Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

LA PROGRAMACION LINEAL APLICADA A LA TOMA DE DECISIONES EN LA PLANEACION DE SISTEMAS DE RIEGO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

I N G E N I E R O C I V I L

P R E S E N T A:

JAVIER RIVERA ROMERO

MEXICO, D. F. 1982

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-1-432 T. E.

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA

Señor JAVIER RIVERA ROMERO,
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Francisco Cánovas Corral, para que lo desarrolle como tesis para su Examen Profesional de la carrera de Ingeniero CIVIL.

"LA PROGRAMACION LINEAL APLICADA A LA TOMA DE DECISIONES EN LA PLANEACION DE SISTEMAS DE RIEGO"

1. Introducción
2. Antecedentes de la programación lineal.
3. Aplicación y usos de la programación lineal.
4. Relación de la programación lineal con la administración.
5. Conclusiones.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, 30 de septiembre 1982
EL DIRECTOR

ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

JJE/OJLH/ser

I N D I C E

CAPITULO I

INTRODUCCION

I. INTRODUCCION

ANTECEDENTES

En la actualidad, en México y en el mundo, existen infinidad de problemas que requieren de una solución rápida y eficaz.

En nuestro país, se puede decir sin temor a equivocarse, que los problemas más críticos son la situación demográfica y la situación de la producción de alimentos; para esta última se debe incrementar la producción. Esta situación se puede dividir en tres partes:

1. Aumentar el área de producción
2. Aumentar el rendimiento por unidad de superficie
3. Buscar otras fuentes; como productos del mar, insectos, derivados del petróleo, etc.

En el primer punto, se cuenta con un márgen de incrementar el área de producción ya que la excedencia de cierto límite afectaría la ecología, deterioro de suelos, etc., además hay otras limitantes como la distribución de las áreas agrícolas por condiciones topográficas, climáticas, mala distribución de la precipitación, temperaturas, etc., la falta de tecnología y crédito, por lo cual no es posible incrementar área a la producción tanto de riego como de temporal.

En el segundo punto, para lograrlo deben aplicarse eficientemente los insumos de la producción como agua, suelo, productos agroquímicos, mejores variedades, nuevas técnicas y más prácticas que permitan obtener mejor calidad y cantidad de la producción.

En el tercer punto, también hay limitantes por la falta de investigación e infraestructura que permitan obtener alimentos; por lo pronto, es apremiante obtener alimentos a base de la producción agrícola.

Por la anterior razón, resulta necesario el conocer, analizar, administrar y desarrollar los sistemas de riego, con la finalidad de mejorar las condiciones agrícolas del país. Para ésto, es necesario planear, organizar, dirigir y controlar, de una manera racional, los recursos inherentes a los sistemas de riego. En este trabajo, se trata de dar los elementos necesarios de programación lineal para una mejor planeación en lo referente a cualquier sistema de riego, para lo cual es necesario hacer un buen uso de la toma de decisiones; la programación lineal, en general, es de gran ayuda en este campo.

Este trabajo, como una introducción a la programación lineal, fue elaborado con el fin de fincar las bases y ampliar, en algunos casos, los elementos necesarios de la administración científica, que en la materia de Administración en Ingeniería se ven someramente, como son los conceptos de Investigación de Operaciones, Planeación y Programación Lineal, entre otros.

OBJETIVOS

En el presente trabajo, se pretende dar las nociones fundamentales de programación lineal, como una herramienta importante para el agricultor en lo referente a una mejor administración de sus recursos para, de esta forma, aumentar su producción y por lo tanto, su desarrollo agrícola.

Debido a lo anterior, este trabajo se dividió en cinco capítulos; en el primero, se trata de dar una visión panorámica del trabajo, incluyendo los antecedentes, objetivos y una descripción de fenómenos relacionados con la programación lineal.

En el capítulo dos, se dan las características principales de los programas lineales (como son: su estructura matemática, la formulación de este tipo de programas, etc.); algunos aspectos relacionados con la Investigación de Operaciones, Administración y La Toma de decisiones; por último se dan los elementos de un método de programación lineal (el método Simplex revisado) que se está utilizando cada vez más en los programas en paquete para computadora.

El planteamiento y formulación de algunos tipos de problemas que pueden ser resueltos por medio del método Simplex de programación lineal, se toca en el tercer capítulo. Además, se dá un ejemplo de aplicación enfocado a la agricultura, en el cual, se trata de aclarar, geométricamente, el proceso de cálculo y se dá una descripción del Método Simplex.

El capítulo cuatro, relaciona la programación lineal con la administración. Ya que la programación lineal es una técnica de la Investigación de Operaciones, con la cual podemos asignar recursos óptimamente y la Administración, que (íntimamente ligada a la Investigación de Operaciones) maneja organizaciones y éstas a su vez, son un tipo de sistema que tiene características de contenido, estructura, comunicaciones y control que está sujeto a la manipulación administrativa, resulta obvio que, necesariamente, exista una relación entre estas dos ciencias. Lo anterior es lo que se discute en este capítulo.

Por último, en el capítulo cinco, se dan las conclusiones de este trabajo con algunas recomendaciones al respecto y se trata de ampliar, con un anexo, algunas definiciones, hechos y cifras de la agricultura en México que, a mi criterio, es importante conocer.

CAPITULO II

ANTECEDENTES DE LA PROGRAMACION LINEAL

ASPECTO GENERAL

LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Por lo general, se piensa que la investigación de operaciones es de origen reciente; sin embargo, ésta se remonta a muchos años atrás. El hombre, en todos los diferentes ámbitos de su actividad, siempre ha querido lograr resultados óptimos. Este afán se incrementó notablemente en la época posterior a la Segunda Guerra Mundial, como consecuencia de los avances matemáticos y tecnológicos surgidos inicialmente de la imperiosa necesidad de aprovechar de la mejor manera posible los recursos humanos y materiales destinados a fines bélicos. Posteriormente, en épocas de paz, este afán se encauzó a las diferentes actividades productivas del hombre.

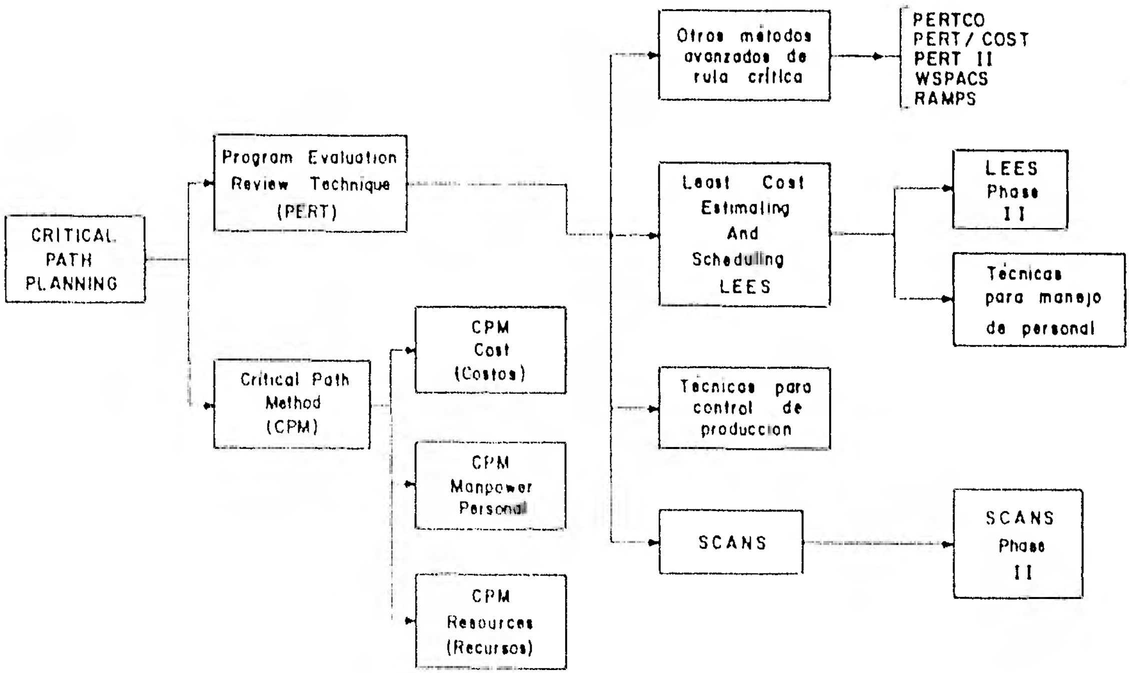
A principios de nuestro siglo se manifestó un creciente interés en problemas cuya solución requerían utilizar varias disciplinas tales como la economía, la estadística, la lógica y las matemáticas. Sin embargo, la falta de equipo apropiado, como lo son las computadoras electrónicas, impidieron conjugar las varias disciplinas en una sola; por otra parte, la Segunda Guerra Mundial, sin embargo, creó la necesidad de utilizar óptimamente tanto los recursos humanos como materiales y ésto, junto con el advenimiento de las computadoras electrónicas, brindó la oportunidad de que la investigación de operaciones se estableciera como una disciplina independiente, aunque basada en las matemáticas modernas. Atraído por el éxito obtenido, el mundo industrial, después de la guerra inició la aplicación de esas técnicas en la resolución de sus ya complejos problemas técnicos y administrativos.

Así pues, los investigadores, ya sin la presión del factor tiempo, continuaron sus esfuerzos por desarrollar y crear técnicas y procedimientos más numerosos. Por ejemplo, en 1947 G. Dantzig y asociados desarrollaron el concepto de programación lineal; en 1955, Bellman presentó la técnica de programación dinámica; en 1955, Dantzing, Fulkerson y Johnson desarrollaron la programación entera, mejorada más tarde por Gomory, Land, Doig y Everreth. Más adelante aparecieron la programación geométrica, los métodos de gradiente, las demás técnicas de programación no lineal, la Teoría de Colas, el Critical Path Method (CPM), la técnica Program Evaluation Review Technique (PERT). En la *fig. (1)* se ilustra el desarrollo de los principales tipos de modelos de red para planeación y control de actividades conocidas hasta la fecha. Aquí se puede palpar que el hombre se encuentra en el apogeo de la revolución técnico-científica-administrativa. Auxiliado por las máquinas, puede ahora someter las fuerzas materiales en beneficio de la humanidad, con una planeación correcta y cuidadosamente calculada.

La primera pregunta que surge es: ¿Qué es la investigación de operaciones?. Esta pregunta puede contestarse con la siguiente definición: *La investigación de operaciones es un conjunto de métodos, técnicas y herramientas científicas que se aplican*

Fig. 1

EVOLUCION DE MODELOS Y METODOS DE REDES PARA CONTROL DE PROYECTOS



a problemas inherentes a la operación de sistemas hombre-máquina, de manera que proporcionen a quienes dirigen dichos sistemas, soluciones óptimas a dichos problemas.

También cabe definir la investigación de operaciones como: *la ciencia y el arte de seleccionar, entre varias alternativas, la que permita el logro óptimo de un objetivo determinado, a la vez que se optimiza la utilización de los recursos humanos y materiales con que se cuenta.*

Las definiciones anteriores abarcan todo un conjunto de funciones y actividades, entre los cuales destacan dos: *la planeación y la operación*, de ahí su nombre de investigación de operaciones.

Sin embargo, antes de estudiar la utilización de la disciplina misma, se debe analizar su definición y los conceptos en ella incluídos. Así tenemos que por *método* se entiende un cierto camino utilizado para alcanzar un fin propuesto de antemano como tal. *Técnica* es una habilidad mediante la cual, siguiendo ciertas reglas, se hace algo. *Herramienta* es un instrumento utilizado para llevar a cabo una operación determinada, y *sistema* es un conjunto de elementos relacionados entre sí y armónicamente conjugados. Ampliando este concepto, se podría entender que un sistema es la disposición de las diferentes partes de un arte ó una ciencia en un orden en que todas ellas se sostienen mutuamente, y en que las últimas se explican por las primeras.

Igualmente, para comprender el enfoque práctico de la inves tigación de operaciones dentro de una empresa, considerando a ésta como un sistema hombre-máquina, se puede conceptuar a la empresa como una institución socioeconómica en que el esfuerzo humano, el capital y el conocimiento directivo se combinan con el objeto de alcanzar el bien común equitativo.

La planeación

Como ya se dijo, la investigación de operaciones lleva implícita la planeación, por lo tanto es menester su análisis.

La planeación es una de las funciones básicas de la administración científica, que establece las actividades necesarias para lograr los objetivos escogidos.

La planeación incluye el determinar y establecer los objetivos, las políticas, los programas, las relaciones de organización, los procedimientos y los recursos humanos y financieros, para toda empresa. Cabe aclarar que el proceso de designar los objetivos es siempre la etapa inicial de la planeación.

La planeación se divide en dos subfunciones principales, a saber:

1. La planeación administrativa
2. La planeación operativa

La planeación administrativa ó estratégica

Esta subfunción administrativa tiene por objeto principal sentar las bases de acción, dentro de un período de tiempo más ó menos largo, para la organización y sus diversos componentes. Puesto que la planeación administrativa se apoya principalmente en la previsión, su exactitud varía inversamente a la magnitud de período de tiempo que dicha planeación abarca. Por ésto, la planeación administrativa debe hacerse en términos generales, nunca detallados, debiendo además ser flexible para permitir modificaciones posteriores que la adapten a los cambios que sufran las condiciones originales. La planeación administrativa es realmente una planeación a largo plazo, y por lo tanto debe ser dinámica.

La planeación operativa ó táctica

Esta subfunción tiene como objeto principal sentar las bases de acción, dentro de un período más ó menos corto, para la ejecución de proyectos ó trabajos específicos, dentro de un marco de condiciones estático. Puesto que la planeación operativa es a corto plazo y no depende tanto de la previsión, es mucho más exacta que la planeación administrativa. Por ésto, la planeación operativa debe hacerse detalladamente con ayuda de todas las técnicas posibles, inclusive con la ayuda de especialistas de "staff", todo con el fin de garantizar el logro de objetivos escogidos.

El proceso de planeación

Es evidente que toda planeación requiere trabajo, conocimientos, esfuerzo mental y algo más. Las materias primas de la planeación son el trabajo, el esfuerzo mental, los conocimientos tanto técnicos como humanos y de la empresa por planear, más algo fuera del control humano, la inteligencia.

El proceso de planeación comprende las actividades mentales que se señalan en la siguiente fig. (2).

De la figura anterior, se desprende que el proceso de planeación es en esencia una síntesis inteligente del proceso del conocimiento presente y de la experiencia del pasado.

Asimismo, la planeación siempre implica seleccionar un curso de acción de entre un conjunto de alternativas de acción, para lograr un objetivo. Es decir, no se puede llegar a la solución de un problema a base de planeación a menos que quien toma las decisiones tenga la capacidad suficiente para seleccionar inteligentemente entre un conjunto de diferentes alternativas de acción.

El proceso de planeación-decisión se basa fundamentalmente en los dos elementos siguientes:

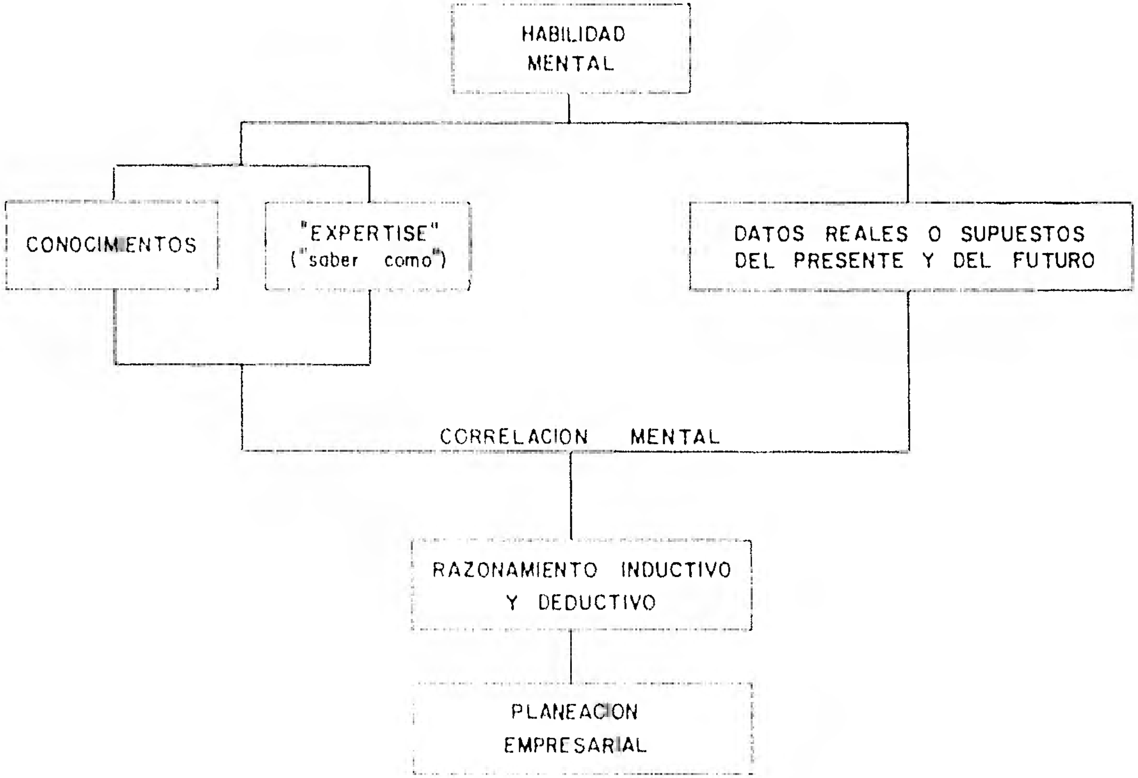
1. Conocimientos
2. Expertise ó "Know-how" ("saber cómo")

Aquí los conocimientos se relacionan con diversos cuerpos de principios, de puntos de vista, de métodos y técnicas de solución, y además con toda clase de información pertinente a ciertas clases generales de problemas.

El expertise ó "Know-how" ("saber cómo") se refiere a cono

Fig 2

PROCESO MENTAL DE PLANEACION



cimientos y habilidades, unos naturales y otras adquiridas a través de la experiencia, que incrementan la capacidad mental para poder resolver las dificultades específicas afrontadas dentro de ciertas clases generales de problemas. Es obvio que el expertise ó "Know-how" no se pueda adquirir de los libros, sino sólo a través de la experiencia por quien tiene esa capacidad específica.

Cabe hacer hincapié que al directivo ó al administrador se le paga por tomar decisiones, y éstas deberán ser las acertadas si quiere conservar su puesto.

La toma de decisiones

Una toma de decisión es la resolución de una elección alternativa y conflictiva; sin embargo, la toma de decisiones no necesariamente implica ni acción, ni idea de futuro.

La toma de decisiones, desde luego, es necesaria en cada etapa del proceso de planeación y es, por lo tanto, una función entrañablemente relacionada con el proceso de planeación en sí. Lo inverso también es posible, ya que se puede hacer uso de una planeación para llegar a una toma de decisiones. Debe tenerse en cuenta que decisiones y planes no son lo mismo.

En la toma de decisiones se pueden presentar tres clases de decisiones, de acuerdo con la naturaleza de las mismas. Estas tres clases son las siguientes:

1. Decisiones bajo certeza
2. Decisiones bajo riesgo
3. Decisiones bajo incertidumbre

I. Elementos de la toma de decisiones

En toda toma de decisiones se pueden distinguir los siguientes elementos:

1. Un conjunto de dos ó más alternativas que representan el rango de las diferentes decisiones que se pueden tomar.

2. Un conjunto de dos ó mas alternativas que se consideran al tomar una decisión. Esto no necesariamente es igual al elemento anterior.

3. Un conjunto de dos ó más estados futuros que representan los posibles resultados que pueden lograrse de la decisión que se tome en la situación planteada.

4. Una función de pérdidas ó ganancias que representa el valor subjetivo de la utilidad que se dé a cada uno de los estados futuros de la situación planteada.

5. Un conjunto de informaciones ó datos que reflejan el conocimiento sobre el posible resultado de las decisiones a tomar.

II. Clases de decisiones

De acuerdo con las condiciones bajo las cuales se toman las decisiones, éstas se clasifican en la forma siguiente:

1. Si se conocen y se consideran todas las alternativas posibles, y si además se conocen todos los estados futuros de la situación como consecuencia de la decisión, se dice que se toma una *decisión bajo certeza.*

2. Si no se conocen los estados futuros de la situación, pero se conoce la probabilidad de que cada uno de ellos se presente, se dice que se toma una *decisión bajo riesgo.*

3. Si no se conocen los estados futuros de la situación, pero se conoce la probabilidad, calculada ésta objetivamente de cada uno de ellos se presente, se dice que se toma una *decisión bajo riesgo objetivo.*

4. Si no se conocen los estados futuros de la situación, pero se conoce la probabilidad, calculada ésta subjetivamente, de que se presente cada uno de ellos, se dice que se toma una *decisión bajo riesgo subjetivo.*

5. Por último, si no se conoce la probabilidad, ni objetiva ni subjetivamente, se dice que se toma una

decisión bajo incertidumbre.

III. La probabilidad.

El concepto de probabilidad tiene varias interpretaciones que varían desde la clásica hasta la empírica o subjetiva. Sin embargo, para la investigación de operaciones, sólo dos tienen importancia: *la objetiva y la subjetiva*, que a continuación se definen:

1. La probabilidad *objetiva* es el cociente entre el número de eventos simples que componen un conjunto de eventos cualesquiera, y el número de eventos simples que constituyen el espacio total de eventos generalmente conocido como la *población o universo*.

2. La *probabilidad subjetiva* es la medida del grado de confianza que una persona en particular tiene en la verdad de una proposición, de un juicio ó de una predicción en particular.

II.A FORMULACION GENERAL DE LOS PROGRAMAS LINEALES

La programación lineal es una de las más importantes técnicas de la investigación de operaciones, relacionada con el problema de planear un complejo conjunto de actividades y recursos económicos interdependientes, con miras a lograr un cierto resultado óptimo.

Una de las características comunes a este tipo de problemas es el estar sujetos a un conjunto de restricciones ocasionadas por las condiciones propias del problema; otra de sus características comunes es que dichas restricciones pueden ser satisfechas por un gran número de soluciones posibles o factibles, por lo cual la selección de la solución óptima está sujeta, en cierto grado, a los objetivos predeterminados que se persiguen. Igualmente, cabe asentar que la condición común de este tipo de problemas es la necesidad de asignar recursos limitados o finitos a diversas actividades.

Los problemas que pueden resolverse con ayuda de la programación lineal abarcan una extensísima gama de situaciones que pueden ir desde asignar capacidades de producción ó la fabricación de diferentes artículos, hasta asignar combustible para bombarderos destinados a una misión específica; desde la selección de inversiones hasta la planeación de rutas marítimas ó terrestres; ó desde programar una producción hasta solucionar juegos de salón.

El nombre de programación lineal implica con cierta claridad que se trata de "planear" actividades representables bajo la forma de funciones "lineales", ya que en este caso el término "programación" es sinónimo de "planeación" y el término "lineal" implica el uso de ecuaciones o desigualdades de primer grado. Entonces, el nombre de programación lineal implica la planeación de actividades en orden a obtener un resultado óp-- - timo, es decir, seleccionar entre varias alternativas, un curso de acción que resulte en el logro de los objetivos preferidos.

El problema típico de programación lineal, en general, surge por un fenómeno económico ó de organización, en el cual interviene un cierto número de variables que sólo cobran significado cuando son positivas ó nulas. Estas variables están además ligadas entre sí por relaciones lineales que forman un sistema de ecuaciones o desigualdades conocidas como las restricciones del fenómeno. Por último, debe existir una función lineal, generalmente representada como (Z), de esas variables, que constituye la función económica ó función objetivo: la que se propone optimizar, es decir, maximizar o minimizar, según el caso.

Los requisitos que a continuación se enumeran limitan la utilidad en la vida real de la programación lineal:

1. Proporcionalidad
2. Aditividad
3. Divisibilidad
4. Naturaleza determinística

Definición: *Un programa lineal es aquél en que el modelo matemático ó descripción de un problema determinado puede ser establecido usando relaciones lineales.*

Un programa lineal consta de una función objetivo lineal, un conjunto de desigualdades lineales restrictivas y otro conjunto de condiciones de no negatividad.

Un programa lineal generalizado para n-variables, puede exponerse en tres formas alternativas:

A. *Forma completa (sin abreviaciones)*

Cuando se escribe de este modo un programa lineal (optimización) de n-variables, el cual está sujeto a m-restricciones toma la siguiente forma:

Maximice la función lineal (función objetivo) siguiente:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

sujeta a las restricciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

y a las condiciones de no negatividad:

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

$$\vdots$$

$$X_n \geq 0$$

En este caso en que se trata de maximizar la función objetivo, Z representa el maximando, es decir la función objeto a ser maximizada. Las variables de elección se denotan por X_j (siendo $j = 1, 2, \ldots, n$), y sus coeficientes en la función objetivo, por Cj (con $j = 1, 2, \ldots, n$), que es un conjunto de constantes dadas.

Los símbolos b_i (para $i = 1, 2, \ldots, n$) - otro conjunto formado de constantes - representan, por otra parte, las "condiciones" impuestas al programa. Hemos escrito las m restricciones como desigualdades del tipo $\leq$, lo que no implica ninguna pérdida de generalidad. Nótese en particular, que en caso de que aparezcan restricciones de la forma $\geq$ siempre podemos convertirlas al tipo $\leq$, simplemente multiplicando ambos miembros por -1. Finalmente los coeficientes de las variables de elección de las restricciones se denotan por a_{ij}, sirviendo el doble subíndice para señalar la ubicación específica de cada coeficiente. Dado que hay m restricciones para n variables, entonces, m no debe ser necesariamente igual a n, y además, se debe notar que los coeficientes a_{ij} formarán una matríz rectangular de dimensión $m \times n$.

Similarmente podemos escribir un programa de minimización en forma completa:

Minimizar:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

sujeto a:

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_n
\end{array}$$

y a las condiciones de no negatividad:

$$\begin{array}{l}
X_1 \geq 0 \\
X_2 \geq 0 \\
\vdots \\
X_n \geq 0
\end{array}$$

Es claro que estas condiciones las podemos compactar de la forma siguiente: $X_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$.

En este caso, la función objetivo ($Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n$) representa al minimando, es decir, la función objeto a ser minimizada. Nuevamente el término C_j en la función objetivo representa un conjunto de coeficientes constantes dados, del mismo modo que b_i en las restricciones son constantes, pero aquí el símbolo b expresará requerimientos en lugar de condiciones.

Los símbolos para las variables de elección y los coeficientes de las restricciones no han sido alternados. No importando que las restricciones aparecen ahora como desigualdades del tipo $\geq$.

B. *Notación* $\sum$ (*sigma*)

Una forma para compactar los programas lineales es expresándolo en notación sigma (ó notación suma).

Maximizar:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_jX_j$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

y: $\quad x_j \geq 0 \quad$ para $\quad i = 1, 2, \ldots, n$

y, en forma similar;

Minimizar:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

y: $\quad x_j \geq 0 \quad$ para $\quad j = 1, 2, \ldots, n$

C. *Notación matricial*

Definiremos primeramente las cuatro matrices siguientes, con el único objeto de ver como puede aplicarse la notación matricial:

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \\ a_{m1}, a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

donde $\bar{c}$ y $\bar{x}$ son orden $n \times 1$ y $\bar{b}$ de orden $m \times 1$. Nótese que $\bar{c}$, $\bar{x}$ y $\bar{b}$ son vectores columnas. La matríz A es de orden $m \times n$.

Después de estas definiciones podemos expresar la función objetivo mediante la ecuación:

$$Z = \underset{(1 \times n)}{\bar{C}} \cdot \underset{(n \times 1)}{\bar{X}}$$

Obsérvese que el vector producto $\bar{C} \cdot \bar{X}$ es de $|X|$ y, por lo tanto, representa un escalar.

En el caso de las m restricciones se observa especialmente la ventaja de la notación matricial, ya que el conjunto completo de estas restricciones puede resumirse en tan sólo una desigualdad de la siguiente forma:

$$\underset{(m \times n)}{A} \quad \underset{(n \times 1)}{\bar{x}} \leq \underset{(m \times 1)}{\bar{b}}$$

El signo de desigualdad significa "desigualdad elemento por elemento", es decir que, para cada i, la i-ésima fila de la matríz $A\bar{x}$ debe ser menor ó igual que la i-ésima fila de la matríz $\bar{b}$. Análogamente podemos expresar las condiciones de no negatividad mediante la sencilla desigualdad:

$$\underset{(n \times 1)}{\bar{X}} \geq \underset{(n \times 1)}{0}$$

En pocas palabras podemos decir que, un programa lineal puede expresarse concisamente en la forma siguiente:

Maximizar:

$$Z = \bar{C} \quad \bar{X}$$

sujeto a:

$$A\bar{x} \leq \bar{b}$$

y: $\bar{x} \geq \bar{0}$

Similarmente un programa de minimización puede expresarse matricialmente como:

Minimizar:

$$Z = \bar{C} \quad \bar{X}$$

sujeto a:

$$A\bar{x} \geq \bar{b}$$

y: $\bar{x} \geq \bar{0}$

El resultado de todos los problemas de programación lineal es alguno de los siguientes.

1. No hay solución en términos de valores no negativos de las variables.

2. Hay una solución no negativa que resulta en un valor infinito para la función del objetivo.

3. Hay una solución no negativa que resulta en un valor finito para la función objetivo.

Usualmente, un problema de programación lineal que describa un problema de programación práctico y válido, tiene una solución no negativa con un valor finito correspondiente para la función del objetivo.

II.B METODO SIMPLEX REVISADO

Este método fue desarrollado por Dantzing, Orchard-Hays y otros; resuelve los problemas de optimización en forma similar a como lo lleva a cabo el Simplex. Dada una solución básica factible (punto extremo), ésta se cambia por otra hasta obtener la óptima. Lo que suministra el adjetivo "revisado" es la manera en que se transforma la tabla Simplex. La diferencia principal entre el método simplex original y el procedimiento revisado, es que en el primero transformamos todos los elementos de la tabla simplex por medio de fórmulas de eliminación, mientras que en el último necesitamos transformar solamente los elementos de una matríz inversa, por medio de las mismas fórmulas.

Desde su desarrollo, el procedimiento revisado, y especialmente su variación que emplea la forma producto de la inversa, han sido seleccionados para usarse en las computadoras más grandes de alta velocidad. Las dos razones para esto son:

1. Para problemas cuya matríz de coeficientes contiene un gran número de elementos cero, la cantidad total de cómputos se reduce. El procedimiento revisado siempre trata con los coeficientes originales, y debido a que pueden ser desarrollados para multiplicar solamente elementos no iguales a cero, el tiempo de proceso total se reduce considerablemente. También, los elementos originales no iguales a cero pueden ser almacenados compactamente en

la memoria de la computadora. El procedimiento simplex original transforma los elementos cero a elementos no iguales a cero, conforme progresa el cómputo. El número total de cálculos en el método revisado es, en general, menor que en el método original.

2. La cantidad de nueva información que requiere registrar la computadora, en general, se ve reducida, puesto que en el procedimiento revisado necesitamos registrar solamente la inversa y el vector solución, mientras que en el método original deberá registrarse la tabla simplex completa. El registro es reducido aún más, si se usa la forma producto de la inversa.

La terminación del proceso se garantiza en un número finito de pasos, ya que el número de soluciones factibles es finito. Este método además proporciona elementos suficientes para calcular la solución del problema dual.

Dada la importancia del método simplex revisado conviene describir las bases del mismo:

Considere el problema lineal

minimice

$$Z = Cx$$

$$Ax = b$$

$$X \geq 0$$

donde A es matriz $m \times n$; b, vector columna de m componentes; c, vector hilera de n componentes; y, x vector de n variables.

Suponga que la base B consiste de las primeras m columnas de A. Suponga que particionamos A, x y c como sigue:

$$A = \left[B,\ R\right]\ ;\ X^t = \left[X_B^t, X_R^t\right]\ ;\ c = \left[C_B, C_R\right]$$

Entonces el problema lineal es equivalente a:

minimice:

$$Z = C_B X_B + C_R X_R$$

$$BX_B + RX_R = b$$

$$X_B \geq 0\ ;\ X_R \geq 0$$

y una solución factible básica asociada con la base B es $X^t = (X_B, X_R) = (B^{-1}b, 0)$ con valor de la función objetivo $Z_o = C_B X_B = C_B B^{-1} b$.

Sin embargo, para valores de $X_R \neq 0$, el vector X_B está dado por $X_B = B^{-1}b - B^{-1}RX_R$. De donde, sustituyendo X_B en Z tenemos

$$Z = C_B\ (B^{-1}b - B^{-1}RX_R) + C_R X_R$$

$$= C_B B^{-1} b + (C_R - C_B B^{-1} R)\ X_R$$

$$= Zo + (C_R - C_B B^{-1} R)\ X_R$$

y se observa que, si el vector de costos relativos o reducidos

$$\bar{C}_R = C_R - C_B B^{-1} R \geq 0$$

entonces

$$Z_0 \leq C_B B^{-1} b + (C_R - C_B B^{-1} R)\, X_R = Z$$

y por lo tanto, la solución básica original $(X_B, 0)$ es óptima. Este resultado se conoce como: Principio de Optimalidad.

Al expresar el valor de la función objetivo en términos de las variables no básicas X_R, podemos determinar si alguna de ellas debe entrar a la base, ó, si el proceso de búsqueda de una solución óptima a llegado a su fin. Esto es, si la i-ésima componente del vector de costos relativos es $\bar{C}_{R_j} < 0$. De aquí $Z_0 > Z$ y por lo tanto, la solución básica anterior no es la mínima y debe considerarse una nueva solución donde X_j esté en la base.

Descripción del Método Simplex Revisado

Suponga que B es una base del problema lineal y que la solución $X = (X_B, 0) = (B^{-1} b, 0)$ es una solución factible.

1. Calcule $\lambda = C_B B^{-1}$. Calcule el vector de costos relativos $\bar{C}_R - \lambda R$. Si $\bar{C}_R \geq 0$ la solución es óptima.

2. Determine un vector a_j que entre a la base. Este será aquél con costo relativo más negativo. Calcu

le $y = B^{-1}a_j$ que expresa el vector a_j en términos de la base actual.

3. Determine el vector que sale de la base, ésto es, si $\hat{b} = B^{-1}b$, $y = B^{-1}a_j$ determine el índice k tal que : $\dfrac{\hat{b}_k}{y_k} = min\ \{\hat{b}_i \ / \ y_i \ ; \text{ si } y > 0\}$

   donde $\hat{b}_i(Y_i)$ denota el i-ésima elemento del vector $\hat{b}(Y)$. Finalmente, actualice la base (y su inversa) y regrese a 1.

Ejemplo:

Considere el problema lineal

$$\text{minimice } Z = -20X_1 - 10X_2 - X_3$$

sujeto a:

$$3X_1 + 2X_2 + 10X_3 \leq 10$$

$$2X_1 + 4X_2 + 20X_3 \leq 15$$

$$X_1 \geq 0; \ X_2 \geq 0; \ X_3 \geq 0$$

Para resolver este problema usando el método simplex revisando, se introducen variables de holgura y se obtiene:

$$\text{minimice } Z = -20X_1 - 10X_2 - X_3$$

$$3X_1 + 2X_2 + 10X_3 + X_4 = 10$$

$$2X_1 + 4X_2 + 20X_3 + X_5 = 15$$

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ X_3 \geq 0;\ X_4 \geq 0;\ X_5 \geq 0$$

cuya tabla inicial es:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b
3	2	10	1	0	10
2	4	20	0	1	15
-20	-10	-1	0	0	0

Una base factible inicial puede identificarse inmediantamente de esta tabla simplex. Por lo tanto:

Iteración 1. $B = \left[a_4,\ a5\right]$ y $C_B = \left[0,\ 0\right]$

Asimismo

	B^{-1}		$B^{-1}b$	$B^{-1}a_1$
X_4	1	0	10	3
X 5	0	1	15	2

Entonces $\lambda = C_B B^{-1} = \left[0,\ 0\right]$ y puesto que $R = \left[a_1,\ a_2,\ a_3\right]$ se tiene que $C_R =$ -20, -10, -1 . Asimismo,

$$\bar{C}_R = C_R - \lambda R = \left[-20,\ -10,\ -1\right]$$

Seleccionando al vector a_1 para entrar a la base se tiene de la comparación de $B^{-1}a$, con $B^{-1}b$ que el vector que sale de la base es a_4, pues $min\ \{10/3,\ 15/2\} = 10/3$

Iteración 2. Usando $B = a_1, a_5$ se tiene que $C_B = -20,0$ y podemos determinar la inversa de la base B, usando el elemento pivote indicado en la iteración anterior.

	B^{-1}		$B^{-1}b$
X_1	1/3	0	10/3
X_5	-2/3	1	25/3

de donde $\lambda = C_B B^{-1} = \left[-20/3,\ 0\right]$ y dado que $R = \left[a_4,\ a_2,\ a_3\right]$ se tiene que $C_R = \left[0,\ -10,\ -1\right]$. Asimismo,

$$\bar{C}_R = C_R - \lambda R = \left[20/3,\ 10/3,\ 197/3\right]$$

Puesto que $\bar{C}_R \geq 0$, la solución óptima es $X_1^* = 10/3$; - - $X_5^* = 25/3$; $X_2^* = X_3^* = X_4^* = 0$, y la función objetivo es

$Z^* = -200/3$

CAPITULO III

APLICACION Y USOS DE LA PROGRAMACION LINEAL

III.A PLANTEAMIENTO Y FORMULACION DE PROBLEMAS

La programación lineal como una herramienta científica, es utilizada en una amplia diversidad de campos ó procesos. Puede ser utilizada, la programación lineal, en procesos ya sea de asignación, de producción y teoría de espera, de inventarios, de reposición, de competencia, combinados, además de otros procesos de reciente creación.

A continuación se describen algunas de las características de estos procesos:

Procesos de asignación. Este tipo de procesos se presenta cuando ocurren las siguientes situaciones:

1. Cuando el proceso se compone de varias operaciones diferentes y existen varias alternativas en la manera de llevarlas a cabo.

2. Cuando no hay suficientes recursos ó equipo para llevar a cabo cada actividad en la forma más eficiente.

La solución a este tipo de problemas entraña determinar la combinación óptima entre las actividades y los recursos disponibles. Si una de ellas se especifica, entonces el problema es determinar la combinación de la otra que proporcione máxima eficiencia.

Procesos de producción y de línea de espera. Este tipo de proceso entraña la llegada de unidades que requieran algún servi_ cio a uno ó varios equipos de servicios.

Sólo en pocas ocasiones el problema requiere determinar el tiempo de espera de las unidades que van a servicio, y el de los equipos de servicio.

La solución de este tipo de problemas es determinar los siguientes datos, de forma tal que se minimicen los costos de las diferentes operaciones:

1. El control de la llegada de las unidades que requieren servicio.

2. El número de equipo de servicio requerido.

3. La organización entre las diferentes operaciones de los equipos de servicio.

Procesos de inventarios. En la investigación de operaciones, este tipo de proceso se relaciona con cualquier proceso que incluya una ó ambas de las decisiones siguientes:

a) Cuánto ordenar, producir ó comprar.

b) Cuándo hacerlo.

Estas decisiones conllevan la necesidad de lograr el equilibrio entre el costo de mantener un inventario y cualquiera de los costos siguientes:

1. Costo de lo pedido.

2. Costo de implementar la producción.

3. Costo de faltante ó de retraso.

4. Costos incurridos por cambios en nivel de producción ó de compra.

Otros procesos. Los procesos mencionados y descritos no son los únicos que existen; sin embargo, sí son algunos de los más comunes ó recurrentes. Con el tiempo y la utilización de la investigación de operaciones, se irán agrupando otros procesos incurrentes, y a la vez conociendo otros nuevos.

Cabe señalar, que la programación lineal no es la única herramienta científica ó método con que se cuenta para la resolución de los procesos mencionados. Existen actualmente otros métodos que se utilizan como son: la programación dinámica, la programación cuadrática, la teoría de "Queuing" ó de Colas, la teoría de secuencias, la teoría de equilibrio lineal, la técnica Monte Carlo, la técnica de recursos, además de otras de reciente creación.

Entre los últimos procedimientos recurrentes reconocidos figuran los siguientes:

1. Teoría de decisiones.

2. Teoría de redes.

3. Método de simulación.

4. Método de trayectoria crítica.

5. Juegos operacionales.

6. Teoría de la información.

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS

Las condiciones, según Ackoff y Sasieni, para que exista el más simple de los problemas son;

a) Debe existir por lo menos un individuo que se encuentra dentro de un marco de referencia, al cual se le puede atribuir el problema del sistema.

b) El individuo debe tener, por lo menos, un par de alternativas para resolver su problema. En caso contrario no existe el problema.

c) Deben existir, por lo menos, un par de soluciones, una de las cuales debe tener mayor aceptación que la otra en el individuo. En caso contrario no existe el problema. Esta preferencia está asociada a un cierto objetivo dentro del marco de referencia en donde se encuentra el individuo del sistema.

d) La selección de cualquiera de las soluciones debe repercutir de manera diferente en los objetivos del sistema, es decir, existe una eficiencia y/o efectividad asociada con cada solución. Estas eficiencias y/o efectividades deben ser diferentes, puesto que de lo contrario no existe un problema.

e) Por último, el individuo que toma las decisiones ignora las soluciones y/o eficiencias y/o efectividades asociadas con las soluciones del problema.

Si estas cinco situaciones existen, entonces se tiene un problema. Esta situación puede complicarse en los siguientes casos:

a) El problema recae en un grupo, no en un individuo.

b) El marco de referencia donde se encuentra el grupo, cambia en forma dinámica.

c) El número de alternativas que el grupo puede escoger es bastante grande, pero finito.

d) El grupo dentro del sistema puede tener objetivos múltiples. Peor aún, no necesariamente estos objetivos son consistentes entre sí.

e) Las alternativas que selecciona el grupo son ejecutadas por otro grupo ajeno, al cual no se le puede considerar como elemento independiente del problema.

f) Los efectos de la decisión del grupo pueden sentirse por elementos que aún siendo ajenos al sistema considerado, influyen directa ó indirectamente, favorable ó desfavorablemente hacia él (políticos, consumidores, etc.)

De acuerdo a lo que se explicó anteriormente, es indispensable remarcar los siguientes puntos:

La Investigación de Operaciones se puede utilizar en tres tipos de problemas: determinísticos, con riesgo y bajo incertidumbre.

Los problemas determinísticos son aquéllos en los que cada alternativa del problema (hay más de dos) tiene una y sólo una solución. Como hay varias alternativas, hay también varias soluciones, cada una con una diferente eficiencia y/o efectividad asociada a los objetivos del sistema. Por lo tanto existe el problema de decisión.

Los problemas con riesgo son aquéllos en los que cada alternativa del problema (hay más de dos), tiene varias soluciones. Cada solución puede ocurrir con una cierta probabilidad. La distribución de estas probabilidades se conoce ó se puede estimar.

Los problemas bajo incertidumbre son aquéllos en los - - que cada alternativa del problema (hay más de dos), tiene varias soluciones. Sin embargo, se ignora con qué probabilidades ó distribución probabilística ocurrirán estas soluciones.

En el presente trabajo, sólo se trata al primero de estos casos.

En lo que sigue, y sin apartarnos mucho del tema de este trabajo se dan varios ejemplos de aplicación y formulación de problemas de programación lineal con su respectivo planteamiento, pero sin resolverlos.* Más adelante, para terminar este apartado del capítulo se pretende introducir otro ejemplo y resolverlo por el conocido método simplex, del cual se proporciona una

---

* *Esto se hace con la idea de familiarizarse más con la forma de atacar, inicialmente, los problemas que se podrían presentar en la práctica.*

idea del funcionamiento del mismo, usando argumentos de tipo geométrico y aclarando si se quiere, un poco sobre la técnica de cómputo y sus limitantes, además de presentar algunos casos especiales que a nuestro juicio deben conocerse.

CAMPO DE APLICACIÓN

Análisis económico. Dentro de este ámbito de aplicación, las técnicas de programación lineal se han utilizado con éxito en gran cantidad de problemas económicos. Se citan algunos de ellos:

1. Problema entre varias industrias ó de relaciones interindustriales con la utilización del modelo interindustrial de Leontief.

2. Otra importante aplicación ha sido la interpretación lineal de la teoría ó política económica de la empresa, en la cual se busca encontrar un programa de producción capaz de maximizar las ganancias de la empresa.

3. Los problemas de las dietas, enfocados a tratar de determinar la combinación óptima de los elementos nutritivos que formen la dieta capaz de satisfacer las necesidades diarias mínimas, y a la vez sean la dieta con costo mínimo.

4. También mediante estas técnicas, se pueden investigar casos especiales de la teoría de localización de fabricas, ó sea la selección de lugares para plantas y almacenes, con miras a maximizar las ganancias.

Agricultura. Estas aplicaciones de la programación lineal se dividen en dos cateogrias:

a) Economía de las granjas.

b) Administración de las granjas.

La primera categoría trata de todos los efectos de la economía agrícola, ó sea está relacionada con la economía de la región, el estado ó la nación.

La segunda categoría está relacionada con la administración de granjas, ó sea, se refiere a problemas que sólo atañen a cada granja en forma individual.

Un estudio de economía de las granjas conduce a un modelo de equilibrio en el espacio, el cual difiere del modelo del - - transporte, en que los precios en cada punto de embarque varían y en que los destinos son funciones contínuas de las cantidades producidas ó retenidas localmente.

Una aplicación de las técnicas de programación lineal a un típico programa de administración agrícola es la de asignar fuentes limitadas tales como superficie, trabajo, suministro de agua, capital de trabajo, etc., de tal forma para maximizar las entradas.

Al final de este capítulo (*inciso c*), se resuelve un problema referente a este tema.

Aplicación industrial. Esta aplicación difiere según el tipo de industria de que se trate:

1. Industria química. Las aplicaciones dentro de la química han sido sobre todo en las compras, en administración de inventarios, etc.

2. Aviación comercial. Poco se ha hecho en este campo con el empleo de la programación lineal, exclusivamente conectada con los problemas referentes a la administración de las líneas aéreas.

3. Industria del transporte. Este es otro ámbito en el cual se han efectuado pocas aplicaciones. Sin embargo, su principal aplicación se ha hecho en el diseño óptimo y el empleo óptimo de las redes de comunicación existentes.

4. Industria del hierro y del acero. En estas industrias se han formulado y planteado numerosos modelos de planeación. Estos estudios han venido a estimular la producción de acero a un costo mínimo, basado en un plan mensual en la sección de vaciado, en la producción de metal caliente en el departamento de altos hornos, como también en las cantidades de chatarra que se deban comprar.

   La producción mensual es función de la demanda para los principales tipos de acero, así como la cantidad y el tipo de chatarra, y su disponibilidad en el mercado.

5. Industria papelera. El problema de transporte se uti-

liza con frecuencia dentro de la industria papelera. La programación del transporte trata del problema con que se enfrentan aquellas empresas que cuentan con varias instalaciones, del programa asignado a los molinos y de reducir al mínimo los fletes totales de la empresa.

6. Industria petrolera. Esta industria ha proporcionado numerosas oportunidades para obtener soluciones de mucha transcendencia, como sucedió en relación con el problema de la gasolina para maximizar las utilidades. Por supuesto, los productos finales deberán satisfacer una gran variedad de características y especificaciones, como son el índice de octano, el punto de evaporación, etc., en orden a maximizar los ingresos netos.

Asignación de personal. Los problemas planteados en este campo son muy variados. Sin embargo el objeto de utilizar la técnica de la programación lineal es poder asignar a cada puesto a la persona que le rinda óptimos resultados a la empresa; es decir, la persona elegida para un puesto determinado deberá obtener una utilidad para la empresa y además deberá maximizarla, superándola día a día.

Un problema típico de la asignación de personal es el de los colectores de peaje en las casetas de las carreteras de cuota. En este problema se consideran períodos dados de tiempo, y el resultado perseguido es maximizar la recolección de dinero con el mínimo de personal.

Análisis de transporte y teoría de redes. Una de las primeras y más provechosas aplicaciones de las técnicas de la programación lineal fue la formulación y solución de problemas de transportes. Si bien este tipo de problemas tiene múltiples variantes, básicamente implica determinar la solución óptima al problema de enviar un producto homogéneo que puede ser embarcado en cantidades determinadas desde diferentes puntos de embarque u origen, y que deba ser recibido en cantidades determinadas en varios destinos, todo ello organizado de manera que logre minimizar el costo del transporte.

Un problema asociado al del transporte, es el de flujo de redes, ya sean éstas de tuberías, de ferrocarriles ó de carreteras.

Análisis de tráfico. Este tipo de problemas implica principalmente la sincronización de semáforos para optimizar el tránsito de vehículos. En nuestro país, ya se ha implementado un sistema en el cual, además de la sincronización de los semáforos, se cuenta con cámaras de video en esquinas conflictivas que recogen información y la envían a una computadora que la procesa, la almacena en un banco de datos, la compara y clasifica, y por último, la reutiliza para optimizar el tráfico en zonas conflictivas.

Otras aplicaciones. Existen un sinnúmero de aplicaciones para la técnica de programación lineal, que aumentan día con día.

Citemos algunas de las más conocidas:

1. Programación de producción y administración de inventarios.

2. Aplicaciones militares.

3. Optimizar la operación de un sistema de presas.

4. Optimizar el diseño de filtros ópticos.

5. Optimizar el diseño estructural de edificios y de la teoría del colapso plástico.

6. Optimización de rutas para agentes viajeros, etc.

EJEMPLOS DE FORMULACIÓN

Ejemplo 1

Para fabricar dos productos P_1 y P_2 se deben ejecutar ciertas operaciones sucesivas en 3 máquinas M_1, M_2 y M_3, aunque el orden de dichas operaciones es indiferente. Los tiempos unitarios de ejecución están dados en la tabla adjunta en la cual, por ejemplo, se puede ver que el tiempo unitario de ejecución de la pieza P_1, utilizando la máquina M_2, es de siete minutos. Supondremos además que no se presentan tiempos muertos al esperar que se termine de procesar un producto en la máquina que se va a utilizar.

	M_1	M_2	M_3
P_1	11	7	6
P_2	9	12	16

Las horas disponibles de cada máquina para sus actividades en un mes son respectivamente:

Máquina M_1	165 horas	9 900 min
Máquina M_2	140 horas	8 400 min
Máquina M_3	160 horas	9 600 min

Los productos P_1 y P_2 representan una ganancia unitaria respectiva de \$ 900 y \$ 1 100. De esta manera ¿cuántas unidades de los productos P_1 y P_2 deben fabricarse mensualmente a fin de tener una ganancia total máxima?

Solución:

Llamemos X_1 al número de unidades del producto P_1 y X_2 a las del producto P_2; entonces la ganancia mensual, que es la función objetivo que queremos maximizar, estará dada por:

$$Z = 900X_1 + 1\ 000X_2$$

y las restricciones serán:

$$11X_1 + 9X_2 \leq 9\ 900 \quad \text{para } M_1$$

$$7X_1 + 12X_2 \leq 8\ 400 \quad \text{para } M_2$$

$$6X_1 + 16X_2 \leq 9\ 600 \quad \text{para } M_3$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

Ejemplo 2

Una planta de concreto empleada en la construcción de una determinada presa, usa una mezcla de 30% de arena y 70% de grava por peso. Existen depósitos naturales en 5 lugares cercanos a la presa, cada uno con composiciones y costos de explotación y transporte diferentes, según se muestra en la siguiente tabla:

Depósito	1	2	3	4	5
Arena	40%	20%	50%	80%	70%
Grava	60%	80%	50%	20%	30%
Costo/ton.	\$ 150	\$ 180	\$ 100	\$ 125	\$ 200

Por cada tonelada de concreto producida ¿cuántas toneladas de cada uno de los depósitos se deben usar, de tal manera que se minimicen los costos?

Solución:

$$\min Z = 150X_1 + 180X_2 + 100X_3 + 125X_4 + 200X_5$$

sujeto a:

$$0.4X_1 + 0.2X_2 + 0.5X_3 + 0.8X_4 + 0.7X_5 = 0.3$$

$$0.6X_1 + 0.8X_2 + 0.5X_3 + 0.2X_4 + 0.3X_5 = 0.7$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 1.0$$

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5 \geq 0$$

Ejemplo 3

Operación de un sistema de dos presas.

Se considera el problema de una agencia que controla la operación de un sistema integrado de dos presas con una planta generadora hidroeléctrica en cada una. La agencia desea maximizar, en un determinado período, el ingreso de la venta de energía eléctrica producida al soltar el agua de las presas.

El sistema puede describirse como sigue; el lapso a través del cual se considera la actividad del sistema es un año, dividido en doce intervalos de un mes. Las dos presas, presa 1 y presa 2, tienen una capacidad de 2 500 y 4 500 kiloacre-pies, respectivamente. Al principio de cada mes, la presa contiene el agua que le sobró del mes anterior. Durante el mes también recibe un influjo adicional de agua. En un momento dado en cualquier mes, si la presa está llena a capacidad, el influjo adicional de agua se vierte por un conducto especial y se considera perdido para el sistema.

Durante un mes, el agua de una presa puede soltarse para generar electricidad, la cual se vende como energía de primera clase (firme) ó energía de segunda clase. La energía de primera clase se vende a $ 8 por megavatio-hora y la energía de segunda clase de $ 3 por megavatio-hora. La unidad de energía sólo puede venderse bajo la clasificación de primera clase si cumple ciertos requisitos. Pero cualquier unidad de energía puede venderse como de segunda clase.

Durante un mes, cada presa debe liberar un mínimo especificado de agua para requisitos de pesca, irrigación y navegación. No hay, sin embargo, un límite superior para la cantidad de agua que se puede soltar. Cualquier cantidad de agua que no se suelte puede ser almacenada, hasta el límite de capacidad de la presa, y utilizarse en los meses subsecuentes.

Para este sistema, el problema de decisión consiste en determinar que cantidad de agua es óptimo soltar en cada mes para maximizar el ingreso por la venta de energía de primera y segunda clases.

Se hacen las siguientes suposiciones:

1. Los influjos de agua a las respectivas presas se conocen (están pronosticados) por adelantado; éstos se enumeran en la tabla (1).

2. Durante un mes específico, el influjo y la liberación de agua ocurren en forma constante.

3. Las demandas mínimas de agua para la pesca, irrigación y navegación se consignan en la misma tabla.

4. Independientemente de la cantidad de agua contenida en las presas, cada acre-pie de agua soltado de la presa 1 produce 290 kilovatio-horas, y cada acre-pie de agua soltado de la presa 2 produce 320 kilovatio-horas.

5. Una unidad de energía eléctrica (independientemente de proporción correspondiente a cualquier presa) se califica como energía de primera clase sólo si se suministra en proporciones específicas en los diferentes meses del año, de acuerdo con la tabla.

6. Al principio del año, la presa 1 contiene 1 800 kiloacre-pie de agua y la presa 2 contiene 2 500 kiloacre-pies de

TABLA 1

DATOS / MES	INFLUJO DE AGUA 10^3 X acre — pie		DEMANDAS MINIMAS 10^3 X acre — pie		PROPORCION DE UNA UNIDAD DE ENERGIA FIRME A SER PROPORCIONADA EN EL MES.
	Presa 1	Presa 2	Presa 1	Presa 2	
ENERO	67	309	60	160	0.05
FEBRERO	274	1,307	60	144	0.05
MARZO	153	525	60	141	0.06
ABRIL	318	810	60	137	0.06
MAYO	267	446	60	342	0.06
JUNIO	115	285	60	553	0.09
JULIO	34	195	60	783	0.15
AGOSTO	12	176	60	712	0.17
SEPTIEMBRE	18	185	60	309	0.13
OCTUBRE	14	226	60	249	0.08
NOVIEMBRE	18	246	60	232	0.06
DICIEMBRE	41	251	60	160	0.04

agua. Esta misma cantidad de agua debe estar en las presas al terminar el año.

Se pide lo siguiente:

Desarrollar el modelo matemático del problema, incluyendo las ecuaciones de restricciones, las de relación y la correspondiente a la función objetivo.

Solución:

Sea

y_0 = Producción de energía de clase 1 (en MWH/año)

y_i = Producción de energía de clase 2 (en MWH/mes) en el mes i

X_i = Liberación de agua de la presa 1 en el mes i (en 10^3 x acre-pie)

Z_i = Liberación de agua de la presa 2 en el mes i (en 10^3 x acre-pie)

S_i = Almacenamiento de agua en la presa 1 del mes i al $i + 1$ (en 10^3 x acre-pie)

T_i = Almacenamiento de agua en la presa 2 del mes i al $i + 1$ (en 10^3 x acre-pie)

Z_0 = Función objetivo (medido en dólares)

Como toda la energía de clase 2 puede venderse, es claro que toda el agua liberada puede usarse para generar electricidad. Por lo tanto, no es preciso considerar pérdidas de agua de las presas.

Para la presa 1, disponibilidad de agua para cada mes:

$$
\begin{aligned}
1\,800 &+ 67 - X_1 - S_1 = 0 \\
S_1 &+ 274 - X_2 - S_2 = 0 \\
S_2 &+ 153 - X_3 - S_3 = 0 \\
S_3 &+ 318 - X_4 - S_4 = 0 \\
S_4 &+ 267 - X_5 - S_5 = 0 \\
S_5 &+ 115 - X_6 - S_6 = 0 \\
S_6 &+ 34 - X_7 - S_7 = 0 \\
S_7 &+ 12 - X_8 - S_8 = 0 \\
S_8 &+ 18 - X_9 - S_9 = 0 \\
S_9 &+ 14 - X_{10} - S_{10} = 0 \\
S_{10} &+ 18 - X_{11} - S_{11} = 0 \\
S_{11} &+ 41 - X_{12} - S_{12} = 0 \\
S_{12} &- 1\,800 = 0
\end{aligned}
$$

Para la presa 2, disponibilidad de agua para cada mes:

$$2\,500 + 309 - Z_1 - T_1 = 0$$

$$T_1 + 1\,307 - Z_2 - T_2 = 0$$

$$T_2 + 525 - Z_3 - T_3 = 0$$

$$T_3 + 810 - Z_4 - T_4 = 0$$

$$T_4 + 446 - Z_5 - T_5 = 0$$

$$T_5 + 285 - Z_6 - T_6 = 0$$

$$T_6 + 195 - Z_7 - T_7 = 0$$

$$T_7 + 176 - Z_8 - T_8 = 0$$

$$T_8 + 185 - Z_9 - T_9 = 0$$

$$T_9 + 226 - Z_{10} - T_{10} = 0$$

$$T_{10} + 246 - Z_{11} - T_{11} = 0$$

$$T_{11} + 251 - Z_{12} - T_{12} = 0$$

$$T_{12} - 2\,500 = 0$$

Ecuaciones de relación entre liberación de agua y producción de energía:

$$0.290\ X_1 + 0.320\ Z_1 - 0.05\ Y_0 - Y_1 = 0$$

$$0.290\ X_2 + 0.320\ Z_2 - 0.05\ Y_0 - Y_2 = 0$$

$$0.290\ X_3 + 0.320\ Z_3 - 0.06\ Y_0 - Y_3 = 0$$

$$0.290\ X_4 + 0.320\ Z_4 - 0.06\ Y_0 - Y_4 = 0$$

$$0.290\ X_5 + 0.320\ Z_5 - 0.06\ Y_0 - Y_5 = 0$$

$$0.290\ X_6 + 0.320\ Z_6 - 0.09\ Y_0 - Y_6 = 0$$

$$0.290\ X_7 + 0.320\ Z_7 - 0.15\ Y_0 - Y_7 = 0$$

$$0.290\ X_8 + 0.320\ Z_8 - 0.17\ Y_0 - Y_8 = 0$$

$$0.290\ X_9 + 0.320\ Z_9 - 0.13\ Y_0 - Y_9 = 0$$

$$0.290\ X_{10} + 0.320\ Z_{10} - 0.08\ Y_0 - Y_{10} = 0$$

$$0.290\ X_{11} + 0.320\ Z_{11} - 0.06\ Y_0 - Y_{11} = 0$$

$$0.290\ X_{12} + 0.320\ Z_{12} - 0.04\ Y_0 - Y_{12} = 0$$

Para la presa 1:

$$X_i \geq 60 \qquad i = 1, 2, \ldots, 12$$

Para la presa 2:

$$Z_1 \geq 160$$

$$Z_2 \geq 144$$

$$Z_3 \geq 141$$

$$Z_4 \geq 137$$

$$Z_5 \geq 342$$

$$Z_6 \geq 553$$

$$Z_7 \geq 783$$

$$Z_8 \geq 712$$

$$Z_9 \geq 309$$

$$Z_{10} \geq 249$$

$$Z_{11} \geq 232$$

$$Z_{12} \geq 160$$

Función objetivo:

$$Z_0 \ (\max.) = 8\, Y_0 + 3 \sum_{i=1}^{12} y_i$$

Por supuesto, sujeto también a:

$$X_i,\ Z_i,\ S_i,\ T_i,\ Y_i,\ Y_0 \geq 0$$

Hasta aquí, en estos tres últimos problemas, se ha querido presentar el tipo de aplicaciones de la programación lineal, aun que sólo se han visto dos aspectos importantes: la formulación del problema y su planteamiento matemático. Nos faltaría lo -- principal: la resolución del problema usando el método Simplex (ó cualquier otro método).

Enseguida, usaremos un problema sencillo aplicado a la a- gricultura para analizar la mecánica del método Simplex y lo re forzaremos con algunos argumentos de tipo geométrico, y para fi nalizar este capítulo se aclararán las limitantes del método y algunos casos especiales.

III.B ASPECTO COMPUTACIONAL

El problema general de programación lineal se resuelve, si no es demasiado sencillo, utilizando el conocido y difundido Método Simplex ó alguna variación de él.

Este método se basa en la aplicación de un algorítmo matemático que resuelve la siguiente forma de la programación lineal, denominada *forma canónica*.

$$Max\ Z = cX$$

Sujeto a:

$$AX \leq b$$
$$X \geq 0$$

Cualquier otra forma es equivalente a la anterior. Esta equivalencia se prueba fácilmente por medio del uso de cualquiera de las siguientes cinco reglas:

Regla 1

a) Maximizar cX es equivalente a Minimizar $-cX$

b) Minimizar cX es equivalente a Maximizar $-cX$

Regla 2

a) La desigualdad $AX \leq b$ es equivalente a la desigualdad $-AX \geq -b$

b) La desigualdad $AX \geq b$ es equivalente a la desigualdad $-AX \leq -b$

Regla 3

Toda igualdad de la forma $AX = b$, pueden descomponerse como la intersección de dos desigualdades $AX \leq b$ y $AX \geq b$

Ejemplo:

$$14X_1 - 3X_2 = 7$$

es equivalente a:

$$14X_1 - 3X_2 \leq 7$$

y

$$14X_1 - 3X_2 \geq 7$$

Regla 4

a) Toda desigualdad de la forma $AX \leq b$ puede convertirse en igualdad mediante la adición de un vector Y, llamado de *holgura*. El vector columna Y tiene m componentes, todos ellos no-negativos, es decir:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Toda desigualdad de la forma $AX \geq b$ puede convertirse en igualdad mediante la resta de un vector Z, llamado *superfluo*. El vector columna Z, tiene m componentes, todos no negativos, es decir:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

a)

$$\begin{aligned} 14X_1 - 3X_2 &\leq 10 \\ 12X_1 + 4X_2 &\leq 12 \end{aligned}$$

es equivalente a:

$$\begin{aligned} 14X_1 - 3X_2 + X_3 &= 10 \\ 12X_1 + 4X_2 + X_4 &= 12 \\ X_3,\ X_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

donde el vector de holgura es:

$$\begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$16X_1 - 8X_2 \geq 5$$

$$7X_1 + 3X_2 \geq 10$$

es equivalente a:

$$16X_1 - 8X_2 - X_3 = 5$$

$$7X_1 - 3X_2 - X_4 = 10$$

donde el vector de exceso o superfluo es:

$$\begin{matrix} X_3 \\ X_4 \end{matrix} \geq \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Regla 5

Una variable *no restringida*, o sea áquella que puede tomar toda clase de valores positivos, cero y negativos puede escribirse como la diferencia de dos variables no negativas.

Ejemplo:

Sea X_1 una variable no restringida, entonces

$$X_1 = X_2 - X_3$$

donde $X_2 \geq 0$, $X_3 \geq 0$. Nótese que si $X_2 > X_3$, eso implica que $X_1 > 0$; si $X_2 = X_3$, entonces $X_1 = 0$; si $X_2 < X_3$ se tiene que $X_1 < 0$.

PASOS DEL METODO SIMPLEX

Paso 1

Dado cualquier programa lineal tranfórmese por medio de las reglas de equivalencia 1, 2, 3 y 5 al programa lineal canónico.

$$Max\ Z = cX$$

Sujeto a:

$$AX \leq b$$
$$X \geq 0$$

Paso 2

Re-escríbase la función objetivo de la siguiente manera:

$$Z - cX = 0$$

Paso 3

Aplicando la regla de equivalencias 4, conviértanse todas las desigualdades en igualdades. Este paso requerirá el uso de variables de holgura. Usando los primeros 3 pasos, la forma canónica ha sido convertida en

$$Max\ Z - cX = 0$$
$$AX + \bar{X} = b$$
$$X \geq 0$$
$$\bar{X} \geq 0$$

donde $\bar{X}$ es el vector de variables de holgura. Este mismo puede reescribirse de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{l}
Z - c_1X_1 - c_2X_2 - \dots - c_nX_n = 0 \\
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + X_{n+1} = b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + X_{n+2} = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n + X_{n+m} = b_m \\
X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_n \geq 0,\ \underbrace{X_{n+1} \geq 0,\ \dots,\ X_{n+m} \geq 0}_{\text{variables de holgura}}
\end{array}
$$

Este paso es necesario, pues la adición de las variables de holgura crea la primera base B, que resulta ser la matríz identidad. Esto, a su vez, genera el primer punto extremo de la región de factibilidad cuyas coordenadas están dadas por el vector b .

Paso 4

Constrúyase una tabla con los coeficientes del programa lineal como la que se muestra en la (*tabla 4*).

Paso 5

Selecciónese como vector de entrada aquél cuya $Zj - Cj$ sea la más negativa. Si no hay ningún candidato de entrada, es decir que todas las $Zj - Cj \geq 0$ para toda j en A, la solución X_B mostrada en esa tabla es óptimo. En el caso de que exista un empate entre varios vectores que pueden ser candidatos, rómpase el empate arbitrariamente, es decir, selecciónese a cualquiera de los candidatos.

Paso 6

Una vez seleccionada la columna a_j que entrará a la nueva base, selecciónese el vector de salida a_r de la base actual utilizando la siguiente regla:

$$\frac{X_{B_r}}{y_{rj}} = \underset{k}{Min} \left\{ \frac{X_{B_k}}{y_{kj}} \;\middle|\; y_{kj} > 0 \right\}$$

TABLA 4

TABLA DE PROGRAMACION LINEAL

		Variables originales			Variables de holgura			
	Z	X_1	X_2	$\cdots X_n$	X_{n+1}	X_{n+2}	$\cdots X_{n+m}$	
	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\cdots z_n - c_n$	$z_{n+1} - c_{n+1}$	$z_{n+2} - c_{n+2}$	$\cdots z_{n+m} - c_{n+m}$	Z_0
a_{B_1}	0	Y_{11}	Y_{12}	Y_{1n}	$Y_{1,n+1}$	$Y_{1,n+2}$	$\cdots Y_{1,n+m}$	X_{B_1}
a_{B_2}	0	Y_{21}	Y_{22}	Y_{2n}	$Y_{2,n+1}$	$Y_{2,n+2}$	$\cdots Y_{2,n+m}$	X_{B_2}
$\vdots$	.	....	....	....	....	....	....	
a_{B_m}	0	Y_{m1}	Y_{m2}	Y_{mn}	$Y_{m,n+1}$	$Y_{m,n+2}$	$\cdots Y_{m,n+m}$	X_{B_m}

Valor de la función objetivo asociado a la base actual B

Vectores que integran la base actual B

Identificación del punto extremo asociado a la base actual B

TABLA DE PROGRAMACION LINEAL (Condensada)

	Z	$X_1 \; X_2 \cdots X_n$	$X_{n+1} \; X_{n+2} \cdots X_{n+m}$	
	1	$c_B B^{-1} A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B X_B$
$a_{B_1}, a_{B_2}, \ldots, a_{B_m}$	0	$B^{-1} A$	B^{-1}	X_B

En el caso de que exista un empate entre varios vectores candidatos, hay que aplicar las llamadas reglas lexicográficas* para romper el empate. Una decisión arbitraria puede causar que el proceso cicle contínuamente sin alcanzar *solución óptima*.

En el caso de que todas las y_{kj} del denominador sean negativos, se tiene el caso de una *solución no acotada*.

Paso 7

La intersección en el tablado de la columna que entra y la que sale determina el elemento *pivote* y_{rj} . Aplíquese operaciones matriciales elementales en el pivote y_{rj} , con el objeto de convertir a la columna a_j en el vector unitario e_r , es decir ceros en toda la columna, y un uno en la r- ava componente, que resulta ser y_{rj} . Regrese al paso 5.

Por ejemplo, si la columna seleccionada a entrar en la base es la a_2 y la columna a salir es la a_7 , hágase al elemento y_{72} del tablado igual a uno y al resto de las componentes de la columna a_2 , ceros (incluyendo a $Z_2 - C_2$) mediante el uso de operaciones elementales.

Este caso genera una nueva base B, un nuevo punto extremo X_B y un nuevo valor de la función objetivo Z.

---

* *Véase PRAWDA, Juan, "Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones", Vol. 1, 1a. ed., 1982, p. 121-126*

III.c EJEMPLO DE APLICACION A LA AGRICULTURA

En este apartado, a efecto de facilitar la comprensión sobre en qué consiste la programación lineal, se expone uno de los casos más sencillos que es posible resolver mediante su aplicación.

Imaginemos el caso hipotético de un agricultor, que dispone de una parcela de 70 hectáreas y que tiene la opción de poder cultivar tabaco o tomate.

Supongamos que los precios de venta para tabaco y tomate son de \$ 9 y \$ 2 por Kilogramo; que los rendimientos por hectárea que puede obtener, son de 2 000 Kg. de tabaco ó 15 000 Kg. de tomate; que la inversión que se requiere por hectárea, como costo de producción, es de \$ 8 000 para el tabaco y de \$ 15 000 para el tomate. El capital total de que dispone nuestro agricultor es de \$ 840 000 y las necesidades de agua de riego, en los meses de germinación de noviembre y diciembre son, respectivamente, de 1 500 y de 1 000 m^3 por hectárea, para el tabaco; y para el tomate, de 1 200 y de 850 m^3 por hectárea. Consideremos que los volúmenes disponibles de agua fuesen de sólo 100 000 m^3 en noviembre y 80 000 m^3 en diciembre.

El problema sería encontrar el número de hectáreas de cada uno de los dos cultivos, de forma tal que la utilidad del agricultor sea la máxima posible.

La solución de nuestro problema se inicia con la formulación de una tabla en la que resumimos todos los datos. Llamemos "X" al número de hectáreas que se sembrará de tabaco y "Y" al que se sembrará de tomate. Nuestra tabla de resumen de datos sería la siguiente (*tabla 2*):

TABLA 2

	Superficie ha.	Precio de venta $ kg.	Rendimiento kg/ha.	Costo de producción $/ha.	Necesidades de agua m^3/ha. Nov.	Dic.
Tabaco	X	9	2 000	8 000	1 500	1 000
Tomate	Y	2	15 000	15 000	1 200	850
Disponibilidad Total:	70			840 000	100 000	80 000

De acuerdo con esta tabla, podemos deducir fácilmente que nuestro problema consiste en encontrar los valores de "X" y de "Y", que maximicen las utilidades del agricultor.

La utilidad que se obtenga para cada cultivo será la diferencia entre el valor total de la producción y el costo de producción. Por ejemplo, en el caso del tabaco, el valor total de la producción será el resultado de multiplicar los 2 000 Kg. que se pueden obtener por hectárea, por los \$ 9 a que se vende cada Kilo, o sean \$ 18 000; la utilidad se obtiene restando de esta cantidad los \$ 8 000 que se requieren como costo de producción, o sean, \$ 10 000 por hectárea. Por lo tanto, la utilidad total por toda la superficie que se dedique al tabaco, será de - - - \$ 10 000 multiplicado por "X".

En forma similar, la utilidad total por la superficie que se dedique al tomate, será de 15 000 Kg. por hectárea, multiplicado por \$ 2 por Kg. a que se vende, menos los \$ 15 000 que cuesta producir una hectárea, o sean \$ 15 000 por hectárea. La utilidad total por tomate será, de acuerdo con ésto, de \$ 15 000 multiplicado por "Y".

La utilidad total del agricultor equivale a la que obtenga por hectárea de tabaco, multiplicada por el número de hectáreas correspondiente, "X", más la utilidad por hectárea de tomate por el número de hectáreas correspondiente, "Y", o sea:

$$\text{Utilidad} = 10\ 000X + 15\ 000Y$$

Veamos ahora las restricciones de nuestros recursos limita dos:

La superficie máxima de que se dispone es el total de la parcela del agricultor, o sean 70 hectáreas. Ahora bien, la superficie sembrada no necesariamente debe alcanzar este total, por lo que esta ecuación constituye una desigualdad:

$$X + Y \leq 70$$

En forma análoga, se establece que el número de hectáreas sembradas de tabaco, multiplicado por las \$ 8 000 de inversión correspondientes, más el número de hectáreas sembradas de tomate por los \$ 15 000 de inversión que requiere cada hectárea, no podrán sobrepasar los \$ 840 000 de que se dispone:

$$8\,000X + 15\,000Y \leq 840\,000$$

Y, por último, las restricciones impuestas por los volúmenes de agua disponibles y las láminas necesarias para el riego.

En el mes de noviembre, cada una de las "X" hectáreas de tabaco requiere 1 500 m^3, y cada una de las "Y" hectáreas de tomate, 1 200 m^3. De acuerdo con ésto, la desigualdad que representa esta restricción será:

$$1\,500X + 1\,200Y \leq 100\,000$$

En el caso del mes de diciembre, en una forma similar, la desigualdad sería:

$$1\,000X + 850Y \leq 80\,000$$

De esta forma, queda integrado el sistema de restricciones con el que debemos maximizar la utilidad del agricultor, o sea:

Maximizar:

$$\text{Utilidad} = 10\,000X + 15\,000Y$$

Sujeta a las siguientes restricciones:

Por Area :	$X + Y \leq 70$
Por capital:	$8\,000X + 15\,000Y \leq 840\,000$
Por agua Nov. :	$1\,500X + 1\,200Y \leq 100\,000$
Por agua Dic. :	$1\,000X + 850Y \leq 80\,000$

Para resolver el problema, como se dijo anteriormente, se puede utilizar el método Simplex ó alguna modificación de éste, además del método gráfico. Se atacará el problema, inicialmente, utilizando este último, para después comparar y comprobar resultados usando el algorítmo Simplex.

Utilizaremos una representación gráfica de coordenadas cartesianas, en las que "X" y "Y" serán respectivamente, abscisas y ordenadas (*fig.* 3). Como no es posible pensar en una superficie negativa, cualquier solución factible real, deberá quedar alojada en el primer cuadrante, lo que representado matemáticamente, sería:

$$X > 0$$

$$Y > 0$$

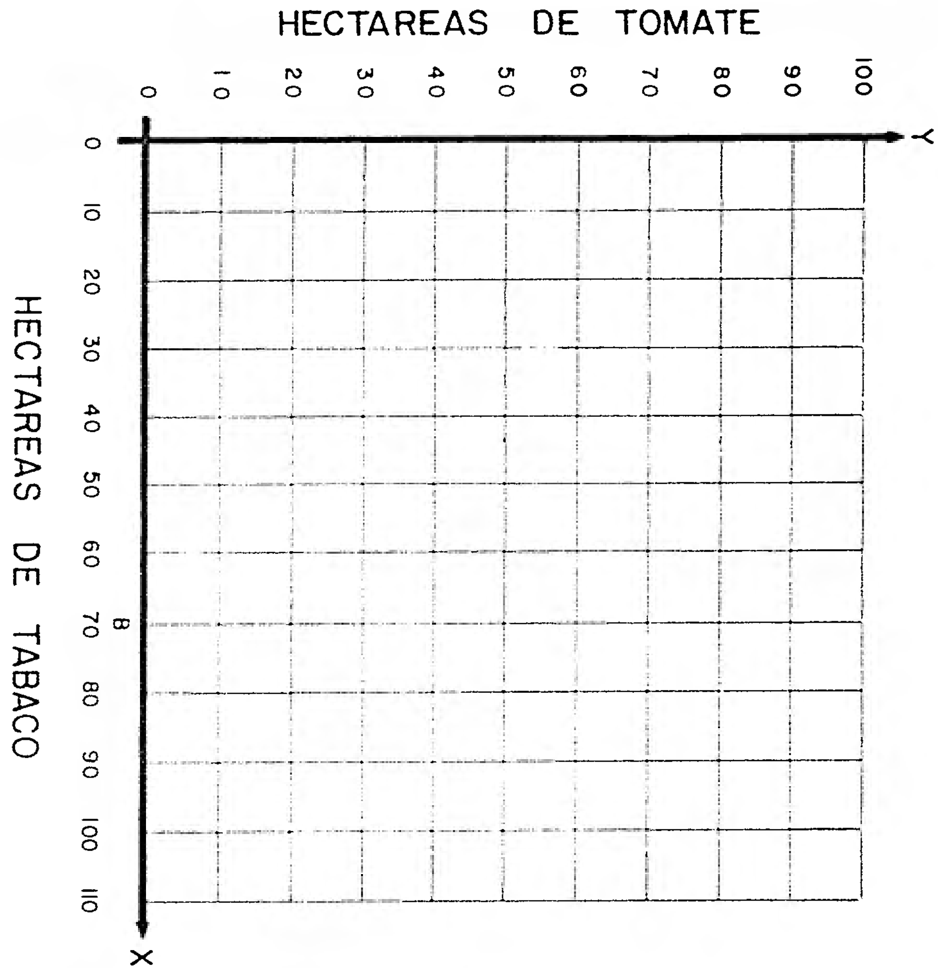

HECTAREAS DE TOMATE
HECTAREAS DE TABACO
Y
X
B
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110

Fig. 3

Cada una de las desigualdades puede ser considerada como un conjunto de un número infinito de igualdades; por ejemplo, en el caso de la restricción de área, que queda representada por la desigualdad $X + Y \leq 70$, cualquier ecuación de la forma $X + Y = B$, en la que "B" puede tomar cualquier valor comprendido entre 0 y 70, serían igualdades que satisfacen las desigualdades del conjunto.

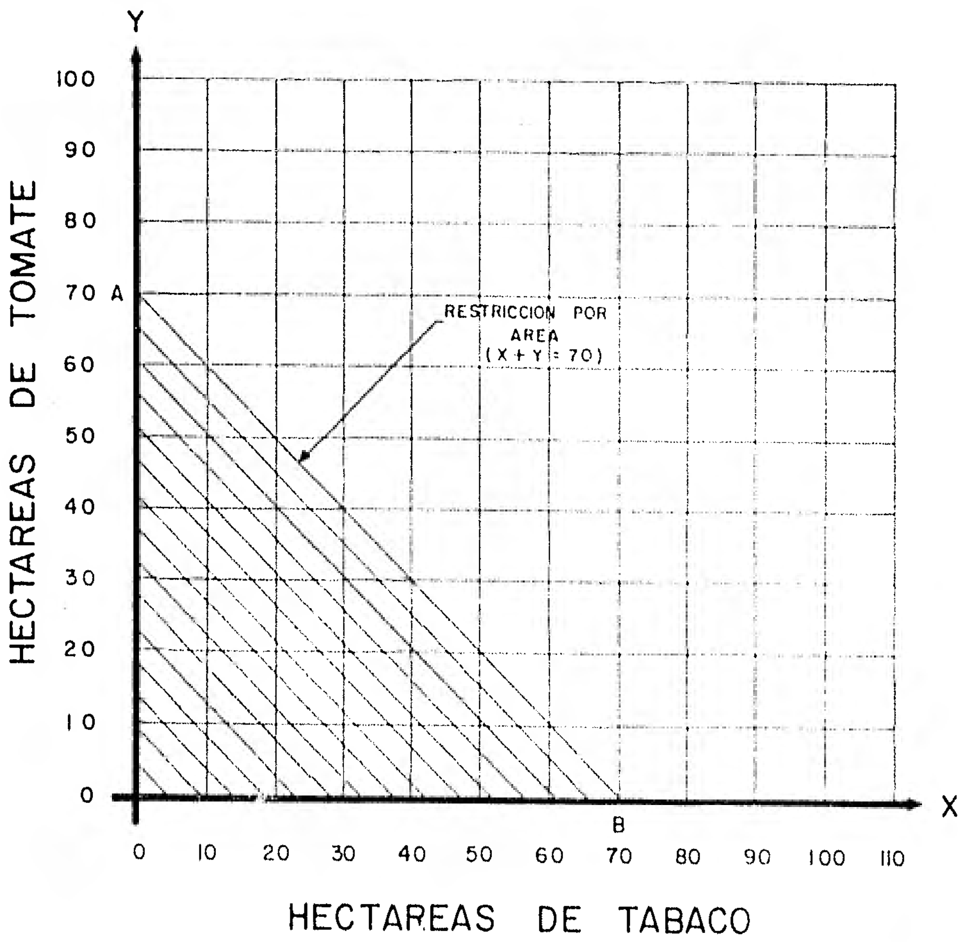
La representación gráfica de este conjunto de ecuaciones lineales, representa una familia de rectas paralelas entre sí, ya que todas tienen la misma pendiente, y dado que constituyen un número infinito de ellas, ésta puede considerarse como una superficie delimitada por la condición del máximo $X + Y = 70$, y los ejes coordenados que limitan el primer cuadrante (*fig. 4*).

Esta superficie *AOB* sería el lugar geométrico de los puntos que satisfacen esa desigualdad (*fig. 4*).

Si en la misma gráfica dibujamos todas y cada una de estas familias de rectas, correspondientes a cada una de las restricciones, habrá una zona de esas superficies, común a todas las áreas de cada restricción (*fig. 5*). Los puntos de esta zona satisfacen simultáneamente todas y cada una de las desigualdades, motivo por el que se le denomina área de soluciones factibles. (*Poligonal* $\alpha\beta\gamma\Omega o$).

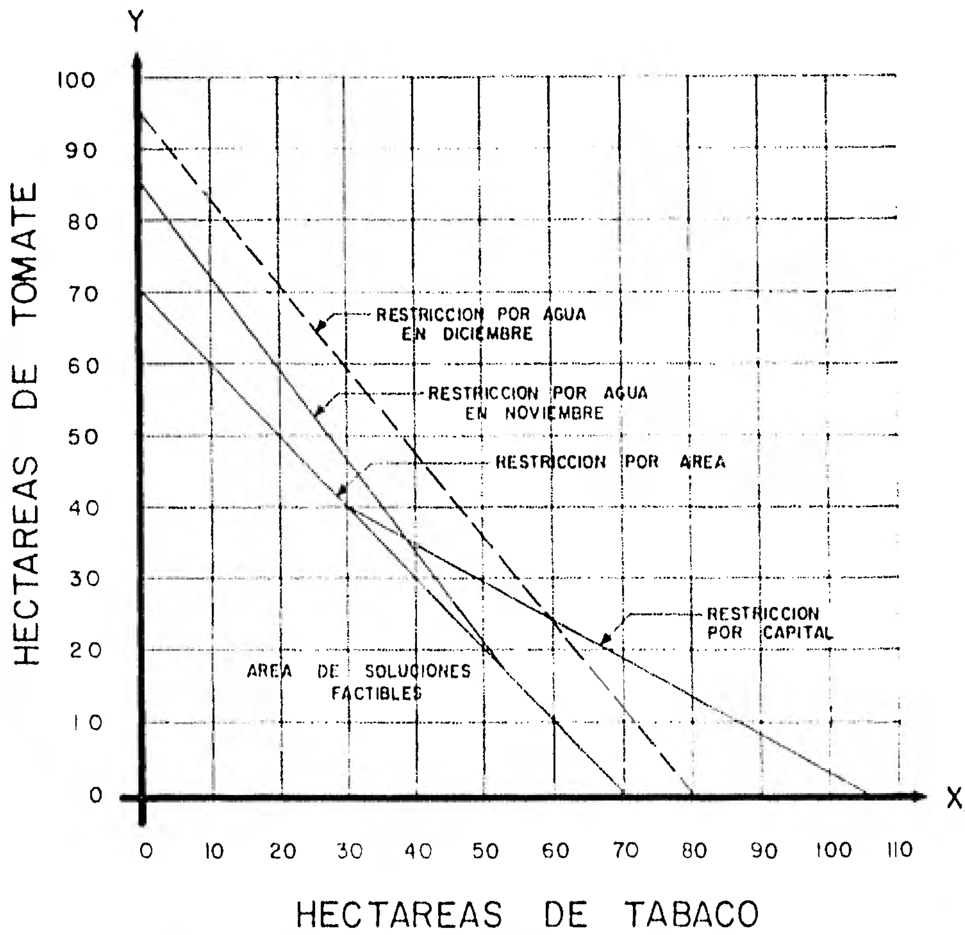
Cualquier punto de la gráfica representaría un plan de cultivos, ésto es, una combinación de un número de hectáreas de tomate y de un número de hectáreas de tabaco, por lo que los pun-

Fig. 4



Y
X
A
B
RESTRICCION POR AREA
(X + Y = 70)
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
HECTAREAS DE TOMATE
HECTAREAS DE TABACO

Fig. 5


Y
X
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
HECTAREAS DE TOMATE
HECTAREAS DE TABACO
RESTRICCION POR AGUA EN DICIEMBRE
RESTRICCION POR AGUA EN NOVIEMBRE
RESTRICCION POR AREA
RESTRICCION POR CAPITAL
AREA DE SOLUCIONES FACTIBLES

tos de esta zona satisfacen simultáneamente todas y cada una de las restricciones, lo que significa que para cualquiera de esos planes de cultivo, a nuestro agricultor le alcanzaría su superficie, su capital y su disponibilidad de agua en noviembre y diciembre.

Por otra parte, la representación gráfica de la ecuación que nos define la utilidad, o sea:

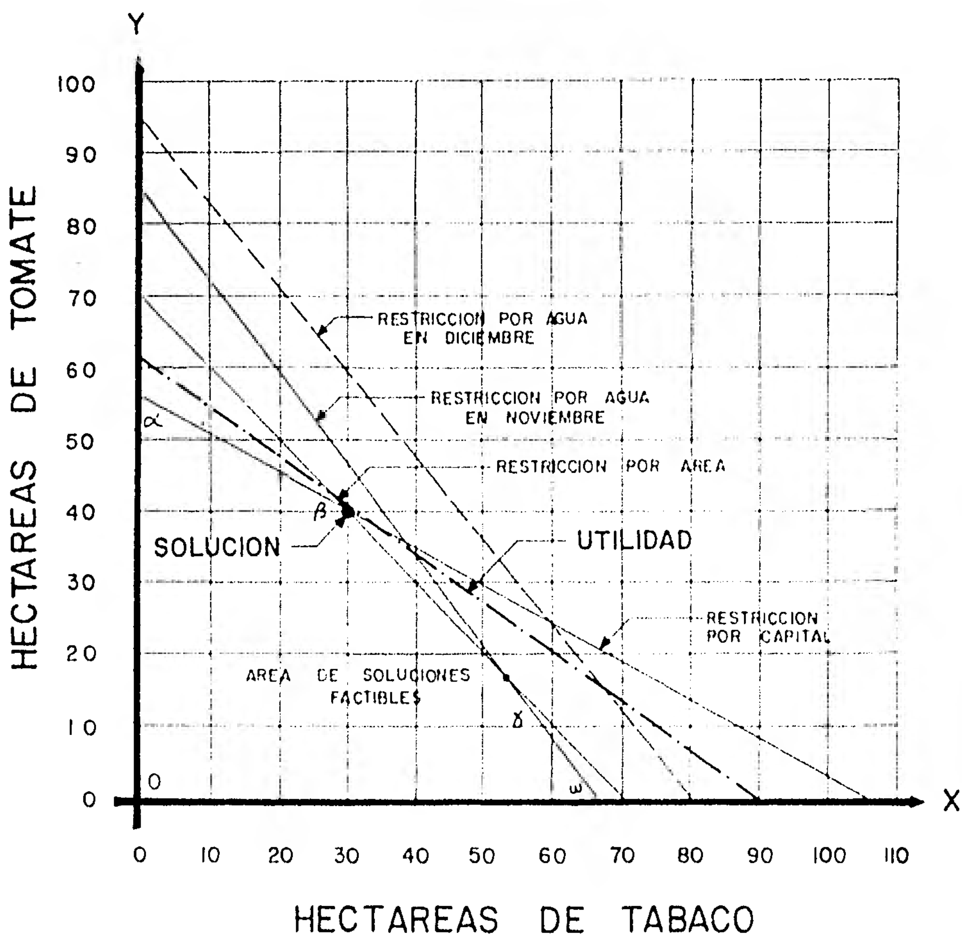
Utilidad = 10 000X + 15 000Y, será también una familia de rectas paralelas entre sí, en este caso, sin ningún límite.

Analizando esta ecuación de utilidad, es fácil concluir que su valor será mayor mientras mayor sea el valor de ambas variables "X" y "Y" es decir, mientras la distancia al origen de esta recta sea más grande.

De acuerdo con lo anterior, se concluye que es necesario encontrar un punto de la zona de soluciones factibles, lo más alejado posible del origen, y que quede también alojada en forma simultánea, sobre una de las rectas de la familia de la utilidad, es decir, lo más alejada que sea posible del origen, y que simultáneamente satisfaga todas y cada una de las restricciones, ó sea que también debe ser un punto del área de soluciones factibles.

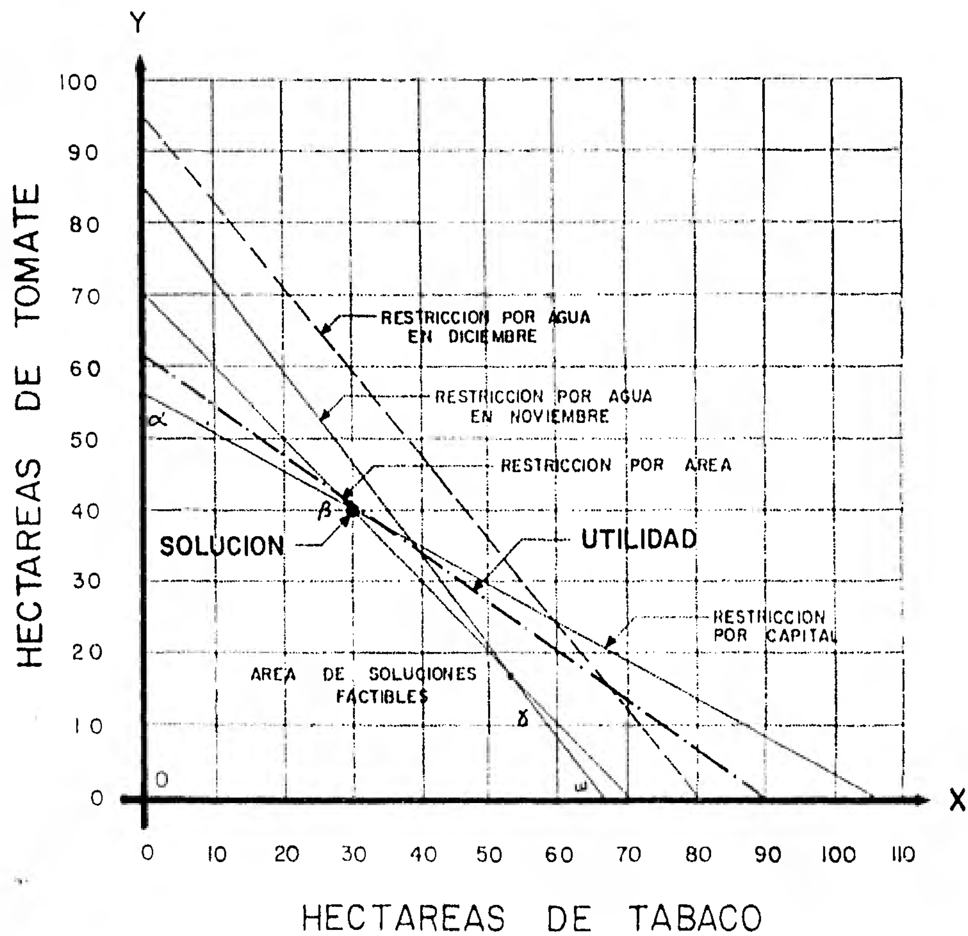
Obviamente la satisfacción simultáneamente de ambos requerimientos, sucede en el punto de tangencia, que en nuestro ejemplo, coincide con el vértice de la zona de soluciones factibles co-

Fig. 6



Y
X
HECTAREAS DE TOMATE
HECTAREAS DE TABACO
RESTRICCION POR AGUA EN DICIEMBRE
RESTRICCION POR AGUA EN NOVIEMBRE
RESTRICCION POR AREA
UTILIDAD
RESTRICCION POR CAPITAL
SOLUCION
AREA DE SOLUCIONES FACTIBLES
α
β
γ
ω
0
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

Fig. 6



Y
X
HECTAREAS DE TOMATE
HECTAREAS DE TABACO
RESTRICCION POR AGUA EN DICIEMBRE
RESTRICCION POR AGUA EN NOVIEMBRE
RESTRICCION POR AREA
UTILIDAD
SOLUCION
RESTRICCION POR CAPITAL
AREA DE SOLUCIONES FACTIBLES

rrespondiente a la intersección de las rectas límites de área y capital (*fig. 6*).

Calculando los valores de las coordenadas correspondientes, mediante geometría analítica, encontramos que la máxima utilidad se obtiene al sembrar 40 hectáreas de tomate y 30 de tabaco.

El caso que hemos visto, constituye el más sencillo de la programación lineal, ya que al tener solamente dos variables, nos permite una solución gráfica, pero en el caso de un Distrito de Riego, son muchísimas las combinaciones de cultivos para los que habrá que determinar las superficies, y el número de restricciones sería también mucho más grande: por condiciones de mercado, por disponibilidad de agua, por disponibilidad de semillas, de crédito, de fertilizantes, de insecticidas, por condiciones de suelos apropiados para cada cultivo, etc.; sin embargo, mediante la utilización del cómputo electrónico, la solución del problema es perfectamente factible, utilizando para ello el método Simplex.

Sin embargo, el procedimiento ha permitido obtener una visión geométrica de lo que sucede aún en espacios de mayor dimensión, lo cual resulta muy valioso para desarrollar algo de intuición respecto al problema general de programación lineal.

Por la razón anterior, es obvio que debe haber alguna alternativa. En efecto, existen métodos numéricos para resolver el problema y generalmente giran alrededor del algoritmo Simplex, del cual ya se habló anteriormente y del cual se dará una visión más bien intuitiva de tipo geométrica.

Finalmente se hablará de algunas aberraciones que pueden ocurrir cuando hay inconsistencias en la formulación de un modelo, y que se deben conocer para poderse detectar y corregir si se han de realizar aplicaciones útiles de esta técnica.

En la *tabla* 3 se indica la forma en que se realizó el cálculo de este problema. En ella aparecen la ubicación que tienen todos los componentes del problema.

El proceso que se realizó fue el siguiente:

1. Se escoge el valor de $z_j - c_j$ más negativo, lo que nos indica la columna a seleccionar.

2. Se calcula el valor de θ, que es el cociente de dividir los valores de la columna de términos independientes B_i entre los valores de la columna elegida en el paso anterior. De estos cocientes se escoge el menor valor positivo, que nos señalará el renglón a seleccionar. La intersección de la columna con el renglón seleccionados nos indicará la ubicación del elemento pivote, representado en la tabla por *.

3. Por medio de operaciones elementales se hace al elemento pivote igual a 1, con lo que resulte en los demás elementos del renglón.

4. Aplicando las operaciones matriciales elementales, hacer igual a cero, a los demás elementos de la columna del pivote, que ya tiene el valor 1.

5. La columna de Comprobación (Σ) sirve como control del proceso y se obtiene de la siguiente manera;

   a) Sumar todos los elementos de los renglones
   b) El resultado anterior multiplicarlo por el valor que le corresponda de c_j de la primera columna.
   c) Sumar los valores del renglón z_j; este valor debe ser idéntico al del inciso anterior, con lo que se controlan las operaciones hechas.

6. Se restan los valores de z_j menos los de c_j de renglón, con lo que obtenemos nuevamente los valores de $z_j - c_j$. Los valores de z_j se obtuvieron de sumar los productos parciales de cada elemento en una misma columna por el valor correspondiente en la columna c_j. Regrese al primer paso.

TABLA 3

TABLA DE CALCULO DEL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL APLICADO A LA AGRICULTURA UTILIZANDO EL METODO SIMPLEX

Coeficientes de la función objetivo · Término independiente de las restricciones · Variable de Holgura · Matriz Unidad · Variables Reales · Columna de Comprobación

C_j	Vb	--	0	0	0	0	10 000	15 000	Comprobación	θ
		B_i	H_1	H_2	H_3	H_4	X	Y	Σ	B_i /Col↑
0	H_1	[illegible]	1	0	[illegible]	[illegible]	1	1	73	70
0	H_2	840 000	0	1	[illegible]	[illegible]	8 000	15 000 •	863 001	←56
0	H_3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1 500	1 200	102 701	83
0	H_4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	800	850	94
Z_j		0	[illegible]	[illegible]	0	0	[illegible]	[illegible]	0	
$Z_j - C_j$		--	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−10 000	−15 000 ↑		
0	H_1	14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.47		15.47	←29.9
15 000	Y	56	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.53		57.53	105.0
0	H_3	32 600	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	860.40		33 361.50	38.0
0	H_4	32 400	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	546.95		32 947.89	59.0
Z_j		840 000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15 000	862 996.00	
$Z_j - C_j$		--	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0		
10 000	X	[illegible]	2.14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	0	33.14	
15 000	Y	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	39.86	
0	H_3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7 969.09	
0	H_4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4 820.42	
Z_j		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
$Z_j - C_j$		--	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0		

Restricciones · Valor de la función objetivo · Guía para eliminar una variable · Coeficientes ... de las variables ... · Variable ... · Tabla Inicial · Tablas de Iteraciones

Max Z = [illegible] X + 15 000 Y

• Pivote

[illegible]

UNA DESCRIPCION GEOMETRICA DEL METODO SIMPLEX

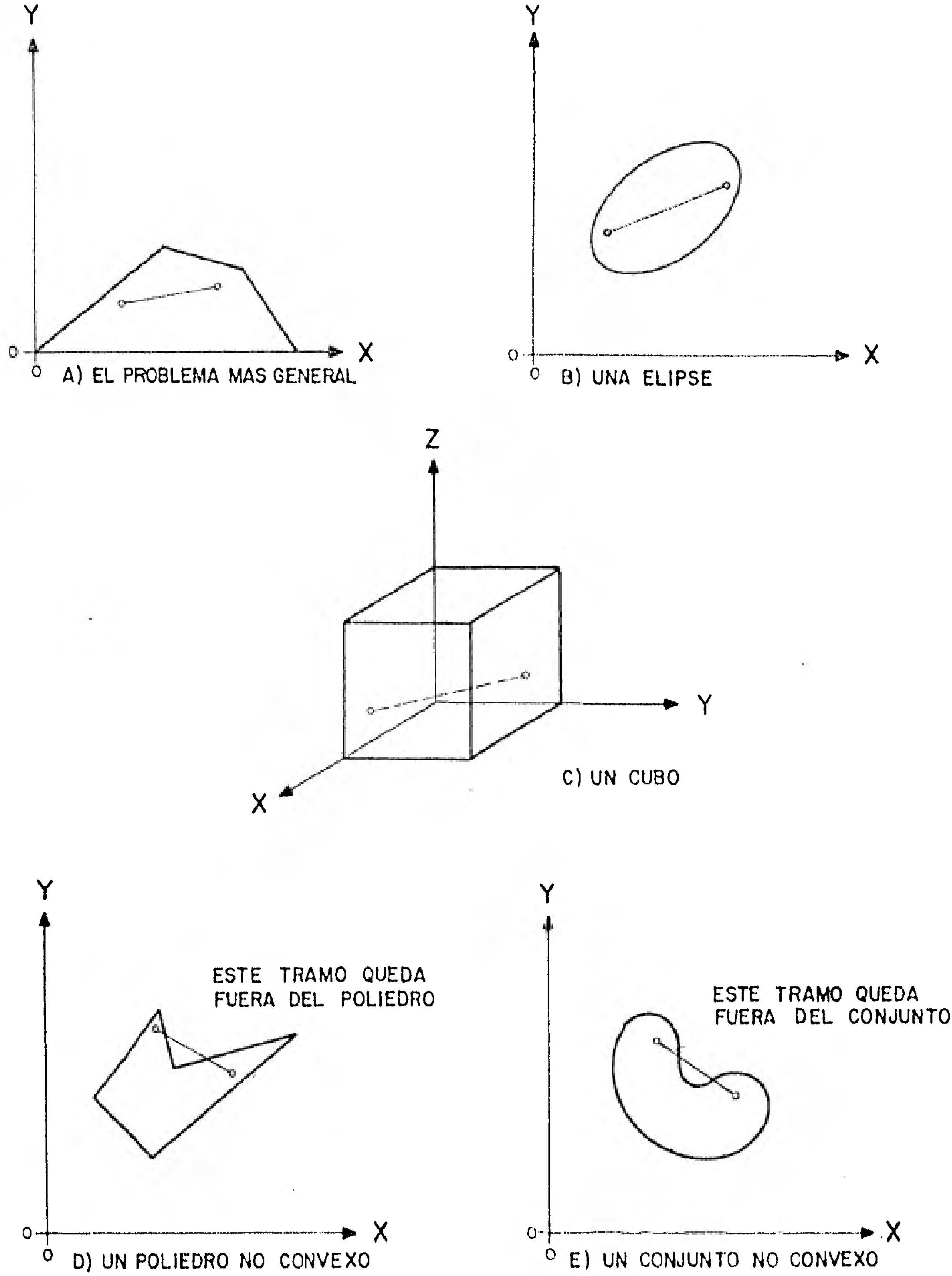
Poliedros Convexos

En el ejemplo de aplicación a la agricultura, se observó que la región factible del problema estaba definida por un área en el plano encerrada dentro de un polígono irregular. Este concepto se generaliza a "n" dimensiones y geométricamente, el conjunto de desigualdades lineales que representan las restricciones de un problema de programación lineal bien planteado, definen un poliedro en ese espacio de "n" dimensiones. Por ejemplo, un cubo es un poliedro regular de seis caras en espacio Euclediano de tres dimensiones. Obviamente, los poliedros definidos en espacios de más de tres dimensiones no tienen una representación gráfica tan cómoda como la del problema del agricultor en dos dimensiones ó el cubo en tres; lo importante es que el concepto geométrico es el mismo independientemente de la dimensión del espacio.

Otra propiedad del espacio decisional del problema del agricultor es que si tomamos dos puntos cualesquiera dentro del poliedro que lo define, y los unimos por medio de una recta, todos los puntos sobre este segmento también quedan dentro del poliedro. Cualquier conjunto que posea esta propiedad es un conjunto convexo. Si el conjunto es un poliedro, entonces es un poliedro convexo. La (*fig.* 7) proporciona varios ejemplos de conjuntos convexos y otros de conjuntos no convexos.

Fig. 7

CONJUNTOS CONVEXOS



Puntos extremos

En el ejemplo del agricultor, vimos como la solución del problema resultaba ser un vértice del poliedro convexo que define la región factible. Nótese que cualquier vértice de un poliedro convexo tiene la propiedad siguiente:

a) El punto forma parte del poliedro.

b) Es imposible encontrar dos puntos que pertenezcan al poliedro, tales que el vértice esté entre los dos y sobre la recta que los une.

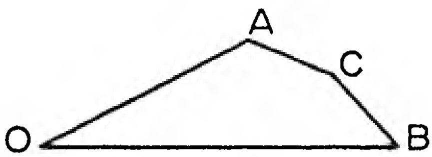
Cualquier punto de un conjunto C que satisfaga estas condiciones, se conoce como un punto extremo del conjunto. Si el conjunto es un poliedro convexo, sólo sus vértices son puntos extremos. Sin embargo, no solamente los vértices de un conjunto califican como puntos extremos. Por ejemplo, del conjunto de puntos contenidos en un círculo, cualquier punto sobre su periferia califica como un punto extremo. Esta situación se ilustra en la (*fig.* 8).

Optimalidad

Finalmente, recordamos que la solución del problema del agricultor se dá precisamente en un vertice ó punto extremo del poliedro convexo que define al espacio decisional del problema. Es posible demostrar matemáticamente que éste siempre va a ser el caso, cuando el problema se plantea de acuerdo al formato general de Programación Lineal analizado anteriormente.

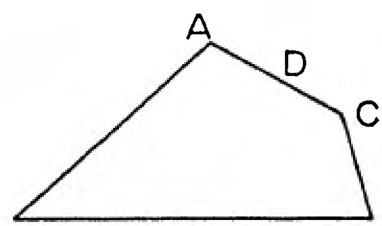
Fig. 8

PUNTOS EXTREMOS



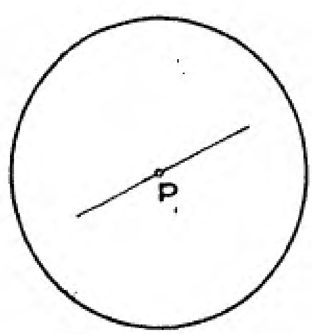
(a)

O, A, B Y C SON PUNTOS EXTREMOS.



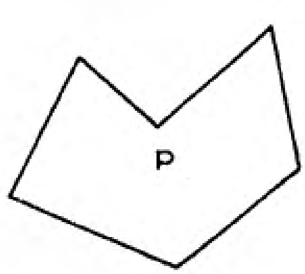
(b)

'D' NO ES UN PUNTO EXTREMO. ESTA SOBRE EL SEGMENTO AC.



(c)

(I) TODO PUNTO SOBRE LA PERIFERIA ES UN PUNTO EXTREMO.
(II) 'p' NO ES UN PUNTO EXTREMO.



'p' NO ES PUNTO EXTREMO.

(d)

Dentro de la teoría de programación lineal se demuestra un teorema que dice que, si el problema de programación lineal tiene solución, existe un punto extremo que es una solución al problema.

Nótese que lo anterior no significa que solamente los puntos extremos pueden ser soluciones al problema.

En efecto, cuando la función objetivo es paralela a alguna faceta ó arista del poliedro convexo que define al espacio decisional, cualquier punto sobre la faceta ó arista, califica como una solución al problema. Esta situación se ilustra en la - - (*fig.* 9). Por la misma razón, la faceta contendrá varios puntos extremos que también calificarán como soluciones, verificando la conclusión del teorema citado.

EL METODO SIMPLEX

En esencia, el algorítmo Simplex es un método numérico que proporciona una forma organizada de buscar entre los puntos extremos del poliedro, hasta encontrar una solución al problema. Es decir, ya que sabemos que algún vértice de la región factible debe calificar como una solución, no es necesario explorar más que puntos extremos.

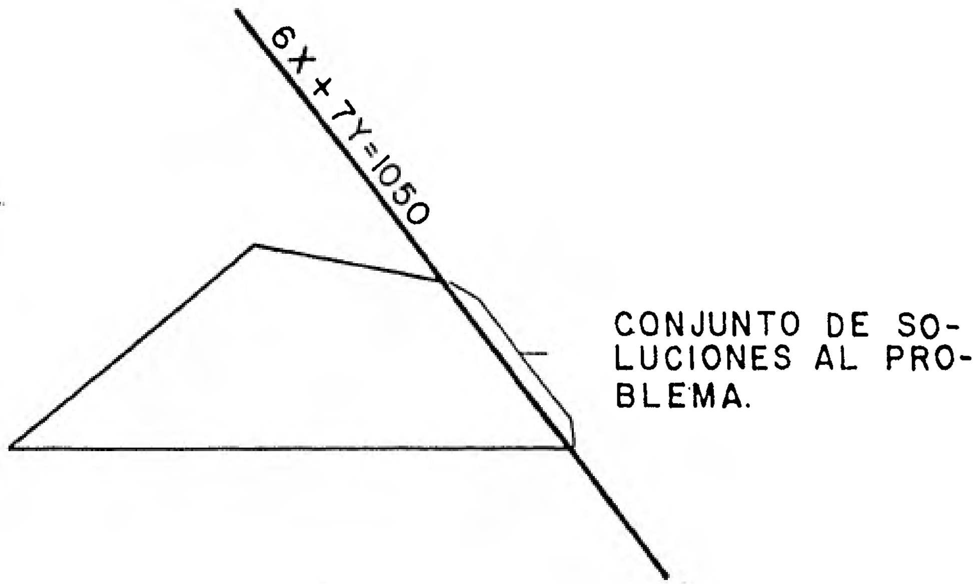
Una descripción geométrica

El método empieza por "localizar" un punto extremo de la región factible. Entonces, habiendo identificado un vértice del

Fig. 9

UN PROBLEMA

CON MULTIPLES SOLUCIONES



EL PROBLEMA MAX. $6X + 7Y$

$$
\begin{aligned}
\text{S.A.} \quad X + 2Y &\leq 200 \\
6X + 7Y &\leq 1050 \\
-X + 2Y &\leq 0 \\
X\ ,\ \ Y &\leq 0
\end{aligned}
$$

TIENE SOLUCIONES MULTIPLES

poliedro se entra en un proceso iterativo que a grandes rasgos es el siguiente:

a) Determina si este punto extremo califica como una solución del problema. De ser así, se termina el proceso.

De lo contrario se procede a efectuar el paso (b)

b) Si el vértice actual no califica como solución, explora las aristas del poliedro que inciden sobre él, y determina cuál de éstas proporciona la mejor "dirección de movimiento". Es decir, cuál de las aristas aumenta (ó disminuye) más rápidamente el valor de la función objetivo, por unidad de movimiento en la dirección que define.

c) Procede a "moverse" sobre la arista seleccionada en el paso (b) hasta encontrar un nuevo vértice del poliedro.

d) A partir del nuevo vértice, se efectúa otra iteración del proceso, empezando en el paso (a).

Consideremos el problema siguiente:

$$\max \quad Z = 8X + 12Y$$

sujeto a:

$$X + 2Y \leq 200$$
$$6X + 7Y \leq 1\ 050$$
$$-X + Y \leq 0$$
$$X, Y \geq 0$$

Cuya representación gráfica aparece en la (*fig. 10*).

En esta figura se representa una iteración del método para este problema, partiendo del origen, que evidentemente es un punto extremo. Sobre este vértice inciden dos aristas del poliedro respectivo, que son las líneas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ de la figura.

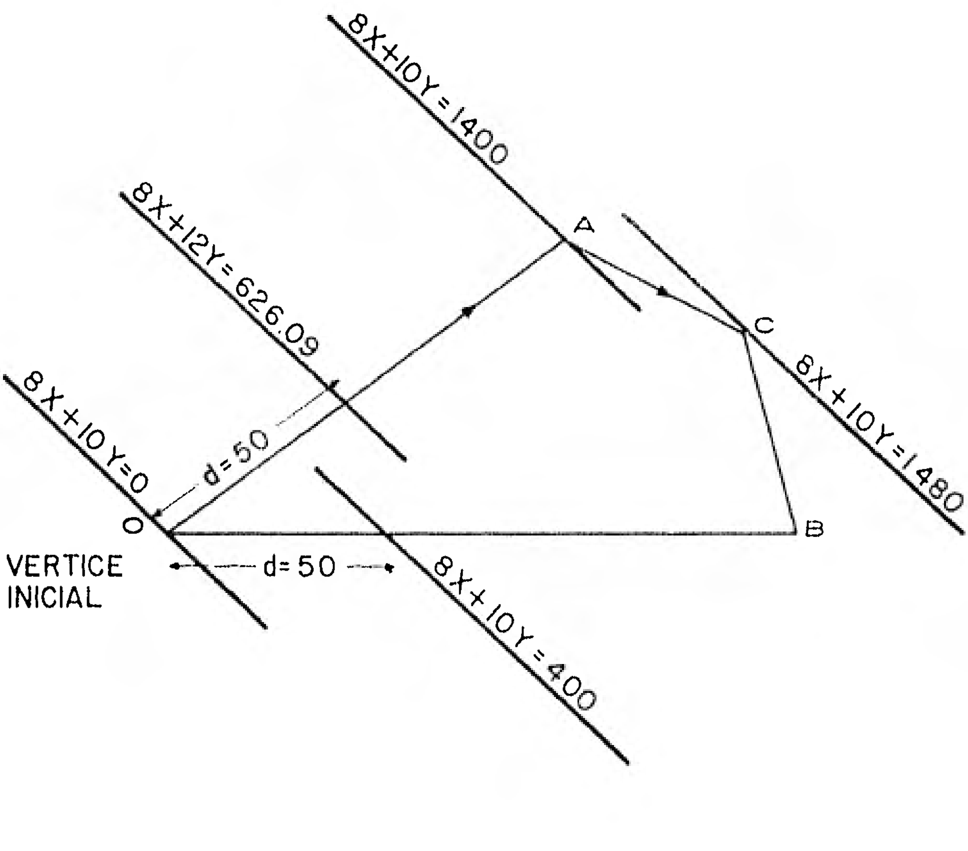
Se observa que, el moverse una distancia de 50 unidades sobre la arista $\overline{OA}$ proporciona un incremento de 626.09 al valor de la función objetivo. En cambio, moverse 50 unidades en la dirección de la arista $\overline{OB}$ proporciona un incremento de 400 al valor de la función objetivo. Por lo tanto, la mejor dirección de movimiento la proporciona la arista $\overline{OA}$.

Entonces, el procedimiento indicaría que debe moverse sobre la arista $\overline{OA}$ hasta el vértice A, que será el nuevo vértice a partir del cual se repetirá el procedimiento iterativo. El valor de la función objetivo en este punto es de 1 400.

En la siguiente iteración, se notará que de las dos aristas que inciden sobre el vértice "A", solamente la $\overline{AC}$ proporciona una dirección de movimiento que aumenta el valor de la función objetivo. Un movimiento en el sentido $\overline{AO}$ por fuerza lo disminui

Fig. 10

EL METODO SIMPLEX
APLICADO AL PROBLEMA ESPECIAL



ría, por ser la dirección opuesta a la usada en la iteración anterior. Moverse en el sentido $\overline{AC}$ a partir de "A", conducirá al punto "C", que es la solución al problema.

Al llegar al vértice "C", se notaría que un movimiento en la dirección de cualquier arista que incide sobre él, produciría valores de la función objetivo inferiores al que se obtiene en el vértice "C". Así se verifica que el vértice "C" es efectivamente una solución del problema ilustrativo aquí presentado.

Algunos casos aberrantes

Hasta este momento se ha estado suponiendo que los problemas tratados están "bien" planteados y son consistentes con alguna situación real. Sin embargo, es posible idear problemas que son inconsistentes y no tiene solución. Específicamente, hay tres situaciones que generan ó pueden generar dificultades al quererlos resolver y que son los siguientes:

a) Inexistencia de soluciones.

b) Soluciones no-acotadas.

c) Ciclaje.

El primer caso ocurre cuando las restricciones no pueden ser satisfechas por ningún punto en el espacio n-dimensional en el que se haya definido el problema. Matemáticamente, diríamos que lo que ha sucedido es que las restricciones son inconsistentes ó contradictorias ya que definen el conjunto vacío. Un ejem plo ilustrativo se proporciona en la (*fig. 11a*), donde se ve que cualquier punto que satisfaga una de las restricciones violará la otra.

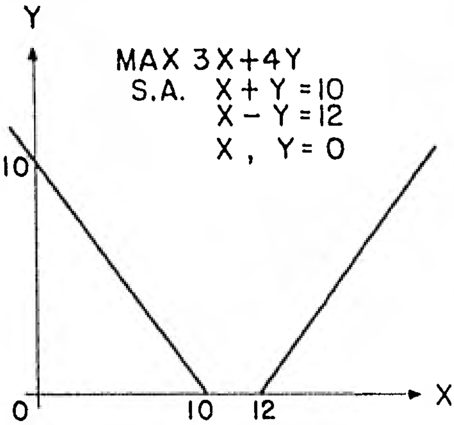
El segundo caso ocurre cuando la región factible no está acotada por algún lado y es posible desplazar la función objetivo indefinidamente de tal forma que siempre aumenta su valor. Es decir, es posible encontrar puntos dentro de la región factible que hacen que la función objetivo tome valores tan grandes como se quiera. El ejemplo de ésto se ilustra en la (*fig. 11b*)

Finalmente, notamos en el ejemplo del agricultor que los vértices de la región factible quedan definidos por la intersección de dos rectas. Estas rectas son los conjuntos de puntos que satisfacen las restricciones respectivas con estricta igualdad. En general, en espacio n-dimensional bastan n planos planos para definir un punto extremo. Cuando se tienen más de n planos que se intersectan en el mismo vértice se dice que es un vértice degenerado. Se han construído ejemplos matemáticos con vértices degenerados, que hacen que el método simplex al llegar ahí entre en un círculo vicioso y nunca salga de ese vértice, de tal forma que se seguiría iterando "ad infinitum", y jamás se encontraría la solución al problema. Este es el problema de "ciclaje" (*fig. 11c*).

En la práctica, aunque se dan casos de degeneración con cierta frecuencia, se han diseñado métodos para evitar el problema, aún en vértice muy degenerados. Por lo tanto no se considera un

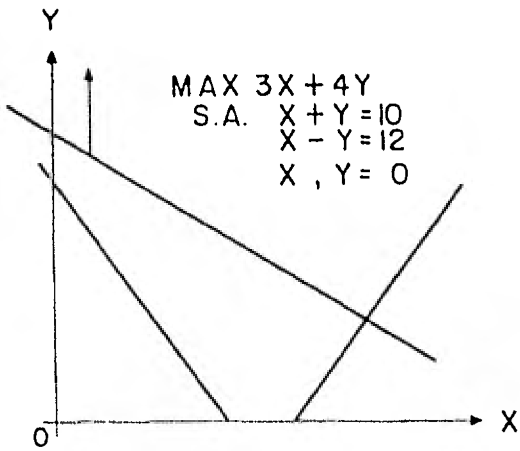
Fig. 11

CASOS ABERRANTES



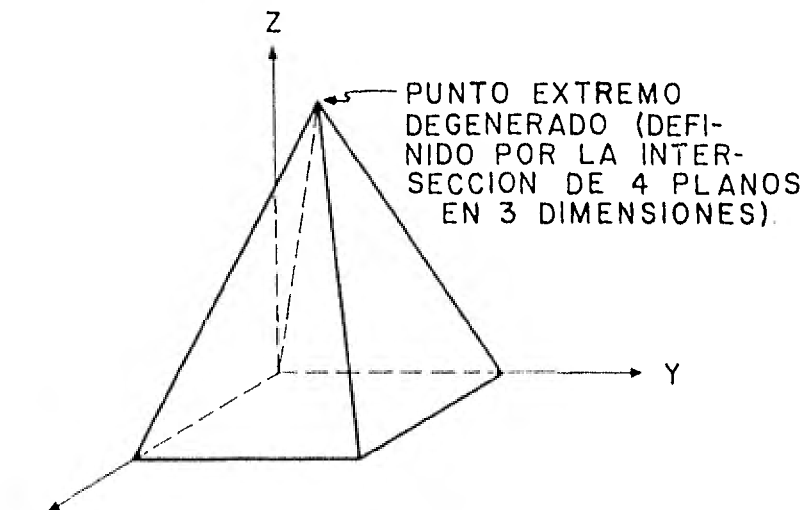
(a)

INEXISTENCIA DE UNA SOLUCION



(b)

VALORES INFINITOS DE LA FUNCION OBJETIVO



(C) DEGENERACION

problema serio.

Cuando se presenta alguno de los otros casos en la práctica, generalmente se trata de un error en la formulación. Todos los programas comerciales de computador sobre el método Simplex tienen formas de detectar estas situaciones, la cual permite normalmente corregir la formulación para que los problemas que resulten no presenten las aberraciones mencionadas.

CAPITULO IV

RELACION DE LA PROGRAMACION LINEAL CON LA ADMINISTRACION

IV. RELACION DE LA PROGRAMACION LINEAL CON LA ADMINISTRACION

En los capítulos procedentes, se ha tratado de dar un enfoque de la técnica de investigación de operaciones más conocida: la programación lineal.

Se puede resumir, en general, que las etapas de un proyecto de investigación de operaciones son:

1. Planteamiento de problemas
2. Construcción del modelo
3. Deducción de una solución
4. Prueba del modelo y evaluación
5. Ejecución y control de la solución

De hecho, cada fase procede normalmente hasta que se termina el proyecto e interacciona en forma contínua con las otras. En el presente trabajo, se examinaron someramente las primeras tres fases en forma independiente, aunque debe tenerse en mente que es probable que, en el transcurso del tiempo, todas se superpongan e interaccionen.

Como se verá más adelante, la investigación de operaciones a pesar de ser una rama importante del conocimiento, es de un carácter interdisciplinario. Esta característica hace que sea útil en una gran variedad de campos, como se expuso en un capítulo anterior. Por lo mismo, en el enfoque de este trabajo, es de mucha importancia conocer las características que entraña otra ciencia que está íntimamente ligada a la investigación operacio nal: la administración.

De acuerdo con la tendencia de la ciencia administrativa, la investigación de operaciones es sólo un elemento dentro de los campos instrumentales de la administración. Lo anterior lo trataremos de aclarar en lo que sigue.

LA ADMINISTRACION

Existen varias definiciones de la "administración". Algunos han dicho simplemente que administración implica "que se hagan las cosas a través de la acción humana". Esto significa que el elemento humano es indispensable para cualquier actividad administrativa. Por esta razón, la operación y control de una máquina ó computadora no es admistración.

El industrial francés Henri Fayol es considerado por muchos como el "padre de la teoría de la administración". Esta teoría apareció en su publicación *Administration Industrielle et Générale* (1949). Su tesis afirmaba que la "función" administrativa, a diferencia de las funciones técnicas, comerciales, financieras y contables, encuentran su único apoyo en el personal de la organización. Fayol decía que la administración implica proyectar y planear, organizar, coordinar y controlar. Proyectar significa, para él, analizar el futuro y formular un plan de acción; organizar significa manejo del equipo humano y del material para cumplir con los objetivos de la organización; coordinar, dice, es el unificar, armonizar y sintetizar todas las actividades y los esfuerzos; controlar representa la seguridad de que todo se hará de acuerdo con las reglas y políticas establecidas.

Longeneker, por otro lado, dice que la administración es un proceso consistente en las actividades del administrador que tengan que ver con la toma de decisiones, coordinación de los esfuerzos de grupo y con el liderazgo. Johnson, Kast y Rosenzweig opinan que "lo más fundamental de la administración es la coordinación" y que "la administración es la fuerza primaria dentro de una organización que coordina las actividades de los subsistemas y los relaciona con el ambiente".

Koontz y O'donell exponen que "la administración es la realización de los objetivos deseados a través de la creación de un ambiente favorable de trabajo, producido por elementos humanos que trabajan en grupos organizados", y, más recientemente, la definen como "el diseño ó creación y mantenimiento de un ambiente interno en una organización donde individuos, actuando por grupos, pueden trabajar eficientemente por la obtención de los objetivos fijados".

Las definiciones antes expuestas incluyen las funciones comunes de la administración; ó sea, las actividades que los administradores desempeñan y de las cuales ellos son los responsables. Además, existen muchos conceptos básicos sobre la administración. Fayol enumeró los siguientes principios básicos:

1. Autoridad
2. Disciplina
3. División de trabajo

4. Unidad de mando
5. Unidad de dirección
6. Subordinación de intereses individuales al interés común
7. Centralización
8. Línea de autoridad
9. Equidad
10. Iniciativa
11. Orden

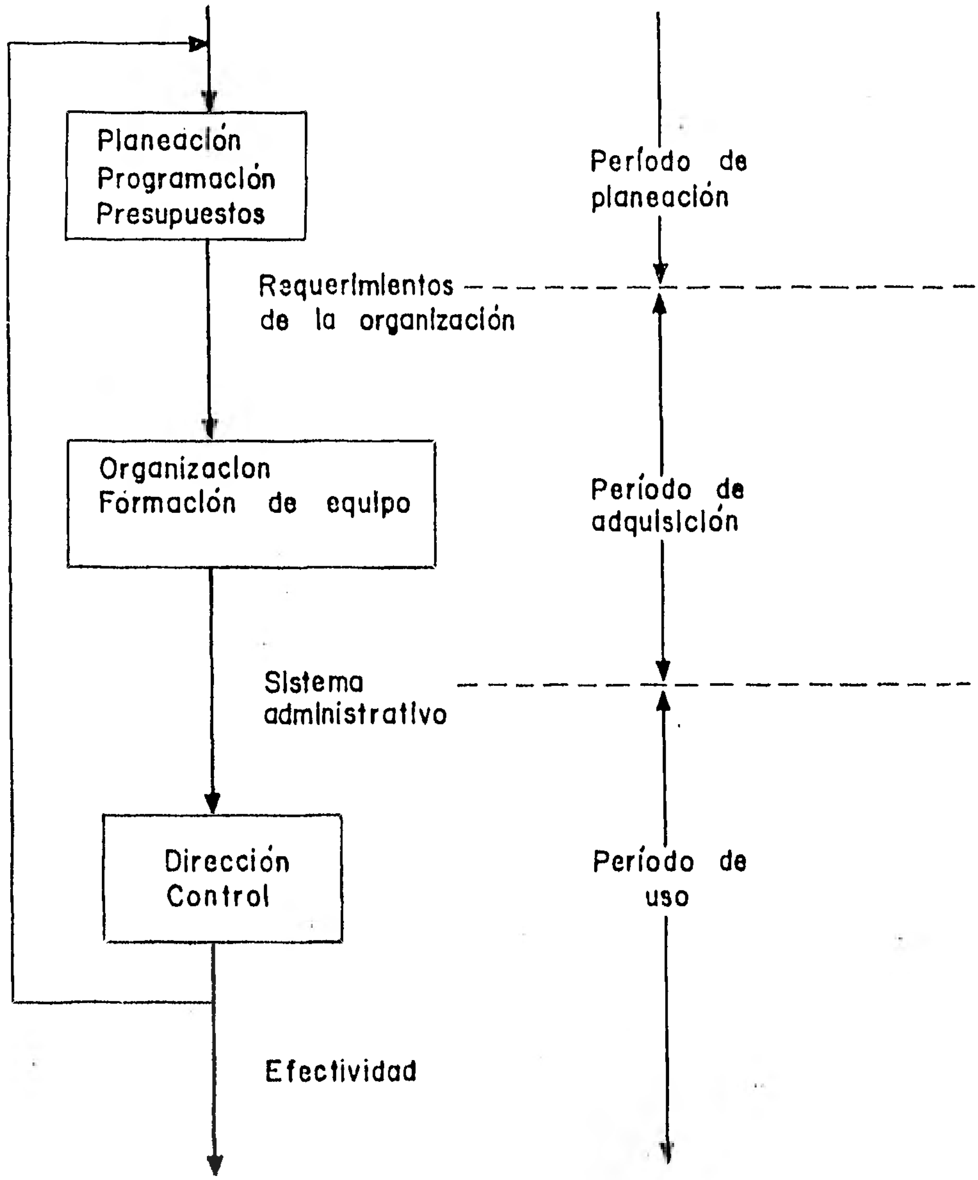
Otros han incluído, además ó en lugar de los antes mencionados, los siguientes:

1. Responsabilidad y autoridad
2. Relaciones y funciones de *staff* y de línea
3. Coordinación
4. Control
5. Descentralización
6. Organización formal e informal
7. Comités
8. Administración por objetivos

La (*fig. 12*) presenta la aplicación del ciclo de vida de un sistema, a un sistema administrativo. Aquí se puede ver que el período de planeación del ciclo de vida administrativo consiste de las metas y objetivos de la organización, así como la satisfacción de las mismas por medio de un plan y de un programa. El período de adquisición consta del diseño e implementación de la organización y sus recursos. El período de uso consiste en la

Fig. 12

EL CICLO BASICO ADMINISTRATIVO



operación y mantenimiento de la organización, la dirección y coordinación de sus actividades, la medición y control de su eficiencia para llegar a los objetivos deseados.

En general, la administración de empresas se organiza en cuatro categorías principales, tal y como se ilustra en el siguiente cuadro:

CLASIFICACIONES DE ESTUDIOS DE ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS

a) CAMPOS FUNCIONALES	*Contabilidad* *Finanzas* *Mercadotécnia* *Personal* *Producción*
b) CAMPOS INSTRUMENTALES	*Contabilidad* *Ciencias conductuales* *Ciencias de computación* *Administración* *Economía administrativa* *Análisis cuantitativo, incluyendo investigación de operaciones*
c) CAMPOS ESPECIALES	*Banca* *Seguros* *Negocios internacionales* *Bienes raíces* *Transportes*
d) CURSOS DE INTEGRACION	*Administración* *Economía administrativa*

LA INVESTIGACION DE OPERACIONES

La investigación de operaciones, no provee decisiones sino que desarrolla datos cuantitativos para ayudar al empresario a tomar las decisiones. A menudo se dice que requiere trabajo de equipo en la solución de los problemas, es decir el uso de una gran variedad de talentos, tales como los de los matemáticos, los especialistas en negocios, los psicólogos, los ingenieros y los contadores. Aunque estas condiciones pueden ser deseables, ninguna parece esencial para la investigación de operaciones.

Como se observa en el cuadro anterior, la investigación de operaciones, desde el punto de vista administrativo es "la aplicación del método científico al estudio de alternativas en un determinado problema con vista a proveer una base cuantitativa para llegar a una solución óptima en términos de las metas perseguidas"; en otras palabras, puede llamársele "sentido común cuantitativo".

Se ha tratado durante mucho tiempo de resolver los problemas de la administración en forma científica, pero los investigadores de operaciones han ofrecido un elemento de novedad en la completa y ordenada forma de sus enfoques. Han hecho énfasis en la definición de problemas y metas, colectando y evaluando cuidadosamente hechos, desarrollando y probando hipótesis, determinando relaciones entre los hechos, desarrollando y comprobando las predicciones basadas en la hipótesis y diseñando medidas para evaluar la efectividad de un curso de acción.

Esta resolución de problemas administrativos, utilizando la investigación de operaciones ha hecho que se generen técnicas sistemáticas de solución. La más importante es el desarrollo de la programación lineal, en el aspecto de dar solución a problemas de varias alternativas de decisión.

Como se mencionó anteriormente, el desarrollo actual de la programación lineal para la administración se le atribuye al matemático George Dantzig quien presentó en 1947, su método Simplex, como un procedimiento sistemático para resolver un problema de programación lineal.

Ahora bien, la programación lineal se ha utilizando como una herramienta básica en la toma de decisiones en condiciones de certidumbre lo que ocurre, como se explicó anteriormente, cuando el decisor conoce el estado de la naturaleza que ocurrirá con absoluta certeza.

En tales situaciones de decisiones, la persona que toma la decisión conoce el conjunto de sus estrategias posibles; también conoce los resultados correspondientes a cada una de las estrategias disponibles y conoce sus preferencias por los diversos resultados considerados.

A primera vista, este tipo de problemas de decisiones puede parecer trivial, pero no lo es. Es un hecho que numerosos, importantes y costosos problemas de decisiones corresponden a esa clase de situaciones.

Como las elecciones que deben hacerse se han vuelto cada vez más numerosas y las decisiones que hay que tomar, en tales situaciones, más complicadas, se han buscado métodos que complementen y ayuden al papel desempeñado por el criterio del decisor y para ello se han encontrado particularmente útiles las matemáticas. Su empleo para ayudar a tomar decisiones puede ser descrito como investigación de operaciones, y la programación lineal, es uno de los instrumentos que ha alcanzado especialmente un amplio campo de aplicación.

La programación lineal es similar a muchos de los métodos matemáticos para resolver problemas en que el primer paso es elaborar un modelo del problema a resolver. Como la solución del problema matemático es realmente una solución del modelo matemático que representa el problema, la solución no es mejor que el modelo matemático mismo. Si el modelo usado es considerablemente diferente de la situación real, la solución a que se llegue será de muy poco valor; por el contrario, aún cuando la situación real no esté representada por el modelo con toda exactitud, si éste se aproxima razonablemente a las condiciones reales, se verá que el resultado obtenido para el modelo es una buena solución del problema real.

Para concluir, la investigación de operaciones (con énfasis, en nuestro caso, a la programación lineal) y la administración como ciencia, tienen una relación notable, ya que nos auxilian en la toma de decisiones para problemas que requieren de una solución más confiable y eficaz. Sin embargo, esta relación, tiene que estar respaldada por personas de diferentes discipli- nas y con la opinión y aprobación de ellas. Esto significa que podríamos tener una solución óptima desde el punto de vista de la investigación de operaciones, pero no factible desde algún o tro punto de vista (por ejemplo, social, político, etc.), lo que nos lleva a decir que es necesario ese respaldo de las ciencias afines al problema en cuestión.

CAPITULO V

CONCLUSIONES

V. CONCLUSIONES

De acuerdo a lo expuesto en los capítulos anteriores, es posible considerar las siguientes conclusiones:

Como primer punto importante de este trabajo, se han queri do establecer las bases conceptuales de lo que se entiende por "planeación", desde un enfoque netamente administrativo. La to ma de decisiones - la selección de un curso de acción entre varias alternativas - está en el corazón de la planeación. Los ad ministradores la toman como su principal objetivo porque deben escoger en forma constante lo que se debe hacer, quién debe hacerlo; cuándo, dónde y, a veces, cómo debe hacerse.

Esta toma de decisiones es, sin embargo, sólo un paso en la planeación. Es también, parte de la vida diaria de cada indivi duo. Además, requiere de la selección racional de un curso de acción. Pero, ¿qué se entiende por racionalidad?. En general, puede observarse que el actuar o decidir en forma racional por parte de una persona requiere ciertas condiciones. En primer lu gar, debe tratar de alcanzar alguna meta que no puede alcanzarse sin una acción objetiva. Segundo, debe tener una clara comprensión de los caminos por los cuales puede alcanzarse la meta bajo las circunstancias y limitaciones existentes. Tercero, el racionalista debe tener la habilidad suficiente como para anali zar y evaluar alternativas a la luz de la meta deseada. Y, finalmente, debe desear lo óptimo a través de una selección de aquella alternativa que permite alcanzar la meta en la mejor for ma.

Es poco frecuente que se puede alcanzar una racionalidad completa, particularmente en el área de la administración. En primer lugar, dado que nadie puede tomar decisiones por aquéllo que ya sucedió, se deben tomar decisiones para el futuro y el futuro encierra incertidumbre. En segundo lugar, a menudo es difícil reconocer las alternativas que pueden seguirse para alcanzar una meta; ésto es particularmente cierto, cuando la toma de decisiones encierra el ver oportunidades de hacer algo que nunca se ha hecho antes. Más aún, en muchas casos no se pueden analizar todas las alternativas, aún con las más nuevas técnicas de análisis y de cálculo disponibles.

Una vez que se han aislado las alternativas apropiadas, el paso siguiente en la planeación, es la evaluación de ellas y la selección de aquéllas que contribuyan a la meta en la mejor forma. Para ésto, es menester considerar dos tipos de factores: tangibles e intangibles. Los factores tangibles consisten en cosas que pueden medirse, tales como varios tipos de costos fijos y operativos, tiempo y costo de servicios auxiliares. Los intangibles es decir, los no medibles, tales como la cualidad de las relaciones laborales, el riesgo de cambio tecnológico ó el clima político, son de considerar en el análisis para obtener éxito en nuestro objetivo.

Ahora bien, la técnica generalmente más usada y ciertamente más efectiva para seleccionar alternativas, cuando involucran decisiones mayores, es la investigación y el análisis. Este enfoque requiere que para solucionar un problema, deba prime ro comprenderse bien. Encierra por tanto, la búsqueda de relaciones entre las variables más críticas y las restricciones y premisas que afectan la meta perseguida. En segundo lugar, como se dijo antes, la solución de un problema de planeación requiere que se le separe en sus diferentes partes componentes y que se estudien los varios factores tangibles e intangibles.

Una característica de la técnica de investigación y análisis es el visualizar un problema y sus relaciones en términos matemáticos. La capacidad de reducir un problema a su forma conceptual representa un paso importante hacia su solución.

De las aproximaciones de investigación y análisis a la toma de decisiones, la investigación de operaciones ó, como se ha llamado con frecuencia, análisis operacional, es de las más completas.

La investigación de operaciones utiliza, en forma resumida, los siguientes métodos esenciales que se aplican a la toma de decisiones:

1. Enfasis en los modelos (la representación lógica de una realidad ó problema). Estos pueder ser, naturalmente, simples ó complejos.

2. Enfasis sobre metas en una área problemática y desarrollo de medidas de efectividad en la determinación de si una solución planteada es promisoria en la obtención de la meta.

3. La tentativa de incorporar en un modelo las variables de un problema, ó por lo menos aquéllas que parezcan importantes en su solución.

4. Plantear el modelo con sus variables, restricciones y metas en términos matemáticos en forma tal que se pueda percibir claramente, sujetar a simplificación matemática y utilizar en forma rápida para el cálculo a través de la sustitución de símbolos por cantidades.

5. La tentativa de cuantificar las variables de un problema en cuanto sea posible, puesto que sólo datos cuantificables pueden insertarse en un modelo para obtener un resultado finito.

6. La tentativa de complementar datos cuantificables con métodos matemáticos y estadísticos, haciendo en esta forma que el problema matemático y de cálculo con incertidumbre sea fácil de trabajar dentro de un márgen de error relativamente pequeño e insignificante.

De todos estos métodos, quizá la herramienta básica y la mayor contribución de la investigación de operaciones ha sido la construcción y el uso de modelos conceptuales en la toma de decisiones. Los modelos útiles para la planeación se denominan de "decisión" ó modelos de "optimización" y se diseñan para llevar a la selección de un curso óptimo de acción entre alternativas posibles.

Como se sabe y se explicó en su momento, la construcción de modelos de decisión requiere del uso de instrumentos ó técnicas de tipo matemático como son: la Teoría de Probabilidades; Teoría de Juegos, Teoría de Colas ó de las líneas de espera, la Programación Lineal, etc.

En este trabajo, nos dirigimos únicamente a la técnica de Programación Lineal que, como se explicó, nos sirve para determinar la combinación óptima de recursos limitados para obtener una meta deseada. Se basa en la suposición de que existe una relación lineal entre las variables y que los límites de variación se pueden determinar. Por tanto, esta técnica es especialmente útil donde los datos de insumos pueden cuantificarse y los objetivos pueden sujetarse a medidas definidas.

Limitaciones de la Programación Lineal

Como se podría esperar, la técnica de programación lineal, ha tenido su uso en áreas problemáticas tales como la planeación de la producción, costos y rutas para el transporte, etc., como se expuso en el capítulo tercero de este trabajo.

Sin embargo, no se deben menospreciar las limitaciones de la investigación de operaciones en general, y en particular de la programación lineal. En este trabajo se palpan claramente en el problema de aplicación a la agricultura tratado en el *inciso* c del tercer capítulo. A continuación citaremos algunas limitantes usuales de la investigación de operaciones.

En primer lugar, se enfrenta con la gran magnitud de los aspectos matemáticos y de cálculo. El número de variables e interrelaciones en muchos problemas, además de las complejidades de las relaciones y reacciones humanas, aparentemente indican matemáticas de orden mayor.

Como contraparte de esta limitante, el hombre ha desarrollado aún más los modelos hasta hacerlos simples y de fácil solución (tal es el caso del Método Simplex), además ha utilizado las - - computadoras electrónicas que pueden, ahora, analizar los resultados posibles de miles de alternativas. Pero las relaciones y reacciones humanas aún con estos adelantos, no es fácil predecirlas ó calcularlas.

En segundo lugar, aunque se han sustituído probabilidades y aproximaciones por cantidades desconocidas y el método científico está cuantificando factores que hasta ahora se consideraban imposibles de cuantificar, una mayor proporción de las decisiones importantes de los empresarios encierra factores intangibles. Hasta que estos puedan ser cuantificados, la investigación de operaciones tendrá una utilidad limitada. Relacionado con estos factores intangibles está la falta de información que sirva de insumo para hacer esta herramienta útil en la práctica, aún cuando la información deseada pueda obtenerse.

Una limitación adicional se refiere a la necesidad de establecer un puente entre el administrador y el investigador de operaciones entrenado. A los administradores en general, les falta conocimiento y la apreciación de las matemáticas, en la misma forma en que al matemático le falta la comprensión de los problemas administrativos. Este problema se está afrontando en forma progresiva, por las facultades de la administración, y, con mayor frecuencia por empresas que reúnen en un mismo equipo a los administradores con los investigadores de operaciones. Pero es todavía la mayor causa de lentitud en el uso de la investigación de operaciones.

Un serio problema, finalmente, de la investigación de operaciones por lo menos en sus aplicaciones a problemas complejos, consiste en que el análisis y el uso de computadoras electrónicas son sumamente costosos, y muchos problemas no son suficientemente importantes como para justificar este costo.

Por último, es necesario aclarar que este trabajo no pretende (y no es el objetivo) tratar todos los problemas implícitos que contiene la investigación de operaciones y su relación con la administración, sino dar los elementos básicos de la técnica de la programación lineal como una herramienta en cualquier campo donde se requiera optimizar los recursos de un determinado sistema.

Recomendaciones

Como se observa de lo anteriormente dicho, sólo hemos tratado un aspecto de una de las funciones administrativas más importantes, la planeación. Queda por ver y analizar las demás funciones de la administración como son la organización, la dirección, el control y la coordinación.

Se recomienda que, al leer la parte relacionada con el método simplex revisado, previamente se tengan algunos conocimientos de matrices y de álgebra lineal. Además, ya como última recomendación, se sugiere que este trabajo puede ser ampliado y enriquecido con los temas relacionados con Dualidad, Análisis de Sensibilidad y Programación Paramétrica, que en este trabajo no fueron posible analizar por falta de espacio y de tiempo, pero que pueden ser tomados como tema para un futuro estudio.

ANEXO

DEFINICIONES

INVESTIGACION DE OPERACIONES.- Es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas (hombre-máquina) a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de toda la organización.

METODO DE RIEGO.- La aplicación del agua de riego se suele llamar de acuerdo con el modo de hacerla llegar al suelo.

PLANEACION.- Es el proceso que consiste en análisis documentado, sistemático y tan cuantitativo como sea posible, previo al mejoramiento de una determinada situación.

RIEGO.- Se define como el conjunto de técnicas y obras que producen la aplicación artificial de agua al suelo, como complemento de la precipitación con el fin de humedecer la zona donde se encuentra abajo el sistema radicular de las plantas, de tal manera que las mismas pueden obtener humedad necesaria para satisfacer las demandas originadas por la transpiración, formación de tejidos, así como también la evaporación del agua del suelo, donde dichas plantas crecen y se desarrollan con el objeto de obtener de ellas la máxima producción.

SISTEMA DE RIEGO.- Desde el punto de vista de la ingeniería, un sistema de riego es el conjunto de estructuras necesarias para captar, conducir y distribuir las aguas a los suelos, lo cual permite aplicar una lámina requerida para suplir las deficiencias de humedad exigidas por las plantas, durante un período determinado de germinación y crecimiento; comprende también todas aquellas obras que ayudan y mejoran el drenaje superficial o interno de los suelos (cuando este último es necesario) y aquellas que como las de vialidad interna permiten el transporte de los productos hacia los mercados consumidores. Desde el punto de vista económico, un sistema de riego es una comunidad de unidades de producción y como tal a las inversiones de capital, debe obedecer la obtención de beneficios directos y marginales que permiten la recuperación de las sumas invertidas.

Desde el punto de vista social, permite la distribución equitativa de la tierra al agricultor que la trabaja y le garantiza que sus cosechas no sufrirán por falta de agua, fijando la población campesina al campo.

LOS RECURSOS HIDRAULICOS DE MEXICO

Desde los tiempos más remotos el agua ha constituído un factor fundamental en el desarrollo y la estructuración política, social y económica de los pueblos.

En torno a los grandes ríos, lagos y lagunas de los continentes tuvo sus orígenes la civilización. La transición del nomadismo al sedentarismo se debió, precisamente, al surgimiento de la agricultura (sobre todo, de la de regadío), se requirió la construcción de diques, canales, sistemas de drenaje, terrazas, chinampas y otras obras. Con ello el hombre comenzó su dominio del medio ambiente natural y pasó a una vida fundada en los sistemas de producción.

En la actualidad son múltiples los problemas que se tienen en el país relativos a la cantidad y a la calidad del agua disponible debido, sobre todo, a lo irregular de su distribución y a las demandas ocasionadas por el crecimiento demográfico y la expansión económica y social. Como es sabido, existen regiones con enormes carencias de agua que, debido a una desequilibrada localización y concentración de los asentamientos humanos, se ven obligadas a importarla de otras cuencas; en cambio, en otras zonas la abundancia del recurso provoca inundaciones.

El país dispone de un potencial hidráulico formado por su topografía accidentada y una disponibilidad de agua renovable igual a 440 000 millones de metros cúbicos al año, de los cuales se extrae un 37% y se consume un 10%.

Sin embargo, las demandas de agua derivadas de la estrategia de desarrollo socioeconómico seleccionada para la nación dan por resultado cifras al año 2 000 que, si bien para consumos de agua ascienden tan sólo al 20% de la disponibilidad de este recurso, en el caso de las extracciones alcanzarían valores por encima del potencial de agua disponible si se conservaran a fututuro las políticas actuales con respecto al manejo de este recurso.

La ingeniería civil tiene por objeto realizar las obras físicas que demandan los distintos sectores de la actividad económica como parte de sus procesos de producción e intercambio de satisfactores para el desarrollo y el bienestar de la sociedad. En este contexto, la actividad profesional de los ingenieros civiles ha formado y forma parte esencial del manejo del agua. De hecho, la historia hidráulica de México se encuentra íntimamente relacionada con el desarrollo de esa profesión y, a futuro, para lograr la disponibilidad del agua, tanto en cantidad suficiente como de calidad adecuada, es imprescindible la participación del gremio en todas las facetas del aprovechamiento y la administración del recurso.

A pesar de su potencial hidráulico limitado, el país puede satisfacer las demandas de agua que se generarán como consecuencia del desarrollo socioeconómico esperado hacia finales del presente siglo. (Según se puede concluir del estudio sobre "El aprovechamiento y la administración del agua como factores para el desarrollo y bienestar", elaborado por el Comité de Estudio del Agua del Colegio de Ingenieros Civiles de México).

Aprovechamiento del agua

Con el propósito de regular, para fines de aprovechamiento, de los recursos hidráulicos con que cuenta nuestro país, se ha demandado de la ingeniería civil mexicana la construcción de más de 1 200 presas. Estas representan en conjunto, una capacidad de almacenamiento de casi 125 000 millones de metros cúbicos, el 30% de escurrimiento superficial anual.

Para efectos prácticos, puede decirse que dichas presas se construyeron durante los últimos 30 años, ya que en 1950 la capacidad de las presas representaba apenas el 4% de la disponibilidad de agua superficial; cifra que se incrementó en forma importante durante las tres décadas siguientes, alcanzando valores iguales al 10% en 1960, 24% en 1970 y 30% en 1980.

Las características físicas del conjunto de presas construídas hasta la fecha reflejan la magnitud del reto que se logró superar. En la actualidad existen en el país 21 presas con capacidades de almacenamiento superiores a los 1 000 millones de metros cúbicos, y 49 con alturas de cortina que rebasan los 50 metros.

Usos del agua

Se estima que en la actualidad se extraen aproximadamente 160 000 millones de metros cúbicos anuales de agua, de los cuales se consume el 28%; es decir, se requieren 5 200 metros cúbi cos de agua por segundo.

Desde el punto de vista de cantidad, el agua destinada al riego representa el mayor volumen consumido, pero en lo que respecta al factor calidad es fundamental considerar el agua utilizada para el consumo doméstico.

La demanda de agua para riego representa el 30% de las extracciones y más del 90% de los consumos totales, ya que este recurso es uno de los insumos principales en la producción agrícola.

De total de extracciones para este uso, los distritos de riego solicitan 50%, las pequeñas unidades de riego utilizan - 18%, y los particulares extraen y consumen el 23% restante. En ésto es necesario destacar el papel fundamental que desempeña la infraestructura a una capacidad de almacenamiento en presas de más de 30 000 millones de metros cúbicos y 5.4 millones de hectáreas en distritos de riego a cargo de la Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos en unidades de pequeña irrigación.

Balance hidráulico actual

Al comparar la disponibilidad con los requerimientos de agua que se tiene en la actualidad, se observa que, a nivel nacional, las extracciones representan el 37% de la oferta de este recurso, y que el consumo asciende al 10% de los escurrimientos. Sin embargo, al hacerse los balances hidráulicos para diferentes elevaciones sobre el nivel del mar, resulta que en las partes más altas y en las más bajas del país se tienen relaciones extracción-escurrimiento similares, pero en el altiplano el consumo de agua es tres veces mayor que en las zonas bajas. Esto no es más que un simple indicador de los problemas (actuales y futuros) que se enfrentan con respecto al aprovechamiento racional e integral de los recursos hidráulicos de la nación y, por lo tanto, un señalamiento de una de las responsabilidades y retos que deben superar la ingeniería de México.

Beneficios directos e indirectos

Actualmente, para la actividad agrícola se cuenta con 5.4 millones de hectáreas de riego que, aún cuando solo consitituyen el 30% de la superficie total cultivada, originan más del 50% del valor de la producción agrícola nacional; es decir, las zonas de riego constribuyen al Producto Interno Bruto del país -- (PIB) con, aproximadamente, 3%. En términos de volumen agrícola producido, las unidades y distritos de riego participan también con una aportación significante, ya que en 1981, en una superficie de 2.9 millones de hectáreas, se cosechó alrededor del 43% de la producción nacional de cultivos básicos (maíz, frijol, arroz, trigo, sorgo, soya, ajonjolí y cártamo).

Aunque la superficie irrigada del país ha crecido de manera importante, aún falta mucho por hacer. Desde el punto de vista de los recursos naturales existentes, es factible abrir al riego un área similar a la que se dispone en la actualidad para el mismo uso; el potencial de tierras para riego se calcula en más de 10 millones de hectáreas, de las cuales aproximadamente la mitad ya está en operación. Sin embargo la mayor parte de la superficie por habilitar se localiza en el trópico húmedo, donde los problemas de tecnología y el manejo adecuado de los ecosistemas requieren de plantamientos cuidadosos y soluciones poco convencionales.

Los problemas relacionados con el agua destinada al riego se caracterizan principalmente por la baja eficiencia en el uso del recurso (el concepto de eficiencia se interpreta como la relación que existe entre el volumen teórico requerido por los cultivos y el volumen de agua distribuído en riego) y por las dificultades de financiamiento en los distritos.

Cuatro factores, cuya importancia relativa varía en cada caso, se combinan para dar como resultado la eficiencia hidráulica en este tipo de aprovechamiento:

- Eficiencia en el almacenamiento
- eficiencia en la conducción y distribución del agua
- eficiencia en la aplicación del agua a nivel parcelario
- productividad del agua

El primero depende de la operación del vaso y está relacionado con las pérdidas por evaporación en los embalses de las presas.

En los distritos de riego la eficiencia relativa a la conducción y distribución del agua es igual a 70%. Aunque esta cifra prácticamente se ha mantenido constante durante la última década, cuando los canales de distribución están revestidos, el indicador anterior se incrementa entre 8% y 10%.

Al aplicar el agua en las parcelas se aprovecha aproximadamente un 67% del recurso, ya que con las técnicas empleadas en el riego por gravedad se pierde agua debido a percolación profunda en los surcos ó por escurrimientos superficiales excesivos.

La combinación de los dos factores anteriores dá como resultado una eficiencia global de 47%; es decir, se aprovecha menos de la mitad del agua extraída. En este sentido, debe mencionarse que si ambos factores se incrementarán en 5%, resultaría una eficiencia global igual a 54%, lo cual equivaldría a rescatar un volumen anual de casi 3 600 millones de metros cúbicos a nivel de parecela (es decir, se lograría un ahorro de 7% en 51 200 millones de metros cúbicos anuales. Con esta cantidad de agua podrían regarse más de 380 000 hectáreas adicionales en dobles cultivos.

El cuarto factor que incide en el nivel de aprovechamiento del agua de riego es la productividad del recurso. Este puede calcularse con base en el volumen de producción obtenido por unidad de agua y depende de la relación existente entre el patrón de cultivos seleccionado y las condiciones locales para el desarrollo de los mismos. De las observaciones realizadas en diversos distritos de riego del país, se concluye que dicha producti vidad acusa fuertes variaciones (por ejemplo, en diferentes zonas del país la productividad del trigo varía de 100 a 600 gramos por metro cúbico de agua, y la de maíz de 100 a 900), lo -- cual puede ser un reflejo del empleo de patrones de cultivo obligados.

En cuanto a los aspectos financieros, se ha visto que los recursos generados por el cobro del servicio de riego permiten cubrir una proporción cada vez menor de los costos de conservación y operación de las obras. Por ello, en la actualidad dichos recursos constituyen sólo el 17%, mientras que hace 15 años las cuotas representaban el 70% de los costos mencionados.

B I B L I O G R A F I A

Libros

(1) ACKOFF, Russell L. y Maurice W. Sasieni: "*Fundamentos de Investigación de Operaciones*", México, LIMUSA-WILEY, 1971, 502 págs.

(2) BAZARAA, Mokhtar S y John J. Jarvis: "*Programación Lineal y Flujo en Redes*", México, LIMUSA, 1981, 539 págs.

(3) BENET, Humberto J. : *Principios de Investigación de Operaciones*", México, Herrero Hermanos, 1974, 236 págs.

(4) BRIGHAM, Eugene F, y James L. Pappas: "*Economía y Administración*", México, Interamericana, 2a. ed., 1978, 583 págs.

(5) CARDENAS, Miguel A.: "*La Ingeniería de Sistemas: filosofía y técnicas*", México, LIMUSA, 1974, 293 págs.

(6) GASS, Saul I.: "*Programación Lineal (Métodos y Aplicaciones)*", México, Continental, 3a. impresión, 1981, 444 págs.

(7) GEREZ, Victor y Manuel Grijalva: "*El Enfoque de Sistemas*", México, LIMUSA, 2a. reimpresión, 1980, 580 págs.

(8) GEREZ, Victor y Verónica Czitróm: "*Introducción al Análisis de Sistemas e Investigación de Operaciones*", México, Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1982, 320 págs.

(9) GUILLEN GONZALEZ, José Angel: "*Evaluación de Métodos de Riego*", Chapingo, Méx., Universidad Autónoma Chapingo, Depto. de Irrigación, 1980, 93 págs. (Boletín Técnico Núm. 19).

(10) HINOJOSA, Jorge Arturo: "*Apuntes de Planeación*", México, UNAM, Facultad de Ingeniería- 1981, 66 págs.

(11) IBARRA, José: "*Asignación de Recursos, Programación Lineal y Teoría Económica*", Santiago de Chile, CEPAL, 1970, 48 págs. (Serie 1;2)

(12) JAUFFRED, Francisco J, et, al,; "*Métodos de Optimización (Programación Lineal-Gráficas)*", Representaciones y Servi ciones de Ingeniería, 1980.

(13) KALDMAN ENCINAS, Juan Francisco: "*Introducción a la Administración Rural*", México, Centro Nacional de Productividad, 1966, 171 págs.

(14) KOONTZ, Harold y Cyril O'donell: "*Curso de Administración Moderna (Un Análisis de las funciones de la Administración)*", México, McGraw-Hill, 5a. ed., 1973, 785 págs.

(15) MENA MARTINEZ, José Antonio: "*Notas de Programación Lineal*), Chapingo, Méx., Universidad Autónoma Chapingo, Departamento de Irrigación, 1980, 195 págs.

(16) OLIVERA SALAZAR, Antonio: "*Métodos Numéricos*", México, -- UNAM, Facultad de Ingeniería, Apuntes de Clase, s.p.i.

(17) PRAWDA, Juan: "*Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones (Vol. 1 Modelos Determinísticos)*", México, LIMUSA, 4a. reimpresión, 1982, 935 págs.

(18) RHEAULT, Jean Paul: "*Introducción a la Teoría de las Decisiones con Aplicaciones a la Administración*", México, -- LIMUSA, 4a. reimpresión, 1974, 212 págs.

(19) SECRETARIA DE LA PRESIDENCIA: "*Sector Agropecuario (Aspectos metodológicos de la Programación)*", México, Coordinación de Programación, 1976, 160 págs.

(20) SIMONNARD, Michel: "*Linear Programming*", Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 11a. impresión, 1966, 430 págs.

(21) UNAM, FACULTAD DE INGENIERIA: "*Apuntes del Curso Administración en Ingeniería*", México, Departamento de Construcción, 1981, 157 págs.

Documentos

COLEGIO DE INGENIEROS CIVILES DE MEXICO: "*El Aprovechamiento y la Administración del Agua como Factores para el Desarrollo y Bienestar*", México, CICM, Comité de Estudio del Agua, 1982,79 págs.

COMISION DEL PLAN NACIONAL HIDRAULICO: "*Actividades en Estudio del Proyecto: Desarrollo de Modelos para la Planeación Regional de la Agricultura con Infraestructura Hidráulica*", s.p.i. 30 h.

FUENTES MAYA, Sergio y Teresa Ugalde R.: "*Manual de Programación Lineal*", Comisión del Plan Nacional Hidráulico, S.A.R.H., 1980.

MASTACHE, Jorge et. al.: "*Programación Lineal*", México, Comisión del Plan Nacional Hidráulico, 1975.

MEDEL, Fausto: "*Paquete Programación Lineal (Instructivo)*", México, Comisión del Plan Nacional Hidráulico, 1975.

SECRETARIA DE RECURSOS HIDRAULICOS: "*Manual de Programación Lineal*", México, Comisión del Plan Nacional Hidráulico, 1980.

Revistas

MURRAY-LASSO, M.A. y J.M. Sotomayor: "*Aplicación de la Computación a la Ingeniería de Sistemas*", Revista Ingeniería, UNAM, Vol. XLIV, Núm. 3, pp. 301-320, Julio-Septiembre, 1974.

VALENCIA JUAREZ Y EVIA, Carlos: "*Programación Lineal para la Formulación de Planes de Cultivo en los Distritos de Riego del País*", México, Recursos Hidráulicos, Vol. IV, Núm. 4, pp. 562-577, 1975.

Quiero hacer patente mi agradecimiento a todas aquellas personas que de una u otra forma, hicieron posible la realización de este trabajo, en especial, al Ing. Francisco Cánovas C. y al Lic. Daniel Jiménez.

Agradezco a la Comisión del Plan Nacional Hidráulico y en especial al personal de la Unidad de Documentación, las facilidades prestadas en lo referente al material proporcionado.