

709
146

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

"APLICACIONES DE UNA CALCULADORA PROGRAMABLE,
PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURAS
E HIDRAULICA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE INGENIERO CIVIL
PRESENTA: MARIO GUSTAVO ORDAZ SCHROEDER

México, D.F., diciembre de 1982



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

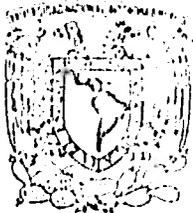
DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
6D-1-463



Universidad Nacional
Bogotá

Señor MARID GUSTAVO ORDAZ SCHROEDER
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. José Luis Trigos Suárez, para que lo desarrolle como tesis para su Examen Profesional de la carrera de Ingeniero ---- CIVIL.

"APLICACIONES DE UNA CALCULADORA PROGRAMABLE PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURAS E HIDRAULICA".

1. Introducción
2. Antecedentes de la aplicación de las computadoras electrónicas en ingeniería.
3. Breve descripción de la calculadora programable HP 41C/ CV.
4. Aplicaciones para la solución de problemas de - estructuras.
5. Aplicaciones para la solución de problemas de - hidráulica.
6. Conclusiones.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 19 de noviembre de 1982
EL DIRECTOR

Javier Jiménez Cortés

[Firma]

I N D I C E

	Pág.
1. INTRODUCCION	1
2. ANTECEDENTES Y PERSPECTIVAS DE LA APLICACION DE LAS COMPUTADORAS EN LA INGENIERIA	4
3. BREVE DESCRIPCION DE LA CALCULADORA HP41C/CV	11
4. APLICACIONES PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURAS	15
4.1 <u>Cálculo de deformaciones en vigas con sección transversal variable. Método de Newmark.....</u>	16
4.1.1 Introducción.....	16
4.1.2 Cálculo de momentos flexionantes en vigas.....	16
4.1.3 Cálculo de deformaciones en vigas	20
4.1.4 Programa NEWV	25
4.2 <u>Análisis de marcos planos. Método de Kani.....</u>	36
4.2.1 Introducción	36
4.2.2 Ecuaciones fundamentales	36
4.2.3 Programas KANI1, KANI2 y KANI3	41
4.3 <u>Cálculo de rigideces de empotramiento. Ecuacio- nes de Wilbur</u>	62
4.3.1 Ecuaciones fundamentales	62
4.3.2 Programa WILBUR	67
4.4 <u>Cálculo de configuraciones, frecuencias y períodos locales. Método de Newmark</u>	78
4.4.1 Ecuaciones fundamentales.....	78

	Pág.
4.4.2 Método de Newmark	82
4.4.2.1 Cálculo del primer modo	83
4.4.2.2 Modos superiores de vibración	85
4.4.3 Programa NEWM	89
4.5 <u>Análisis sísmico modal espectral</u>	99
4.5.1 Ecuaciones fundamentales	99
4.5.2 Programa ANA1.0D	102
5. APLICACIONES PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE HIDRAULICA	119
5.1 <u>Cálculo de tirantes críticos</u>	120
5.1.1 Ecuaciones fundamentales	120
5.1.2 Canales de sección trapecial	123
5.1.2.1 Dados b y Q , cálculo de y_c	124
5.1.2.2 Dados q y y_c , cálculo de b	130
5.1.2.3 Dados b y y_c , cálculo de Q	131
5.1.2.4 Programa YCT	132
5.1.3 Canales de Sección circular	141
5.1.3.1 Dados Q y D , calcular y_c	142
5.1.3.2 Dados Q y y_c/E , calcular D	145
5.1.3.3 Dados y_c y D , calcular Q	145
5.1.3.4 Programa YCC	146
5.2 <u>Cálculo de tirantes normales</u>	153
5.2.1 Ecuaciones fundamentales	153
5.2.2 Canales con sección trapecial	159

	Pág.
5.2.2.2 Datos b , s_0 y y_n , calcular q	156
5.2.2.3 Datos b , q y y_n , calcular s_0	156
5.2.2.4 Datos b , q y s_0 , calcular y_n	159
5.2.2.5 Programa YITR	159
5.2.3 Canales con sección circular	166
5.2.3.1 Datos q , D , y s_0 , calcular y_n	166
5.2.3.2 Datos q , s_0 , y y_n/D , calcular D ...	169
5.2.3.3 Datos s_0 , y_n/D , y D , calcular q ...	171
5.2.3.4 Datos y_n/D , D , y q , calcular s_0 ...	171
5.2.3.5 Programa YNC	171
5.3 <u>Cálculo de perfiles longitudinales</u>	179
5.3.1 Ecuaciones fundamentales	179
5.3.2 Programa IVAR	184
5.4 <u>Análisis de redes cerradas de tuberías</u>	195
5.4.1 Introducción	195
5.4.2 Ecuaciones fundamentales	195
5.4.3 Método de CROSS.....	199
5.4.4 Programa CROSS	200
5.5 <u>Diagrama de Moody</u>	219
5.5.1 Ecuaciones fundamentales	219
5.5.2 Conductos con sección no circular	220
5.5.3 Programa MOODY	221
6. CONCLUSIONES	228

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. INTRODUCCION

La computación electrónica ha tenido un desarrollo vertiginoso en los últimos treinta y cinco años. Este avance ha tenido grandes repercusiones en el campo de la ciencia y consecuentemente, en sus aplicaciones a la Ingeniería Civil. En la actualidad, con los medios computacionales de que se dispone, es factible resolver problemas que por su complejidad, requerían de largas horas de labor numérica, o en el peor de los casos, problemas que ni siquiera se intentaban resolver.

Los avances en la computación han originado progresos en los métodos numéricos e incluso algunos métodos que habían caído en desuso han recobrado importancia con su aplicación en el cálculo automático.

Una de las ramas de la computación que empezó a desarrollarse hace relativamente poco tiempo (1972), es la de las calculadoras de bolsillo. Estas calculadoras presentan ciertas ventajas con respecto a los grandes sistemas, y es labor de los profesionales de cada área el aprovecharlas al máximo.

En este trabajo se pretende mostrar algunas de las innumerables aplicaciones de las calculadoras programables de bolsillo en el campo de la Ingeniería Civil. Se ha elegido a la calculadora HI-41C/CV por varias razones: es una cal

culadora muy popular en nuestro medio; presenta gran capacidad de cálculo, lo cual permite resolver problemas antes reservados a microcomputadoras o a grandes computadoras.

Se han abordado problemas de Ingeniería Estructural e Ingeniería Hidráulica aunque, por supuesto, no son las únicas posibilidades de aplicación de esta calculadora en Ingeniería Civil.

Esta tesis está integrada por seis capítulos, incluyendo la introducción. En el capítulo 2 se presenta una breve reseña histórica de las computadoras, así como el desarrollo de sus aplicaciones.

En el capítulo 3 se describe someramente la calculadora programable HP41C/VC. Cabe hacer notar que esta descripción no es completa en modo alguno; es exclusivamente de carácter informativo. A todo lo largo de este trabajo, se presupone que el lector tiene alguna experiencia en el manejo de la calculadora y está familiarizado con sus instrucciones, funciones y operaciones básicas.

En el capítulo 4 se incluyen las aplicaciones de Ingeniería Estructural. Se plantean cinco tipos de problemas diferentes, que guardan cierta interrelación. Los métodos empleados para la solución de estos problemas son, en general, métodos convencionales, aunque requieren abundante labor numérica. En estas condiciones, los programas presentados en

este capítulo revisten gran importancia, mientras que en lo concerniente a los métodos, se han seguido caminos tradicionales.

El capítulo 5 está integrado por aplicaciones de Ingeniería Hidráulica. También se proponen soluciones a cinco diferentes tipos de problemas. Los tres primeros se refieren a la hidráulica del flujo a superficie libre, y los dos restantes están relacionados con el flujo a presión. En todos los problemas, con excepción del análisis de redes de tuberías, se propone el empleo de métodos no usuales para la solución de las ecuaciones de cada fenómeno. En estos casos, el método tiene particular importancia. En el programa dedicado al análisis de redes de tuberías, se ha empleado el método de Cross, por lo que es el programa el que requiere mayor atención.

Por último, en el capítulo 6 se presentan algunas conclusiones a las que se ha llegado, así como algunas recomendaciones derivadas del uso que durante algún tiempo se ha venido haciendo de los programas en casos prácticos.

2. ANTECEDENTES Y PERSPECTIVAS DE LA APLICACION DE LAS COMPUTADORAS EN LA INGENIERIA.

La historia del cálculo automático se remonta a 1642, con la primera sumadora mecánica construida por Blaise Pascal. Posteriormente, Leibniz adoptó esta máquina para realizar operaciones aritméticas. En 1812, el inglés Charles Babbage planteó la posibilidad de sustituir algún día el cálculo manual por el cálculo automático. Su idea original nace con el interés por ampliar las tablas de logaritmos preparadas por Napier. La elaboración de estas tablas tomó 25 años a su autor.

La máquina de Babbage, o para ser precisos, las máquinas de Babbage nunca llegaron a estar terminadas por la falta de técnicas de construcción adecuadas; sin embargo, en su concepción teórica, poseían todos los elementos fundamentales de una computadora moderna; memoria, control de flujo, unidad aritmética y unidades de entrada y de salida. Estas últimas unidades empleaban las tarjetas perforadas inventadas en 1790 por el francés Joseph Marie Jacquard, precursoras de las utilizadas actualmente.

Probablemente la primera aplicación a gran escala de una máquina de cálculo ocurre en 1890 cuando la información del censo de 1890 en los Estados Unidos de América se procesa en tarjetas perforadas, empleando un aparato diseñado por Herman Hollerith, quien posteriormente fundaría los núcleos de las actuales compañías IBM y Remington Rand.

En 1925, Vannever Bush del Instituto Tecnológico - de Massachusetts construye la primera máquina analógica, en la cual los números se representan como variaciones de voltaje.

En la década de los treinta, se tienen contribuciones importantes de L. J. Comrie, W. J. Eckert, G. R. Stibitz y, de manera sobresaliente, Claude Shannon quien en 1936 publica un trabajo en el que muestra las relaciones entre los circuitos eléctricos y el álgebra Booleana desarrollada en 1854. Este descubrimiento abre las puertas a la construcción de computadoras eléctricas.

En 1944, Aiken construye en Harvard, E.U.A., la primera computadora totalmente automática, electromecánica, a la que llama MARK I. En 1946 se termina la construcción de la primera computadora moderna en la Escuela Moore de la Universidad de Pennsylvania. Esta computadora se llamó ENIAC -- (Electronic Numeric Integrator and Calculator). Estaba formada por 18,000 bulbos y podía realizar 5,000 sumas por segundo. La finalidad de esta máquina, al igual que la de Babbage fue la elaboración de tablas matemáticas. Sin embargo, este aparato no era de "programa almacenado".

Sus constructores eran conscientes de esta deficiencia y plantearon las bases del almacenamiento del programa, que más tarde emplearían otros científicos.

Von Neumann estableció entre 1940 y 1947, en Princeton

ton, las bases teóricas de las computadoras modernas. Un equipo coordinado por Von Neumann diseñó una computadora de programa almacenado y se desarrollaron los conceptos de diagrama de flujo, separación de funciones de computadora en unidades, y el uso de lenguaje de máquina. La computadora que se diseñó de acuerdo a estos conceptos se llamó IAS, y fue el modelo para otras computadoras como la MANIAC en Los Alamos, ORACLE en Oakridge, SILLAC en Sidney, Australia, IBM 701 y la EDVAC en la Escuela Moore. Esta última fue construida por el mismo equipo que construyó la ENIAC, al cual se suministraron otros científicos entre los que se destaca Von Neumann. La EDVAC ya poseía programa almacenado y operaba a velocidades electrónicas, aunque el primer programa almacenado probablemente se deba al grupo del Laboratorio Matemático de la Universidad de Cambridge, con Wilkes al frente. Este programa calculaba una tabla de cuadrados de 0 a 99, y produjo su primer listado en mayo de 1949. (El listado se conserva en el Museo de Ciencias de Londres) Fue en 1949 también cuando por primera vez se dan cita, en Cambridge, expertos de todo el mundo para la conferencia europea sobre computadoras.

Es interesante hacer notar que el proyecto de la máquina de Cambridge, llamada EDSAC, fue financiado por la empresa J. Lyons and Co. Esta empresa construyó posteriormente una versión modificada de la EDSAC, conocida como LEO, que fue la primera computadora diseñada para fines comercia-

les. Posteriormente, esta empresa construyó otra máquina, formalmente denominada LEO, que entró en servicio en 1951. Esta computadora no sólo satisfizo los requerimientos de la empresa, sino que fue capaz de realizar trabajos de computación para otras empresas y universidades. Es así como nace una -- nueva industria. (Ref. 2.2)

El desarrollo de las computadoras continuó en forma acelerada, y se producen las primeras computadoras modernas de la primera generación: la SAGE y la WHIRLWIND II. Se empieza a hacer evidente la distinción entre "software" y -- "hardware", y en 1952 la doctora estadounidense Grace H. -- Hopper escribe el primer compilador. En esta década, las actividades militares absorben gran parte de los sistemas que se desarrollan. Para 1953 se habían construido gradualmente más de 2,000 computadoras, y nace el primer lenguaje: SPEED CODE. Es en esta época cuando se inicia el crecimiento explosivo de la industria de las computadoras, que es en la actualidad una de las de mayor tasa de crecimiento.

Las computadoras llamadas de la primera generación estaban formadas por bulbos electrónicos como componente principal. El gran avance que ocurre a partir de estas computadoras es en el terreno de la miniaturización, con el advenimiento del transistor, que reduce considerablemente el tamaño y costo de las computadoras, y aumenta dramáticamente su confiabilidad. A las computadoras construidas con esta tecno-

logía se les conoce como computadoras de la segunda generación (Ref. 2.1).

Las computadoras de la tercera generación fueron construidas con la tecnología microelectrónica o tecnología del circuito integrado miniaturizado (Chip). Con estas computadoras se acentúan las enormes ventajas mencionadas para las de la segunda generación.

En la actualidad, los dos últimos eslabones en la larga cadena de avances en la computación están constituidos por las llamadas supercomputadoras: CHAY I y CYBER 205. Estas supercomputadoras presentan velocidades de operación muy superiores a las de sus predecesoras, así como una enorme capacidad de memoria. Estas grandes ventajas se desprenden del progreso de la microelectrónica y también de los nuevos conceptos introducidos en la arquitectura de los computadores. Estos conceptos permiten la ejecución simultánea de pasos elementales de programa cuando ésto es posible, a diferencia de las computadoras anteriores, en que los pasos elementales se ejecutaban en forma rigurosamente secuencial (Ref 2.3).

Un avance que ya se vislumbra en el horizonte científico, que promete vencer los límites que plantea la tecnología actual, es una tecnología basada en dos fenómenos de la mecánica cuántica: La superconductividad y el efecto túnel de los electrones a través de una barrera aislante. Esta tecnología promete computadoras 50 veces más rápidas que cual

quiera de las fabricadas hoy en día (ref. 2.4).

A partir de 1964 se desarrolla un tipo de computadora especial: la minicomputadora, que es una computadora de tamaño pequeño, con una memoria mínima de 1 a $b \cdot k$ palabras - ($1k = 1024$ palabras) de entre b y 16 bits cada una (Ref 2.1). Estos aparatos se han empleado con éxito en la investigación, en el cálculo matemático, en la educación, en la telemetría, en el control de tráfico, etc.

Con el perfeccionamiento de la tecnología de la -- producción masiva e integración a gran escala de circuitos, surge la microcomputadora, cuyas unidades fundamentales se encuentran concentradas en un solo circuito integrado. La -- producción masiva de estos circuitos ha abaratado notablemente los costos de producción y consecuentemente la microcomputadora ha alcanzado a una cantidad muy grande de gente. En la actualidad, la microcomputadora tiene una enorme importancia, y se asevera que en un futuro próximo, enjambres de microcomputadoras trabajando en paralelo sustituirán a los grandes sistemas centralizados (ref. 2.6)

En 1972, la empresa Hewlett-Packard introdujo al mercado su calculadora HP-35, la primera calculadora científica del mundo. Mas recientemente, el avance de esta rama de la industria de las computadoras se incrementó notablemente, con la producción de una nueva generación de computadoras de bolsillo, con todas las características de una computadora -

de gran tamaño: memoria, programa almacenado, modularidad y dispositivos periféricos (Ref. 2.5) A esta categoría pertenece la calculadora que constituye la herramienta fundamental de esta tesis.

3. BREVE DESCRIPCIÓN DE LA CALCULADORA HP41C/CV

Para el presente trabajo se han elaborado programas que solucionan problemas de Estructuras e Hidráulica. Estos programas han sido escritos en particular para la calculadora HP41C/CV, fabricada por la compañía Hewlett-Packard.

Se trata de una calculadora programable de bolsillo cuya popularidad ha ido en constante aumento en nuestro medio desde su aparición en el mercado, en julio de 1979.

La calculadora programable HP41C/CV cuenta con más de 130 funciones, en su mayor parte de tipo científico, lo cual permite la elaboración de un gran número de programas útiles en Ingeniería Civil. No describiremos en forma exhaustiva estas funciones. Para este fin, puede consultarse la ref. 3.1.

Otras características interesantes de esta máquina son:

Memoria Continua: Toda la información contenida en la memoria se conserva aún cuando la calculadora sea apagada.

Capacidad Alfanumérica: Esto significa que es posible generar caracteres alfabéticos así como numéricos, lo cual permite llamar a los programas con palabras, formar letreros con significado lógico, etc.

La memoria de la calculadora HP41C/CV tiene como unidad fundamental el "BYTE", constituido por ocho "BITS" para la representación interna de un dato; las instrucciones, o líneas de programa ocupan 1, 2 ó 3 "BYTES" (ref. 3.1 pp. 249-253). Un conjunto de 7 "BITS" se denomina "registro" (register) y un número cualquiera, n , $-10^{99} < n < +10^{99}$, formado por mantisa de 9 dígitos, signo y exponente, requiere de un registro o "memoria" para su almacenamiento. Existen 3 modelos de calculadora, iguales en cuan

to a funcionamiento, y que sólo difieren en lo que a capacidad de memoria original "RAM" (memoria de acceso aleatorio) se refiere. El primer modelo es HP-41C, en el cual se disponen de 63 registros, que pueden ser repartidos en cualquier combinación entre almacenamiento de datos y memoria de programa. Los 63 registros pueden ampliarse hasta 319 con la instalación de 4 módulos adicionales de memoria o un módulo especial llamado "Quad Memory Module", que posee la capacidad de 4 módulos normales. En el segundo modelo, HP-41CV, se presentan de fábrica 319 registros. En lo sucesivo nos referiremos en general a la calculadora HP-41C/CV, haciendo hincapié en sus diferencias, cuando proceda.

Además, existen diferentes dispositivos periféricos, que pueden emplearse con la calculadora. Estos son, entre otros; lectora de tarjetas magnéticas, lectora óptica, impresora, etc. En este trabajo no se presupone la presencia de periférico alguno, aunque en los programas extensos, una lectora de tarjetas magnéticas sería muy conveniente por las ventajas de no tener que teclear las instrucciones cada vez.

Para la documentación y correcta operación de los programas que aquí se presentan, se han preparado 3 formatos por cada programa:

a) Memorias, Estatus y Banderas.

En estas hojas se detalla el contenido de las memorias que se usan en el programa, con el objeto de facilitar posibles modificaciones por parte del usuario y permitir el análisis del programa.

Con este mismo fin, se indica qué señales indicadoras o banderas se utilizan y con qué propósito. Estas banderas pueden tener dos estagos: activa, "set", e inactiva, "clear". En la hoja "Memorias, estatus y Banderas", se precisa la situación en que deben encontrarse las banderas antes de iniciar la ejecución, en la columna cuyo título es "I.I.C.A/I" (Inicialmente activa o inactiva).

En el caso de que no se indique situación inicial, esta podrá ser cualquiera de las dos posibles sin que se altere la operación correcta del programa.

Asimismo, en esta forma se detalla el estatus de la calculadora, necesario para operar con éxito cada programa. Este estatus incluye: número de registros de almacenamiento necesarios - ("SIZE"), modalidad angular ("DEG", "RAD" ó "GRAD"), modalidad de usuario ("USER"), formato de la pantalla ("FIX", "SCI" ó "ENG"), etc.

b) Instructivo de Usuario.

En esta hoja se indica con todo detalle, el procedimiento que deberá seguirse para el uso correcto de cada programa en la solución de problemas. Este instructivo tiene 5 columnas, que de izquierda a derecha son: (ref. 3.2. p.7)

Paso :	Número secuencial de la instrucción.
Instrucción:	Se indican las instrucciones y comentarios concernientes a las operaciones que serán ejecutadas.
Entrada:	Se especifican los datos de entrada, sean numéricos o alfabéticos. En el caso de variables numéricas, éstas se indican entre paréntesis; para entradas alfabéticas, simplemente se indican los caracteres que se requieran. Si esta columna se halla en blanco, no deberá proporcionarse ningún dato de entrada.
Teclas:	Se detallan las teclas que deben ser oprimidas después de teclear los datos de entrada. En esta columna, las funciones de la HP-41C/41CV se presentan entre paréntesis, y las etiquetas globales se encierran en -

Salida: Se indican las preguntas, resultados intermedios y finales que aparecen en la pantalla.

Existe también en este instructivo un lugar destinado a indicar el valor mínimo necesario de la instrucción "SIZE". Algunos programas presentan una rutina para calcular las necesidades de memoria. Esta rutina opera de tal forma que, si hay memoria suficiente, la ejecución prosigue, si no, el programa se detiene indicando el tamaño de memoria "SIZE" requerido.

c) Listado del Programa.

En esta sección se proporciona la totalidad de las instrucciones de que consta cada programa. Estos listados fueron preparados mediante impresora de papel térmico.

4. APLICACIONES PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURAS

En este capítulo se presentan programas que ayudan a resolver problemas típicos del área de Ingeniería Estructural.

Todos los programas resuelven problemas que requieren una tediosa y abundante labor de cálculo, y en general se hace uso de hipótesis convencionalmente aceptadas, y se siguen criterios usuales en nuestro medio.

Aunque se trata de cinco tipos de problemas, podrá constatarse su estrecha relación, y el Ingeniero especialista podrá identificar rápidamente la secuencia de su aplicación. Pensando en esta estrecha relación, los programas HEEM y ANACD están diseñados de una forma tal, que es posible emplearlos en cadena, evitando la pérdida de tiempo que representa la lectura de datos, que en algunos casos puede ser de consideración.

Se tiene la certeza de que el poder obtener los resultados de manera inmediata y en el sitio de trabajo, representa una gran ventaja que sin duda puede ser aprovechada por los ingenieros dedicados al cálculo estructural.

4.1 Cálculo de deformaciones en vigas con sección transversal variable. Método de Newmark.

4.1.1 Introducción.

Se presenta un método, debido a Newmark (ref. 4.1) para el cálculo de deformaciones en vigas de sección transversal variable, mediante procesos numéricos y sin recurrir a la integración explícita de funciones.

El problema de deformaciones pertenece a un amplio grupo de problemas en que se requiere conocer valores de una función, de la cual son conocidos valores de la segunda derivada. En este grupo se incluye el cálculo de momentos flexionantes en vigas, conocidas las cargas. Por tener un sentido físico más fácil de comprender, se explica el procedimiento tomando como base el cálculo de momentos y se procede después a hacer la analogía necesaria para interpretar el problema básico de este inciso.

4.1.2 Cálculo de momentos flexionantes en vigas.

Considérese la viga mostrada en la siguiente figura



Para fines de estática la viga de la figura anterior puede sustituirse por:

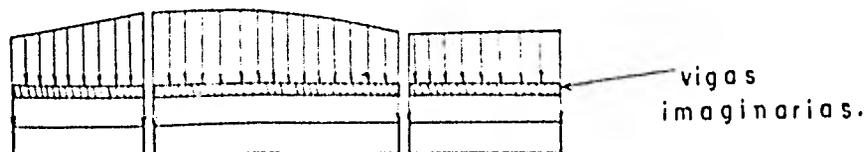


Fig. 4.1.2

- En esta viga, las "vigas imaginarias" transmiten a la viga real fuerzas a través de sus conexiones con ésta. La magnitud de estas fuerzas es igual a la que tendrían -- las reacciones de las vigas imaginarias, considerándolas libremente apoyadas. Esto lleva a poder simplificar una viga con cualquier sistema de cargas a otra cuyas únicas cargas son concentradas, producto de las reacciones de los segmentos de viga imaginaria, aplicadas en la viga real. - Así:

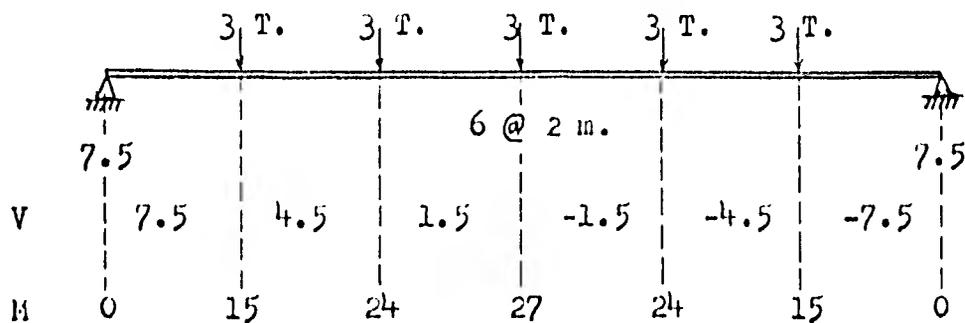


Fig. 4.1.3

Es condición necesaria para esta igualdad, que en los puntos de unión de los segmentos de viga imaginaria el cortante sea el mismo que se obtendría con la viga original.

En una viga libremente apoyada sometida a un sistema de cargas concentradas, es posible calcular las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes efectuando sólo sumas y multiplicaciones, a partir de ciertos valores de frontera (reacciones, etc.) La fuerza cortante en cada sección se puede calcular sumando o restando las cargas de las reacciones, que podrían ser los valores de frontera conocidos. Los momentos flexionantes se calcularían iniciando con el valor cero en alguno de los apoyos, digamos el izquierdo, y sumando sucesivamente los productos de fuerza cortante por la longitud de cada viga elemental.

Por ejemplo:



Convención de signos:

Cargas (P)

↓ +

Cortante (V)

↑ + ↓

Mom. Flex. (M)

↑ + ↓

Deformaciones (δ)

↑ +

De manera formal, supuestos conocidos M_1 y V_1 :

$$V_i = V_{i-1} + P_i$$

$i \neq 1$

$$M_i = M_{i-1} + V_{i-1} L_{i-1}$$

$i \neq 1$

donde L_i es la longitud del i -ésimo segmento.

En el caso de la fuerza cortante, así como para la longitud de segmentos, el subíndice i se refiere al tramo correspondiente; para el momento flexionante, el subíndice indica el punto donde se calcula áquel.

Este proceso puede efectuarse para otras vigas con diferentes condiciones de apoyo, si se parte de las condiciones de frontera adecuadas.

Si la variable que se desea calcular es solamente el momento flexionante, no es necesario conocer las reacciones en los apoyos. Es posible suponer cualquier valor inicial para V y a partir de éste calcular las fuerzas cortante y momentos flexionantes en las secciones de interés. Procediendo así, es posible que no se llegue al valor correcto del momento flexionante en el otro apoyo; sin embargo, mediante una corrección lineal, se logra obtener la condición de frontera no satisfecha:

		3T.	3T.	3T.	3T.	3T.	
			6 @ 2 m.				
Cortante supuesto	0	-3	-6	-9	-12	-15	
M	0	0	-6	-18	-36	-60	-90
Correc. lineal	0	15	30	45	60	75	90
Mom. final	0	15	24	27	24	15	0

Estos son los mismos resultados obtenidos anteriormente.

En síntesis, utilizando este procedimiento puede calcularse el momento flexionante si se conocen los valores de frontera de fuerza cortante y momento flexionante, o bien, si se conocen valores de momento flexionante en ambos apoyos y se efectúa la corrección lineal indicada.

4.1.3 Cálculo de deformaciones en vigas.

Para calcular las deformaciones, basta hacer la analogía siguiente: (ref. 4.1)

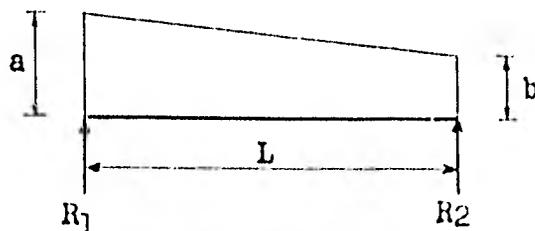
- Las cargas equivalen a los momentos flexionantes, divididos entre EI. (Diagrama de curvaturas)
- Las fuerzas cortantes equivalen a las deformaciones angulares.
- Los momentos flexionantes equivalen a los desplazamientos lineales.

Así, para calcular las deformaciones, es suficiente con "cargar" la viga original con un sistema de cargas igual al diagrama de curvaturas (M/EI) y calcular los "momentos flexionantes" que resultan de este nuevo "sistema de cargas".

En la mayor parte de los casos, el diagrama de curvaturas será una curva seccionalmente continua o un polígono. Esto significa que la viga habrá de ser dividida en segmentos (vigas imaginarias) cuyas reacciones serán calculadas y convertidas en "cargas concentradas", para así poder emplear el método descrito.

Para sistematizar el cálculo, pueden establecerse fórmulas que permiten calcular reacciones en vigas libremente apoyadas, sujetas a diferentes condiciones de carga (ref. 4.1 p. 1165)

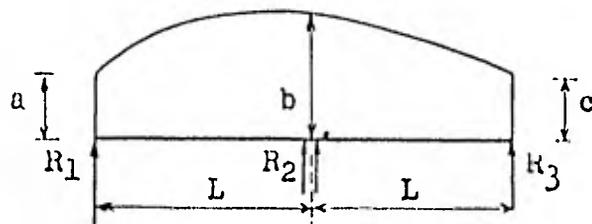
Cargas con variación recta



$$R_1 = \frac{L}{6} (2a + b) \quad (4.1.1)$$

$$R_2 = \frac{L}{6} (a + 2b) \quad (4.1.2)$$

Carga con variación parabólica, definida por tres puntos



$$R_1 = \frac{L}{24}(7a + 6b - c) \quad (4.1.3)$$

$$R_2 = \frac{L}{24}(3a + 10b - c) \quad (4.1.4)$$

$$R_3 = \frac{L}{24}(3c + 10b - a) \quad (4.1.5)$$

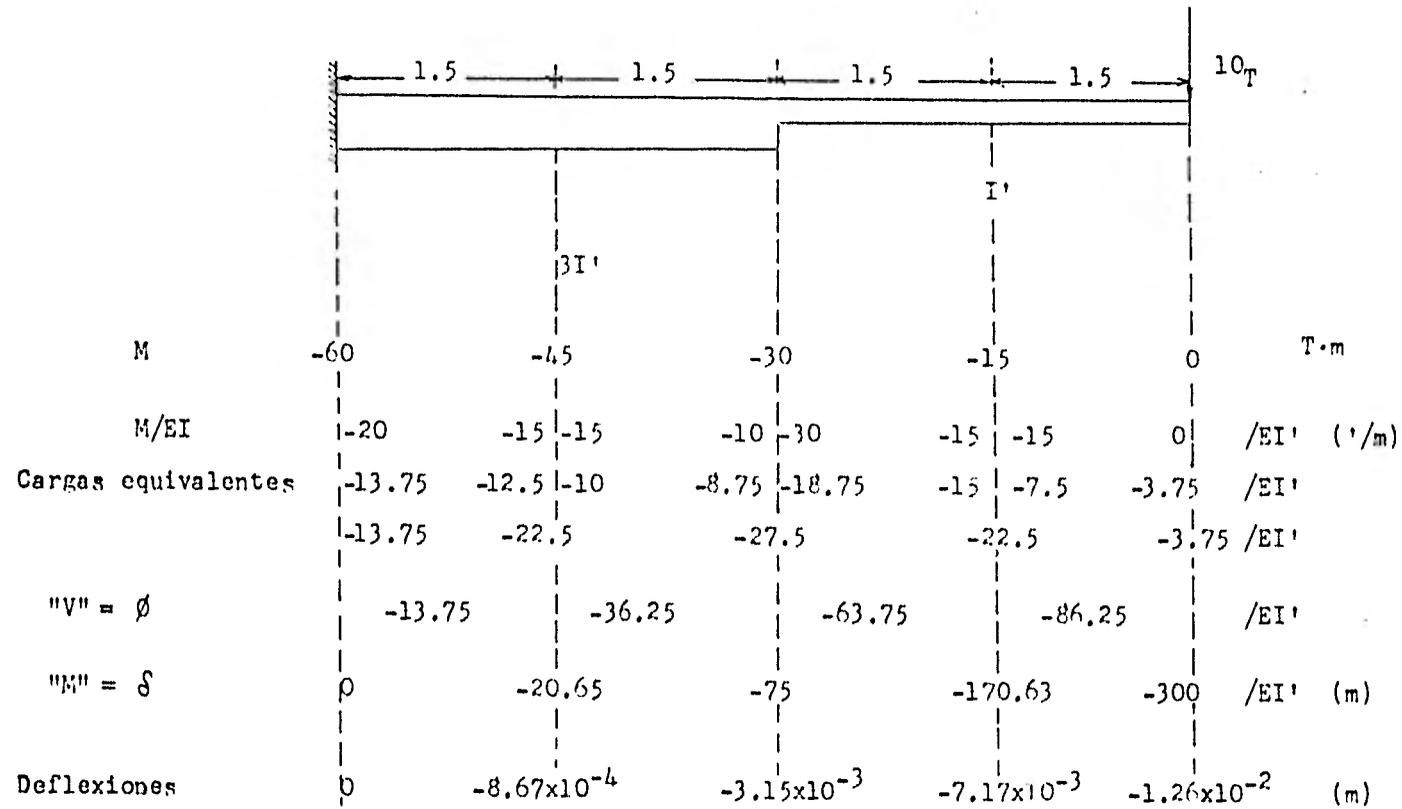
Estas fórmulas pueden usarse prácticamente con cualquier distribución de momentos, que sea continua, con una aproximación suficiente.

En estas condiciones, el cálculo de deformaciones requiere las siguientes etapas:

- 1) Cálculo del diagrama de momentos flexionantes, M .
- 2) Cálculo del diagrama M/EI
- 3) Cálculo de las "cargas concentradas" asociadas al diagrama M/EI , haciendo uso de las fórmulas 4.1.1 a 4.1.5.
- 4) Cálculo de las deformaciones con el procedimiento indicado.

$$E \ 1.4 \times 10^6 \text{ T/m}^2$$

$$I' \ 1.7 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

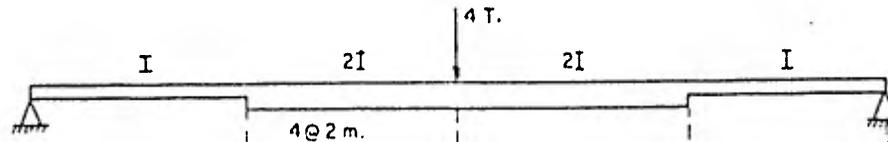


Estos valores no son supuestos, ya que el valor real de ϕ en el extremo empotrado es cero. Entonces, no se necesita corrección alguna.

Ejemplo:

$$I = 1.707 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$E = 1.400 \times 10^6 \text{ T/m}^2$$



Momento
flexionante

Cargas

Equivalentes

cargas

equivalentes

"V" = ϕ (cu-
puertos)

"M" = δ (cu-
puertos)

Corrección li-
neal

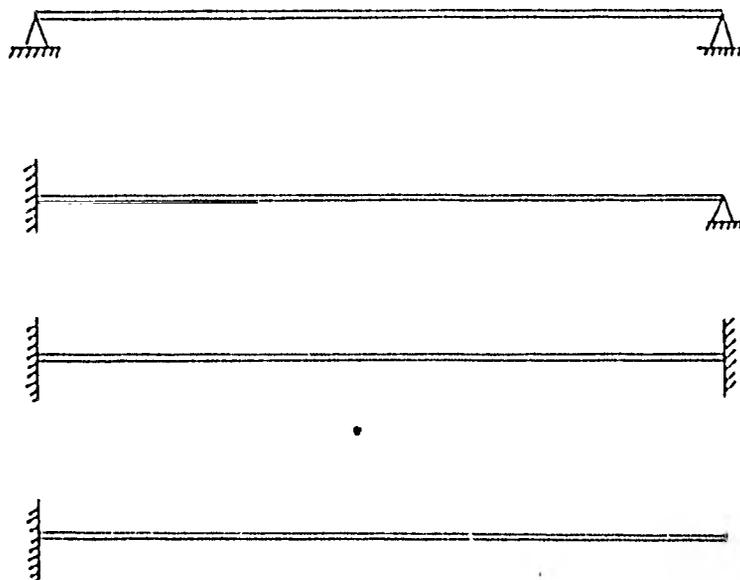
δ finales.

0.558	1.116	2.232	2.790	2.790	-2.232	1.116	.558	$\times 10^{-4}$
0.558	3.348		5.580		3.348		.558	$\times 10^{-4}$
	0.0	3.348		8.928		12.276		$\times 10^{-4}$
0.000	0.000		6.696		24.552	49.104		$\times 10^{-4}$
0.000	-12.276		-24.552		-36.828	-49.104		$\times 10^{-4}$
0.000	-12.276		-17.856		-12.276	0.000		$\times 10^{-4}$

4.1.4 Programa NEWV.

Este programa está diseñado para calcular deformaciones lineales en vigas con factor EI variable, supuesto conocido el diagrama de momentos flexionantes.

Pueden resolverse los siguientes tipos de vigas:



Estas vigas pueden estar sujetas a cargas - que originen diagramas de momentos flexionantes seccionalmente rectos, o formados por curvas suaves. En los casos de diagramas formados por líneas rectas o arcos de parábola, la solución es exacta independientemente del número de tramos usado (*). Para otro tipo de diagramas, la solución en los puntos de interés será mas aproximada mientras

* Se hace notar que un diagrama formado por una curva debe estar definido por al menos tres puntos.

mas tramos se empleen. En cualquiera de los dos casos, si se desea obtener una buena configuración de la pieza deformada, será necesario dividirla en tramos de longitud pequeña, con el consecuente aumento de la labor numérica.

Para fines del programa NEWV, las vigas en estudio deben ser divididas en NT tramos de igual longitud L . Deben proporcionarse además, los valores de EI para cada tramo, así como los momentos flexionantes en los puntos en que se desee calcular deformaciones. Para el caso particular EI cte., puede darse una sola vez el valor EI .

Los puntos en que se desea calcular deformación, así como los tramos, se identifican según la siguiente convención:

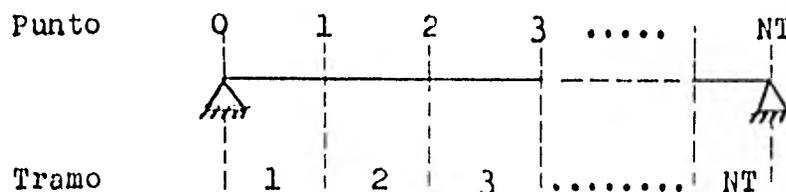


Fig. 4.1.4

El programa requiere del valor de los momentos en todos los puntos, aunque sea nulo. Estos valores son pedidos teniendo como subíndices la posición que ocupan en -

el tramo y el número de éste. Por ejemplo, MI2 indica el momento que ocupa el extremo izquierdo del tramo 2.

El programa calcula las necesidades de memoria - para cada problema. Si la memoria es suficiente, la ejecución normal continua; de no ser así, la ejecución se interrumpe indicando el valor SIZE requerido, que deberá ser - teclado por el usuario.

				SIZE: 14 + 5NT
Paso	INSTRUCCION	ENTRADA	TECLAS	SALIDA
1	Iniciar		(XEQ) NEWV	A/B?
2	Condiciones de apoyo: A => 2 apoyos;			
	B => 1 apoyo.		A o B	G/H?
3	Forma del diagrama M: G => curvo;			
	H => recto.		G o H	NT?
4	Número de tramos	(NT)	(R/S)	L?
5	Valor de la longitud de tramos	(L)	(R/S)	(L)
6	Lectura de los valores de EI			
a)	EI = cte.		I	EI?
	Dar valor de EI e ir al paso 7	(EI)	(R/S)	EI
b)	EI ≠ cte.		C	EI1?
	Dar valores de EI _i , i=1, NT	(EI ₁)	(R/S)	.
		(EI _{NT})	(R/S)	EI
7	Lectura de valores de MI, MD i=1, NT		D	MI1?
		(MI1)	(R/S)	MD1?
		(MD1)	(R/S)	MI2?
		.	.	.
		(MD _{NT})	(R/S)	M
8	Cálculo de deformaciones		F	D1 = (d ₁)
			(R/S)	D2 = (d ₂)
			.	.
			(R/S)	D _{NT} = (d _{NT})
9	(Opcional) Ver las deformaciones nuevamente		E	D1 = (d ₁)
			(R/S)	D2 = (d ₂)
				etc.

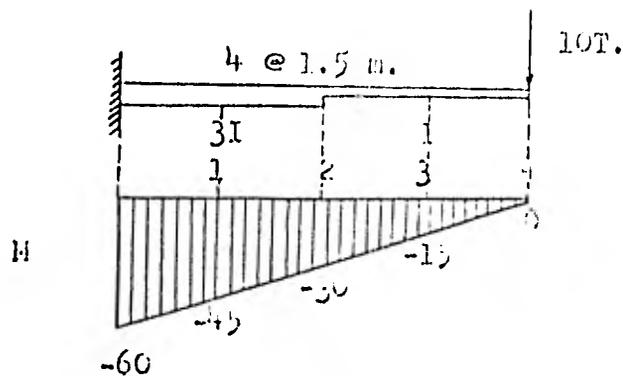
4.1.4.3 Listado del programa

01*LBL *HEAV*	55*LBL D	117 .001
02 CF 01	60 XEQ 01	118 ST- 01
03 CF 02	61*LBL 05	119*LBL 05
04 CF 03	62 5	120 1
05 SF 27	63 XEQ 02	121 XEQ 02
06 *A/B?*	64 RCL IND 02	122 RCL IND 02
07 PROMPT	65 STO 03	123 STO 03
08*LBL A	66 *M1*	124 1
09 SF 01	67 1	125 ST+ 02
10*LBL B	68 XEQ 09	126 RCL IND 02
11 *G/H?*	69 *ND*	127 STO 04
12 PROMPT	70 2	128 2
13*LBL G	71 XEQ 09	129 XEQ 02
14 SF 02	72 ISG 01	130 RCL IND 02
15*LBL h	73 GTO 05	131 X<> 04
16 *M1?*	74 *K*	132 RCL 04
17 PROMPT	75 PROMPT	133 X*Y?
18 STO 00	76*LBL 09	134 GTO 10
19 1	77 XEQ 02	135 1
20 +	78 XEQ 03	136 ST+ 02
21 *TO 01	79 RCL 03	137 RCL IND 02
22 5	80 /	138 STO 05
23 XEQ 02	81 STO IND 02	139 3
24 SF 25	82 RTN	140 XEQ 02
25 RCL IND X	83*LBL F	141 RCL 04
26 FS?C 25	84 FS? 02	142 6
27 GTO 03	85 GTO 06	143 *
28 1	86 XEQ 01	144 STO 06
29 +	87*LBL 07	145 RCL 03
30 *SIZE=*	88 1	146 7
31 ARCL X	89 XEQ 02	147 *
32 PROMPT	90 STO 03	148 +
33*LBL 00	91 2	149 RCL 05
34 *L?*	92 XEQ 02	150 -
35 PROMPT	93 STO 04	151 XEQ 17
36 STO 03	94 3	152 STO IND 02
37 STOP	95 XEQ 02	153 1
38*LBL C	96 STO 05	154 ST+ 02
39 XEQ 01	97 4	155 RCL 04
40*LBL 04	98 XEQ 02	156 10
41 RCL 01	99 RCL IND 03	157 *
42 5	100 STO IND 02	158 STO 07
43 XEQ 02	101 STO IND 05	159 RCL 03
44 *E1*	102 ST+ IND 05	160 -
45 RCL 03	103 RCL IND 04	161 RCL 05
46 FC? 03	104 ST+ IND 05	162 3
47 XEQ 03	105 ST+ IND 02	163 *
48 STO IND 02	106 ST+ IND 02	164 +
49 ISG 01	107 RCL 03	165 XEQ 17
50 GTO 04	108 6	166 STO IND 02
51 *E1*	109 /	167 4
52 PROMPT	110 ST+ IND 02	168 XEQ 02
53*LBL I	111 ST+ IND 05	169 RCL 07
54 SF 03	112 ISG 01	170 RCL 03
55 *E1?*	113 GTO 07	171 3
56 PROMPT	114 GTO 10	172 *
57 STO 03	115*LBL 06	173 *

175 -	233 ?
176 XEQ 17	234 XEQ 02
177 STO IND 02	235 RCL 01
178 1	236 INT
179 ST+ 02	237 RCL 03
180 RCL 05	238 +
181 RCL 03	239 ST- IND 02
182 -	240 ISG 01
183 RCL 05	241 GTO 14
184 7	242*LBL E
185 +	243 XEQ 01
186 +	244*LBL 15
187 XEQ 17	245 3
188 STO IND 02	246 XEQ 02
189*LBL 16	247 FIX 0
190 ISG 01	248 *D*
191 GTO 08	249 ARCL 01
192*LBL 10	250 *+*
193 XEQ 01	251 RCL IND 02
194*LBL 11	252 RCL 03
195 4	253 ENG 3
196 XEQ 02	254 +
197 RCL IND 02	255 ARCL X
198 3	256 PROMPT
199 XEQ 02	257 ISG 01
200 1	258 GTO 15
201 +	259 STOP
202 X<>Y	260*LBL 17
203 ST+ IND Y	261 RCL 08
204 ISG 01	262 24
205 GTO 11	263 /
206 .001	264 +
207 STO 05	265 RTN
208*LBL 12	266*LBL 03
209 XEQ 01	267 FIX 0
210*LBL 13	268 ARCL 01
211 3	269 *+*
212 XEQ 02	270 PROMPT
213 1	271 RTN
214 +	272*LBL 02
215 RCL IND 02	273 1
216 ST+ IND Y	274 -
217 ISG 01	275 RCL 02
218 GTO 13	276 1
219 ISG 05	277 +
220 GTO 12	278 +
221 FC? 01	279 RCL 01
222 GTO E	280 +
223 3	281 0
224 XEQ 02	282 +
225 1	283 STO 02
226 -	284 PIN
227 RCL IND X	285*LBL 01
228 RCL 00	286 RCL 00
229 /	287 1 E3
230 STO 03	288 /
231 XEQ 01	289 1
232*LBL 14	290 +
	291 STO 01

4.1.4.4 Ejemplos resueltos.

a) Calcular las deformaciones en los puntos 1, 2, 3 y 4.



$$EI = 23,800 \text{ T m}^2$$

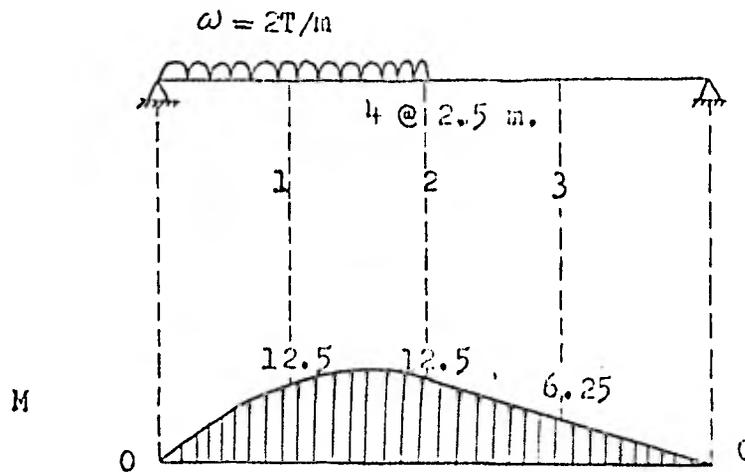
$$3EI = 71,400 \text{ T m}^2$$

				XEQ D
			MI1.?	
			-60.	RUN
			MI1.?	
			-45.	RUN
H/B?	XEQ B		MI2.?	
			-45.	RUN
G/H?	XEQ B		MI2.?	
			-30.	RUN
HT?	XEQ B		MI3.?	
	4.0000	RUN	-30.	RUN
L?			MI3.?	
	1.5000	RUN	-15.	RUN
			MI3.?	
			-15.	RUN
EI1.?	XEQ C		MI4.?	
	71,400.	RUN	0.	RUN
EI2.?				
	71,400.	RUN		
EI3.?				
	23,800.	RUN		
EI4.?				
	23,800.	RUN		
EI				
				XEQ F
			D1.=-866.6E-6	
				RUN
			D2.=-3.151E-3	
				RUN
			D3.=-7.169E-3	
				RUN
			D4.=-12.61E-3	
				RUN

Como puede verse, estos resultados coinciden con los encontrados en el ejemplo 2, mostrado antes.

b) Calcular las deformaciones en los puntos 1, 2 y 3, utilizando 4 tramos de viga:

$$EI = 20,000 \text{ T}\cdot\text{m}^2$$



				M13.?		
	XEQ *NEW?				12.5	PUN
A/B?				N03.?	6.25	PUN
	XEQ B			H14.?	6.25	PUN
G/H?				MD4.?	0.	PUN
	XEQ G			M		
NT?	4	PUN				XEQ F
L?				D1.=-4.944E-3		PUN
	2.5	PUN		D2.=-6.398E-3		PUN
	XEQ I			D3.=-4.171E-3		PUN
EI?	20,000	PUN		D4.=-5.000E-12		PUN
EI						
	XEQ D					
N11.?	0.	PUN				
N01.?	12.5	PUN				
H12.?	12.5	PUN				
M02.?	12.5	PUN				

Si se hubieran usado ocho tramos, los resultados y sus correspondientes errores serían:

i) Suponiendo distribución parabólica en toda la pieza: (G)

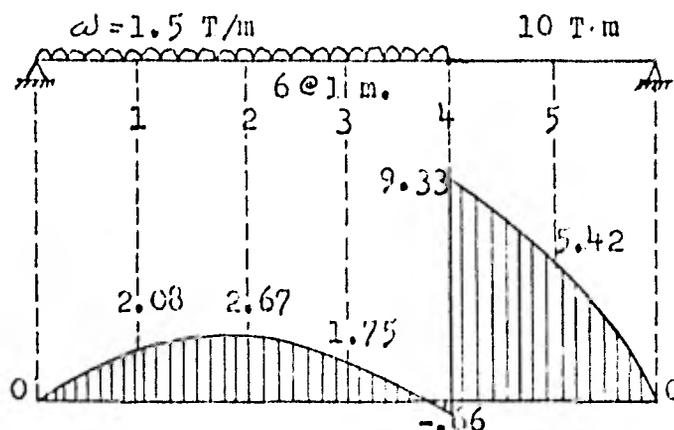
$$\begin{aligned} D1 &= -5.034 \times 10^{-3} & (-0.24\%) \\ D2 &= -6.492 \times 10^{-3} & (-0.28\%) \\ D3 &= -4.223 \times 10^{-3} & (-0.21\%) \end{aligned}$$

ii) Suponiendo distribución rectilínea en toda la pieza: (H)

$$\begin{aligned} D1 &= -4.964 \times 10^{-3} & (-1.63\%) \\ D2 &= -6.429 \times 10^{-3} & (-1.24\%) \\ D3 &= -4.191 \times 10^{-3} & (-0.97\%) \end{aligned}$$

c) Calcular las deformaciones en los puntos 1, 2, 3, 4 y 5 de la viga mostrada:

$$EI = 25,000 \text{ T}\cdot\text{m}^2$$



4.2 Análisis de marcos planos ortogonales. Método de Kani.

4.2.1 Introducción

El análisis de marcos planos ortogonales constituye un problema de gran importancia en la Ingeniería Estructural. Debido a que los marcos que se presentan en las estructuras reales suelen ser de un alto grado de hiperestaticidad, el procedimiento para la solución de este problema es en general muy laborioso. (refs. 4.14 a 4.16)

Existen muchos métodos para analizar marcos planos sujetos a condiciones cualesquiera de carga. Estos métodos van incrementando su complejidad a medida que cubren casos mas generales y consideran hipótesis mas reales. Uno de los métodos mas populares en el análisis estructural es el debido a G. Kani (ref. 4.2). Se trata de un metodo "exacto", de aproximaciones sucesivas, y que es aplicable en estructuras reticulares sujetas a cualquier condición de carga. A continuación se detallarán las ecuaciones en que está basado el método, así como el algoritmo de análisis estructural correspondiente.

4.2.2 Ecuaciones fundamentales.

Estas ecuaciones son deducciones rigurosas, apoyadas en la teoría estructural, y pueden consultarse en las referencias 4.2 y 4.3.

Básicamente son las siguientes:

$$M^F_{ik} = M e_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki} \quad (4.2.1)$$

$$M'_{ik} = \mathcal{M}_{ik} \left[Md_i + \sum_i (M'_{ki} + M''_{ik}) \right] \quad (4.2.2)$$

$$M''_{ik} = \mathcal{V}_{ik} \left[M_{Pr} + \sum_P (M'_{ik} + M'_{ki}) \right] \quad (4.2.3)$$

donde:

M^F_{ik} = Momento final en el extremo i de la barra ik.

Se supone que el extremo i de la barra concurre al nudo i.

$M e_{ik}$ = Momento de "empotramiento perfecto" en el extremo i de la barra ik.

M'_{ik} = Contribución angular del extremo i de la barra ik.

Md_i = Momento de desequilibrio en el nudo i, definido como la suma de momentos de empotramiento "perfecto" de los extremos de las barras que concurren al nudo i.

M''_{ik} = Contribución lineal del extremo i de la barra ik.

M_{Pr} = Momento de piso del entrepiso r, definido como $V_r H_r / 3$, donde:

V_r Fuerza cortante en el entrepiso r .

h_r Altura del entrepiso r .

\mathcal{M}_{ik} = Factor de distribución angular del extremo i de la barra ik

$$\mathcal{M}_{ik} = -1/2 \frac{K_{ik}}{\sum_i K_{ik}} \quad (\text{para barras empotradas}) \quad (4.2.4)$$

El subíndice i que afecta a la sumatoria, indica que ésta debe llevarse a todas las barras que concurren al nudo i .

\mathcal{V}_{ik} Factor de distribución lineal de la columna ik .

$$\mathcal{V}_{ik} = -3/2 \frac{K_{ik}}{\sum_r K_{ik}} \quad (\text{para barras empotradas}) \quad (4.2.5)$$

El subíndice r indica que la sumatoria debe llevarse a todas las columnas del entrepiso r .

K_{ik} Rigidez relativa (I/L) de la barra ik .

El algoritmo de solución es el siguiente:

- a) Calcular los momentos de empotramiento "perfecto" en los extremos de cada barra.
- b) Obtener los momentos de desequilibrio en cada nudo, sumando los momentos de empotramiento de los extremos cercanos al

nudo, de las barras que concurren al mismo.

c) Obtener los momentos de piso $M_{p_i} = V_p h_p / 3$, para cada entrepiso.

d) Calcular los factores de distribución angular mediante la expresión (4.2.4)

e) Calcular los factores de distribución lineal usando la ecuación (4.2.5)

f) Calcular las contribuciones angulares para cada extremo de barra, mediante la expresión (4.2.2). En la primera iteración se desconocen algunos valores de M'_{ki} y M''_{ki} . Suponer que valen cero. (en algunos casos, para acelerar la convergencia, es conveniente conocer valores iniciales. Consultar la referencia 4.3, donde se indica un procedimiento para calcular estos valores). Obsérvese que el término $M_{d_i} + \sum_i (M'_{ki} + M''_{ki})$ en la ecuación (4.2.2) se obtiene sumando:

- i) El momento de desequilibrio en el nudo i.
- ii) Las contribuciones angulares de los extremos lejanos de las barras que concurren al nudo i.
- iii) Las contribuciones lineales de las columnas que llegan al nudo i.

En el caso de columnas empotradas en la cimentación, al no haber giro, tampoco hay contribución angular en ese extremo.

g) Calcular las contribuciones lineales para cada columna mediante la expresión (4.2.3). Es aplicable lo señalado en el punto f) en lo que respecta a valores iniciales. Nótese que el término $M_{p_r} + \sum_r (M'_{ik} + M'_{ki})$ en la ecuación (4.2.3) se obtiene sumando:

- i) El momento de piso del entrepiso r
- ii) Las contribuciones angulares de los dos extremos de las columnas que se encuentran en el entrepiso r.

h) Repetir alternadamente los pasos f) y g) hasta que se llegue a la exactitud deseada, es decir, cuando haya variaciones suficientemente pequeñas en los valores de M'_{ik} y M''_{ik} en dos iteraciones consecutivas.

i) Calcular los momentos finales con la expresión (4.2.1)

Las ecuaciones presentadas abarcan los casos - de barras con sección constante, alturas iguales para todas - las columnas de un entrepiso y barras unidas rígidamente en - todos los nudos. Para casos mas generales, consultar las referencias 4.2 y 4.17.

A continuación se presenta un grupo de programas de análisis estructural, basado en lo expuesto previamente.

4.2.3 Programas KAN11, KAN12 y KAN13.

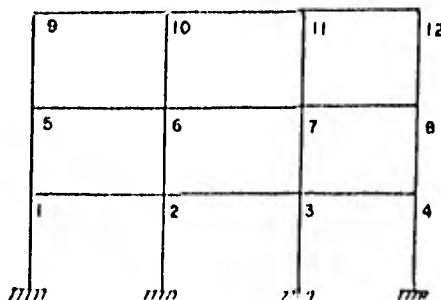
El análisis completo de un marco requiere un número muy grande de instrucciones y consecuentemente, gran espacio de memoria de programa en la HP-41C/CV. Por este motivo, el análisis se ha dividido en tres fases, efectuada cada una por un programa independiente. Estas tres fases son:

- Lectura de datos y cálculo de factores de distribución.
- Cálculo iterativo de los valores de contribuciones lineales y angulares.
- Cálculo de los momentos finales.

4.2.3.1 Lectura de datos y cálculo de factores de distribución: Programa KAN11

Para la identificación de los datos se establecen las siguientes convenciones:

- a) Todos los nudos del marco, exceptuando los apoyos, deben numerarse de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, comenzando por el nudo 1.



b) Las rigideces relativas K_{ij} de todos los elementos que llegan a un nudo son identificadas por dos índices. El primer índice, i , indica el nudo al que llega el elemento, y el índice j indica la dirección en la que se conecta el elemento con los otros nudos, según la siguiente convención:

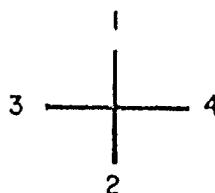


Fig. 4.2.2

Por ejemplo, en el marco de la figura 4.2.3:
(las rigideces relativas de los elementos se han anotado)

$$\begin{aligned} K_{11} &= 4 & ; & & K_{61} &= 0 \\ K_{12} &= 5 & ; & & K_{62} &= 4 \\ K_{13} &= 0 & ; & & K_{63} &= 10 \\ K_{14} &= 11 & ; & & K_{64} &= 10 & ; \text{ etc.} \end{aligned}$$

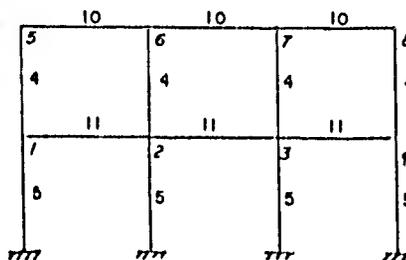


Fig 4.2.3

Es necesario definir siempre cuatro valores de K para cada nudo. Si al nudo llegan menos de cuatro elementos, la rigidez del "elemento" inexistente será cero.

c) Para marcos que no tengan el mismo número de columnas en algún entrepiso, (v.g fig 4.2.4) es necesario definir "nudos" ficticios, en donde los cuatro elementos tienen rigidez cero. Siempre deberán definirse los nudos ficticios necesarios para conservar un patrón reticular en la estructura.

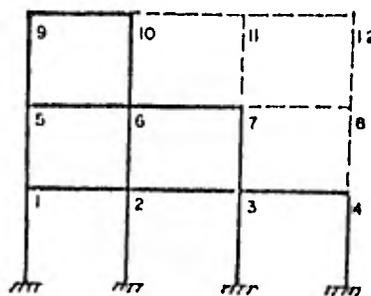


Fig. 4.2.4

d) Se requieren también como datos, los valores de los momentos de desequilibrio MD en cada nudo. Estos momentos se definen como la suma algebraica de todos los momentos de empotramiento del nudo. Para la determinación del signo de los momentos de empotramiento, el usuario establecerá su propia convención, la cual deberá mantener en lo sucesivo. En el caso de que el análisis a efectuar sea exclusivamente bajo cargas laterales, el programa supondrá que los momentos de desequilibrio valen cero en todos los nudos. (Bandera 5 activada)

e) Si existen cargas laterales, deben proporcionarse los valores de los momentos de piso MF_i para cada entrepiso. El signo de estos momentos se ajustará a la convención adoptada anteriormente.

El programa MATH e Jorda para Sistemas de di-

do, de acuerdo a las expresiones (4.2.4) y (4.2.5). Todos los datos quedan almacenados en las localidades adecuadas para continuar el cálculo con el programa LAMI2.

Otros datos necesarios son: el número de niveles (NE) y el número de ejes de columnas (NE). El programa determina también el tamaño de memoria "BLEN" necesario para el caso analizado.

4.2.3.2 Cálculo iterativo de las contribuciones angulares y lineales: Programa LAMI2.

Este programa efectúa el cálculo de las contribuciones angulares y lineales correctas a partir de la suposición inicial de que todos los valores iniciales son cero.

El cálculo se da por terminado cuando en todos los nudos se cumple que:

$$\left| \frac{CA'_n}{CA_n} \right| < 10^{-m} \quad (4.2.6)$$

donde:

m = número de decimales seleccionado por el usuario con la instrucción FIX

$CA_n = MD_j + \sum_j (K^I_{k1} + K^II_{k1})$, calculado en la n -ésima iteración

$CA'_n = CA_n - CA_{n-1}$ redondeado a m decimales con la instrucción ISD

La razón de emplear el término CA' es que en el

gunos marcos existen nudos que no giran, es decir, $CA = 0$, y debido al proceso iterativo, la convergencia a cero absoluto puede ser muy lenta al no redondear la diferencia entre dos valores sucesivos de CA . Es decir, que si el valor de CA en alguno de estos nudos pasara de un valor muy cercano a cero a otro diez veces menor (y mas cercano a la solución), el cambio relativo sería muy grande aunque el nuevo valor calculado es mejor que el anterior. Este problema se elimina redondeando el numerador en la ecuación (4.2.6), lo cual implícitamente supone -- que los números cuyo valor absoluto es menor que 10^{-6} son iguales a cero. De acuerdo con la ecuación (4.2.6), resulta -- claro que conforme m crece, también crece la precisión del cálculo.

Una iteración durará mas tiempo a medida que se incrementa el número de ejes de columnas y el número de niveles. Asimismo, serán necesarias mas iteraciones en marcos con columnas res rígidas en relación con los travesos.

4.2.3.3 Cálculo de los momentos finales; Programa EMI3.

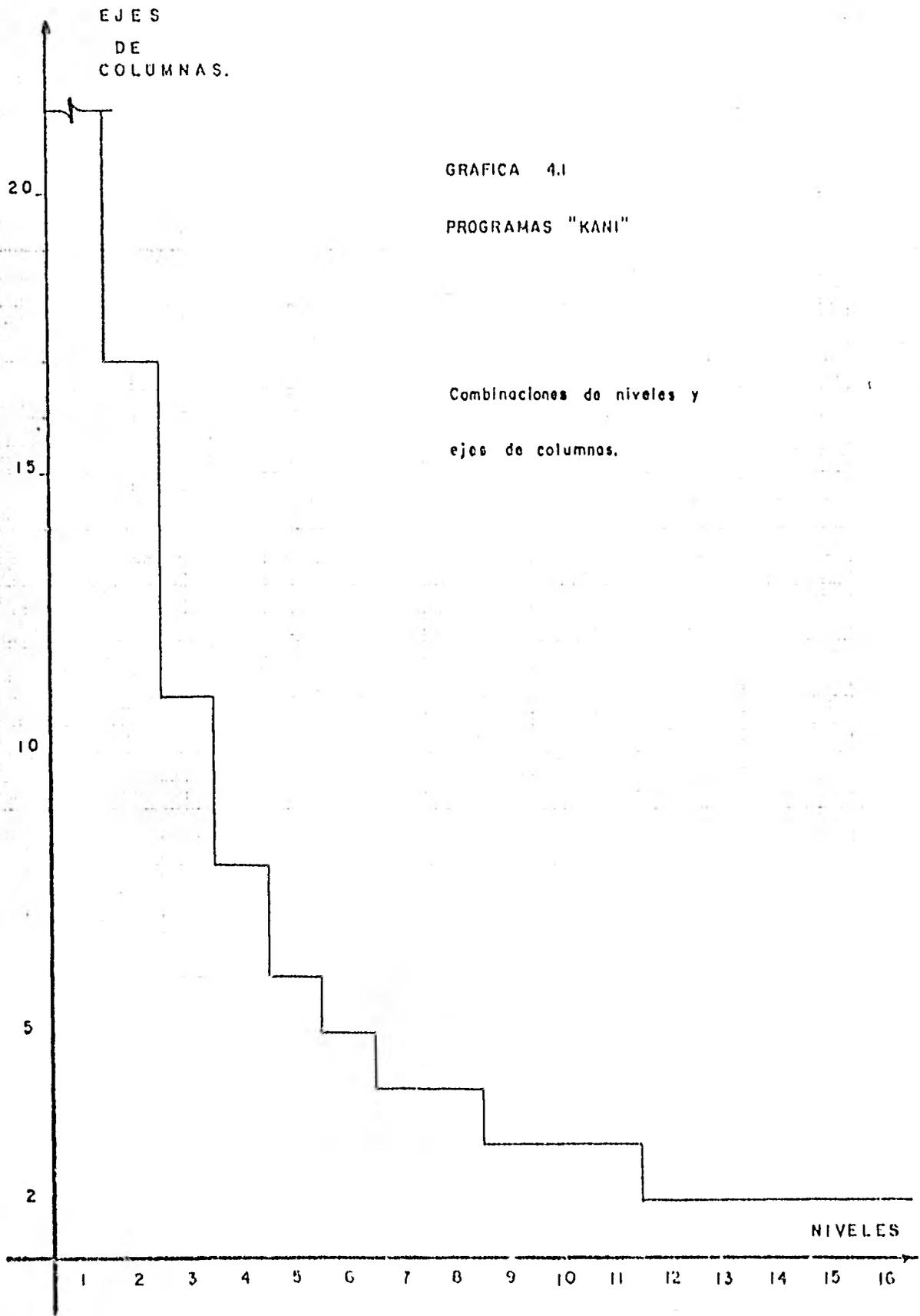
Este programa calcula los momentos finales en cada extremo de los elementos mediante la ecuación (4.2.1) y con las contribuciones lineales y angulares calculadas por EMI2.

Si se ha efectuado un análisis en el que existieran momentos de giro de los nudos (véase § 4.2.1), así como

sario proporcionarlos cuando el programa lo requiera. Estos momentos, M_e , se identifican según la convención indicada - en 4.2.3.1 b). Todos los momentos de empotramiento llevarán asociado un signo que concordará con la convención empleada en todo el análisis.

Posteriormente se calculan los momentos finales en los apoyos, que son identificados como M_{b_j} (momentos en la base). El subíndice j indica el eje al que pertenece cada columna.

En algunos casos, por razones de capacidad de memoria de la máquina, no será posible mantener almacenados los tres programas simultáneamente. El procedimiento indicado es almacenar un programa a la vez, borrándolo (XEQ (CLP) KAN11 o KAN12) al terminar su ejecución y cargando el siguiente. - El programa KAN12 es el que requiere mayor número de registros (54), por lo que el mayor marco que puede analizarse deberá estar dentro de los límites establecidos en la gráfica 4.1.



4.2.3.4 Memorias, estatus y banderas

MEMORIAS				ESTATUS				
00	KAN1	RESU 2	KAN3		SIZE	1217N12NN	REG TOT (1)	NOLO "USER"
01	NO. DE AJUSTES (NA)				ENG		FIX (2)	SBI
02	N	N	ISO AUT	N	NN	NE	EN	X
03	EQUIBOR				CEG		RAD	GRAD
04	EQUINER				BANDERAS			
05	EQUITER							
06	EQUITER				H	INIC	ACTIVA	INDICA
07	E K 1/2	ISO AUT	ISO AUT		0	I	PRECISION	USUFRUENTE
08	ISO MULTIPLE				1	I	M(J,1) P.C.	M(J,1) P.C.
09	ISO MULTIPLE				2	I	M(J,2) P.C.	M(J,2) P.C.
10	E K 1/2	ISO AUT	M(1)		3	I	M(J,3) P.C.	M(J,3) P.C.
11		NO. ITER	ISO AUT		4	I	M(J,4) P.C.	M(J,4) P.C.
12		M(1)			5	I	SEIC. CASOS AJUSTADOS	CASOS COMBINADOS
		M(2)					=> M(J,5) P.C. Y J	DE CARGA
		M(3)					M(J,5) P.C. Y J	
		M(4)			25	I	USUA. INMEDIATA DIVISIONES	CURE OSAD.
12+24		M(12)			27		"USER" EN	"USER" OFF
		M(13)			28		USUA. PARA EQUIBOR	EQUIBOR (5 LA
		M(14)			29			
		M(15)						
		M(16)						
		M(17)						
		M(18)						
		M(19)						
		M(20)						
		M(21)						
		M(22)						
		M(23)						
		M(24)						
		M(25)						
		M(26)						
		M(27)						
		M(28)						
		M(29)						
		M(30)						
		M(31)						
		M(32)						
		M(33)						
		M(34)						
		M(35)						
		M(36)						
		M(37)						
		M(38)						
		M(39)						
		M(40)						
		M(41)						
		M(42)						
		M(43)						
		M(44)						
		M(45)						
		M(46)						
		M(47)						
		M(48)						
		M(49)						
		M(50)						
		M(51)						
		M(52)						
		M(53)						
		M(54)						
		M(55)						
		M(56)						
		M(57)						
		M(58)						
		M(59)						
		M(60)						
		M(61)						
		M(62)						
		M(63)						
		M(64)						
		M(65)						
		M(66)						
		M(67)						
		M(68)						
		M(69)						
		M(70)						
		M(71)						
		M(72)						
		M(73)						
		M(74)						
		M(75)						
		M(76)						
		M(77)						
		M(78)						
		M(79)						
		M(80)						
		M(81)						
		M(82)						
		M(83)						
		M(84)						
		M(85)						
		M(86)						
		M(87)						
		M(88)						
		M(89)						
		M(90)						
		M(91)						
		M(92)						
		M(93)						
		M(94)						
		M(95)						
		M(96)						
		M(97)						
		M(98)						
		M(99)						
		M(100)						

(1) VER GRÁFICA 4.1
 (2) KAN1 : FIX 0
 KAN2 : FIX (M) VER CRITERIO DE CONVERGENCIA
 KAN3 : RESULTADOS EN FIX 2

4.2.3.5 Instructivo de usuario

Paso	INSTRUCCION	ENTRADA	TECLAS	SIZE: (*) SALIDA
1	Iniciar		(REQ) KAN11	C. LAT? SF 0?
2a	Si hay sólo cargas laterales		(SF)0?(R/S)	NN?
2b	Si hay alguna otra combinación		(R/S)	NN?
3	Número de niveles	(NN)	(R/S)	NE?
4	Número de ejes de columnas	(NE)	(R/S)	SZ - (SZ)
5	Disponer "SIZE" adecuado (sólo si el caso lo requiere)		(REQ)(SIZE)	
			(SZ) (R/S)	K1,1?
6	Dar, para cada nudo j :			
	a) Valores de rigideces relativas			
	$K_{ji} \quad i=1, \dots, 4$	(K ₁₁)	(R/S)	Kj,2?
		⋮	⋮	⋮
		⋮	⋮	⋮
		⋮	⋮	Kj,4?
		(K _{j4})	(R/S)	MDj?
	b) Momento de desequilibrio MD _j .			
	Si la bandera 05 se encuentra -			
	activada, el programa supone --			
	MD _j = 0, y no se pide este valor.	(MD _j)	(R/S)	
7	a) Si se han dado los datos de todos los nudos del entrepiso:			MP _r ?
		(MP _r)	(R/S)	Kj 1,1?
	b) Ir al paso 6			
8	Cuando se haya dado el último nudo			FIN
9	Si es necesario, borrar KAN11 y -			
	cargar KAN12.		(REQ)(CLP)	
			KAN11, etc.	

(*) VER GRAFICA 4.1

10	Seleccionar precisión deseada		(FIX) m	
11	Iniciar KANI2		(XEQ) KANI2	IT=(No. de iteraciones (*)
12	Si es necesario, borrar KANI2 y cargar KANI3		(XEQ)(GLP) KANI2, etc.	
13	Iniciar KANI3		(XEQ) KANI3	
14	a) Si la bandera O5 esta inactiva, proporcionar conforme son pedidos, los valores de los momentos de empotramiento (con su signo)	(ME ₁₁)	(R/S)	ME _{1,1} ?
			(R/S)	
	En los extremos en que $K_{ji} = 0$, el programa no pide valor de ME ni proporciona MF.	(ME ₁₂)	(R/S)	.
		.	.	.
		.	.	MF _{1j} = (MF _{1j})
	b) Si la bandera O5 esta activa, se supone que ME _{1j} = 0, i,j y sus valores no son pedidos			
			(R/S)	MF _{1,1} = (MF₁₁)}
			.	MF _{1,2} = (MF₁₂)}
			.	.
			.	MF _{1,j} = (MF_{1j})}
15	Momentos en los apoyos			MB ₁ = (MB ₁)
			(R/S)	MB ₂ = (MB ₂)
			.	.
			.	.
			(R/S)	MB _{ne} = (MB _{ne})
16	(opcional) Si existe algún error al proporcionar algún dato de los	(No. del	<input type="checkbox"/>	N7
		nudo equivocado)		

(*) EL CALCULO PUEDE TOMAR VARIOS MINUTOS.

4.2.3.6 Listado de los programas.

01*LBL *KRN11*	59 ARCL 04	117 PCL 10
02 SF 27	60 CF 23	118 ST/ IND 09
03 FIX 0	61 ARCL 03	119 ISG 06
04 CLRG	62 *F?	120 GTO 17
05 CF 05	63 PROMPT	121 1
06 *C. LAT?SF 5*	64 STO IND 09	122 XEQ 07
07 PROMPT	65 ST+ 07	123 *HP*
08 *E?*	66 STO 06	124 ARCL 05
09 PROMPT	67 RCL 03	125 *F?
10 STO 00	68 INT	126 PROMPT
11 STO 02	69 2	127 STO IND 09
12 STO 05	70 X=Y?	128 ISG 05
13 *EJ?*	71 XEQ 10	129 GTO 02
14 PROMPT	72 ISG 03	130 *FIN*
15 STO 01	73 GTO 04	131 PROMPT
16 ST+ 02	74 1.004	132*LBL 18
17 2	75 STO 03	133 RCL 01
18 XEQ 07	76 -2	134 5
19 SF 25	77 ST+ 07	135 +
20 RCL IND 09	78*LBL 06	136 RCL 00
21 FS?C 25	79 XEQ 05	137 +
22 GTO 08	80 RCL 07	138 ST+ 09
23 RCL 09	81 SF 25	139 RCL 08
24 1	82 ST/ IND 09	140 STO IND 09
25 +	83 CF 25	141 ST+ 10
26 *S2=*	84 ISG 03	142 *TN
27 ARCL X	85 GTO 06	143*LBL C
28 PROMPT	86 FS? 05	144 *H?*
29*LBL 08	87 GTO 11	145 PROMPT
30 1	88 5	146 STO 04
31 RCL 00	89 STO 03	147 1
32 XEQ 01	90 XEQ 05	148 -
33 STO 05	91 *KD*	149 RCL 01
34*LBL 02	92 ARCL 04	150 /
35 0	93 *F?	151 INT
36 STO 10	94 PROMPT	152 1
37 1	95 STO IND 09	153 +
38 RCL 01	96*LBL 11	154 RCL 00
39 XEQ 01	97 ISG 06	155 XEQ 01
40 STO 06	98 GTO 03	156 STO 05
41*LBL 03	99 1	157 GTO 02
42 0	100 RCL 01	158*LBL 01
43 STO 07	101 XEQ 01	159 1 E3
44 RCL 05	102 STO 06	160 /
45 1	103 RCL 05	161 +
46 -	104 1	162 RTN
47 RCL 01	105 -	163*LBL 05
48 +	106 RCL 01	164 RCL 03
49 RCL 06	107 +	165 1
50 +	108 STO 04	166 -
51 STO 04	109 7	167 RCL 02
52 1.004	110 STO 03	168 +
53 STO 03	111 XEQ 05	169 RCL 04
54 CF 23	112 -1.5	170 +
55*LBL 04	113 ST+ 10	171 11
56 XEQ 05	114*LBL 17	172 +
57 SF 20	115 1	173 STO 09
58	116	174

175 LBL 07
176 RCL 05
177 1
178 -
179 2
180 *
181 +
182 RCL 02
183 7
184 *
185 +
186 11
187 +
188 STO 09
189 END

01*LBL 12
 02 0
 03 STO 11
 04*LBL 15
 05 1
 06 RCL 00
 07 1 E3
 08 /
 09 +
 10 STO 05
 11 1
 12 ST+ 11
 13*LBL 17
 14 0
 15 STO 07
 16 1
 17 RCL 01
 18 1 E3
 19 /
 20 +
 21 STO 06
 22*LBL 18
 23 RCL 05
 24 1
 25 -
 26 RCL 01
 27 +
 28 RCL 06
 29 +
 30 STO 04
 31 2
 32 STO 03
 33 XEQ 16
 34 RCL IND 09
 35 RCL 02
 36 4
 37 +
 38 ST+ 09
 39 CLX
 40 RCL IND 09
 41 +
 42 ST+ 07
 43 RCL 05
 44 INT
 45 1
 46 -
 47 X=0?
 48 GTO 11
 49 RCL 01
 50 ST- 09
 51 RCL IND 09
 52 RCL 02
 53 5
 54 +
 55 ST- 09
 56 CLX
 57 RCL IND 09

59 ST+ 07
 60*LBL 11
 61 ISG 05
 62 GTO 18
 63 1
 64 XEQ 21
 65 RCL IND 09
 66 ST+ 07
 67 1
 68 ST+ 09
 69 RCL 07
 70 STO IND 09
 71 ISG 05
 72 GTO 17
 73 1
 74 RCL 00
 75 1 E3
 76 /
 77 +
 78 STO 05
 79*LBL 19
 80 1
 81 RCL 01
 82 1 E3
 83 /
 84 +
 85 STO 06
 86*LBL 20
 87 RCL 05
 88 1
 89 -
 90 RCL 01
 91 +
 92 RCL 06
 93 +
 94 STO 04
 95 STO 08
 96 0
 97 STO 07
 98 1.004
 99 STO 03
 100 XEQ 16
 101*LBL 13
 102 RCL IND 09
 103 X=0?
 104 SF IND 03
 105 RCL 02
 106 ST+ 09
 107 ISG 02
 108 GTO 13
 109 FS? 01
 110 GTO 14
 111 RCL 03
 112 RCL 01
 113 +
 114 STO 04
 115 ?

117*LBL 14
 118 FS?C 01
 119 GTO 03
 120 RCL 05
 121 INT
 122 1
 123 -
 124 X=0?
 125 GTO 03
 126 RCL 03
 127 RCL 01
 128 -
 129 STO 04
 130 1
 131 XEQ 22
 132*LBL 03
 133 2
 134 XEQ 21
 135 STO 10
 136 RCL 03
 137 STO 04
 138 7
 139 STO 03
 140 XEQ 16
 141 RCL IND 10
 142 RCL IND 09
 143 +
 144 ST+ 07
 145 FS?C 01
 146 GTO 03
 147 2
 148 ST+ 10
 149 RCL 01
 150 ST+ 09
 151 RCL IND 09
 152 RCL IND 10
 153 +
 154 ST+ 07
 155*LBL 03
 156 FS?C 03
 157 GTO 04
 158 RCL 03
 159 1
 160 -
 161 STO 04
 162 4
 163 XEQ 22
 164*LBL 04
 165 FS?C 04
 166 GTO 06
 167 RCL 03
 168 1
 169 +
 170 STO 04
 171 3
 172 XEQ 02

01*LBL 10M12*	59 ST+ 07	117*LBL 14
02 0	60*LBL 11	118 FS?C 03
03 STD 11	61 ISG 06	119 GTO 08
04*LBL 15	62 GTO 18	120 RCL 05
05 1	63 1	121 INT
06 RCL 00	64 XEQ 21	122 1
07 1 E3	65 RCL IND 09	123 -
08 /	66 ST+ 07	124 X=0?
09 +	67 1	125 GTO 03
10 STD 05	68 ST+ 09	126 RCL 03
11 1	69 RCL 07	127 RCL 01
12 ST+ 11	70 STD IND 09	128 -
13*LBL 17	71 ISG 05	129 STO 04
14 0	72 GTO 17	130 1
15 STO 07	73 1	131 XEQ 22
16 1	74 RCL 00	132*LBL 03
17 RCL 01	75 1 E3	133 2
18 1 E3	76 /	134 XEQ 21
19 /	77 +	135 STO 10
20 +	78 STO 05	136 RCL 03
21 STO 06	79*LBL 19	137 STO 04
22*LBL 18	80 1	138 7
23 RCL 05	81 RCL 01	139 STO 03
24 1	82 1 E3	140 XEQ 16
25 -	83 /	141 RCL IND 10
26 RCL 01	84 +	142 RCL IND 09
27 *	85 STO 06	143 *
28 RCL 06	86*LBL 20	144 ST+ 07
29 +	87 RCL 05	145 FS?C 01
30 STO 04	88 1	146 GTO 08
31 2	89 -	147 2
32 STO 03	90 RCL 01	148 ST+ 10
33 XEQ 16	91 *	149 RCL 01
34 RCL IND 09	92 RCL 06	150 ST+ 09
35 RCL 02	93 +	151 RCL IND 09
36 4	94 STO 04	152 RCL IND 10
37 *	95 STO 08	153 *
38 ST+ 09	96 0	154 ST+ 07
39 CLX	97 STO 07	155*LBL 08
40 RCL IND 09	98 1.004	156 FS?C 03
41 *	99 STO 03	157 GTO 04
42 ST+ 07	100 XEQ 16	158 RCL 03
43 RCL 05	101*LBL 13	159 1
44 INT	102 RCL IND 09	160 -
45 1	103 X=0?	161 STO 04
46 -	104 SF IND 03	162 4
47 X=0?	105 RCL 02	163 XEQ 22
48 GTO 11	106 ST+ 09	164*LBL 04
49 RCL 01	107 ISG 03	165 FS?C 04
50 ST- 09	108 GTO 13	166 GTO 06
51 RCL IND 09	109 FS? 01	167 RCL 03
52 RCL 02	110 GTO 14	168 1
53 5	111 RCL 03	169 1
54 *	112 RCL 01	170 STO 04
55 ST- 09	113 +	171 3
56 CLX	114 STO 04	172 XEQ 22
57 RCL IND 09	115 ?	173*LBL 09
58 *		

175 STO 04	233 STO 03
176 E	234 RTH
177 STO 03	235+LBL 22
178 XEQ 16	236 STO 03
179 STO 10	237 XEQ 16
180 RCL 02	238 RCL IND 09
181 ST- 09	239 6
182 RCL IND 09	240 RCL 03
183 RCL 07	241 -
184 +	242 RCL 02
185 X<> IND 10	243 *
186 RCL IND 10	244 ST+ 09
187 -	245 CLX
188 RND	246 RCL IND 09
189 RCL IND 10	247 *
190 SF 25	248 ST+ 07
191 /	249 END
192 CF 25	
193 RND	
194 PSE	
195 X#0?	
196 SF 00	
197 CF 01	
198 ISG 06	
199 GTO 20	
200 ISG 05	
201 GTO 19	
202 FS?C 00	
203 GTO 15	
204 BEEP	
205 "IT="	
206 ARCL 11	
207 PROMPT	
208+LBL 16	
209 PCL 03	
210 1	
211 -	
212 RCL 02	
213 *	
214 RCL 04	
215 +	
216 11	
217 +	
218 STO 09	
219 RTH	
220+LBL 21	
221 RCL 05	
222 1	
223 -	
224 2	
225 *	
226 +	
227 RCL 02	
228 7	
229 *	
230 +	
231 11	
232 1	

01*LBL *KANT3*
 02 1
 03 RCL 00
 04 XEQ 01
 05 STO 05
 06*LBL 00
 07 1
 08 RCL 01
 09 XEQ 01
 10 STO 06
 11*LBL 14
 12 RCL 05
 13 1
 14 -
 15 RCL 01
 16 *
 17 RCL 06
 18 +
 19 STO 03
 20 STO 04
 21 6
 22 STO 03
 23 XEQ 05
 24 RCL IND 09
 25 STO 10
 26 1
 27 XEQ 02
 28 FS?C 01
 29 GTO 03
 30 1
 31 ST+ 05
 32 2
 33 XEQ 07
 34 STO 02
 35 RCL 08
 36 RCL 01
 37 +
 38 STO 04
 39 7
 40 STO 03
 41 XEQ 05
 42 RCL IND 02
 43 RCL IND 09
 44 *
 45 ST+ 07
 46 1
 47 ST- 05
 48 2
 49 XEQ 04
 50*LBL 03
 51 2
 52 XEQ 02
 53 FS?C 02
 54 GTO 06
 55 RCL 03
 56 STO 04
 57 2

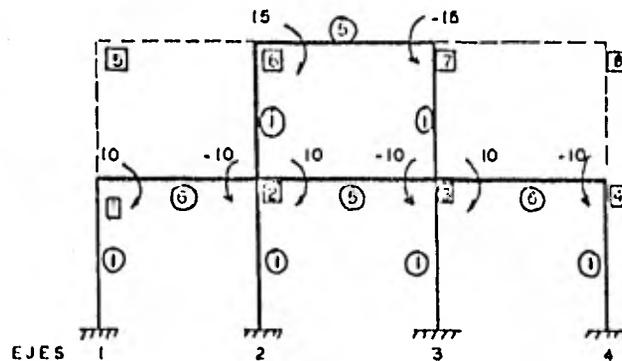
59 STO 02
 60 7
 61 STO 03
 62 XEQ 05
 63 RCL IND 02
 64 RCL IND 09
 65 +
 66 ST+ 07
 67 RCL 01
 68 ST- 04
 69 RCL 05
 70 INT
 71 1
 72 -
 73 X=0?
 74 GTO 08
 75 XEQ 03
 76 GTO 06
 77*LBL 08
 78 1
 79 XEQ 04
 80*LBL 06
 81 3
 82 XEQ 02
 83 FS?C 03
 84 GTO 10
 85 RCL 08
 86 1
 87 -
 88 STO 04
 89 4
 90 XEQ 04
 91*LBL 10
 92 4
 93 XEQ 02
 94 FS?C 04
 95 GTO 11
 96 RCL 03
 97 1
 98 +
 99 STO 04
 100 3
 101 XEQ 04
 102*LBL 11
 103 ISG 05
 104 GTO 14
 105 ISG 05
 106 GTO 00
 107 1
 108 RCL 01
 109 XEQ 01
 110 STO 04
 111 1
 112 STO 05
 113*LBL 12
 114 2
 115 XEQ 07

117 7
 118 STO 07
 119 XEQ 05
 120 RCL IND 02
 121 RCL IND 09
 122 *
 123 STO 07
 124 6
 125 STO 03
 126 XEQ 05
 127 STO 02
 128 2
 129 STO 03
 130 XEQ 05
 131 RCL IND 09
 132 RCL IND 02
 133 *
 134 ST+ 07
 135 CF 29
 136 *ME *
 137 FIX 0
 138 ARCL 04
 139 XEQ 15
 140 ISG 04
 141 GTO 12
 142 BEEP
 143 STOP
 144*LBL 02
 145 STO 03
 146 STO 11
 147 RCL 03
 148 STO 04
 149 XEQ 05
 150 RCL IND 09
 151 X=0?
 152 GTO 13
 153 RCL 10
 154 *
 155 ST+ X
 156 STO 07
 157 FS? 05
 158 RTN
 159 CF 28
 160 SF 29
 161 *ME *
 162 FIX 0
 163 ARCL 04
 164 CF 29
 165 ARCL 03
 166 *F? *
 167 PROMPT
 168 ST+ 07
 169 RTN
 170*LBL 13
 171 SF IND 03
 172 RTN
 173*LBL 04

175 XEQ 05
176 STO 02
177 6
178 STO 03
179 XEQ 05
180 RCL IND 02
181 RCL IND 09
182 +
183 ST+ 07
184*LBL 09
185 CF 28
186 SF 29
187 *MF *
188 FIX 0
189 ARCL 08
190 CF 29
191 ARCL 11
192*LBL 15
193 *F*
194 FIX 2
195 SF 28
196 RCL 07
197 PROMPT
198 RTH
199*LBL 01
200 I E3
201 /
202 +
203 RTH
204*LBL 05
205 RCL 03
206 I
207 -
208 RCL 08
209 RCL 01
210 +
211 +
212 RCL 04
213 +
214 11
215 +
216 STO 09
217 RTH
218*LBL 07
219 RCL 05
220 I
221 -
222 2
223 +
224 +
225 RCL 08
226 RCL 01
227 +
228 7
229 +
230 +
231 11
232 +
233 STO 09

4.2.3-7 Ejemplos resueltos.

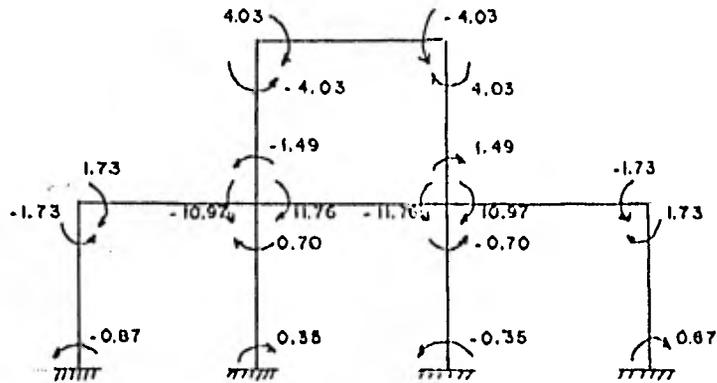
a) Determinar los momentos en los extremos de las barras del siguiente marco:



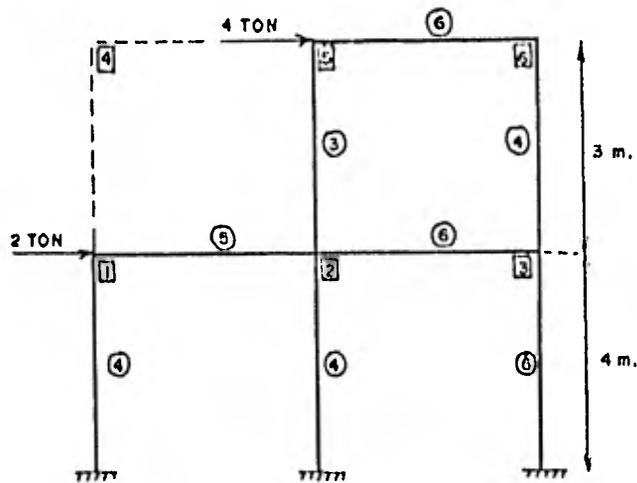
En los círculos se han anotado las rigide--
ces relativas (I/L) de cada elemento. En los rectángulos
se indica el número de cada nudo. También se han anotado -
los valores de los momentos de empotramiento.

	XEQ "YARN11"	K3,1?	1	RUN
C. LAT?SF 5	PUN	K3,2?	1	RUN
NN?	2. RUN	K3,3?	5	RUN
NE?	4. RUN	K3,4?	6	RUN
SZ=72.	SIZE Ø72	MD3?	0	RUN
	RUN	K4,1?	0	RUN
K1,1?	0 RUN	K4,2?	1	RUN
K1,2?	1 RUN	K4,3?	6	RUN
K1,3?	0 RUN	K4,4?	0	PUN
K1,4?	6 RUN	MD4?	-10	RUN
MD1?	10 RUN	MP1?	0	RUN
K2,1?	1 RUN	K5,1?	0	RUN
K2,2?	1 RUN	K5,2?	0	RUN
K2,3?	6 RUN	K5,3?	0	RUN
K2,4?	5 RUN		0	RUN

Momentos finales:



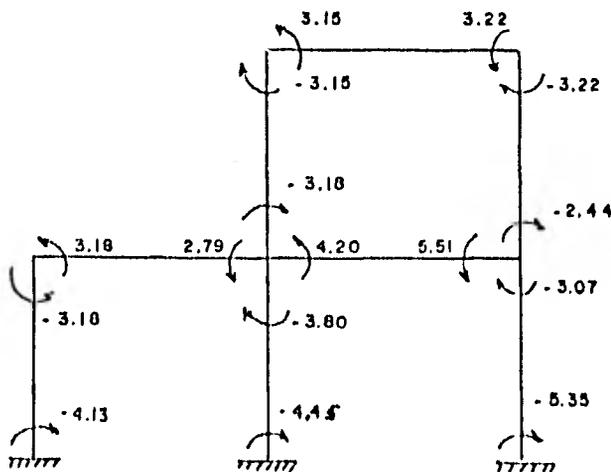
b) Analizar el siguiente marco, sujeto a - cargas laterales



Element	Start Node	End Node	Direction
C. LAT?SF 5	XEO *FAN11*		5 RUN
	SF 05		K2,1?
	PUN		3 RUN
E?			Y2,2?
EJ?	2	PUN	K2,3?
	3	PUN	K2,4?
K1,1?	0	PUN	K3,1?
K1,2?	4	PUN	K3,2?
			7 RUN

					FIX 3
					XEQ 'KANT2'
				IT=8,000	
					XEQ 'KANT3'
K3,4?	0	RUN		MF 1,2=-3.10	RUN
MP1?	0	RUN		MF 1,4=3.10	RUN
K4,1?	0	RUN		MF 2,1=-3.10	RUN
K4,2?	0	RUN		MF 2,2=-3.01	RUN
K4,3?	0	RUN		MF 2,3=2.79	RUN
K4,4?	0	RUN		MF 2,4=4.20	RUN
K5,1?	0	RUN		MF 3,1=-2.44	RUN
K5,2?	3	RUN		MF 3,2=-3.00	RUN
K5,3?	0	RUN		MF 3,3=5.52	RUN
K5,4?	6	RUN		MF 5,2=-3.15	RUN
K6,1?	0	RUN		MF 5,4=3.15	RUN
K6,2?	4	RUN		MF 6,2=-3.22	RUN
K6,3?	6	RUN		MF 6,3=3.22	RUN
K6,4?	0	RUN		MB 1=-4.13	RUN
MP2?	4	RUN		MB 2=-4.45	RUN
FIN				MB 3=-5.35	

Momentos finales:
(acciones)



4.3 Cálculo de Rigideces de Entrepiso. Ecuaciones de Wilbur.

4.3.1 Ecuaciones Fundamentales.

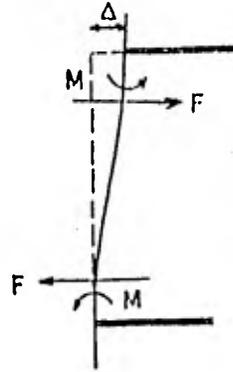
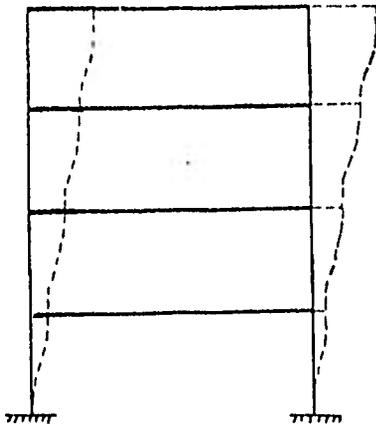
Se define como rigidez de entrepiso a la relación entre la fuerza cortante resistida por un marco, muro o contraviento en un entrepiso y el desplazamiento horizontal relativo entre los dos niveles consecutivos. (ref. 4.3, p. 35)

El conocimiento de estas rigideces, es de suma importancia para calcular los desplazamientos de estructuras sometidas a cargas laterales, así como para valuar las fuerzas horizontales a que se ve sujeta una estructura ante una excitación sísmica.

La rigidez de entrepiso, atendiendo a la definición anterior, no es independiente del sistema de fuerzas laterales. En el caso de estructuras a base de marcos rígidos, las cuales son muy frecuentes en edificios altos, el uso de sistemas de carga que no son estrictamente proporcionales al definitivo de análisis, produce errores de poca importancia, considerando las hipótesis simplificadoras sobre la distribución de las fuerzas cortantes que suelen hacerse.

En general, son otros los factores que provocan los mayores errores en la estimación de la rigidez. (ref. 4.4, pp. 3 a 9)

Para el caso de marcos rígidos (que es el caso que estudiaremos en lo sucesivo) puede establecerse una cota superior para la rigidez de entrepiso, la cual corresponde al caso de un marco con trabes infinitamente rígidas.



En el marco indicado, los nudos no giran y existe un punto de inflexión al centro de cada columna. Además, las columnas son de sección constante y todas las columnas del mismo entresijo tienen la misma altura.

Puede deducirse fácilmente que en cualquier entresijo cuyo desplazamiento relativo sea Δ :

$$F = \frac{12EI \Delta}{h^3}$$

$$M = \frac{6EI \Delta}{h^2}$$

Por equilibrio, la fuerza cortante en cualquier nivel debe ser igual a la suma de fuerzas cortantes que aparecen en las columnas:

$$V = \sum F_j = \sum \frac{12EI_j \Delta}{h^3}$$

E = Módulo de elasticidad de las columnas

I_j = Momento de inercia de la j -ésima columna.

Entonces:

$$V = \frac{12E \Delta}{h^3} \sum I_j$$

de acuerdo a la definición de la rigidez de entrepiso R :

$$R = \frac{V}{\Delta} = \frac{12E}{h^3} \sum I_j$$

Se han despreciado las deformaciones producidas por fuerza normal y esfuerzo cortante.

Esta expresión constituye una cota superior para la rigidez de entrepiso y además muestra un caso en que la rigidez de entrepiso no depende del sistema de cargas laterales.

Evidentemente este marco ideal difiere de las estructuras reales. Para éstas, es necesario utilizar algún método que permita calcular las rigideces de entrepiso.

Uno de los métodos aproximados más populares en nuestro medio es el de las ecuaciones de Wilbur. Estas ecuaciones permiten valuar la rigidez de entrepiso en marcos rígidos, recurriendo a las siguientes hipótesis simplificadoras. (ref. 4.3, p. 35)

a) Los giros en todos los nudos de un nivel y de los dos niveles adyacentes son iguales (excepto en el nivel de desplante, en donde puede suponerse empotramiento o articulación, según el caso).

b) Las fuerzas cortantes en los dos entrepisos adyacentes al que interesa son iguales a la de éste.

Estas hipótesis se cumplen, en general, para los pisos intermedios de edificios altos que oscilen en el modo fundamental de vibrar ante excitación sísmica. (ref. 4.4, pp. 9 y 10)

De las hipótesis anteriores resultan las siguientes fórmulas: (ref. 4.3, p. 35 y ref. 4.5)

Para el primer entrepiso:

Columnas empotradas en la cimentación

$$R_1 = \frac{48E}{h_1 \left[\frac{4h_1}{Kc_1} + \frac{h_1 + h_2}{Kt_1 + \frac{Kc_1}{12}} \right]} \quad (4.3.1)$$

Columnas articuladas en la cimentación

$$R_1 = \frac{24E}{h_1 \left[\frac{8h_1}{Kc_1} + \frac{2h_1 + h_2}{Kt_1} \right]} \quad (4.3.2)$$

Para el segundo entrepiso

Columnas empotradas en la cimentación

$$R_2 = \frac{48E}{h_2 \left[\frac{4h_2}{Kc_2} + \frac{h_1 + h_2}{Kt_1 + \frac{Kc_1}{12}} + \frac{h_2 + h_3}{Kt_2} \right]} \quad (4.3.3)$$

Columnas articuladas en la cimentación

$$R_2 = \frac{48E}{h_2 \left[\frac{4h_2}{Kc_2} + \frac{h_2 + h_3}{Kt_2} + \frac{2h_1 + h_2}{Kt_1} \right]} \quad (4.3.4)$$

Para entrepisos intermedios

$$R_i = \frac{48E}{h_i \left[\frac{4h_i}{Kc_i} + \frac{h_{i-1} + h_i}{Kt_{i-1}} + \frac{h_i + h_{i+1}}{Kt_i} \right]}$$

En estas ecuaciones

R_i = Rigidez del i -ésimo entrepiso.

Kt_i = Rigidez relativa (I/L) de traveses del nivel sobre el entrepiso i

Kc_i = Rigidez relativa (I/h) de columnas del entrepiso i

h_i = Altura del entrepiso i

Quando la estructura estudiada vibra según el modo fundamental, la hipótesis b) no se cumple satisfactoriamente en los últimos niveles. Con frecuencia se tienen incrementos del 100% en la fuerza cortante al pasar del último al penúltimo entrepiso. Del Valle (ref. 4.4) propuso una modificación para el cálculo de la rigidez del último entrepiso, la cual resulta de suponer que la fuerza cortante se incrementa un 100% al pasar del último al penúltimo entrepiso. La expresión a que se llega es:

$$R_n = \frac{48E}{h_n \left[\frac{4h_n}{Kc_n} + \frac{2h_{n-1} + h_n}{Kt_{n-1}} + \frac{h_n}{Kt_n} \right]} \quad (4.3.6)$$

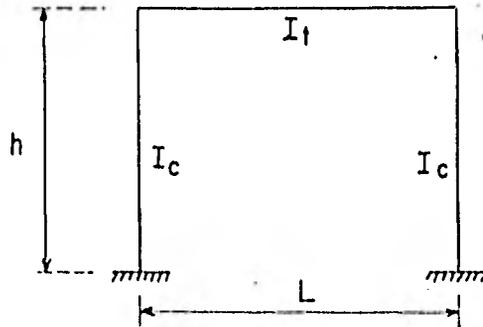
R_n = Rigidez del último entrepiso (n)

En ciertos casos es necesario considerar otros efectos para el cálculo de rigideces de entrepiso. Estos efectos son: (ref. 4.4, pp. 11 a 15)

Efectos de fuerza normal en columnas

Efectos de esbeltez

Como dato adicional se incluye una fórmula para calcular la rigidez de entrepiso de marcos de un solo nivel.



$$\frac{R}{R'} = \frac{6 \frac{K_t}{K_c} + 1}{6 \frac{K_t}{K_c} + 4} \quad (4.3.7)$$

donde:

R = rigidez de marco

$$R' = \frac{24EI_c}{h^3}$$

$$K_t = \frac{I_t}{L}$$

$$K_c = \frac{I_c}{h}$$

La ecuación (4.3.7) resulta de un análisis en el que se han despreciado las deformaciones por fuerza normal y esfuerzo - cortante.

4.3.2 Programa WILBUK

Este programa está diseñado para calcular rigideces de entrepiso en marcos planos y está basado en las ecuaciones (4.3.1) a (4.3.6)

Para su operación son necesarios los siguientes datos:

- E : Módulo de elasticidad del material que constituye el marco. El programa presupone que este valor de E es aplicable para todos los elementos de la estructura.
- N : Número de entrepisos del marco. Para fines de identificación, los entrepisos se numeran de abajo hacia arriba (N - 3)
- NCR : Número de crujiás que forman al marco.
- H_i : Altura del i-ésimo entrepiso.
- KT : Rigideces relativas (I/L) de trabes
- KC : Rigideces relativas (I/H) de columnas

Se han considerado las dos condiciones de apoyo para las cuales están definidas las ecuaciones de Wilbur: columnas empotradas o articuladas en la cimentación. Asimismo, se ha incluido la modificación propuesta por Del Valle en lo que respecta a la rigidez del último entrepiso.

Debido a la estructura de las fórmulas de Wilbur, puede observarse que en general, es necesario conocer ciertas características de los entrepisos adyacentes para calcular la rigidez del entrepiso que se desea. De aquí que el procedimiento seguido en el programa Wilbur sea, a grandes rasgos, el siguiente:

- a) Lectura de parámetros generales (E, N, NCR)
- b) Lectura de datos de los primeros 3 entrepisos (H, KT, KC)
- c) Cálculo de R_1 y R_2
- d) Lectura de datos del siguiente entrepiso (i)
- e) Cálculo de la rigidez del entrepiso anterior (i-1)

Los pasos d) y e) se repiten hasta que $i=N$. En este caso, después del cálculo de la rigidez del penúltimo entrepiso, se procede de inmediato al cálculo de la rigidez del último.

De cualquier manera, los datos pedidos y resultados obtenidos por el programa Wilbur, indican siempre a qué entrepiso se refieren.

La lectura de valores de KT y KC presenta 2 modalidades.

a) Los valores de KT ó KC son iguales para todos los elementos correspondientes del entrepiso. En este caso, es suficiente con dar una sola vez el valor de KT y una sola vez el de KC . El programa supone que:

$$(\sum KT)_i = NCR (KT)$$

$$(\sum KC)_i = KC (NCR + 1)$$

b) Los elementos del entrepiso presentan diferentes valores de KT ó KC . En este caso es necesario suministrar todos los valores de KT ó KC del entrepiso en cuestión.

En el programa Wilbur se presenta una modalidad de lectura de datos diferente al resto de los programas. Los datos son pedidos sin suspender la ejecución del programa y sin presionar la tecla (R/S) para reiniciar la ejecución, excepto al obtener las rigideces.

Para convertir esta versión del programa a la modalidad normal de lectura, basta sustituir todas las instrucciones (REQ 16) por (PROMPT) y modificar ligeramente la subrutina 00, como se indica enseguida:

Versión de lectura sin emplear (R/S)	Versión normal
95 LBL 00	95 LBL 00
96 "FIGUALES? S/N	96 "FIGUALES? S/N
97 AVIEW	97 AON
98 AON	98 STOP
99 CF 23	99 ASTO X
100 LBL 17	100 "S"
101 PSE	101 ASTO Y
102 FC?C 23	102 AOFF
103 GTO 17	103 X Y?
104 ASTO X	104 SF 02
105 AOFF	105 RTN
106 "S"	
107 ASTO Y	
108 X Y?	
109 SF 02	
110 RTN	

4.3.2.2 Instructivo de Usuario.

				SIZE = 016
paso	INSTRUCCION	ENTRADA	TECLAS	SALIDA
1	Iniciar		(XEQ) WILBUR	E?
2	Módulo de elasticidad	(E)		N?
3	Número de entrepisos ($N \geq 3$)	(N)		NCR?
4	Número de crujías	(NCR)		A/E?
5a	Columnas articuladas en cimenta-- ción		<input type="checkbox"/> A	ENTR. 1
	Ir al paso 6			
5b	Columnas empotradas en cimentación		<input type="checkbox"/> E	ENTR. 1
6	Alturas de entrepiso			H1?
		(H ₁)		TRABES IGUA-- LES? S/N
7a	Trabes con igual rigidez relativa en el entrepiso 1	S (KT _{e1})		KT _{e1} ?
	Ir al paso 8			
7b	Trabes con diferente rigidez rela- tiva en el entrepiso 1	N		KT1?
	Dar rigidez relativa de las NCR - trabes	(KT ₁) . . . (KT _{NCR})		KT2? . . KT NCR? COLS. IGUA-- LES? S/N
8	Proceder con los valores de KC - como con los valores de KT			
9	Si $1 < 3$			H1?
	Ir al paso 6			

4.3.2.3 Listado del programa.

01*LBL "WILBUR"	59 GTO 02	117 I
02 CF 01	60*LBL 04	118 +
03 SF 27	61 XEQ 09	119 +
04 CF 29	62 .001	120 STO 03
05 CLPG	63 ST+ 12	121*LBL 11
06 "E?"	64*LBL 12	122 3
07 XEQ 15	65 *COLS."	123 RCL 10
08 48	66 XEQ 08	124 INT
09 +	67 FS?C 02	125 X<Y?
10 STO 14	68 GTO 10	126 GTO 01
11 "K?"	69*LBL 03	127 4
12 XEQ 16	70 "K"	128 X<=Y?
13 STO 09	71 ARCL 12	129 GTO 05
14 *NCR?"	72 "F?"	130 RCL 00
15 XEQ 16	73 XEQ 16	131 I
16 STO 15	74 ST+ 03	132 -
17 "R/E?"	75 ISG 12	133 I E3
18 PROMPT	76 GTO 03	134 /
19*LBL A	77 GTO 11	135 I
20 SF 01	78*LBL 03	136 +
21*LBL E	79 RCL 15	137 STO 11
22 .1	80 I E3	138 FS? 01
23 STO 10	81 /	139 GTO 06
24*LBL 01	82 I	140 RCL 07
25 FIX 0	83 +	141 12
26 ISG 10	84 STO 12	142 /
27 RCL 03	85 RTN	143 RCL 04
28 X< 02	86*LBL 03	144 +
29 X< 01	87 *KTe"	145 I/X
30 RCL 06	88 ARCL 10	146 RCL 01
31 X< 05	89 "F?"	147 RCL 02
32 X< 04	90 XEQ 16	148 +
33 RCL 03	91 RCL 15	149 +
34 X< 08	92 +	150 STO 13
35 X< 07	93 STO 06	151 RCL 01
36 *ENTR. "	94 GTO 04	152 4
37 ARCL 10	95*LBL 00	153 +
38 AVIEW	96 "F IGMALES? S/H"	154 RCL 07
39 "H"	97 AVIEW	155 /
40 ARCL 10	98 AON	156 +
41 "F?"	99 CF 23	157 RCL 01
42 XEQ 16	100*LBL 17	158 +
43 STO 03	101 PSE	159 I/X
44 0	102 FC?C 23	160 RCL 14
45 STO 03	103 GTO 17	161 +
46 STO 06	104 ASTO X	162 XEQ 07
47 XEQ 09	105 AOFF	163 ISG 11
48 *TEABES"	106 *S"	164 RCL 02
49 XEQ 00	107 ASTO Y	165 RCL 03
50 FS?C 02	108 X=Y?	166 +
51 GTO 03	109 SF 02	167 RCL 05
52*LBL 02	110 RTN	168 /
53 *KT"	111*LBL 10	169 RCL 13
54 ARCL 12	112 *KCe"	170 +
55 "F?"	113 ARCL 10	

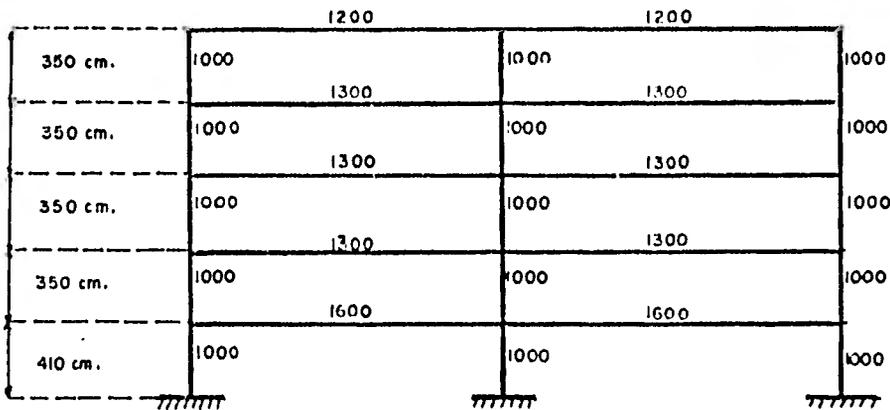
175 /
 176 +
 177 RCL 02
 178 *
 179 1/X
 180 RCL 14
 181 *
 182 XEQ 07
 183 ISG 11
 184 GT0 01
 185*LBL 06
 186 RCL 01
 187 2
 188 *
 189 RCL 02
 190 +
 191 RCL 04
 192 /
 193 STO 13
 194 RCL 01
 195 0
 196 *
 197 RCL 07
 198 /
 199 +
 200 RCL 01
 201 *
 202 1/X
 203 RCL 14
 204 2
 205 /
 206 *
 207 XEQ 07
 208 ISG 11
 209 RCL 02
 210 4
 211 *
 212 RCL 00
 213 /
 214 RCL 02
 215 RCL 03
 216 +
 217 RCL 05
 218 /
 219 +
 220 RCL 13
 221 +
 222 RCL 02
 223 *
 224 1/X
 225 RCL 14
 226 *
 227 XEQ 07
 228 ISG 11
 229 GT0 01

233 *
 234 RCL 02
 235 /
 236 RCL 02
 237 RCL 01
 238 +
 239 RCL 04
 240 /
 241 +
 242 RCL 02
 243 RCL 03
 244 +
 245 RCL 05
 246 /
 247 +
 248 RCL 02
 249 *
 250 1/X
 251 RCL 14
 252 *
 253 XEQ 07
 254 ISG 11
 255 GT0 01
 256 CF 01
 257 RCL 03
 258 4
 259 *
 260 RCL 03
 261 /
 262 RCL 02
 263 2
 264 *
 265 RCL 03
 266 +
 267 RCL 05
 268 /
 269 +
 270 RCL 03
 271 RCL 06
 272 /
 273 +
 274 RCL 03
 275 *
 276 1/X
 277 RCL 14
 278 *
 279*LBL 07
 280 SF 20
 281 FIX 0
 282 *R*
 283 CF 29
 284 PRCL 11
 285 *F*
 286 ENG 3
 287 RCL 01

290*LBL 16
 291 CF 22
 292 RMIEN
 293*LBL 19
 294 PSE
 295 FC20 22
 296 GT0 13
 297 END

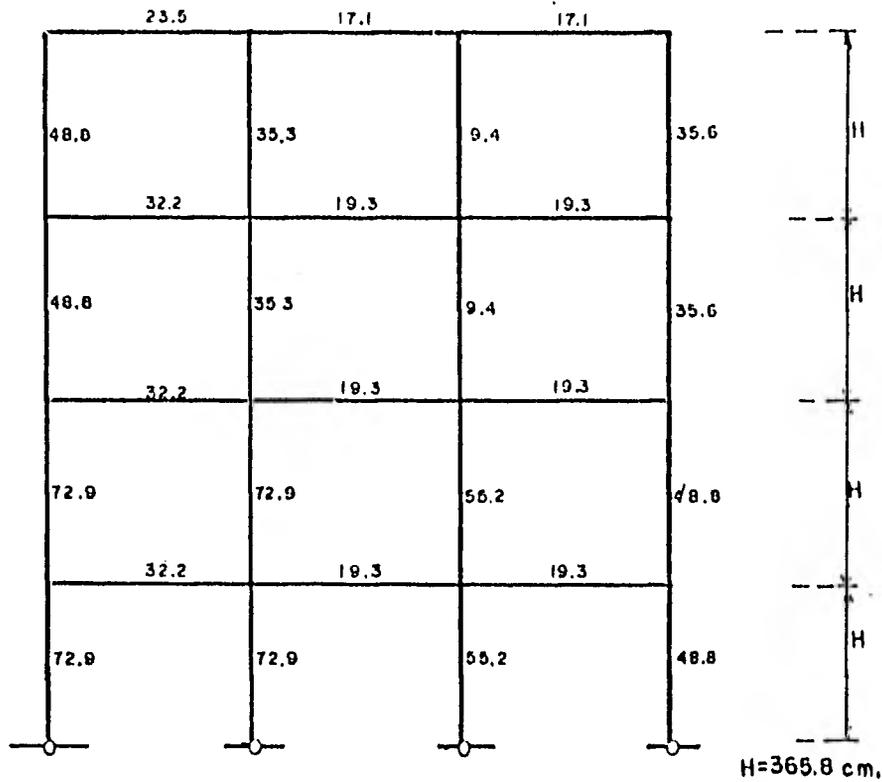
4.3.2.4 Ejemplos resueltos.

a) Calcular las rigideces de entrepiso del marco mostrado en la siguiente figura. Considerar un valor de $E=1.4 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$. Las rigideces relativas de todos los elementos, en cm^3 , también se indican en la figura.



		S			
		KTe2?		TRABES IGUALES? S/H	
			1300	S	
		COLS. IGUALES? S/H		KTe4?	
		S			1300
E?	XEQ *WILBUR*	KCe2?	1300	COLS. IGUALES? S/H	
	1.4+05	ENTR. 3		S	
H?	5	H3?	350	KCe4?	1000
NCR?	2	TRABES IGUALES? S/H		R3=19.10E3	
A/E?	XEQ E	S			RUII
		KTe3?	1300	ENTR. 5	
ENTR. 1				H5?	
H1?	410	COLS. IGUALES? S/H			350
TRABES IGUALES? S/H		S		TRABES IGUALES? S/H	
S		KCe3?	1000	S	
KTe1?	1600	R1=25.77E3		KTe5?	
COLS. IGUALES? S/H					1200
S				COLS. IGUALES? S/H	
KCe1?	1300	R2=22.75E3		S	
				KCe5?	1000
		ENTR. 4		R4=19.10E3	
		H4?	350	R5=18.09E3	
					RUII

b) Calcular las rigideces de entrepiso del marco de acero que se muestra. Se indican las rigideces - relativas de los elementos en cm^3 . Considerar $E = 2 \times 10^6$.



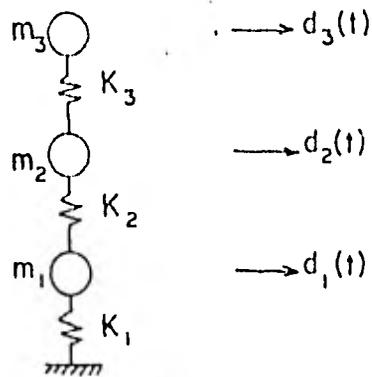
E?	XEQ "WILBUR"	KC2?	72.9	KC3?	55.2
N?	2+36	KC3?	55.2	KC4?	48.8
H2?	4	KC4?	48.8	ENTR. 3	
H3?	3	ENTR. 2		H3?	365.8
A/E?	XEQ A	H2?	365.8	TRABES IGUALES? S/H	
ENTR. 1		TRABES IGUALES? S/H		N	
H1?	365.8	N		KT1?	32.2
TRABES IGUALES? S/H		KT1?	32.2	KT2?	19.3
N		KT2?	19.3	KT3?	19.3
KT1?	32.2	KT3?	19.3	COLS. IGUALES? S/H	
KT2?	19.3	COLS. IGUALES? S/H		N	
KT3?	19.3	N		KC1?	48.8
COLS. IGUALES? S/H		KC1?	72.9	KC2?	35.3
N		KC2?	72.9	KC3?	9.4
KC1?					

R1=4.322E3 RUN
R2=8.281E3 RUN
ENTR. 4
H4? 365.8
TABES IGUALES? S/N
N
KT1? 23.5
KT2? 17.1
KT3? 17.1
COLS. IGUALES? S/N
N
KC1? 49.8
KC2? 35.3
KC3? 9.4
KC4? 35.6
R3=8.281E3 RUN
R4=7.911E3

4.4 Cálculo de configuraciones, frecuencias y períodos modales. Método de Newmark.

4.4.1 Ecuaciones fundamentales

Considérese el siguiente sistema masa resorte:



La ecuación del movimiento del sistema discreto es: (ref 4.6, p. 341 y ref. 4.10)

$$[M] \{ \ddot{D}(t) \} + [C] \{ \dot{D}(t) \} + [K] \{ D(t) \} = \{ P(t) \} \quad (4.4.1)$$

Esta ecuación matricial es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, no homogéneas, de 2o. orden y coeficientes constantes. Además, si el sistema de referencia empleado es arbitrario, estarán acopladas. En la ecuación (4.4.1):

$[M]$ Matriz de masas del sistema (N x N)

$[C]$ Matriz de amortiguamiento (N x N)

$[K]$ Matriz de rigideces (N x N)

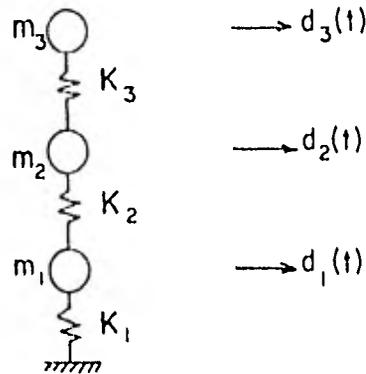
$\{ D(t) \}$, $\{ \dot{D}(t) \}$, $\{ \ddot{D}(t) \}$ Vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración relativos

$\{ P(t) \}$ Vector de fuerzas excitadoras

4.4 Cálculo de configuraciones, frecuencias y períodos modales. Método de Newmark.

4.4.1 Ecuaciones fundamentales

Considérese el siguiente sistema masa resorte:



La ecuación del movimiento del sistema discreto es: (ref 4.6, p. 341 y ref. 4.10)

$$[M] \{ \ddot{D}(t) \} + [C] \{ \dot{D}(t) \} + [K] \{ D(t) \} = \{ P(t) \} \quad (4.4.1)$$

Esta ecuación matricial es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, no homogéneas, de 2o. orden y coeficientes constantes. Además, si el sistema de referencia empleado es arbitrario, estarán acopladas. En la ecuación (4.4.1):

$[M]$ Matriz de masas del sistema ($N \times N$)

$[C]$ Matriz de amortiguamiento ($N \times N$)

$[K]$ Matriz de rigideces ($N \times N$)

$\{ D(t) \}$, $\{ \dot{D}(t) \}$, $\{ \ddot{D}(t) \}$ Vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración relativos

$\{ P(t) \}$ Vector de fuerzas excitadoras

$N =$ Número de grados de libertad

Considérese el sistema homogéneo no amortiguado:

($C \equiv P(t) \equiv 0$)

$$[M] \{ \ddot{D}(t) \} + [K] \{ D(t) \} = 0 \quad (4.4.2)$$

Suponiendo

$$\{ D(t) \} = \{ \varphi \} q(t) \quad (4.4.3)$$

$$\{ \dot{D}(t) \} = \{ \varphi \} \dot{q}(t)$$

$$\{ \ddot{D}(t) \} = \{ \varphi \} \ddot{q}(t) \quad (4.4.4)$$

Donde $\{ \varphi \}$ es un vector de forma y $q(t)$ es una función de el tiempo

Si $q(t) = \text{sen } \omega t$

$$\{ D(t) \} = \{ \varphi \} \text{sen } \omega t$$

$$\{ \ddot{D}(t) \} = \{ \varphi \} (-\omega^2 \text{sen } \omega t) = -\omega^2 \{ D(t) \} \quad (4.4.5)$$

Sustituyendo (4.4.5) en (4.4.2):

$$[K] \{ \varphi \} \text{sen } \omega t - \omega^2 [M] \{ \varphi \} \text{sen } \omega t = 0$$

$$[K] \{ \varphi \} - \omega^2 [M] \{ \varphi \} = 0$$

Simplificando:

$$\{ [K] - \omega^2 [M] \} \{ \varphi \} = 0 \quad (4.4.6)$$

Una posible solución a la ecuación (4.4.6) es la solución trivial:

$$\{ \varphi \} = 0$$

Para que exista solución diferente de la trivial: (ref 4.7 p. 204):

$$\text{Det} \begin{bmatrix} [K] & -\omega^2 [M] \end{bmatrix} = 0 \quad (4.4.7)$$

La ecuación (4.4.7) constituye un problema de valores característicos o eigenvalores, en que se pretende - calcular las incógnitas ω_1^2 . El desarrollo del determinante indicado da por resultado un polinomio de grado N en ω^2 . Este polinomio se conoce como ecuación característica, y por ser de grado N, existen N valores de ω^2 que satisfa cen la ecuación (4.4.7).

Una vez calculados los valores de ω_1^2 , se gene ran N sistemas de ecuaciones (linealmente dependientes, ya que $\text{Det} \begin{bmatrix} [K] & -\omega^2 [M] \end{bmatrix} = 0$). Es decir, que en la ecua ción (4.4.6):

$$\begin{bmatrix} [K] & -\omega_1^2 [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \end{Bmatrix}_1 = 0$$

y haciendo

$$\begin{bmatrix} [K] & -\omega_1^2 [M] \end{bmatrix} = [B]_1$$

tenemos

$$[B]_1 \begin{Bmatrix} \phi \end{Bmatrix}_1 = 0 \quad (4.4.8)$$

$$i = 1, \dots, N$$

Es decir, N sistemas de ecuaciones linealmente dependientes y homogéneos, en los cuales, mediante (4.4.7), se ha garan tizado la existencia de solución diferente de la trivial, - si bien cada vector solución $\begin{Bmatrix} \phi \end{Bmatrix}_1$ estará en función de - un parámetro arbitrario.

Definimos a la matriz $[\Phi]$, de orden N como una matriz cuyas columnas son los vectores $\{\phi\}_1$ asociados a cada valor de ω_1^2 . La matriz $[\Phi]$ es conocida como matriz de configuraciones modales y los valores de ω_1 son las frecuencias naturales de vibración del sistema, una para cada uno de los N modos de vibración. (Vale la pena señalar que los vectores $\{\phi\}_1$ son los eigenvectores resultantes de la ecuación (4.4.7)).

Como puede verse, la determinación de la matriz $[\Phi]$ se reduce a la obtención de los eigenvalores y eigenvectores que resulten de (4.4.7).

En el cálculo de los eigenvectores debe especificarse un parámetro cualquiera para cada sistema de ecuaciones. Dado que los vectores $\{\phi\}$ representan amplitudes relativas, sus elementos pueden estar normalizados con respecto al primer grado de libertad. Esto es, que si ϕ_{1j} e $[\Phi]$, $\phi_{1j}=1$, $\forall j \leq N$. Lo anterior se consigue haciendo que el parámetro arbitrario que debe fijarse en cada uno de los sistemas indicados en (4.4.6) sea precisamente la unidad, asociado a la amplitud relativa, para cada modo de vibrar de la primera masa.

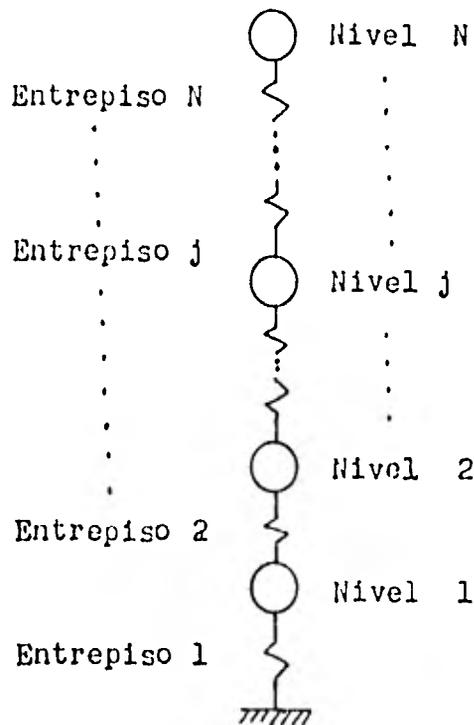
Cuando se tienen sistemas con más de 4 ó 5 grados de libertad, la solución de los eigenvalores y eigenvectores de la ec. (4.4.7) resulta sumamente laboriosa. Por ello Newmark (ref, 4.9) propuso un método numérico para el cálculo de $[\Phi]$ y ω_1^2 , que implica un ahorro considerable en la labor numérica, y le da un sentido ingenieril al proble

ma matemático.

4.4.2 Método de Newmark.

Este método, es un procedimiento numérico para calcular la matriz de configuraciones modales normalizadas $[\bar{\Phi}]$ y las frecuencias asociadas a cada modo de vibración. Se basa fundamentalmente en teoremas vinculados con la obtención de eigenvalores y eigenvectores en los casos particulares de matrices diagonales y tridiagonales, con eigenvalores reales y positivos.

Se usará la nomenclatura siguiente:



Se establece que la masa del nivel j es m_j y la rigidez del entrepiso j es K_j . La matriz $[\bar{\Phi}]$ tiene por columnas a los vectores $\{\phi\}_i$ y sus elementos son ϕ_{ji}

donde los subíndices indican modo y nivel respectivamente. Esta convención de subíndices se hace extensiva a todas las demás variables, vectores y matrices.

Primeramente plantearemos el algoritmo correspondiente al primer modo o modo fundamental y posteriormente indicaremos los ajustes necesarios para el caso de modos superiores.

4.4.2.1 Cálculo del primer modo, o fundamental

De (4.4.6):

$$\omega_1^2 [M] \{\varphi\}_1 = [K] \{\varrho\}_1$$

$$F_1 = \omega_1^2 [M] \{\varphi\}_1 = \text{Vector de fuerzas de inercia}$$

$$F_r = [K] \{\varrho\}_1 = \text{Vector de fuerzas restauradoras}$$

a) Supóngase una primera configuración modal normalizada (eigenvector) $\{\varphi\}_1^s$

b) Calcúlese el vector $\{F/\omega_1^2\}_1$ cuyos elementos

$$f_{j1}/\omega_1^2 = m_j \varrho_{j1}^s \quad \text{son las fuerzas de inercia}$$

supuestas, divididas entre ω_1^2 , desconocida hasta este momento.

c) Calcúlese el vector $\{V/\omega_1^2\}_1$ cuyos elementos

$$v_{j1}/\omega_1^2 = \sum_{k=N}^j (f_{k1}/\omega_1^2) \quad \text{son las fuerzas cortantes correspondientes, divididas entre } \omega_1^2$$

d) Determinése el vector $\{\Delta / \omega^2\}_1$ cuyos elementos

$$\frac{\delta_{j1}}{\omega_1^2} = \frac{v_{j1} / \omega_1^2}{k_j} \quad \text{son los desplazamientos --}$$

relativos de cada entrepiso, divididos entre ω_1^2

e) Obtégase el vector $\{\rho / \omega^2\}_1^c$. Este vector es la nueva configuración deformada del sistema, dividida entre ω_1^2 . Sus elementos son:

$$\frac{\rho_{j1}^c}{\omega_1^2} = \sum_{k=1}^j \frac{\delta_{k1}}{\omega_1^2}$$

f) Calcúlese el vector $\{\rho\}_1^c$ normalizando todos los elementos del vector $\{\rho / \omega^2\}_1^c$ con respecto al elemento correspondiente al primer nivel.

$$\rho_{j1}^c = \frac{(\rho_{j1}^c / \omega_1^2)}{(\rho_{11}^c / \omega_1^2)}$$

Nótese que después de la normalización, $\rho_{11}^c = 1$

g) Compárese elemento a elemento $\{\rho\}_1^c$ con $\{\rho\}_1^s$ y verifíquese la convergencia (*):

(*) Para fines de cálculo numérico mediante procedimientos iterativos, se considera que dos cantidades son iguales cuando no difieren en más de cierta cantidad previamente establecida o bien cuando la diferencia relativa entre ellas no excede un valor prefijado.

Si $\{\varphi\}_1^s \neq \{\varphi\}_1^c$, hacer $\{\varphi\}_1^s = \{\varphi\}_1^c$

ir al paso b)

Si $\{\varphi\}_1^s = \{\varphi\}_1^c$, el proceso ha convergido.

h) Calcúlese ω_i^2

Existen dos criterios para calcular ω_i^2

- Promedio Simple:

$$\omega_i^2 = 1/N \sum_{j=1}^N \frac{\varphi_{ji}^s}{(\varphi_{ji}^c / \omega_i^2)}$$

- Promedio Pesado:

$$\omega_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \varphi_{ji}^s \varphi_{ji}^c}{\sum_{j=1}^N m_j (\varphi_{ji}^c / \omega_i^2)^2}$$

4.4.2.2 Modos superiores de vibración.

Se puede demostrar que el método de Newmark, tal como se expuso en 4.4.2.1, converge a la configuración del primer modo. (ref. 4.8 p. 326)

Para el cálculo de configuraciones correspondientes a modos superiores, es necesario realizar ciertos ajustes, que se describen enseguida.

Puede probarse, con auxilio del teorema de Maxwell-Betti, que las configuraciones normalizadas $\{\varphi\}_i$ son ortogonales con respecto a la matriz de masas (ref, 4.6 p. 303) . Es decir:

$$\left. \begin{aligned} \{\varphi\}_i^T [M] \{\varphi\}_k &= 0, & i \neq k \\ &\neq 0, & i = k \end{aligned} \right\} \quad (4.4.9)$$

El hecho de que los modos naturales constituyen un conjunto ortogonal completo significa que cualquier configuración (que satisfaga las condiciones de frontera) puede expresarse como combinación lineal de modos naturales (ref, 4.9, p. 53) :

$$\{\varphi\}_i^s = a_1 \{\varphi\}_1 + a_2 \{\varphi\}_2 + \dots + a_r \{\varphi\}_r + \dots + a_n \{\varphi\}_n \quad (4.4.10)$$

Donde $\{\varphi\}_k^s$ es la configuración supuesta de algún modo superior que deseamos calcular. Premultiplicando en (4.4.10) por

$\{\varphi\}_r^T [M]$ siendo $\{\varphi\}_r$ la configuración de un modo r - cualquiera, se tiene:

$$\begin{aligned} \{\varphi\}_r^T [M] \{\varphi\}_k^s &= a_1 \{\varphi\}_r^T [M] \{\varphi\}_k + \dots + a_r \{\varphi\}_r^T [M] \{\varphi\}_r + \dots \\ &\dots + a_N \{\varphi\}_r^T [M] \{\varphi\}_N \quad (4.4.11) \end{aligned}$$

En (4.4.11) y de acuerdo con (4.4.9), todos los términos de el segundo miembro valen cero, excepto el que incluye a a_r . Entonces la ecuación 4.4.11 toma la forma:

$$\{\varphi\}_r^T [K] \{\varphi\}_k^s = a_r \{\varphi\}_r^T [M] \{\varphi\}_r$$

$$a_r = \frac{\{\varphi\}_r^T [K] \{\varphi\}_k^s}{\{\varphi\}_r^T [M] \{\varphi\}_r} \quad (4.4.12)$$

Este coeficiente nos permite eliminar de la configuración supuesta, cualquier componente de un modo natural (ref. - 4.9, p. 154).

Si se desea calcular el i -ésimo modo natural, podemos escribir:

$$\{\varphi\}_i^{s'} = \{\varphi\}_i^s - a_{i-1} \{\varphi\}_{i-1} - a_{i-2} \{\varphi\}_{i-2} - \dots - a_1 \{\varphi\}_1 \quad (4.4.13)$$

Donde $\{\varphi\}_i^{s'}$ es la configuración supuesta y corregida, a la que se ha "limpiado" de la influencia de los modos de orden inferior. Por ejemplo, si se está calculando la configuración correspondiente al cuarto modo de un sistema de 5 niveles:

$$\{\varphi\}_4^{s'} = \{\varphi\}_4^s - a_3 \{\varphi\}_3 - a_2 \{\varphi\}_2 - a_1 \{\varphi\}_1$$

Donde de acuerdo a (4.4.12) con $k=4$:

$$a_1 = \frac{\{\varphi\}_1^T [M] \{\varphi\}_4^s}{\{\varphi\}_1^T [M] \{\varphi\}_1}$$

$$a_2 = \frac{\{\phi\}_2^T [M] \{\phi\}_4^s}{\{\phi\}_2^T [M] \{\phi\}_2}$$

$$a_3 = \frac{\{\phi\}_3^T [M] \{\phi\}_4^s}{\{\phi\}_3^T [M] \{\phi\}_3}$$

La ecuación (4.4.13) es la corrección que debe hacerse para lograr que el método de Newmark converja a cualquier modo superior. En estas condiciones, el algoritmo para el cálculo de configuraciones de modos superiores es muy semejante al descrito en 4.4.2.1, pero el paso b) presenta la siguiente modificación:

b) Calcúlese primero el vector $\{\phi\}_i^{s'}$ de acuerdo a (4.4.12) y (4.4.13)

Calcúlese después el vector $\{F/\omega^2\}_i$, que tiene por elementos a:

$$\frac{f_{ji}}{\omega_i^2} = m_j \phi_{ji}^{s'}$$

El resto del algoritmo permanece intacto.

Puede observarse que el cálculo de configuraciones correspondientes a modos superiores es mas laborioso - mientras mayor sea el orden del modo deseado. A continuación se presenta un programa para realizar este análisis - en forma rápida y precisa.

4.4.3 Programa NEWM

El programa NEWM calcula las configuraciones, -- frecuencias y períodos modales para sistemas idealizados - masa-resorte, con varios grados de libertad. Para la solu-- ción de este problema con ayuda del programa NEWM son necesarios los siguientes datos:

N : No. de grados de libertad

M_j : masas de los N pisos
 $j=1, \dots, N$

K_j : rigideces de entrepiso (ver inciso 4.3)
 $j=1, N$

El programa puede calcular, en orden ascendente, las confi-- guraciones, frecuencias y períodos del modo fundamental y los $N-1$ modos superiores de vibración. Para el cálculo de cada modo es necesario suministrar una primera aproximación para la configuración modal $\{\phi\}_i$ (FI). Como puede obser-- varse en la ecuación (4.4.13) para el caso de modos supe-- riores es necesario conocer las configuraciones de los mo-- dos de orden inferior. De aquí que las soluciones se obtie-- nen calculando primero el modo fundamental, después el 2o. modo y así sucesivamente, hasta el N -ésimo modo.

El cálculo de las configuraciones modales se rea-- liza en forma iterativa, mediante el método de Newmark des-- crito en 4.4.2. El criterio de convergencia empleado con-- siste en interrumpir el cálculo de las configuraciones mo

dales cuando en cada elemento del vector $\left\{ \rho / \omega_1^2 \right\}_i^c$ se cumpla:

$$\left\| \frac{\rho_{j1}^s}{\omega_1^2} - \frac{\rho_{j1}^c}{\omega_1^2} \right\| < 10^{-p}$$

En la expresión anterior p es el número de decimales seleccionado por el usuario con la instrucción FIX. Esto significa que el proceso se suspenderá cuando todos los elementos del vector $\left\{ \rho \right\}^c$ tengan p cifras decimales iguales a los elementos del vector $\left\{ \rho \right\}^s$.

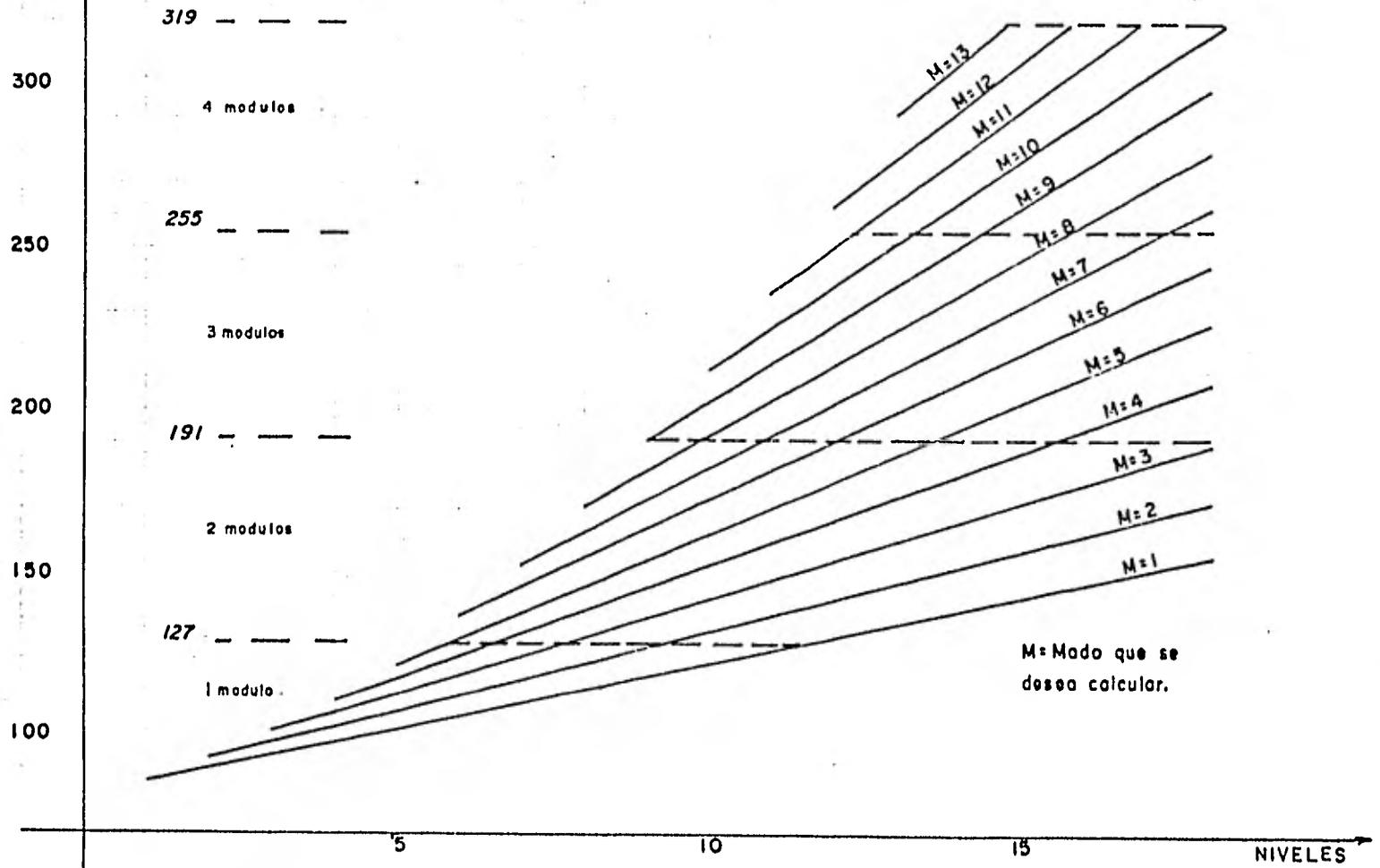
El número de registros necesarios depende del número de grados de libertad del sistema, así como del número de modos que se desee calcular. En la gráfica 4.2 se muestra la memoria necesaria para diferentes combinaciones de modos y niveles.

La convención para designar a los niveles y entrepisos es la misma empleada en 4.4.2

El programa NEM puede operar empleando cualquier sistema congruente de unidades.

REGISTROS
TOTALES.

GRAFICA 4.2
PROGRAMA "NEWM"



4.4.3.1 Memorias, estatus y banderas.

MEMORIAS				ESTATUS			
00	N			SIZE (*)	REG. 10F SIZE+71	"USER"	
01	P			ENG	FIX (F)	SCI	ON X OFF
02	USO MÚLTIPLE			DEG	RAD	GRAD	
03	"	"		BANDERAS # INIC. ACTIVA INDICA INACTIVA INDICA 01 I PRECISION INSUFICIENTE PRECISION SUFICIENTE 25 " SIZE" SUFICIENTE " SIZE" INSUFICIENTE 28 } USADAS PARA CONTROLAR EL FORMATO 29 } DE LA PANTALLA			
04	"	"					
05	"	"					
06	"	"					
07	"	"					
08	"	"					
09	"	"					
10	} m _j						
91N							
10+N	} k _j						
912N							
1012N	} {p _j } ₁						
913N							
1013N	} {p _j } ₂ = {p _j } ₁ ^c						
914N							
10+(L+1)N	} {p _j } ₂ = {p _j } ₁ ^c						
9+(L+2)N							
10+(N+1)N	} {d _j } _N = {p _j } _{N-1} ^c						
9+(N+2)N							
10+(N+2)N	} {p _j } _N ^c						
9+(N+3)N							
				ASIGNACIONES			

(*) "SIZE" = 11 + (L+3)N, con L = Max(1) (el modo de mayor orden que se calcule)

PASO	INSTRUCCION	ENTRADA	TECLAS	SIZE (*) SALIDA
1	Iniciar		(Δ EQ) NEMM	N?
2	Número de niveles	(N)	(R/S)	FIX?
3	Seleccionar cifras decimales deseadas para convergencia	(F)	(R/S)	H1?
4	Valor de las masas m_j , $j=1, \dots, N$	(m_j) : (m_N)	(R/S)	M2?
5	Valor de las rigideces k_j , $j=1, \dots, N$	(k_j) : (k_N)	(R/S)	K2?
6	Cálculo del i-ésimo modo (en orden ascendente)		(R/S)	SIZE = (SIZE)
7	Ajustar SIZE adecuado si el programa lo requiere		(Δ EQ) (SIZE) (SIZE) (R/S)	FI1,1?
8	Suministrar una primera aproxima- ción para: $\{\phi\}_1$ dando ϕ_{j1}^s $j=1, \dots, N$	ϕ_{11}^s ϕ_{21}^s : ϕ_{N1}^s	(R/S) (R/S) : (R/S)	FI2,1? : : FIN,1?
9	Valores del vector $\{\phi\}_1$		(R/S) : (R/S)	FI1,1 = (ϕ_{11}) : FI1,1 = (ϕ_{11})
10	Frecuencia del i-ésimo modo		(R/S)	Wf2 = (ω_1^2)
11	Período del i-ésimo modo		(R/S)	T = (T 1)
12	(Opcional) ver nuevamente resultados		<input type="checkbox"/>	FI1,1 = (ϕ_{11}) etc

(*) SIZE = 11 + (L+3)N ; L = MAX(1)

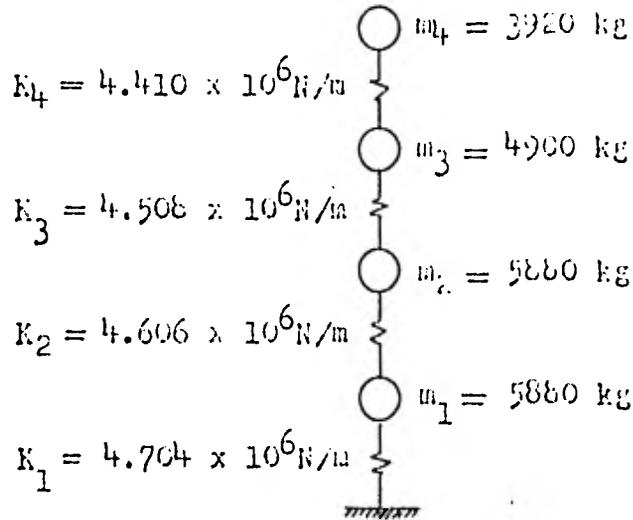
4.4.3.3 Listado del programa.

01*LBL *HEWN*	59 X=0?	117 INT
02 SF 27	60 GTO 19	118 -
03 CLRG	61 I E3	119 RCL 00
04 *H?*	62 /	120 *
05 PROMPT	63 I	121 ST+ 04
06 STO 00	64 +	122 RCL 05
07 *FIX?*	65 STO 02	123 ST- IND 04
08 PROMPT	66*LBL 20	124 ISG 03
09 STO 01	67 0	125 GTO 11
10 FIX 0	68 STO 07	126 ISG 02
11 CF 29	69 STO 05	127 GTO 20
12 *M*	70 XEQ 16	128*LBL 19
13 ASTO 05	71*LBL 10	129 XEQ 16
14 I	72 RCL 02	130*LBL 04
15 XEQ 00	73 2	131 RCL 03
16 *K*	74 +	132 9
17 ASTO 05	75 XEQ 17	133 +
18 2	76 RCL IND 04	134 STQ 04
19 XEQ 00	77 STO 09	135 RCL IND X
20*LBL A	78 STO 06	136 STO 05
21 I	79 ST+ 03	137 RCL 06
22 ST+ 06	80 RCL 03	138 I
23 *MOD0=*	81 9	139 +
24 ARCL 06	82 +	140 RCL 00
25 PROMPT	83 RCL IND X	141 +
26 XEQ 16	84 ST+ 09	142 ST+ 04
27 RCL 06	85 ST+ 03	143 RCL IND 04
28 3	86 RCL 06	144 ST+ 05
29 +	87 RCL 02	145 RCL 00
30 RCL 00	88 INT	146 ST+ 04
31 *	89 -	147 RCL 05
32 10	90 RCL 00	148 STO IND 04
33 +	91 +	149 ISG 03
34 SF 25	92 ST+ 04	150 GTO 04
35 RCL IND X	93 RCL IND 04	151 RCL 00
36 FS?C 25	94 ST+ 09	152 I
37 GTO 07	95 RCL 09	153 -
38 *SIZE=*	96 ST+ 07	154 STO 03
39 I	97 RCL 08	155*LBL 05
40 +	98 ST+ 05	156 RCL 06
41 ARCL X	99 ISG 03	157 3
42 PROMPT	100 GTO 10	158 +
43*LBL 07	101 RCL 07	159 XEQ 17
44 CF 29	102 RCL 05	160 I
45 CF 28	103 /	161 ST+ 04
46 FIX 0	104 STO 03	162 RCL IND 04
47 *FI*	105 XEQ 16	163 I
48 ASTO 05	106*LBL 11	164 ST- 04
49 SF 01	107 RCL 02	165 RDH
50 RCL 06	108 2	166 ST+ IND 04
51 2	109 +	167 DSE 03
52 +	110 XEQ 17	168 GTO 05
53 XEQ 00	111 RCL IND 04	169 XEQ 16
54 CF 01	112 RCL 03	170*LBL 00
55*LBL 13	113 *	171 2
56 RCL 06	114 STO 05	172 XEQ 17
57 I	115 RCL 06	173 GTO 05

175 I	233 RCL 00	289*LBL 00
176 +	234 ST+ 04	290 STO 02
177 RCL 00	235 FIX 0	291 XEQ 16
178 *	236 SF 29	292*LBL 03
179 ST+ 04	237 CF 26	293 RCL 02
180 RCL IND 05	238 *FI*	294 XEQ 17
181 ST/ IND 04	239 ARCL 03	295 *.*
182 ISG 03	240 CF 29	296 ARCL 06
183 GTO 03	241 ARCL 06	297 ASTO X
184 XEQ 16	242 *T=*	298 CLA
185 RCL 06	243 SF 28	299 ARCL 05
186 3	244 SF 29	300 ARCL 03
187 +	245 FIX IND 01	301 FS? 01
188 XEQ 17	246 ARCL 00	302 ARCL X
189 RCL IND 04	247 PROMPT	303 *T?*
190 STO 05	248 RCL IND 04	304 PROMPT
191 0	249 ST/ 03	305 STO IND 04
192 STO 07	250 RCL 00	306 ISG 03
193 FIX IND 01	251 ST+ 09	307 GTO 03
194*LBL 21	252 ISG 03	308 .END.
195 RCL 06	253 GTO 15	
196 3	254 *M12=*	
197 +	255 RCL 00	
198 XEQ 17	256 ST/ 09	
199 RCL IND 04	257 ARCL 09	
200 ST+ 07	258 PROMPT	
201 RCL 07	259 RCL 09	
202 STO IND 04	260 SORT	
203 RCL 05	261 2	
204 /	262 /	
205 STO 02	263 PI	
206 RCL 00	264 /	
207 ST- 04	265 1/X	
208 RCL IND 04	266 *T=*	
209 RCL 02	267 ARCL X	
210 STO IND 04	268 PROMPT	
211 -	269 GTO C	
212 RND	270*LBL 17	
213 PSE	271 1	
214 X#0?	272 -	
215 SF 01	273 RCL 00	
216 ISG 03	274 *	
217 GTO 21	275 9	
218 FS?C 01	276 +	
219 GTO 18	277 RCL 03	
220*LBL C	278 +	
221 BEEP	279 STO 04	
222 0	280 RTH	
223 STO 09	281*LBL 16	
224 XEQ 16	282 RCL 00	
225*LBL 15	283 I E3	
226 RCL 03	284 /	
227 RCL 06	285 I	
228 2	286 +	
229 +	287 STO 03	
230 XEQ 17	288 RTH	

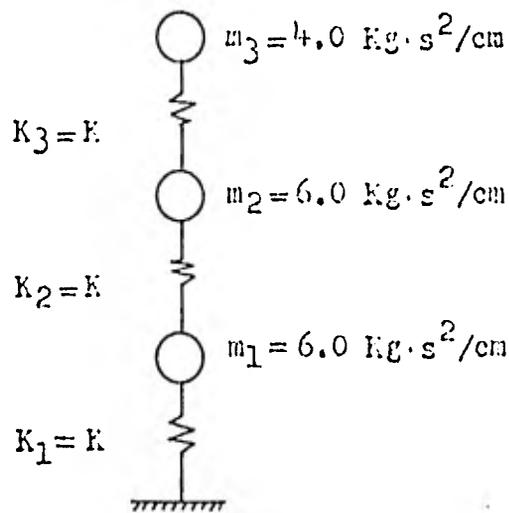
4.4.3.4 Ejemplos resueltos

a) calcular las configuraciones, frecuencias y períodos correspondientes a los tres primeros modos de vibración del siguiente sistema:



	XEQ	*KEYM*	F11,1=1.000	W12=885.164	
H?			RUN		RUN
	4	RUN	F12,1=1.570	T=0.211	
FIX?			RUN	XEQ R	
	3	RUN	F13,1=2.472	NODO=3.000	
K1?			RUN		RUN
	5880	RUN	F14,1=2.762	F11,3?	
K2?			RUN		1 RUN
	5880	RUN	W12=118.157	F12,3?	
K3?			RUN		-5 RUN
	4900	RUN	T=0.578	F13,3?	
K4?			XEQ R		-8 RUN
	3920	RUN	NODO=2.000	F14,3?	
K1?			RUN		1 RUN
	4.704+06	RUN	F11,2?	F11,3=1.000	
K2?			1 RUN	F12,3=-0.595	
	4.606+06	RUN	F12,2?		RUN
K3?			. CLX	F13,3=-0.634	
	4.508+06	RUN	.9 RUN		RUN
K4?			F13,2?	F14,3=0.771	
	4.410+06	RUN			RUN
NODO=1			F14,2?	W12=2,049,580	
					RUN
F11,1?			F11,2=1,000	T=0,139	
	1	RUN			RUN
F12,1?			F12,2=0,831		
	1,6	RUN			RUN
F13,1?					RUN
	2	RUN	F13,2=-0,249		
F14,1?					RUN

b) Calcular las configuraciones, frecuencias y períodos correspondientes a los tres modos de vibración del siguiente sistema:



$K = 4500 \text{ Kg/cm}$

			F13,1=2.036	RUN	F12,3?		RUN
H?			M12=180.435	RUN	F13,3?	-1.5	RUN
FIX?	3.000	RUN	T=0.468	RUN	F11,3=1.000	1	RUN
M1?	3.000	RUN	MOD0=2.000	XEQ A	F12,3=-1.453		RUN
M2?	6	RUN	F11,2?	RUN	F13,3=1.115		RUN
M3?	6	RUN	F12,2?	1	M12=2.591.058		RUN
K1?	4	RUN	F13,2?	1	T=0.123		RUN
K2?	4500	RUN	F11,2=1.000	-1.5			RUN
K3?	4500	RUN	F12,2=0.136				RUN
MOD0=1	4500	RUN	F13,2=-0.962				RUN
F11,1?		RUN	M12=1.753.264				RUN
F12,1?	1	RUN	T=0.171				RUN
F13,1?	1.8	RUN	MOD0=3.000	XEQ A			RUN
F11,1=1.000	2.4	RUN	F11,3?				RUN
F12,1=1.753		RUN		1			RUN

4.5 Análisis Sísmico Modal Espectral.

4.5.1 Ecuaciones Fundamentales.

Considérese el sistema mostrado en la figura - -
4.4.1 y la ecuación dinámica (4.4.1) .:

$$[M] \{\ddot{D}(t)\} + [C] \{\dot{D}(t)\} + [K] \{D(t)\} = \ddot{d}_s \quad [M] \quad [J]$$

Esta ecuación matricial describe la vibración forzada con amortiguamiento de un sistema de N grados de libertad, con comportamiento elástico lineal, sometido a excitación sísmica.

Puede demostrarse (ref. 4.10), que la siguiente ecuación resuelve el problema:

$$[M^*] \{\ddot{q}(t)\} + [C^*] \{\dot{q}(t)\} + [K^*] \{q(t)\} = \ddot{d}_s \quad [L] \quad (4.5.1)$$

donde

$$[M^*] = [I] \quad [M] \quad [I] \quad [M] \quad [I] \quad [M] \quad [I] \quad [M] \quad [I] \quad [M]$$

$$[C^*] = [I] \quad [C] \quad [I] \quad [C] \quad [I] \quad [C] \quad [I] \quad [C] \quad [I] \quad [C]$$

$$[K^*] = [I] \quad [K] \quad [I] \quad [K] \quad [I] \quad [K] \quad [I] \quad [K] \quad [I] \quad [K]$$

$$[L] = [I] \quad [J] \quad [I] \quad [J] \quad [I] \quad [J] \quad [I] \quad [J] \quad [I] \quad [J]$$

$$J = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$\ddot{d}_s(t)$ = aceleración del terreno en la base del sistema masas-resortes.

Las matrices $[M]$, $[C]$, $[K]$, $[\Phi]$, y los vectores $\{\ddot{D}(t)\}$, $\{\dot{D}(t)\}$, $\{D(t)\}$, tienen el mismo significado - que en 4.4.1 ; los vectores $\{\ddot{Q}(t)\}$, $\{\dot{Q}(t)\}$, $\{Q(t)\}$, tienen como elementos a los escalares $\ddot{q}_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$, y $q_i(t)$, $i=1, \dots, N$ respectivamente. Estas variables también fueron definidas en 4.4.

Efectuando una analogía con un sistema de un grado de libertad, su solución puede expresarse con : (ref. 4.10)

$$q_i(t) = \frac{l_i}{m_i} \int_0^t \ddot{d}_s(t) e^{-\xi_1 \omega'_1(t-\tau)} \text{sen } \omega'_1(t-\tau) d\tau \quad (4.5.2)$$

En esta ecuación:

l_i = i -ésimo elemento del vector L .

m_i = elemento i de la matriz diagonal M .

ξ_1 = coeficiente de amortiguamiento modal.

$$\omega'_1 = \omega_1 \sqrt{1 - \omega_1^2}$$

El valor máximo de $q_i(t)$, atendiendo al criterio espectral se obtiene con:

$$sv_1 = \int_0^t \ddot{d}_s(t) e^{-\xi_1 \omega'_1(t-\tau)} \text{sen } \omega'_1(t-\tau) d\tau = \frac{Sa_1}{1} \quad (4.5.3)$$

donde:

Sa_1 = aceleración espectral asociada al i -ésimo modo de vibrar.

De (4.5.3) en (4.5.2) :

$$q_i(t) \Big|_{\max} = \hat{q}_i = \frac{l_i}{m_i \omega_i'^2} S a_i$$

Como en general $\omega_i \doteq \omega_i'$, debido a que $0 \leq \xi \leq 0.20$ (ver (4.5.2)) :

$$\hat{q}_i = \frac{l_i}{m_i \omega_i^2} S a_i$$

De acuerdo a lo especificado en 4.4 :

$$\{D(t)\}_i = \{\varphi\}_i q_i(t)$$

Entonces:

$$\{D(t)\}_i \Big|_{\max} = \{\hat{D}\}_i = \{\varphi\}_i \hat{q}_i$$

El vector $\{\hat{D}\}_i$ tiene como elementos a los desplazamientos máximos que ocurren en cada nivel, al vibrar la estructura según el i -ésimo modo.

Las fuerzas de inercia máximas a que queda sometida pueden obtenerse con :

$$[F]_{\max} = [\hat{F}] = [k] [\hat{D}]$$

donde D es una matriz cuyas columnas son los vectores D_i , asociados al modo de vibrar i del sistema.

La matriz $[\hat{F}]$ tiene como elementos a las --- fuerzas de inercia máximas que actúan en cada nivel (ren -- glón) asociadas a cada modo de vibrar (columna). Así, por ejemplo, el elemento \hat{f}_{ji} es la fuerza de inercia máxima que se presenta en el nivel j , cuando la estructura vibra según el i -ésimo modo.

Conocidas las fuerzas de inercia máximas, es posible calcular en forma sencilla otras respuestas, tales como las fuerzas cortantes, los momentos de volteo, etc. - (ref. 4.10)

4.5.2 Programa ANAMOD.

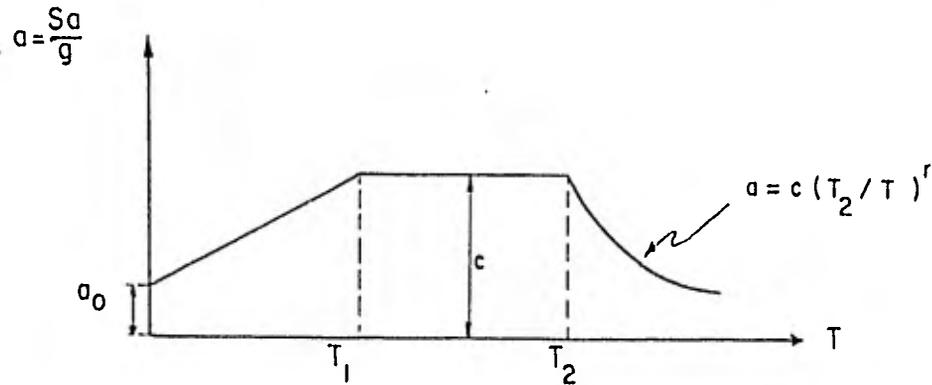
Este programa está formulado para calcular - las fuerzas de inercia y los desplazamientos máximos debi-- dos a excitación sísmica, por medio del análisis modal es-- pectral.

El programa hace uso de las ecuaciones funda-- mentales enunciadas en el punto anterior, y además se basa en los lineamientos dados por el Reglamento de Construccio-- nes para el Distrito Federal, en lo referente al diseño por sismo. (ref. 4.11) Estos lineamientos son básicamente los siguientes:

4.5.2.1 Espectro de diseño.

El programa ANAMOD supone que el espectro de

diseño es de la forma siguiente :



donde:

a = ordenada espectral de aceleración, expresada - como fracción de la aceleración de la gravedad g .

T = período natural de vibración de la estructura.

a_0 , T_1 , T_2 , r , c constantes que definen las características del espectro.

Estas últimas constantes dependen de la zona en que se encuentre la estructura. Sus valores se presentan en la siguiente tabla: (refs. 4.11 a 4.13)

ZONA	TIPO DE SUELO	C	a_0	T_1	T_2	r
A	I	.08	.030	.30	.60	1/2
	II	.12	.045	.55	2.00	2/3
	III	.16	.060	.75	3.30	1
B	I	.16	.030	.30	.60	1/2
	II	.20	.045	.50	2.00	2/3
	III	.24	.060	.60	3.30	1

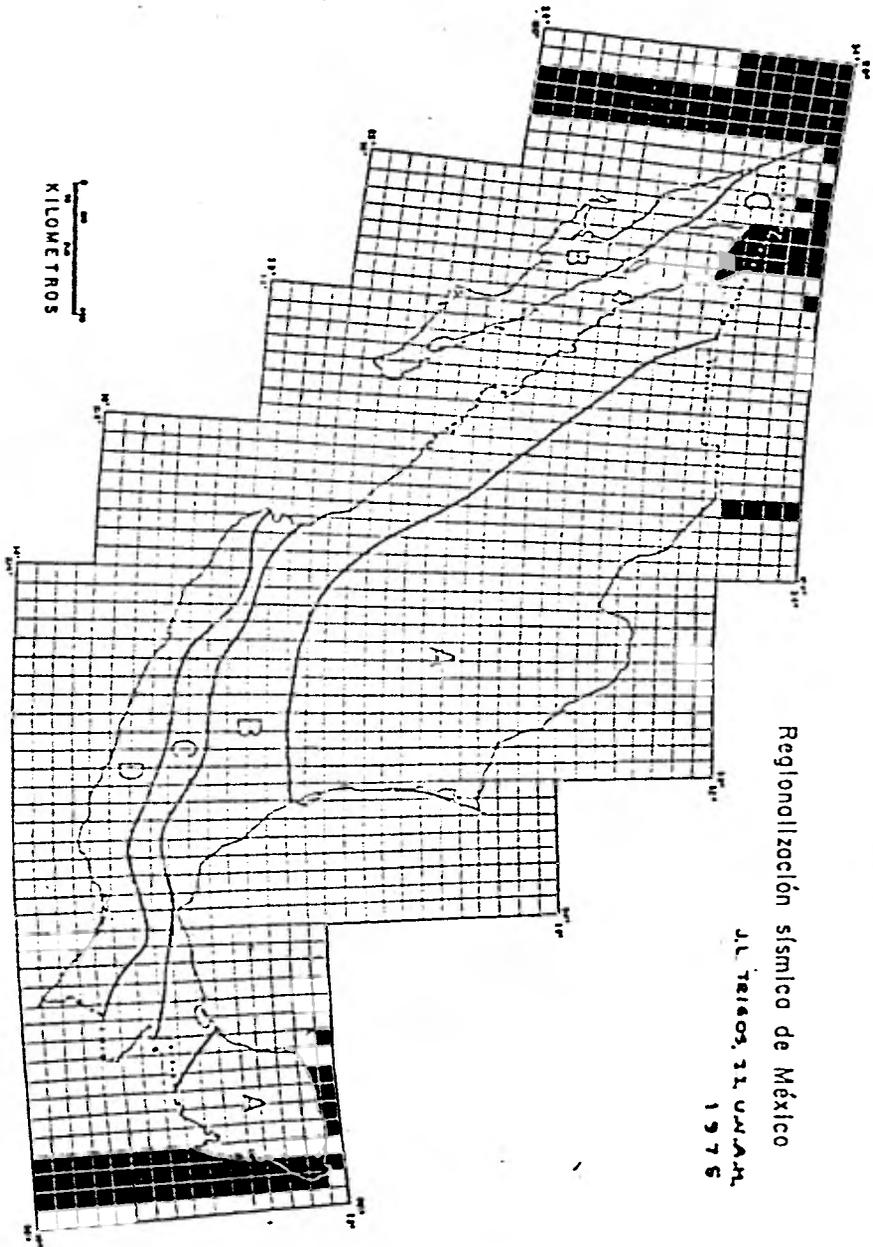
Continúa...

ZONA	TIPO DE SUELO	C	ao	T ₁	T ₂	r
C	I	.24	.05	.25	.67	1/2
	II	.30	.08	.45	1.60	2/3
	III	.36	.10	.60	2.90	1
D	I	.48	.09	.15	.55	1/2
	II	.56	.14	.30	1.40	2/3
	III	.64	.18	.45	2.70	1

El valor de los coeficientes C que se consignan, - corresponde a estructuras de tipo B. En la página siguiente, se muestra la regionalización sísmica de México. (Ref. 4.12). Los valores de T₁ y T₂ de la tabla anterior, se encuentran expresados en segundos.

4.5.2.2 Reducción por ductilidad.

Según lo especificado en el Art. 236 del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, "... para calcular las fuerzas sísmicas, estas ordenadas (las -- ordenadas espectrales) se dividirán entre el factor Q', el cual se tomará igual a Q si T es mayor que T₁, e igual a -- 1 (Q-1)T/T₁ en caso contrario." (ref. 4.11, p. 9). En este caso, Q es el factor de ductilidad de la estructura, definido en el Art. 235 del citado Reglamento. Esta reduc--- ción será aplicable para el cálculo de fuerzas sísmicas, pe no no para el cálculo de deformaciones, como se indica en -



el Art. 241.

4.5.2.3 Superposición de efectos modales.

Para tomar en consideración la influencia de los diferentes modos de vibrar, las respuestas modales se combinarán así: (ref. 4.11, Art. 241)

$$R_{\max} = \sqrt{\sum R_i^2}$$

donde:

R_{\max} = respuesta modal máxima

R_i = respuesta modal asociada al i -ésimo modo de vibrar.

El programa presentado calcula dos respuestas modales: fuerzas sísmicas y desplazamientos. En ambos casos, se emplea este criterio de superposición, válido para estructuras con modos naturales de vibración remotamente acoplados.

El programa ANAMOD está formado básicamente por rutinas para operaciones con vectores y matrices. En estas rutinas, se han aprovechado las propiedades de ortogonalidad y simetría de algunas de las matrices.

Los datos necesarios para la operación de este programa son:

N = número de niveles de la estructura.

NM = número de modos naturales de vibración que se desea considerar en el análisis. Según lo indicado en el Art. 241 de la ref. 4.11, este número nunca podrá ser menor que tres.

m_j $j=1,..N$ masas de los N niveles.

K_j $j=1,..N$ rigideces de los N entrepisos de la estructura, modelada como "edificio de cortante".

$\{\phi\}_i$ $i=1,..NM$ configuraciones modales de los NM modos que se deseen considerar en el análisis. Los valores de las configuraciones se identifican según la siguiente convención:
 ϕ_{ji} = coordenada generalizada de desplazamiento del nivel j cuando la estructura vibra del modo i .

Q = factor de ductilidad de la estructura.

a_0, T_1, T_2, r constantes que definen al espectro de aceleraciones.

$T_i, i=1,..NM$ períodos naturales de los NM modos de vibración.

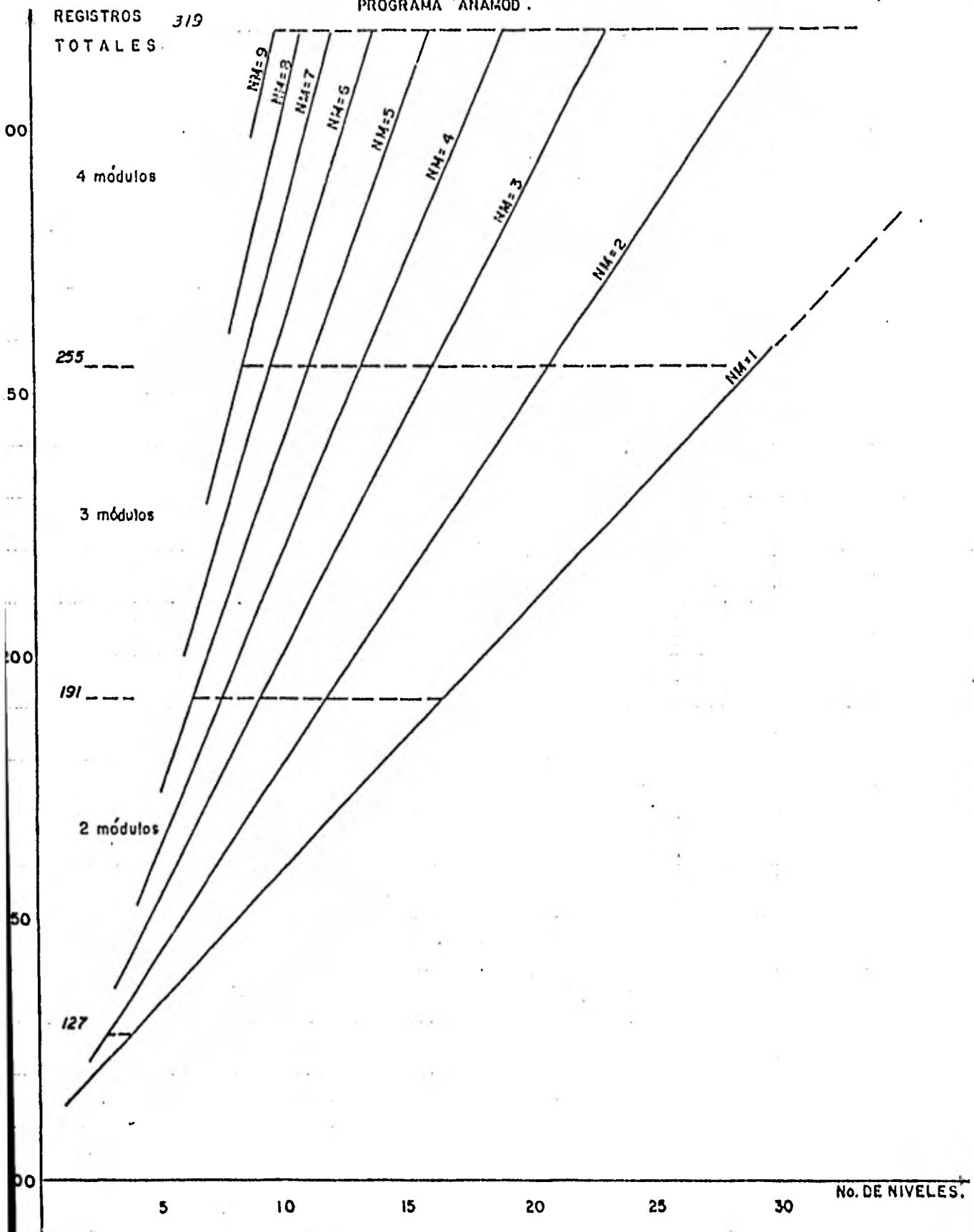
El programa está estructurado de forma tal, que es totalmente compatible con el programa NEWM (ver 4.4), de tal suerte que puede emplearse sin necesidad de suministrar nuevamente los valores de m_j, K_j y $\{\phi\}_i$. En el caso de que la matriz $[\Phi]$ haya sido calculada por algún otro medio, será necesario proporcionar el valor de los elementos. Para este fin, el programa ANAMOD se ve complementado por -

otro pequeño, de uso opcional, llamado LECT; su función es leer los valores m_j , k_j , $j=1,..N$, y ϕ_1 , $i=1,..NM$, y -- destinarlos a la localidad de memoria adecuada.

El programa ANAMOD puede operar en cualquier sistema congruente de unidades, siempre que el valor de la aceleración de la gravedad (g) este expresado en el mismo sistema. El valor de g se especifica en la línea 178 del programa. En la versión presentada, g está dada en cm/seg^2 .

En la gráfica 4.3 se han anotado los valores del tamaño de memoria, "SIZE", para diferentes combinaciones de grados de libertad y modos de vibrar deseados.

GRAFICA 4.3
PROGRAMA "ANAMOD".



4.5.2.5 Instructivo de usuario. Programa ANAMOD

				SIZE (*)
paso	INSTRUCCION	ENTRADA	TECLAS	SALIDA
1a	Si se ha calculado la matriz Φ con el programa NEMM,	(NM)	(STO) 01	(NM)
	Ir al paso 2.			
1b	Si se ha calculado Φ por otro medio, leer los datos necesarios con el programa LECT. Después, ir al -			
	paso 2			
2	Iniciar		(XEQ) ANAMOD	Q?
3	Factor de ductilidad	(Q)	(R/S)	"FORMA DEL ESPECTRO"
				aQ?
4	Constantes espectrales			C?
		(a ₀)	(R/S)	T1?
		(c)	(R/S)	T2?
		(T ₁)	(R/S)	R?
		(T ₂)	(R/S)	"PERIODOS MODALES"
		(r)	(R/S)	T1?
5	Períodos modales			T2?
		(T ₁)	(R/S)	·
		·	·	·
		·	·	TNM?
		(T _{NM})	(R/S)	D1,1 = ($\hat{D}_{1,1}$)
6	Desplazamientos modales		(R/S)	D1,2 = ($\hat{D}_{1,2}$)
			·	·
			·	D1,NM = ($\hat{D}_{1,NM}$)
			(R/S)	DMAX1 = (\hat{I}_{max1})

(*) SIZE = 10 + (NM + 3)N

175 /	273 STO 09	291 STO 03
176 X12	274 RCL 06	292+LBL 10
177 *	275 +	293 RCL 08
178 981	276 RCL IND X	294 RCL 03
179 *	277 X<>Y	295 +
180 RCL 09	278 RDH	296 0
181 FC?C 04	279 *	297 STO IND Y
182 GTO 25	280 RCL 07	298 ISG 03
183 1	281 RCL 08	299 GTO 10
184 -	282 +	300 RCL 04
185 RCL 02	283 X<>Y	301 INT
186 RCL 06	284 STO IND Y	302 RCL 08
187 /	285 RCL IND 09	303 X<>Y?
188 *	286 +	304 GTO 11
189 1	287 FIX 0	305 RCL 09
190 +	288 "D"	306 RCL 04
191+LBL 25	289 ARCL 04	307 +
192 XEQ 26	290 "F,"	308 RCL IND X
193 RDH	291 ARCL 03	309 RCL 08
194 STO IND T	292 "F="	310 RCL 04
195 /	293 ENG 4	311 +
196 RCL 03	294 ARCL X	312 X<>Y
197 9	295 PROMPT	313 STO IND Y
198 +	296 X12	314 GTO 12
199 X<>Y	297 ST+ 02	315+LBL 11
200 ST+ IND Y	298 ISG 03	316 RCL 09
201 ISG 03	299 GTO 03	317 RCL 04
202 GTO 19	300 RCL 02	318 +
203 RCL 08	301 SORT	319 RCL IND X
204 XEQ 16	302 "DMAX"	320 ISG Y
205 STO 04	303 FIX 0	321 RCL IND Y
206+LBL 07	304 ARCL 04	322 STO 07
207 RCL 00	305 "F="	323 +
208 9	306 ENG 4	324 RCL 08
209 +	307 ARCL X	325 RCL 04
210 RCL 04	308 PROMPT	326 +
211 +	309 ISG 04	327 X<>Y
212 STO 06	310 GTO 07	328 STO IND Y
213 RCL 08	311 RCL 01	329 ISG Y
214 RCL 01	312 1	330 RCL 07
215 *	313 +	331 CHS
216 +	314 RCL 00	332 STO IND Z
217 STO 07	315 +	333 RCL 04
218 0	316 2	334 INT
219 STO 02	317 *	335 1
220 RCL 01	318 9.1	336 X=Y?
221 XEQ 16	319 +	337 GTO 13
222 STO 03	320 STO 03	338+LBL 12
223+LBL 03	321 RCL 08	339 RCL 09
224 XEQ 26	322 XEQ 16	340 RCL 04
225 STO 09	323 STO 04	341 +
226 RCL 03	324 RCL 08	342 RCL IND X
227 9	325 9.1	343 CHS
228 +	326 +	344 RCL 03
229 RCL IND X	327 STO 09	345 RCL 04
230 RCL 03	328+LBL 03	346 +

349 X<>Y	406*LBL 23
350 STO IND Y	407 RCL 07
351*LBL 13	408 1
352 0	409 +
353 STO 02	410 RCL 00
354 RCL 01	411 *
355 XEQ 16	412 9
356 STO 03	413 +
357*LBL 14	414 STO 06
358 0	415 RCL 00
359 STO 05	416 RCL 01
360 XEQ 23	417 *
361 RCL 00	418 +
362 XEQ 16	419 STO 07
363 STO 06	420 RTN
364*LBL 15	421*LBL 26
365 RCL 07	422 RCL 01
366 RCL 06	423 2
367 +	424 *
368 RCL IND X	425 3
369 RCL 08	426 +
370 RCL 06	427 RCL 00
371 +	428 *
372 RCL IND X	429 9
373 X<>Y	430 +
374 RDH	431 RCL 03
375 *	432 +
376 ST+ 05	433 RTN
377 ISG 06	434*LBL 16
378 GTO 15	435 1 E3
379 FIX 0	436 /
380 *F*	437 1
381 ARCL 04	438 +
382 *F,*	439 RTN
383 ARCL 03	440*LBL 20
384 *F=*	441 STO 03
385 ENG 4	442 RDH
386 ARCL 05	443 STO 07
387 PROMPT	444 RDH
388 RCL 05	445 STO 0E
389 X12	446 END
390 ST+ 02	
391 ISG 03	
392 GTO 14	
393 RCL 02	
394 SORT	
395 *FMGX*	
396 FIX 0	
397 ARCL 04	
398 *b=*	
399 ENG 4	
400 ARCL X	
401 PROMPT	
402 ISG 04	
403 GTO 09	
404 *FIN*	
405 PROMPT	

4.5.2.8 Listado del programa LECT

116 a

```
01*LBL *LECT*
02 CF 29
03 SF 27
04 *N?
05 PROMPT
06 STO 00
07 FIX 0
08 *NM?
09 PROMPT
10 STO 01
11 CLX
12 STOP
13*LBL A
14 *M*
15 ASTO 02
16 1
17 XEQ 01
18 *M*
19 PROMPT
20*LBL B
21 *K*
22 ASTO 02
23 2
24 XEQ 01
25 *K*
26 PROMPT
27*LBL C
28 RCL 01
29 XEQ 15
30 STO 04
31 SF 01
32*LBL 03
33 *FI*
34 ASTO 02
35 RCL 04
36 2
37 +
38 XEQ 01
39 ISG 04
40 GTO 03
41 CF 01
42 *FI*
43 PROMPT
44*LBL 15
45 1 E3
46 /
47 1
48 +
49 RTH
50*LBL 01
51 STO 05
52 RCL 00
53 XEQ 15
54 STO 03
55*LBL 02
56 *,*
57 ARCL 04
58 ASTO 06
59 RCL 00
60 RCL 05
61 INT
62 1
63 -
64 +
65 9
66 +
67 RCL 03
68 +
69 CLA
70 APCL 02
71 ARCL 03
72 FS? 01
73 ARCL 05
74 *+?
75 PROMPT
76 STO IND Y
77 ISG 03
78 GTO 02
79 .END.
```

4.5.2.9 Ejemplos resueltos.

a) Calcular las fuerzas y desplazamientos modales del ejemplo a) del inciso 4.4.3.4, considerando -- los tres primeros modos de vibrar y los siguientes datos a dicionales:

Zona sísmica B

Suelo tipo II del D.F.

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.045 \\ c_0 &= 0.200 \\ T_1 &= 0.5 \text{ seg.} \\ T_2 &= 0.8 \text{ seg} \\ r &= 0.5 \end{aligned}$$

Factor de ductilidad : 2

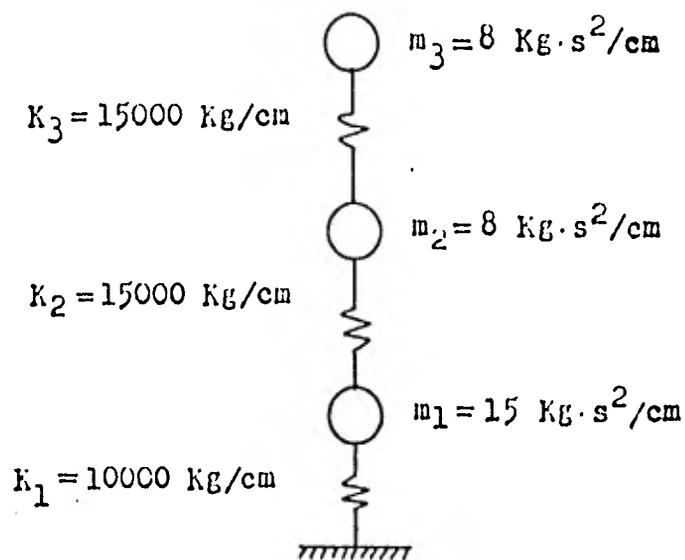
En este ejemplo se supone que los desplazamientos y fuerzas se calcularán inmediatamente después del cálculo de $[\Phi]$ y $\{T\}$ con el programa NEWM, por lo que no es necesario leer los datos de masas, rigideces y configuraciones modales. Para ser congruentes con el sistema de unidades usado en el ejemplo 4.4.3.4 a), se emplea un valor de $g=9.81$ en la línea 178 del programa ANAMOD.

	3.000 STO 01		PERIODOS MODALES		D2,1=14.330E-3	
	XEQ "ANAMOD"		T1.?			RUN
Q?				.578	RUN	D2,2=356.90E-6
	2.	RUN	T2.?			RUN
FORMA DEL ESPECTRO				.211	RUN	D2,3=-47.112E-6
a0?			T3.?			RUN
	.045	RUN		.139	RUN	DMAX2=14.335E-3
c?			D1,1=7.6615E-3			RUN
	.2	RUN			RUN	D3,1=18.937E-3
T1?			D1,2=400.33E-6			RUN
	.5	RUN			RUN	D3,2=-99.684E-6
T2?			D1,3=79.143E-6			RUN
	.8	RUN				D3,3=-50.175E-6
02						

D4,1=21.159E-3	RUN	F2,1=4.9764E3	RUN	FMAX3=5.5046E3	RUN
D4,2=-469.28E-6	RUN	F2,2=1.3060E3	RUN	F4,1=4.9001E3	RUN
D4,3=60.997E-6	RUN	F2,3=-444.23E0	RUN	F4,2=-1.1431E3	RUN
DMAX4=21.164E-3	RUN	FMAX2=5.1641E3	RUN	F4,3=303.62E0	RUN
F1,1=2.6612E3	RUN	F3,1=5.4020E3	RUN	FMAX4=5.0463E3	RUN
F1,2=1.4657E3	RUN	F3,2=-304.03E0	RUN	FIN	RUN
F1,3=746.34E0	RUN	F3,3=-394.43E0	RUN		
FMAX1=3.1234E3					

Las fuerzas modales, expresadas en Newtons, incluyen la reducción por ductilidad. Los desplazamientos modales, expresados en metros, no incluyen dicha reducción, de acuerdo a lo indicado en 4.5.2.2 .

b) Calcular las fuerzas sísmicas y los desplazamientos que ocurren en la siguiente estructura, situada en el D.F sobre suelo tipo I. Considerar $Q=1$.



Las configuraciones y períodos modales fueron obtenidos con un análisis convencional de eigenvalores, y se presentan a continuación:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 1.413 & -0.076 & -3.630 \\ 1.634 & -1.081 & 1.991 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} T_1 &= 0.394 \text{ seg.} \\ T_2 &= 0.150 \text{ seg.} \\ T_3 &= 0.086 \text{ seg.} \end{aligned}$$

N?	XEQ	LECT*	F13,3?	1.991	RUN	D3,1=704.99E-3	RUN
NM?	3	RUN	F1			D3,2=-13.342E-3	RUN
			Q?	XEQ	*ANAMOD*	D3,3=360.34E-6	RUN
M1?	3	RUN		1	RUN	DMAX3=705.11E-3	RUN
		XEQ A	FORMA DEL ESPECTRO				
M2?	15	RUN	a0?	.06	RUN	F1,1=1.6417E3	RUN
M3?	8	RUN	c?	.24	RUN	F1,2=322.62E0	RUN
M	6	RUN	T1?	.8	RUN	F1,3=14.379E0	RUN
		XEQ B	T2?	3.3	RUN	FMAX1=1.6731E3	RUN
K1?	10000	RUN	R?	1	RUN	F2,1=1.2426E3	RUN
K2?	15000	RUN	PERIODOS MODALES			F2,2=-13.144E0	RUN
K3?	15000	RUN	T1?	.394	RUN	F2,3=-27.829E0	RUN
K			T2?	.150	RUN	FMAX2=1.2430E3	RUN
		XEQ C	T3?	.086	RUN	F3,1=1.4303E3	RUN
F11,1?	1	RUN	D1,1=431.45E-3			F3,2=-186.05E0	RUN
F12,1?	1.413	RUN	D1,2=12.342E-3			F3,3=15.260E0	RUN
F13,1?	1.634	RUN	D1,3=100.99E-6			FMAX3=1.4424E3	RUN
F11,2?	1	RUN	DMAX1=431.63E-3			FIN	RUN
F12,2?	-0.876	RUN	D2,1=609.64E-3				
F13,2?	-1.081	RUN	D2,2=-937.98E-6				
F11,3?	1	RUN	D2,3=-656.98E-6				
F12,3?	-3.630	RUN					

5. APLICACIONES PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE HIDRAULICA.

En este capítulo se presentan problemas relacionados con la Ingeniería Hidráulica. Al igual que en el capítulo anterior, los problemas que se han abordado están íntimamente ligados, y en el caso de los programas dedicados al flujo a superficie libre, su poder mayor se obtiene de su uso en conjunto.

También en estos problemas se han seguido - normas de aceptación generalizada y criterios usuales en - nuestro medio.

Se recomienda de manera especial estudiar detenidamente el instructivo de usuario del programa CROSS, ya que por ser relativamente complicado, requiere de mayor cuidado.

5.1 Cálculo de tirantes críticos.

5.1.1 Ecuaciones fundamentales.

Considérese el siguiente canal de área hidráulica A , por el cual circula un gasto Q fluyendo a una velocidad V :

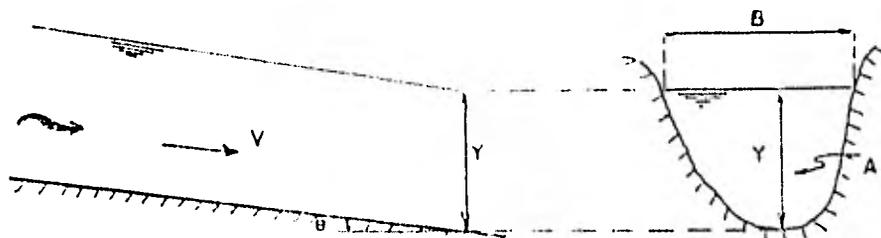


fig. 5.1.1

Se define como energía específica en la sección de un canal a "... la energía por kilogramo de agua que fluye a través de la sección, medida respecto al fondo del canal". (ref. 5.1, p. 103).

La expresión matemática de la energía específica es:

$$E = y \cos^2 \theta + \alpha V^2 / 2g \quad (5.1.1)$$

Es decir, la suma de carga de presión y carga de velocidad (suponiendo variación hidrostática de la presión). Si como suele suceder, θ es muy pequeño, $\cos^2 \theta \cong 1$, y:

$$E = y + \alpha V^2 / 2g \quad (\alpha = \text{coeficiente de coriolis})$$

Si Q es constante y A es función del tirante, y como $V = Q/A$, entonces:

$$E = y + \frac{\alpha Q^2}{A^3 g}$$

El resultado ser función solamente del tirante.

Existe un valor de y que hace que la energía específica para que circule un gasto Q sea mínima. A este tirante se le conoce como tirante crítico y al régimen en que ocurre se le llama régimen crítico.

De la definición se deduce que, si el flujo es crítico:

$$\frac{dE}{dy} = 0$$

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \cdot \frac{d\Delta/dy}{\Delta^3} = 0 \quad (5.1.2)$$

(el subíndice 'c'
denota estado -
crítico)

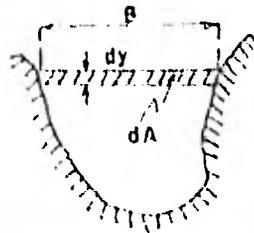


FIG. 6.1.2

De la figura 5.1.2:

$$dA = Bdy$$

$$\frac{d\Delta}{dy} = B$$

Sustituyendo en (5.1.2) :

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{B}{\lambda_c^3} = 1$$

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{\lambda_c^3}{B_c} \quad (5.1.3)$$

Por ejemplo, para un canal con sección rectangular:

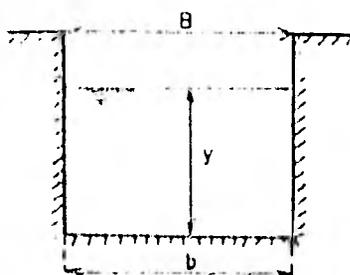


Fig. 5.1.3

$$A = by$$

$$B = b$$

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{(by_c)^3}{b}$$

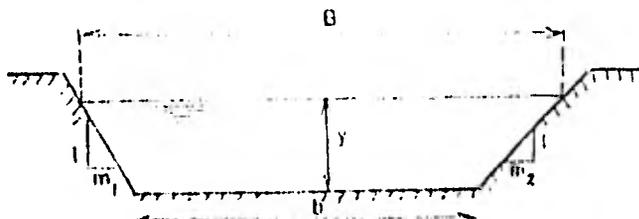
$$y_c = y_R = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} \quad (5.1.4)$$

y_R = tirante crítico en sección rectangular.

En el caso de canales con expresiones más complicadas para el cálculo del área hidráulica, la evaluación de cualquier variable desconocida plantea problemas laboriosos que requieren métodos numéricos para su solución.

5.1.2 Canales de Sección Trapezoidal.

Considérese la siguiente sección:



Definimos:

$$m = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)$$

$$\beta = \frac{my}{b}$$

Pueden deducirse las siguientes relaciones geométricas:

$$\begin{aligned} \Lambda &= by + my^2 \\ \Lambda &= by (1 + \beta) \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

$$\begin{aligned} B &= b + 2my \\ B &= b(1 + 2\beta) \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Sustituyendo (5.1.5) y (5.1.6) en (5.1.3)

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{b^2 y_c^3 (1 + \beta_c)^3}{1 + 2\beta_c} \quad (5.1.7)$$

Esta será la ecuación básica, con ayuda de la cual estudiaremos los siguientes casos:

Dados m y α , y además:

- Dados b y l , calcular y_c
- Dados Q y y_c , calcular b
- Dados b y y_c , calcular Q

5.1.2.1 Datos b y Q , cálculo de y_c

Describiremos a continuación dos posibles formas de proceder. La primera conduce a una solución aproximada y la segunda conduce a una solución exacta.

5.1.2.1.1 Solución aproximada. Método de Agroskin.

La ecuación (5.1.7) puede escribirse:

$$y_c^3 = \frac{Q^2}{b^2 g' \alpha} \frac{1 + 2\beta}{(1 + \beta)^2}$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g' \alpha} \frac{(1 + 2\beta)^{1/2}}{1 + \beta}} \quad (5.1.8)$$

Sustituyendo (5.1.4) en (5.1.8)

$$y_c = y_R \frac{(1 + 2\beta)^{1/2}}{1 + \beta}$$

$$\frac{y_c}{y_R} = \frac{(1 + 2\beta)^{1/2}}{1 + \beta} \quad (5.1.9)$$

Agroskin (ref. 5.2) encontró que si se desea una solución aproximada, puede usarse la siguiente expresión:

$$\frac{y_c^*}{y_R} = 1 - \frac{\eta}{3} + 0.105 \eta^2 \quad (5.1.10)$$

y_c^* = Caudal crítico calculado con el método Agroskin

$$\eta = \frac{m y_R}{b}$$

La expresión $f(\tau) = 1 - \frac{\tau}{2} + 0.105\tau^2$ es una aproximación a la solución exacta. Puede probarse que a medida que τ crece, la ecuación (5.1.10) proporciona resultados menos exactos.

Pueden determinarse los rangos de aplicabilidad del Método de Agroskin procediendo así:

Se desea que

$$y_C^* = y_C \quad \text{o bien que}$$

$y_C^* = y_C \pm Ky_C$ donde K es una constante positiva, menor que la unidad, y suficientemente pequeña para proporcionar un resultado satisfactorio.

$$\text{si } C = 1 + K \quad \text{y } C' = 1 - K$$

$$C'y_C \leq y_C^* \leq Cy_C$$

Analizando el caso de la derecha: (*)

$$y_C^* \leq Cy_C \quad \text{y en el límite:}$$

$$y_C^* = Cy_C$$

si $f(\tau) = 1 - \frac{\tau}{2} + 0.105\tau^2$, y de acuerdo a (5.1.10)

$$f(\tau) y_R = y_C^*$$

$$f(\tau) y_R = Cy_C$$

$$\frac{f(\tau)}{C} = \frac{y_C}{y_R} \quad (5.1.11)$$

* Sólo se ha analizado este caso ya que por la forma de $f(\tau)$ el Método Agroskin da por resultado valores de y_C^* mayores que los valores exactos en la mayoría de los casos. La demostración se ha omitido por su poca relevancia en este estudio.

recordando que $\beta_c = \frac{my_c}{b}$

y $\tau = \frac{my_R}{b}$

$$m = \frac{b\tau}{y_R}$$

$$\beta_c = \frac{b\tau}{y_R} \frac{y_c}{b}$$

$$\beta_c = \tau \frac{y_c}{y_R}, \text{ y de acuerdo a (5.1.11),}$$

y para fines de hallar

los rangos de aplicabilidad:

$$\beta_c = \frac{\tau f(\tau)}{C} \quad (5.1.12)$$

sustituyendo (5.1.12) y (5.1.11) en (5.1.9)

$$\frac{f(\tau)}{C} = \frac{(1 + 2\tau f(\tau)/C)^{1/3}}{1 + \tau f(\tau)/C} \quad (5.1.13)$$

Asignando diferentes valores a τ , pueden encontrarse valores de C que hagan que se cumpla la ecuación (5.1.13). Estos valores de τ pueden asociarse al error cometido en el cálculo de y_c lo cual permite saber, dado un valor de τ , cuál es el error relativo que se comete. La ecuación (5.1.13) ha sido resuelta para diferentes valores de τ y se han obtenido los siguientes resultados:

σ	C	ERROR (%)
0	1.00000	0.000
0.20	1.00112	0.112
0.40	1.00108	0.108
0.45	1.00000	0.000
0.60	0.99857	-0.143
0.80	0.99803	-0.197
0.90	0.99904	-0.096
0.95	0.99998	-0.002
1.00	1.00127	0.126
1.20	1.01036	1.036
1.40	1.02710	2.710
2.00	1.13746	13.746
3.00	1.58657	58.656

Como puede observarse, el Método Agroskin puede utilizarse eficientemente en el cálculo de tirantes críticos en canales usuales ($\sigma < 1.7$, aprox.)

5.1.2.1.2 Solución Exacta. Método de Newton-Raphson.

La ecuación (5.1.9) puede escribirse:

$$y_c = y_R \frac{(1 + 2\beta_c)^{1/3}}{1 + \beta_c} \quad (5.1.13)$$

Asimismo, puede plantearse la siguiente función:

$$f(y) = y - y_R \frac{(1 + 2\beta)^{1/3}}{1 + \beta} \quad (5.1.14)$$

Si $y = y_c$, entonces $\beta = \beta_c$ y $f(y) = 0$

Por tanto, puede encontrarse el valor de y_c haciendo $f(y) = 0$ en (5.1.14). Para resolver esta ecuación, se hará uso del Método de Newton-Raphson (ref. 5.3), cuya ecuación de recurrencia es:

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f(y_i)}{f'(y_i)} \quad (5.1.15)$$

Este método, como muchos otros, genera una sucesión de valores tales que un nuevo valor calculado a partir de otros anteriores, está más cerca de la solución. El subíndice "i" denota el orden en que van siendo calculados los valores de y.

Para emplear la ecuación (5.1.15) es necesario conocer una expresión para $f'(y)$:

$$f(y) = y - y_R \frac{(1 + 2\beta)^{1/3}}{1 + \beta}$$

$$f'(y) = 1 - y_R \frac{\frac{2}{3} \frac{m}{b} (1 + \beta)(1 + 2\beta)^{2/3} - \frac{m}{b} (1 + 2\beta)^{1/3}}{(1 + \beta)^2}$$

$$f'(y) = 1 + \frac{my_R}{3b} \frac{1 + 4\beta}{\left[(1 + \beta)(1 + 2\beta)^{1/3} \right]^2} \quad (5.1.16)$$

La evaluación de la Ec. (5.1.16) requiere abundante la bor de cálculo, pero se ha encontrado que el término:

$$g(\beta) = \frac{1 + 4\beta}{\left[(1 + \beta)(1 + 2\beta)^{1/3} \right]^2}$$

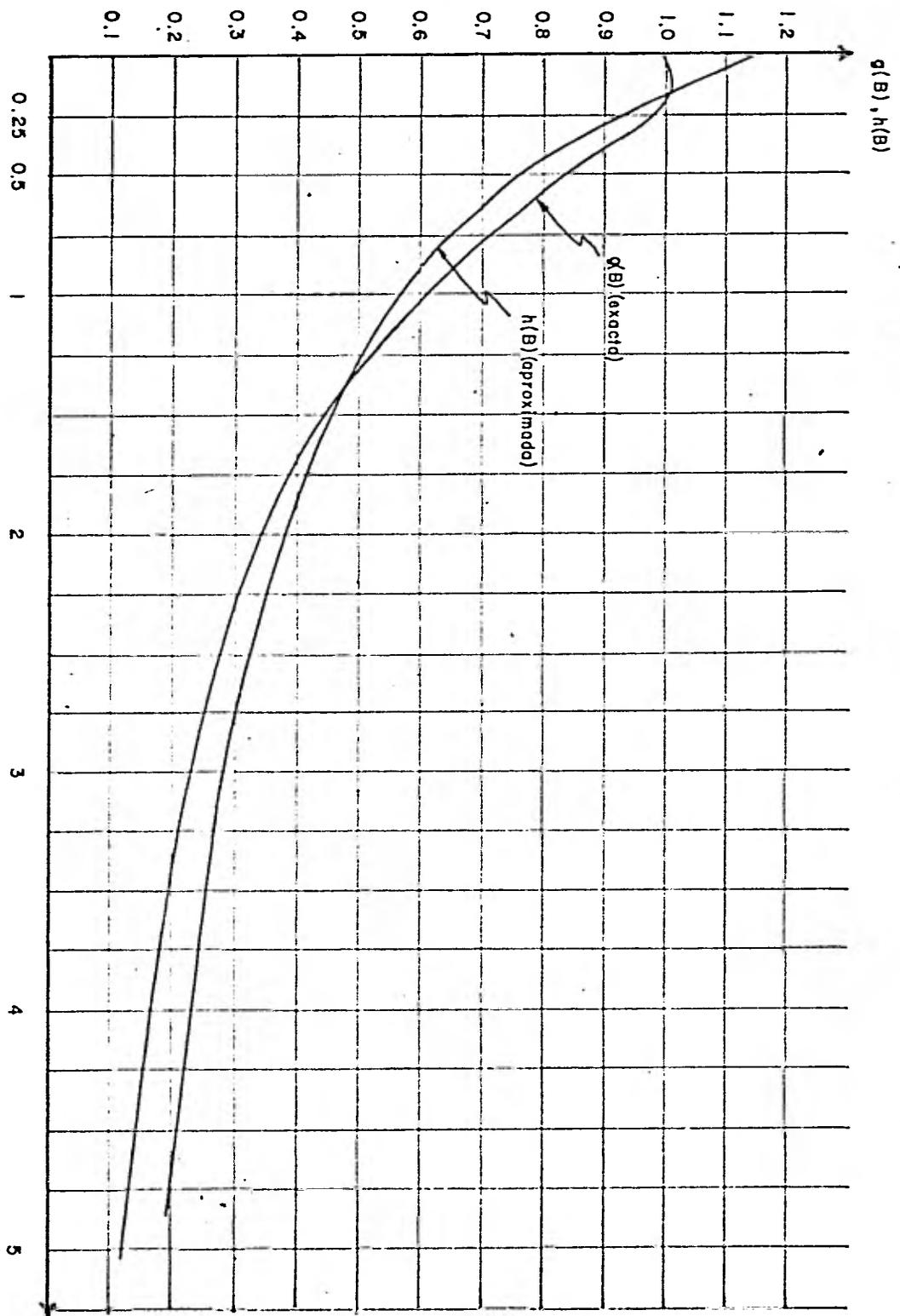
puede ser sustituido por otra función de β , de más fácil evaluación, que es

$$h(\beta) = \frac{1.14}{1 + \beta}$$

Como puede comprobarse en la gráfica 5.1, no se comete gran error al afirmar que:

$$g(\beta) \doteq h(\beta)$$

$$f'(y) \doteq 1 + \frac{my_R}{3b} \frac{1.14}{1 + \beta}$$



GRAFICA 5.1
 VALORES DE $g(B)$ Y $h(B)$ CALCULADOS CON LAS EXPRESIONES INDICADAS EN
 EL INCISO 5.1.2.1.2

$$f'(y) \doteq 1 + \frac{0.38 \text{ my}_R}{b(1 + \beta)} \doteq \frac{1 + \beta + \frac{0.38 \text{ my}_R}{b}}{1 + \beta} \quad (5.1.17)$$

Sustituyendo (5.1.14) y (5.1.17) en (5.1.15)

$$y_{i+1} = y_i - \frac{y - y_R \frac{(1 + 2\beta)^{1/3}}{1 + \beta}}{1 + \frac{0.38 \text{ my}_R}{b}}$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{y(1 + \beta) - y_R (1 + 2\beta)^{1/3}}{1 + \beta + \frac{0.38 \text{ my}_R}{b}} \quad (5.1.18)$$

Esta es la ecuación que se utilizará en el programa "YCT" para el cálculo del tirante crítico.

Se plantea el problema de la selección de un valor inicial de y . Una magnífica primera aproximación es la calculada por el método Agroskin, como se ha descrito en el inciso anterior. - Por supuesto, esta primera aproximación será mejor en la medida en que σ sea pequeño. En todo caso, el método exacto aquí descrito afinará esta primera aproximación hasta la precisión deseada.

5.1.2.2 Datos Q y y_c , cálculo de b .

A partir de la ecuación (5.1.7)

$$\frac{b^2 y_c^3 (1 + \beta_c)^3}{1 + 2\beta_c} = \frac{\alpha Q^2}{g} \quad (5.1.7)$$

$$b = \sqrt{\frac{\alpha Q^2}{g y_c^3} \frac{1 + 2\beta_c}{(1 + \beta_c)^3}}$$

$$b = Q \sqrt{\frac{1 + 2\beta_c}{g/\alpha y_c (1 + \beta_c)^3}} \quad (5.1.19)$$

Dado que $\beta_c = f(b)$, es evidente que la ec. (5.1.19) es implícita en b . Para su solución, emplearemos el método conocido como "Método de Aproximaciones Sucesivas". (ref. 5.4) En síntesis, este método genera una sucesión de valores por medio de una ecuación de recurrencia del tipo

$$b_{i+1} = f(b_i)$$

El subíndice i tiene el mismo significado que en la ec. (5.1.15)

Para nuestro caso,

$$f(b) = Q \sqrt{\frac{1 + 2\beta}{g/\alpha [y_c (1 + \beta)]^3}} \quad (5.1.20)$$

Esta ecuación será empleada en el programa "YCT" en el cálculo de b dados Q y y_c .

Como valor inicial del cálculo, puede elegirse la plantilla que tendría un canal rectangular por el cual circulará un gasto Q con un tirante y_c , es decir:

$$b_1 = \sqrt{\frac{Q^2}{g/\alpha y_c^3}} \quad (5.1.21)$$

Esta primera aproximación será mejor mientras más pequeño sea el parámetro ∇ definido en 5.1.2.1.1

5.1.2.3 Dados b y y_c , cálculo de Q

De la ecuación (5.1.7)

$$\frac{b^2 y_c^3 (1 + \beta_c)^3}{1 + 2\beta_c} = \frac{\alpha Q^2}{g}$$

Puede despejarse Q :

$$Q = \sqrt{\frac{b^2 y_c^3 (1 + \beta_c)^3}{1 + 2\beta_c}} \quad g/\alpha \quad (5.1.22)$$

Debido a que son conocidos b, y_c , m y g/α es posible calcular Q directamente.

5.1.2.4 Programa YCT

Este programa está diseñado para dar solución a cualquiera de los tres casos indicados en 5.1.2.

Se emplean fundamentalmente las ecuaciones (5.1.18), (5.1.19) y (5.1.22) y algunas otras de las expresiones mostradas en el desarrollo anterior.

Las ecuaciones usadas se han considerado las más convenientes para ser aplicadas en el programa YCT implementado para la calculadora HP-41C/CV.

Vale la pena comentar más ampliamente algunos aspectos relacionados con el programa YCT:

Criterio de convergencia.

En el cálculo de y_c y b, por tratarse de métodos iterativos, es necesario interrumpir la secuencia cuando se ha llegado a una aproximación suficientemente buena; pero como se desconoce la solución, es necesario estimar de forma indirecta la precisión que se ha alcanzado. Una de las formas de hacerlo es mediante la variación que existe entre la i-ésima y la i-ésima + 1 aproximaciones. Esto es, que si estos valores son muy semejantes y dado que las ecuaciones empleadas no presentan variaciones bruscas, es de esperarse que la última aproximación es-

Sigue existiendo el problema de definir cuándo dos iteraciones consecutivas generan valores "suficientemente cercanos". Es necesario elegir como tolerancia un valor suficientemente pequeño para obtener buena precisión, pero no tan pequeño que obligue a efectuar un gran número de iteraciones. Estos valores deben estar de acuerdo a la realidad y al caso concreto que se estudia. Por ejemplo, al seleccionar como valor máximo aceptable de la diferencia entre dos valores calculados consecutivamente la cantidad 1 cm., podemos alcanzar una precisión razonable si trabajamos con tirantes del orden de, digamos 3 ó 4 m.; pero si estamos efectuando experimentos en un modelo a escala y se manejan tirantes de 3 ó 4 cm. es evidente que nuestra solución no será muy precisa.

Pensando en estos problemas, se ha introducido el concepto de "tolerancia relativa" que definimos como:

$$t_{ri} = \left| \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \right|$$

donde S_i y S_{i+1} representan las soluciones calculadas en las iteraciones i -ésima e $(i+1)$ -ésima.

Este concepto elimina el problema de escalas indicado anteriormente.

En el programa YCF el cálculo es detenido automáticamente cuando

$$t_{ri} < E$$

donde E es un valor pequeño que se define a través del número de decimales que se seleccionen para operar el programa

$$E = 10^{-k}$$

siendo k precisamente el número de decimales con que

mal, es igual a cero.

- Valor del coeficiente de coriolis .

No se ha considerado necesario destinar un registro de memoria para la variable α , ya que en la mayoría de los problemas reales $\alpha = 1$. Sin embargo, para valores de α diferentes de 1, es suficiente cambiar el valor $g = 9.81$ por la cantidad g/α en los pasos 28, 31 y 114 y $2g$ por $2g/\alpha$ en el paso 143.

- Cálculo de otras variables.

Una vez que se ha determinado la incógnita deseada, es posible calcular los valores de la velocidad crítica, la energía específica mínima y la pendiente crítica asociada a un cierto valor de la rugosidad de Manning.

01*LBL *VOT*	59 STO 06	117 RCL 01
02 SF 27	60 FS?C 01	118 *0*
03 .1	61 RTH	119 GTO 03
04 STO 05	62 RCL 03	120*LBL 02
05 *M*	63 +	121 SF 01
06 XEQ 05	64 RCL 05	122 XEQ 00
07 *b*	65 RCL 06	123 RCL 03
08 XEQ 05	66 +	124 +
09 *Q*	67 3	125 3
10 XEQ 05	68 1/X	126 Y1X
11 *Y*	69 Y1X	127 9.81
12 XEQ 05	70 RCL 04	128 +
13 GTO IND 06	71 +	129 RCL 05
14*LBL 05	72 -	130 RCL 06
15 *P?*	73 RCL 04	131 +
16 PROMPT	74 RCL 03	132 /
17 STO IND 05	75 +	133 SORT
18 RCL 05	76 RCL 01	134 FS?C 02
19 FC?C 22	77 /	135 RTH
20 STO 06	78 .38	136 RCL 01
21 ISG 05	79 +	137 +
22 RTH	80 RCL 06	138 STO 02
23*LBL 03	81 +	139 *Q*
24 RCL 02	82 /	140 GTO 03
25 RCL 01	83 ST- 03	141*LBL A
26 /	84 RCL 03	142 RCL 06
27 X12	85 /	143 RCL 01
28 9.81	86 RND	144 +
29 /	87 X*0?	145 RCL 03
30 3	88 GTO 00	146 +
31 1/X	89 RCL 03	147 STO 07
32 Y1X	90 *Y*	148 1/X
33 STO 04	91 GTO 03	149 RCL 02
34 STO 03	92*LBL 01	150 +
35 RCL 02	93 RCL 02	151 STO 00
36 +	94 X12	152 *V*
37 RCL 01	95 9.81	153 XEQ 03
38 /	96 /	154 RCL 03
39 STO 07	97 RCL 03	155 X12
40 X12	98 3	156 19.62
41 .105	99 Y1X	157 /
42 *	100 /	158 RCL 03
43 RCL 07	101 SORT	159 +
44 3	102 STO 01	160 *E*
45 /	103*LBL 04	161 XEQ 03
46 -	104 SF 02	162 RCL 03
47 1	105 XEQ 02	163 *N?*
48 +	106 1/X	164 PROMPT
49 ST+ 07	107 RCL 02	165 +
50*LBL 00	108 +	166 RCL 00
51 RCL 03	109 X12 01	167 X12
52 RCL 01	110 RCL 01	168 1
53 /	111 -	169 +
54 RCL 00	112 RCL 01	170 SORT
55 +	113 /	171 2
56 GTO 05	114 END	172 .

```
175 RCL 01  
176 +  
177 RCL 07  
178 /  
179 X12  
180 3  
181 1/X  
182 Y1X  
183 +  
184 X12  
185 *SC*  
186 LBL 03  
187 *F*  
188 RCL X  
189 PROMPT  
190 END
```

5.1.2.4.4 Ejemplos resueltos.

a) Calcular el tirante crítico que se presenta en un canal trapecial con ancho de plantilla igual a 4 m. y taludes 1.5:1, si el gasto que circula es de 20 m³/s. Calcular además, la velocidad y pendiente críticas, así -- como la energía específica. ($n = 0.013$)

	FIX 3			XEQ #
	XEQ	*YCT*		
H?			V=2.967	
				RUN
	1.500	RUN	E=1.620	
b?				RUN
	4.000	RUN	H?	
Q?				.013 RUN
	20.000	RUN	SC=0.002	
Y?				
		RUN		
Y=1.171				

b) ¿Qué gasto escurrirá a régimen crítico en un canal con $b = 6$ m. y taludes 2.5:1? Calcular también V_c , s_c y E . ($n = 0.030$)

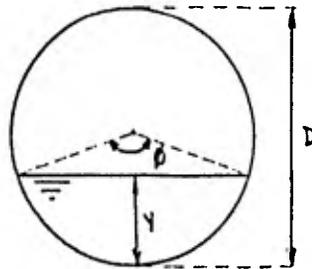
	FIX 4			XEQ A
	XEQ	*YCT*		
H?			V=3.6727	
				RUN
	2.5000	RUN	E=2.6875	
b?				RUN
	6.0000	RUN	H?	
Q?				.0300 RUN
		RUN	SC=0.0035	
Y?				
	2.0000	RUN		
Q=60.7995				

c) Determinar el ancho de plantilla que debe tener un canal con taludes 0.5:1 para que a régimen crítico escurre un gasto de $10 \text{ m}^3/\text{s}$ con un tirante de 0.984 m . (ref. 5.9)

	FIX 3	
	XEQ	YCT
K?	.500	RUH
b?		RUH
Q?	10.000	RUH
Y?	.984	RUH
b=3.002		

5.1.3 Canales con sección circular.

Considérese la siguiente sección:



Puede demostrarse que las siguientes relaciones geométricas son ciertas:

$$\phi = 2 \arccos \left(1 - 2 \frac{y}{D} \right) \quad \phi \text{ en radianes} \quad (5.1.23)$$

$$A = \frac{D^2}{8} (\phi - \text{sen } \phi) \quad (5.1.24)$$

$$B = D \text{ sen } \phi/2 \quad (5.1.25)$$

$$y/D = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\phi}{2} \right) \quad (5.1.26)$$

Sustituyendo: (5.1.24) y (5.1.25) en (5.1.3)

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{D^6}{512} \frac{(\phi_c - \text{sen } \phi_c)^3}{D \text{ sen } \phi/2}$$

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{D^5}{512} \frac{(\phi_c - \text{sen } \phi_c)^3}{\text{sen } \phi/2} \quad (5.1.27)$$

Estudiaremos los siguientes casos:

- Datos Q y D calcular Y_c
- Datos Q y y_c/D calcular D
- Datos y_c/D y D calcular Q

5.1.3.1 Datos Q y D calcular Y_c

De la ecuación (5.1.27)

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{D^5}{512} \frac{(\phi_c - \text{sen } \phi_c)^3}{\text{sen}(\phi_c/2)}$$

$$\frac{(\phi_c - \text{sen } \phi_c)^3}{\text{sen}(\phi_c/2)} = \frac{512 \alpha Q^2}{gD^5}$$

Si

$$\frac{512 \alpha Q^2}{gD^5} = J$$

$$\frac{(\phi_c - \text{sen } \phi_c)^3}{\text{sen}(\phi_c/2)} = J$$

Puede plantearse:

$$f(\phi) = \frac{(\phi - \text{sen } \phi)^3}{\text{sen } \phi/2} - J \quad (5.1.28)$$

$$\text{si } \phi = \phi_c \quad f(\phi) = 0$$

La solución de la ec. (5.1.28) para la variable ϕ , es decir $f(\phi) = 0$, nos da también la solución para y , ya que de acuerdo a la ec. (5.1.23), conocidos ϕ y D puede calcularse de inmediato el valor de y .

Para resolver la ec. (5.1.28) se empleará un método numérico conocido como "Método de la Secante" para la solución de ecuaciones del tipo $f(x) = 0$ (refs. 5.3 y 5.5)

La ecuación de recurrencia en este caso será:

$$\phi_{i+1} = \phi_i - \frac{\phi_{i-1} - \phi_i}{f(\phi_{i-1}) - f(\phi_{i+1})} f(\phi_i) \quad (5.1.29)$$

El subíndice i denota el orden en que se van calculando nuevos valores de ϕ . La ecuación (5.1.29) genera una sucesión de valores de la variable ϕ que converge hasta la solución deseada.

Como puede observarse, para iniciar la generación de valores es necesario tener 2 valores diferentes ϕ y $f(\phi)$. Para asegurar la rápida convergencia se requiere que estos 2 valores de ϕ estén suficientemente cercanos a la solución.

La observación de la representación gráfica de la solución de la función y/D vs. Q^2/gD^5 (ref. 5.6) sugiere que esta puede representarse en forma aproximada y dentro de un cierto rango, como una función que graficada en escalas logarítmicas, es una recta.

Se ha encontrado que dentro de un rango usual de valores de y/D (0.025 a 0.9) esta expresión aproximada puede ser: (*)

$$\frac{y}{D} = \left(\frac{J}{512}\right)^{1/4} \quad (5.1.30)$$

si se hace

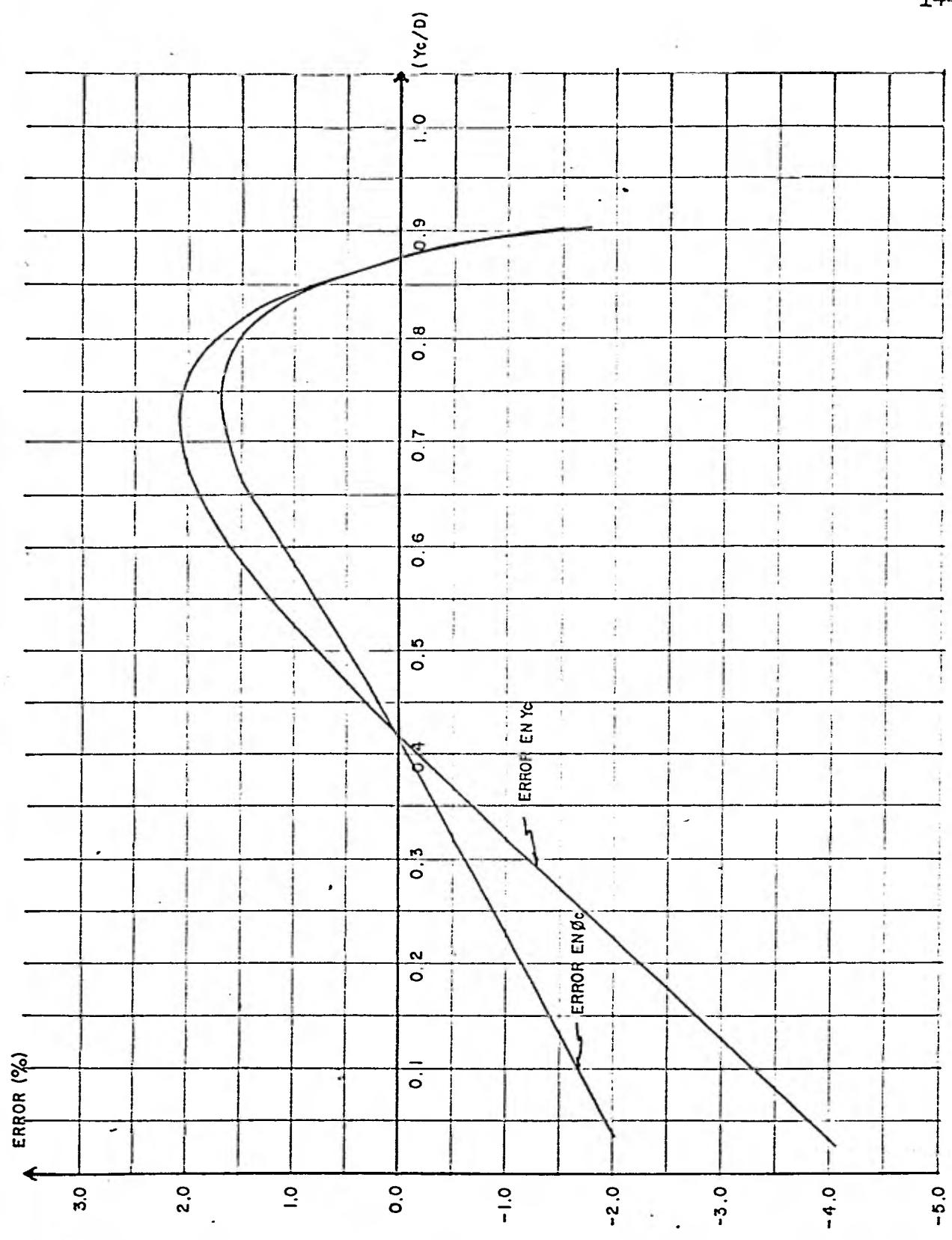
$$K = \frac{Q}{(gD^5)^{1/2}} = \sqrt{\frac{J}{512}}$$

la ec. (5.1.30) queda:

$$\frac{y}{D} \pm \sqrt{K}$$

Esta ecuación es la que se empleará en el cálculo de los valores iniciales necesarios para la ec. (5.1.29). Como se había indicado, se requieren dos valores iniciales de ϕ para iniciar el cálculo mediante (5.1.29). Uno de ellos se calcula empleando las ecs. (5.1.30) y (5.1.23). Se ha encontrado que un valor adecuado para el otro valor inicial es:

GRAFICA 5.2
ERRORES RELATIVOS COMETIDOS AL EVALUAR (Y_c/D) Y β_c CON LA EXPRESION -
(5.1.30)



$$\phi_2 = 1.03 \phi_1 \quad \text{con}$$

$$\phi_1 = 2 \operatorname{ang} \cos (1-2 \sqrt{R})$$

En estas condiciones es ya posible calcular el valor correcto de ϕ_c y consecuentemente el valor de y_c .

5.1.3.2 Dados Q y y_c/D , calcular D

De la ecuación (5.1.27)

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{D^5}{512} \frac{(\phi_c - \operatorname{sen} \phi_c)^3}{\operatorname{sen}(\phi_c/2)}$$

$$D = \left[\frac{512 \phi_c^2}{g/\alpha} \frac{\operatorname{sen} \phi_c/2}{(\phi_c - \operatorname{sen} \phi_c)^3} \right]^{1/5} \quad (5.1.32)$$

Además, sabiendo que según la ec. (5.1.23)

$$\phi_c = 2 \operatorname{ang} \cos (1-2 y_c/D)$$

es posible calcular directamente con la ec. (5.1.32) el valor de D

5.1.3.3 Dados y_c y D , calcular Q

De la ec. (5.1.27)

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{D^5}{512} \frac{(\phi_c - \operatorname{sen} \phi_c)^3}{\operatorname{sen}(\phi_c/2)}$$

$$Q = \sqrt{\frac{\alpha/\alpha}{512} \frac{D^5}{\operatorname{sen}(\phi_c/2)} \frac{(\phi_c - \operatorname{sen} \phi_c)^3}{\operatorname{sen}(\phi_c/2)}} \quad (5.1.33)$$

Conocido y_c/D , es posible calcular ϕ_c con la ecuación (5.1.23) y entonces el cálculo de Q con la ec. (5.1.30) es directo.

5.1.3.4 Programa YCC

Mediante este programa, se solucionan los 3 casos de 5.1.3, haciendo uso principalmente de las ec. (5.1.29), (5.1.32) y (5.1.33) y las ecuaciones que muestran las propiedades geométricas del círculo.

El empleo de este programa está limitado a valores de $0.025 \leq c/D \leq 0.9$. Otras cantidades fuera de este rango no representan condiciones reales, y el propio fenómeno del tirante crítico puede carecer de sentido. Si se emplean valores de y/D fuera del rango indicado; o bien si se usan combinaciones de variables que conduzcan a esta situación, el programa puede fallar debido a errores aritméticos.

En este programa también son aplicables las consideraciones hechas en 5.1.2.4 en lo referente al valor del coeficiente α y al cálculo de otras variables.

Por lo que respecta al criterio de convergencia, no se ha usado el criterio de tolerancia relativa, ya que no existe problema de escala dado que la variable sobre la cual se itera es ϕ , que está en radianes, e invariablemente se encontrará en el rango $0 \leq \phi \leq 2\pi$. (En realidad se trata de un rango menor, cuyos límites son los valores de ϕ asociados al intervalo $0.025 \leq y_c/D \leq 0.9$). En realidad el valor máximo que deberá tener ϕ para fines reales es aproximadamente igual a 5. Sin embargo, el control de la tolerancia se sigue efectuando con el número de decimales seleccionados y el cálculo se interrumpirá cuando

$$\left| \phi_{i+1} - \phi_i \right| < 10^{-k} \quad \text{donde } k \text{ es el número de decimales deseado.}$$

5.1.3.4.3 Listado del programa.

149

01+LBL *YCC*	59 XEQ 03	117 *V*
02 RRG	60 RCL 03	118 XEQ 03
03 CF 22	61 -	119 RCL 00
04 SF 27	62 STO 06	120 2
05 2.1	63 1.03	121 *
06 STO 01	64 ST+ 01	122 RCL 03
07 *0*	65+LBL 12	123 RCL 01
08 XEQ 00	66 RCL 01	124 *
09 *D*	67 XEQ 06	125 /
10 XEQ 00	68 RCL 00	126 3
11 *Y/D*	69 -	127 1/X
12 XEQ 00	70 STO 07	128 Y1X
13 GTQ INE 00	71 RCL 05	129 X12
14+LBL 00	72 RCL 01	130 1/X
15 *F?*	73 STO 05	131 RCL 05
16 PROMPT	74 -	132 *
17 STO INE 01	75 RCL 06	133 *N?*
18 RCL 01	76 RCL 07	134 PROMPT
19 FC?C 22	77 STO 06	135 *
20 STO 00	78 -	136 X12
21 ISG 01	79 /	137 *SC*
22 RTN	80 *	138 XEQ 09
23+LBL 02	81 ST- 01	139 RCL 05
24 1	82 RND	140 X12
25 STO 02	83 X*0?	141 19.62
26 XEQ 06	84 GTQ 12	142 /
27 RCL 04	85 RCL 01	143 RCL 04
28 XEQ 07	86 2	144 RCL 03
29 XEQ 08	87 /	145 *
30 RCL 00	88 COS	146 +
31 /	89 1	147 *E*
32 SPRT	90 -	148 GTQ 09
33 STO 02	91 CHS	149+LBL 00
34 *0*	92 2	150 ENTER?
35 GTQ 03	93 /	151 SIN
36+LBL 03	94 STO 04	152 -
37 1	95 RCL 03	153 3
38 STO 03	96 *	154 Y1X
39 XEQ 06	97 *Y*	155 RCL 01
40 RCL 04	98+LBL 09	156 2
41 XEQ 07	99 *F=*	157 /
42 XEQ 08	100 ARCL X	158 SIN
43 1/X	101 PROMPT	159 /
44 RCL 00	102 RTN	160 RTN
45 *	103+LBL 8	161+LBL 06
46 .2	104 RCL 02	162 RCL 02
47 Y1X	105 RCL 01	163 X12
48 STO 03	106 ENTER?	164 52.1916
49 *D*	107 SIN	165 *
50 GTQ 05	108 -	166 RCL 03
51+LBL 04	109 8	167 5
52 XEQ 06	110 /	168 Y1X
53 512	111 RCL 03	169 /
54 /	112 X12	170 STO 00
55 .25	113 *	171 RTN

175 I
176 -
177 CHS
178 ACOS
179 ST+ X
180 STO 21
181 .END.

5.1.3.4.4 Ejemplos resueltos.

a) Determinar el tirante crítico correspondiente a un canal circular de 5 m. de diámetro, por el cual circula un gasto de 20 m³/s. Calcular también la velocidad, energía específica y pendiente crítica asociada a un valor de la rugosidad n = 0.017

```

          FIX 3
          XEQ "YCC"
          V=3.464
          XEQ 2
          Q?
          20.000 RUN
          N?
          D?
          5.000 RUN
          SC=0.004
          Y/D?
          RUN
          E=2.288
          Y=1.676
    
```

b) ¿Qué diámetro se requiere si se desea que con el gasto de 20 m³/s se presente un tirante crítico tal que la relación y/D sea de 0.5? ¿Qué velocidad, pendiente crítica y energía específica se tendrían en estas condiciones?

```

          FIX 3
          XEQ "YCC"
          V=3.764
          XEQ 3
          Q?
          20.000 RUN
          N?
          D?
          RUN
          SC=0.005
          Y/D?
          .500 RUN
          E=2.561
          D=3.678
    
```

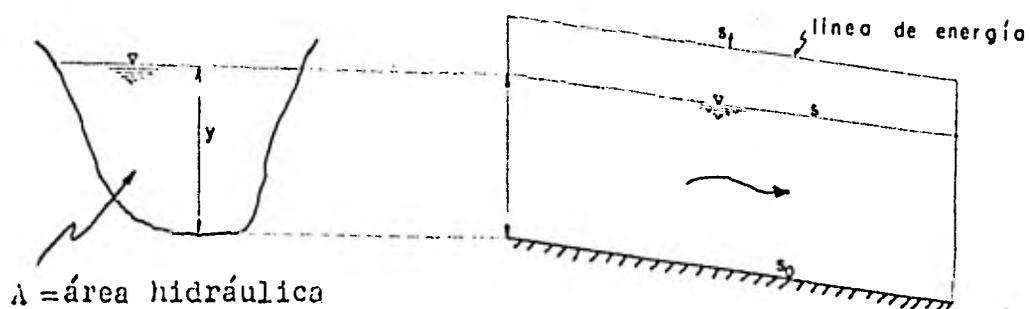
c) Si para fines de diseño se elige $D = 3.75$ m. y se desea que $y_c = 1.8$ m. ($y_c/D = 0.48$), ¿cuál será el gasto que escurra a régimen crítico con estas características? Calcular V , s_c y E .

		FIX 7
		XEQ "YCC"
Q?		RUN
D?		RUN
	3.750	RUN
Y/D?		RUN
	.480	RUN
Q=15.415		XEQ B
Y=3.704		RUN
H?		RUN
	.017	RUN
SC=0.004		RUN
E=2.499		RUN

5.2 Cálculo de tirantes normales.

5.2.1 Ecuaciones fundamentales

Considérese un canal por el cual circula un gasto Q que fluye a una velocidad V .



Se dice que el flujo es uniforme cuando la pendiente del canal y su área hidráulica; el tirante ' y ' y la velocidad media, no cambian conforme el agua avanza hacia aguas abajo. (ref. 5.6) Esto implica que tanto la pendiente del canal como la pendiente de la superficie del agua y la pendiente de la línea de energía son iguales, es decir:

$$s_f = s = s_0 \quad (5.2.1)$$

s_f = pendiente de energía o pendiente de fricción.

El tirante de agua que hace que se presente el flujo uniforme se conoce como tirante normal (y_n)

Para el cálculo del flujo uniforme suele emplearse la fórmula de Manning para pérdidas de fricción:

$$V = \frac{R^{2/3} s_f^{1/2}}{n} \quad (5.2.2)$$

donde

$$R = \text{radio hidráulico} = \frac{A}{P}$$

P = perímetro mojado

n = dimensión característica de la rugosidad del canal.

Para flujo normal, dado que $s_f = s_0$, la ecuación (5.2.2) puede escribirse así:

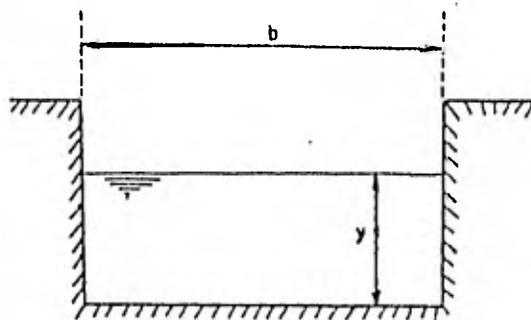
$$V = \frac{R^{2/3} s_0^{1/2}}{n} \quad (5.2.3)$$

Haciendo uso de la ecuación de continuidad

$Q = AV$:

$$\frac{Qn}{s_0^{1/2}} = AR^{2/3} \quad (5.2.4)$$

Esta expresión permite calcular cualquier característica de un flujo normal en un canal de forma cualquiera. Por ejemplo, para un canal rectangular ancho ($b \gg y$) y suponiendo que Q, n, y s_0 son conocidos:



$$A = by \quad (5.2.5)$$

$$R = \frac{by}{2y + b} ; \text{ como } b \gg y$$

$$R \doteq y \quad (5.2.6)$$

Sustituyendo (5.2.5) y (5.2.6) en (5.2.4):

$$\frac{Q n}{s_o^{1/2}} = by^{5/3}$$

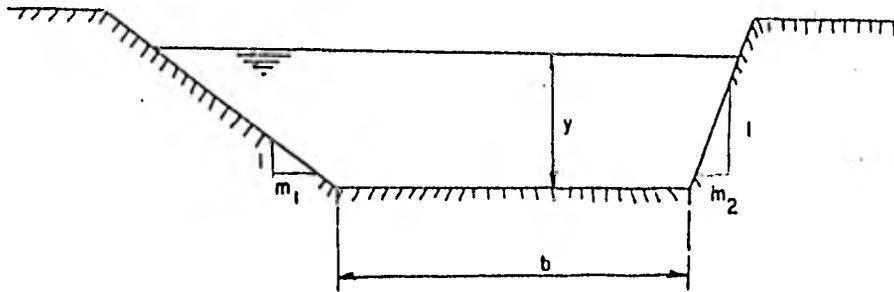
$$y_n = y_a = \left[\frac{Q n}{b s_o^{1/2}} \right]^{3/5} \quad (5.2.7)$$

y_a = tirante normal en un canal rectangular ancho.

Estudiaremos a continuación canales con expresiones más complicadas para describir su geometría.

5.2.2 Canales con sección trapezoidal

Considérese la siguiente sección:



Utilizaremos las siguientes expresiones:

$$A = by(1 + \beta) \quad (5.1.5)$$

$$\beta = \frac{my}{b}$$

Además,

$$P = b + 2y \sqrt{1 + m^2}$$

$$\gamma = \sqrt{1 + m^2} \frac{y}{b}$$

$$P = b(1 + 2\gamma) \quad (5.2.8)$$

Es decir,

$$R = \frac{by(1 + \beta)}{b(1 + 2\gamma)}$$

$$R = y \frac{1 + \beta}{1 + 2\gamma} \quad (5.2.9)$$

Sustituyendo (5.1.5) y (5.2.9) en (5.2.4) :

$$\frac{Q_n}{s_0^{1/2}} = by_n(1 + \beta_n) \left[y_n \frac{1 + \beta_n}{1 + 2\gamma_n} \right]^{2/3}$$

$$\frac{Q_n}{s_0^{1/2}} = y_n^{5/3} \frac{(1+\beta_n)^{5/3}}{(1+2\gamma_n)^{2/3}} \quad (5.2.10)$$

Esta será la ecuación básica que se utilizará para estudiar los siguientes casos:

Dados n y m , y además:

- Dados Q , s_0 y y_n , calcular b
- Dados b , s_0 y y_n , calcular Q
- Dados b , Q y y_n , calcular s_0
- Dados b , Q y s_0 , calcular y_n

5.2.2.1 Datos Q , s_0 y y_n , calcular b .

De la ecuación 5.2.10:

$$b = \frac{Q_n}{s_0^{1/2}} \frac{(1+2\gamma_n)^{2/3}}{[y_n(1+\beta)]^{5/3}}$$

$$\text{si } C = Q_n/s_0^{1/2} y_n^{5/3}$$

$$b = C \left[\frac{(1+2\gamma)^{0.4}}{1+\beta} \right]^{5/3} \quad (5.2.11)$$

Esta ecuación es implícita en b y es de la forma $x=f(x)$, por lo que puede emplearse el método de aproximaciones sucesivas (ref. 5.4) que generará una sucesión de valores $b_{i+1}=f(b_i)$ que converge a la solución.

Una primera aproximación puede hacerse suponiendo $m=0$ y $b \gg y$. (sección rectangular ancha)

En otras palabras, si $m = 0$ y $\frac{y_n}{b} \rightarrow 0$

$$\beta = \frac{y_n m}{b} = 0$$

$$\gamma = \sqrt{1+m^2} \frac{y_n}{b} = 0$$

y finalmente, de acuerdo a (5.2.11)

$b_1 = C$, es decir, el ancho de plantilla que tendría una sección rectangular ancha por la que circulara el mismo gasto Q con el mismo tirante y_n

5.2.2.2 Dados b , s_0 y y_n , calcular Q

Este cálculo es directo, ya que de la ecuación (5.2.10) puede despejarse

$$Q = \frac{y_n^{5/3} s_0^{1/2} b (1+\beta)^{5/3}}{n (1+2\gamma)^{2/3}} \quad (5.2.12)$$

5.2.2.3 Dados b , Q y y_n , calcular s_0

También s_0 puede despejarse de 5.2.10):

$$s_0 = \left[\frac{Q n (1+2\gamma)^{2/3}}{b y_n^{5/3} (1+\beta)^{5/3}} \right]^2 \quad (5.2.13)$$

5.2.2.4 Dados b , Q y s_0 , calcular y_n

La ecuación (5.2.10) puede escribirse así:

$$y_n = \left[\frac{Q_n}{bs_0^{1/\alpha}} \right]^{3/5} \frac{(1+2\delta)^{2/5}}{(1+\beta)} \quad (5.2.14)$$

sustituyendo (5.2.7) en (5.2.14) :

$$y_n = y_a \frac{(1+2\delta)^{2/5}}{(1+\beta)} \quad (5.2.15)$$

Nuevamente se tiene una ecuación implícita, esta vez en y_n , la cual es de la forma:

$$x = f(x)$$

Se puede emplear el método de aproximaciones sucesivas (ref. 5.4) que generará una sucesión de valores de y_n que convergerá a la solución.

Como primera aproximación puede usarse el valor de y_a . Resulta claro que este valor será una mejor aproximación en la medida en que el canal real se asemeje a un canal rectangular ancho. ($m=0$, $b \gg y$)

5.2.2.5 Programa YNTR

El programa YNTR está diseñado para resolver

cualquiera de los cuatro casos indicados en 5.2.2. Se emplean fundamentalmente las ecuaciones (5.2.11), (5.2.12), (5.2.13) y (5.2.15), y algunas otras de las indicadas en los incisos precedentes.

La estructura de este programa es análoga a la del programa YCT y son válidas las consideraciones hechas en 5.1.2.4 en lo que respecta a criterio de convergencia.

Al igual que en el programa YCT, cuando se ha obtenido el valor de la incógnita, es posible calcular otros valores que pueden ser de interés. En este caso, estos valores son V (velocidad), y E (energía específica).

Es conveniente resaltar que en el caso de que la incógnita sea la plantilla 'b', puede ocurrir que no exista solución con sentido físico a la ecuación (5.2.11). En este caso, el cálculo correspondiente será sumamente largo y el usuario deberá detener la ejecución en forma externa, por medio de la tecla (R/S).

5.2.2.5.3 Listado del programa.

01*LBL *YHTR*
 02 SF 27
 03 2.1
 04 STO 00
 05 *H*
 06 XEQ 00
 07 *H*
 08 XEQ 00
 09 *b*
 10 XEQ 00
 11 *Q*
 12 XEQ 00
 13 *S0*
 14 XEQ 00
 15 RCL 06
 16 SORT
 17 STO 00
 18 *YH*
 19 XEQ 00
 20 GTO IND 01
 21*LBL 00
 22 *t?*
 23 PROMPT
 24 STO IND 00
 25 RCL 00
 26 FC?C 22
 27 STO 01
 28 ISG 00
 29 RTH
 30*LBL 04
 31 RCL 07
 32 .6
 33 1/X
 34 Y1X
 35 STO 04
 36 XEQ 01
 37 STO 04
 38*LBL 00
 39 SF 04
 40 XEQ 02
 41 RCL 07
 42 /
 43 -.6
 44 1/X
 45 Y1X
 46 X<> 04
 47 STO 01
 48 XEQ 01
 49 STO 04
 50 RCL 01
 51 -
 52 RCL 04
 53 /
 54 RND
 55 X#0?

58 GTO 07
 60*LBL 05
 61 SF 04
 62 XEQ 02
 63 RCL 07
 64 /
 65 .6
 66 1/X
 67 Y1X
 68 FC?C 03
 69 RTH
 70 STO 05
 71 XEQ 01
 72 1/X
 73 *Q*
 74 STO 05
 75 GTO 03
 76*LBL 06
 77 SF 03
 78 XEQ 05
 79 1/X
 80 STO 06
 81 XEQ 01
 82 X12
 83 *S0*
 84 STO 06
 85 GTO 03
 86*LBL 07
 87 XEQ 01
 88 .6
 89 Y1X
 90 STO 03
 91 STO 07
 92*LBL 02
 93 RCL 03
 94 X12
 95 1
 96 +
 97 SUPT
 98 ST+ X
 99 RCL 07
 100 *
 101 RCL 04
 102 /
 103 1
 104 +
 105 .4
 106 Y1X
 107 RCL 07
 108 RCL 03
 109 *
 110 RCL 04
 111 /
 112 1
 113 +
 114 GTO 00

117 RTH
 118 RCL 03
 119 +
 120 X<> 07
 121 RCL 07
 122 -
 123 RCL 07
 124 /
 125 RND
 126 X#0?
 127 GTO 02
 128 RCL 07
 129 *YH*
 130*LBL 03
 131 *t=*
 132 ARCL X
 133 PROMPT
 134 RTH
 135*LBL A
 136 RCL 05
 137 RCL 07
 138 /
 139 RCL 00
 140 /
 141 RCL 04
 142 /
 143 *Y*
 144 XEQ 03
 145 X12
 146 19.62
 147 /
 148 RCL 07
 149 +
 150 *E*
 151 GTO 03
 152*LBL 01
 153 RCL 05
 154 RCL 02
 155 *
 156 RCL 04
 157 /
 158 RCL 06
 159 /
 160 END

5.2.2.5.4 Ejemplos resueltos.

a) Calcular el tirante normal que se presenta en un canal de sección trapecial con ancho de plantilla $b = 5$ m. y taludes desiguales: $m_1 = 1.5$ y $m_2 = 1.$; el gasto conducido es de $10 \text{ m}^3/\text{s}$ y la pendiente del canal es $5/1000$. Calcular también la velocidad y energía específica. ($n = 0.015$)

$$m = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) = 1.25$$

	FIX 3 XEQ "YHTF"	S0?	
N?	.015 RUN	YN?	.605 RUN
K?	1.253 RUN	YN=0.592	RUN
b?	5.000 RUN	V=2.942	XEQ R
Q?	10.000 RUN	E=1.033	RUN

b) Un canal rectangular de cemento pulido, ($n = 0.011$) y ancho de plantilla $b = 2$ m. tiene una pendiente $s_0 = 0.000126$. Calcular el gasto que conduce para un tirante $y_n = 1.5$ m. (ref. 5.1)

	FIX 3 XEQ "YHTF"
N?	.011 RUN
K?	0.000 RUN
b?	2.000 RUN
Q?	RUN
S0?	.000126 RUN
YN?	1.500 RUN

c) Calcular la plantilla que debe tener un canal trapecial con taludes 3:1, para que circule un gasto de $6 \text{ m}^3/\text{s}$ con un tirante de 1 m. El canal tiene una pendiente de 0.001 y esta revestido de concreto pulido - - - (n 0.015). Calcular la velocidad y la energía específica.

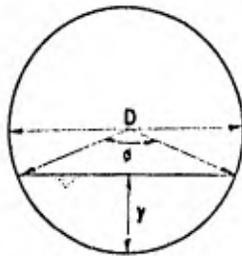
```

                                FIX 4
                                XEQ "YNTF"
N?                               .0150   RUN
K?                               3.0000   RUN
b?                               RUN
Q?                               6.0000   RUN
S0?                              .0010   RUN
YN?                              1.0000   RUN
b=1.1987
                                XEQ A
V=1.4291
                                RUN
E=1.1041

```

5.2.3 Canales con sección circular.

Considérese la siguiente sección:



Emplearemos las siguientes expresiones, que ya se habían presentado:

$$\phi = 2 \operatorname{ang} \cos (1 - 2y/D) \quad (5.1.23)$$

$$A = D^2 (\phi - \operatorname{sen}\phi) / 8 \quad (5.1.24)$$

$$y/D = (1 - \cos \frac{\phi}{2}) / 2 \quad (5.1.26)$$

Además, puede demostrarse que el perímetro mojado tiene la siguiente expresión:

$$P = D\phi/2 \quad (5.2.16)$$

El radio hidráulico, R, es:

$$R = \frac{A}{P} = \frac{D(\phi - \operatorname{sen}\phi)}{4\phi} \quad (5.2.17)$$

Sustituyendo (5.1.24) y (5.2.17) en (5.2.4) :

$$\frac{Q n}{s_0^{1/2}} = \frac{D^2}{8} (\phi - \text{sen} \phi) \left[\frac{D(\phi - \text{sen} \phi)}{4\phi} \right]^{2/3}$$

$$\frac{Q n}{s_0^{1/2}} = \left[\frac{D^8}{8192} \frac{(\phi - \text{sen} \phi)^5}{\phi^2} \right]^{1/3}$$

$$\frac{Q n}{s_0^{1/2}} \left[\frac{8192}{D^8} \right]^{1/3} = \left[\frac{(\phi - \text{sen} \phi)^5}{\phi^2} \right]^{1/3}$$

Esta será la ecuación básica que emplearemos para estudiar los siguientes casos:

Dado el valor de la rugosidad n , y también:

- Dados Q , D , y s_0 , calcular y_n
- Dados Q , s_0 y y_n/D , calcular D
- Dados s_0 , y_n/D , y D , calcular Q
- Dados y_n/D , D , y Q , calcular s_0

Debe hacerse la aclaración de que la fórmula de Manning, que es la empleada en este desarrollo, no explica suficientemente bien el fenómeno del tirante normal en canales con sección circular, como lo indica Chow en la ref. 5.10. Sin embargo, en la práctica es usual determinar dicho tirante con la fórmula antes mencionada. El lector debe tener presente lo anterior en sus cálculos.

5.2.3.1 Dados Q , D , y s_0 , calcular y_n .

La ecuación (5.2.18) se cumple si $y = y_n$, lo que implica que $\varphi = \varphi_n$. Puede plantearse lo siguiente:

$$K = \frac{Q n}{s_0^{1/2}} \left[\frac{8192}{D^8} \right]^{1/3}$$

$$\frac{(\varphi_n - \text{sen} \varphi_n)^5}{\varphi_n^2} - K = 0 \quad (5.2.19)$$

Puede notarse que la solución analítica de esta ecuación -- puede resultar muy complicada, por lo que es más adecuada -- una solución numérica. Para ésto, proponemos emplear el método de Newton-Raphson, mencionado en 5.1, con la siguiente función:

$$f(\varphi) = \left[\frac{(\varphi - \text{sen} \varphi)^5}{\varphi^2} \right]^{1/3} - K = 0$$

Si $f(\varphi) = 0$, entonces $\varphi = \varphi_n$ y utilizando la ecuación 5.1.26) puede obtenerse fácilmente y_n .

Para usar el método de Newton-Raphson requerimos de una expresión para $f'(\varphi)$:

$$f'(\varphi) = \frac{\varphi^{2/3} \cdot 5/3 (\varphi - \text{sen} \varphi)^{2/3} (1 - \cos \varphi)}{\varphi^{4/3}} - \dots$$

$$\dots = \frac{(\varphi - \text{sen} \varphi)^{5/3} \cdot 2/3 \varphi^{-1/3}}{\varphi^{4/3}}$$

$$f'(\phi) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\text{sen}\phi}{\rho}\right)^{2/3} (3 - 5\cos\phi + 2 \frac{\text{sen}\phi}{\rho})$$

Con las expresiones de $f(\phi)$ y $f'(\phi)$ que se han expuesto, es posible plantear la ecuación de recurrencia adecuada, que aplicada reiteradamente, conducirá a la solución.

Para la selección de un valor inicial, y empleando un criterio análogo al indicado en 5.1.3.1, puede utilizarse la siguiente expresión:

$$(y/D)_1 = 0.2875 K^{0.55} \quad (5.2.21)$$

(La precisión de esta aproximación puede observarse en la gráfica 5.3)

En estas condiciones, la primera aproximación para ϕ será :

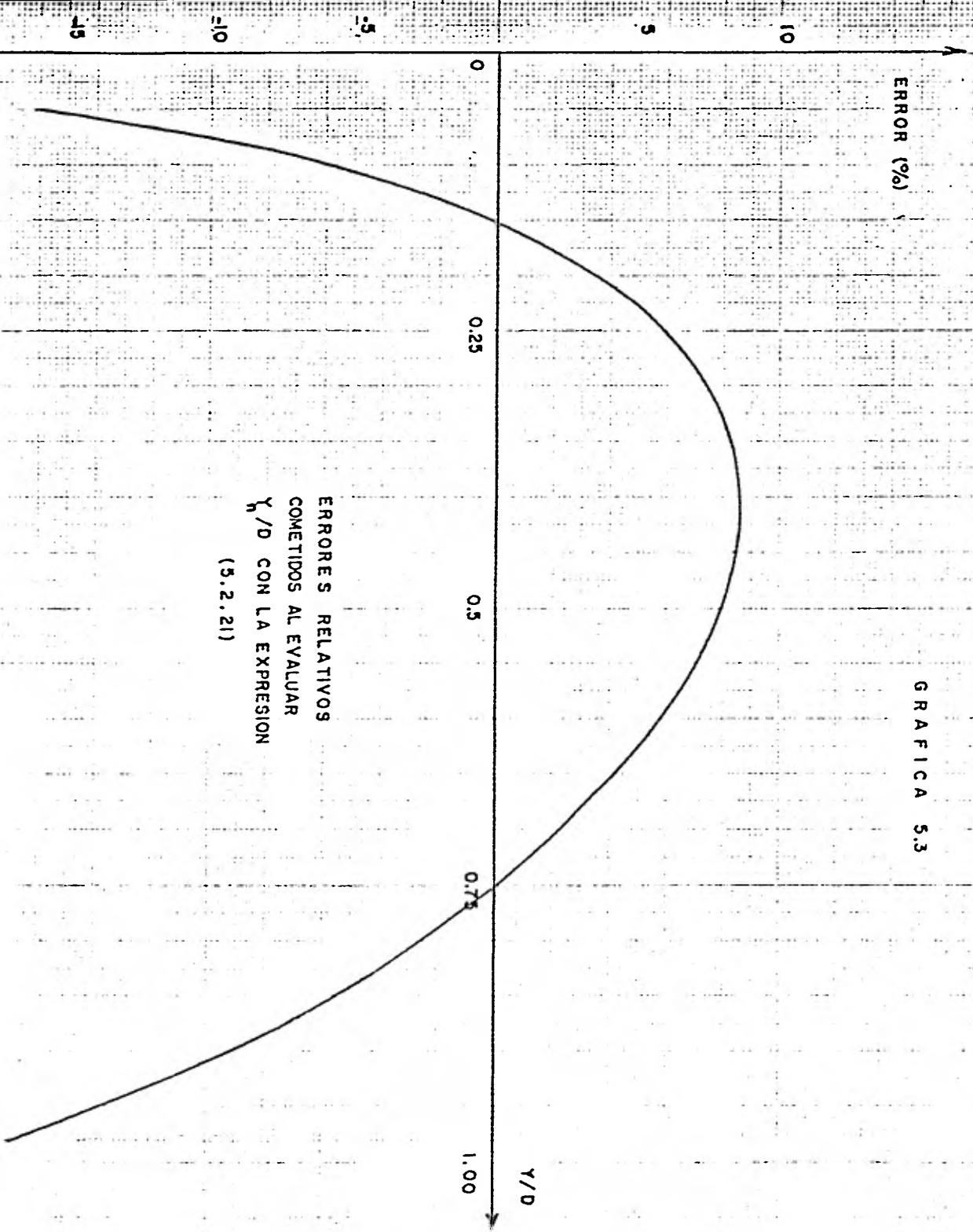
$$\phi_1 = 2 \text{ ang } \cos (1 - 2(0.2875 K^{0.55}))$$

5.2.3.2 Dados Q , s_0 , y y_n/D , calcular D .

Considerando que para obtener el valor de ϕ_n con la ecuación (5.1.2.3) es suficiente conocer y_n/D , el valor del diámetro puede despojarse directamente de la ecuación (5.2.18) :

ERROR (%)

GRAFICA 5.3



ERRORES RELATIVOS
COMETIDOS AL EVALUAR
 γ/D CON LA EXPRESION
(5.2.21)

$$D = \left[\frac{Q n}{s_0^{1/2}} \frac{8192 \varphi_n^2}{(\varphi_n - \text{sen} \varphi_n)^5} \right]^{1/8} \quad (5.2.22)$$

5.2.3.3 Dados s_0 , y_n/D , y D , calcular Q .

Después de calcular φ_n con la ecuación - - (5.1.23), el cálculo de Q es directo mediante (5.2.18) :

$$Q = \left[\frac{(\varphi_n - \text{sen} \varphi_n)^5}{\varphi_n^2} \frac{D^8}{8192} \right]^{1/3} \frac{s_0^{1/2}}{n} \quad (5.2.23)$$

5.2.3.4 Dados y_n/D , D , y Q , calcular s_0 .

De (5.2.18) :

$$s_0 = (Qn)^2 \left[\frac{(\varphi_n - \text{sen} \varphi_n)^5}{\varphi_n^2} \frac{D^8}{8192} \right]^{-2/3} \quad (5.2.24)$$

Conocido y_n/D , puede obtenerse φ_n y el cálculo de s_0 es directo.

5.2.3.5 Programa YNC

Este programa está diseñado para solucionar los cuatro casos indicados en 5.2.3, con base en las ecuaciones (5.2.20) a (5.2.24) y las ecuaciones geométricas del

Debido a la forma de las ecuaciones empleadas, el uso de este programa está limitado a valores de $y_n \geq 0.02 D$. Otros valores de y_n , o combinaciones de variables que conduzcan a esta situación, pueden provocar fallas en el programa.

Puede demostrarse que para valores de K superiores a 2π , existen dos soluciones reales a la ecuación (5.2.19). Aunque en estas condiciones el flujo puede ser inestable, y en general deberá evitarse esta situación en el diseño, el programa YNC calcula las dos soluciones cuando procede. (el valor de y_n/D asociado a $K = 2\pi$ es 0.8196, y el valor máximo que puede tomar K para que se conserve el funcionamiento como canal es 6.7589)

En este programa existen criterios de convergencia basados en el concepto de tolerancia relativa sobre la variable ϕ . Es decir, que el cálculo de ϕ_n se da por terminado cuando ocurre que :

$$\left| \frac{\phi_{i-1} - \phi_i}{\phi_i} \right| < 10^{-k}$$

donde k es el número de decimales seleccionado por el usuario con la instrucción (FIX).

5.2.3.5.3 Listado del programa.

175

01*LBL *YNO*	59 SF 02	117 XEQ 12
02 OF 25	60 XEQ 01	118 FS?C 01
03 SF 27	61*LBL 09	119 GTO 07
04 RAD	62 XEQ 10	120 SF 01
05 2.1	63 RCL 00	121 FI
06 STO 01	64 ST- 07	122 STO 01
07 11	65 /	123 ST+ 01
08 STO 00	66 RCL 01	124 GTO 09
09 *Q*	67 SIN	125*LBL 00
10 XEQ 00	68 LASTX	126 1
11 *D*	69 /	127 STO IND 00
12 XEQ 00	70 STO 04	128 RCL 04
13 *Y/D*	71 -	129 XEQ 01
14 XEQ 00	72 3	130 XEQ 05
15 *H*	73 1/X	131 RTH
16 XEQ 00	74 Y1X	132*LBL 12
17 *SQ*	75 X12	133 *Y*
18 XEQ 00	76 3	134*LBL 07
19 GTO IND 00	77 /	135 *F=*
20*LBL 00	78 3	136 ARCL X
21 *F?*	79 RCL 01	137 RVIEW
22 PROMPT	80 COS	138 RTH
23 STO IND 01	81 5	139*LBL 01
24 RCL 01	82 *	140 2
25 FC?C 22	83 -	141 *
26 STO 02	84 RCL 04	142 1
27 ISG 01	85 2	143 -
28 RTH	86 *	144 CHS
29*LBL 02	87 +	145 ACOS
30 XEQ 00	88 *	146 ST+ X
31 1/X	89 ST/ 07	147 STO 01
32 RCL 07	90 RCL 07	148 FS?C 02
33 *	91 ST- 01	149 RTH
34 STO 02	92 RCL 01	150*LBL 10
35 *Q*	93 /	151 RCL 01
36 GTO 07	94 RND	152 ENTER↑
37*LBL 06	95 VIEW X	153 SIN
38 XEQ 00	96 X*0?	154 -
39 RCL 07	97 GTO 09	155 5
40 /	98 RCL 01	156 Y1X
41 X12	99 2	157 RCL 01
42 *SQ*	100 /	158 X12
43 GTO 07	101 COS	159 /
44*LBL 03	102 1	160 3
45 XEQ 00	103 -	161 1/X
46 RCL 07	104 CHS	162 Y1X
47 /	105 2	163 STO 07
48 .375	106 /	164 RTH
49 Y1X	107 STO 04	165*LBL 0
50 STO 03	108 RCL 03	166*LBL 11
51 *D*	109 *	167 RCL 02
52 GTO 07	110 .8136	168 RCL 04
53*LBL 04	111 RCL 03	169 SF 02
54 XEQ 05	112 *	170 XEQ 01
55 .55	113 X<Y	171 ENTER↑
56 0.0	114 0.0	

175 8
176 +
177 RCL 03
178 X12
179 /
180 *V*
181 GTO 07
182 LBL 05
183 RCL 02
184 RCL 05
185 +
186 RCL 06
187 SQRT
188 /
189 RCL 03
190 8
191 Y1X
192 8192
193 /
194 3
195 1/X
196 Y1X
197 /
198 STO 00
199 .END.

5.2.3.5.4 Ejemplos resueltos.

a) Calcular el tirante normal que se presenta en un canal circular de 0.914 m. de diámetro y con una pendiente de 0.0016, cuando circula un gasto de 0.566 m³/s. Considerar n 0.015. Calcular también la velocidad del agua en estas condiciones. (ref. 5.10)

			H?	
	FIX 3			.015 RUN
	XEQ "YHC"		S0?	
Q?	.566	RUN		.0016 RUN
D?				0.013
	.914	RUN	Y=0.657	0.000
Y/D?				XEQ B
		RUN	V=1.122	

b) Calcular el tirante normal que ocurre al fluir un gasto de 0.19 m³/s por un conducto circular de 1 m. de diámetro, trabajando como canal. La pendiente del conducto es de 0.0001 y su rugosidad, n 0.017.

			S0?	
	FIX 4			.0001 RUN
	XEQ "YHC"			-0.0481
Q?	.1900	RUN		-0.0097
D?				-0.0004
	1.0000	RUN	Y=0.8567	0.0000
Y/D?				0.0576
		RUN		0.0002
N?	.0170	RUN	Y=0.8567=0.9327	0.0000

Puede observarse que existen dos posibles valores de y_n que satisfacen las ecuaciones correspondientes.

c) Calcular la pendiente que debe tener un canal circular de 3 m. de diámetro para que circule un gasto de $4 \text{ m}^3/\text{s}$ con una relación y_n/D 0.7. Considerar n 0.025 y calcular la velocidad del agua.

```

                                FIX 3
                                XEQ "YHC"
Q?
    4.000  RUN
D?
    3.000  RUN
Y/D?
    .700  RUN
N?
    .025  RUN
S0?
                                RUN
S0=4.190E-4
                                XEQ B
Y=0.757

```

d) ¿ Qué gasto, a régimen normal, fluirá -- por un canal circular con diámetro de 3 m., n 0.025 y relación y_n/D 0.7, si la pendiente es de 4.19×10^{-4} ?

```

                                FIX 3
                                XEQ "YHC"
Q?
                                RUN
D?
    3.000  RUN
Y/D?
    .700  RUN
N?
    .025  RUN
S0?
    4.19-04  RUN
Q=4.000

```

5.3 Cálculo de perfiles longitudinales.

Se conoce como flujo no uniforme a áquel en que la velocidad media del fluido cambia de una sección a otra, en el conducto. Este flujo ocurre muy frecuentemente en la práctica, ya que en general, existen secciones de control que obligan al agua a apartarse del flujo uniforme, el cual ocurriría si no existieran dichas secciones.

Para el cálculo numérico del flujo no uniforme, pueden considerarse dos posibles casos y para ambos se plantearán las ecuaciones hidrodinámicas de equilibrio. En las figuras 5.3.1 y 5.3.3 se muestran los tipos de perfiles para los cuales es válido este análisis.

5.3.1 Ecuaciones fundamentales

a) $s_0 > s_c$ (Flujo supercrítico)

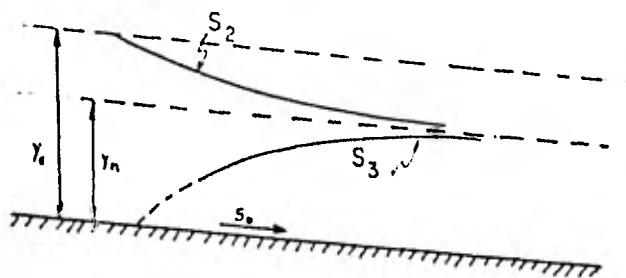
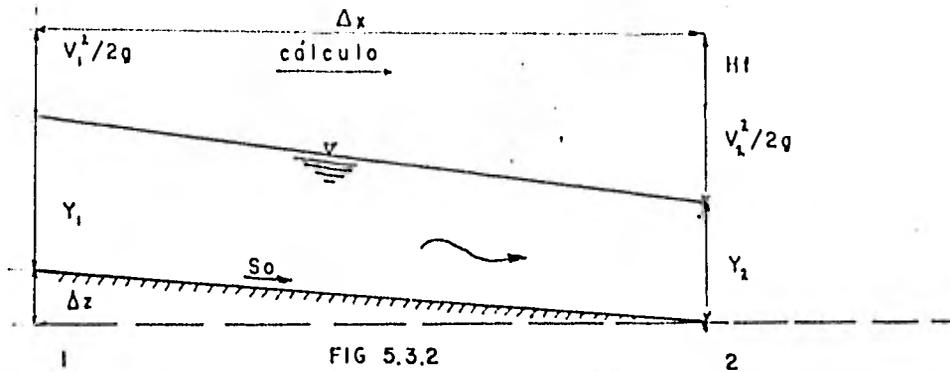


FIG 5.3.1

En este caso, la sección de control se encuentra aguas arriba, por lo que el cálculo debe efectuarse hacia aguas abajo.

Considérese la siguiente figura:



Puede plantearse la siguiente igualdad:

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \Delta z = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + H_f \quad (5.3.1)$$

donde:

V_1 = velocidad media del agua en la sección 1

V_2 = velocidad media del agua en la sección 2

H_f = pérdidas de energía debidas a la fricción

Además, si $s_0 = \text{cte.}$ dentro del intervalo Δx , lo cual sucede en la mayoría de los canales artificiales, $\Delta z = s_0 \Delta x$.

La pérdida de energía por fricción, H_f , -- suele evaluarse como $H_f = s_f \Delta x$, donde s_f se conoce como -- pendiente de fricción, y para fines de cálculo se considera como la pendiente de fricción promedio entre las secciones 1 y 2. Estas pendientes a su vez pueden valuarse con la fórmula de Manning: (ref. 5.1)

$$s_f = \left[\frac{V_n}{1.49 r^{2/3}} \right]^2$$

donde

n = coeficiente de fricción de Manning

r = radio hidráulico de la sección

La ecuación (5.3.1) puede escribirse así:

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta x (s_f - s_0)$$

$$E_1 - E_2 - \Delta x (s_f - s_0) = 0$$

$$E_1 - E_2 - \Delta x \left(\frac{s_{f1} + s_{f2}}{2} - s_0 \right) = 0 \quad (5.3.2)$$

siendo E_1 y E_2 las energías específicas en las secciones 1 y 2, y s_f la pendiente de fricción promedio entre las dos secciones.

b) $s_0 < s_c$ (flujo subcrítico)

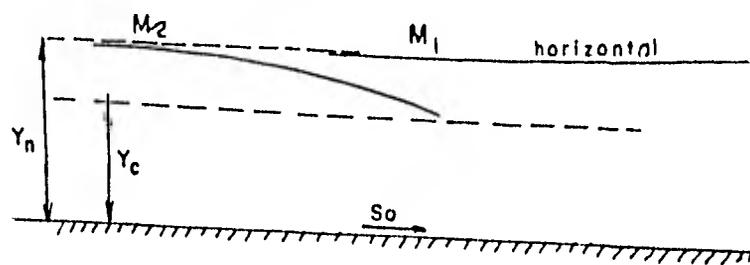
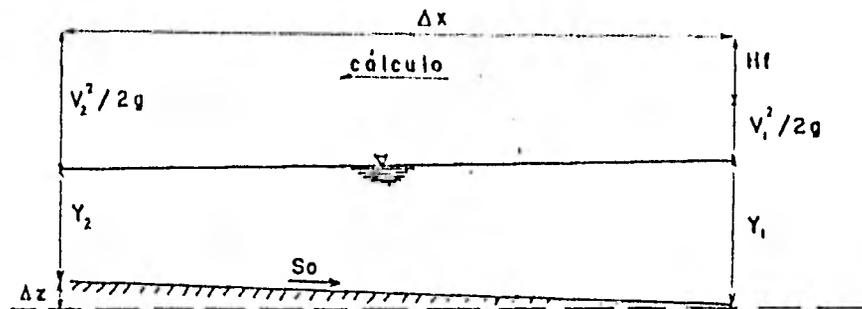


FIG 5.3.3

En este caso, la sección de control se ubica aguas abajo. Entonces, el cálculo debe hacerse hacia aguas arriba.



Designando con el subíndice 1 a la sección cuyas características se conocen:

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + Hf = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta z$$

Agrupando términos:

$$E_1 - E_2 + \Delta x \left(\frac{s_{f1} + s_{f2}}{2} - s_0 \right) = 0 \quad (5.3.3)$$

En el caso de que se fije Δx y se desee -- calcular el tirante que se forma a esa distancia de la sección cuyas características se conocen, es necesario recurrir a un método iterativo, ya que la incógnita 'y' aparece involucrada en muchos términos.

Al observar las ecuaciones (5.3.2) y (5.3.3) se nota que sólo difieren en el signo del término $\Delta x(s_f - s_0)$, por lo que se puede recurrir al artificio de manejar una sola ecuación, por ejemplo la (5.3.3), y luego

asignar a Δx un signo adecuado dependiendo del caso en estudio.

El método iterativo que se propone, es el llamado "Método de la Secante" (ref. 5.3), que consiste en generar una serie de valores de la variable independiente, de tal suerte que el nuevo valor se encuentre más cerca de la solución, y de acuerdo a la siguiente función de recurrencia:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i) \quad (5.3.4)$$

En nuestro caso:

$$f(y_2) = E_1 - E_2 + \Delta x \left(\frac{s_{f1} + s_{f2}}{2} - s_0 \right) = 0$$

por lo que la ecuación (5.3.4) toma la forma siguiente:

$$y_{2i+1} = y_{2i} - \frac{y_{2i} - y_{2i-1}}{f(y_{2i}) - f(y_{2i-1})} f(y_{2i})$$

en este caso, la incógnita es y_2 , que se ha definido como el tirante en la sección cuyas propiedades se desconocen. El subíndice i se refiere al número de iteración de que se trate.

Puede notarse que para iniciar el cálculo se requiere información de dos puntos. Los valores que se han considerado adecuados para iniciar son:

a) y_1

El último tirante conocido no estará muy lejos de y_2 si Δx es suficientemente pequeño.

b) y_n (tirante normal)

Puede demostrarse que el tirante en flujo variado tiende asintóticamente al valor y_n . Esto significa que y_n constituye, en cualquier caso, una cota para y_2 .

El uso de estos tirantes como valores iniciales garantiza además, que se llegará siempre a una solución, ya que siempre ocurre que y_2 se encuentra localizado entre y_1 y y_n .

5.3.2 Programa YVAR.

El programa que se ha preparado resuelve, con el Método de la Secante, los valores de y_2 en canales con secciones trapecial, triangular, rectangular y circular, a partir de características hidráulicas conocidas en alguna sección.

Los siguientes valores deben ser conocidos:

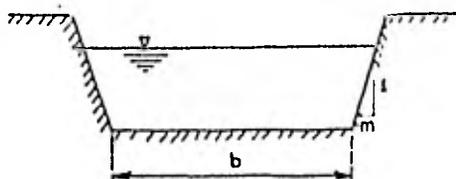
Q = gasto que fluye en el canal, supuesto constante.

s_0 = pendiente geométrica del canal.

y_n = tirante normal asociado al flujo en cuestión.

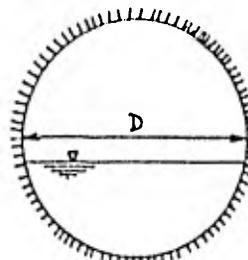
n = coeficiente de rugosidad de Manning.

Además, se definen las siguientes variables:



caso triangular: $m \neq 0$
 $b = 0$

caso rectangular: $m = 0$
 $b \neq 0$



Este programa está diseñado para calcular el valor del tirante situado a una distancia Δx de otra, cuyo tirante es conocido. Además, es posible calcular los valores de V , E y s_f en las secciones cuyos tirantes se conocen de antemano, o han sido calculados por el programa.

Presenta la ventaja de que los cálculos pueden realizarse en cadena y con intervalos x variables. El funcionamiento de YVAR es el siguiente: dado el tirante en la sección 1, y los datos ya indicados, se calcula el tirante en la sección 2 situada a Δx de 1; para encadenar el cálculo, el tirante y_2 calculado se hace automáticamente igual a y_1 en la sección siguiente. Para el cálculo de esta siguiente sección, es posible variar los valores de Δx y s_0 , con lo cual las secciones de cálculo pueden estar situadas a intervalos desiguales. De no haber cambios para la siguiente sección, no es necesario definir de nueva cuenta

ninguna variable, y el cálculo continúa con solo presionar una tecla.

Para situar las secciones, se hace uso de la variable X , cuyo origen puede coincidir con la sección inicial. Esta variable crece en la dirección del cálculo. Entonces, si $X_1 = 0$

$$X_2 = \Delta x_1$$

$$X_3 = \Delta x_1 + \Delta x_2, \text{ etc.}$$

Si por algún motivo se cometiera un error, o el cálculo se interrumpiera, es posible reiniciar el cálculo a partir de cualquier sección conocida, definiendo -- su posición con la variable X , y proporcionando el valor -- del tirante que ahí se presente.

Para interrumpir el cálculo iterativo de la variable y_2 , se ha empleado un criterio análogo al presentado en el inciso 5.1.2.4.

Como se había indicado anteriormente, se maneja una sola expresión en lo que respecta al signo del -- término $\Delta x(s_f - s_o)$, y posteriormente se asigna a Δx un -- signo adecuado dependiendo del caso en estudio. Se ha tomado la siguiente convención:

- a) Caso supercrítico (cálculo hacia aguas abajo)
 $\Delta x > 0$. El valor del intervalo tendrá signo positivo.
- b) Caso subcrítico (cálculo hacia aguas arriba)
 $\Delta x < 0$. El valor del intervalo tendrá signo negativo.

5.3.2.2 Instructivo de usuario.

188

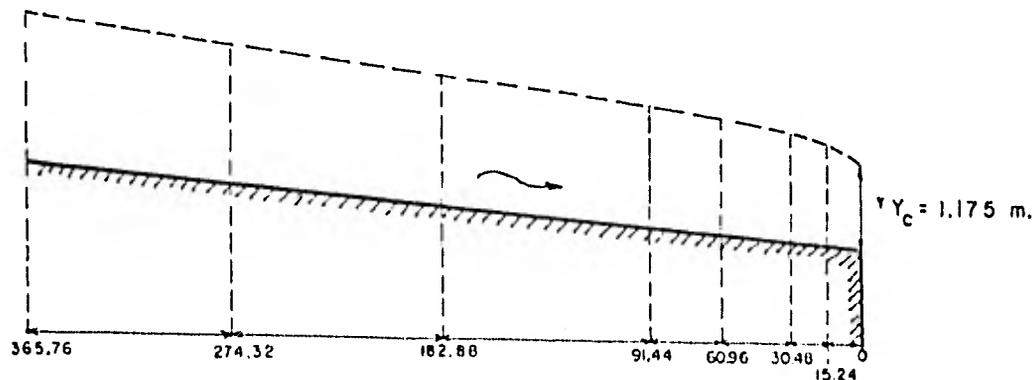
				SIZE: 017
PASO	INSTRUCCION	ENTRADA	TECLAS	SALIDA
1	Seleccionar No. de decimales		(FIX) (M)	
2	Iniciar		(RE) YLR	N?
3	Dar los valores de gasto y rugosi- dad	(Q)	(R/S)	N?
		(n)	(R/S)	C/P?
4	Definición geométrica de la sec- ción: C circular; P prismática			
4a	Sección circular	C	(R/S)	D?
	diámetro de la sección	(D)	(R/S)	ZN?
	Ir al paso 5			
4b	Sección prismática	P	(R/S)	N?
		(m)	(R/S)	b?
		(b)	(R/S)	ZN?
5	Dar valores de y_n , s_0 , X , x , y_1	(y_n)	(R/S)	SO?
	En caso de que estos valores ya ha- yan sido proporcionados una vez, y	(s_0)	(R/S)	X?
	no se debe cambiarlos, no es nece- sario volverlos a dar; cuando el	(X)	(R/S)	DX?
	programa pida alguno de ellos, has- ta oprimir (R/S). Cuando se haya	(ΔX)	(R/S)	Y1?
	cambiado el o los valores deseados, ir al paso 6. Recordar la conven- ción indicada para x .	(y_1)	(R/S)	0.000
6	Cálculo de y_2		[K]	$y(x) = (y_2)$
7	(opcional) Cálculo de V_2 , E_2 y sf_2		[N]	$V = (V)$
			(R/S)	$E = (E)$
			(L/S)	$S = (sf)$

5.3.2.3 Listado del programa.

01*LBL *YVAR*	59 XEQ 06	117 +
02 RAO	60 STO 03	118 RCL 04
03 SF 27	61 X<Y	119 +
04 *P?*	62 STO 10	120 X12
05 PROMPT	63 RCL 06	121 RCL 01
06 STO 02	64 X< 07	122 1/X
07 *N?*	65 STO 06	123 X12
08 PROMPT	66 XEQ 05	124 19.62
09 STO 04	67 X< 06	125 /
10 *C/P?*	68 STO 07	126 RCL 07
11 RDN	69*LBL 02	127 +
12 PROMPT	70 RCL 07	128 RTH
13 ASTO X	71 XEQ 05	129*LBL 05
14 *C*	72 RCL 15	130 RCL 07
15 ASTO Y	73 RCL 15	131 XEQ 00
16 AOFF	74 RCL 16	132 RCL 09
17 X=Y?	75 -	133 -
18 GTO 05	76 RCL 13	134 RCL Y
19 *N?*	77 RCL 14	135 RCL 10
20 PROMPT	78 -	136 +
21 STO 11	79 /	137 2
22 *b?*	80 RCL 13	138 /
23 PROMPT	81 +	139 CHS
24 STO 12	82 -	140 RCL 05
25 6	83 X< 07	141 +
26 STO 03	84 RCL 07	142 RCL 03
27 GTO C	85 -	143 +
28*LBL 05	86 RCL 07	144 -
29 *D?*	87 /	145 X< 13
30 PROMPT	88 RND	146 STO 14
31 STO 11	89 PSE	147 RCL 07
32 7	90 X#0?	148 X< 15
33 STO 03	91 GTO 02	149 STO 16
34*LBL C	92 RCL 03	150 RCL 07
35 RCL 06	93 000	151 RTH
36 *YN?*	94 ST+ 00	152*LBL 04
37 PROMPT	95 *Y*	153 *F*
38 STO 06	96 ARCL 00	154 ARCL X
39 RCL 05	97 *F?*	155 PROMPT
40 *S0?*	98 RCL 07	156 RTH
41 PROMPT	99 GTO 04	157*LBL 6
42 STO 05	100*LBL 03	158 RCL 07
43 RCL 00	101 STO 01	159 SF 01
44 *X?*	102 XEQ IND 03	160 XEQ 00
45 PROMPT	103 RCL 01	161 *E*
46 STO 00	104 /	162 XEQ 04
47 RCL 03	105 3	163 X<Y
48 *DX?*	106 1/X	164 *S*
49 PROMPT	107 Y1X	165 GTO 04
50 STO 00	108 X12	166*LBL 06
51 RCL 07	109 RCL 02	167 X12
52 *Y1?*	110 ST/ 01	168 RCL 11
53 PROMPT	111 X<Y	169 +
54 STO 07	112 *V*	170 RCL 01
55 CLX	113 RCL 01	171 RCL 12

175 RCL 11
176 X12
177 1
178 +
179 SORT
180 2
181 *
182 *
183 RCL 12
184 +
185 RTH
186+LBL 07
187 2
188 *
189 RCL 11
190 /
191 CHS
192 1
193 +
194 ACOS
195 2
196 *
197 STO 12
198 ENTER
199 SIN
200 -
201 8
202 /
203 RCL 11
204 X12
205 *
206 X<> 01
207 RCL 12
208 RCL 11
209 *
210 2
211 /
212 .END.

b) Calcular el perfil longitudinal que se presenta en un canal con las siguientes características: $m = 1.5$; $b = 6.096$ m. La sección de control esta determinada por el tirante crítico que se forma al fin del conducto. El gasto que circula es de $28.317 \text{ m}^3/\text{s}$ y el tirante normal con las condiciones señaladas y para una pendiente de 0.001 es de 1.999 m. La rugosidad del canal es $n = 0.025$. Determinar tirantes a 15.24 m., 30.48 m., 60.96 m., 91.44 m., 182.88 m., 274.32 m., y 365.76 m. con respecto a la sección donde se forma el tirante crítico. (ref. 5.6) *



(*) Las cantidades que se presentan en este ejemplo no son exactas, ya que fue traducido del sistema inglés, que es el sistema empleado en la ref. 5.6

	FIX 3	
	XEQ -YVAP-	
Q?		
	20.317	RUN
H?	.025	RUN
C/P?		
P		RUN
H?	1.500	RUN
b?	6.096	RUN
YH?	1.999	RUN
S0?	.001	RUN
X?	0.000	RUN
DX?	-15.240	RUN
Y1?	1.175	RUN
		XEQ A
Y<15.240>=1.416		
		XEQ A
Y<30.480>=1.434		

		XEQ C
YH?		
		RUN
S0?		
		RUN
X?		
		RUN
DX?		
	-30.430	RUN
Y1?		
		XEQ A
Y<60.960>=1.572		
		XEQ A
Y<91.440>=1.632		
		XEQ C
YH?		
		RUN
S0?		
		RUN
X?		
		RUN
DX?		
	-91.440	RUN
Y1?		
		XEQ P
Y<182.880>=1.745		
		XEQ A
Y<274.320>=1.811		
		XEQ A
Y<365.760>=1.856		

5.4 Análisis de redes cerradas de tuberías

5.4.1 Introducción

Se conoce como red cerrada a "aquella en que los conductos que la componen se cierran formando circuitos" - (ref 5.7, p 352). El ejemplo más importante de estas redes es un sistema de distribución de agua potable. Para el diseño de estos sistemas es necesario conocer la manera en que el agua se distribuye por todos los tramos de la red, con el propósito de optimizar el uso de diámetros y conservar ciertas especificaciones reglamentarias referentes a presiones, rangos de velocidades, etc. El siguiente análisis y el programa presentado, sirven para determinar la distribución de gastos de una red, así como las pérdidas hidráulicas que ocurren en cada tramo, a partir de sus características físicas.

5.4.2 Ecuaciones fundamentales.

La solución se basa en dos tipos de ecuaciones:

a) Ecuación de nudo (Principio de continuidad)

Por razones de continuidad del flujo, en cualquier nudo j de la red, debe satisfacerse que: (ver fig. 5.4.1)

$$\sum_{i=1}^n Q_i + q_j = 0 \quad (5.4.1)$$

donde

Q_i = Gasto que fluye en el tramo i , considerado positivo si sale del nudo j y negativo si entra.

q_j = gasto que ingresa o sale de la red por el nudo j .

(misma convención de signos)

n = Número de tramos que llegan al nudo j

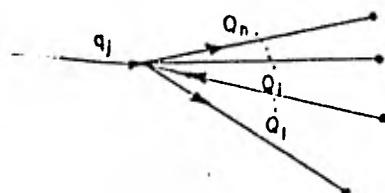


Fig. 5.4.1

Por ejemplo, considérese la siguiente red:

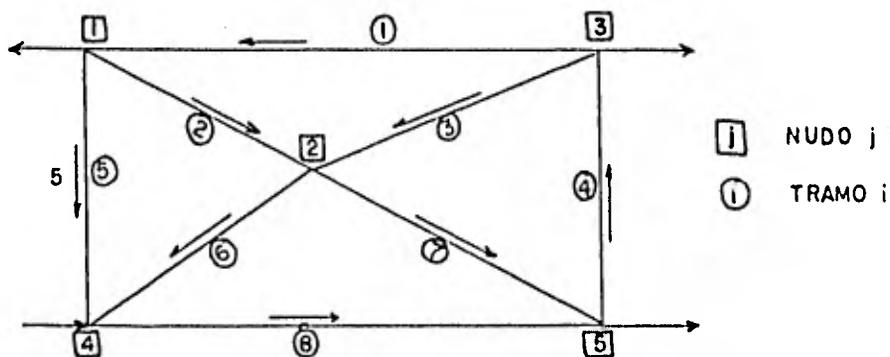


Fig. 5.4.2

La ecuación de continuidad para el nudo 3 es:

$$Q_1 + Q_3 - Q_4 + q_3 = 0 \quad \text{y } q_3 \text{ es conocido}$$

b) Ecuación de circuito (Principio de la conservación de la energía)

En cada tramo existen pérdidas por fricción, que

puedan calcularse con cualesquiera de las fórmulas usuales (ref. 5.7 pp 293-294)

La velocidad v_1 en cada tramo puede expresarse - para tuberías circulares como:

$$v_1 = \frac{L_1 Q_1}{\pi d_1^2}$$

donde d_1 es el diámetro del iésimo tramo.

Si se sustituye esta expresión en cualesquiera de las fórmulas de fricción, se llegará una expresión de la forma:

$$hf_1 = a_1 Q_1^N \quad (5.4.2)$$

donde

a_1 es una constante (*) del tramo i

N es un exponente

Por ejemplo, si se usa la fórmula de Hazen-Williams para tuberías de sección circular:

$$hf = \frac{Q^{1.852} L}{(0.279 C d^{2.63})^{1.852}} \quad (\text{Sistema MKS})$$

entonces

$$a_1 = \frac{L_1}{(0.279 C_1 d_1^{2.63})^{1.852}}$$

(*) Esto no es estricto en el caso de la de Darcy-Weisbach, donde $a_1 = f(v)$

Con base en las ecuaciones (5.4.1) y (5.4.2) es posible resolver iterativamente una red formada por uno o más circuitos.

Uno de los métodos más empleados para resolver el problema es el de Cross (ref. 5.7) que se basa en calcular los gastos de cada tramo a partir de una estimación inicial, suponiendo conocidos los gastos $q_1, q_2 \dots q_n$, que entran o salen en cada nudo. La primera estimación del gasto debe cumplir, en cada nudo, con la ecuación 5.4.1.

Por otro lado, las pérdidas de energía entre dos puntos de la red, independientemente del recorrido que se siga para llegar de uno a otro, son la suma algebraica de las pérdidas en cada tramo. Se establece la convención de que las pérdidas en un tramo tienen signo positivo si la dirección del gasto en ese tramo coincide con la dirección del recorrido.

Si se efectúa un recorrido en un circuito, saliendo y llegando al mismo punto, resulta evidente que:

$$\sum_{i=1}^{NT} h_i = 0 \quad (5.4.3)$$

NT Número de tramos que forman al circuito

Este recorrido debe ser siempre con el mismo sentido, por ejemplo, según las manecillas del reloj. La ecuación

ción 5.4.3 es la ecuación del circuito y es válida para todos los circuitos de la red.

5.4.3 Método de Cross

Para la solución del problema, dada la primera a aproximación del gasto, (que cumple con 5.4.1), se calcula una corrección ΔQ , que abarca a todos los tramos del mismo circuito. Al recorrer los NT tramos del circuito en el sentido de las manecillas del reloj, se tiene que:

$$h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_{NT} = 0 \quad (\text{de acuerdo a 5.4.3})$$

Sustituyendo (5.4.2):

$$a_1 (Q_1 + \Delta Q)^N + a_2 (Q_2 + \Delta Q)^N + \dots + a_{NT} (Q_{NT} + \Delta Q)^N = 0 \quad (5.4.4)$$

Si la expresión 5.4.4 se desarrolla como binomios y se desprecian términos de orden superior, se tiene que:

$$\Delta Q = \frac{a_1 Q_1^N + a_2 Q_2^N + \dots + a_{NT} Q_{NT}^N}{N(a_1 Q_1^{N-1} + a_2 Q_2^{N-1} + \dots + a_{NT} Q_{NT}^{N-1})}$$

$$\Delta Q = \frac{\sum_{i=1}^{NT} (a_i Q_i^{N-1} Q_i)}{N \sum_{i=1}^{NT} (a_i Q_i^{N-1})} \quad (5.4.5)$$

El cálculo iterativo consiste en aplicar repetidamente la ecuación (5.4.5) a todos los circuitos de la red. Al aplicarla en uno de ellos, se consigue balancear el

circuito. Si la red consistiera en un solo circuito, este primer balanceo sería suficiente para solucionar el problema; sin embargo, en redes formadas por dos o más circuitos, los gastos en tramos comunes se ven alterados por correcciones debidas a los dos circuitos a que pertenecen. De esta forma, un circuito que ya se encontraba equilibrado se desequilibra debido a las correcciones que provienen de algún circuito vecino. Después de varias iteraciones, los valores de ΔQ van disminuyendo y los desequilibrios son cada vez menores. El cálculo iterativo se realiza hasta que se cumpla la ecuación (5.4.3), es decir, $\Delta Q \approx 0$ en todos los circuitos de la red.

Una vez conocidos los gastos en todos los tramos, el cálculo de las pérdidas de energía es directo mediante la ecuación (5.4.2)

5.4.4 Programa CROSS

Este programa está diseñado para calcular iterativamente por el método de Cross, los gastos que circulan en cada tramo de una red de tuberías formada por uno o varios circuitos. Cada circuito puede estar formado por un máximo de ocho tramos y el número de tramos NT, y de circuitos NC; que forman la red, sólo se encuentra limitado por la memoria disponible en la máquina. Para calcular las pérdidas por fricción, se utiliza la fórmula de Hazen-Williams.

Para resolver una red de tuberías haciendo uso de este programa es necesario realizar las siguientes actividades

des preliminares:

a) Dibújese un croquis de la red, anotando tanto la entrada como las salidas de agua en los puntos adecuados.

b) Identifíquense los circuitos y numérense, empezando por el 1. Numérense también los tramos, empezando por el 1.

c) Asígnese a cada circuito una convención de sentidos del gasto, de tal forma que el gasto que fluya en el sentido elegido será positivo y el gasto que fluya en el sentido contrario será negativo. Para elegir las convenciones de sentidos del gasto en cada circuito debe procurarse que, en la medida de lo posible, el gasto que fluye en un tramo común a dos circuitos, tenga el mismo signo en ambos circuitos.

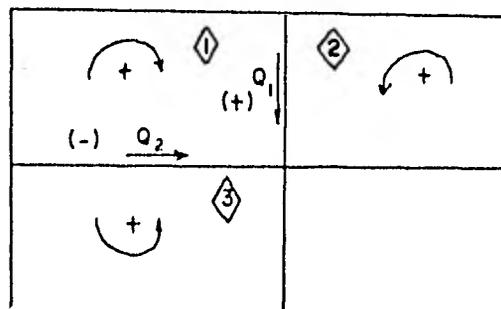


Fig. 5.4.3

Puede verse que el gasto Q_1 tiene signo positivo tanto para el circuito 1 como para el 3, y el gasto Q_2 tiene signo negativo en los circuitos 1 y 2.

Existen casos, como el de la fig 5.4.4 en que no es posible satisfacer esta condición en todos los circuitos:

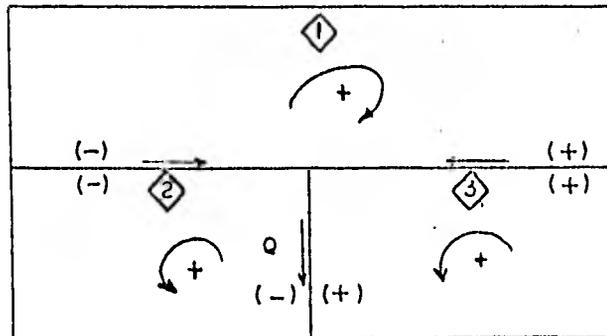


Fig. 5.4.4

El gasto Q aparentemente tiene doble signo: positivo en el circuito 3 y negativo en el circuito 2 .

En el programa CROSS los valores del gasto para cada tramo se encuentran almacenados una sola vez, aunque el tramo pertenezca a dos circuitos. Esto hace imposible definir el gasto con doble signo. Para resolver este problema, deberá hacerse saber a la máquina que en ciertos tramos existe dualidad de signos. Como datos, el programa requiere la definición de cada circuito, es decir, saber qué tramos lo forman. En el caso de circuitos en que no haya el problema de doble signo, la definición del circuito se hará proporcionando los números de los tramos conforme vayan siendo pedidos. En el caso de circuitos con tramo común con doble signo, uno de los dos se definirá de manera normal, y el valor del gasto se proporcionará de acuerdo a la convención de sentidos de este circuito, llamado circuito base; el otro circuito se definirá proporcionando con signo negativo el número de la tubería que es común con el --

circuito base. El gasto final será dado de acuerdo a la --
convención del circuito base.

Ejemplo:

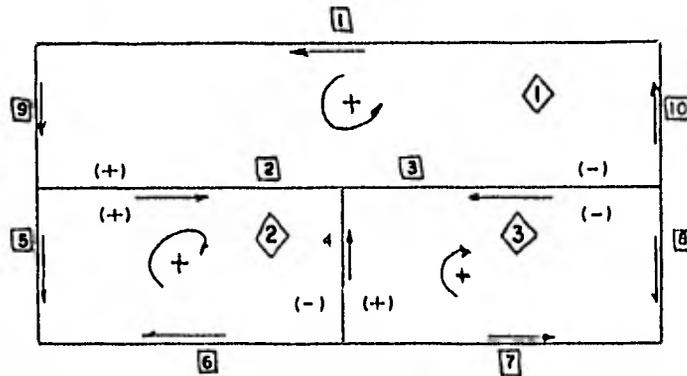


Fig. 5.4.5

En rectángulos se han encerrado los números de cada tramo,
y en círculos los de cada circuito.

Definición del circuito 1: tuberías 1 , 9 , 2 , 10 , 3
No existe dualidad de signo en
ningún tramo común (2 y 3)

Definición del circuito 2: tuberías 2 , 5 , 6 , 4
Es el circuito base para el tra
mo número 4, donde han doble --
signo. Por ser el circuito base,
se defino normalmente.

Definición del circuito 3: tuberías 4 , 3 , 7 y 8
El tramo 4 se da con signo nega
tivo por tener doble signo y --
por estar siendo definido en el
circuito que no es el circuito
base.

En este ejemplo, el valor inicial del gasto se proporcionará con la convención del circuito 2, y el gasto final obedecerá a esta misma convención.

Observaciones:

En un circuito en que haya que definir tuberías con número negativo, éstas deben ser las primeras que se definan.

El número máximo de tuberías con número negativo que -- puede haber en un circuito es cuatro.

Un mismo circuito puede ser circuito base para algunos tramos y no serlo para otros.

El programa requiere, además, para cada tramo:

- a) Diámetro (m)
- b) Longitud (m)
- c) Constante C de Hazen-Williams
- d) Valor inicial del gasto (supuesto) (m^3/s)

Los gastos indicados en d) llevan asociado un signo de acuerdo a las convenciones indicadas en c) y su valor deberá ser congruente con las entradas y salidas de agua que se tengan en la red. Si la suposición inicial del sentido -- del recorrido del gasto es incorrecta, el proceso iterativo llegará a la solución correcta.

El proceso iterativo se dará por terminado cuando en todos los tramos ocurra que:

$$\left| \frac{\Delta Q}{Q_1} \right| \times 100 < m$$

ΔQ Valor calculado con la ecuación (5.4.5)

Q_i gasto calculado en la i -ésima iteración

O bien, dado que

$$\Delta Q_i + Q_{i-1} = Q_i$$

$$\Delta Q = Q_i - Q_{i-1}$$

$$\left| \frac{Q_i - Q_{i-1}}{Q_i} \right| \times 100 < m$$

m = constante positiva muy pequeña. En la versión presentada, $m = 0.005$ pero si se requiere mayor precisión puede disminuirse.

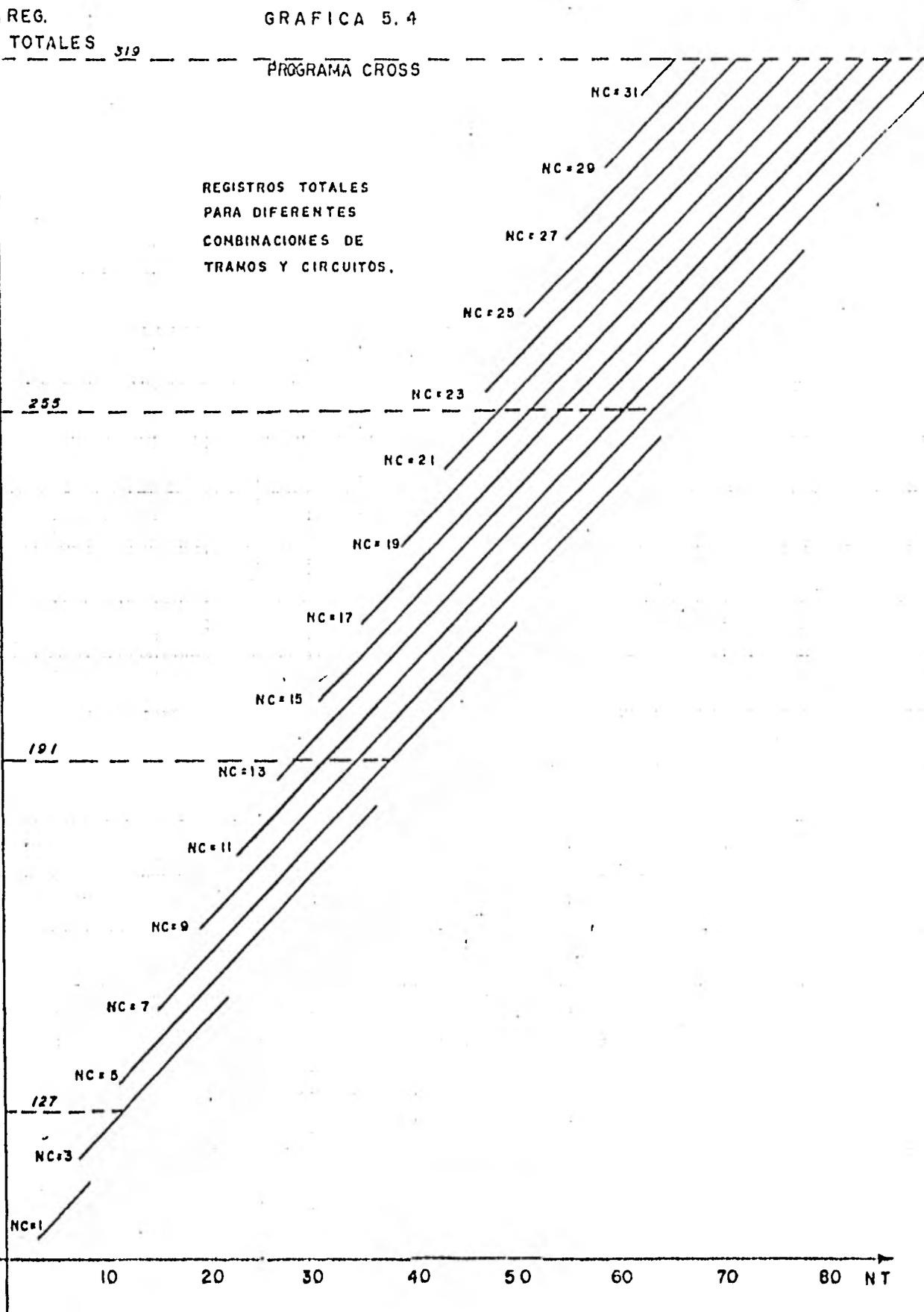
Otros datos que se requieren son:

número de circuitos, NC

número de tramos, NT

número de tramos en cada circuito NT_i

Una vez finalizado el cálculo iterativo de los gastos ($\Delta Q \doteq 0$) el programa calculará también las pérdidas de carga en cada tramo, las cuales tendrán el mismo signo que el gasto en ese tramo.



5.4.4.2 Instructivo de usuario.

Paso	INSTRUCCION	ENTRADA	TECLAS	SIZE:
				SALIDA
1	Iniciar		(XEQ) CROSS	NC?
2	Dar el número de circuitos	(NC)	(R/S)	NT?
3	Dar el número total de tramos	(NT)	(R/S)	SZ (SZ)
4	Ajustar "SIZE" adecuado		(XEQ)(SIZE)	
			(SZ)(R/S)	NT ₁ ?
5	Número de tramos que forman el			
	circuito i.	(NT ₁)	(R/S)	TR?
6	Dar los NT ₁ tramos que forman al			
	circuito i, empezando por los ne-	(TR ₁)	(R/S)	TR?
	gativos (máximo cuatro)(tramos de	⋮	⋮	⋮
	doble signo al definir el circui-	⋮	⋮	TR?
	to no base)	(TR _{NT₁})	(R/S)	
7	Repetir el paso 6 para los NC cir-			
	cuitos			
8	Dar los valores de diámetro (d ₁),			d ₁ ?
	constante de Hazen (C ₁), longitud	(d ₁)	(R/S)	C ₁ ?
	(L ₁) y gasto inicial supuesto - -	(C ₁)	(R/S)	L ₁ ?
	(Q ₁) para los NT tramos. Emplear -	(L ₁)	(R/S)	Q ₁ ?
	el sistema M.S	(Q ₁)	(R/S)	
9	Cuando se ha dado Q _{NT} , se inicia el			
	cálculo, que puede tardar varios mi-			
	nutos. Al terminar, sonará el BEEP			
	y podrán verse los resultados			Q ₁ (Q ₁)
			(R/S)	H ₁ (h ₁)
			(R/S)	⋮
			⋮	⋮
			⋮	⋮
			⋮	H _{nt} (h _{NT})

5.4.4.3 Listado del programa.

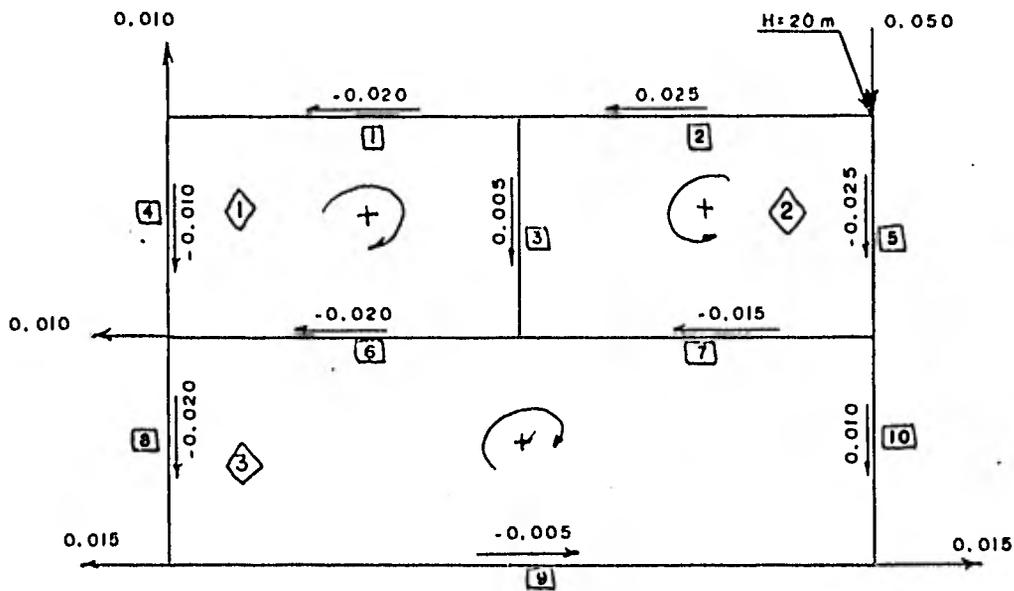
210

01*LBL *CROSS*	59 STO 03	117 XEQ 06
02 CLRG	60 ABS	118 +
03 SF 27	61 RCL 07	119 STO IND 09
04 *NO?*	62 +	120 ISG 03
05 PROMPT	63 ST+ IND 09	121 *0*
06 STO 00	64 RCL 08	122 XEQ 06
07 *NT?*	65 X>0?	123 STO IND 09
08 PROMPT	66 GTO 09	124 ISG 09
09 STO 01	67 ABS	125 ISG 03
10 2	68 RCL 07	126 GTO 04
11 +	69 +	127*LBL 15
12 RCL 00	70 RCL 09	128 RCL 00
13 3	71 2	129 I E3
14 +	72 +	130 /
15 +	73 X<>Y	131 I
16 10	74 ST+ IND Y	132 +
17 +	75*LBL 09	133 STO 02
18 SF 25	76 .01	134*LBL 16
19 RCL IND X	77 ST+ 07	135 XEQ 25
20 FS?C 25	78 ISG 04	136 0
21 GTO 05	79 GTO 03	137 STO 05
22 1	80 1	138 STO 06
23 +	81 ST+ 03	139 RCL 02
24 *S2=*	82 1.004	140 I
25 ARCL X	83 STO 04	141 -
26 PROMPT	84 .01	142 3
27*LBL 05	85 STO 07	143 +
28 RCL 00	86*LBL 03	144 11
29 I E3	87 ISG 03	145 +
30 /	88 GTO 02	146 STO 04
31 1	89 ISG 02	147 SF 01
32 +	90 GTO 01	148 XEQ 13
33 STO 02	91 RCL 01	149*LBL 17
34*LBL 01	92 I E3	150 XEQ 19
35 RCL 02	93 /	151 CLD
36 3	94 1	152 STO 10
37 +	95 +	153 I
38 8	96 STO 03	154 +
39 +	97 RCL 00	155 RCL IND X
40 STO 09	98 3	156 SIGN
41 FIX 0	99 +	157 LASTX
42 *NT*	100 11.1	158 ABS
43 ARCL 02	101 +	159 1.852
44 *F?*	102 STO 09	160 Y1X
45 PROMPT	103*LBL 04	161 +
46 STO IND 09	104 *d*	162 RCL IND 10
47 I E3	105 XEQ 06	163 +
48 /	106 2.63	164 ST+ 05
49 1	107 Y1X	165 RCL IND Y
50 +	108 *C*	166 /
51 STO 03	109 XEQ 06	167 ABS
52 1.004	110 +	168 ST+ 06
53 STO 04	111 .279	169 ISG 07
54 .01	112 +	170 GTO 10
55 STO 07	113 1.852	171 XEQ 21
56*LBL 03	114 Y1X	172*LBL 10

175 RCL 06	233 +	291 L.004
176 -1.052	234 RCL IND X	292 STO 07
177 +	235 STO 06	293 SF 01
178 ST/ 05	236 FS? 01	294*LBL 26
179 CF 01	237 RTN	295 NEG 19
180*LBL 18	238*LBL 12	296 FS?C 02
181 RCL IND 04	239 ISG 03	297 GTO 07
182 INT	240 GTO 19	298 I
183 I E3	241 XEQ 25	299 +
184 /	242 ISG 02	300 -1
185 I	243 GTO 16	301 ST+ IND Y
186 +	244 FS?C 00	302 ISG 07
187 STO 03	245 GTO 15	303 GTO 26
188 RCL IND 04	246 REEP	304*LBL 07
189 FRC	247*LBL A	305 CF 01
190 STO 03	248 RCL 01	306 RTN
191 L.004	249 I E3	307*LBL 8
192 STO 07	250 /	308 "CIRC?"
193 FS? 01	251 I	309 PROMPT
194 RTN	252 +	310 RCL 02
195*LBL 19	253 STO 03	311 FRC
196 100	254 RCL 00	312 +
197 ST+ 03	255 3	313 STO 02
198 RCL 03	256 +	314 GTO 01
199 INT	257 12.10002	315*LBL C
200 ST- 03	258 +	316 "FRANK?"
201 X=0?	259 STO 03	317 PROMPT
202 SF 02	260*LBL 03	318 RCL 03
203 2	261 "9"	319 FRC
204 +	262 RCL IND 03	320 +
205 9	263 XEQ 13	321 STO 05
206 +	264 SIGN	322 INT
207 RCL 00	265 LASTX	323 RCL 08
208 3	266 ABS	324 3
209 *	267 L.052	325 +
210 +	268 Y1X	326 +
211 FS? 01	269 +	327 9.1
212 RTN	270 RCL 09	328 +
213 CLD	271 I	329 STO 03
214 I	272 -	330 GTO 04
215 +	273 X<>Y	331*LBL 06
216 RCL 05	274 RCL IND Y	332 RCL 03
217 RCL IND Y	275 +	333 "F?"
218 +	276 "H"	334 PROMPT
219 X<> IND Y	277 XEQ 13	335 FIN
220 RCL IND Y	278 ISG 09	336*LBL 13
221 XCH	279 ISG 03	337 FIX 0
222 ABS	280 GTO 03	338 RCL 03
223 .5	281 "FIN"	339 "F?"
224 X<=Y?	282 PROMPT	340 ENG 3
225 SF 00	283*LBL 25	341 RCL Y
226 ISG 07	284 RCL 02	342 PROMPT
227 GTO 12	285 3	343 END
228*LBL 21	286 +	

5.4.4.4 Ejemplos resueltos.

a) Calcular los gastos que circulan por -- todos los tramos de la siguiente red, así como las pérdidas de energía en cada tramo.



(Gastos en m^3/s)

Se han anotado los sentidos positivos de re corrido en los tres circuitos y los números de cada tramo. Puede observarse que el tramo 6 presenta doble signo. Se tomará como circuito base para este tramo al circuito 3. También se han señalado con flechas los sentidos supuestos de los gastos, así como sus valores. Nótese que en el tramo 6, el gasto se ha definido de acuerdo a la convención del circuito 3, que fue elegido como base. A continuación se indican las longitudes y diámetros de cada tramo:

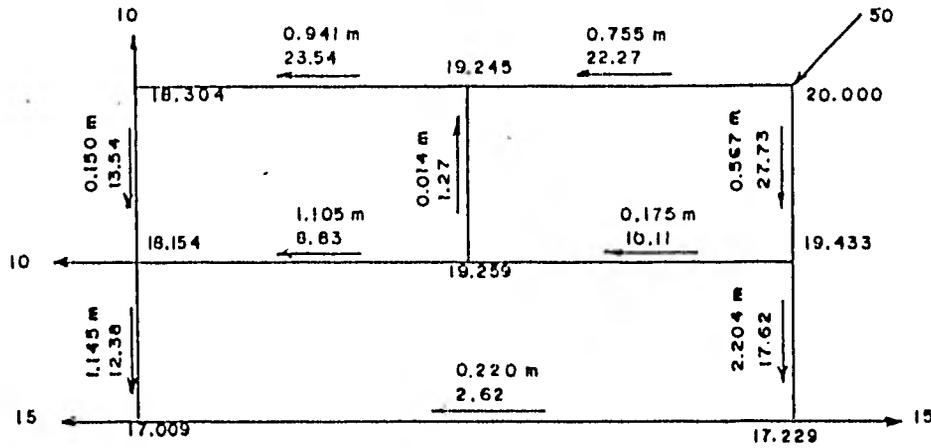
TRAMO	LONGITUD (m)	DIAMETRO (m)
1	45.00	0.15
2	40.00	0.15
3	20.00	0.10
4	20.00	0.15
5	20.00	0.15
6	45.00	0.10
7	40.00	0.15
8	25.00	0.10
9	85.00	0.10
10	25.00	0.10

Se supone $C=100$ en todos los tramos. A la --
 entrada de la red se dispone de una carga hidráulica de --
 20 m. de columna de agua.

NO?	XEQ "CROSS"	TR?
		8 RUN
	3.000 RUN	TR?
		9 RUN
	10.000 RUN	TR?
		10 RUN
	SE=40.000	TR?
	SIZE 040	
	RUN	7 RUN
NT1?		TR?
	4 RUN	6 RUN
TR?		d1?
	-6 RUN	.15 RUN
TR?		C1?
	1 RUN	100 RUN
TR?		L1?
	4 RUN	45 RUN
TR?		Q1?
	3 RUN	-.020 RUN
NT2?		d2?
	4 RUN	.15 RUN
TR?		C2?
	2 RUN	100 RUN
TR?		L2?
	3 RUN	40 RUN
TR?		Q2?
	5 RUN	.025 RUN
TR?		d3?
		1 RUN

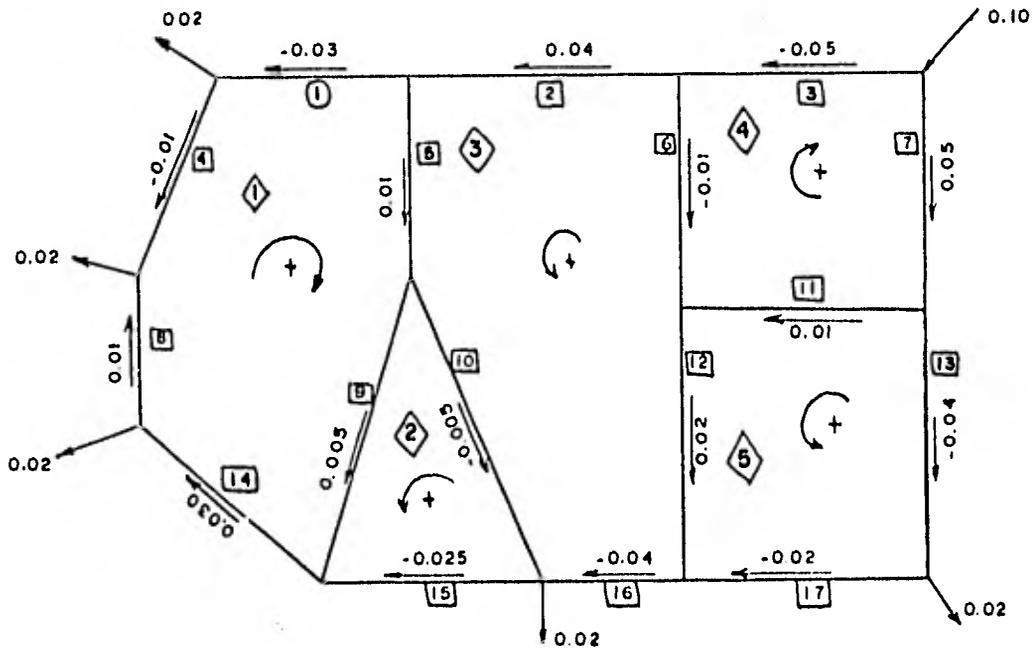
L3?				01=-23.54E-3	
d3?	20	RUN			RUN
	.005	RUN		H1=-941.0E-3	
d4?					RUN
	.15	RUN		02=22.27E-3	
C4?					RUN
	100	RUN		H2=754.0E-3	
L4?					RUN
	20	RUN		03=-1.270E-3	
04?					RUN
	-.01	RUN		H3=-13.52E-3	
d5?					RUN
	.15	RUN		04=-13.54E-3	
C5?					RUN
	100	RUN		H4=-150.2E-3	
L5?					RUN
	20	RUN		05=-27.73E-3	
05?					RUN
	-.025	RUN		H5=-566.5E-3	
d6?					RUN
	.1	RUN		06=-8.836E-3	
C6?					RUN
	100	RUN		H6=-1.105E0	
L6?					RUN
	45	RUN		07=-10.11E-3	
06?					RUN
	-.02	RUN		H7=-174.7E-3	
d7?					RUN
	.15	RUN		08=-12.30E-3	
C7?					RUN
	100	RUN		H8=-1.145E0	
L7?					RUN
	40	RUN		09=2.624E-3	
07?					RUN
	-.015	RUN		H9=220.3E-3	
d8?					RUN
	.1	RUN		010=17.62E-3	
C8?					RUN
	100	RUN		H10=2.204E0	
L8?					RUN
	25	RUN		FIN	
08?					
	-.02	RUN			
d9?					
	.1	RUN			
C9?					
	100	RUN			
L9?					
	85	RUN			
09?					
	-.005	RUN			
d10?					
	.1	RUN			
C10?					
	100	RUN			
L10?					

Resultados finales:



Se han anotado los valores y sentidos de los gastos (L/s), los valores de las cargas de presión en cada nudo, y las pérdidas de fricción en cada tramo.

b) Calcular los gastos que circulan por todos los tramos de la siguiente red, así como las pérdidas de energía en cada tramo:



Se han anotado los sentidos positivos de recorrido en todos los circuitos y los números de cada tramo. Los tramos 10 y 12 presentan doble signo. Se escogerán como base -- los circuitos 2 y 5 respectivamente. Se han anotado también los valores de los gastos supuestos, y con flechas se han indicado sus sentidos. A continuación se especifican las longitudes y diámetros de cada tramo:

TRAMO	LONGITUD (m)	DIAMETRO (m)
1	60.00	0.15
2	60.00	0.15
3	60.00	0.15
4	46.00	0.15
5	25.00	0.10
6	70.00	0.10
7	70.00	0.15
8	60.00	0.15
9	106.00	0.10
10	94.00	0.15
11	60.00	0.10
12	70.00	0.10
13	70.00	0.15
14	46.00	0.15
15	90.00	0.15
16	30.00	0.15
17	60.00	0.15

L14?	46	RUN	Q1=-36.42E-3		H10=-268.2E-3	RUN
Q14?				RUN		
	.030	RUN	H1=-1.615E0		Q11=7.453E-3	RUN
d15?				RUN		
	.15	RUN	Q2=46.71E-3		H11=616.3E-3	RUN
C15?				RUN		
	135	RUN	H2=2.560E0		Q12=13.42E-3	RUN
L15?				RUN		
	90	RUN	Q3=-52.68E-3		H12=2.130E0	RUN
Q15?				RUN		
	-.025	RUN	H3=-3.199E0		Q13=-39.87E-3	RUN
d16?				RUN		
	.15	RUN	Q4=-16.42E-3		H13=-2.226E0	RUN
C16?				RUN		
	135	RUN	H4=-283.1E-3		Q14=23.58E-3	RUN
L16?				RUN		
	30	RUN	Q5=10.29E-3		H14=553.6E-3	RUN
Q16?				RUN		
	-.04	RUN	H5=466.8E-3		Q15=-17.82E-3	RUN
d17?				RUN		
	.15	RUN	Q6=-5.969E-3		H15=-592.4E-3	RUN
C17?				RUN		
	135	RUN	H6=-476.6E-3		Q16=-33.29E-3	RUN
L17?				RUN		
	60	RUN	Q7=47.32E-3		H16=-683.8E-3	RUN
Q17?				RUN		
	-.02	RUN	H7=3.060E0		Q17=-19.87E-3	RUN
				RUN		
			Q8=3.583E-3		H17=-525.8E-3	RUN
				RUN		
			H8=22.03E-3		FIN	
				RUN		
			Q9=6.559E-3			
				RUN		
			H9=859.3E-3			
				RUN		
			Q10=-3.732E-3			
				RUN		

5.5 Diagrama de Moody

5.5.1 Ecuaciones fundamentales

El diagrama de Moody (ref. 5.7, p. 282) es una representación gráfica de los valores del coeficiente de fricción "f" de la fórmula de Darcy-Weisbach, en función de otras variables, que son:

$$a) \text{ Número de Reynolds } \quad Re = \frac{VD}{\nu} \quad (5.5.1)$$

donde V = Velocidad media del fluido en el conducto

D = Diámetro del conducto

ν = Viscosidad cinemática del fluido

$$b) \text{ Rugosidad relativa } \quad \frac{\epsilon}{D}$$

donde ϵ = Rugosidad absoluta del conducto (depende del material)

Ambas variables son adimensionales.

Para el trazo de este diagrama, Moody hizo uso de las siguientes ecuaciones:

$$a) \quad f = \frac{64}{Re} \quad (\text{Poiseuille, 1846}) \quad (5.5.2)$$

$$b) \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left[\frac{\epsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right] \quad (\text{Colebrook y White}) \quad (5.5.3)$$

La primera expresión es válida para el flujo laminar, ($Re < 2300$), y la segunda es válida para la zona de transición de flujo laminar a turbulento y para la zona de turbulencia completa ($Re > 4000$).

Las ecuaciones 5.5.2 y 5.5.3 satisfacen los siguientes puntos:

a) Para flujos con $Re < 2300$, (flujo laminar), el coeficiente f depende únicamente del número de Reynolds.

b) Para la zona turbulenta (números de Reynolds grandes) f depende exclusivamente de la rugosidad relativa y no del número de Reynolds.

c) El número de Reynolds, considerado como límite superior para la zona de transición, depende de la rugosidad del tubo.

Se hace hincapié en que estas ecuaciones no son válidas para la zona crítica ($2300 < Re < 4000$), en que no puede establecerse una ley general de variación.

5.5.2 Conductos con sección no circular.

Para el caso de conductos de sección no circular, puede usarse alguno de los criterios que se anotan a continuación:

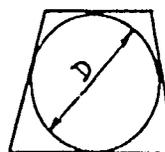
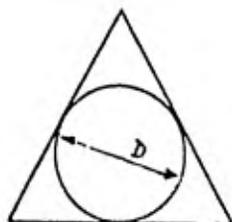
a) Criterio de Scheller y Nikuradse

El valor de D que aparece en las fórmulas 5.5.1 y 5.5.3 puede sustituirse por $4R_H$ donde R_H es el ra-

dio hidráulico de la sección transversal del conducto.

b) Criterio de Malaika (ref 5.8)

El valor de D de las ecuaciones 5.5.1 y 5.5.3 puede sustituirse por el diámetro del círculo inscrito en la sección considerada.



5.5.3 Programa MOODY

Este programa no es más que el diagrama de Moody manejado en una forma más rápida, cómoda y precisa. Se requieren como datos los mismos valores y el resultado es el coeficiente de fricción f .

Los datos requeridos son:

ϵ = Rugosidad absoluta

D = Diámetro del conducto, o diámetro equivalente (ver 5.5.2)

ν = viscosidad cinemática del fluido

En el caso de que el fluido sea agua y se desconozca su viscosidad cinemática, puede proporcionarse sólo la temperatura del agua en $^{\circ}\text{C}$, y el programa calculará ν por medio de la expresión:

$$\nu = (5.8 \times 10^{-5} T^2 + .0225T + .5385)^{-1} \times 10^{-6} \text{ (m}^2/\text{s)}$$

donde T = temperatura del agua en $^{\circ}\text{C}$

Esta expresión es un ajuste matemático a la gráfica que se presenta en la página 26 de la referencia 5.7.

Además, se requiere la velocidad media del fluido en el conducto (V).

Si el valor de V es proporcionado directamente por el usuario, puede emplearse cualquier sistema congruente de unidades. Si sólo se proporciona el valor de T y el programa calcula V , deberá usarse el Sistema Internacional de unidades.

El programa está estructurado de forma tal, que puede emplearse como subrutina de otros programas. Si se suministran los valores de ϵ , D y V en los registros adecuados (ver 5.5.3.1) y el valor de V en el registro X , puede usarse (XEQ) VEL como subrutina, que regresará el valor de f en la memoria 04 y el número de Reynolds en la memoria 03 .

Para el cálculo del coeficiente f cuando $Re > 4000$ (ec. 5.5.3), se hace uso del método de aproximaciones sucesivas. (ref 5.4)

La ecuación (5.5.3) puede escribirse:

$$f = \left[-2 \log \left[\frac{\epsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right] \right]^{-2} \quad (5.5.4)$$

Esta ecuación es de la forma:

$$x = f(x)$$

Así, se genera una sucesión de valores de f que converge a la solución buscada. Como primera aproximación se toma:

$$f_1 = \left[-2 \log \frac{\epsilon/D}{3.71} \right]^{-2}$$

es decir, se supone flujo turbulento con Re muy grande.

5.5.3.3 Listado del programa.

226

01*LBL "MOSES"	59 /
02 SF 27	60 2.51
03 "D?"	61 RCL 03
04 PROMPT	62 /
05 STO 00	63 RCL 04
06 "e?"	64 SORT
07 PROMPT	65 /
08 STO 01	66 +
09 CF 22	67 LOG
10 "NU?"	68 2
11 PROMPT	69 *
12 FS? 22	70 X12
13 GTO 06	71 1/X
14 "I?"	72 X<> 04
15 PROMPT	73 RCL 04
16 STO 02	74 %CH
17 X12	75 ABS
18 5.8 E-5	76 .1
19 *	77 X<=Y?
20 RCL 02	78 GTO 01
21 2.25 E-2	79*LBL 02
22 *	80 "F="
23 +	81 ARCL 04
24 .538	82 RVIEW
25 +	83 RTH
26 1/X	84*LBL 03
27 1 E-6	85 X<>Y
28 *	86 64
29*LBL 06	87 /
30 STO 02	88 1/X
31 CLX	89 STO 04
32 STOP	90 GTO 02
33*LBL "VEL"	91 .END.
34 STO 05	
35 RCL 00	
36 *	
37 RCL 02	
38 /	
39 STO 03	
40 2300	
41 X<>Y?	
42 GTO 03	
43 RCL 01	
44 RCL 00	
45 /	
46 3.71	
47 /	
48 LOG	
49 2	
50 *	
51 X12	
52 1/X	
53 STO 04	
54*LBL 01	
55 RCL 01	

5.5.3.4 Ejemplos resueltos

a) Datos:

$$D = 1 \text{ m.}$$

$$\epsilon = 0.25 \times 10^{-3} \text{ m. (fierro fundido nuevo)}$$

$$\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$V = 1.5 \text{ m/s}$$

calcular el coeficiente de fricción f . Utilizar tres de
cimales. (FIX 3)

```

                                ASH *VEL* 12
                                FIX 3
                                XEQ *MOODY*
D?                               1.000  RUN
e?                               .25-03  RUN
NU?                              .00001  RUN
                                1.500
                                XEQ *VEL*
F=0.016

```

b) Calcular el coeficiente f para agua a 17 °C que fluye por una tubería de 0.5 m. de diámetro, a una velocidad de 2 m/s. La tubería es de asbesto cemento nuevo. ($\epsilon = 0.025 \times 10^{-3}$ m.) Después, calcular f para --
 $V = 1 \text{ m/s}$, $V = 5 \text{ m/s}$ y $V = 0.002 \text{ m/s}$.

```

                                FIX 3
                                XEQ *MOODY*
D?                               1.000
                                XEQ *VEL*
                                F=0.014
e?                               .500  RUN
                                5.000
                                XEQ *VEL*
                                F=0.012
NU?                              .025-03  RUN
                                .002
                                XEQ *VEL*
                                F=0.066
T?                               17.000  RUN
                                2.000
                                XEQ *VEL*
F=0.013

```

6. CONCLUSIONES

Después del uso continuo de los programas que aquí se han presentado, y una vez que el usuario se haya familiarizado con su operación, la solución de problemas por este medio resulta sumamente rápida y con la precisión deseada. Es conveniente que el usuario empiece por resolver por su cuenta los ejemplos que aquí se presentan y que compruebe sus resultados con los que se obtuvieron en este trabajo. Esto contribuirá a la familiarización del usuario con los programas.

Es necesario hacer hincapié en que en todos los casos, deben tenerse presentes las hipótesis que se han hecho en la deducción de las ecuaciones de los diferentes fenómenos, ya que la aplicabilidad de estos programas depende de qué tan bien se ajusten las hipótesis al caso real que se estudia. Debe tenerse cuidado en respetar el sistema de unidades para el cual haya sido diseñado cada programa, cuando esto proceda. En caso de que el usuario desee emplear otro sistema de unidades, deberán hacerse los ajustes correspondientes, que en general serán sencillos.

Los programas KANI para estructuras, y CROSS para hidráulica son los más complicados de los que aquí se presentan. Se ha encontrado que en casos que requieren gran cantidad de memoria, y bajo condiciones especiales, la solución correcta puede tomar un tiempo relativamente grande. En es-

tos casos, puede disminuirse la precisión requerida, o bien esperar el tiempo necesario, que por supuesto siempre será - mucho menor que el que se requeriría para una solución por - procesos manuales.

Se ha encontrado que resulta una práctica conveniente para el ingeniero dedicado al proyecto de obras hidráulicas, el almacenar simultáneamente, si es posible, todos los programas referentes al flujo a superficie libre, y convertir su máquina en una "regla de cálculo" de dicho flujo. Esto se consigue asignando teclas a cada programa y construyendo una cubierta de asignaciones específica, empleando alguna de las que se suministran como equipo regular de la HP41C/CV.

Merece especial mención en estas conclusiones la fórmula (5.1.31) para el cálculo de tirante crítico en canales con sección circular. Es suficientemente precisa y muy sencilla de emplear. Se recomienda su uso en diseños preliminares o en casos en que no se desee un resultado exacto.

Vale la pena destacar la rutina de salida que se presenta en el programa WILBUR. Si el usuario la encuentra conveniente y cómoda, puede adaptarla fácilmente a cualquier programa. Lo mismo puede decirse de la rutina de lectura de datos de los programas YCT, YCC, YNT y YNC, que resulta muy útil en programas en que dado un cierto número de variables

cualesquiera se desea calcular una más, que es función de -- las anteriores. Se recomienda estudiar a fondo este proceso, para poder adaptarlo a las necesidades propias.

Los métodos empleados en los cuatro primeros pro-- gramas del capítulo 5, si bien son complicados, resultan de muy rápida convergencia. No se tiene experiencia en el uso -- de estos métodos en procesos manuales, por lo que sólo se -- puede concluir sobre su utilidad en cálculos automáticos.

Los programas que integran este trabajo no presen-- tan instrucciones específicas sobre salida en impresora de -- papel térmico. Sin embargo, si el usuario dispone de este -- dispositivo, puede introducir en forma sencilla comandos que mejoren la forma de impresión.

Se recomienda al usuario que profundice en el estu-- dio de los programas y métodos de su interés, con el objeto de adaptarlos a sus necesidades y de lograr las mejoras que indudablemente podrán efectuarse. Existen numerosas publica-- ciones en que se dispone de programas similares a los aquí -- presentados. Como es de esperarse, estos programas abarcan un gran número de áreas de la Ingeniería, y probablemente se puedan encontrar programas que resuelvan los mismos problemas que aquí se han resuelto.

Dentro de los límites de la información a la que se tuvo acceso para la elaboración de esta tesis, se tuvo cuidado en presentar algunas mejoras con respecto a esos programas. Esas mejoras fueron, entre otras: aplicación de rutinas que se creen más eficientes, ampliación de los rangos de aplicación, adaptación de criterios usuales en nuestro medio, etc. Cabe aclarar que la mayor parte de los programas son originales, dentro de la información limitada a que se hace mención.

Probablemente las conclusiones más importantes que se pueden hacer sobre este trabajo son las siguientes: en primer lugar, el uso de la calculadora electrónica permite al Ingeniero contemplar un gran número de posibilidades de solución en un tiempo relativamente corto. Es evidente que este amplio panorama permite la selección de mejores soluciones a los problemas, y el tiempo que el Ingeniero solía invertir en repetitivos cálculos aritméticos puede ser empleado en tareas más propias del profesional y del ser humano, como son la abstracción y la aplicación del ingenio. En esta época se tiene la certeza de que se está cumpliendo el anhelo de Babbage, cuando expresó en el primer cuarto del siglo pasado: "el intolerable trabajo y la fatigante monotonía de la continua repetición de cálculos aritméticos similares, despertó primero el deseo y después sugirió la idea, de una máquina,

la cual, con la ayuda de la gravedad o cualquier otra fuerza motriz, llegaría a ser un sustituto para una de las más bajas funciones del intelecto humano" (ref. 2.).

La segunda conclusión, mas particular y relacionada con este trabajo, se desprende de un fenómeno que ocurre con frecuencia en los grandes sistemas en línea: la saturación de los equipos y los consiguientes "cuellos de botella". La calculadora programable de bolsillo constituye una poderosa herramienta, y su poder se incrementa al constatar que la solución de problemas se puede obtener de inmediato y en el sitio de trabajo. En cierto tipo de problemas, tales como -- los presentados en esta tesis, el uso del sistema en línea queda abolido. Lo mas interesante de esta observación es que este tipo de problemas constituye una buena parte del universo de cuestiones que se presentan al ingeniero en la práctica.

Finalmente, es posible concluir también que esta calculadora es una máquina sumamente poderosa y versátil, y que puede competir con éxito contra sus similares en el mercado. Se tiene la certeza de que la popularidad de que goza es justificada, y que sus límites de aplicación son tan -- amplios como la creatividad y conocimientos de su operador.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- 2.1 ROSE, J. La revolución cibernética. Trad. Sergio Fernández Everest. México, Fondo de Cultura Económica, 1978. 280 p.
- 2.2 PRICE, WILSON T. Elements of IBM 1130 programming. EUA, Holt, Rinehart and Winston, 1968. 484 p.
- 2.3 LEVINE, RONALD D. "Supercomputadores". En: George S. Conn. Investigación y ciencia # 66. Barcelona, Prensa científica S. A., marzo 1982. pp 70-85.
- 2.4 MATISOO, JURI. "El computador superconductor". En: George S. Conn. Investigación y ciencia # 46. Barcelona, Prensa científica S.A., julio 1980. pp 18-35.
- 2.5 MIMS, FORREST M. "PE compares new handheld computers". En: Joe Mesics. Popular electronics. Nueva York, Ziff-Davis publishing company, julio 1982. pp 38-48
- 2.6 UNAM. Gaceta Universitaria. noviembre 22, 1982.
- 2.7 MCGJS, MARY ANN. "Computers in Education: future projections" En: Robert S. Jones. Interface age. EUA, McPheters, Wolf y Jones, dic. 1981. pp 84-85

- 3.1 HEWLETT-PACKARD, CO. HP-41C owner's handbook and programming guide. EUA, Hewlett-Packard Co., 1980. 275 p.
- 3.2 _____ . HP-41C standard applications. EUA, Hewlett-Packard Co., 1980. 59 p.
- 4.1 NEMMARK N, M. "Numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads". Transactions, ASCE, paper No. 2202, EUA, 1942.
- 4.2 KANI, G. Cálculo de pórticos de varios pisos. 6 ed. Edit. Reverté, 1973. 91 p.
- 4.3 ROSENBLUETH, E y L. ESTEVA. "Folleto complementario: diseño sísmico de edificios, proyecto de reglamento de construcciones en el D.F." México, Ediciones Ingeniería, 1962.
- 4.4 DEL VALLE, E. "Consideraciones sobre la rigidez de estructuras ante cargas laterales". III Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica. Acapulco, 1971. Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica)
- 4.5 SMIE. Ayudas para diseño de estructuras. Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural, A. C., 1978.
- 4.6 ALDUCIN G., G. Métodos numéricos en el análisis dinámico de sistemas estructurales. Tesis profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM. 1973.
- 4.7 AYRES, F. Algebra moderna. Colombia, Mc Graw Hill, 1969. 242 p.
- 4.8 CRAIG, R. Structural dynamics. EUA, Willey, 1981.

- 4.9 ROSENBLUTH, E y N. M. NEWMARK, Fundamentos de Ingeniería Sísmica. Trad. J.L. Lope. México, Diana 1978. 680 p.
- 4.10 Notas de clase del curso de Ingeniería Sísmica impartido por el M. en I. José Luis Trigos. Facultad de Ingeniería, UNAM. 1981
- 4.11 Instituto de Ingeniería. Manual de diseño por sismo. México, UNAM, 1977. 76 p. (publicación 406)
- 4.12 TRIGOS, J.L. Determinación de parámetros para diseño sísmico de estructuras en México. IV Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica. Oaxaca, 1975.
- 4.13 COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD. Manual de diseño de obras civiles; Diseño por sismo (c.1.3) 1981
- 4.14 WANG, C. K. Statically indeterminate structures. Tokio, Mc. Graw Hill - Kogakusha, 1952. 424 pp. (International student edition)
- 4.15 STERLING K, J. Análisis de estructuras indeterminadas. Trad. Lionel Dignawity. México, Compañía Editorial Continental S. A., 1961. 710 pp.
- 4.16 FERNANDEZ C., C. Cálculo de estructuras reticulares. 7a. edición. Madrid. Editorial Dossat, 1953. 449 pp.
- 5.1 SOTELO, G. Hidráulica. México, UNAM, Facultad de Ingeniería. (vol. II)
- 5.2 Notas de clase del curso de Hidráulica II impartido por el M. en I. Ariel Friedmann. Facultad de Ingeniería, UNAM. 1930.

- 5.3 HENRICI, P. Elementos de análisis numérico. Trad. Federico Velasco Caba. México, Trillas, 1980. 363 p.
- 5.4 VILENKIN, N. Método de aproximaciones sucesivas. Trad. K Medkov. URSS, edit. Mir, 1978. 120 p.
(lecciones populares de matemáticas)
- 5.5 RALSTON, A. Introducción al análisis numérico. México, Limusa, 1978. 629 pp.
- 5.6 HENDERSON, F. M. Open channel flow. Nueva York MacMillan Publishing Co., 1966. 522 p.
- 5.7 SOTELO G. Hidráulica General, Fundamentos. México, Limusa, 1976. 551 p. (vol. 1)
- 5.8 MALAIKA, J. "Flow in noncircular conduits". En: Journal of the hydraulics division ASCE. Noviembre 1962.
- 5.9 STREETER, V y D. WYLIE. Fluid mechanics. 7 ed. Tokio, Tosho printing Co., 1979. 562 p.