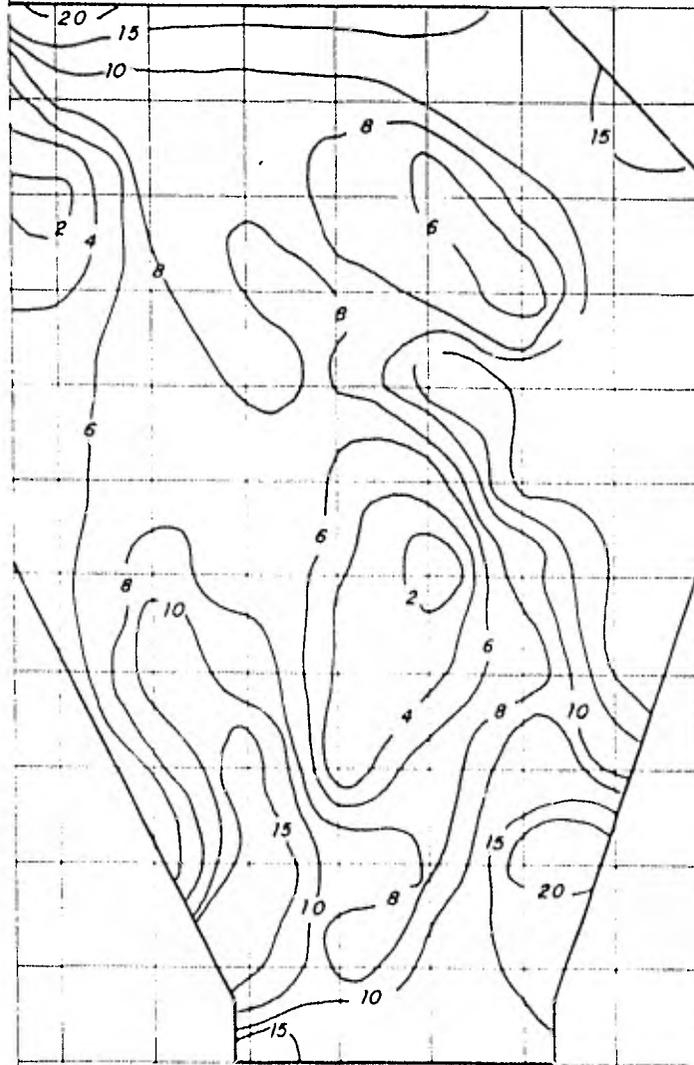


FIGURA 18 - CONFIGURACION DE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES MAYORES ( $\sigma_1$ )

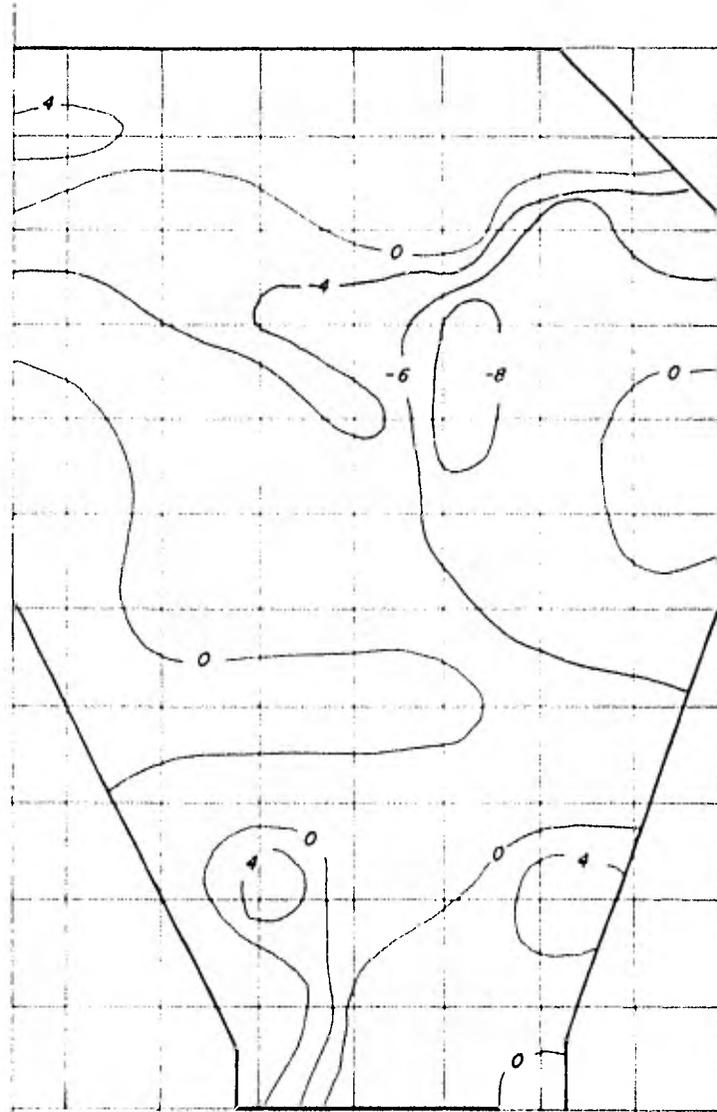


FIGURA 18.A - CONFIGURACION DE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES  
MENORES ( $\sigma_2$ )

# CAPITULO 5

## CONCLUSIONES AL TRABAJO

EL MÉTODO UTILIZADO EN EL PRESENTE TRABAJO, ES UNA DE LAS MUCHAS APLICACIONES DE LOS CONCEPTOS DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD UTILIZADOS PARA ANALIZAR EL COMPORTAMIENTO DE LOS ESFUERZOS DENTRO DE LA ESTRUCTURA.

EL PROBLEMA QUE SE EXPUSO A LO LARGO DEL TRABAJO, SE TRATA POR LO GENERAL DE MODO TRIDIMENSIONAL, SIN EMBARGO CON EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE ESFUERZOS CON LA FUNCIÓN DE AIRY, TRATADO BIDIMENSIONALMENTE NOS DA UNA SOLUCIÓN BASTANTE CONFIABLE DEL PROBLEMA Y SOBRE TODO NOS OFRECE UN MÉTODO PRÁCTICO Y SENSIBLEMENTE A CUALQUIER ALCANCE DADA LA FACILIDAD DE APLICACIÓN AL TIPO DE PROBLEMAS PLANTEADO.

EN EL EJEMPLO PRESENTADO, SE OBTUVO UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES DE CINCUENTA Y UNO POR CINCUENTA Y UNO QUE A NIVEL ACADÉMICO PUEDE PARECER EXAGERADO, SIN EMBARGO, EN LA REALIDAD SE PRESENTAN ARREGLOS MATRICIALES, MAS GRANDES SEGUN SE SELECCIONE EL TAMAÑO DE LA RED SOBRE LA SECCIÓN. ACTUALMENTE, ESTO ÚLTIMO NO ES PROBLEMA YA QUE SE CUENTA CON EL FÁCIL ACCESO A LAS COMPUTADORAS ELECTRÓNICAS, CON LO CUAL SE AGILIZA EL PROBLEMA, UNA VEZ QUE, DESDE LUEGO, SE HAYA PROGRAMADO ADECUADAMENTE SU DESARROLLO. ADEMÁS, POR LA FACILIDAD DE APLICACIÓN DEL MÉTODO, LA UTILIZACIÓN DE TALES HERRAMIENTAS DE CÁLCULO NO RESULTA COSTOSO, DADA LA POCAS MEMORIA DE COMPUTADORA Y TIEMPO QUE SE UTILIZA EN SU SOLUCIÓN.

ADEMÁS, CONVIENE SUBRAYAR NUEVAMENTE EL CUIDADO QUE EL ANALISTA DEBE TENER AL SELECCIONAR EL TAMAÑO DE LA RED DE ANÁLISIS YA QUE SE PUEDE OBSERVAR FACILMENTE QUE CUANDO EL TAMAÑO DE LA RED CRECE EL NÚMERO DE ECUACIONES POR RESOLVER -

TIENDE A CERO Y CUANDO DECRECEN LAS DIMENSIONES DE DICHAS CELDAS, EL NÚMERO DE ECUACIONES TIENDE A INFINITO, LO CUAL PODRÍA SER CAUSA DE CONFUSIONES Y PROBLEMAS ADICIONALES DENTRO DEL PROCESO DE CÁLCULO.

SE PUEDE ASEGURAR PUES, QUE EL MÉTODO PRESENTADO ES BUENO CUANDO SE APLICA CON LAS RESERVAS DEL CASO PERO POCO USADO DENTRO DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL, YA QUE PARA PRESAS DE MATERIALES CEMENTADOS, SU CONSTRUCCIÓN ESTÁ PERFECTAMENTE CONDICIONADA POR LA EXISTENCIA O NO DE SUELOS ALTAMENTE RESISTENTES (ROCA SANA POR LO GENERAL), EN EL LUGAR DE DESPLANTE. ASÍ LA CONSTRUCCIÓN DE PRESAS DE CONTRAFUERTE ES LIMITADA Y CON ELLO LA SELECCIÓN DE DICHO MÉTODO PARA SU ANÁLISIS YA QUE ADEMÁS NO ES ÚNICO PARA ANALIZAR ESTOS PROBLEMAS. SIN EMBARGO, UNA DE LAS METAS IMPORTANTES EN LA REALIZACIÓN DE ESTE TRABAJO, ES LA DE HACER DESTACAR LAS VENTAJAS QUE ESTE MÉTODO OFRECE: LO PRACTICO QUE RESULTA APLICARLO Y LA SENSIBLE APROXIMACIÓN A LO EXACTO DE SUS RESULTADOS.

# APENDICE A

---

PROGRAMA GAUSS 1

- . LISTADO DEL PROGRAMA
- . ARCHIVO DE DATOS
- . SISTEMA TRIANGULAR DE ECUACIONES FINALES DEL PROCESO DE CALCULO
- . BLOQUE DE RAICES O SOLUCIONES DEL SISTEMA DE ECUACIONES

## EL PROGRAMA GAUSS 1

UNA DE LAS BASES PRINCIPALES PARA LA UTILIZACIÓN PRACTICA Y PRECISA DEL ANÁLISIS DE ESFUERZOS CON LA FUNCIÓN DE AIRY, ESTÁ PRECISAMENTE EN EL USO DE LAS COMPUTADORES ELECTRÓNICAS COMO HERRAMIENTAS DE CÁLCULO.

AHORA BIEN PARA INTENTAR REALIZAR " A MANO " TODA LA SERIE DE CÁLCULOS-ARITMÉTICOS QUE IMPLICA EL INVERTIR ALGEBRAICAMENTE UNA MATRIZ TAN GRANDE COMO LA DE NUESTRO PROBLEMA, ES NECESARIO DISPONER, DESDE LUEGO, CON UNA BUENA HABILIDAD-DE CÁLCULO Y DOMINIO DEL MÉTODO POR UTILIZAR ( EXISTEN UNA VARIEDAD DE ÉSTOS ) Y-ADemás DE UN BUEN ESPACIO DE TIEMPO PARA LOGRARLO. DADO PUÉS QUE UNO DE LOS FI--NES PRINCIPALES DE LAS COMPUTADORAS ES REDUCIR LO MÁS POSIBLE EL TIEMPO DE PROCE--SO Y además ASEGURAR EL QUE NO EXISTA LA POSIBILIDAD DE UN ERROR EN LOS CÁLCULOS,-ES QUE SE PENSÓ EN LA UTILIZACIÓN DE ESTE PROGRAMA GAUSS 1, PROGRAMADO EN LENGUA--JE FORTRAN Y DESTINADO A RESOLVER ( TAL Y COMO SE PRESENTA EN EL LISTADO ADJUNTO) LA MATRIZ DEL SISTEMA DE CINCUENTA Y UNA ECUACIONES QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA -13.

PARA INVERTIR LA MATRIZ SE USÓ EL MÉTODO DE GAUSS ORIGINAL, CONOCIDO --TAMBIÉN COMO MÉTODO DE TRIANGULACIÓN YA QUE SU PROCEDIMIENTO CONSISTE PRECISAMEN--TE EN TRANSFORMAR TODOS LOS RENGLONES UNO A UNO DE TAL MANERA DE TENER LA DIAGO--NAL PRINCIPAL EN FORMA UNITARIA Y ABAJO DE ELLA TODOS LOS ELEMENTOS NULOS; ES DE--CIR A LA MATRIZ CUADRADA ORIGINAL DE NUESTRO SISTEMA SE LE TRANSFORMA EN UNA MA--TRIZ TRIANGULAR SUPERIOR DE TAL MANERA QUE SE CONOCE, PRIMERO, EL VALOR DE LA ÚL--TIMA INCOGNITA, EN LA ÚLTIMA ECUACIÓN DEL SISTEMA, CON LA CUAL SE CALCULARÁ EL VA--LOR DE LA PENULTIMA INCOGNITA SEGÚN HALLA QUEDADO LA PENULTIMA ECUACIÓN Y ASÍ SE--SIGUE HASTA OBTENER LA PRIMERA INCOGNITA QUE SALDRÁ DE LA PRIMERA ECUACIÓN NATU--RALMENTE. LOS DETALLES DE ESTE MÉTODO PUEDEN CONSULTARSE CON AMPLITUD EN LA BI--BLOGRAFIA No. 3, EN DONDE SE EXPONEN CON TODA CLARIDAD MUCHOS DETALLES INTERESAN--TES DEL ALGEBRA DE MATRICES.

EL MÉTODO EN SI ES CONFIABLE, YA QUE SU DEDUCCIÓN ( COMO MÉTODO NÚMÉRICO ) FUE REALIZADO PENSANDO EN PROBLEMAS TÍPICOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES TRADUCIDAS A UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES COMO ES NUESTRO CASO.

COMO YA SE MENCIONÓ ANTES, ADJUNTO SE MUESTRAN LOS DETALLES DEL LISTADO DEL PROGRAMA GAUSS 1. LUEGO DE ÉSTE, APARECEN LOS DATOS DE LA MATRIZ POR RENGLONES. ES DECIR, APARECE EL ARCHIVO DE DATOS ORGANIZADO POR BLOQUES DE CEROS Y ALGUNOS VALORES DISTINTOS DE CERO. CADA BLOQUE DE ÉSTOS REPRESENTA A UN RENGLÓ DE LA MATRIZ.

EN SEGUIDA SE ENLISTAN LAS CINCUENTA Y UNA ECUACIONES YA TRANSFORMADAS QUE FORMAN A LA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR EN QUE SE CONVIERTE EL SISTEMA CUADRADO ORIGINAL, SEGUIDO DE UN BLOQUE DE NÚMEROS EN FORMA EXPONENCIAL QUE REPRESENTAN AL VECTOR DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES DEL SISTEMA.

FINALMENTE, UN ÚLTIMO BLOQUE DE NÚMEROS TAMBIÉN EN FORMA EXPONENCIAL, - LOS CUALES REPRESENTAN A LAS RAICES DEL SISTEMA PLANTEADO, QUE YA TRADUCIDOS A -- CANTIDADES DE USO COMÚN, SE RELACIONAN ADECUADAMENTE EN EL CUADRO IV - 4 CAPÍTULO 4 .

```

BUPROGHS 8800/E170C FORTRAN COMPILER, MARK 7,0 20 06/15/78 131ST J 1M4R5041 06/20/78 07115 FP
/PAUSST /
IFILE 2=PATH11,UNIT=DISK,ALLOCATION=3,RECORD=60,RECCADS,AREAR100,AREAS=25,
INB
IFILE 3=PATH11,UNIT=DISK,ALLOCATION=3,RECORD=60,RECCADS,AREAR100,AREAS=25,
INEL,LOCK
CC03 DIMENSION A(1000),B(1000),C(1000),PROV(10)
CC04 DOUBLE PRECISION A(1000),B(1000),C(1000),PROV(10),SLM
CC05 READ (5,50) N
CC06 50 FORMAT(20I4)
CC07 READ (5,60) ( M(I),I=1,N)
CC08 60 FORMAT(10F5,3)
CC09 DO 13 L=1,N
CC10 13 2ER(L)=ML
CC11 READ (5,50) N61
CC12 501 FORMAT (12)
CC13 DO 70 L=1,N
CC14 DO 510 PL=1,N
CC15 510 2ER(PL)=C
CC16 520 READ (5, 502) I,(IC(1L),PROV(1L),L=1,N61)
CC17 502 FORMAT(13,7(13,F3,1))
CC18 510 KUENTA=0
CC19 13=C
CC20 DO 540 L=1,N61
CC21 13=13=1
CC22 IF(1C(1),.EQ.0) GO TO 540
CC24 IF(1C(1),.EQ.0) GO TO 540
CC26 IF(1C(13),.540,550,540)
CC27 540 KUENTA=KUENTA + 1
CC28 550 DO 555 L=1, KUENTA
CC29 555 2ER(L)=C
CC30 555 M(2)=PROV(L)
CC31 IF(1C(13),.520,560,520)
CC32 560 DO 12 L=1,N
CC33 12 A(L)=M(L)
CC34 WRITE (6,570) (A(L),L=1,N)
CC35 570 FORMAT(1X,10(I1,F12,3))
CC36 WRITE (2) (A(L),L=1,N)
CC37 WRITE (3) (A(L),L=1,N)
CC38 70 CONTINUE
CC39 KSP=1
CC40 REWIND 2
CC41 REWIND 3
CC42 DO 1 L=1,N
CC43 203 DO 6 L=1,83P
CC44 8 READ(2)(A(L),L=1,N)
CC45 IF(1C(L),.NE.0.) GO TO 200
CC47 DO 201 L=1,N
CC48 READ (3) (B(L),L=1,N)
CC49 IF(L=1,43P) GO TO 201
CC51 IF(1C(L),.NE.0.) GO TO 201
CC53 201 CONTINUE
CC54 WRITE (6,204) F
CC55 204 FORMAT(720,"EN LA RELACION NO. ",I1,59,"NO HAY VALOR EN LA DIAGONAL")
CC56 GO TO 204
CC57 203 REWIND 2
CC58 REWIND 3
CC59 DO 205 L=1,N
CC60 READ (3) (C(L),L=1,N)
CC61 IF(L=10,43P) GO TO 7
CC63 IF(L=10,43) GO TO 11
CC65 WRITE (2) (C(L),L=1,N)
CC66 GO TO 205

```

C067		7	WRITE (2) (B(L),L=1,A)		016124	
C068			GO TO 205		016215	
C069		11	WRITE (2) (A(L),L=1,A)		016258	
C070		201	CONTINUE		016365	
C071			REWIND 3		016367	
C072			REWIND 2		016381	
C073			DO 207 M=1,N		016453	
C074			READ (2) (A(L),L=1,A)		016455	
C075			WRITE (3) (A(L),L=1,A)		016462	
C076		207	CONTINUE		016499	
C077			GO+GEA(K3P)		016463	
C078			GB(K3P)+GEA(LF)		016461	
C079			DB(LF)+G4		016460	
C080			REWIND 2		016464	
C081			REWIND 3		016468	
C082			GO TO 205		016466	
C083		200	REWIND 2		016467	
C084			DO 55C M=1,K3P		016469	
C085			READ (3) (A(N1),N1=1,A)		016468	
C086			WRITE(2) (A(N1),N1=1,A)		016468	
C087		580	CONTINUE		016464	
C088			REWIND 3		016467	
C089			DO 3 K1=1,A		016465	
C090			READ(3) (B(L),L=1,A)		016462	
C091			IF(K1,LE,75)GO TO 2		016462	
C093			IF(3*F,EG,D.)GOTO 3		016466	
C095			DO 4 L=1,A		016465	
C096		4	C(L)=E(L) - (I(L)/R(F))+R(K)		016461	
C097			2*(K1)+RER(K1)-(C(2F+1)/A(K))+R(K)		016465	
C098			WRITE(2) (C(L),L=1,A)		016465	
C099			GO TO 2		016462	
C100		3	WRITE(2) (B(L),L=1,A)		016462	
C101		2	CONTINUE		016464	
C102			REWIND 2		016462	
C103			REWIND 3		016462	
C104			DO 3 K1=1,A		016464	
C105			READ(2) (A(L),L=1,A)		016462	
C106		5	WRITE(3) (A(K1),K1=1,A)		016461	
C107			K3P+K3P+1		016464	
C108			REWIND 2		016461	
C109			REWIND 3		016463	
C110		1	CONTINUE		016465	
C111		206	DO 80 I=1,A		016469	
C112		80	C(I)+C.		016461	
C113			L1=1		016465	
C114			DO 80 I=1,A		016467	
C115			READ (2) (A(L),L=1,A)		016469	
C116			DO 100 I=1,A		016466	
C117			IF(A(I),EG,C.) GO TO 100		016468	
C119			C(L)+A(I)		016461	
C120			I(L)=I		016460	
C121			L1=L+1		016464	
C122		100	CONTINUE		016463	
C123			L2(L)=I		016467	
C124			WRITE (6,110) IPR,IR(L1),CLLS,LS1,L2		016464	
C125			DO E K1=1,L1		016465	
C126			C(K1)+C.		016467	
C127			I(K1)=0		016467	
C128		8	CONTINUE		016461	
C129			L1=1		016465	
C130		90	CONTINUE		016467	
C131		110	FORMAT(13,'COUACON NC. ',5A,14/2,'(5(14,D11,A))		016461	
C132			WRITE(6,5) (I,GEA(I),I=1,A)		016461	
C133			C(A1)+C.		016468	
C134			A(A1)+C.C		016465	
C135			A		016465	

C136	1	GO ZP=1	1	0.000000	0.000000
C137	1	PE=END 2	1	0.000000	0.000000
C138	1	DO 50 K=1,1	1	0.000000	0.000000
C139	1	3C P=AC(I)(ALL),L=1,1	1	0.000000	0.000000
C140	1	SU=0	1	0.000000	0.000000
C141	1	DO 41 J=1,P=1	1	0.000000	0.000000
C142	1	41 SUP=SUM*(C(J)+C(I))	1	0.000000	0.000000
C143	1	C(I)+C(J)=C(I)+SUP/AC(I)	1	0.000000	0.000000
C144	1	J=J+1	1	0.000000	0.000000
C145	1	IF(C(I).IC.ZC	1	0.000000	0.000000
C146	1	1C WRITE(IH,513(5),C(I),I=1,1)	1	0.000000	0.000000
C147	1	51 FORMAT(2H,1B(1),1H,011.000)	1	0.000000	0.000000
C148	1	END	1	0.000000	0.000000

NO ERRORS AND NO WARNINGS IN THE STATEMENTS OF THE PROGRAM. THE TOTAL NUMBER OF STATEMENTS IS 148.  
 COMPILE TIME IS 41.2 SECONDS FOR 148 CARDS AT 100 CHARACTERS PER LINE.











15 0.12360\*01 17 0.15510\*01 18 0.16130\*02 19 0.17110\*01 20 0.18190\*01 21 0.19270\*01 22 0.20350\*01  
EQUATION NO. 9  
5 0.14160\*02 10 0.15240\*01 11 0.16320\*01 12 0.17400\*01 13 0.18480\*02 14 0.19560\*01 15 0.20640\*01 16 0.21720\*01  
17 0.22800\*01 18 0.23880\*02 19 0.24960\*02 20 0.26040\*01 21 0.27120\*01 22 0.28200\*01  
EQUATION NO. 10  
10 0.12750\*02 11 0.13830\*01 12 0.14910\*01 13 0.15990\*02 14 0.17070\*02 15 0.18150\*01 16 0.19230\*01 17 0.20310\*01  
18 0.21390\*01 19 0.22470\*02 20 0.23550\*01 21 0.24630\*01 22 0.25710\*01 23 0.26790\*01 24 0.27870\*01  
EQUATION NO. 11  
11 0.12840\*02 12 0.13920\*01 13 0.15000\*01 14 0.16080\*01 15 0.17160\*01 16 0.18240\*01 17 0.19320\*01 18 0.20400\*01  
19 0.21480\*01 20 0.22560\*01 21 0.23640\*01 22 0.24720\*01 23 0.25800\*01 24 0.26880\*01 25 0.27960\*01 26 0.29040\*01  
EQUATION NO. 12  
12 0.12910\*02 13 0.14000\*01 14 0.15090\*01 15 0.16180\*01 16 0.17270\*01 17 0.18360\*01 18 0.19450\*01 19 0.20540\*01  
20 0.21630\*01 21 0.22720\*01 22 0.23810\*01 23 0.24900\*01 24 0.26000\*01 25 0.27090\*01 26 0.28180\*01 27 0.29270\*01  
EQUATION NO. 13  
13 0.17330\*02 14 0.18420\*01 15 0.19510\*01 16 0.20600\*01 17 0.21690\*01 18 0.22780\*01 19 0.23870\*01 20 0.24960\*01  
21 0.26050\*01 22 0.27140\*01 23 0.28230\*01 24 0.29320\*01 25 0.30410\*01 26 0.31500\*01 27 0.32590\*01  
EQUATION NO. 14  
14 0.16130\*02 15 0.17220\*01 16 0.18310\*01 17 0.19400\*01 18 0.20490\*01 19 0.21580\*01 20 0.22670\*01 21 0.23760\*01  
22 0.24850\*01 23 0.25940\*01 24 0.27030\*01 25 0.28120\*01 26 0.29210\*01 27 0.30300\*01 28 0.31390\*01 29 0.32480\*01  
EQUATION NO. 15  
15 0.15510\*02 16 0.16600\*01 17 0.17690\*01 18 0.18780\*01 19 0.19870\*01 20 0.20960\*01 21 0.22050\*01 22 0.23140\*01  
23 0.24230\*01 24 0.25320\*01 25 0.26410\*01 26 0.27500\*01 27 0.28590\*01 28 0.29680\*01 29 0.30770\*01 30 0.31860\*01  
EQUATION NO. 16  
16 0.12300\*02 17 0.13390\*01 18 0.14480\*01 19 0.15570\*01 20 0.16660\*01 21 0.17750\*01 22 0.18840\*01 23 0.19930\*01  
24 0.21020\*01 25 0.22110\*01 26 0.23200\*01 27 0.24290\*01 28 0.25380\*01 29 0.26470\*01 30 0.27560\*01 31 0.28650\*01  
EQUATION NO. 17  
17 0.11770\*02 18 0.12860\*01 19 0.13950\*01 20 0.15040\*01 21 0.16130\*01 22 0.17220\*01 23 0.18310\*01 24 0.19400\*01  
25 0.20490\*01 26 0.21580\*01 27 0.22670\*01 28 0.23760\*01 29 0.24850\*01 30 0.25940\*01 31 0.27030\*01 32 0.28120\*01  
EQUATION NO. 18  
18 0.11630\*02 19 0.12720\*01 20 0.13810\*01 21 0.14900\*01 22 0.15990\*01 23 0.17080\*01 24 0.18170\*01 25 0.19260\*01  
26 0.20350\*01 27 0.21440\*01 28 0.22530\*01 29 0.23620\*01 30 0.24710\*01 31 0.25800\*01 32 0.26890\*01 33 0.27980\*01  
EQUATION NO. 19  
19 0.11710\*02 20 0.12800\*01 21 0.13890\*01 22 0.14980\*01 23 0.16070\*01 24 0.17160\*01 25 0.18250\*01 26 0.19340\*01  
27 0.20430\*01 28 0.21520\*01 29 0.22610\*01 30 0.23700\*01 31 0.24790\*01 32 0.25880\*01 33 0.26970\*01 34 0.28060\*01  
EQUATION NO. 20  
20 0.13660\*02 21 0.14750\*01 22 0.15840\*01 23 0.16930\*01 24 0.18020\*01 25 0.19110\*01 26 0.20200\*01 27 0.21290\*01  
28 0.22380\*01 29 0.23470\*01 30 0.24560\*01 31 0.25650\*01 32 0.26740\*01 33 0.27830\*01 34 0.28920\*01 35 0.30010\*01  
EQUATION NO. 21  
21 0.14480\*01 22 0.15570\*01 23 0.16660\*01 24 0.17750\*01 25 0.22780\*01 26 0.22870\*01 27 0.22960\*01 28 0.23050\*01  
29 0.23140\*01 30 0.23230\*01 31 0.23320\*01 32 0.23410\*01 33 0.23500\*01 34 0.23590\*01 35 0.23680\*01 36 0.23770\*01  
EQUATION NO. 22  
22 0.11740\*02 23 0.12830\*01 24 0.13920\*01 25 0.15010\*01 26 0.16100\*01 27 0.17190\*01 28 0.18280\*01 29 0.19370\*01  
30 0.20460\*01 31 0.21550\*01 32 0.22640\*01 33 0.23730\*01 34 0.24820\*01 35 0.25910\*01 36 0.27000\*01 37 0.28090\*01  
EQUATION NO. 23  
23 0.15770\*02 24 0.16860\*01 25 0.17950\*01 26 0.19040\*01 27 0.20130\*01 28 0.21220\*01 29 0.22310\*01 30 0.23400\*01  
31 0.24490\*01 32 0.25580\*01 33 0.26670\*01 34 0.27760\*01 35 0.28850\*01 36 0.29940\*01 37 0.31030\*01 38 0.32120\*01  
EQUATION NO. 24  
24 0.11300\*02 25 0.12390\*01 26 0.13480\*01 27 0.14570\*01 28 0.15660\*01 29 0.16750\*01 30 0.17840\*01 31 0.18930\*01  
32 0.20020\*01 33 0.21110\*01 34 0.22200\*01 35 0.23290\*01 36 0.24380\*01 37 0.25470\*01 38 0.26560\*01 39 0.27650\*01  
EQUATION NO. 25  
25 0.11170\*02 26 0.12260\*01 27 0.13350\*01 28 0.14440\*01 29 0.15530\*01 30 0.16620\*01 31 0.17710\*01 32 0.18800\*01  
33 0.19890\*01 34 0.20980\*01 35 0.22070\*01 36 0.23160\*01 37 0.24250\*01 38 0.25340\*01 39 0.26430\*01 40 0.27520\*01  
EQUATION NO. 26  
26 0.11240\*02 27 0.12330\*01 28 0.13420\*01 29 0.14510\*01 30 0.15600\*01 31 0.16690\*01 32 0.17780\*01 33 0.18870\*01  
34 0.19960\*01 35 0.21050\*01 36 0.22140\*01 37 0.23230\*01 38 0.24320\*01 39 0.25410\*01 40 0.26500\*01 41 0.27590\*01  
EQUATION NO. 27  
27 0.15090\*02 28 0.16180\*01 29 0.17270\*01 30 0.18360\*01 31 0.19450\*01 32 0.20540\*01 33 0.21630\*01 34 0.22720\*01  
35 0.23810\*01 36 0.24900\*01 37 0.25990\*01 38 0.27080\*01 39 0.28170\*01 40 0.29260\*01 41 0.30350\*01 42 0.31440\*01  
EQUATION NO. 28  
28 0.12540\*01 29 0.13630\*01 30 0.14720\*01 31 0.15810\*01 32 0.16900\*01 33 0.17990\*01 34 0.19080\*01 35 0.20170\*01  
36 0.21260\*01 37 0.22350\*01 38 0.23440\*01 39 0.24530\*01 40 0.25620\*01 41 0.26710\*01 42 0.27800\*01 43 0.28890\*01  
EQUATION NO. 29  
29 0.16470\*02 30 0.17560\*01 31 0.18650\*01 32 0.19740\*01 33 0.20830\*01 34 0.21920\*01 35 0.23010\*01 36 0.24100\*01  
37 0.25190\*01 38 0.26280\*01 39 0.27370\*01 40 0.28460\*01 41 0.29550\*01 42 0.30640\*01 43 0.31730\*01 44 0.32820\*01  
EQUATION NO. 30  
30 0.11090\*02 31 0.12180\*01 32 0.13270\*01 33 0.14360\*01 34 0.15450\*01 35 0.16540\*01 36 0.17630\*01 37 0.18720\*01  
38 0.19810\*01 39 0.20900\*01 40 0.21990\*01 41 0.23080\*01 42 0.24170\*01 43 0.25260\*01 44 0.26350\*01 45 0.27440\*01  
EQUATION NO. 31  
31 0.11090\*02 32 0.12180\*01 33 0.13270\*01 34 0.14360\*01 35 0.15450\*01 36 0.16540\*01 37 0.17630\*01 38 0.18720\*01  
39 0.19810\*01 40 0.20900\*01 41 0.21990\*01 42 0.23080\*01 43 0.24170\*01 44 0.25260\*01 45 0.26350\*01 46 0.27440\*01  
EQUATION NO. 32  
32 0.11090\*02 33 0.12180\*01 34 0.13270\*01 35 0.14360\*01 36 0.15450\*01 37 0.16540\*01 38 0.17630\*01 39 0.18720\*01  
40 0.19810\*01 41 0.20900\*01 42 0.21990\*01 43 0.23080\*01 44 0.24170\*01 45 0.25260\*01 46 0.26350\*01 47 0.27440\*01  
EQUATION NO. 33  
33 0.11090\*02 34 0.12180\*01 35 0.13270\*01 36 0.14360\*01 37 0.15450\*01 38 0.16540\*01 39 0.17630\*01 40 0.18720\*01  
41 0.19810\*01 42 0.20900\*01 43 0.21990\*01 44 0.23080\*01 45 0.24170\*01 46 0.25260\*01 47 0.26350\*01 48 0.27440\*01  
EQUATION NO. 34  
34 0.11090\*02 35 0.12180\*01 36 0.13270\*01 37 0.14360\*01 38 0.15450\*01 39 0.16540\*01 40 0.17630\*01 41 0.18720\*01  
42 0.19810\*01 43 0.20900\*01 44 0.21990\*01 45 0.23080\*01 46 0.24170\*01 47 0.25260\*01 48 0.26350\*01 49 0.27440\*01  
EQUATION NO. 35  
35 0.11090\*02 36 0.12180\*01 37 0.13270\*01 38 0.14360\*01 39 0.15450\*01 40 0.16540\*01 41 0.17630\*01 42 0.18720\*01  
43 0.19810\*01 44 0.20900\*01 45 0.21990\*01 46 0.23080\*01 47 0.24170\*01 48 0.25260\*01 49 0.26350\*01 50 0.27440\*01  
EQUATION NO. 36  
36 0.11090\*02 37 0.12180\*01 38 0.13270\*01 39 0.14360\*01 40 0.15450\*01 41 0.16540\*01 42 0.17630\*01 43 0.18720\*01  
44 0.19810\*01 45 0.20900\*01 46 0.21990\*01 47 0.23080\*01 48 0.24170\*01 49 0.25260\*01 50 0.26350\*01 51 0.27440\*01  
EQUATION NO. 37  
37 0.11090\*02 38 0.12180\*01 39 0.13270\*01 40 0.14360\*01 41 0.15450\*01 42 0.16540\*01 43 0.17630\*01 44 0.18720\*01  
45 0.19810\*01 46 0.20900\*01 47 0.21990\*01 48 0.23080\*01 49 0.24170\*01 50 0.25260\*01 51 0.26350\*01 52 0.27440\*01  
EQUATION NO. 38  
38 0.11090\*02 39 0.12180\*01 40 0.13270\*01 41 0.14360\*01 42 0.15450\*01 43 0.16540\*01 44 0.17630\*01 45 0.18720\*01  
46 0.19810\*01 47 0.20900\*01 48 0.21990\*01 49 0.23080\*01 50 0.24170\*01 51 0.25260\*01 52 0.26350\*01 53 0.27440\*01  
EQUATION NO. 39  
39 0.11090\*02 40 0.12180\*01 41 0.13270\*01 42 0.14360\*01 43 0.15450\*01 44 0.16540\*01 45 0.17630\*01 46 0.18720\*01  
47 0.19810\*01 48 0.20900\*01 49 0.21990\*01 50 0.23080\*01 51 0.24170\*01 52 0.25260\*01 53 0.26350\*01 54 0.27440\*01  
EQUATION NO. 40  
40 0.11090\*02 41 0.12180\*01 42 0.13270\*01 43 0.14360\*01 44 0.15450\*01 45 0.16540\*01 46 0.17630\*01 47 0.18720\*01  
48 0.19810\*01 49 0.20900\*01 50 0.21990\*01 51 0.23080\*01 52 0.24170\*01 53 0.25260\*01 54 0.26350\*01 55 0.27440\*01  
EQUATION NO. 41  
41 0.11090\*02 42 0.12180\*01 43 0.13270\*01 44 0.14360\*01 45 0.15450\*01 46 0.16540\*01 47 0.17630\*01 48 0.18720\*01  
49 0.19810\*01 50 0.20900\*01 51 0.21990\*01 52 0.23080\*01 53 0.24170\*01 54 0.25260\*01 55 0.26350\*01 56 0.27440\*01  
EQUATION NO. 42  
42 0.11090\*02 43 0.12180\*01 44 0.13270\*01 45 0.14360\*01 46 0.15450\*01 47 0.16540\*01 48 0.17630\*01 49 0.18720\*01  
50 0.19810\*01 51 0.20900\*01 52 0.21990\*01 53 0.23080\*01 54 0.24170\*01 55 0.25260\*01 56 0.26350\*01 57 0.27440\*01  
EQUATION NO. 43  
43 0.11090\*02 44 0.12180\*01 45 0.13270\*01 46 0.14360\*01 47 0.15450\*01 48 0.16540\*01 49 0.17630\*01 50 0.18720\*01  
51 0.19810\*01 52 0.20900\*01 53 0.21990\*01 54 0.23080\*01 55 0.24170\*01 56 0.25260\*01 57 0.26350\*01 58 0.27440\*01  
EQUATION NO. 44  
44 0.11090\*02 45 0.12180\*01 46 0.13270\*01 47 0.14360\*01 48 0.15450\*01 49 0.16540\*01 50 0.17630\*01 51 0.18720\*01  
52 0.19810\*01 53 0.20900\*01 54 0.21990\*01 55 0.23080\*01 56 0.24170\*01 57 0.25260\*01 58 0.26350\*01 59 0.27440\*01  
EQUATION NO. 45  
45 0.11090\*02 46 0.12180\*01 47 0.13270\*01 48 0.14360\*01 49 0.15450\*01 50 0.16540\*01 51 0.17630\*01 52 0.18720\*01  
53 0.19810\*01 54 0.20900\*01 55 0.21990\*01 56 0.23080\*01 57 0.24170\*01 58 0.25260\*01 59 0.26350\*01 60 0.27440\*01  
EQUATION NO. 46  
46 0.11090\*02 47 0.12180\*01 48 0.13270\*01 49 0.14360\*01 50 0.15450\*01 51 0.16540\*01 52 0.17630\*01 53 0.18720\*01  
54 0.19810\*01 55 0.20900\*01 56 0.21990\*01 57 0.23080\*01 58 0.24170\*01 59 0.25260\*01 60 0.26350\*01 61 0.27440\*01  
EQUATION NO. 47  
47 0.11090\*02 48 0.12180\*01 49 0.13270\*01 50 0.14360\*01 51 0.15450\*01 52 0.16540\*01 53 0.17630\*01 54 0.18720\*01  
55 0.19810\*01 56 0.20900\*01 57 0.21990\*01 58 0.23080\*01 59 0.24170\*01 60 0.25260\*01 61 0.26350\*01 62 0.27440\*01  
EQUATION NO. 48  
48 0.11090\*02 49 0.12180\*01 50 0.13270\*01 51 0.14360\*01 52 0.15450\*01 53 0.16540\*01 54 0.17630\*01 55 0.18720\*01  
56 0.19810\*01 57 0.20900\*01 58 0.21990\*01 59 0.23080\*01 60 0.24170\*01 61 0.25260\*01 62 0.26350\*01 63 0.27440\*01  
EQUATION NO. 49  
49 0.11090\*02 50 0.12180\*01 51 0.13270\*01 52 0.14360\*01 53 0.15450\*01 54 0.16540\*01 55 0.17630\*01 56 0.18720\*01  
57 0.19810\*01 58 0.20900\*01 59 0.21990\*01 60 0.23080\*01 61 0.24170\*01 62 0.25260\*01 63 0.26350\*01 64 0.27440\*01  
EQUATION NO. 50  
50 0.11090\*02 51 0.12180\*01 52 0.13270\*01 53 0.14360\*01 54 0.15450\*01 55 0.16540\*01 56 0.17630\*01 57 0.18720\*01  
58 0.19810\*01 59 0.20900\*01 60 0.21990\*01 61 0.23080\*01 62 0.24170\*01 63 0.25260\*01 64 0.26350\*01 65 0.27440\*01  
EQUATION NO. 51  
51 0.11090\*02 52 0.12180\*01 53 0.13270\*01 54 0.14360\*01 55 0.15450\*01 56 0.16540\*01 57 0.17630\*01 58 0.18720\*01  
59 0.19810\*01 60 0.20900\*01 61 0.21990\*01 62 0.23080\*01 63 0.24170\*01 64 0.25260\*01 65 0.26350\*01 66 0.27440\*01  
EQUATION NO. 52  
52 0.11090\*02 53 0.12180\*01 54 0.13270\*01 55 0.14360\*01 56 0.15450\*01 57 0.16540\*01 58 0.17630\*01 59 0.18720\*01  
60 0.19810\*01 61 0.20900\*01 62 0.21990\*01 63 0.23080\*01 64 0.24170\*01 65 0.25260\*01 66 0.26350\*01 67 0.27440\*01  
EQUATION NO. 53  
53 0.11090\*02 54 0.12180\*01 55 0.13270\*01 56 0.14360\*01 57 0.15450\*01 58 0.16540\*01 59 0.17630\*01 60 0.18720\*01  
61 0.19810\*01 62 0.20900\*01 63 0.21990\*01 64 0.23080\*01 65 0.24170\*01 66 0.25260\*01 67 0.26350\*01 68 0.27440\*01  
EQUATION NO. 54  
54 0.11090\*02 55 0.12180\*01 56 0.13270\*01 57 0.14360\*01 58 0.15450\*01 59 0.16540\*01 60 0.17630\*01 61 0.18720\*01  
62 0.19810\*01 63 0.20900\*01 64 0.21990\*01 65 0.23080\*01 66 0.24170\*01 67 0.25260\*01 68 0.26350\*01 69 0.27440\*01  
EQUATION NO. 55  
55 0.11090\*02 56 0.12180\*01 57 0.13270\*01 58 0.14360\*01 59 0.15450\*01 60 0.16540\*01 61 0.17630\*01 62 0.18720\*01  
63 0.19810\*01 64 0.20900\*01 65 0.21990\*01 66 0.23080\*01 67 0.24170\*01 68 0.25260\*01 69 0.26350\*01 70 0.27440\*01  
EQUATION NO. 56  
56 0.11090\*02 57 0.12180\*01 58 0.13270\*01 59 0.14360\*01 60 0.15450\*01 61 0.16540\*01 62 0.17630\*01 63 0.18720\*01  
64 0.19810\*01 65 0.20900\*01 66 0.21990\*01 67 0.23080\*01 68 0.24170\*01 69 0.25260\*01 70 0.26350\*01 71 0.27440\*01  
EQUATION NO. 57  
57 0.11090\*02 58 0.12180\*01 59 0.13270\*01 60 0.14360\*01 61 0.15450\*01 62 0.16540\*01 63 0.17630\*01 64 0.18720\*01  
65 0.19810\*01 66 0.20900\*01 67 0.21990\*01 68 0.23080\*01 69 0.24170\*01 70 0.25260\*01 71 0.26350\*01 72 0.27440\*01  
EQUATION NO. 58  
58 0.11090\*02 59 0.12180\*01 60 0.13270\*01 61 0.14360\*01 62 0.15450\*01 63 0.16540\*01 64 0.17630\*01 65 0.18720\*01  
66 0.19810\*01 67 0.20900\*01 68 0.21990\*01 69 0.23080\*01 70 0.24170\*01 71 0.25260\*01 72 0.26350\*01 73 0.27440\*01  
EQUATION NO. 59  
59 0.11090\*02 60 0.12180\*01 61 0.13270\*01 62 0.14360\*01 63 0.15450\*01 64 0.16540\*01 65 0.17630\*01 66 0.18720\*01  
67 0.19810\*01 68 0.20900\*01 69 0.21990\*01 70 0.23080\*01 71 0.24170\*01 72 0.25260\*01 73 0.26350\*01 74 0.27440\*01  
EQUATION NO. 60  
60 0.11090\*02 61 0.12180\*01 62 0.13270\*01 63 0.14360\*01 64 0.15450\*01 65 0.16540\*01 66 0.17630\*01 67 0.18720\*01  
68 0.19810\*01 69 0.20900\*01 70 0.21990\*01 71 0.23080\*01 72 0.24170\*01 73 0.25260\*01 74 0.26350\*01 75 0.27440\*01  
EQUATION NO. 61  
61 0.11090\*02 62 0.12180\*01 6

29 C.70440+01 31 C.13020+01 41 C.13020+01  
 ECUCATION NO. 31  
 30 C.76750+01 40 C.65750+00 41 C.13020+01  
 ECUCATION NO. 32  
 32 C.10960+02 33 C.72400+01 34 C.10120+01 35 C.14240+00 36 C.11200+01 37 C.14240+00 38 C.14240+00 39 C.14240+00 40 C.14240+00  
 ECUCATION NO. 33  
 40 C.36530+00 41 C.66680+00 42 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 34  
 41 C.35140+00 42 C.66750+00 43 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 35  
 42 C.12960+02 43 C.32310+00 44 C.2770+00  
 ECUCATION NO. 36  
 43 C.35220+01 44 C.35220+01 45 C.35220+01 46 C.35220+01 47 C.35220+01 48 C.35220+01 49 C.35220+01 50 C.35220+01  
 ECUCATION NO. 37  
 44 C.10000+01 45 C.10000+01 46 C.10000+01 47 C.10000+01 48 C.10000+01 49 C.10000+01 50 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 38  
 45 C.10000+01 46 C.10000+01 47 C.10000+01 48 C.10000+01 49 C.10000+01 50 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 39  
 46 C.10000+01 47 C.10000+01 48 C.10000+01 49 C.10000+01 50 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 40  
 47 C.10000+01 48 C.10000+01 49 C.10000+01 50 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 41  
 48 C.10000+01 49 C.10000+01 50 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 42  
 49 C.10000+01 50 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 43  
 50 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 44  
 51 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 45  
 52 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 46  
 53 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 47  
 54 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 48  
 55 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 49  
 56 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 50  
 57 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 51  
 58 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 52  
 59 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 53  
 60 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 54  
 61 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 55  
 62 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 56  
 63 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 57  
 64 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 58  
 65 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 59  
 66 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 60  
 67 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 61  
 68 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 62  
 69 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 63  
 70 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 64  
 71 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 65  
 72 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 66  
 73 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 67  
 74 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 68  
 75 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 69  
 76 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 70  
 77 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 71  
 78 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 72  
 79 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 73  
 80 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 74  
 81 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 75  
 82 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 76  
 83 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 77  
 84 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 78  
 85 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 79  
 86 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 80  
 87 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 81  
 88 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 82  
 89 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 83  
 90 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 84  
 91 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 85  
 92 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 86  
 93 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 87  
 94 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 88  
 95 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 89  
 96 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 90  
 97 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 91  
 98 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 92  
 99 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 93  
 100 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 94  
 101 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 95  
 102 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 96  
 103 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 97  
 104 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 98  
 105 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 99  
 106 C.10000+01  
 ECUCATION NO. 100

# APENDICE B

---

PROGRAMA ELET'EC .

- . LISTADO DE PROGRAMA
- . ARREGLO DE LOS DATOS DE ENTRADA
- . CUADRO DE RESULTADOS

## EL PROGRAMA ELEVEEC .

ESTE PROGRAMA, TAMBIÉN ELABORADO EN LENGUAJE FORTRAN, ESTÁ DESTINADO A REALIZAR TODAS LAS OPERACIONES QUE REQUIERE LA VALUACIÓN DE LOS ESFUERZOS NORMALES Y TANGENCIALES ( ECUACIONES 14 ) Y LOS ESFUERZOS PRINCIPALES ( ECUACIONES -- 15 ), EN CADA UNO DE LOS PUNTOS DE LA RED, A PARTIR DE LOS VALORES DE  $\varnothing$  EN FUN-- CIÓN DE  $W$  QUE SE MUESTRAN EN LA FIGURA 14.

DE ACUERDO A LA CONFIGURACIÓN DE LOS DATOS, QUE TIENEN LA FORMA DE UN ARREGLO MATRICIAL DE 14 POR 10 EL CUAL PUEDE VERSE EN LA PÁGINA DE ESTE APÉNDICE, SE DISPUSO LA LECTURA DE IGUAL MANERA QUE PARA EL PROGRAMA GAUSS 1 DEL -- APÉNDICE ANTERIOR, YA QUE COMO SE PUEDE OBSERVAR ( FIGURA 14 ) EN ALGÚN SECTOR -- DEL ARREGLO, FIGURAN ALGUNOS VALORES EN CERO.

CON ESTOS DATOS, EL PROGRAMA CALCULA LOS VALORES DE LOS ESFUERZOS NORMALES Y TANGENCIALES ( ECUACIONES 14 ), RESULTADOS CON LOS CUALES SE CALCULAN -- LOS VALORES DE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES ( ECUACIONES 15 ) Y LA DIRECCIÓN DE ÉSTOS FINALMENTE.

POR ÚLTIMO EN LAS PÁGINAS Y SE PRESENTA EL CUADRO - SOLUCIÓN - DE ESTE PROGRAMA, RESULTADO DE LOS CÁLCULOS ANTERIORES, DISPUESTOS EN COLUMNAS - DE ACUERDO AL ORDEN DE CÁLCULO SEGUIDO :

LA COLUMNA DE "COORDENADAS" ESTÁ REFERIDO A LOS VALORES QUE TOMARÍAN - "X" E "Y" SOBRE LA CUADRÍCULA QUE SE FORMA CON LA RED DE ANÁLISIS ( VER UBICA-- CIÓN DEL SISTEMA COORDENADA EN FIGURA 12 ). LAS TRES COLUMNAS SIGUIENTES CO-- RRESPONDEN A LOS VALORES DE LAS ECUACIONES ( 14 ) Y LAS TRES ÚLTIMAS A LOS VALO-- RES DE LAS ECUACIONES ( 15 ).

```

BURROUGHS #18CC/8100 FORTRAN COMPILER V. 4.4.1 11/15/77 18101 1 1401048 1401048
/ALYEC /
CC01 | DIMENSION A(20,20),B(20,20) 15
CC02 | REAL (A,B,C) *A**2 1
CC03 | 3C1 AGRMAT (1:12) 1
CC04 | DO 10 I=1,4 1
CC05 | DO 10 J=1,4 1
CC06 | 1C A(I,J)=C 1
CC07 | 2C READ (5,502) Z,(I(1:4),F(1:4),A(1:4)) 1
CC08 | 302 FORMAT (13,F(1:4),13) 1
CC09 | IF (I.EQ.1) GO TO 11 1
CC11 | KUENTA=C 1
CC12 | DO 44G L=1,AST 1
CC13 | IF(I(1:4).EQ.0) GO TO 10 1
CC15 | 44G KUENTAKUENTA = I 1
CC16 | 5C DO 35 L=1,KUENTA 1
CC17 | 1C I(1:4) 1
CC18 | 55 A(I,J) = F(1:4) 1
CC19 | GO TO 2C 1
CC20 | 6C DO 12 L=1,4 1
CC21 | 12 WRITE(6,77)(A(I,J),J=1,4) 1
CC22 | 77C FORMAT(1X,1X(13),4F(13,1)) 1
CC23 | READ(5,30) W,DELTA 1
CC24 | 3C FORMAT (1L,13) 1
CC25 | WRITE (6,100) 1
CC26 | 100 FORMAT (1M,13F10.4,"(COS)CENACAS",13F10.4,"SIGMA",13F10.4) 1
CC26 | 11AU AT",20,"SIGMA",13F10.4,"SIGMA",13F10.4,"ANGUL",13F10.4,"13",13F10.4) 1
CC26 | 210A,30,"A(1:4)",13F10.4,"(A(1:4))",13F10.4) 1
CC27 | NCCNT=C 1
CC28 | L=1 1
CC29 | K=1 1
CC30 | DO 40 J=1,4 1
CC31 | DO 40 I=1,4 1
CC32 | SIGMA = (A(I,J)-1) * Z + A(I,J) * A(I,J) * W / (DELTA**2) 1
CC33 | SIGMA = (A(I,J)-1) * Z + A(I,J) * A(I,J) * W / (DELTA**2) 1
CC34 | TACAY=(A(I,J)-1) * A(I,J) * W - A(I,J)-1) - A(I,J) * W / 1
CC34 | (4.0 * DELTA ** 2.) 1
CC35 | SIGMA = SIGMA + SIGMA/2. 1
CC36 | SIGMA = C.5 * I(SIGMA-SIGMA) **2. + W * TACAY **2. ** 1.5 1
CC37 | SIGMA1 = SIGMA + SIGMA 1
CC38 | SIGMA2 = SIGMA + SIGMA 1
CC39 | IF(SIGMA1-SIGMA2).EQ.0) GO TO 7C 1
CC41 | TETA = 2. * TACAY / (SIGMA1 - SIGMA2) 1
CC42 | TETA = C.5 * ATAN (TETA) 1
CC43 | GO TO 6C 1
CC44 | 7C TETA=1.570796 1
CC45 | 8C WRITE (6,90) Z,I,SIGMA,SIGMA1,TACAY,SIGMA1,SIGMA2,TETA 1
CC46 | 90 FORMAT (15,1D,4F17,9F5.2,13F10.4) 1
CC47 | NCCNT = NCCNT + 1 1
CC48 | IF(NCCNT.EQ.50) WRITE (6,100) 1
CC50 | IF(NCCNT.EQ.50) NCCNT = 0 1
CC52 | 4C CONTINUE 1
CC53 | ENR 1

```

NO ERRORS AND NO WARNINGS IN 53 STATEMENTS, CPU EXPENDS 0.0047 SECS (17% OF TOTAL),  
 COMPILER TIME IS 16.3 SECONDS FOR 53 CARDS AT 15.0 CHAR/CM LINE.



COORDENADAS X Y	SIGMA X (mG/cm <sup>2</sup> )	SIGMA Y (mG/cm <sup>2</sup> )	VAL X (mG/cm <sup>2</sup> )	SIGMA 1 (mG/cm <sup>2</sup> )	SIGMA 2 (mG/cm <sup>2</sup> )	ALCULO (mG/cm <sup>2</sup> )
2 2	21.928	5.195	-0.500	11.429	5.199	0.00000
2 3	5.366	2.790	-1.160	1.841	2.679	0.22814
2 4	-7.683	1.339	-0.119	1.390	1.658	-0.00000
2 5	-3.275	3.675	0.526	3.255	3.283	0.00000
2 6	-1.822	5.064	0.471	5.059	5.127	0.00000
2 7	-0.115	5.438	-0.446	5.440	5.438	-0.00000
2 8	2.727	4.091	-1.316	4.090	4.121	-0.00000
2 9	0.000	0.000	-1.035	0.000	0.000	0.00000
2 10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
2 11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
2 12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
2 13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
3 1	16.911	6.000	0.000	16.911	6.000	0.00000
3 2	8.074	4.685	-1.194	4.371	5.443	-0.00000
3 3	-2.993	9.103	-0.409	8.697	9.103	-0.00000
3 4	-3.400	7.481	1.599	7.472	7.460	0.00000
3 5	-3.037	7.991	1.004	7.990	7.991	0.00000
3 6	-1.915	7.991	-0.189	7.991	7.991	0.00000
3 7	0.000	8.553	-1.320	8.553	8.553	0.00000
3 8	0.000	11.940	-2.791	12.054	12.276	-0.00000
3 9	0.000	6.372	-2.791	6.372	6.372	0.00000
3 10	0.000	0.000	-1.043	0.000	0.000	0.00000
3 11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
3 12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
3 13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
4 1	17.110	5.999	0.000	17.110	5.999	0.00000
4 2	8.210	7.976	-0.972	7.976	7.976	0.00000
4 3	-3.364	9.964	1.953	9.964	9.964	0.00000
4 4	-3.823	9.244	0.442	9.244	9.244	0.00000
4 5	-2.966	7.585	-0.015	7.585	7.585	0.00000
4 6	-1.683	5.310	-0.179	5.310	5.310	0.00000
4 7	0.926	7.432	-0.179	7.432	7.432	0.00000
4 8	-1.954	14.044	-1.220	14.044	14.044	0.00000
4 9	6.372	25.911	-0.226	25.911	25.911	0.00000
4 10	0.000	14.484	-0.226	14.484	14.484	0.00000
4 11	0.000	7.582	0.000	7.582	7.582	0.00000
4 12	0.000	6.000	0.000	6.000	6.000	0.00000
4 13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
5 1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
5 2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
5 3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
5 4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
5 5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
5 6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
5 7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
5 8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
5 9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
5 10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
5 11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
5 12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
5 13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000
6 1	17.042	17.921	-0.000	17.042	17.921	0.00000
6 2	10.002	6.477	-0.000	10.002	6.477	0.00000

COORDENADAS X Y	SIGMA X (KG/CM2)	SIGMA Y (KG/CM2)	TAU XY (KG/CM2)	SIGMA 1 (KG/CM2)	SIGMA 2 (KG/CM2)	ANGULO (RADIANES)
6 4	2.545	2.775	2.036	4.911	0.716	0.732750
6 5	-6.509	4.081	5.299	6.277	-3.705	0.192502
6 6	-9.746	15.965	-2.927	12.274	-10.075	-0.112028
6 7	-1.355	-2.331	-0.707	4.831	-0.745259	0.376143
6 8	-1.658	0.517	-0.943	0.839	-1.370	-0.376143
6 9	1.360	2.680	-0.692	3.702	0.138	-0.625669
6 10	0.879	5.142	-2.659	6.424	-0.397	-0.447160
6 11	-0.775	7.892	1.149	9.060	-0.129464	0.129464
6 12	2.684	10.338	6.786	12.639	0.193	0.64143
6 13	9.406	12.924	0.000	12.924	9.406	0.000000
7 2	14.369	7.531	2.578	15.412	6.422	-0.349316
7 3	11.177	2.912	-1.867	12.706	1.159	0.374511
7 4	6.767	-4.907	-5.716	9.116	-7.254	0.348329
7 5	2.480	-27.774	-9.927	5.446	-20.740	0.290372
7 6	-44.907	-78.774	-8.403	-62.848	-80.835	-0.234966
7 7	21.730	-43.994	5.143	22.724	-44.358	-0.121467
7 8	-2.944	-3.950	12.595	9.101	-16.055	-0.765454
7 9	1.188	5.296	3.835	7.593	-1.109	0.539547
7 10	-0.674	11.527	3.276	14.225	-1.222	0.218339
7 11	8.107	21.624	3.250	24.281	7.454	0.193501
7 12	0.999	16.740	3.343	17.431	0.303	0.202192
7 13	-1.877	12.923	0.000	12.923	-1.877	0.000000
8 2	-9.061	-5.877	5.143	-2.085	-12.952	0.635509
8 3	9.136	9.143	-1.244	10.134	7.897	-0.784723
8 4	-4.055	17.064	-5.730	18.518	-5.509	-0.245572
8 5	-16.688	39.481	-5.041	40.933	-17.749	-0.133866
8 6	5.717	98.474	2.566	93.545	5.642	0.027231
8 7	50.117	100.747	8.360	102.592	45.772	0.159476
8 8	-35.188	24.516	3.663	24.740	-35.412	0.061052
8 9	0.000	15.717	4.102	16.724	-1.004	0.240534
8 10	0.000	6.107	3.922	9.672	-1.592	0.334535
8 11	0.000	0.000	2.027	2.027	-2.027	1.570396
8 12	2.383	-3.767	-0.250	2.409	-0.026	0.103274
8 13	-4.746	-182.318	0.000	-3.767	-4.746	0.000000
9 2	0.000	0.000	52.253	15.714	-156.231	-0.260242
9 3	0.000	8.572	52.253	56.714	-48.142	0.744480
9 4	0.000	0.000	0.000	8.726	-0.000	0.000000
9 5	0.000	0.771	0.000	0.771	-0.000	0.000000
9 6	0.000	-40.519	0.000	0.000	-0.000	-0.000000
9 7	0.000	-70.377	0.000	-0.000	-70.377	-0.000000
9 8	0.000	0.000	-48.916	48.916	-48.916	1.570396
9 9	0.000	-195.664	-48.916	11.547	-207.211	0.231824
9 10	0.000	-195.664	0.000	0.000	-195.664	0.000000
9 11	0.000	-195.664	0.000	0.000	-195.664	0.000000
9 12	0.000	-195.664	-0.596	0.002	-195.664	0.003045
9 13	0.000	-193.281	0.000	-0.000	-193.281	0.000000

# *Bibliografía*

- 1.- S. TIMOSHENKO - J.N. GOODIER  
*Teoría de la Elasticidad*  
URMO, S.A. de Ediciones  
Bilbao, España. 1975.
- 2.- M. FILONENKO - M. BORDICH  
*Theory of Elasticity*  
MIR Publishers  
Moscow. 1968.
- 3.- VLADIMIR G. REKACH  
*Problemas de la Teoría de la Elasticidad*  
Editorial MIR  
Moscu. 1978.
- 4.- F.W. HANNA - R.C. KENNEDY  
*The Design of Dams*  
Mc. Graw - Hill Book Company, Inc.  
New York and London. 1931.
- 5.- U.S. BUREAU OF RECLAMATIONS  
*Diseño de Presas Pequeñas*  
Compañía Editorial Continental, S.A.  
México. 1967
- 6.- R.J. MARSAL - N.D. RESENDIZ  
*Presas de Tierra y Enrocamiento*  
Editorial LIMUSA  
México. 1975.

- 7.- OSCAR VEGA ROLDAN  
*Presas de Almacenamiento y Derivación*  
División de Estudios Superiores.- Instituto de Ingeniería  
UNAM. Facultad de Ingeniería  
México. 1981.
- 8.- A. KLEIMAN-E.K. DE KLEIMAN  
*Matrices*  
Editorial LIMUSA  
México. 1979
- 9.- OSCAR VEGA ROLDAN  
*Presas de Contrafuertes (artículo)*  
C.I.E.P.S., S.C. Ingenieros y Consultores  
México.
- 10.- CARLOS ESPINOSA GONZALEZ  
*Análisis Preliminar de Esfuerzos*  
*en Presas de Contrafuertes.*  
(Tesis Profesional)  
UNAM Facultad de Ingeniería  
México. 1977.