

T-2w



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**RIGIDEZ EFECTIVA DE MUROS DE CONCRETO  
REFORZADO SUJETOS A FLEXOCOMPRESION  
UNIAXIAL.**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:**

**INGENIERO CIVIL**

**P R E S E N T A N :**

**ALBERTO LOPEZ LOPEZ**

**JORGE CARLOS TURRIZA ESCALANTE**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA  
EXAMENES PROFESIONALES  
60-1-77

A los pasantes señores JORGE CARLOS TURRIZA ESCALANTE y  
ALBERTO LOPEZ LOPEZ,  
P r e s e n t e s .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a ustedes a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Oscar Hernández Basilio, para que lo desarrollen como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"RIGIDEZ EFECTIVA DE MUROS DE CONCRETO REFORZADO, SUJETOS A FLEXOCOMPRESION UNIAxIAL"

- I Introducción.
- II Desarrollo de las ideas básicas para el cálculo de la rigidez efectiva.
- III Programa de computadora para calcular la rigidez efectiva.
- IV Método simplificado para el cálculo de la rigidez efectiva.
- V Ejemplo de aplicación.
- VI Conclusiones

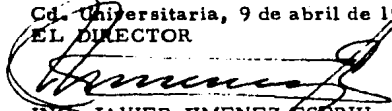
Ruego a ustedes se sirvan tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesionales, deberán prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cd. Universitaria, 9 de abril de 1979

EL DIRECTOR



ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

JJE/ser

## INDICE

|   | Pág. |
|---|------|
| 1 INTRODUCCION Y OBJETIVO   | 1    |
| 2 DESARROLLO DE LAS IDEAS BASICAS PARA EL<br>CALCULO DE LA RIGIDEZ EFECTIVA | 5    |
| 3 PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA CALCULAR -<br>LA RIGIDEZ EFECTIVA            | 14   |
| 4 METODO SIMPLIFICADO PARA EL CALCULO DE<br>LA RIGIDEZ EFECTIVA             | 19   |
| 5 EJEMPLO DE APLICACION   | 28   |
| 6 CONCLUSIONES  | 49   |

### FIGURAS

Apéndice A: Desarrollo detallado de ideas  
básicas

Apéndice B: Programas de computadora

Apéndice C: Gráficas de rigidez efectiva

Apéndice D: Desarrollo numérico del ejemplo

## 1. INTRODUCCION Y OBJETIVO

Uno de los propósitos en la ingeniería estructural es el diseñar las estructuras tratando de predecir su comportamiento ante las diferentes acciones a las que se encontraran sometidas durante su vida útil. El mejor conocimiento del comportamiento mecánico de los materiales de construcción ha permitido la creación de nuevas teorías aplicables al diseño estructural. Sin embargo, sus aplicaciones se ven limitadas por la falta de herramientas que ayuden a simplificar el proceso de diseño, y así poder predecir de una manera "real" y confiable el comportamiento de cierta estructura en estudio.

En términos generales el diseño estructural consiste de las siguientes etapas:

1. Selección del tipo y distribución de la estructura
2. Selección del tipo de material
3. Determinación de las cargas que actúan sobre la estructura
4. Determinación de los elementos mecánicos en los componentes estructurales

5. Dimensionamiento de los elementos
6. Revisión del funcionamiento de la estructura bajo cargas de servicio
7. Revisión final

Para nuestro caso pensemos específicamente en las estructuras de concreto. El análisis estructural, o sea, la determinación de los elementos mecánicos, implica un conocimiento de las sollicitaciones que actúan sobre la estructura y las dimensiones de sus --- miembros, en ocasiones se requiere únicamente la rigidez relativa entre los diferentes miembros de la estructura con objeto de realizar el análisis.

Usualmente durante esta etapa no se toma en cuenta si la sección está o no agrietada, ni la contribución del acero de refuerzo a la rigidez, así como tampoco el efecto de la flexocompresión a la que se encuentra sujeto el elemento.

Una vez conocidas las fuerzas internas en los miembros de la estructura, se procede a dimensionarlos, es decir, a determinar -- las propiedades geométricas de la sección transversal de los elementos y/o la cantidad y posición del acero de refuerzo, olvidando se que se les propuso cierta rigidez inicial.

Para la etapa del dimensionamiento usualmente se emplea alguno de los siguientes métodos: el de "Esfuerzos de Trabajo" y el de "Resistencia Última", siendo el segundo método el más comúnmente - utilizado en la actualidad. .

Con las herramientas actuales resulta prácticamente imposible tratar de dimensionar una sección para que al mismo tiempo que sea capaz de resistir las acciones internas (fuerza axial y momento -- flexionante), se apegue a la rigidez propuesta para el análisis. - Esto implica entonces que la estructura dimensionada no corresponderá en la mayoría de los casos a la analizada, y por tanto se ob-

tendrá un comportamiento diferente al esperado. Esto último se ha comprobado en diversas ocasiones cuando se han realizado estudios sobre estructuras reales.

De estas consideraciones se concluye que el diseño de una estructura de concreto reforzado es esencialmente un procedimiento - de aproximaciones sucesivas para satisfacer ambos objetivos: resistencia y rigidez.

Tomando en cuenta lo anterior, el objetivo de esta tesis es - desarrollar ayudas de diseño que faciliten el cálculo para satisfacer ambos requisitos anteriormente mencionados.

Dentro de los principales elementos estructurales están las - columnas, las vigas y los muros de concreto reforzado, teniendo cada uno una función específica. Por ejemplo, la función de los marcos formados por columnas y trabes en estructuras de altura considerable se ve afectada por su escasa rigidez a las fuerzas laterales que son de importancia en este tipo de estructuras. Es por -- eso que se han venido usando los muros pues su principal finalidad es la de proporcionar una rigidez adecuada a la estructura.

Para los elementos columnas y vigas existen ya las ayudas de diseño mencionadas (Refs. 1 y 2), quedando para el presente trabajo el desarrollo de las ayudas para muros de concreto reforzado. - Se pretende que estas ayudas sean complementarias o sustituyan a - los criterios de dimensionamiento presentados por el ACI y por el R.D.D.F. para el caso de muros de concreto reforzado.

En los capítulos subsecuentes se explicará el procedimiento - de cálculo realizado para poder construir las gráficas  $(EI)_{ef}/bt^3f'_c$  versus  $P/bt^2f'_c$  ( $\beta, \alpha$ ), las que permitirán resolver el problema arriba expuesto.

Las ayudas de diseño que se desarrollaron consisten en 3 grupos de gráficas ( $\beta, \alpha$ ) para diferentes secciones transversales de - muros de concreto reforzado: el primer grupo considera como rectangular a la sección transversal del muro; el segundo grupo conside-

4

ra al muro confinado por columnas y el tercer grupo de gráficas -- se determinaron para un muro confinado por muros transversales -- (Fig. 1.1). El primer grupo consta de 40 gráficas y los otros -- dos grupos constan de 35 gráficas.

En el primer grupo se combinaron ocho diferentes cantidades de acero en los extremos ( $q'_e$ ) con cinco cantidades de acero longitudinal ( $q'_l$ ); para el segundo y tercer grupos se combinaron siete diferentes cantidades de acero en los extremos ( $q'_e$ ) con cinco cantidades de acero longitudinal ( $q'_l$ ) (Fig. 1.1).

Las gráficas se presentan en función de parámetros adimensionales, lo cual hace que se puedan cubrir casos generales con un número limitado de diagramas. Todas ellas consideran sólo flexo-compresión en una sola dirección.

Se desarrolla en el Cap. 4 un método simplificado para calcular la rigidez efectiva ( $EI$ )<sub>ef</sub> para los tipos de secciones antes mencionados. En el Cap. 5 se presenta un ejemplo de aplicación -- para el diseño de muros.

Con la finalidad de que la lectura de esta tesis sea fluida, todos los aspectos que se consideran de importancia se detallan -- en los Apéndices A, B y D, a los que se puede recurrir para su mejor entendimiento.



## 2. DESARROLLO DE LAS IDEAS BASICAS PARA EL CALCULO DE LA RIGIDEZ EFECTIVA

### 2.1 Hipótesis simplificadorias para el cálculo de la rigidez efectiva.

En los últimos años, los criterios de diseño plástico o resistencia última han ido afirmándose en la práctica del cálculo estructural y en los reglamentos oficiales. La ventaja principal de estos métodos de diseño es que permiten predecir la resistencia de un miembro, o una sección, a la falla y usar un factor de incertidumbre apropiado para evitar la posibilidad de que esta falla ocurra.

Durante el desarrollo de este trabajo y para facilitar el cálculo de la rigidez efectiva se tomaron las hipótesis usuales para el diseño por resistencia de elementos de concreto reforzado, ligadas al comportamiento básico y al mecanismo acción-respuesta de los materiales.

Las hipótesis que comúnmente se hacen son las siguientes:

a) La distribución de deformaciones unitarias longitudinales en la sección transversal de un elemento es lineal, es decir, las secciones transversales planas antes de la deformación, permanecen planas después de que ésta ocurre. Esta hipótesis permite conocer la deformación unitaria de las fibras a cualquier altura de la sección si se fijan dos puntos de deformación conocida.

b) El concreto no resiste esfuerzos de tensión longitudinales. En realidad el concreto tiene una resistencia a la tensión aproximadamente igual a  $0.1 f'_c$ , pero para fines prácticos no influye en la capacidad de resistencia en miembros con cantidades normales de refuerzo.

c) Se conocen las características esfuerzo-deformación del acero. En general se supone un comportamiento elastoplástico del acero, esto es, los esfuerzos son directamente proporcionales a las deformaciones hasta una deformación unitaria máxima  $\epsilon_y$ , y después el esfuerzo permanece constante no importando la deformación. Con esta idealización se desprecia la zona de endurecimiento del acero. Si se tomara en cuenta esta zona, se obtendrían resistencias mayores; sin embargo, se considera que las deformaciones en la zona de endurecimiento son de tal magnitud que hacen objetable el funcionamiento estructural de los elementos.

d) Se conocen las características esfuerzo-deformación unitaria del concreto. Se han propuesto curvas muy diferentes para la relación esfuerzo-deformación del concreto; además, son muchas las variables que influyen en las características de esta curva, de las cuales las principales son: el tamaño y la forma de sección, el gradiente de esfuerzos y la duración de la carga.

Aunque las distintas idealizaciones de la curva esfuerzo-deformación difieren notablemente (triangular, rectangular, trapezoidal, parabólica, etc.), todas ellas llevan a resultados aproximadamente iguales en cuanto a resistencia; pero desde el punto de vista del cálculo de curvaturas y deformaciones, y por tanto de -

rigideces, la forma de la curva juega un papel muy importante.

e) La adherencia entre el acero y el concreto es perfecta, - es decir, no existen corrimientos relativos de consideración entre el acero y el concreto que lo rodea. Esta hipótesis es necesaria para establecer la igualdad de deformaciones en el acero y el concreto para las mismas distancias al eje neutro. Para concreto reforzado con varillas corrugadas, la hipótesis es bastante realista.

f) El elemento alcanza su resistencia a una cierta deformación unitaria máxima útil del concreto,  $\epsilon_{cu}$ . Esto implica que una sección falla si el concreto, en alguna fibra, alcanza una de formación unitaria de compresión máxima  $\epsilon_{cu}$  que varía de 0.003 a 0.004, con base en las hipótesis anteriormente mencionadas.

Un efecto importante que no se toma en cuenta en las hipótesis anteriores es el debido a las deformaciones unitarias producidas por:

- a) Contracción del concreto y
- b) Flujo plástico

Es decir, que se considera que se aplican cargas de corta duración, despreciándose los efectos a largo plazo.

En general, para elementos de concreto con una distribución normal de refuerzo, el efecto de contracción del concreto es insignificante, por lo que en diversos estudios (Ref. 3) y en éste, no se tomará en cuenta.

Los efectos de flujo plástico debidos a cargas de larga duración pueden tomarse en cuenta durante el cálculo de las relaciones momento-curvatura (Ref. 3). En esta etapa las deformaciones unitarias debidas a flexocompresión se afectarían por una función

de flujo plástico, que nos conduciría a la obtención de nuevos valores de curvatura y a la vez de rigidez.

Una forma más sencilla es considerar los efectos de larga duración sobre la rigidez obtenida para cargas de corta duración, -- afectando ésta por un término correctivo. Este procedimiento se presenta en el capítulo 4.

Otro parámetro importante que no se ha tomado en cuenta en ningún estudio es el de la velocidad de aplicación de la carga. Adn para estudios dinámicos, las características acción-respuesta de los materiales se han tomado de ensayos estáticos; en este trabajo se considerará que la aplicación de la carga es lo suficientemente lenta como para suponer que no varían las características de comportamiento del material.

Para efectos de esta tesis se emplearon las expresiones y características del concreto y el acero que a continuación se mencionan.

Para definir la curva esfuerzo-deformación del concreto en compresión para una sección considerada se empleó la siguiente expresión:

$$f_c = f'_c \left( \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) \quad (\text{ec. 1})$$

donde:

- $f_c$  esfuerzo del concreto para una determinada deformación unitaria
- $f'_c$  resistencia a compresión del concreto
- $\varepsilon_0$  deformación unitaria del concreto correspondiente a  $f'_c$
- $\varepsilon$  deformación unitaria del concreto para el esfuerzo  $f_c$

La representación geométrica de esta ecuación es una parábola, como se muestra en la Fig. 2.1.

Como se comprenderá por lo dicho en la hipótesis d), no se trabajará con el "rectángulo equivalente de Whitney", sino con la curva de comportamiento "real", por lo que cuando se empleen otros criterios de diseño hay que tener presente que aquí se trabajará con  $f_c^i$  (que se transformará a  $f_c^*$  cuando se tome en cuenta la variabilidad de la resistencia del concreto), mientras que cuando se trabaja con el rectángulo equivalente, se hace con  $f_c''$ .

En este trabajo se considera una deformación máxima útil del concreto  $\epsilon_{cu}$  igual a 0.0041 (Ref. 1.).

El diagrama esfuerzo-deformación del acero de refuerzo ordinario, puede idealizarse por medio de una recta que pase por el origen, con pendiente igual a  $E_s$ , y una recta horizontal que pase por la ordenada correspondiente al esfuerzo de fluencia del acero,  $f_y$  (Fig. 2.2).

En esta tesis se considerará que el módulo de elasticidad ( $E_s$ ) es igual a  $2 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> y un esfuerzo de fluencia ( $f_y$ ) igual a 4000 kg/cm<sup>2</sup>. Para el cálculo de los esfuerzos en el acero, se consideraran dos etapas:

$$f_s = \epsilon_s E_s \quad \text{si } \epsilon_s \leq \epsilon_y$$

$$f_s = f_y \quad \text{si } \epsilon_s > \epsilon_y$$

donde:

$f_s$  esfuerzo en el acero para una determinada deformación unitaria  $\epsilon_s$ .

$f_y$  esfuerzo de fluencia del acero

Las características geométricas de las diferentes secciones que se consideraron para el análisis son las que se indican a continuación (Fig. 2.3):

## a) Sección rectangular (Fig. 2.3a):

$t$  = peralte total de la sección = 400 cms

$b$  = ancho de la sección = 20 cms

$d$  = peralte efectivo = 380 cms

$\frac{d}{t}$  = 0.95

$q'_e = \frac{A_{s_e} f_y}{b t f'_c}$ ; tomará los siguientes valores: 0.00, 0.02, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30

$q'_l = \frac{A_{s_l} f_y}{b t f'_c}$ ; tomará los siguientes valores: 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10

$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

$f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$

$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

## b) Sección confinada por columnas (Fig. 2.3b):

$t$  = peralte total de la sección = 400 cms

$b$  = ancho del alma de la sección = 20 cms

$B$  = ancho del patín de la sección = 40 cms

$t'$  = peralte del patín de la sección = 40 cms

$\frac{t'}{t}$  = 0.10

$d$  = peralte efectivo = 380 cms

$\frac{d}{t}$  = 0.95

$q'_e = \frac{A_{s_e} f_y}{b t f'_c}$ ; tomará los siguientes valores: 0.02, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30

$q'_l = \frac{A_{s_l} f_y}{b t f'_c}$ ; tomará los siguientes valores: 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10

$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

$f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$

$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

c) Sección confinada por muros transversales (Fig. 2.3c):

$t$  = peralte total de la sección = 400 cms

$b$  = ancho del alma de la sección = 20 cms

$B$  = ancho del patín de la sección = 40 cms

$t'$  = peralte del patín de la sección = 20 cms

$$\frac{t'}{t} = 0.05$$

$d$  = peralte efectivo = 390 cms

$$\frac{d}{t} = 0.975$$

$$q'_e = \frac{A_{s_e}}{bt} \frac{f_y}{f_c}; \text{ tomará los siguientes valores: } 0.02, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30$$

$$q'_i = \frac{A_{s_1}}{bt} \frac{f_y}{f_c}; \text{ tomará los siguientes valores: } 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10$$

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

Para efectos de cálculo, el acero se discretizó como a continuación se explica:

Se denomina  $A_{s_e}$  al acero de los extremos colocado en las caras paralelas al eje de flexión y  $A_{s_1}$  al acero uniformemente distribuido colocado perpendicular al eje de flexión. El acero extremo está -- distribuido en igual cantidad en las dos caras opuestas; se discretizó como una área concentrada e igual a  $A_{s_e}/2$  en la parte superior y la misma cantidad en la parte inferior (Fig. 2.4).

El acero longitudinal está uniformemente repartido a lo largo de la sección, este refuerzo se discretizó en diez áreas de acero - iguales a  $A_{s_1}/10$ . Para la sección rectangular y la sección confinada por columnas, la separación de ese acero discretizado fue constante e igual a 40 cms.; para la sección confinada por muros trans

versales la variación también fue constante e igual a 40 cms., excepto en los aceros extremos donde la distancia fue de 50 cms., - como se muestra en la figura 2.4c.

La razón por la que el ancho del patín de la sección confinada por muros transversales y por columnas sea el doble del ancho del alma es porque se ha visto en ensayos de muros de concreto ante cargas laterales que esta zona de los patines es la que contribuye a la resistencia (Ref. 4).

## 2.2 Concepto de rigidez efectiva.

El valor de la pendiente de la recta tangente a un punto --- cualquiera de la curva  $M-\phi$  (momento-curvatura) de un elemento en flexocompresión, se denomina rigidez. Como se sabe, la curva ---  $M-\phi$  de un material elástico lineal es una línea recta, por lo que la expresión que define tal curva sería:

$$M = EI\phi$$

cuya representación geométrica se muestra en la Fig. 2.5.

Para un material de comportamiento no lineal la curva  $M-\phi$  - ya no es una línea recta, tal es el caso del concreto reforzado; por lo que al tomar en cuenta dicho comportamiento, la rigidez - varía para cada punto de la curva. Esta rigidez varía con el nivel de carga axial (P) y con la excentricidad (e) de dicha carga (Fig. 2.6), por lo que para una excentricidad dada se puede definir a la "rigidez efectiva" con la siguiente expresión:

$$(EI)_{ef} = \frac{\Delta M}{\Delta \phi}$$

en la figura 2.7 se aprecia mejor esta relación.

Con base en esta definición de "rigidez efectiva" se desarrollaron las gráficas que proporcionarán la variación de la rigidez



del elemento de concreto reforzado con respecto al nivel de flexocompresión.

### 3. PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA CALCULAR LA RIGIDEZ EFECTIVA

El procedimiento que se siguió para obtener las gráficas tiene características comunes para todos los casos y requiere un volumen extraordinario de trabajo, por lo que se hizo necesaria la adaptación de programas de computadora para obtener los resultados de una manera rápida. Los programas desarrollados siguen la misma secuencia, la que se explica a continuación:

Las variables generales del problema son:  $d/t$ ,  $q_e'$ ,  $q_1'$ ,  $P$ ,  $M$ ,  $e/t$ ,  $f_c'$ , y  $f_y$ , definidas en el capítulo 2. Las curvas  $(\beta, \alpha)$  ó de "rigidez efectiva" se construyeron para valores de  $e/t$  de: 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.5 y 3.0, para las distintas combinaciones de valores de  $q_e'$  y  $q_1'$  se determinó la variación de la rigidez con el nivel de carga axial "P" y con la excentricidad "e", para ello se emplearon las ecuaciones de equilibrio:

$$F_1 - P = 0$$

$$M_1 - P(e) = 0$$

Estas ecuaciones tienen como incógnita para el caso más general la profundidad del eje neutro y la deformación unitaria del -- concreto ( $\epsilon_c$ ).

La solución directa de este sistema de ecuaciones para un caso general resulta complicada ya que se trata de ecuaciones no lineales. En este trabajo se procedió a resolver las ecuaciones en forma iterativa, fijando el valor de la deformación superior del -- concreto ( $\epsilon_c$ ) y variando la profundidad del eje neutro. Una vez -- supuesta la deformación y establecida la profundidad del eje neutro, se define la distribución de deformaciones unitarias a todo -- lo largo de la sección.

A partir de las deformaciones unitarias se integran los es--- fuerzos y se determinan las resultantes parciales de fuerzas y momentos que serían:

a) Resultante del concreto:

Se obtiene a partir de la integración de la parábola de es fuerzos del concreto.

b) Resultante en el acero superior:

Se distinguen dos casos, acero fluyendo a compresión, o -- con esfuerzo menor que el de fluencia.

c) Resultante en el acero inferior:

Se distinguen tres casos: acero fluyendo en tensión, acero fluyendo en compresión y acero con esfuerzo menor al de -- fluencia.

d) Resultante del acero longitudinal:

Puesto que este acero está discretizado a todo lo largo de la sección, los esfuerzos generados en cada concentración dependen de la deformación unitaria en dicha concentración de acero.

Las fórmulas detalladas para el cálculo de las resultantes - parciales se presenta en el Apéndice A.

Para el cálculo del momento flexionante se tomó como brazo - de palanca la distancia (B), del centroide del acero, o del con- creto en compresión, al centroide de la sección transversal.

$$M = F \times B$$

Las resultantes totales (momento y fuerza axial) se calculan sumando todas las contribuciones parciales del acero y del con- creto.

Calculados la fuerza axial y el momento flexionante se pro- cede a determinar la excentricidad, como el cociente del momento entre la fuerza; esta excentricidad se compara con el valor prefijado. Si no coinciden, se realiza otra iteración modificando la profundidad del eje neutro; si coinciden, se pasa a calcular la - curvatura, que se determina como la relación entre la deformación unitaria de la fibra más alejada del eje neutro en compresión y - la profundidad (c) del eje neutro:  $\phi = \frac{e_c}{c}$ .

Una vez calculados los valores de P, M y  $\phi$  para la excentri- cidad y deformación prefijadas, se incrementa la excentricidad al siguiente valor prefijado, repitiéndose el procedimiento antes -- descrito. Cuando se llega a la última excentricidad buscada (cuan- do  $e/t = 3.0$ ), se cambia el valor de la deformación unitaria del concreto ( $\epsilon_c$ ), repitiéndose todo el procedimiento anterior. Fi- nalmente, esta etapa termina cuando se alcanza el valor de la de- formación máxima del concreto  $\epsilon_{cu} = 0.0041$ .

El siguiente paso es determinar la rigidez efectiva ( $(EI)_{ef}$ ), la cual se calculó de la siguiente forma:

Una vez calculados para diferentes deformaciones unitarias -

los valores de  $M_1$  y  $\phi_1$ , correspondientes a una determinada excentricidad ( $e_1$ ), se almacenaron en la memoria de la computadora. Si estos valores se graficaran obtendríamos un diagrama  $M-\phi$  como el de la figura 2.6.

Para calcular el  $(EI)_{ef}$  en un determinado punto ( $\phi_1, M_1$ ) se determina el valor de la pendiente de la tangente a ese punto; para esto se tomó un punto cercano anterior y otro posterior obteniéndose la pendiente media entre estos tres puntos (Fig. 3.1). Se pueden utilizar otros criterios para calcular la rigidez efectiva; se escogió el anterior para facilitar los cálculos y por los buenos resultados que se observaron en comparación con ensayos experimentales (Refs. 1 y 2). Por lo tanto, la rigidez buscada será (Fig. 3.1):

$$(EI)_{ef} = \frac{(EI)_1 + (EI)_2}{2}$$

Como ya se mencionó, las gráficas se presentan en función de parámetros adimensionales para que sean de aplicación general. El adimensionamiento se realizó dividiendo las longitudes y las excentricidades entre el peralte total de la sección  $t$ ; las áreas entre  $bt$ , siendo  $b$  el espesor del muro para aquellos con sección rectangular, o el espesor del alma en muros de sección I; las fuerzas axiales entre  $bt^3f_c'$  y la rigidez entre  $bt^3f_c'$ . Los listados de los programas, para cada sección, se presentan en el Apéndice B.

Luego para trazar las curvas  $(\beta, \alpha)$  o de rigidez efectiva, se ordenó a la computadora imprimir los resultados necesarios.

Para una cierta sección transversal de muro los valores que se imprimieron fueron:

$$q_e', q_1', \frac{d}{t}, \beta = \frac{EI}{bt^3f_c'}, \quad \alpha = \frac{P}{bt^3f_c'}, \frac{e}{t}, e_c$$

Finalmente, cada punto de cada curva quedaba definido por la terna  $(e/t, \beta, \alpha)$  (Fig. 3.2) y de esta manera se procedió a trazar las gráficas del Apéndice C.

Así, el uso de las gráficas resulta sencillo; si se tienen como datos la forma de la sección,  $P, M, f'_c$  y  $q'$  puede obtenerse  $\alpha = \frac{P}{bt f'_c}, \frac{d}{t}, \frac{e}{t}$  y con las gráficas determinar el valor de  $\beta = \frac{EI}{bt^3 f'_c}$ , o viceversa, dado el valor de  $\beta$  puede obtenerse  $\alpha$  conociendo los datos necesarios.

#### 4. METODO SIMPLIFICADO PARA EL CALCULO DE LA RIGIDEZ EFECTIVA

En este capítulo se presenta un método aproximado para calcular la rigidez efectiva sin tener que usar las gráficas del -- Apéndice C.

Este criterio se basa en la suposición de que la rigidez total es la suma de la rigidez proporcionada por el acero más la del concreto.

##### 4.1 Contribución del acero de refuerzo a la rigidez efectiva.

La figura 4.1 muestra en forma adimensional la contribución del acero a la rigidez. En esta gráfica se representa la variación de la rigidez proporcionada por el acero con la cuantía de refuerzo; para el caso de acero longitudinal habrá que multiplicar el valor obtenido por 7/19 por la razón que se explicará más adelante. La rigidez proporcionada por el acero será entonces la suma de las contribuciones del acero extremo y del acero longitudinal. Esta gráfica es aplicable a cualquier sección trans-

versal del muro.

Para determinar los puntos de la gráfica 4.1 se procedió de la siguiente manera. Considerando el caso del acero colocado en los extremos, se tiene (Fig. 4.2):

$$I_{s_e} = A_{s_e} \left( \frac{d - d'}{2} \right)^2$$

$$A_{s_e} = q'_e \frac{b t f'_c}{f_y} ; \text{área de acero en los extremos}$$

$$I_{s_e} = q'_e \frac{b t f'_c}{f_y} \left( \frac{d - d'}{2} \right)^2$$

$$I_{s_e} = q'_e \frac{b t^3 f'_c}{f_y} \left( \frac{d - d'}{2t} \right)^2$$

$$\frac{E I_{s_e}}{b t^3 f'_c} = \frac{1}{\epsilon_y} q'_e \left( \frac{d - d'}{2t} \right)^2 = \frac{1}{4 \epsilon_y} q'_e \left( \frac{d - d'}{t} \right)^2$$

pero

$$d' = t - d$$

entonces

$$\frac{d - d'}{t} = \frac{d - t + d}{t} = \frac{2d - t}{t} = 2 \left( \frac{d}{t} - \frac{1}{2} \right)$$

sustituyendo

$$\frac{E I_{s_e}}{b t^3 f'_c} = \frac{1}{4 \epsilon_y} q'_e \left( 2 \left( \frac{d}{t} - \frac{1}{2} \right) \right)^2$$

finalmente

$$\frac{E I_{s_e} \epsilon_y}{b t^3 f'_c} = q'_e \left( \frac{d}{t} - \frac{1}{2} \right)^2$$



luego, para distintas relaciones  $\frac{d}{t}$  y variando los valores de  $q'_e$  se obtuvieron las curvas de la figura 4.1.

Ahora para el acero longitudinalmente distribuido, se tiene (Fig. 4.3):

Obteniéndose un espesor ficticio  $b'$  del acero longitudinal de la siguiente manera:

$$A_{s_1} = q'_1 b t \frac{f'_c}{f'_y} = (d - d') b' ; \text{área de acero longitudinal}$$

$$b' = q'_1 b \frac{f'_c}{f'_y} \left( \frac{t}{d - d'} \right) ; \text{espesor ficticio del acero longitudinal}$$

luego

$$I_{s_1} = \frac{1}{12} b' (d - d')^3$$

$$I_{s_1} = \frac{1}{12} q'_1 b \frac{f'_c}{f'_y} \left( \frac{t}{d - d'} \right) (d - d')^3$$

$$\frac{EI_{s_1}}{bt^3 f'_c} = \frac{1}{12} \frac{1}{\epsilon_y} q'_1 \frac{1}{t^2} (d - d')^2 = \frac{1}{12} \frac{1}{\epsilon_y} q'_1 \left( \frac{d - d'}{t} \right)^2$$

pero

$$\frac{d - d'}{t} = 2 \left( \frac{d}{t} - \frac{1}{2} \right)$$

entonces

$$\frac{EI_{s_1}}{bt^3 f'_c} = \frac{4}{12} \frac{1}{\epsilon_y} q'_1 \left( \frac{d}{t} - \frac{1}{2} \right)^2$$

finalmente

$$\frac{EI_{s_1}}{bt^3 f'_c} \epsilon_y = \frac{1}{3} q'_1 \left( \frac{d}{t} - \frac{1}{2} \right)^2$$

Debido a la discretización del acero de refuerzo usada en los programas de computación (Fig. 2.4) para el cálculo de las resultantes parciales (fuerza y momento), el valor anterior de la -- contribución a la rigidez del acero longitudinal se modificó ligeramente presentando la siguiente forma aproximada para el rango --  $0.8 \leq \frac{d}{t} \leq 0.98$ :

$$\frac{EI_{s_1} \epsilon_y}{bt^3 \frac{f_c}{C}} = \frac{7}{19} q_1' \left( \frac{d}{t} - \frac{1}{2} \right)^2$$

Este valor puede obtenerse con la misma gráfica 4.1, solamente se tendrá que tomar  $q_1' = q_1'$ , y multiplicar el valor obtenido por el factor 7/19.

Del análisis de los resultados se observó que la contribución del acero a la rigidez de un miembro en flexión pura era 1.25 veces mayor. El porque de esto se menciona en el inciso siguiente.

En la Tabla 4.1 se presenta en resumen los valores con -- que contribuye el acero a la rigidez, según la etapa de comportamiento.

#### 4.2 Contribución del concreto a la rigidez efectiva.

La rigidez que proporciona el concreto depende de la etapa de comportamiento en que se encuentre. Para esto se consideraron --- tres etapas de comportamiento: a) etapa de compresión; b) etapa de flexocompresión y c) etapa de flexión. Estas etapas corresponden cuando la relación de excentricidad a longitud del muro varía aproximadamente de 0.0 a 0.2, de 0.2 a 1.0 y de 1.0 a  $\alpha$ , respectivamente.

La Tabla 4.1 presenta los valores que se obtuvieron de sintetizar las gráficas del Apéndice C y resume los valores aproximados de la rigidez que proporciona el concreto según la etapa de comportamiento.

El criterio que se siguió para la obtención de estos valores fue el siguiente:

Se tomará el caso de la sección transversal rectangular; para su análisis se tomaron todas las gráficas del Apéndice C que corresponden a esta sección. Luego, para cada una de ellas, por ejemplo, la de la figura 4.5a, correspondiente a  $q'_e = 0.02$ , - - -  $q'_1 = 0.02$  y para  $\alpha = 0.0$ , se localizó el valor de  $\beta$  para la etapa de compresión, la que se definió de la siguiente manera: el valor máximo de  $\beta$  se determinó prolongando la curva  $e/t = 0.05$  hasta intersectar el eje  $\alpha$ ; este valor representa la rigidez de la sección cuando no está agrietada, o sea, la etapa de compresión.

Con esta terna de valores ( $q'_e, q'_1, \beta_{\max}$ ) se obtiene el punto 1 de la fig. 4.5b. Para localizar los demás puntos se procedió de la misma manera con las figuras restantes de la sección rectangular. Uniendo los puntos correspondientes a un mismo valor de  $q'_e$ , estos se alinean en forma muy aproximada sobre una línea recta.

Prolongando cada una de estas rectas hasta cortar el eje horizontal se puede obtener el valor de la contribución del concreto y del acero de los extremos ( $\beta_1$ ); para determinar solo la contribución del concreto a la rigidez ( $K$ ), es necesario determinar el punto  $\beta$  correspondiente a una cuantía nula del acero de los extremos; para lo anterior, se plantearon ecuaciones de la siguiente manera:

$$K_1 + \gamma R_{e_1} = \beta_1 \quad (\text{ec. 2})$$

El valor de  $R_{e_1}$  es la contribución a la rigidez en compresión del acero extremo, el cual se determinó de la figura 4.1. -- Luego, para cada par de ecuaciones se despejaba el valor de  $K_1$  y promediando los valores calculados se encontró que  $K = 49.6$  y  $\gamma$  era igual a 1; por facilidad de cálculo,  $K$  se tomó igual a 50.

Luego, se procedió a la obtención del valor con que contribuye el concreto a la rigidez en la etapa de flexión. El procedimiento fué el mismo que se usó en la etapa de compresión, sólo que los valores de  $\beta$  tomados de las gráficas del Apéndice C corresponden a los valores mínimos de  $\beta_{min}$ ; estos valores mínimos de  $\beta$  se localizaron trazando una línea por el quiebre de las curvas  $e/t$  hasta intersectar el eje  $\alpha$ , como se muestra en la figura 4.5a. Este valor representa la rigidez de la sección cuando comienza a fluir el acero de refuerzo en tensión.

De la misma manera se plantearon las diferentes ecuaciones, encontrándose un promedio para la rigidez del concreto en flexión de 4.5, el cual en la Tabla 4.1 se puso en función de K.

Además, se observó que para que se cumpliera la igualdad en la ecuación 2, el valor de  $\gamma$  era igual a 1.25; este hecho no puede explicarse totalmente, pero consistentemente era necesaria su aplicación para alcanzar la igualdad. Es por eso que se mencionó en el inciso anterior que la rigidez en flexión proporcionada por el acero era 1.25 veces mayor a la de compresión.

Por último, se procedió a determinar el valor promedio de la rigidez del concreto en la etapa de flexocompresión.

Para definir esta etapa se optó, en las gráficas del Apéndice C, por determinar los valores de  $\beta$  para dos zonas, una de las cuales abarcaría dos intervalos de excentricidad: el primero para  $e/t < 0.6$  y el segundo para  $0.6 \leq e/t \leq 1.0$ . La segunda zona se restringiría para valores bajos de la relación  $P/P_u$  (menor de 0.5) y  $e/t < 0.3$ .

Los dos intervalos de la primera etapa, se determinaron dividiendo para cada curva su  $P_u$  entre 1.4, esto para suponer que el elemento esta bajo condiciones de trabajo. El valor de  $P_u$  puede obtenerse de las mismas gráficas del Apéndice C o de los programas de computadora elaborados. En las gráficas del Apéndice C la  $P_u$

es el punto de cada curva más cercano al eje de las ordenadas. El valor de  $P_u/1.4$  se marcó con una x como se muestra en la figura - 4.5a. Luego, se trazaron tres líneas verticales, una pasando por el punto extremo derecho y las otras por los puntos correspondientes a  $e/t$  igual a 0.6 y 1.0; de esta manera se tiene la primera - zona dividida en los dos intervalos de excentricidad dados.

Para cada uno de estos intervalos y cada gráfica del Apéndice C se obtuvo un valor promedio de  $\beta$  ( $\beta_{med.1}$  y  $\beta_{med.2}$ ), al cual se le restó la contribución a la rigidez de los aceros longitudinal y extremo, obteniéndose de ésta manera la contribución del concreto a la rigidez en la primera zona de flexocompresión y para cada intervalo de excentricidad.

Para el intervalo de  $e/t < 0.6$  el valor promedio de la contribución del concreto a la rigidez fue 18; el rango de los valores calculados estuvo entre 16 y 19; para el intervalo  $0.6 \leq e/t \leq 1$  el valor promedio fué 13, rango comprendido entre 10 y 16.

Ambos valores son para secciones rectangulares y se presentan en la Tabla 4.1 en función del valor de la contribución del concreto a la rigidez (K) en compresión.

La segunda zona se definió para los límites de  $\frac{P}{P_u} < 0.5$  y  $e/t < 0.3$ . Para este caso se dividió la  $P_u$  entre 2 sólo para las curvas de excentricidad entre 0.05 y 0.3. Estos puntos se marcaron con \* como se muestra en la figura 4.5a. Este caso sería para cuando los muros tuvieran un nivel bajo de carga axial y de momento flexionante.

También por los puntos extremos se trazaron dos rectas verticales para acotar esta zona; para cada gráfica se obtuvo entonces un valor promedio de  $\beta$  ( $\beta_{med.3}$ ), que al restarle la contribución a la rigidez de los aceros longitudinal y extremo se determinó el valor promedio de la contribución del concreto a la rigidez en es

ta zona. El valor fue 29 para las secciones rectangulares. También este valor se presenta en la Tabla 4.1 en función del valor de la contribución del concreto (K) en compresión. De la misma manera se obtuvieron los valores correspondientes a los muros con secciones I, los cuales también se resumen en la Tabla 4.1.

#### 4.3 Método simplificado.

Como se ve estos valores son sólo valores promedio aproximados; sin embargo, en la referencia 1 se demuestra que el método que se propone es suficientemente aproximado; en el Cap. 5 se presenta un ejemplo al respecto. Como se mencionó al principio del capítulo el método se basa en que la rigidez efectiva total es la suma de la contribución del acero más la del concreto.

$$(EI)_{ef} = (EI)_s + (EI)_c \quad (\text{ec. 3})$$

El valor de  $(EI)_s/bt^3f'_c$  se puede obtener de la figura 4.1 y el valor de  $(EI)_c/bt^3f'_c$  de la Tabla 4.1, dependiendo de la etapa en que se encuentra trabajando el elemento de concreto reforzado.

#### 4.4 Efecto de cargas de larga duración en la rigidez efectiva.

Como se mencionó en el capítulo 2, la manera más sencilla de tomar en cuenta los efectos de las cargas sostenidas de larga duración es afectando por un cierto factor la rigidez proporcionada por el concreto según la ecuación 3. En un estudio realizado (Ref. 3) se encontró que dicho factor sería:

$$\psi = 0.75 + 1.8 \gamma_p \geq 1.0$$

en donde

$\gamma_p$  relación de carga muerta de diseño a carga total de diseño

Luego la rigidez efectiva tomando en cuenta dichos efectos sería:

$$(EI)_{ef} = \frac{(EI)_c}{\psi} + (EI)_s$$

Esto mismo se puede hacer cuando la rigidez total del miembro se obtiene de las figuras del Apéndice C, a cuyos valores se resta la contribución del acero (figura 4.1) quedando solamente la contribución del concreto, la que se modificaría con el factor  $\psi$ .

#### 4.5 Módulo de elasticidad del concreto.

Los valores obtenidos del módulo de elasticidad del concreto en las referencias 1, 2 y 5 son muy aproximados al obtenido para nuestro caso. De la Tabla 4.1, el valor de K para secciones rectangulares es 50. Luego se puede plantear la siguiente ecuación.

$$\frac{(EI)_c}{bt^3 f'_c} = 50$$

Tomando el valor de I igual al momento de inercia de la sección gruesa, puesto que el elemento se encuentra en compresión, se tiene:

$$E_{c1} = \frac{50 bt^3 f'_c}{\frac{bt^3}{12}}$$

$$E_{c1} = 600 f'_c$$

Para valores de  $150 \leq f'_c \leq 250$  este valor es muy aproximado al valor  $E_{c2} = 8500 \sqrt{f'_c}$  obtenido experimentalmente en la referencia 5 y analíticamente en las referencias 1 y 2. Para  $f'_c > 250$  se recomienda usar el valor de  $E_{c2}$ .

## 5. EJEMPLO DE APLICACION

En éste ejemplo se hace ver que las rigideces relativas que se suponen durante el análisis de una estructura, no concuerdan en general con las rigideces "reales" una vez que se han dimensionado los elementos. Este ejemplo también da una idea de como deben usarse las gráficas del Apéndice C, así como el método simplificado presentado en el capítulo 4.

En la figura 5.1 se muestran las características del marco ó sistema plano propuesto para ser analizado. Las acciones a las que está sometida la estructura propuesta, así como el análisis estructural del mismo se presentan en el Apéndice D.

Para fines comparativos solo se diseñó el muro y una columna (barras 1 y 8, Apéndice D), ambos en el primer entrepiso, puesto que es donde los elementos están más esforzados. - En el siguiente cuadro se muestran las cargas de trabajo obtenidas en el análisis, y las cargas últimas con las que se di-



mencionaron el muro y la columna mencionadas.

| Cargas de Trabajo        |                |                                  |  |                          |                       |              |
|--------------------------|----------------|----------------------------------|--|--------------------------|-----------------------|--------------|
|                          |                | MO.M.<br>SUP.<br>(t-m)           | MO.M.<br>INF.<br>(t-m)                       | CARGA<br>AXIAL<br>(ton)  | CORTAN<br>TE<br>(ton) | $e_t$<br>(m) |
| COLUMNA                  | Carga Vertical | -1.221                           | +0.685                                       | +20.443                  | -0.477                | 0.08         |
|                          | Sismo          | -2.36                            | +4.83  | +11.537                  | -1.798                |              |
| MURO                     | Carga Vertical | +3.716                           | +4.585                                       | +108.708                 | -0.217                | 0.29         |
|                          | Sismo          | +54.96                           | +185   | -5.771                   | -32.51                |              |
| Cargas Ultimas de Diseño |                |                                  |  |                          |                       |              |
|                          |                | $P_u$<br>(ton)                   | $M_u$<br>(t - m)                             | $V_u$<br>(ton)           | $e_u$<br>(m)          |              |
| COLUMNA                  |                | 1.1(20.443 +<br>11.537) = 31.98  | 1.1(0.685+4.83)+<br>+31.98(0.02)=6.71        | 1.1(0.447+<br>1.798)=2.5 | 0.21                  |              |
| MURO                     |                | 1.1(108.708 -<br>5.771) =113.231 | 1.1(4.585+185)+<br>113.231(0.25)=<br>263.852 | 1.1(0.217+<br>32.51)=36  | 2.09                  |              |

El proceso de dimensionamiento del muro y de la columna se excluye de éste trabajo y solo se presentan los armados finales en la figura 5.2; éstos armados se determinaron según los criterios propuestos por el Reglamento del D.D.F.

A continuación se detalla el cálculo de las rigideces para los armados del muro y la columna, de acuerdo a los Reglamentos

del D.D.F. y del ACI, así como también empleando las gráficas (B,a) y el método simplificado propuesto.

## 5.1 Cálculo de la rigidez del muro.

### 5.1.1 Reglamento D.D.F.

$$EI = 0.4 E_c I_g$$

$$f'_c = 150 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c} = 10\,000 \sqrt{150} = 122\,474 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{15 (500)^3}{12} = 1.5625 \times 10^8 \text{ cm}^4$$

$$EI = 0.4 (122\,474) (1.5625 \times 10^8)$$

$$EI = 7.65 \times 10^{12} \text{ kg-cm}^2$$

### 5.1.2 Reglamento ACI

$$EI = \frac{E_c I_g}{5} + E_s I_s$$

$$f'_c = 150 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_c = 15\,000 \sqrt{f'_c} = 15\,000 \sqrt{150} = 183\,712 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{15 (500)^3}{12} = 1.5625 \times 10^8 \text{ cm}^4$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_s = 2 (1.98) \{ (45)^2 + (90)^2 + (135)^2 + (180)^2 + (225)^2 \}$$

$$I_s = 441\,045 \text{ cm}^4$$

$$EI = \frac{183\ 712 (1.5625 \times 10^8)}{5} + 2 \times 10^6 (441\ 045)$$

$$EI = 6.62 \times 10^{12} \text{ kg-cm}^2$$

### 5.1.3 Figuras (B,a) del Apéndice C.

Es importante hacer notar que para el cálculo de resistencia se debe emplear el valor de  $q$  definido en el Reglamento del D.D.F. como  $q = p \frac{f_y}{f_c}$ , y para el cálculo de rigideces se usará el valor  $q'$  definido en éste trabajo como  $q' = p \frac{f_y}{f_c}$ , por lo que la relación entre ambos estará dada por:  $q' = 0.85 q$ .

Además, las rigideces relativas entre los miembros se buscarán para las cargas de trabajo, ya que se considera que los elementos estarán sujetos a ésta condición la mayor parte de su vida útil.

Para utilizar las gráficas (B,a) se tienen los siguientes datos:

$$\frac{d}{t} = 0.95; \frac{t'}{t} = 0; \frac{B}{b} = 1; f'_c = 150 \text{ kg/cm}^2; f^*_c = 120 \text{ kg/cm}^2$$

Para calcular la excentricidad se toma en cuenta la excentricidad accidental que puede presentarse; de acuerdo al Reglamento del D.D.F. ésta excentricidad es igual a 0.05 ( $t$ ) pero no menor de 2 cm.

$$\frac{e_t}{t} = \frac{4.585 + 108.708 (0.25)}{108.708 (5.0)} = 0.058$$

$$q'_1 = p \frac{f_y}{f_c} = \frac{21.78}{500 (15)} \frac{4000}{120} = 0.097$$

$$a = \frac{P_t}{F.R. \cdot b t f^*_c} = \frac{108.708 \times 10^3}{0.85 (500) (15) (120)} = 0.141$$

De las gráficas del Apéndice C se interpolará para los datos anteriores para obtener la rigidez.

Primero para  $q_1' = 0.10$  y  $e/t$  entre 0.5 y 0.10

$$q_1' = 0.10; e/t = 0.05; \alpha = 0.141 \rightarrow \beta = 45.7$$

$$q_1' = 0.10; e/t = 0.10; \alpha = 0.141 \rightarrow \beta = 46.0$$

Interpolando para  $e/t = 0.058$  se obtiene  $\beta = 45.75$

Ahora para:

$$q_1' = 0.08; e/t = 0.05; \alpha = 0.141 \rightarrow \beta = 45.5$$

$$q_1' = 0.08; e/t = 0.10; \alpha = 0.141 \rightarrow \beta = 45.2$$

Interpolando para  $e/t = 0.058$  se obtiene  $\beta = 45.45$

Ahora interpolando entre  $q_1' = 0.10$  y  $q_1' = 0.08$  para  $q_1' = 0.097$  obtenemos finalmente:

$$\beta = 45.70$$

de donde:

$$EI = \beta b t^3 f_c^*$$

$$EI = 45.70 (15) (500)^3 (120)$$

$$EI = 1.028 \times 10^{13} \text{ kg-cm}^2$$

#### 5.1.4 Método simplificado del capítulo 4

Para determinar la rigidez efectiva con este método se usó la figura 4.1 y la Tabla 4.1.

De la figura 4.1, para  $q_1' = 0.097$  se obtiene:

$$\frac{(EI)_{s1} \epsilon_y}{bt^3 f_c} = 0.0072$$

para  $\epsilon_y = 0.002$  puesto que  $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$

$$\frac{(EI)_{s1}}{bt^3 f_c} = 3.62$$

$$(EI)_{s1} = 3.62 (15) (500)^3 (120)$$

$$(EI)_{s1} = 8.141 \times 10^{11} \text{ kg-cm}^2$$

Como con el método simplificado solo se obtienen valores aproximados es necesario emplear un criterio adecuado basado en la forma en que se obtuvo la Tabla 4.1 para determinar con más exactitud el valor de la rigidez. Debido a que el nivel de carga axial es muy bajo comparado con la carga última - y a que la relación  $e/t$  es muy pequeña, podemos tomar el valor de la rigidez proporcionada por el concreto en la etapa de compresión ( $K = 50$ ) o un valor promedio entre ésta etapa y la de flexocompresión para  $P/P_u < 0.5$  ( $K = (1 + 0.55) 50/2 = 38.8$ ).

Para el primer caso:

$$\frac{(EI)_c}{bt^3 f_c} = 50$$

$$(EI)_c = 50 (15) (500)^3 (120)$$

$$(EI)_c = 1.125 \times 10^{13} \text{ kg-cm}^2$$

por lo que:

$$EI = (EI)_{s1} + (EI)_c$$

$$EI = 1.206 \times 10^{13} \text{ kg-cm}^2$$

ahora para cuando  $K = 38.8$

$$\frac{(EI)_c}{Et f_c} = 38.8$$

$$(EI)_c = 38.8 (15)^3 (500)^3 (120)$$

$$(EI)_c = 8.73 \times 10^{12} \text{ kg-cm}^2$$

luego

$$EI = 8.141 \times 10^{11} + 8.73 \times 10^{12}$$

$$EI = 0.954 \times 10^{13} \text{ kg-cm}^2$$

el cual es un valor más aproximado al obtenido con las gráficas  $(\beta, \alpha)$ .

5.1.5 Relaciones entre la rigidez del muro obtenida con las figuras  $(\beta, \alpha)$  y las obtenidas con el RDDF, el ACI y el método simplificado:

$$\frac{(EI) \text{ (figuras)}}{(EI) \text{ (RDDF)}} = \frac{1.028 \times 10^{13}}{7.65 \times 10^{12}} = 1.34$$

$$\frac{(EI) \text{ (figuras)}}{(EI) \text{ (ACI)}} = \frac{1.028 \times 10^{13}}{6.62 \times 10^{12}} = 1.55$$

$$\frac{(EI) \text{ (Figuras)}}{(EI) \text{ (M.S.)}} = \frac{1.028 \times 10^{13}}{1.206 \times 10^{13}} = 0.85 \quad \frac{1.028 \times 10^{13}}{0.954 \times 10^{13}} = 1.08$$

## 5.2 Cálculo de rigidez de la columna.

### 5.2.1 Reglamento D.D.F.

$$EI = 0.4 E_c I_g$$

$$f'_c = 150 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c} = 10\,000 \sqrt{150} = 122\,474 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{(30)(30)^3}{12} = 67\,500 \text{ cm}^4$$

$$EI = 0.4 (122\,474) (67\,500)$$

$$EI = 3.307 \times 10^9 \text{ kg-cm}^2$$

### 5.2.2 Reglamento ACI

$$EI = \frac{E_c I_g}{5} + E_s I_s$$

$$f'_c = 150 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_c = 15\,000 \sqrt{f'_c} = 15\,000 \sqrt{150} = 183\,712 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{(30)(30)^3}{12} = 67\,500 \text{ cm}^4$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_s = 2 (0.71) \{2(4.5)^2 + 2(9)^2 + 5(13.5)^2\}$$

$$I_s = 1581.53 \text{ cm}^4$$

$$EI = \frac{183\,712 (67\,500)}{5} + 2 \times 10^6 (1581.53)$$

$$EI = 5.64 \times 10^9 \text{ kg-cm}^2$$

### 5.2.3 Figuras (8,a) del Apéndice C de la referencia 2.

Para utilizar éstas gráficas se tienen los siguientes datos:

$$\frac{d}{t} = 0.95; \quad \frac{e_t}{t} = \frac{1.221 + 20.443 (0.02)}{20.443 (0.30)} = 0.267;$$

$$q' = \frac{14.18}{(30)^2} \times \frac{4000}{120} = 0.525$$

$$\alpha = \frac{P_t}{F.R. \cdot b t f_c^*} = \frac{20.443 \times 10^3}{(0.85)(30)^2(120)} = 0.227$$

De las gráficas de la referencia 2 se interpolará para los datos anteriores.

Para:

$$q' = 0.5; e/t = 0.20; \alpha = 0.227 \rightarrow \beta = 71.09$$

$$q' = 0.5; e/t = 0.30; \alpha = 0.227 \rightarrow \beta = 64.84$$

Interpolando para  $e/t = 0.267$  se obtiene  $\beta = 66.90$

Ahora para:

$$q' = 0.6; e/t = 0.20; \alpha = 0.227 \rightarrow \beta = 78.13$$

$$q' = 0.6; e/t = 0.30; \alpha = 0.227 \rightarrow \beta = 73.05$$

por lo que para  $e/t = 0.267$  se tendría  $\beta = 74.73$ .

Interpolando entre  $q' = 0.5$  y  $q' = 0.6$  para  $q' = 0.525$ , obtenemos finalmente:

$$\beta = 68.86$$

de donde

$$EI = \beta b t^3 f_c^*$$

$$EI = 68.86 (30)^4 (120)$$

$$EI = 6.69 \times 10^9 \text{ kg-cm}^2$$



#### 5.2.4 Método simplificado del capítulo 4.

También para éste caso se uso la figura 4.1 y la Tabla 4.1 para determinar la rigidez del elemento. Los resultados obtenidos son comparables con los de las gráficas presentadas en las referencias 1 y 2 lo que da generalidad a la Tabla 4.1.

De la figura 4.1, para  $q'_e = 0.263$  y  $q'_1 = 0.263$ , se obtiene:

$$\frac{(EI)_{se}}{bt^3f_c} \epsilon_y = 0.0533$$

$$\frac{(EI)_{sl}}{bt^3f_c} \epsilon_y = 0.0196$$

para  $\epsilon_y = 0.002$  puesto que  $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$

$$\frac{(EI)_{se}}{bt^3f_c} = 26.65$$

$$\frac{(EI)_{sl}}{bt^3f_c} = 9.8$$

de donde

$$\frac{(EI)_s}{bt^3f_c} = \frac{(EI)_{se}}{bt^3f_c} + \frac{(EI)_{sl}}{bt^3f_c}$$

$$\frac{(EI)_s}{bt^3f_c} = 36.45$$

$$(EI)_s = 36.45 (30)^4 (120)$$

$$(EI)_s = 3.543 \times 10^9 \text{ kg-cm}^2$$

En éste caso, podemos aplicar el mismo criterio expuesto - para el cálculo de la rigidez del muro:

$$\frac{(EI)_C}{5t^3 f_c^*} = K;$$

$$K = 0.55 \quad K = 0.55 (50) = 27.5$$

$$(EI)_C = 27.5 (30)^4 (120)$$

$$(EI)_C = 2.673 \times 10^9 \text{ kg-cm}^2$$

de donde

$$EI = (EI)_S + (EI)_C$$

$$EI = 6.216 \times 10^9 \text{ kg-cm}^2$$

5.2.5 Relaciones entre la rigidez de la columna obtenida con las figuras (8,a) y las obtenidas con el RDDF, el ACI y el método -- simplificado.

$$\frac{(EI) \text{ (Figuras)}}{(EI) \text{ (RDDF)}} = \frac{6.69 \times 10^9}{3.307 \times 10^9} = 2.02$$

$$\frac{(EI) \text{ (Figuras)}}{(EI) \text{ (ACI)}} = \frac{6.69 \times 10^9}{5.64 \times 10^9} = 1.19$$

$$\frac{(EI) \text{ (Figuras)}}{(EI) \text{ (M.S.)}} = \frac{6.69 \times 10^9}{6.216 \times 10^9} = 1.08$$

### 5.3 Alternativas Propuestas.

Es de hacer notar que tanto los armados finales como las rigideces obtenidas, son para cargas de corta duración. Si se quieren considerar los efectos a largo plazo habría que afectar el valor de la rigidez proporcionada por el concreto por el factor  $\psi$  dado en el capítulo 4. Un ejemplo más detallado al respecto se encuentra en la referencia 2.

A continuación se resumen en la siguiente tabla los valores de rigidez obtenidos para el muro y la columna, así como la rigidez relativa entre ambos.

| PROCEDIMIENTO                  | RIGIDEZ DEL MURO<br>(kg-cm <sup>2</sup> ) | RIGIDEZ DE LA COLUMNA<br>(kg-cm <sup>2</sup> ) | RIGIDEZ RELATIVA<br>(adimensional) |
|--------------------------------|---|--|------------------------------------|
| RDFF                           | $7.65 \times 10^{12}$                     | $3.307 \times 10^9$                            | 2315                               |
| ACI                            | $6.62 \times 10^{12}$                     | $5.64 \times 10^9$                             | 1175                               |
| FIGURAS<br>( $\beta, \alpha$ ) | $1.028 \times 10^{13}$                    | $6.69 \times 10^9$                             | 1540                               |
| METODO<br>SIMPLIFICADO         | $0.954 \times 10^{13}$                    | $6.216 \times 10^9$                            | 1535                               |

Como era de esperarse, de la tabla anterior se observa que la rigidez relativa entre muro y columna no es la supuesta para el análisis ((EI) muro = 100 (EI) columna).

A continuación se presentarán tres alternativas con las que se podría hacer que las rigideces relativas supuestas para el análisis sean las mismas una vez diseñados los miembros.

En la primera alternativa se varían las propiedades geométricas de la columna, así como la distribución del acero de refuerzo de ésta, tomándose constante la rigidez del muro obtenida con las gráficas ( $\beta, \alpha$ ).

En la segunda alternativa la rigidez de la columna obtenida con las gráficas ( $\beta, \alpha$ ) se deja constante, variándose la geometría del muro.

En la tercera alternativa se cambia la rigidez relativa entre muro y columna de 100 a 500, así como la longitud horizontal del muro de 5 m a 2 m, procediéndose a diseñar la columna; en base a la rigidez de la columna dimensionada se dimensiona el muro con ayuda del método simplificado presentado.

### 5.3.1 Primera Alternativa

Puesto que el muro se diseñó para los requisitos mínimos de refuerzo y espesor, se tendrán que variar las características de la columna para cumplir con la rigidez relativa supuesta y cumplir a la vez el requisito de resistencia.

De la tabla anterior tomaremos el valor de la rigidez -- del muro obtenido con las gráficas ( $\beta, \alpha$ ) puesto que es el valor más "real". Para que se cumpla entonces la relación de rigideces tendremos:

$$(EI)_{\text{columna}} = \frac{1.028 \times 10^{13}}{100}$$

$$\frac{(EI)_{\text{columna}}}{bt^3 f_c^3} = \frac{1.028 \times 10^{11}}{bt^3 f_c^3}$$

Como se observa, podemos variar los valores de  $b$ ,  $t$  y  $f_c'$  para obtener la condición deseada.

Para escoger la gráfica adecuada se puede seguir el criterio siguiente: cuando la columna esté trabajando para cargas últimas su rigidez será cercana a cero y bajo cargas de trabajo la rigidez deberá ser la supuesta para el análisis. Además, para que la estructura proporcione seguridad, la carga de trabajo debe caer en la parte de la curva donde el acero todavía no fluye. Esto se muestra en la figura 5.3.

Siguiendo éste criterio y para los valores supuestos de  $\frac{d}{t} = 0.95$ ,  $b = 40$  cm.,  $t = 50$  cm., y  $f_c' = 200$  kg/cm<sup>2</sup> se obtiene:

$$\beta = \frac{(EI)_{\text{columna}}}{bt^3 f_c^3} = \frac{1.028 \times 10^{11}}{40 (50)^3 (160)} = 128.50$$

$$\alpha = \frac{P_t}{(F.R) b t f_c^3} = \frac{20.443 \times 10^3}{(0.85) 40 (50) (160)} = 0.075$$

$$\frac{e_t}{t} = \frac{1.221 + 20.443 (0.025)}{20.443 (0.50)} = 0.17$$

Con éstos valores se busca una gráfica (Ref. 1 y 2) que satisfaga la condición  $(\beta, \alpha)$  deseada. Se encontró que en la gráfica 8 de la Referencia 1 se obtiene aproximadamente ésta condición. La Fig. 5.4 muestra la gráfica 8 en la cual se señala el punto  $(\beta, \alpha)$  para  $e/t = 0.17$ ; de aquí que podríamos usar una columna con los valores dados de  $d/t$ ,  $b$ ,  $t$ ,  $f'_c$  y  $q' = 0.80$  con la distribución de acero de refuerzo que se muestra en la misma gráfica 8.

Como se ve en la figura 5.4 se está trabajando con un nivel de carga muy bajo (condición de cargas últimas), en comparación con la capacidad del punto A. Esto quiere decir que aunque se tenga la rigidez deseada, la columna estará sobrada, es decir, estará trabajando a niveles bajos de carga con respecto a su capacidad de carga última.

### 5.3.2 Segunda Alternativa

En ésta alternativa se considera que se puede cambiar la longitud horizontal del muro, y por tanto su rigidez, y de ésta manera conservar la rigidez inicial de la columna dimensionada. La rigidez que se obtuvo para la columna con el armado final es:

$$(EI)_{\text{columna}} = 6.69 \times 10^9 \text{ kg-cm}^2$$

luego para cumplir con la rigidez relativa del análisis se tendría:

$$(EI)_{\text{muro}} = 100 (EI)_{\text{columna}}$$

$$(EI)_{\text{muro}} = 100 (6.69 \times 10^9)$$

$$\frac{(EI)_{\text{muro}}}{bt^3 f'_c} = \frac{6.69 \times 10^{11}}{bt^3 f'_c}$$

Realizando algunos tanteos para satisfacer resistencia y rigidez se encontró que la mejor alternativa era para los valores de  $\frac{d}{t} = 0.95$ ,  $b = 15$  cm,  $t = 135$  cm,  $f'_c = 200$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\frac{t'}{t} = 0.10$ ,  $\frac{B}{b} = 2$ ,  $q'_e = 0.85$  y  $q'_1 = 0.085$ . Estos tanteos seguían el siguiente criterio: para una forma de sección transversal de muro se suponían los valores de  $\frac{d}{t}$ ,  $b$ ,  $t$ ,  $f'_c$ ,  $\frac{t'}{t}$ ,  $\frac{B}{b}$ .

Con éstos datos y las cargas últimas de diseño se determinaban los valores de  $q_e$  y  $q_1$ , necesarios para satisfacer la resistencia. Con los programas elaborados era fácil construir el diagrama de interacción para ciertos valores de  $q_e$  y  $q_1$  de interés, y así determinar la resistencia de la sección correspondiente.

Una vez que se cumplía con el requisito de resistencia se procedía a revisar la rigidez; con los valores de  $q_e$  y  $q_1$  se obtenían los valores de  $q'_e$  y  $q'_1$ ; con éstos últimos valores y con las cargas de trabajo se procedía a calcular el valor de  $\alpha$  y de  $e/t$ , obteniéndose un valor de  $\beta$  con las gráficas o con el método simplificado. Este valor de  $\beta$  se comparaba con  $\frac{6.69 \times 10^{11}}{b t^3 f'_c}$  para cumplir con la rigidez relativa propuesta. Si no eran iguales se variaban los valores de  $b$ ,  $t$  o incluso la forma de la sección transversal de muro, hasta satisfacer la condición deseada.

De ésta manera se llegó a los valores dados anteriormente que cumplen aproximadamente con los requisitos de resistencia y rigidez. Para éstos datos se tiene:

$$M_t = 4.585 + 108.708 (0.0675) = 11.92 \text{ t-m}$$

$$\frac{e}{t} = \frac{11.92}{108.708 (1.35)} = 0.081$$

$$\alpha = \frac{108.708 \times 10^3}{0.85 (15) (135) (160)} = 0.39$$

Para calcular la rigidez usaremos el método simplificado -

puesto que no tenemos gráficas para los valores de  $q'_e$  y  $q'_i$  dados. De la Tabla 4.1 y los datos anteriores se tiene:

$$\frac{(EI)_C}{bt^3 f_C} = 1.5 (0.55) (50) = 41.25$$

$$\frac{(EI)_{se}}{bt^3 f_C} = 86.06$$

$$\frac{(EI)_{sl}}{bt^3 f_C} = 3.17$$

luego

$$EI = (41.25 + 86.06 + 3.17) bt^3 f_C$$

$$EI = 130.48 (15) (135)^3 (160)$$

$$EI = 7.70 \times 10^{11} \text{ kg-cm}^2 = 6.69 \times 10^{11} \text{ kg-cm}^2$$

De aquí que nos quedaría una sección con la geometría y - distribución de refuerzo que se indica en la figura 5.5.

Revisando el porcentaje de acero para una columna extrema tenemos:

$$P_{\max} = 0.08$$

$$P_e = \frac{q'_e f_c}{2 f_y} \times \frac{bt}{Bt^2}$$

$$P_e = \frac{0.85}{2} \times \frac{120}{4000} \times \frac{(15)(135)}{(30)(13.5)}$$

$$P_e = 0.064 < 0.08$$

el porcentaje mínimo de acero longitudinal sería:

$$P_{\min} = 0.0025$$

$$P_1 = q_1 \frac{f_c^*}{f_y}$$

$$P_1 = 0.085 \times \frac{120}{4000} = 0.0025 = P_{\min} = 0.0025$$

Como se puede observar aunque los porcentajes de acero son adecuados y además se cumple con los requisitos de resistencia y rigidez, las columnas extremas resultan ser desproporcionadas a la longitud del muro. Además, puesto que se eligió éste tipo de sección I, habría que revisar el análisis puesto que al tomar en cuenta deformaciones por cortante, la forma de la sección del muro influye en la determinación de la matriz de rigidez de la barra correspondiente (Apéndice D). De cualquier manera esta alternativa serviría como un prediseño de la estructura en estudio.

### 5.3.3 Tercera Alternativa

Como se mencionó anteriormente, en ésta alternativa se aumenta la rigidez relativa entre muro y columna y se reduce la longitud horizontal del muro; al igual que en las alternativas anteriores, el dimensionamiento con el criterio del RDDF de la columna en estudio, se excluye. El procedimiento de análisis para la obtención de las cargas de trabajo y de las cargas últimas de diseño fue el mismo al presentado en el Apéndice D. En el cuadro de la siguiente página se resumen éstas cargas.

En la figura 5.6 se muestra el armado de la columna obtenido para éste caso. El criterio que se siguió para determinar que la condición más adecuada era tener una longitud horizontal del muro de 2 m y una rigidez relativa 1 a 500 entre muro y columna fue el siguiente: puesto que en la primera alternativa el muro estaba diseñado con los requisitos mínimos y la columna aún así quedaba sobrada, y en la segunda alternativa se tuvo que disminuir la longitud del muro hasta 1.35 m., se pensó entonces en reducir la longitud del muro a 2 mts. Una vez reducida la longitud del muro se hicieron varios análisis variando el valor de la rigidez relativa en 100, 200 y 500, encontrándose que para que se cumplieran lo más aproximadamente los requisitos de rigidez y resistencia la mejor condición era tener una rigidez relativa a 1 a 500. A continuación se presenta el cálculo



lo para esta última condición.

La rigidez efectiva de la columna dimensionada obtenida con las gráficas de la referencia 1 será:

$$f'_c = 150 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{d}{t} = 0.95; \frac{e_t}{t} = \frac{2.149 + 25.184 (0.02)}{25.184 (0.3)} = 0.35;$$

$$q' = \frac{4.9}{(30)^2} \frac{4000}{120} = 0.18$$

$$\alpha = \frac{P_t}{F.R.btf'_c} = \frac{25.184 \times 10^3}{0.85 (30)^2 (120)} = 0.274$$

| Cargas de Trabajo        |                               |   |                             |                         |                       |              |
|--------------------------|-------------------------------|---|-----------------------------|-------------------------|-----------------------|--------------|
|                          |                               | MOM.<br>SUP.<br>(t - m)                 | MOM.<br>INF.<br>(t - m)     | CARGA<br>AXIAL<br>(ton) | CORTAN<br>TE<br>(ton) | $e_t$<br>(m) |
| COLUMNA                  | Carga                         | -2.149                                  | +1.09                       | +25.184                 | -0.81                 | 0.105        |
|                          | Vertical                      |   |                             |                         |                       |              |
|                          | Sismo                         | -0.128                                  | +0.879                      | +2.258                  | -0.252                |              |
| MURO                     | Carga                         | +3.897                                  | +5.309                      | +78.093                 | -0.353                | 0.168        |
|                          | Vertical                      |   |                             |                         |                       |              |
|                          | Sismo                         | +159.2                                  | +301.2                      | -1.066                  | -35.5                 |              |
| Cargas Ultimas de Diseño |                               |   |                             |                         |                       |              |
|                          | $P_u$<br>(ton)                | $M_u$<br>(t - m)                        | $V_u$<br>(ton)              | $e_u$<br>(m)            |                       |              |
| COLUMNA                  | 1.1(25.184+<br>2.26) = 30.188 | 1.1(2.364+0.141)+<br>30.188(0.02)=3.11  | 1.1(0.81+0.252)<br>= 1.168  | 0.103                   |                       |              |
| MURO                     | 1.1(78.093 -<br>1.066)=84.730 | 1.1(5.309+301.2)+<br>84.73(0.1)=345.633 | 1.1(0.353+35.5)<br>= 39.438 | 4.08                    |                       |              |

para:

$$q' = 0.1; e/t = 0.3; \alpha = 0.274 \rightarrow \beta = 35$$

$$q' = 0.1; e/t = 0.4; \alpha = 0.274 \rightarrow \beta = 26.5$$

interpolando para  $e/t = 0.35$  se obtiene  $\beta = 30.75$ .

Ahora para

$$q' = 0.2; e/t = 0.3; \alpha = 0.274 \rightarrow \beta = 49.5$$

$$q' = 0.2; e/t = 0.4; \alpha = 0.274 \rightarrow \beta = 43$$

interpolando para  $e/t = 0.35$  se obtiene  $\beta = 46.25$ .

Ahora interpolando entre  $q' = 0.1$  y  $q' = 0.2$  para  $q' = 0.18$  obtenemos finalmente:

$$\beta = 43.15$$

de donde

$$EI = \beta b t^3 f_c^*$$

$$EI = 43.15 (30)^4 (120)$$

$$EI = 4.19 \times 10^9 \text{ kg-cm}^2$$

Para cumplir con la rigidez relativa del análisis se debe - cumplir entonces que:

$$(EI)_{\text{muro}} = 500 (EI)_{\text{columna}}$$

$$(EI)_{\text{muro}} = 500 (4.19 \times 10^9)$$

$$(EI)_{\text{muro}} = 20.95 \times 10^{11} \text{ kg-cm}^2$$

Seguendo el criterio expuesto en el inciso anterior (segunda alternativa) se encontraron los siguientes datos para cumplir con la resistencia:

$$\frac{d}{t} = 0.95, b = 20 \text{ cm}, t = 200 \text{ cm}, f'_c = 150 \text{ kg/cm}^2, \frac{t'}{t} = 0,$$

$$\frac{p}{b} = 1, q_e = 0.85 \text{ y } q_1 = 0.10.$$

Para estos datos se tiene que la rigidez del muro sería:

$$\frac{e_t}{t} = \frac{5.309 + 78.093 (0.1)}{78.093 (2)} = 0.084$$

$$a = \frac{P_t}{F.R. b t f'_c} = \frac{78.093 \times 10^3}{0.85 (15) (200) (160)} = 0.19$$

$$q'_e = 0.723$$

$$q'_1 = 0.085$$

de la Tabla 4.1

$$\frac{(EI)_c}{b t^3 f'_c} = 0.55 (50) = 27.5$$

$$\frac{(EI)_{se}}{b t^3 f'_c} = 73.15$$

$$\frac{(EI)_{s1}}{b t^3 f'_c} = 3.17$$

de donde:

$$EI = (27.5 + 73.15 + 3.17) b t^3 f'_c$$

$$EI = 103.82 \text{ bt}^3 \text{f}_c^*$$

$$EI = 103.82 (20) (200)^3 (120)$$

$$EI = 19.93 \times 10^{11} \text{ kg-cm}^2 = 20.95 \times 10^{11} \text{ kg-cm}^2$$

Como vemos entonces, este es el caso que aproximadamente satisface nuestra condición deseada; aunque la columna queda sobrada puesto que se armó con los requisitos mínimos no tendría mucho caso disminuir la rigidez relativa pues en este caso se dificultaría más cumplir con el requisito de rigidez. En la figura 5.7 se presenta la sección transversal del muro y la distribución del acero de refuerzo para esta alternativa.

## 6. CONCLUSIONES

1) Se obtuvieron gráficas (Apéndice C) para determinar la rigidez efectiva de secciones transversales de muros de concreto reforzado sujetos a flexocompresión uniaxial con diferentes distribuciones de acero longitudinal y de acero en los extremos.

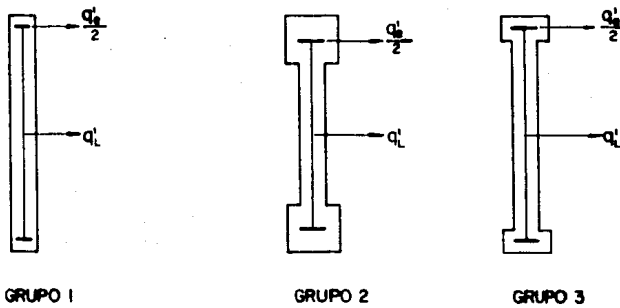
2) Se presenta un método simplificado para calcular la rigidez efectiva, basado en la hipótesis de que la rigidez efectiva es la suma de las contribuciones parciales del concreto y el acero a la rigidez. En la referencia 1 y en este trabajo, se demuestra que el método es suficientemente aproximado; en el ejemplo de aplicación se presenta el empleo del método, así como la comparación de sus resultados con los obtenidos con las gráficas  $(\beta, \alpha)$  siendo éstos muy aproximados; estos resultados también se comparan con los obtenidos con las ecuaciones del RDDF y el ACI, encontrándose diferencias significativas.

También como se muestra en el ejemplo de aplicación, debe tenerse cuidado en el criterio para elegir la etapa de comportamiento del elemento y así determinar las contribuciones parciales del concreto y del acero a la rigidez efectiva, puesto que este es solo un método aproximado.

En la Tabla 4.1 se resumen los valores de las contribuciones parciales del concreto y del acero de refuerzo a la rigidez.

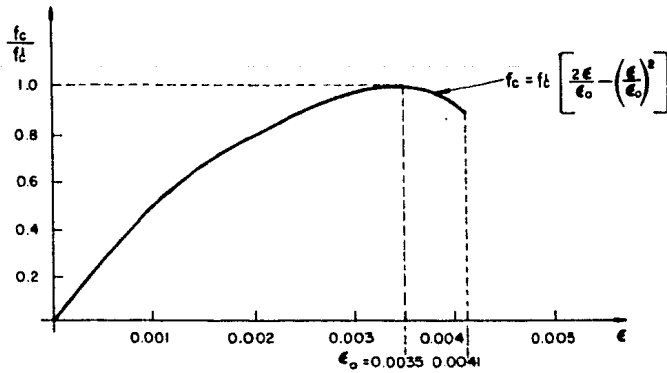
3) A partir de los resultados obtenidos para el método simplificado se determinó analíticamente un módulo de Elasticidad del concreto aproximadamente igual a  $8500\sqrt{f'_C}$  para  $180 < f'_C < 250$ ; este valor es muy parecido a los resultados experimentales y analíticos obtenidos en las referencias 5 y 2 respectivamente.

4) En el desarrollo del ejemplo de aplicación se comprobó que las rigideces relativas supuestas para el análisis no concuerdan con las rigideces relativas obtenidas una vez dimensionados los miembros, haciéndose ver la necesidad de contar con ayudas de diseño, por ejemplo las figuras  $(\beta, \alpha)$ , y así satisfacer al mismo tiempo requisitos de rigidez y resistencia.



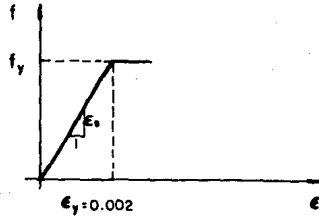
SECCION TRANSVERSAL DE LOS MUROS

FIG.1.1



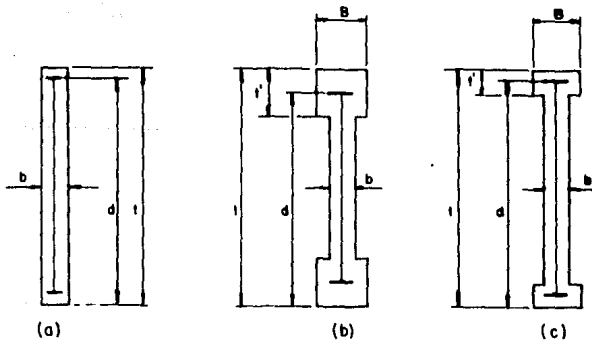
CURVA ESFUERZO—DEFORMACION DEL CONCRETO

FIG.2.1



CURVA ESFUERZO-DEFORMACION DEL ACERO

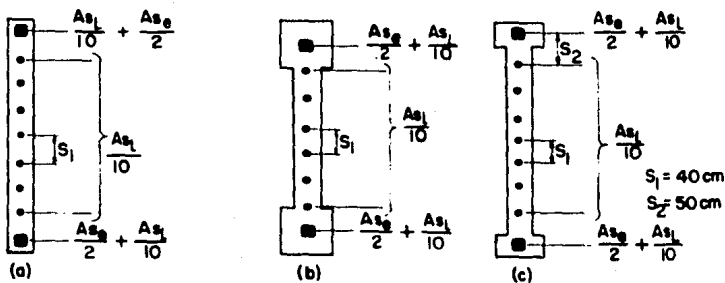
FIG. 2.2



CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DE LAS SECCIONES

FIG. 2.3





Discretización del refuerzo

Fig.2.4

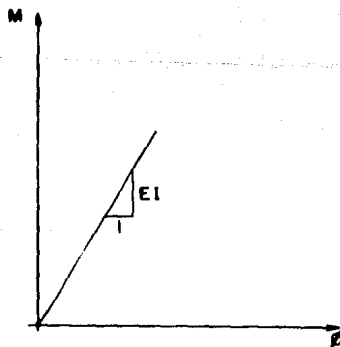
Curva M- $\theta$  de material elástico-lineal

Fig.2.5

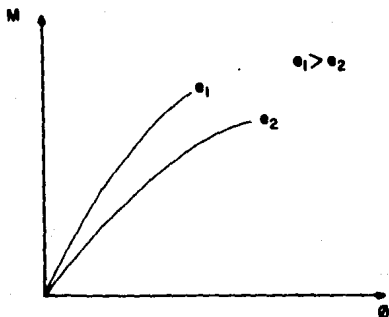
Curva  $M-\theta$  de material no lineal

Fig.2.6

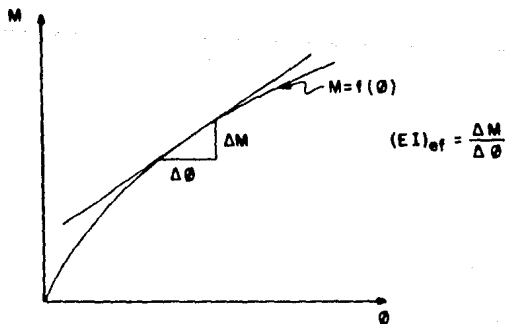
Rigidez efectiva  $(EI)_{ef}$ 

Fig.2.7

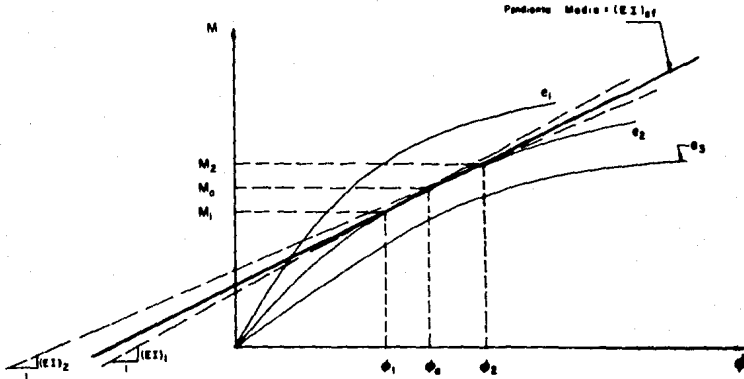


Fig.3.1

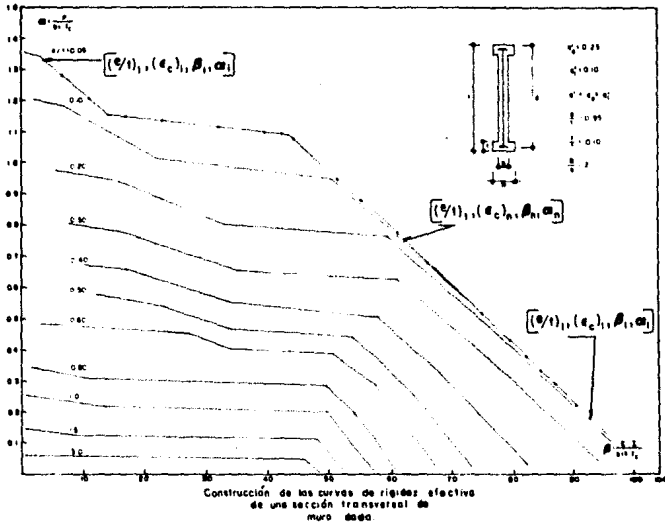


Fig.3.2

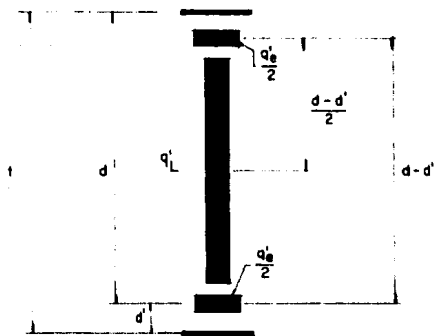
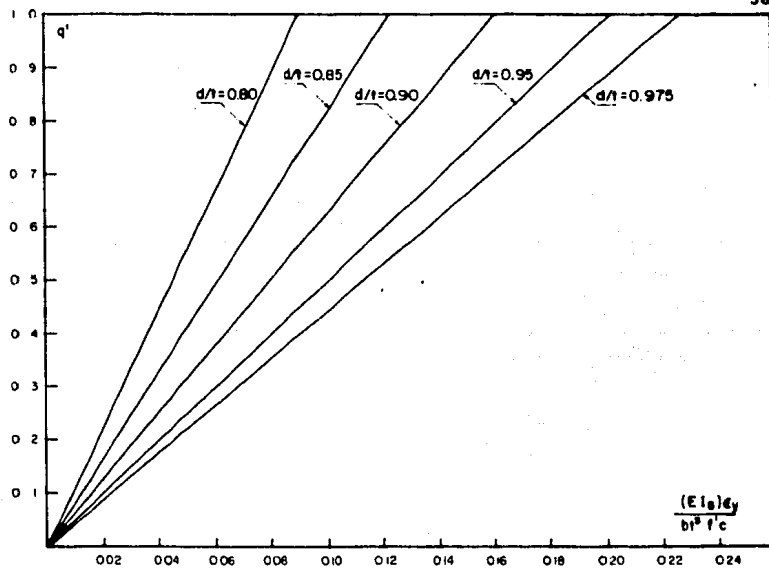
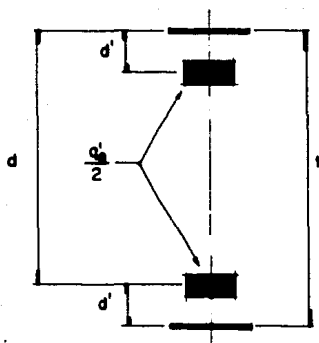
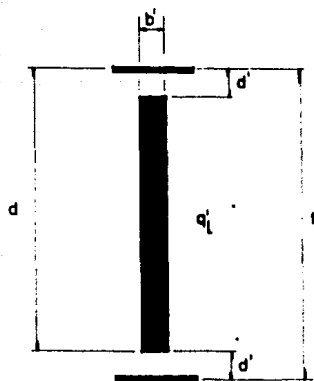


Fig. 4.1



Contribución del acero extremo a la rigidez efectiva

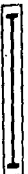
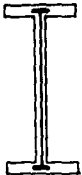
Fig.4.2



Contribución del acero longitudinal a la rigidez efectiva

Fig.4.3

TABLA 4.1  
CALCULO APROXIMADO DE LA RIGIDEZ EFECTIVA

| Sección transversal   | COMPRESION             |                                       | FLEXOCOMPRESION        |                             |                              | FLEXION                |                           |
|---|------------------------|---------------------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------|---------------------------|
|   | Contribución del acero | Contribución del concreto             | Contribución del acero | Contribución del concreto   | $P/R < 0.5$<br>y $e/l < 0.3$ | Contribución del acero | Contribución del concreto |
|  | $R_0 + R_1$            | $K$                                   | $R_0 + R_1$            | $0.35 K^*$<br>$0.25 K^{**}$ | $0.56 K$                     | $1.25 (R_0 + R_1)$     | $0.09 K$                  |
|   | $R_0 + R_1$            | $K' = 1.25 K^*$<br>$K' = 1.50 K^{**}$ | $R_0 + R_1$            | $0.35 K^*$<br>$0.25 K^{**}$ | $0.55 K'$                    | $1.25 (R_0 + R_1)$     | $0.10 K$                  |

La rigidez efectiva es igual a la suma de la contribución del acero mas la del concreto multiplicadas por  $bt^3f_c'$ :

$$(EI)_{ef} = (R_0 + R_c) bt^3 f_c'$$

Contribución del acero ( $R_0 + R_1$ )

$$R_0 = \alpha_s \frac{1}{e_y} \left( \frac{d}{T} - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$R_1 = \frac{7}{19} \alpha_s \frac{1}{e_y} \left( \frac{d}{T} - \frac{1}{2} \right)^2$$

Contribución del concreto ( $R_c$ )

$$K = 50 \quad ** 0.6 \leq e/l < 1$$

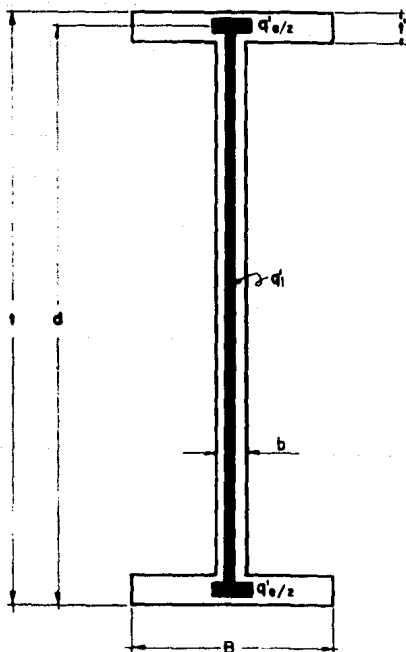
$$*t' = 0.08t \text{ y } B = 2b$$

$$**t' = 0.10t \text{ y } B = 2b$$

$$*e/l < 0.6$$

Si  $e/l \geq 1$  emplear los valores de flexión.

Ver figura 4.4 para el significado de las literales.



$$q' = q_e' + q_l'$$

$$q_e' = \frac{A_{se}}{bl} \frac{f_y}{f_c}$$

$$q_l' = \frac{A_{sl}}{bl} \frac{f_y}{f_c}$$

$q_e'$  = cuantía de refuerzo total en los extremos.

$q_l'$  = cuantía de refuerzo longitudinal.

$A_{se}$  = área de acero total en los extremos.

$A_{sl}$  = área de acero en el alma

$f_y$  = esfuerzo de fluencia del acero

$f_c'$  = esfuerzo máximo del concreto

$b$  = ancho del alma

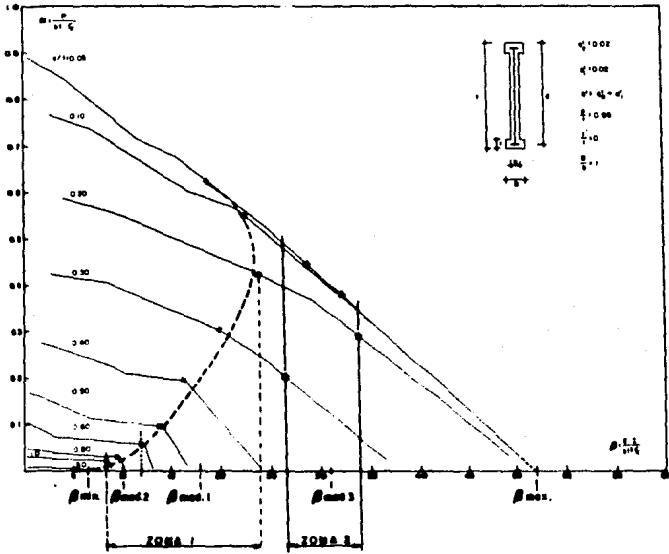
$d$  = peralte efectivo

$$d' = t - d$$

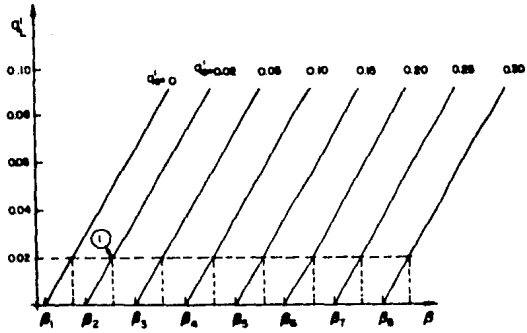
$t$  = peralte total

$t'$  = peralte del patín

Fig. 4.4



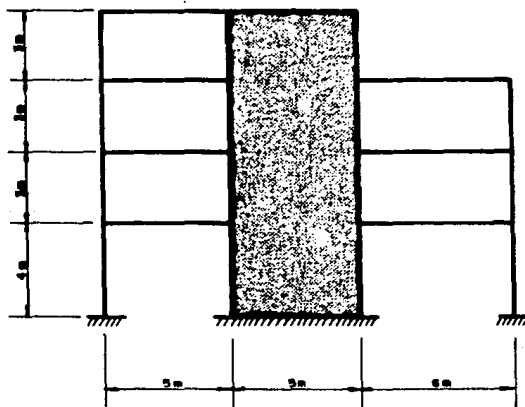
(a)



(b)

Fig. 4.5

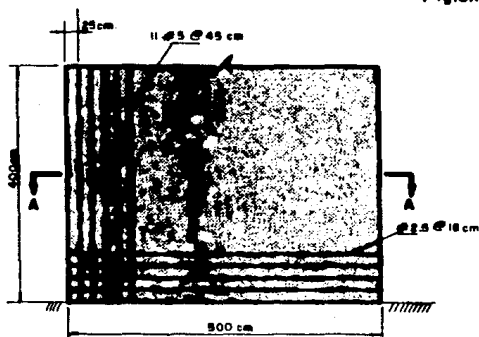




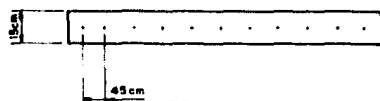
ELEVACION

Marco plano propuesto  
para analizar

Fig.5.1



ELEVACION

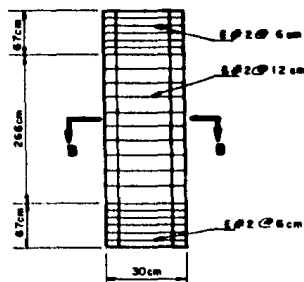


SECCION A-A

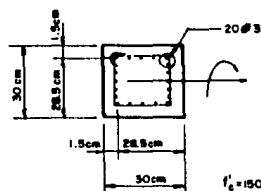
$$f'_c = 150 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$$

Armado del muro



ELEVACION



SECCION B-B

$$f'_c = 150 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$$

Armado de la columna

Armados finales

Fig.5.2

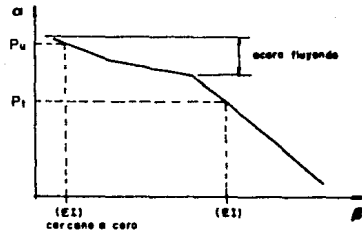
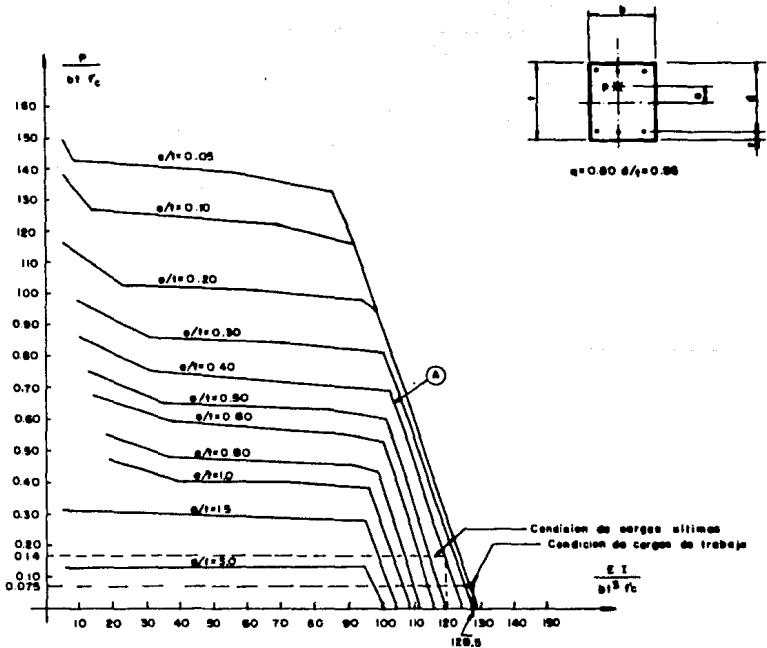
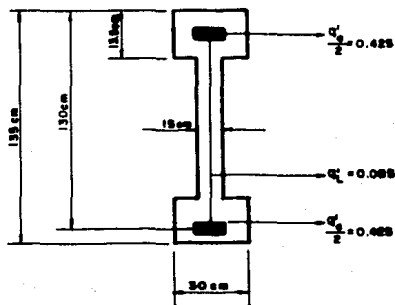


Fig.5.3



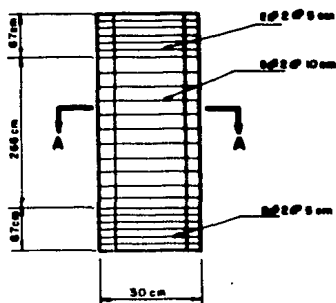
Grafica 8 de la referencia 1

Fig.5.4

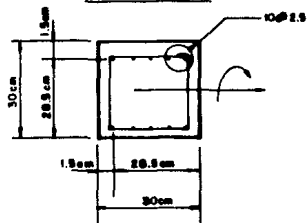


Sección transversal del muro en la segunda alternativa

Fig.5.5



ELEVACION



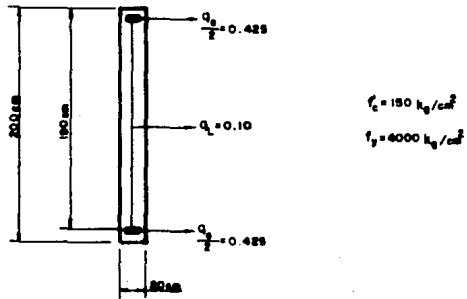
SECCION A-A

Armado de la columna en la tercera alternativa

$$f_c' = 150 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$$

Fig.5.6



Sección transversal del muro en la tercera alternativa

Fig.5.7

## REFERENCIAS

1. R. Rodríguez Vázquez, "Concepto de rigidez equivalente en columnas de concreto reforzado. Refuerzo simétrico en -- los extremos". Tesis; Facultad de Ingeniería, UNAM, 1978.
2. J. Martín Arguello F. y H. Guzmán Méndez, "Gráficas para la determinación de la rigidez equivalente de elementos - de concreto reforzado en flexocompresión". Tesis; Facultad de Ingeniería, UNAM, 1978.
3. J. G. Mac Gregor, U.H. Oelhafen, and S.E. Hage, "A re-exa<sup>u</sup>mination of the EI value for slender columns", SP50-1, Pu**u**blicación ACI SP-50 (1975, pp 1-40).
4. O. Hernández Basilio, "Resistencia a Cortante de Muros de Concreto Reforzado", V Congreso de Ingeniería Sísmica, -- Guadalajara, Jalisco, 1979.
5. C. J. Mendoza, "Deflexiones a corto y largo plazo de elementos de concreto sujetos a flexión". Primer Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, SMIE, México, D. F., (Octubre, 1977).
6. R. Meli, "Columnas de concreto reforzado. Diseño a Flexo**u**compresión." Instituto de Ingeniería, UNAM, Publicación No. 176, 1968.
7. R. Meli, "Gráficas para diseño plástico de columnas de -- concreto reforzado." Instituto de Ingeniería, UNAM, Pu**u**blicación 176 Apéndice, 1969.

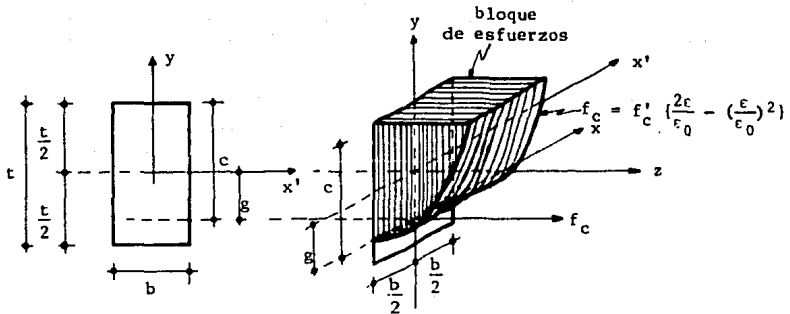
8. R. Meli, "III Curso Internacional de Ingeniería Sísmica, Diseño Sísmico de Edificios. Tema: Comportamiento de Materiales y Elementos Estructurales ante cargas repetidas." CENTRO DE EDUCACION CONTINUA, División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1977.
9. "Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal." Instituto de Ingeniería, UNAM, Publicación 401, Julio, 1977.
10. "Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado". (ACI 318-71), México, D. F., Publicación IMCYC, 1978.
11. Macracken, "FORTRAN IV." Editorial Limusa, México, D. F., 1976.
12. F. Robles, et al, "Aspectos Fundamentales del Concreto - Reforzado", Editorial Limusa, México, D. F., 1977.

## APENDICE A

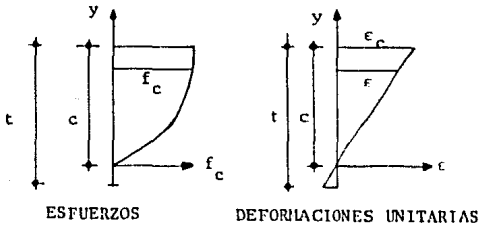
## DESARROLLO DETALLADO DE LAS IDEAS BASICAS

## CALCULO DE LAS RESULTANTES PARCIALES DEL CONCRETO EN COMPRESION

## a) Sección Rectangular



Los esfuerzos y deformaciones unitarias correspondientes serán:





Por triángulos semejantes tenemos:

$$c = \frac{\epsilon_c}{C} (y)$$

sustituyendo este valor en la ecuación para  $f_c$ :

$$f_c = f'_c \left\{ \frac{2}{\epsilon_0} \frac{\epsilon_c}{C} (y) - \frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{\epsilon_c^2}{C^2} (y)^2 \right\}$$

ahora si:

$$A = \frac{2\epsilon_c f'_c}{C\epsilon_0} ; \quad B = \frac{\epsilon_c^2 f'_c}{C^2 \epsilon_0^2}$$

luego:

$$f_c = Ay - By^2$$

El valor de  $g$  estará dado por:

$$g = c - \frac{t}{2}$$

La región que define al volumen de compresión será:

$$R = \{(x, y, f_c) / \phi \leq y \leq c ; 0 \leq x \leq b ; 0 \leq f_c \leq Ay - By^2\}$$

Luego el volumen de compresión será:

$$V_t = \int_{\phi}^c \int_0^b \int_0^{Ay - By^2} df_c \, dx \, dy$$

integrando con respecto a  $f_c$

$$V_t = \int_{\phi}^c \int_0^b (Ay - By^2) \, dy \, dx$$

integrando con respecto a x:

$$V_t = \int_{\phi}^c ((Ay - By^2) x) \Big|_0^b dy$$

$$V_t = \int_{\phi}^c b(Ay - By^2) dy$$

integrando con respecto a y:

$$V_t = b \left( \frac{Ay^2}{2} - \frac{By^3}{3} \right) \Big|_{\phi}^c$$

donde

$$\phi = 0 \text{ si } c \leq t$$

$$\phi = c - t \text{ si } c > t$$

adimensionando se tendría:

$$C_c = \frac{V_t}{b t f_c}$$

Calculando ahora el momento estático de  $V_t$  con respecto a x:

$$M_x = \int_{\phi}^c \int_0^b \int_0^{Ay - By^2} y \, df_c \, dx \, dy$$

$$M_x = \int_{\phi}^c \int_0^b (Ay - By^2) y \, dx \, dy$$

$$M_x = \int_{\phi}^c b (Ay^2 - By^3) dy$$

$$M_x = b \left( \frac{Ay^3}{3} - \frac{By^4}{4} \right) \Big|_{\phi}^c$$

Siendo  $c$  y  $\phi$  los límites anteriormente definidos.

Luego:

$$e_x = \frac{M_x}{V_t}$$

$$e_c = e_x - g$$

El momento estático con respecto a  $x'$  (eje centroidal de la sección) será entonces:

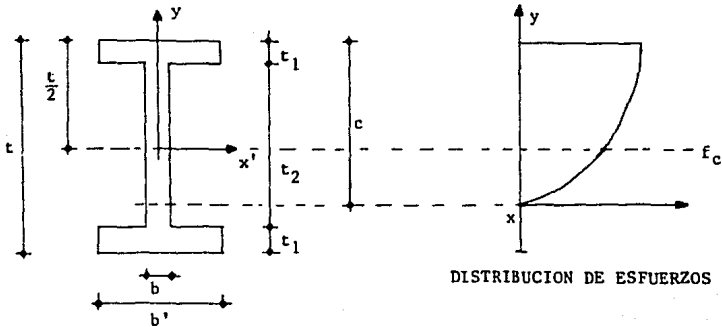
$$M_{x'} = V_t e_c$$

Adimensionando este momento

$$M_c = \frac{C_c e_c}{t}$$

b) Sección I

Las integrales para el cálculo del volúmen de compresión y del momento estático para este caso resultan ser las mismas que para secciones rectangulares, solo que se tendría que tomar en cuenta la variación en los límites de las integrales como a continuación se presenta.



Calculando el volúmen de compresión tenemos:

Si  $c \leq t_1$

$$V_t = b' \left| \frac{Ay^2}{2} - \frac{By^3}{3} \right|_0^c$$

$$V_t = b' \left( \frac{Ac^2}{2} - \frac{Bc^3}{3} \right)$$

Si  $t_1 < c \leq t_1 + t_2$

$$V_t = b' \left| \frac{Ay^2}{2} - \frac{By^3}{3} \right|_{c-t_1}^c + b \left| \frac{Ay^2}{2} - \frac{By^3}{3} \right|_0^{c-t_1}$$

Si  $t_1 + t_2 < c \leq 2t_1 + t_2$

$$V_t = b' \left| \frac{Ay^2}{2} - \frac{By^3}{3} \right|_{c-t_1}^c + b \left| \frac{Ay^2}{2} - \frac{By^3}{3} \right|_{c-(t_1+t_2)}^{c-t_1} + b' \left| \frac{Ay^2}{2} - \frac{By^3}{3} \right|_0^{c-(t_1+t_2)}$$

Si  $c > 2t_1 + t_2$

$$V_c = b' \left| \frac{Ay^2}{2} - \frac{By^3}{3} \right|_c - t_1 + b \left| \frac{Ay^2}{2} - \frac{By^3}{3} \right|_c - t_1 \\ + b' \left| \frac{Ay^2}{2} - \frac{By^3}{3} \right|_c - (t_1 + t_2) \\ + b \left| \frac{Ay^2}{2} - \frac{By^3}{3} \right|_c - (2t_1 + t_2)$$

Adimensionando este valor tenemos:

$$C_c = \frac{V_c}{bt_1^2}$$

Calculando el momento estático tenemos:

Si  $c \leq t_1$

$$M_x = b' \left| \frac{Ay^3}{3} - \frac{By^4}{4} \right|_c$$

$$M_x = b' \left( \frac{Ac^3}{3} - \frac{Bc^4}{4} \right)$$

Si  $t_1 < c \leq t_1 + t_2$

$$M_x = b' \left| \frac{Ay^3}{3} - \frac{By^4}{4} \right|_c - t_1 + b \left| \frac{Ay^3}{3} - \frac{By^4}{4} \right|_0 - t_1$$

Si  $t_1 + t_2 < c \leq 2t_1 + t_2$

$$M_x = b' \left| \frac{Ay^3}{3} - \frac{By^4}{4} \right|_c - t_1 + b \left| \frac{Ay^3}{3} - \frac{By^4}{4} \right|_c - t_1 \\ + b' \left| \frac{Ay^3}{3} - \frac{By^4}{4} \right|_0 - (t_1 + t_2) \\ + b \left| \frac{Ay^3}{3} - \frac{By^4}{4} \right|_0 - (2t_1 + t_2)$$

Si  $c > 2t_1 + t_2$

$$M_x = b' \left| \frac{Ay^3}{3} - \frac{By^4}{4} \right|_c - t_1 + b \left| \frac{Ay^3}{3} - \frac{By^4}{4} \right|_c - t_1 \\ + b' \left| \frac{Ay^3}{3} - \frac{By^4}{4} \right|_c - (t_1 + t_2) + b \left| \frac{Ay^3}{3} - \frac{By^4}{4} \right|_c - (2t_1 + t_2)$$

$$+ b' \left| \frac{Ay^3}{3} - \frac{By^4}{4} \right| \begin{array}{l} c - (t_1 + t_2) \\ c - (2t_1 + t_2) \end{array}$$

Luego:

$$e_x = \frac{M_x}{V_t}$$

$$e_c = e_x - g$$

El momento estático con respecto a  $x'$  (eje centroidal de la sección) será entonces:

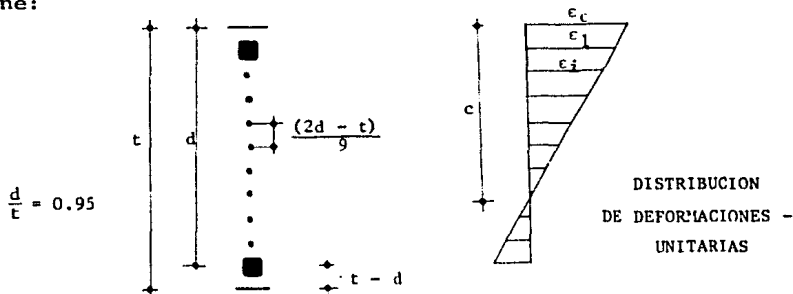
$$M_{x'} = V_t e_c$$

Adimensionando el momento estático respecto a  $x'$  tenemos:

$$M_c = \frac{C c e_c}{t}$$

CALCULO DE LAS RESULTANTES PARCIALES  
DEL ACERO EN COMPRESION Y EN TEN-  
SION.

a) De acuerdo a la discretización del acero (fig. 2.4) para la sección rectangular y la sección confinada por columnas se -- tiene:



Para calcular las deformaciones unitarias para cada concentración de acero hacemos:

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_c (c - (t - d))}{c}$$

Luego:

$$\epsilon_i = \frac{\epsilon_1 (S - (i - 1) (2d - t)/9)}{S}$$

donde:

$$S = c - (t - d)$$

$$i = 2 \rightarrow 10$$

Las áreas para cada concentración de acero son:

$$A_1 = A_{10} = \frac{q_1'}{2} A_c \frac{f_c'}{f_y} + \frac{q_1'}{10} A_c \frac{f_c'}{f_y}$$

$$A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = A_9 = \frac{q_1'}{10} A_c \frac{f_c'}{f_y}$$

donde:

$$A_c = bt$$

siendo  $b$  = ancho de la sección rectangular

6  $b$  = ancho del alma de la sección I

Luego las fuerzas correspondientes a cada concentración son:

$$F'_i = A_i f_y = A_i E_s \epsilon_y \quad (1)$$

$$F'_i = A_i f_s = A_i E_s \epsilon_s \quad (2)$$

Adimensionando se tendría:

$$F_i = \frac{A_i f_y}{b t f_c} = q_i' \frac{|\epsilon_i|}{\epsilon_i} \quad (3)$$

$$F_i = \frac{A_i E_s \epsilon_i}{b t f_c} = q_i' E_s \frac{\epsilon_i}{f_y} \quad (4)$$

La ecuación 3 calcula las fuerzas cuando el acero está fluyendo ( $\epsilon_i \geq 0.002$ ). La 4 cuando  $|\epsilon_i|$  es menor que 0.002. Ambas toman en cuenta si son fuerzas de compresión (+) ó de tensión (-).

Luego la fuerza resultante del acero sería:

$$F_{T_s} = \sum_{i=1}^{n=10} \begin{bmatrix} q_i' E_s \epsilon_i / f_y \\ \delta \\ q_i' \frac{|\epsilon_i|}{\epsilon_i} \end{bmatrix}$$

Para el cálculo del momento estático resultante (respecto al eje x' centroidal) producido por las fuerzas del acero se tomó en cuenta que el brazo de palanca para cada posición de acero está dado por la siguiente expresión:

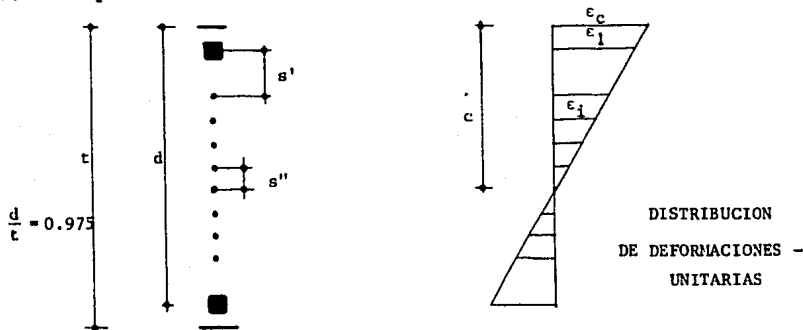
$$z_i = (t/2 - ((t - d) + (i - 1)(2d - t)/9))/t$$

de donde:

$$M_{T_s} = \sum_{i=1}^{n=10} \begin{bmatrix} q_i' E_s \epsilon_i / f_y \\ \delta \\ q_i' \frac{|\epsilon_i|}{\epsilon_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \end{bmatrix}$$



b) Para la sección confinada por muros transversales y de acuerdo a su discretización (Fig. 2.4), hay un cambio en la obtención de las resultantes parciales del acero que a continuación se presenta.



Para el cálculo de deformaciones unitarias hacemos:

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_c}{c} (c - (t - d))$$

pero

$$S = c - (t - d)$$

Luego

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_c}{c} (S)$$

Ahora:

$$\epsilon_i = \frac{\epsilon_1}{S} (S - s' - (i - 2)(s'')) \quad \text{si } i = 2 \rightarrow 9$$

$$\epsilon_i = \frac{\epsilon_1}{S} (S - 2s' - 7s'') \quad \text{si } i = 10$$

Las fuerzas correspondientes en cada concentración serían las mismas que para el caso anterior.

$$F_i = q'_i \frac{|\varepsilon_i|}{\varepsilon_i} \quad (3)$$

$$F_i = q'_i E_s \frac{\varepsilon_i}{f_y} \quad (4)$$

La ecuación 3 se emplea si  $\varepsilon_i \geq 0.002$  y la 4 cuando  $|\varepsilon_i|$  es menor que 0.002 como se mencionó anteriormente. De la misma manera la fuerza resultante del acero sería:

$$F_{T_s} = \sum_{i=1}^{n=10} \begin{bmatrix} q'_i E_s \frac{\varepsilon_i}{f_y} \\ \sigma \\ q'_i \frac{|\varepsilon_i|}{\varepsilon_i} \end{bmatrix}$$

En este caso el momento estático (respecta al eje  $x'$  centro dal) producido por cada fuerza en el acero se obtuvo como:

$$M_i = F_i \times Z_i$$

siendo  $Z_i$  igual a:

$$Z_i = \left( \frac{t}{2} - (t - d) \right) \frac{1}{t} \quad \text{para } i = -1$$

$$Z_i = \left( \frac{t}{2} - ((t - d) + s' + (i - 2) s'') \right) \frac{1}{t} \quad \text{para } i = 2 + 9$$

$$Z_i = \left( \frac{t}{2} - ((t - d) + s' + (s' - s'') + (i - 2) s'') \right) \frac{1}{t} \quad \text{para } i = 10$$

Finalmente el momento estático resultante producido por las fuerzas del acero será:

$$M_{T_s} = \sum_{i=1}^{n=10} \begin{bmatrix} q'_i E_s \frac{\varepsilon_i}{f_y} \\ \sigma \\ q'_i \frac{|\varepsilon_i|}{\varepsilon_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_i \end{bmatrix}$$

A PARTIR  
DE ESTA  
PAGINA

FALLA  
DE  
ORIGEN.

## APENDICE B



















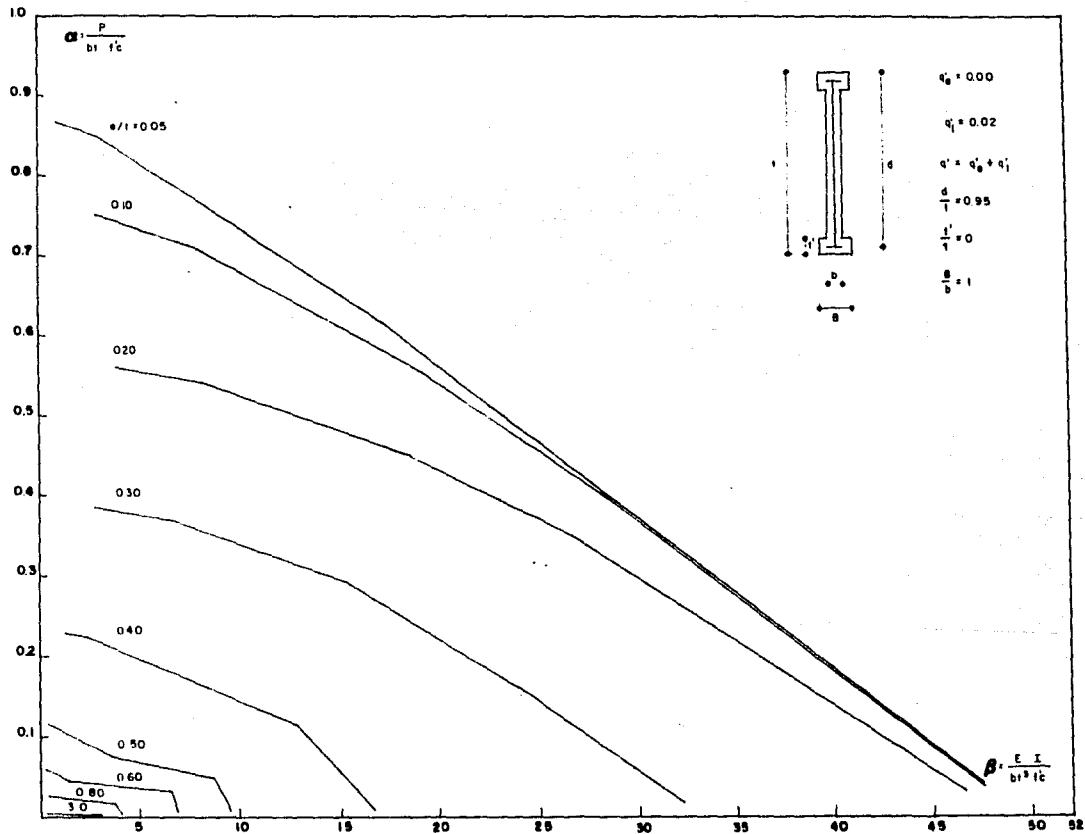


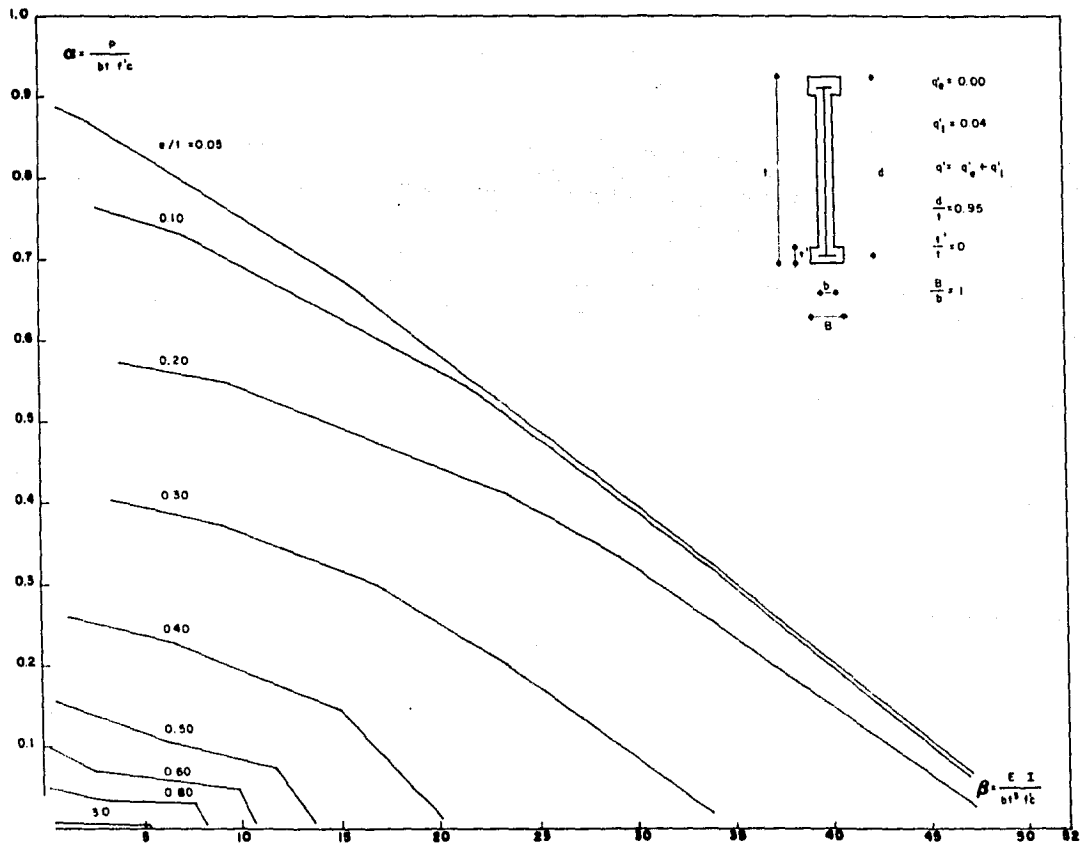


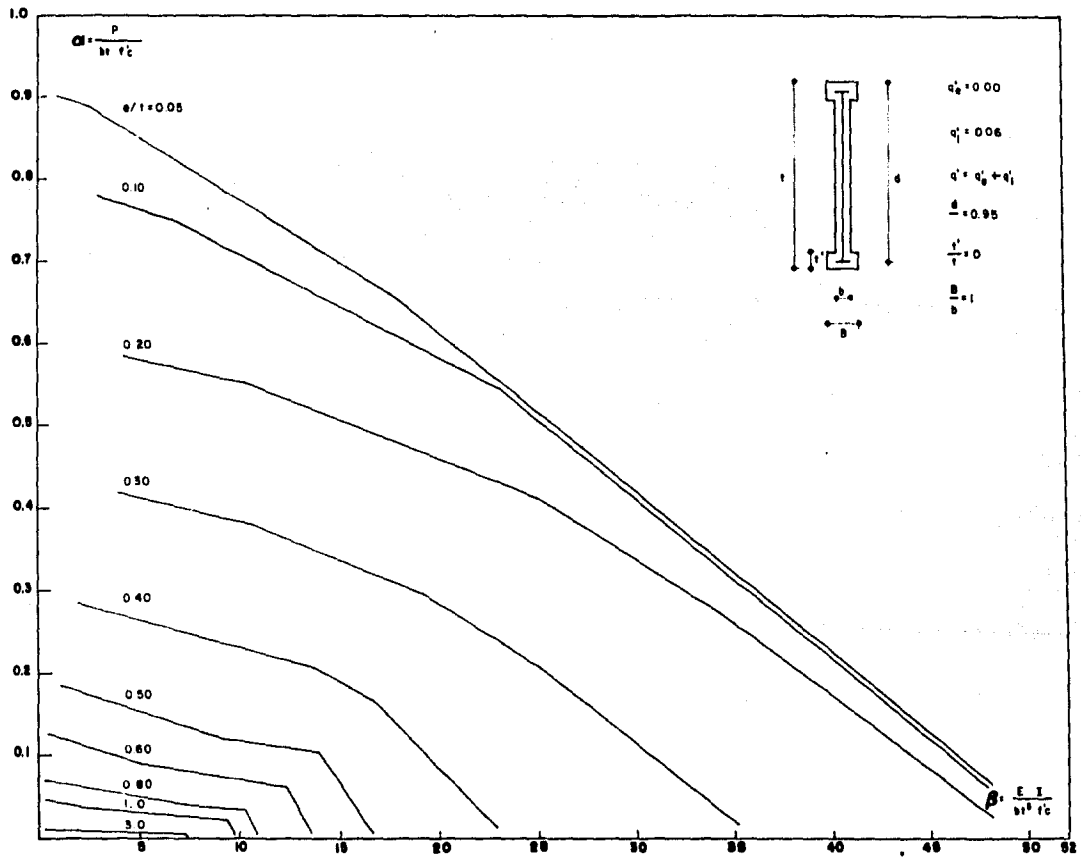


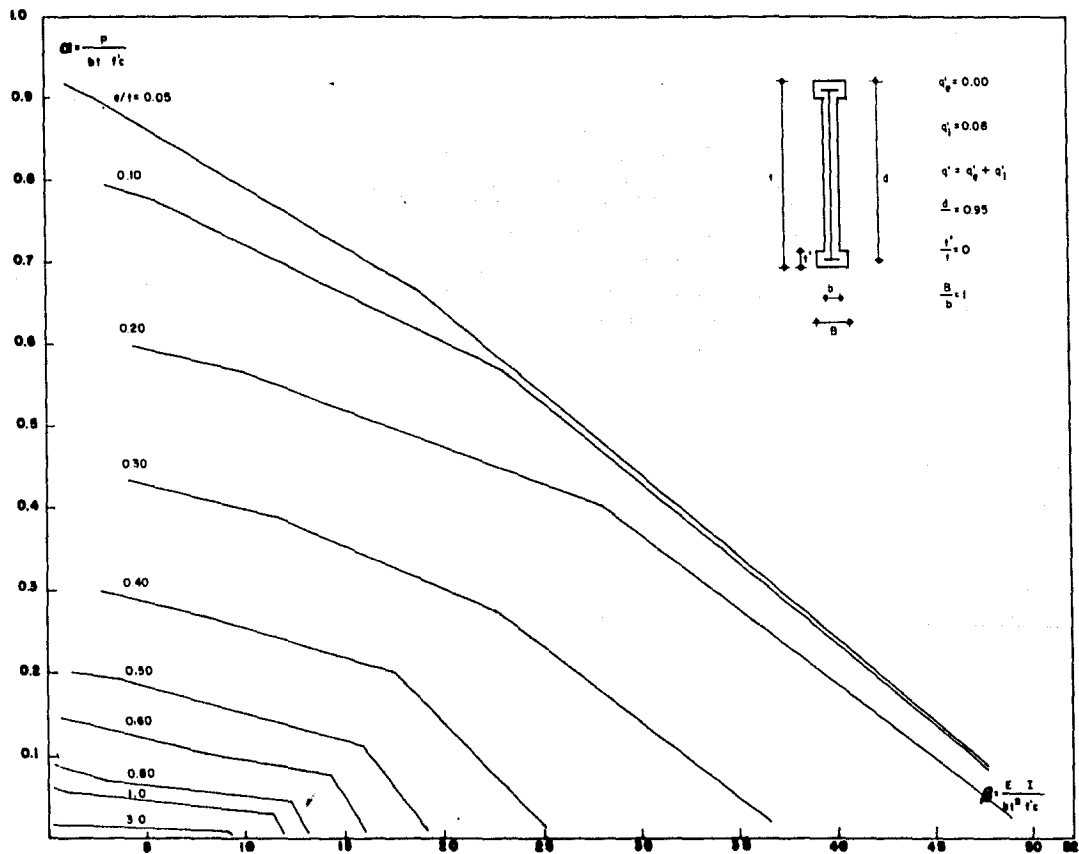
## APENDICE C

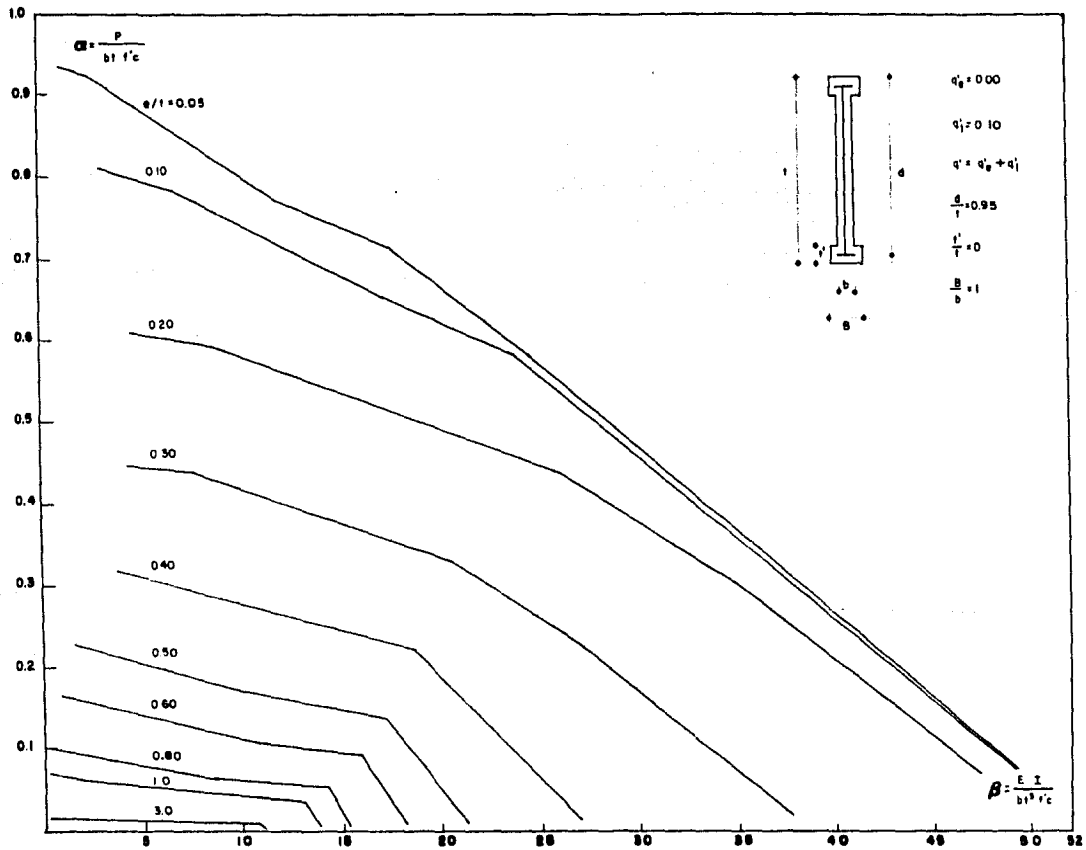


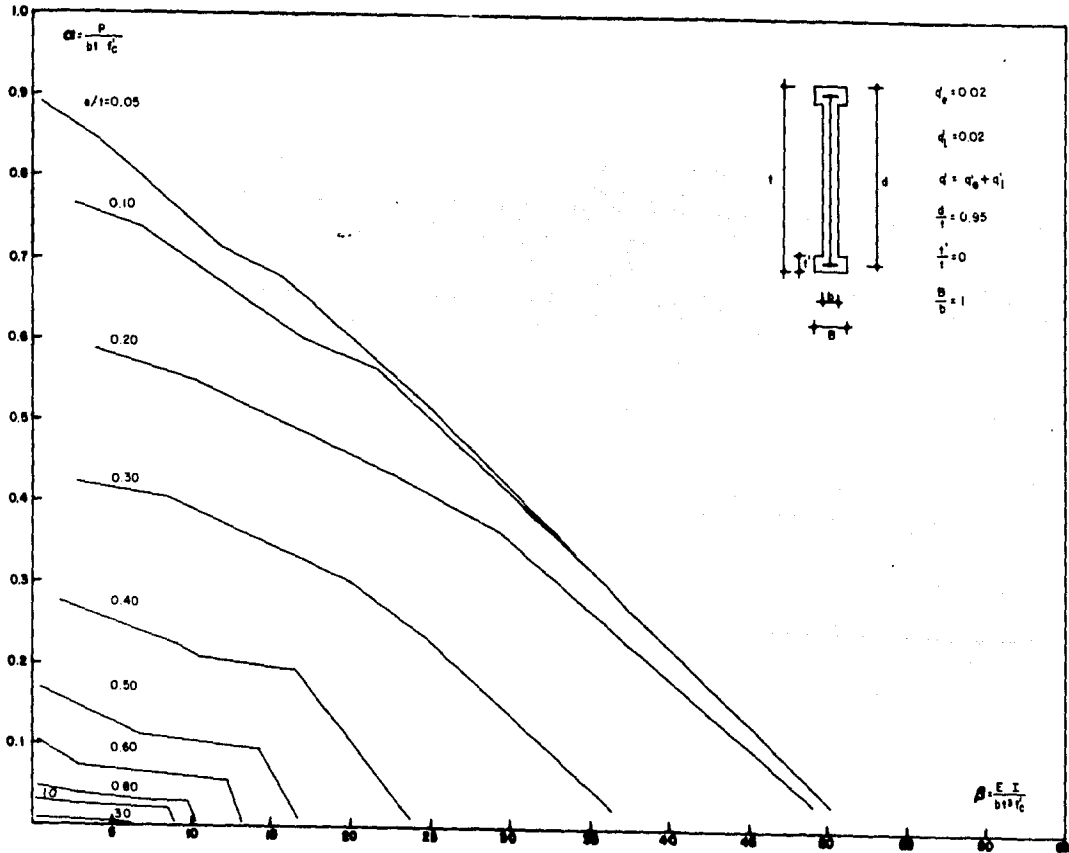


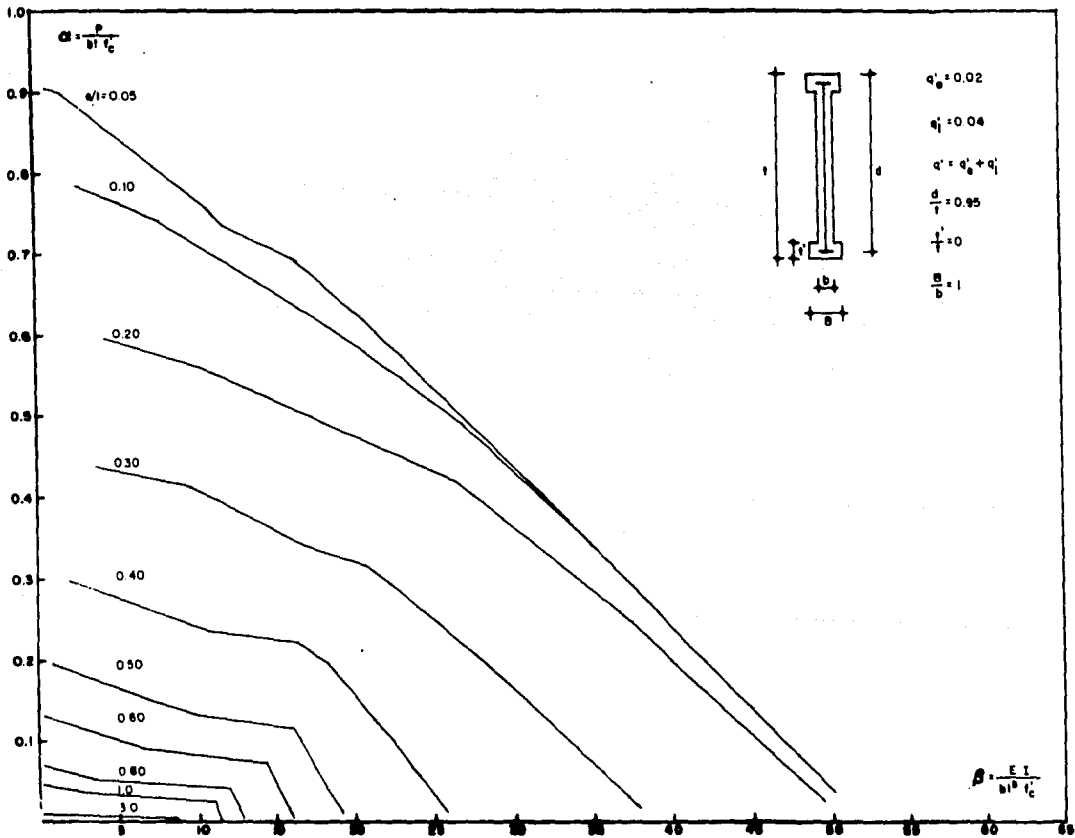






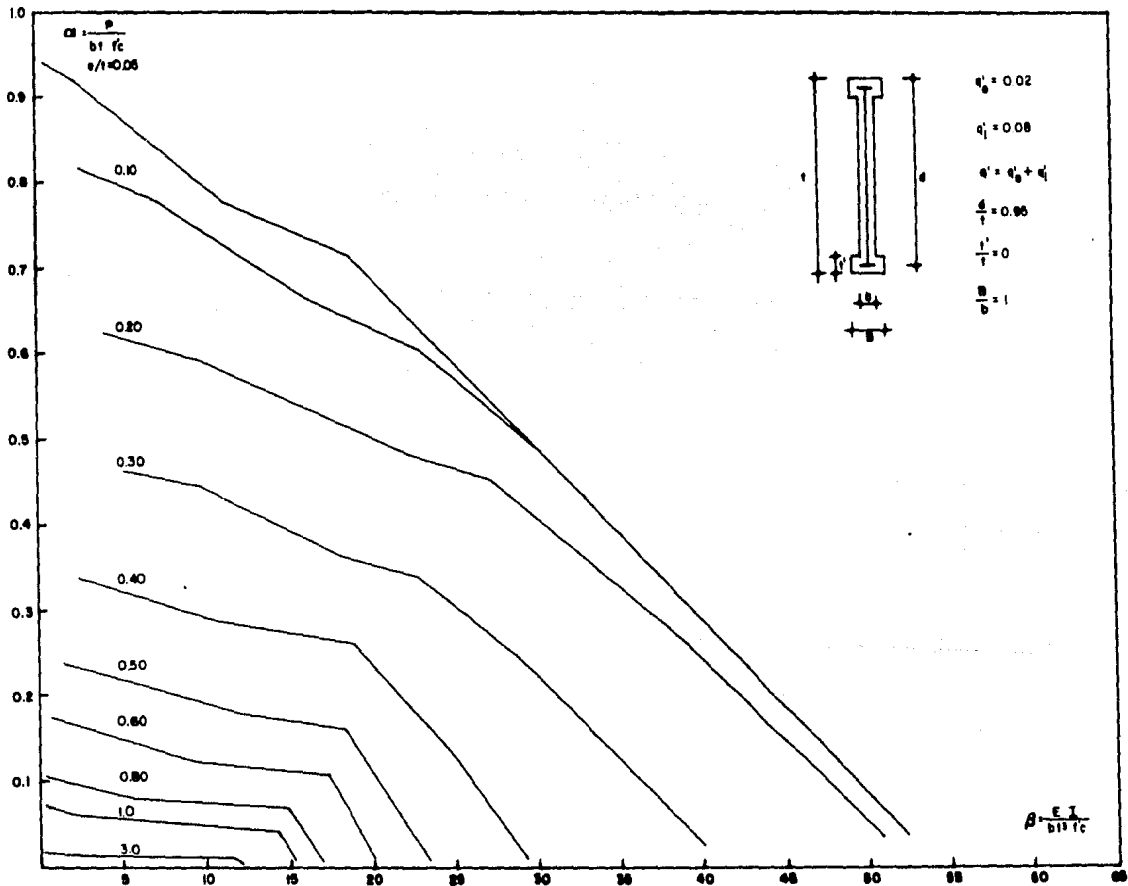


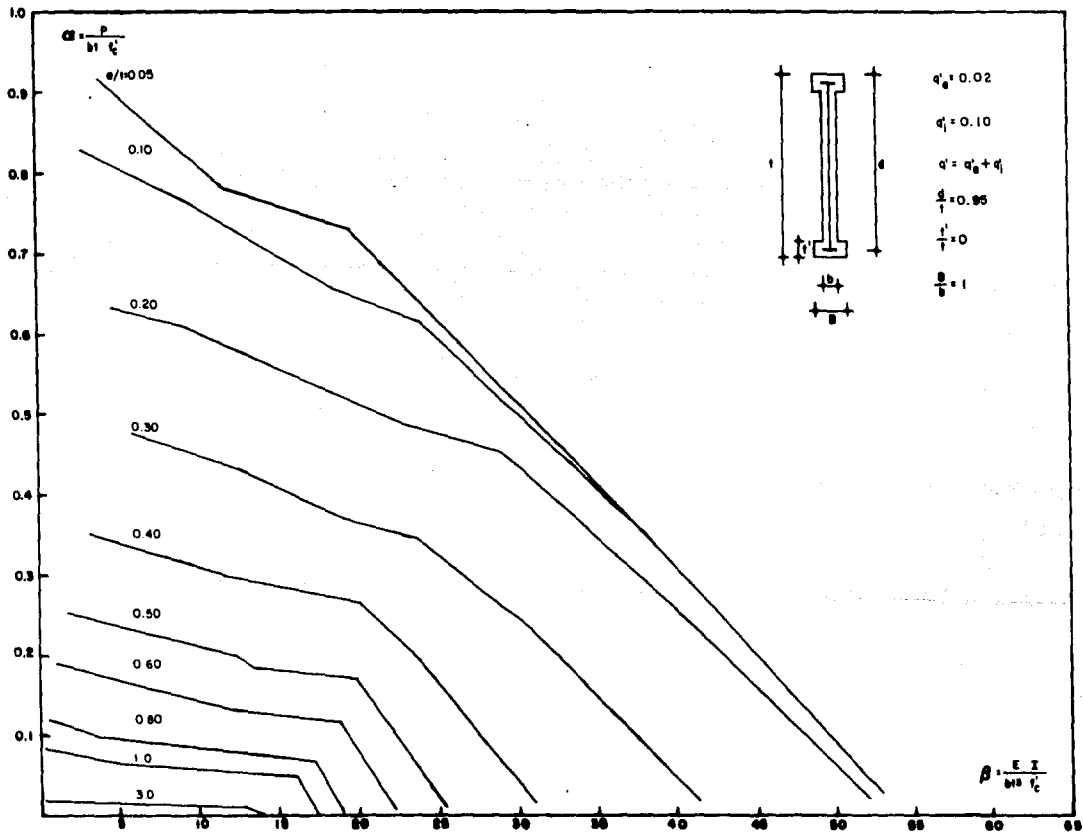


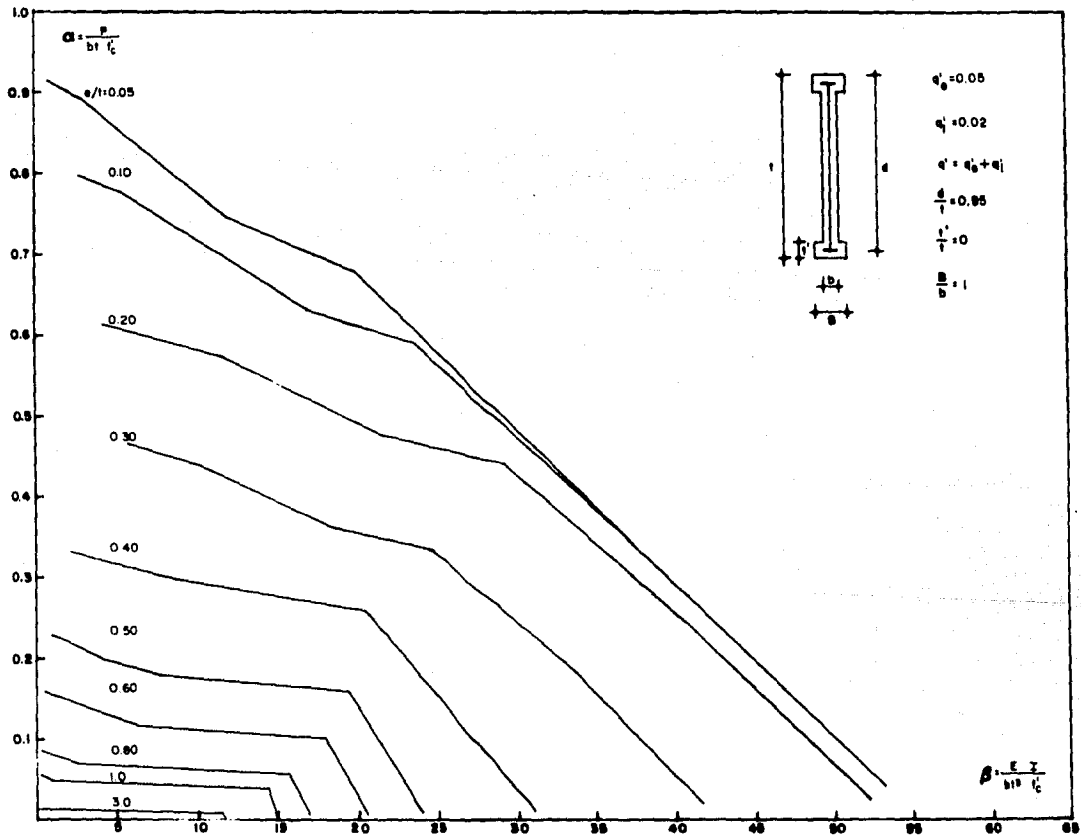


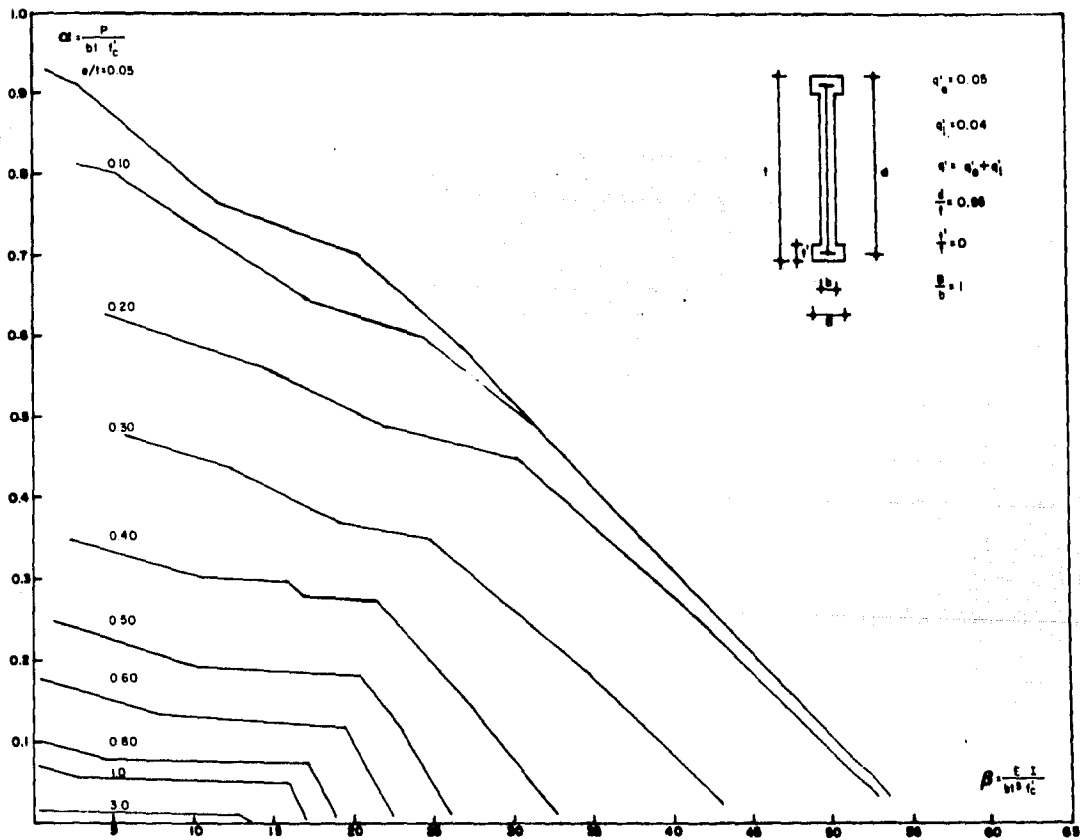


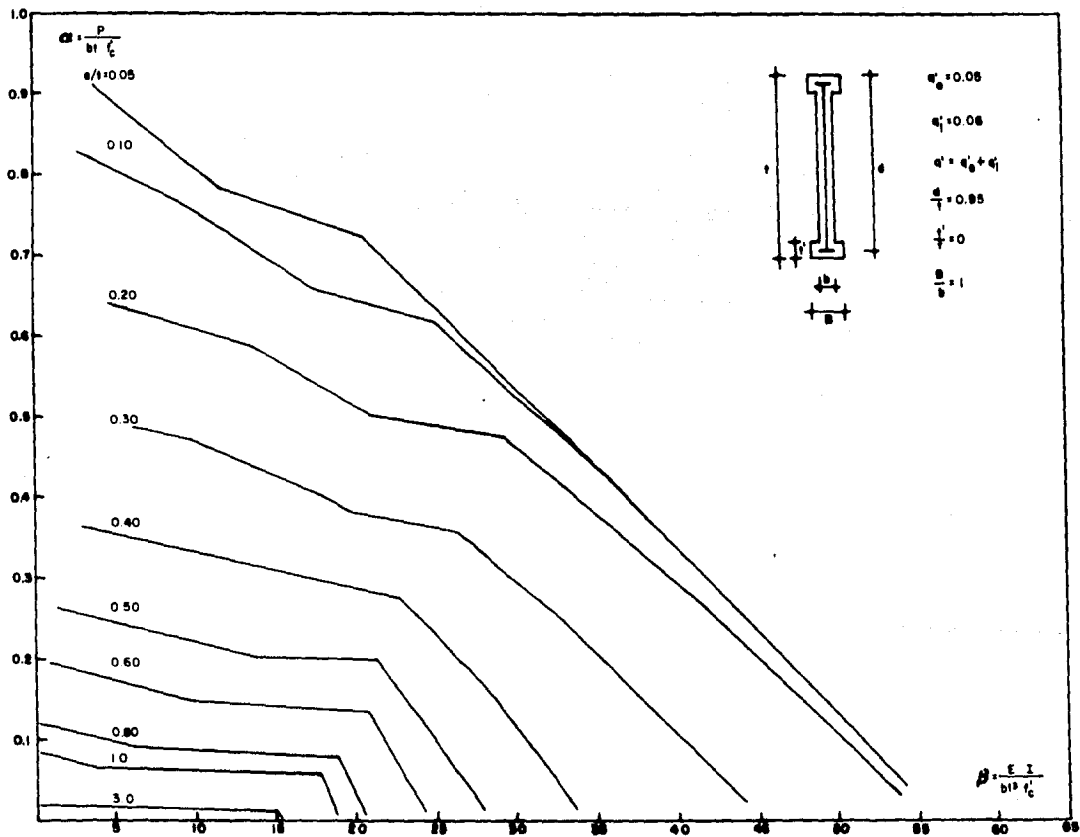


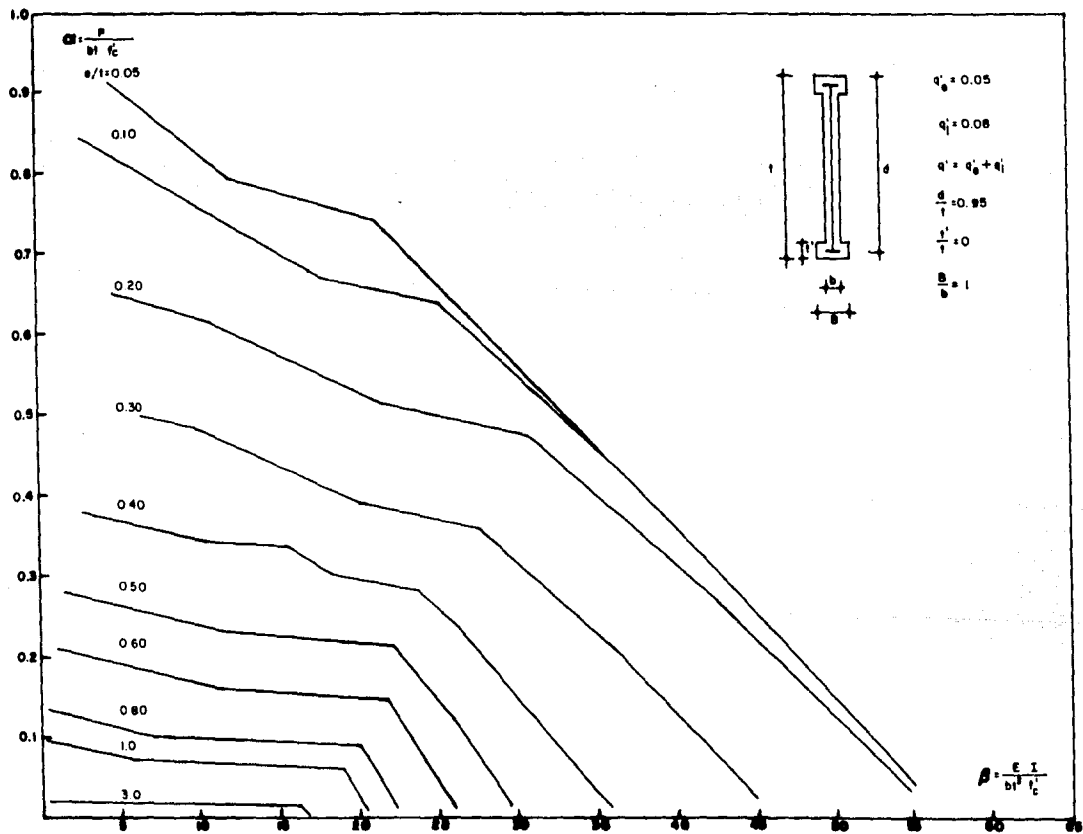


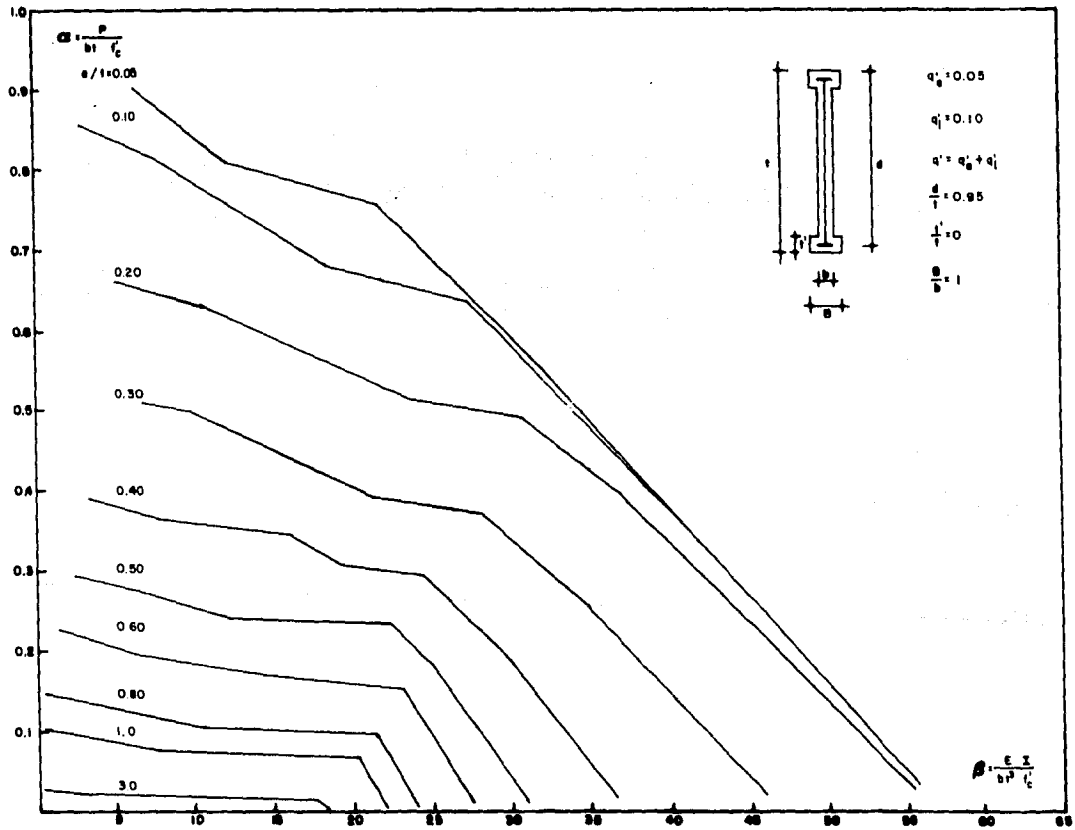






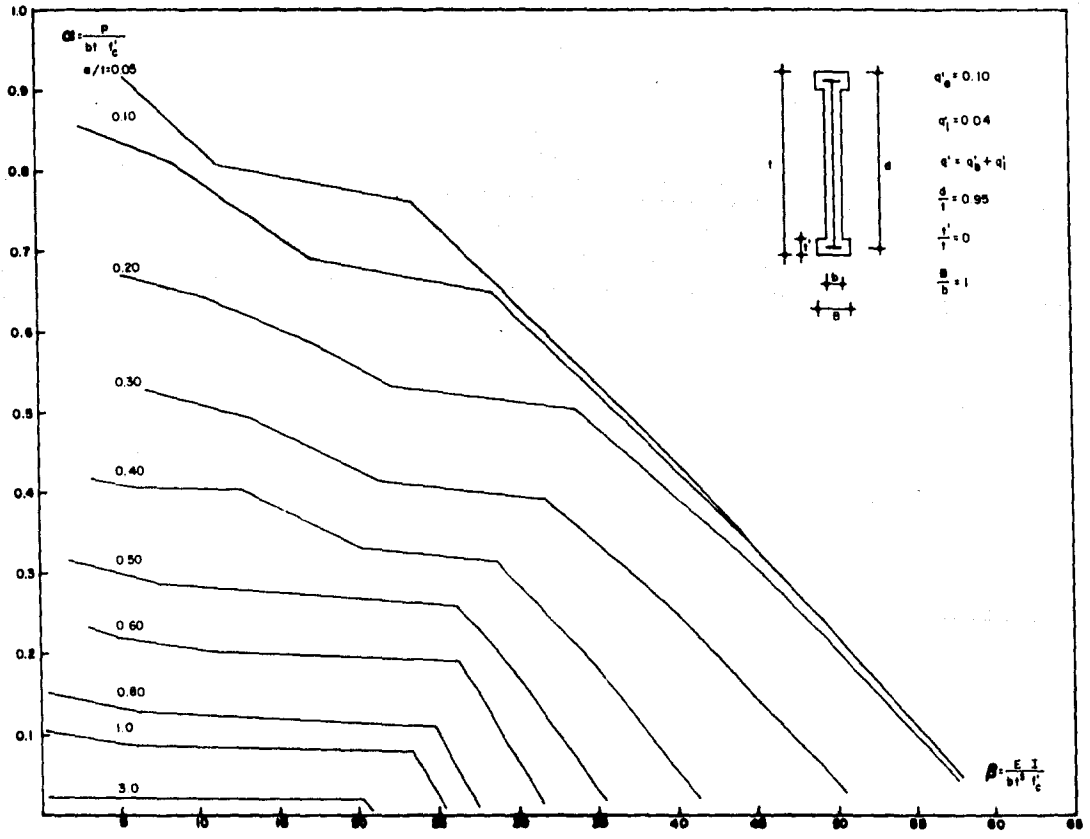


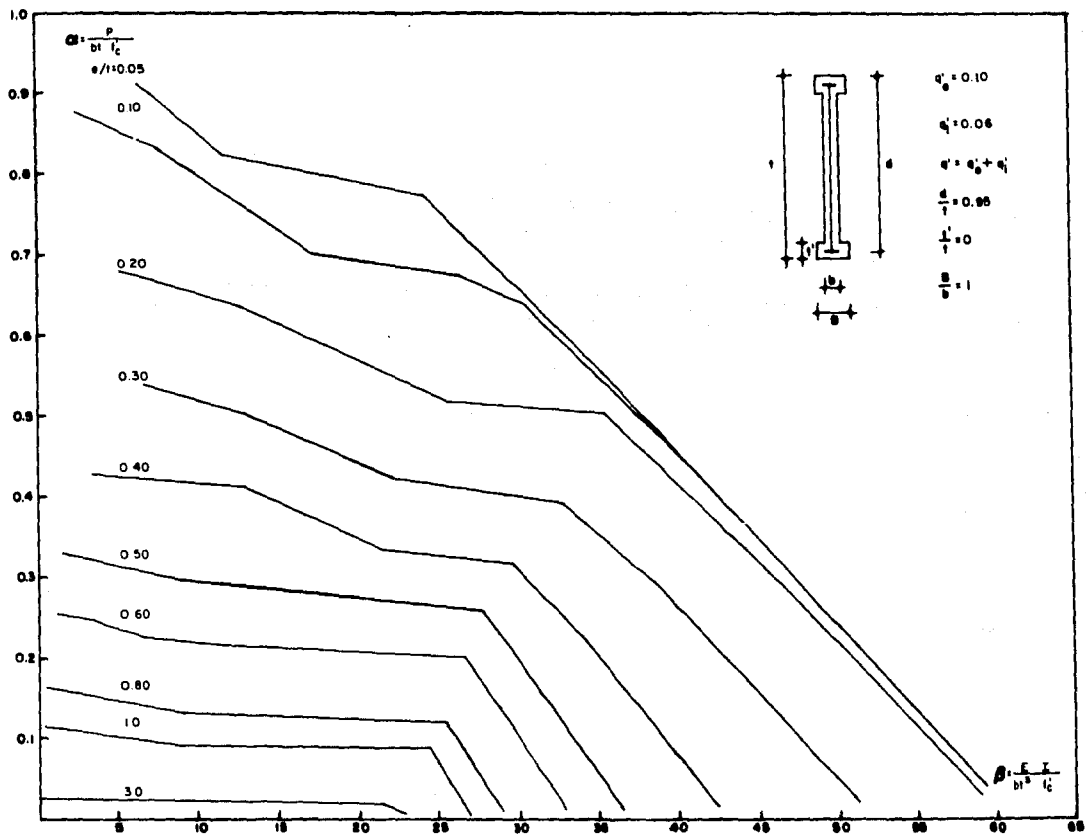


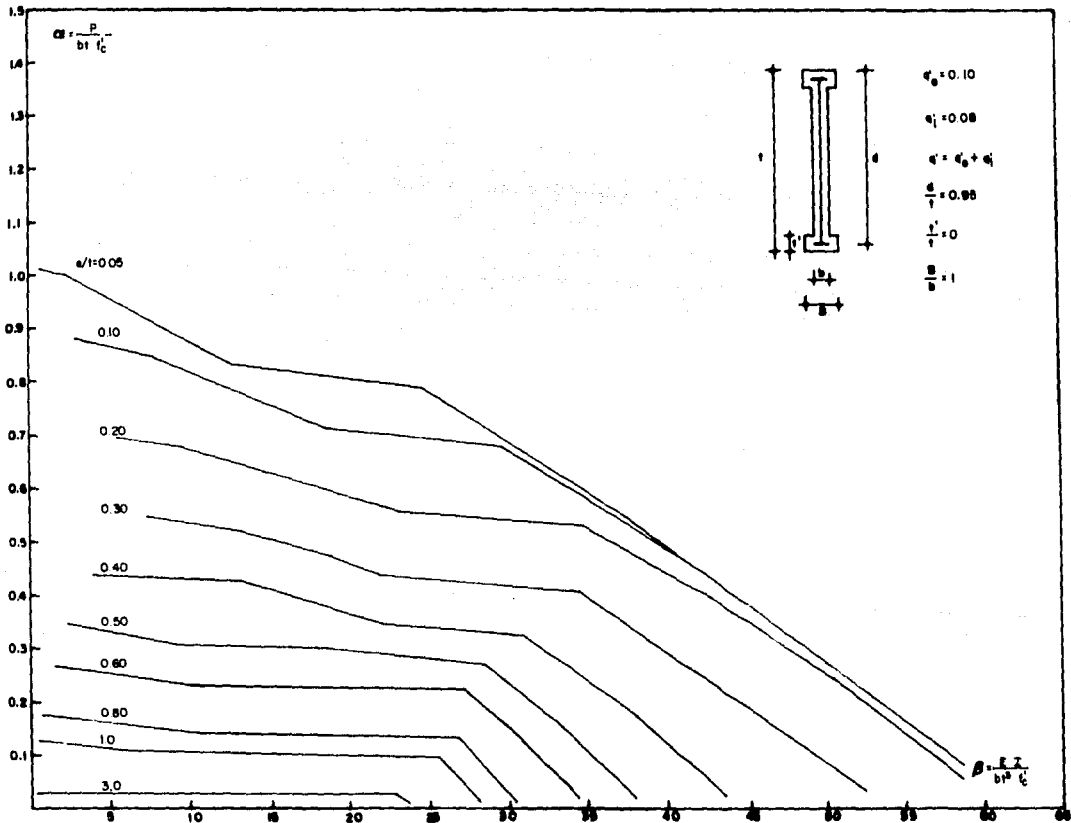


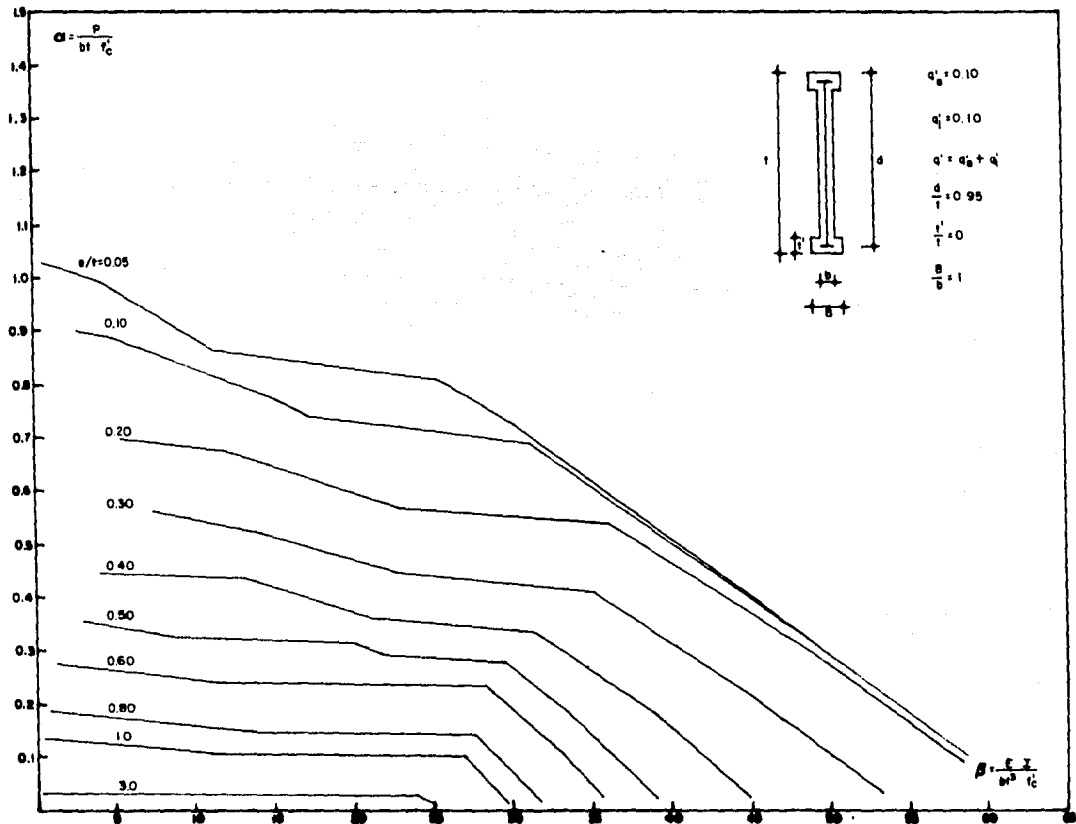




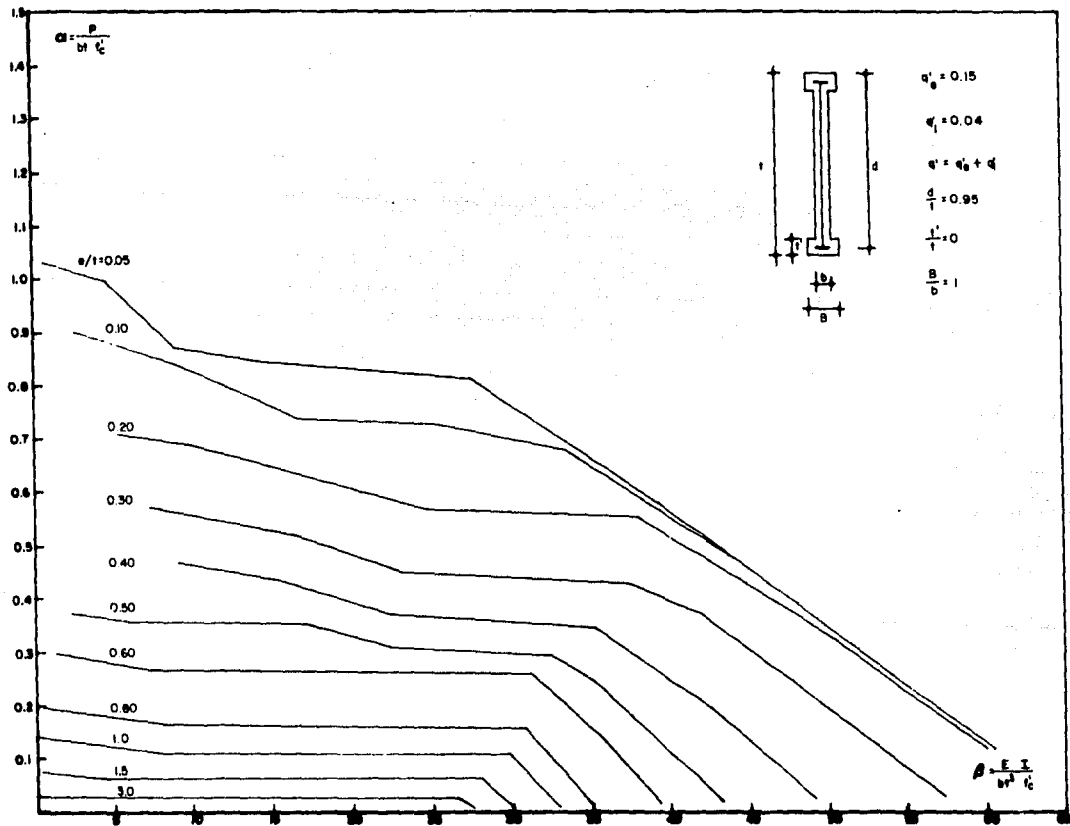


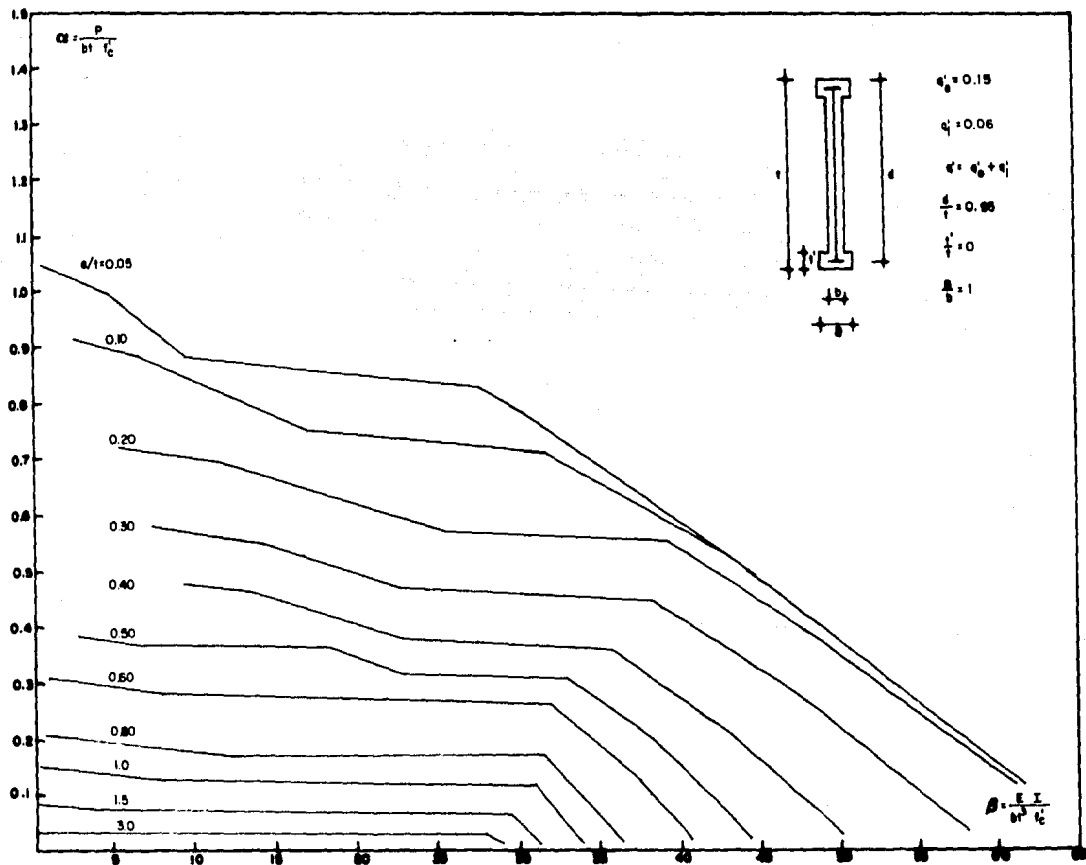






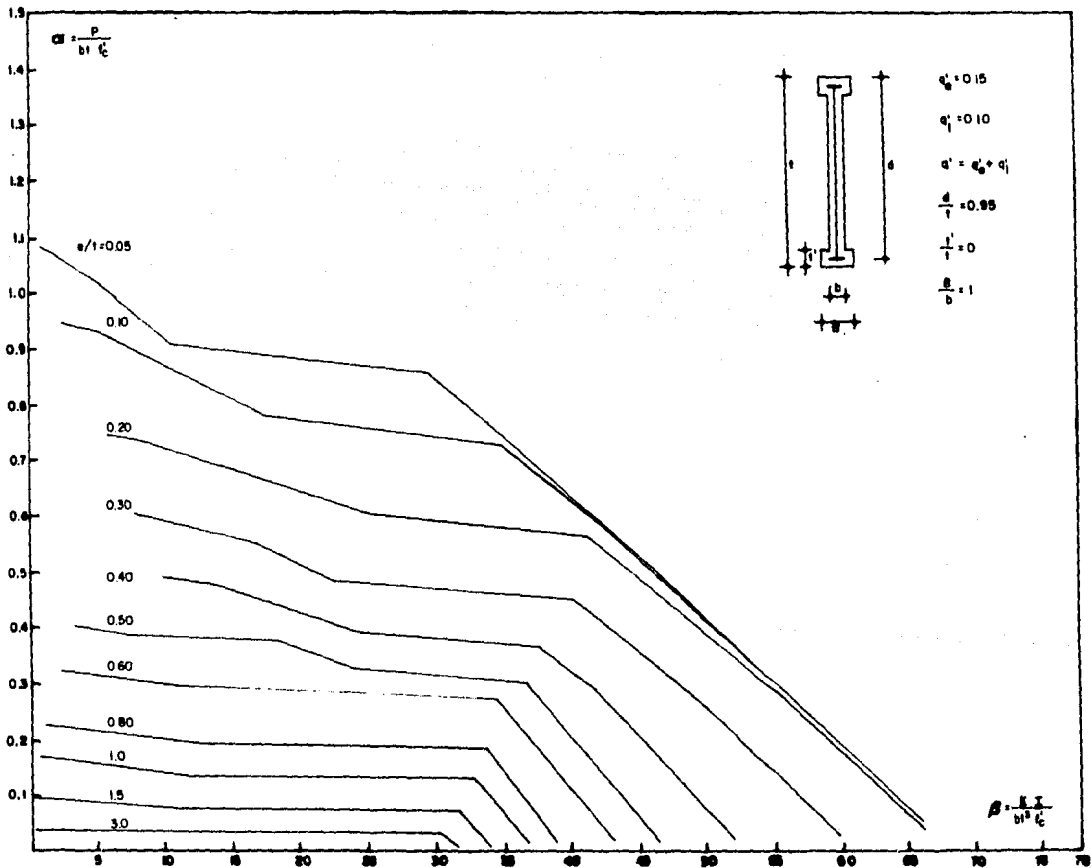


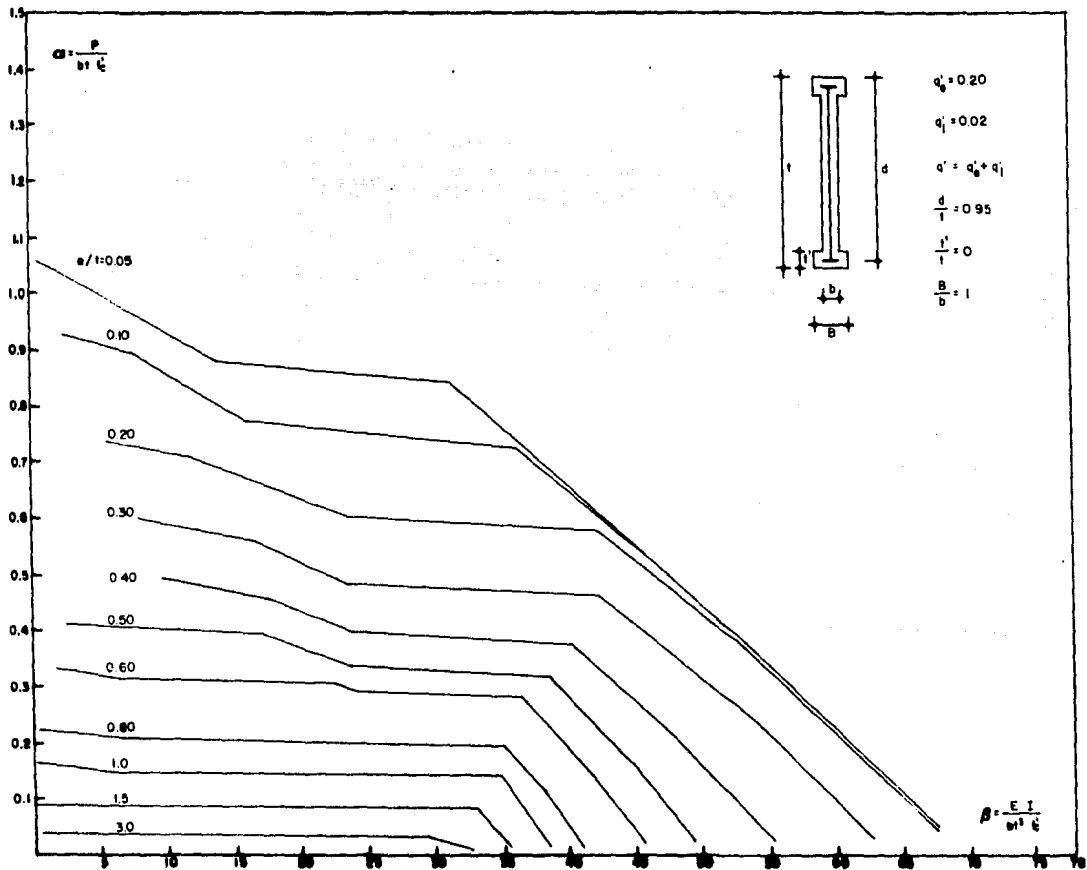




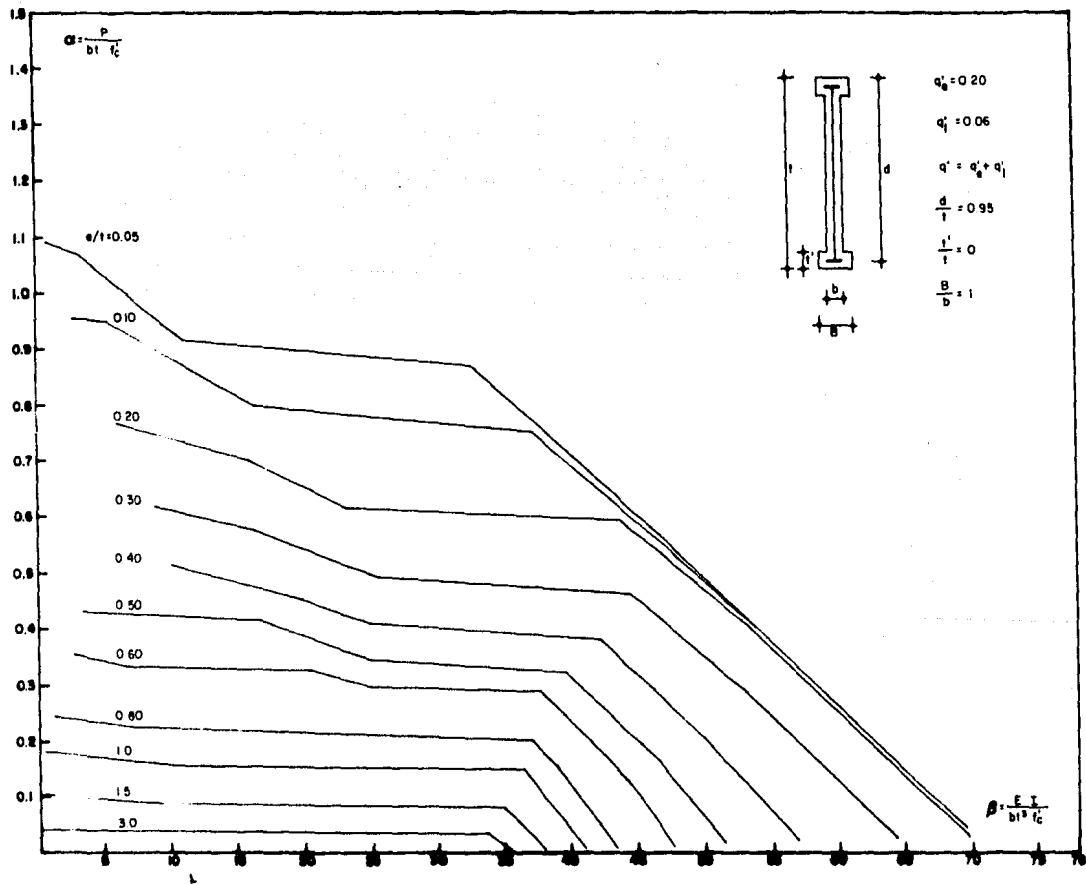


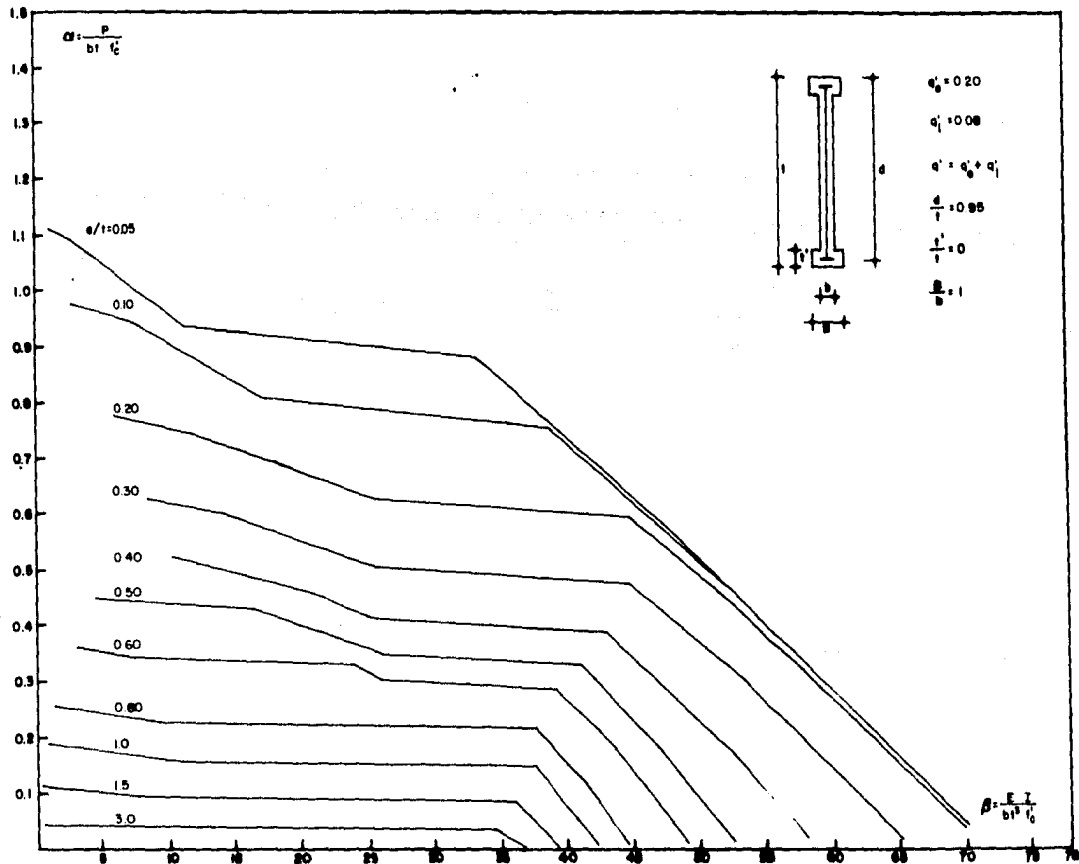


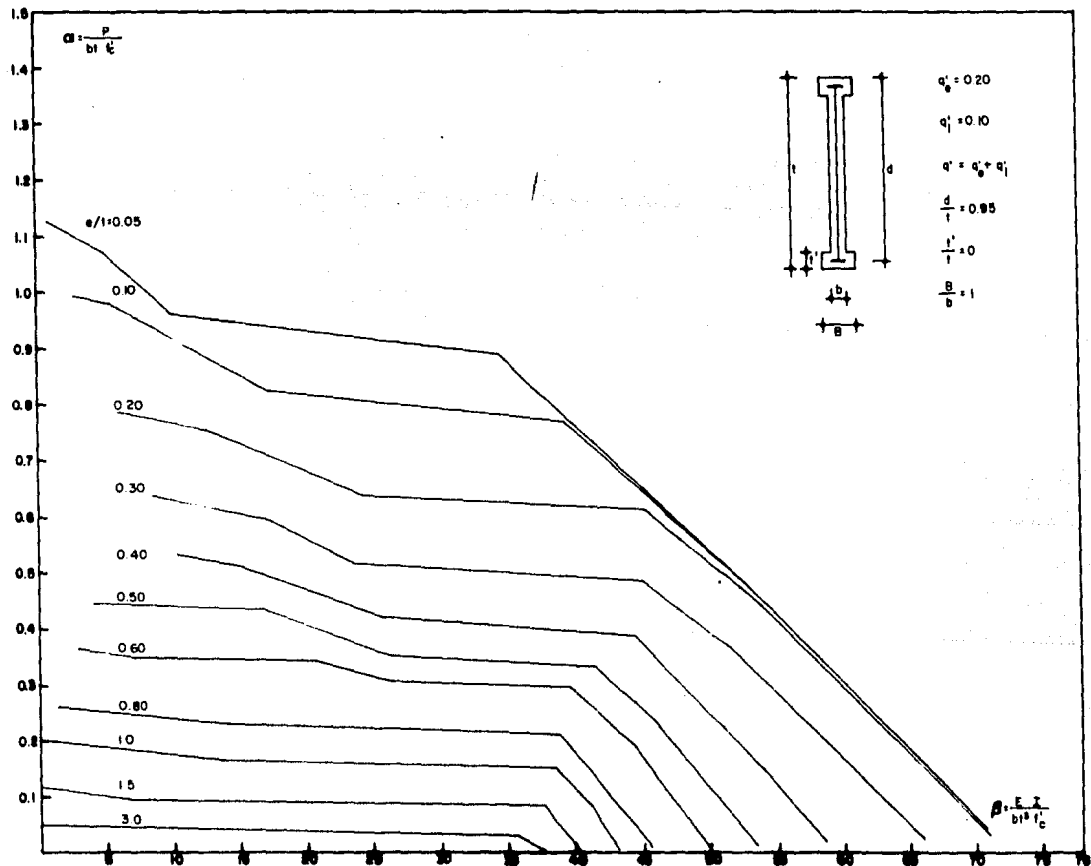


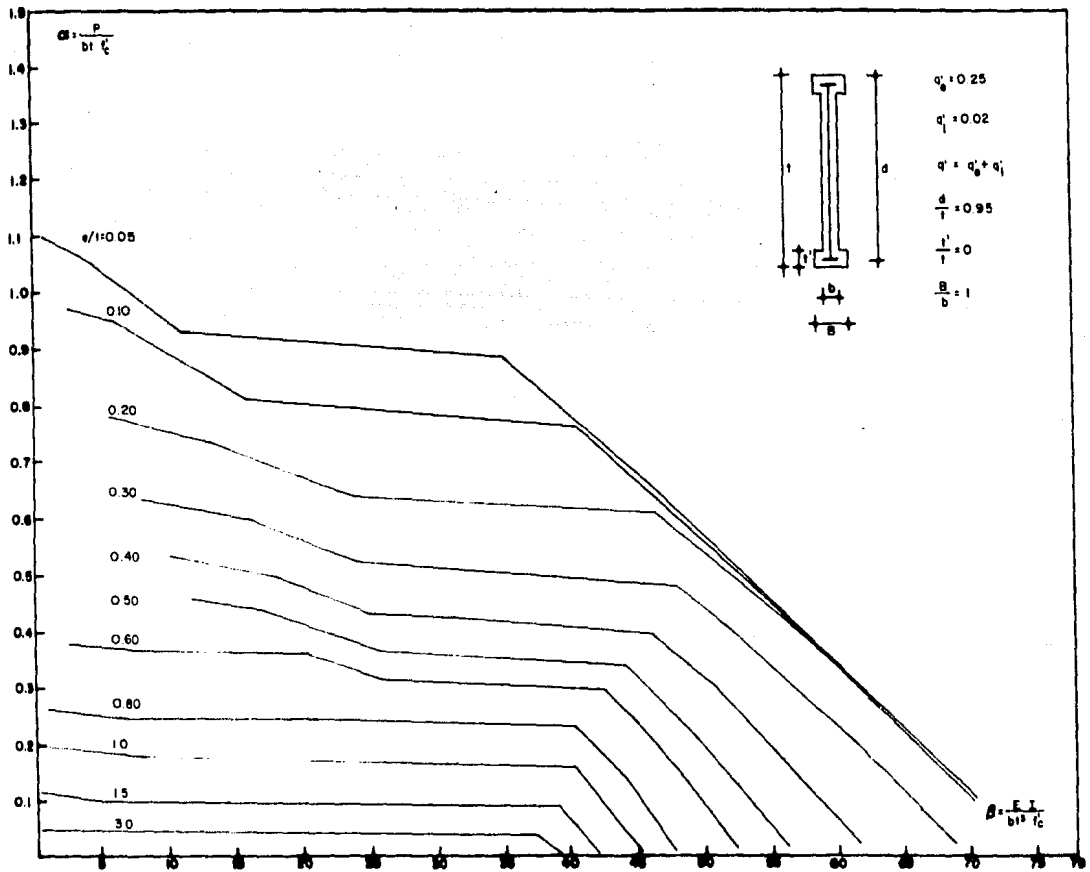


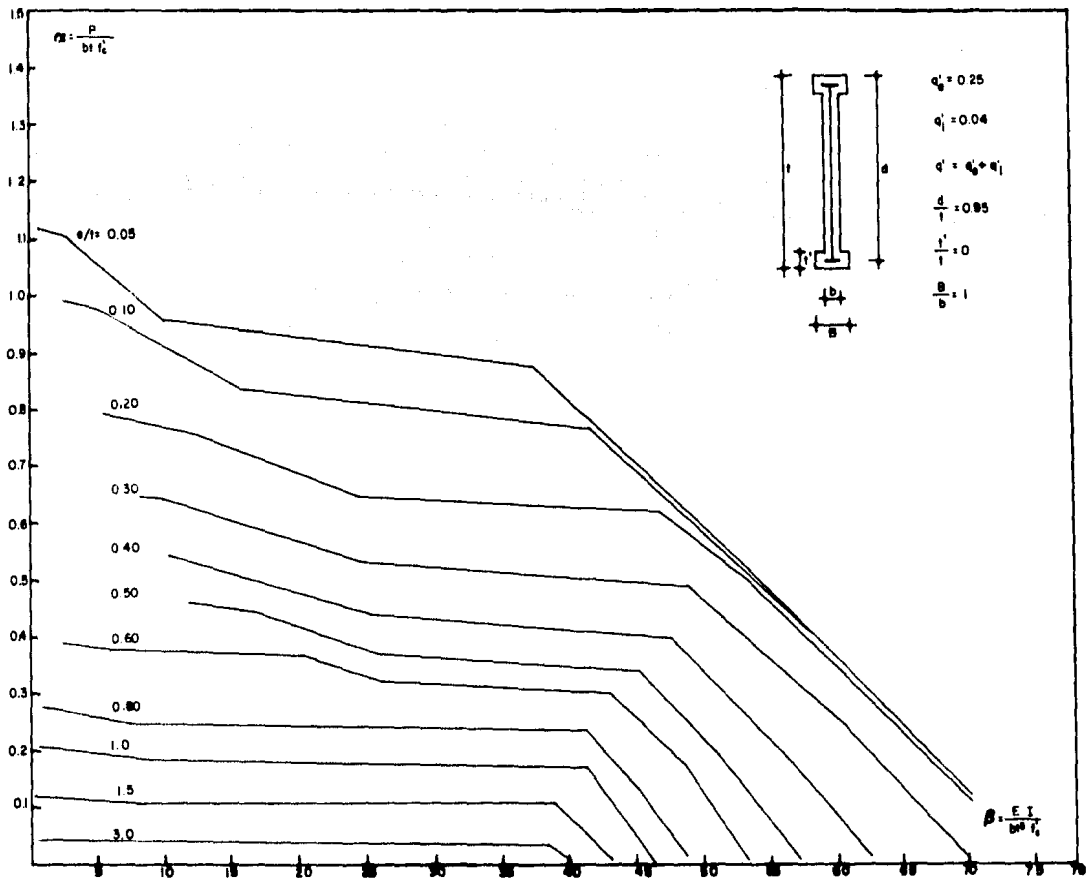




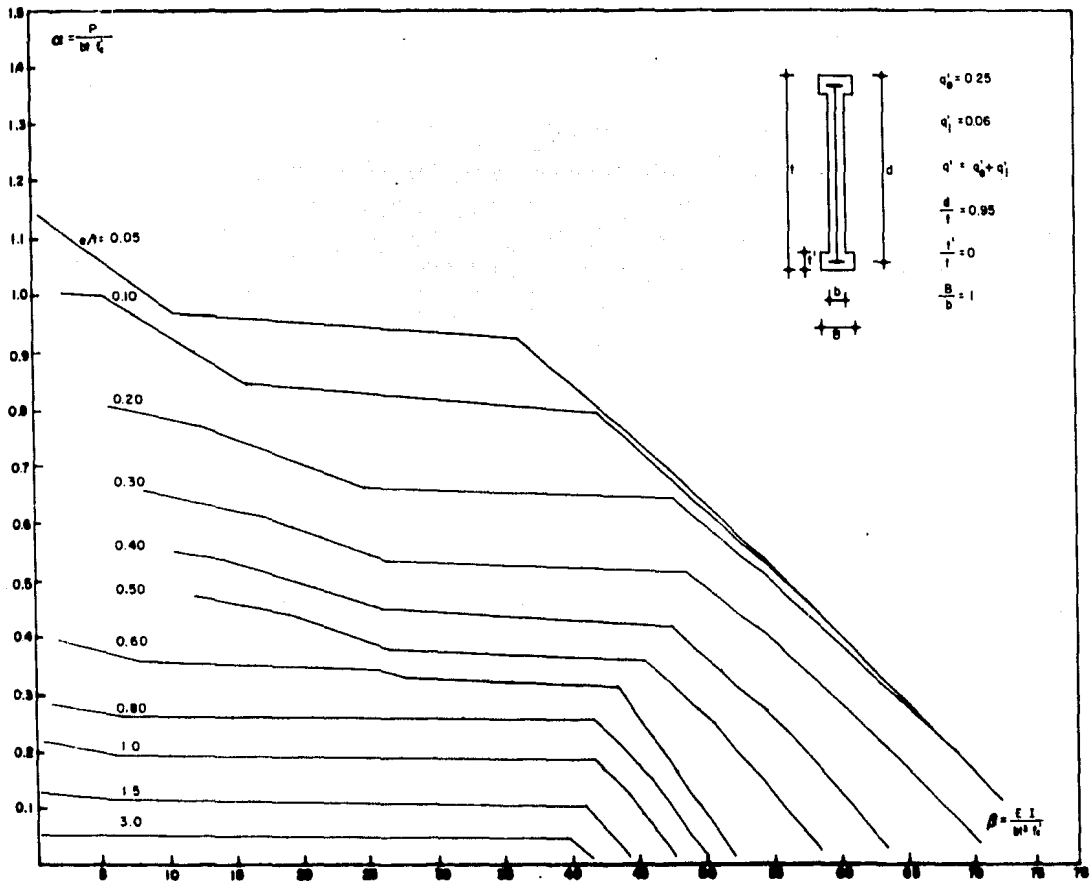


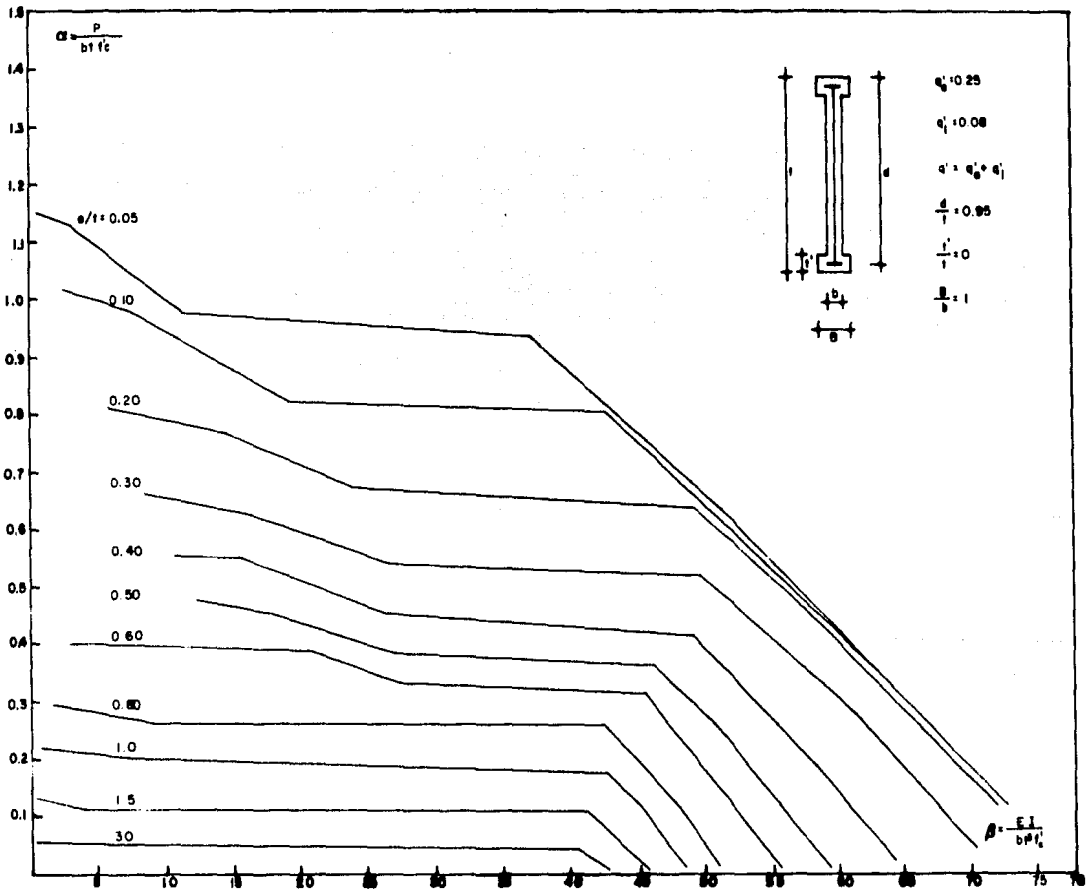


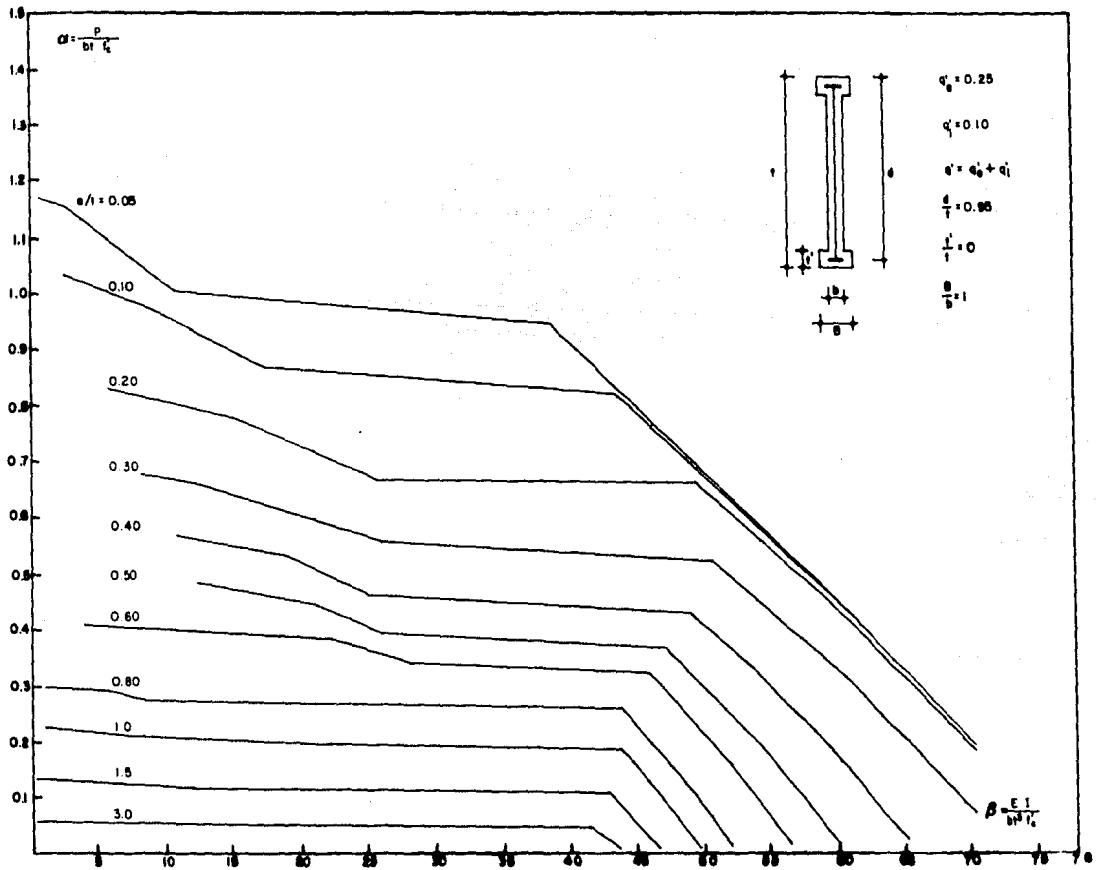


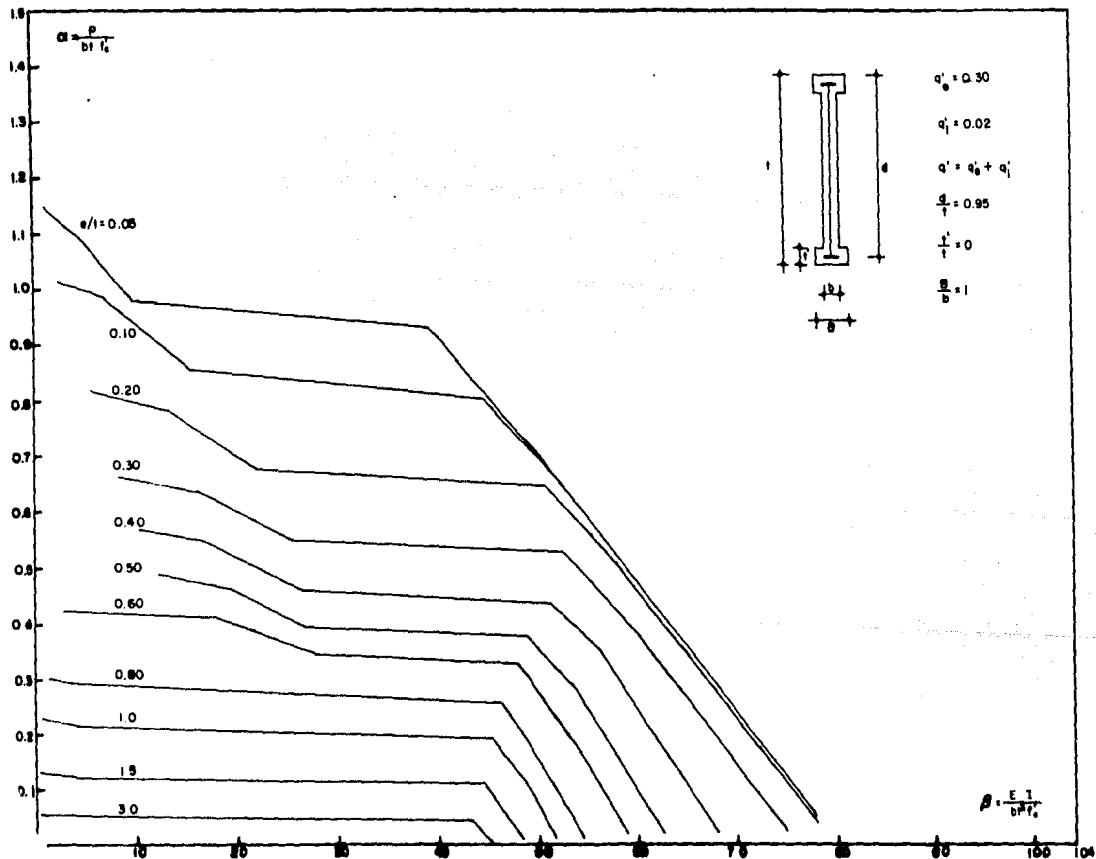




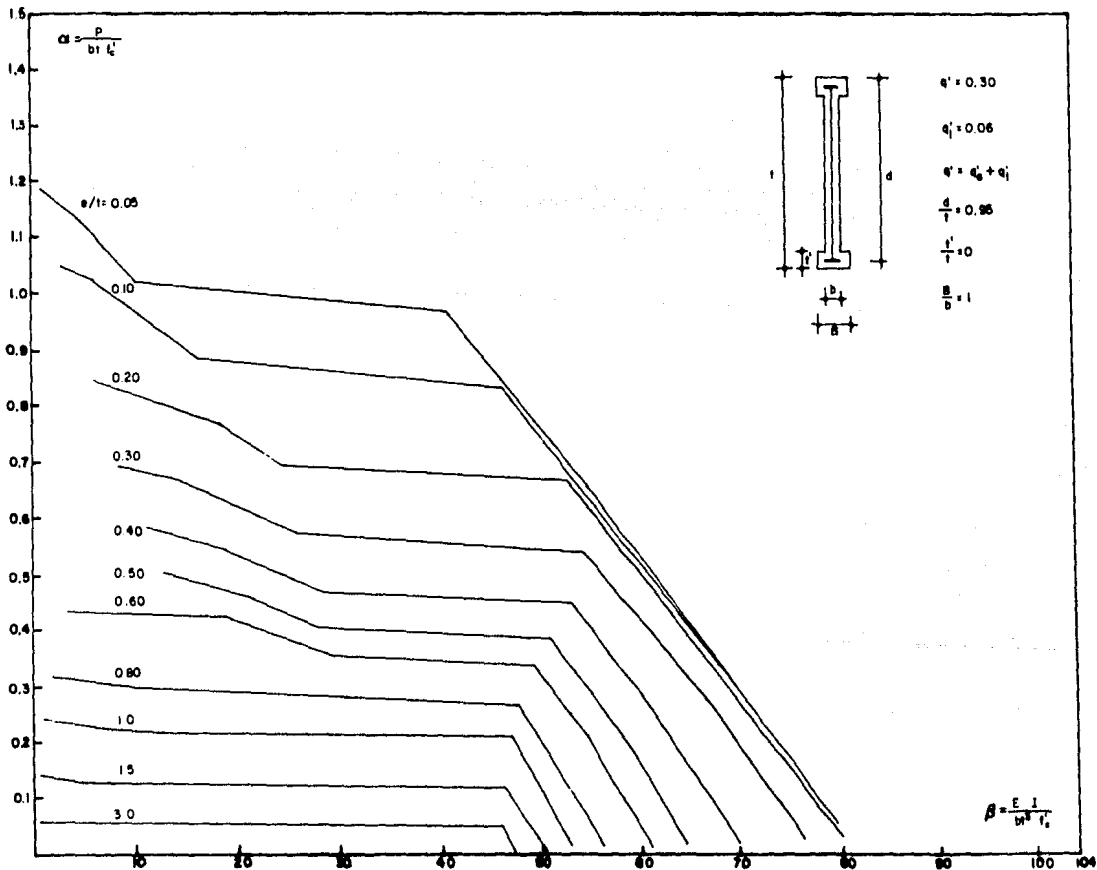


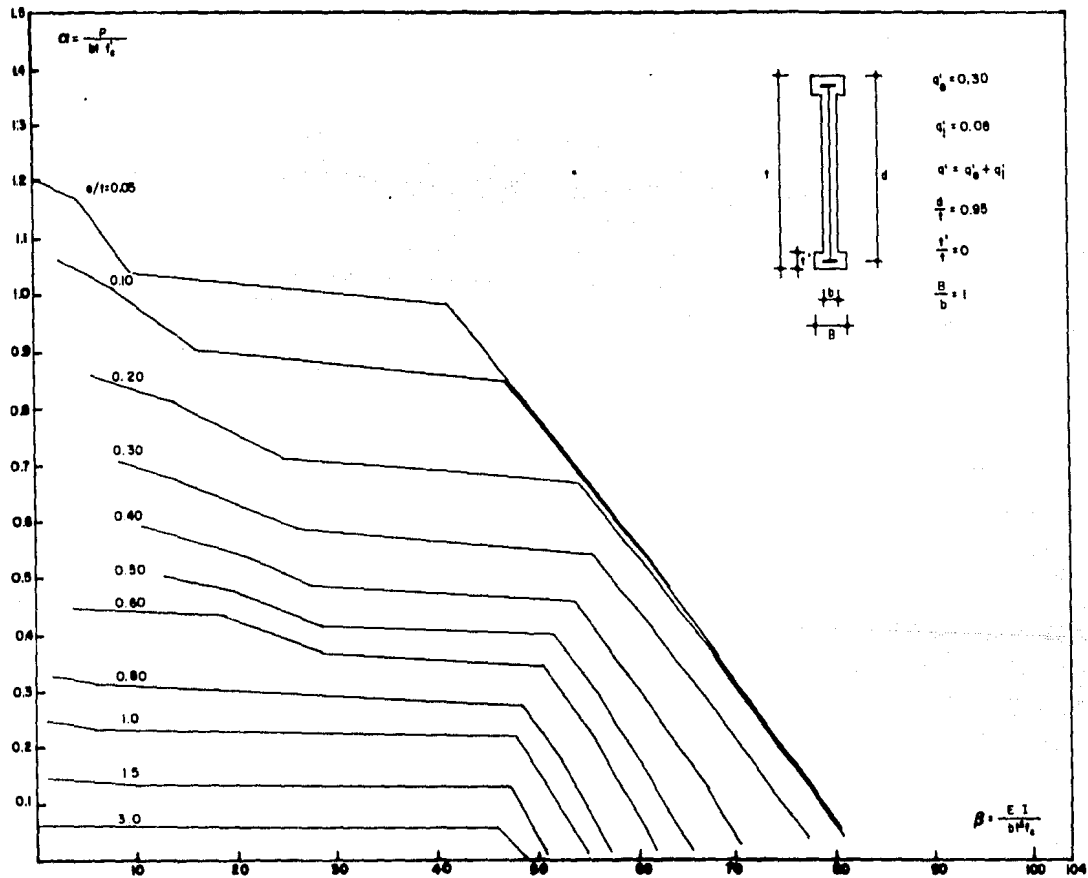






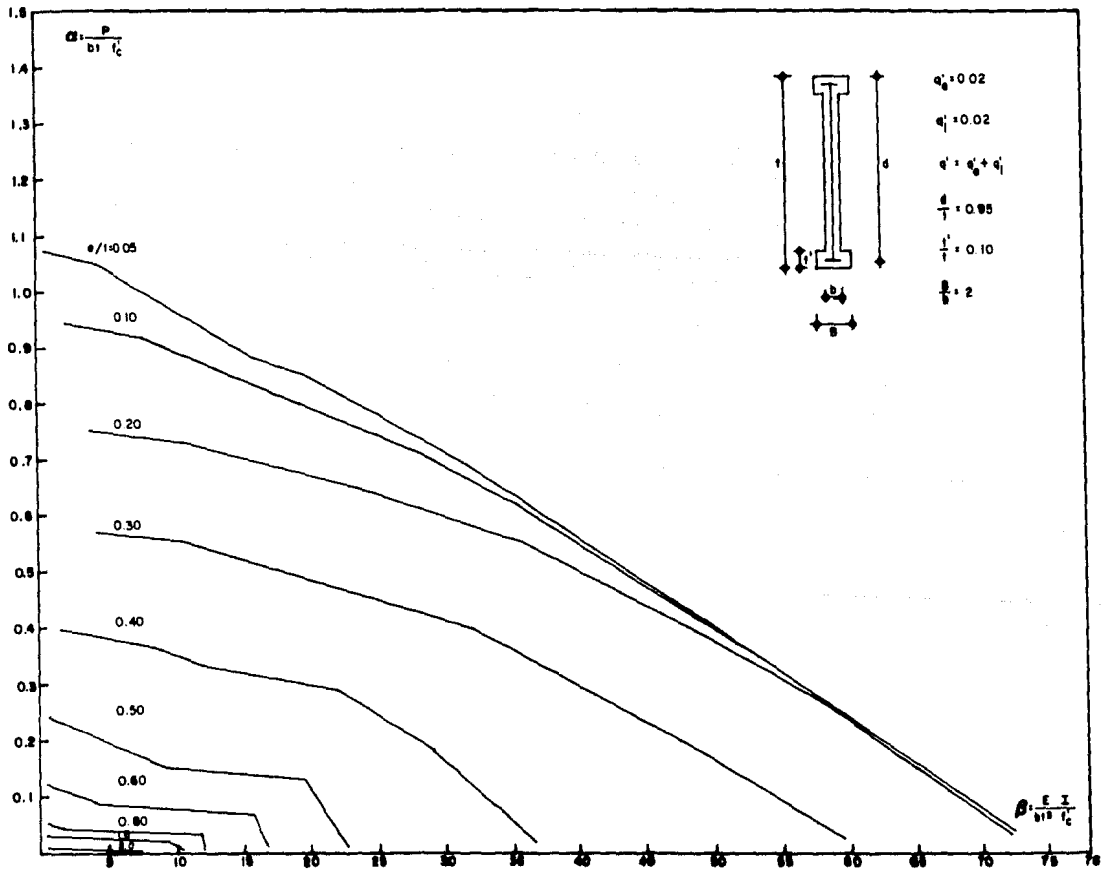


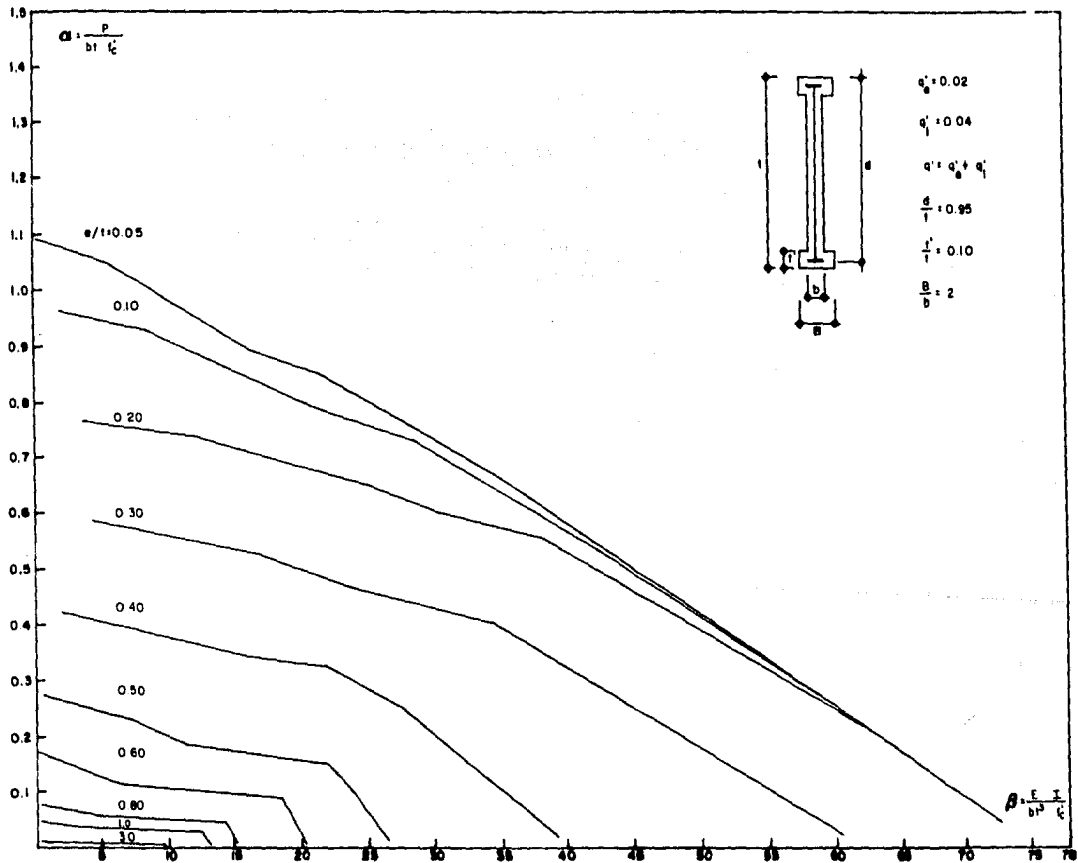


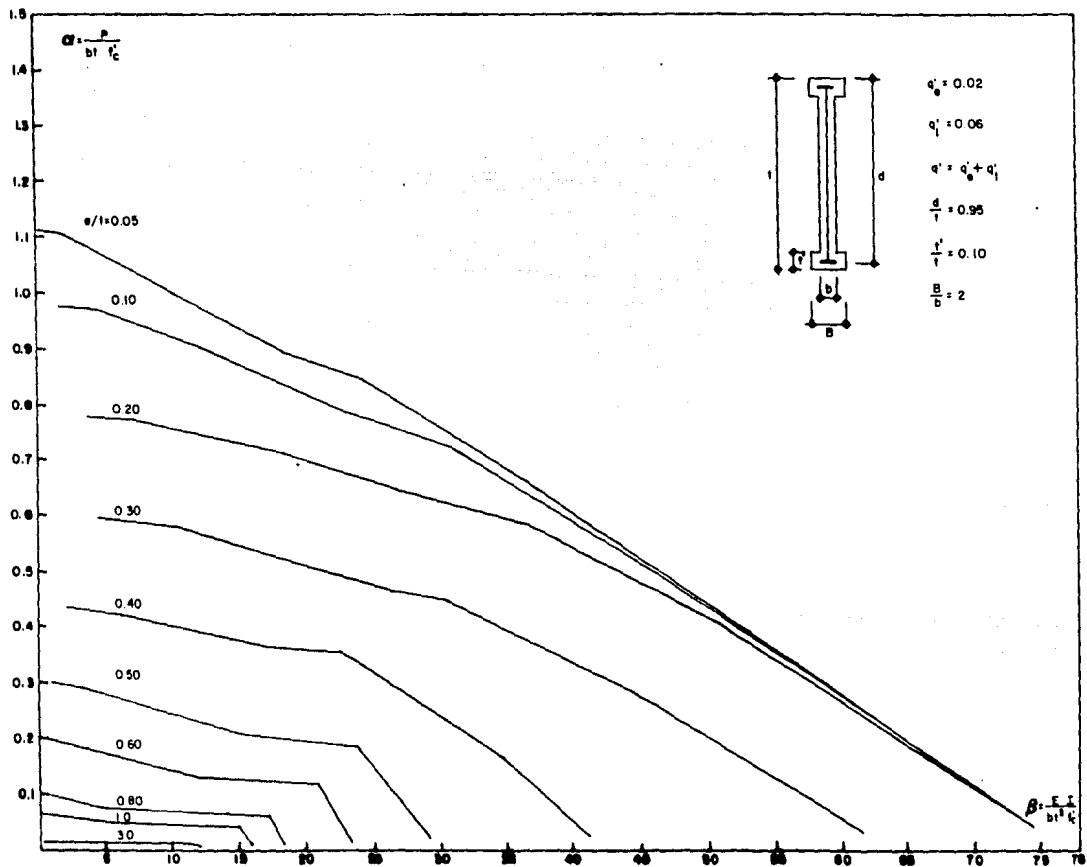




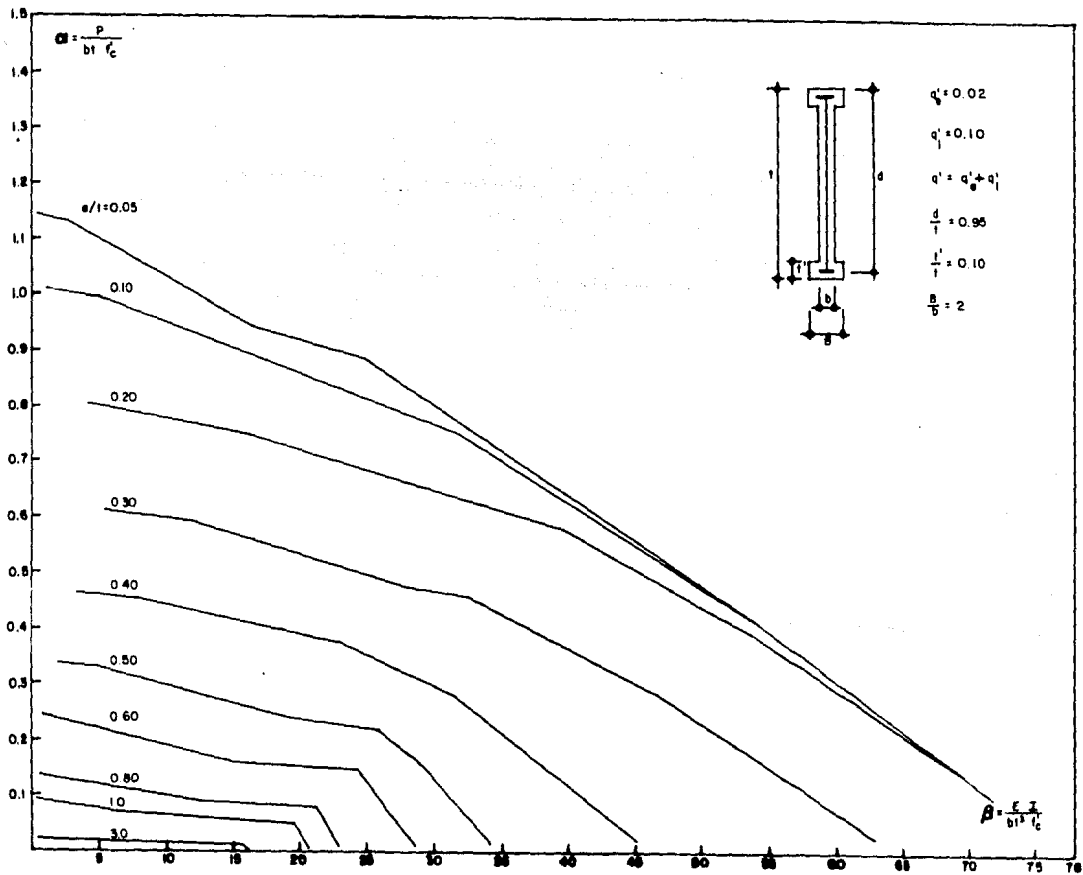


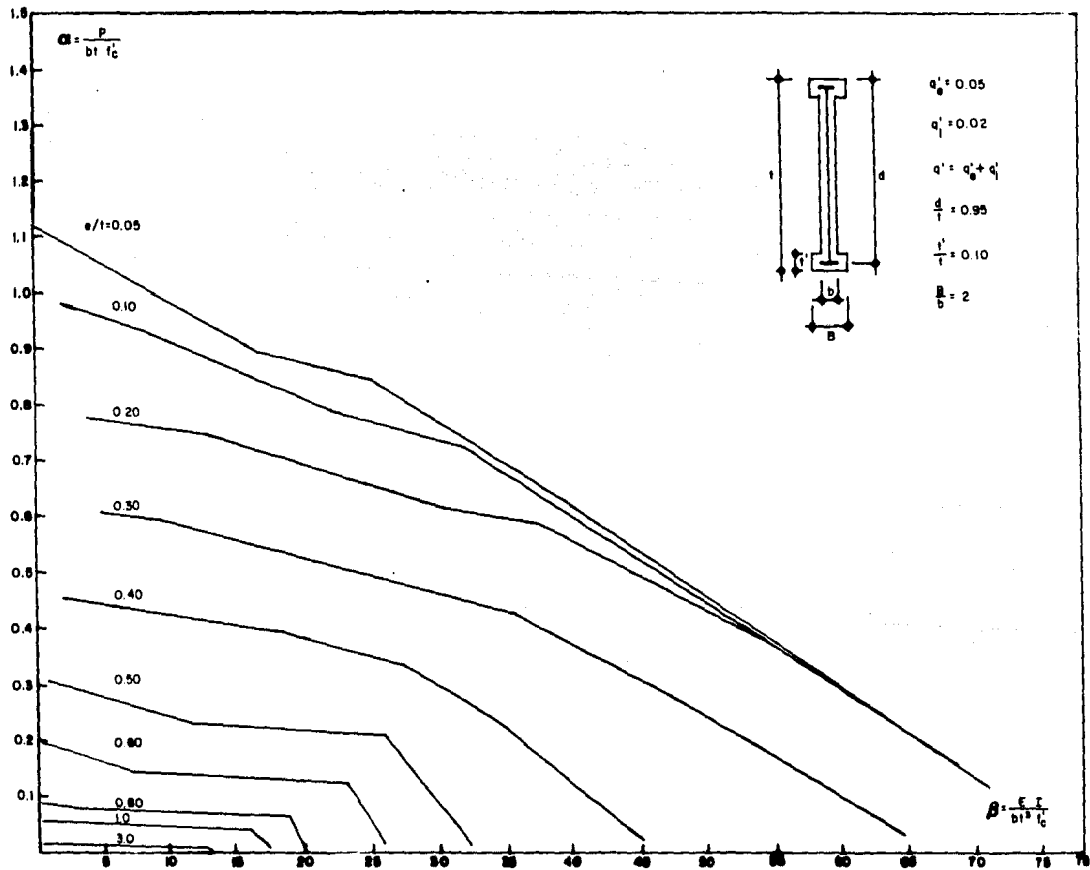


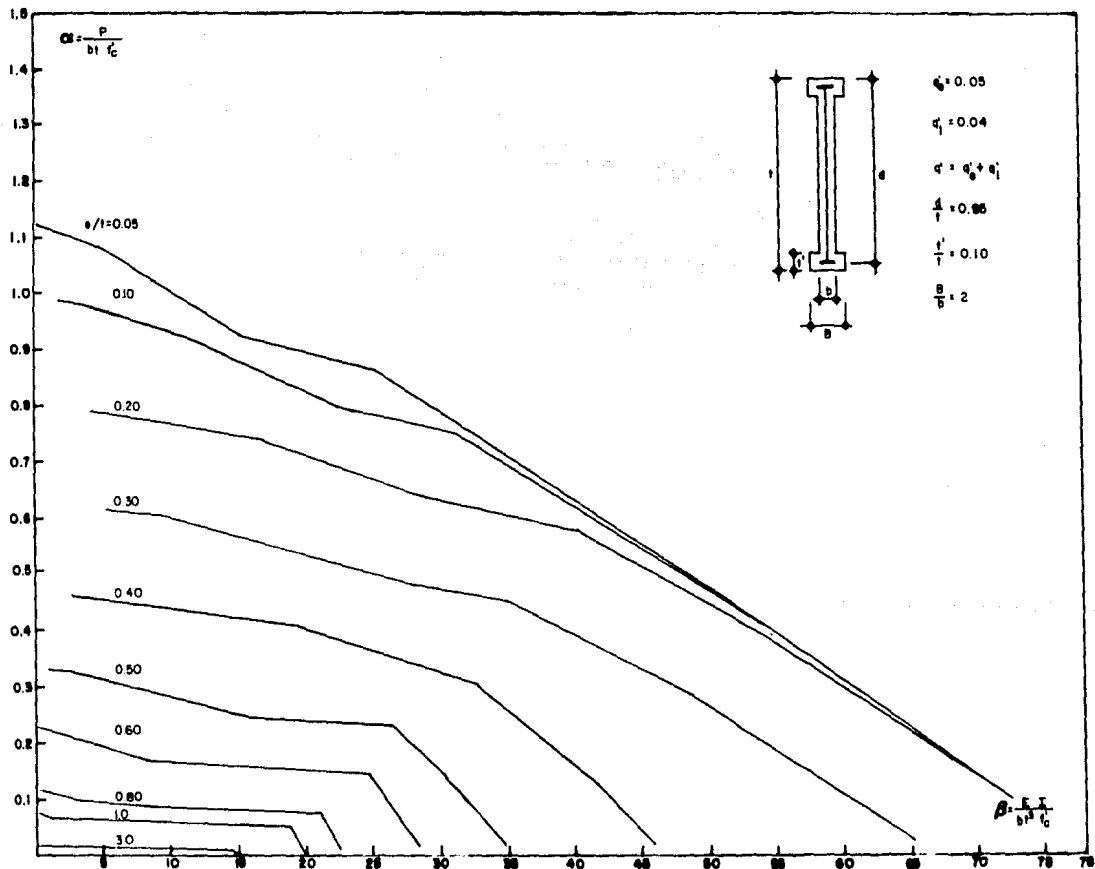


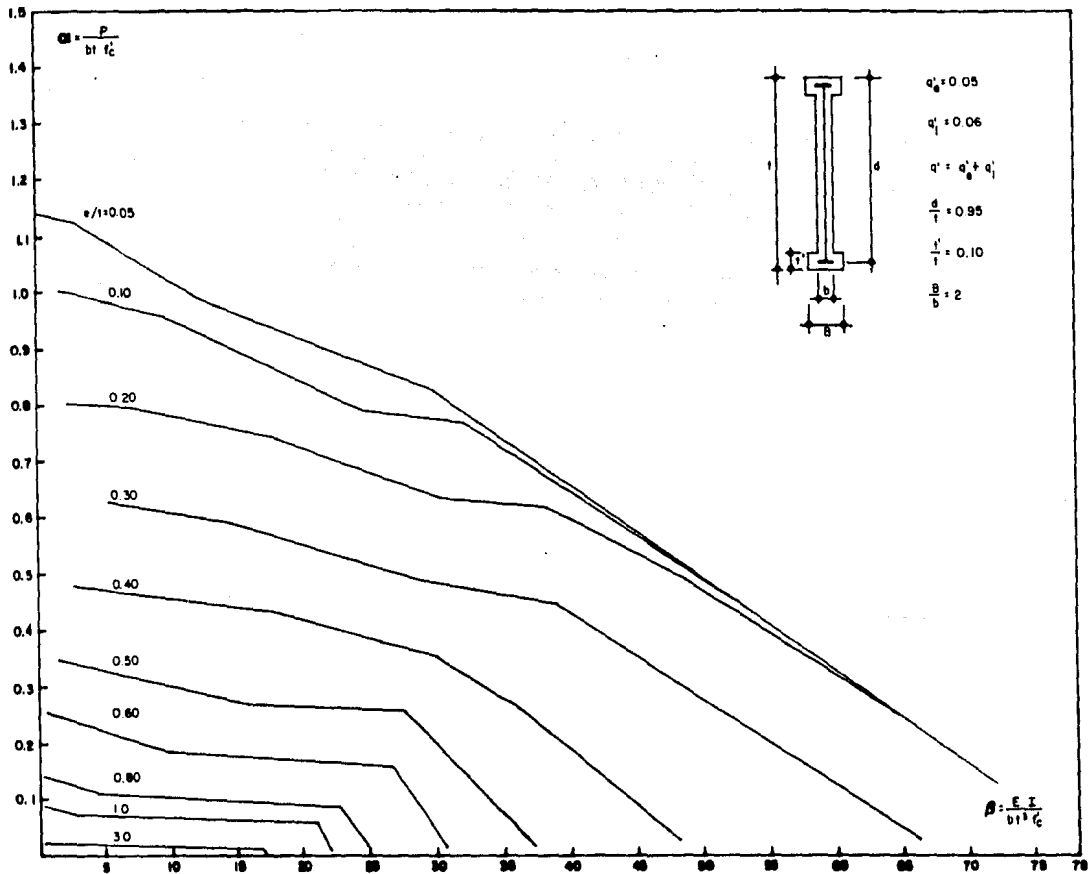




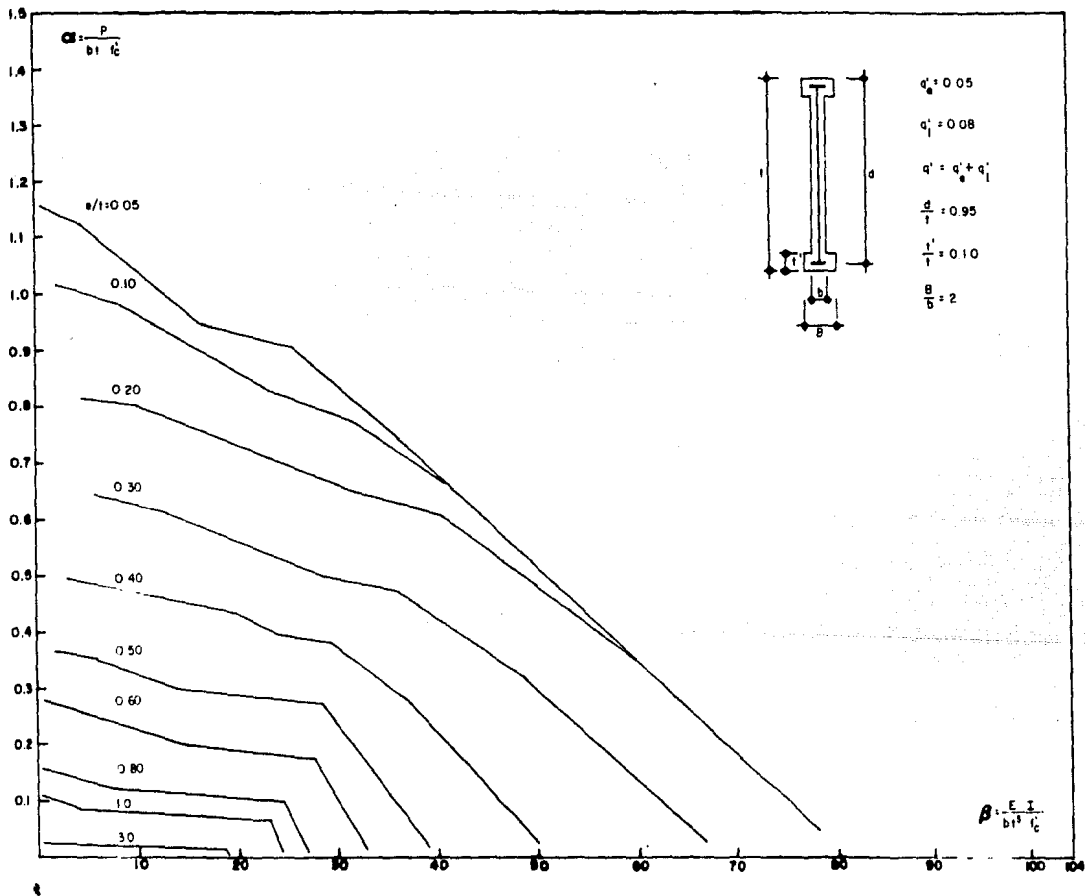


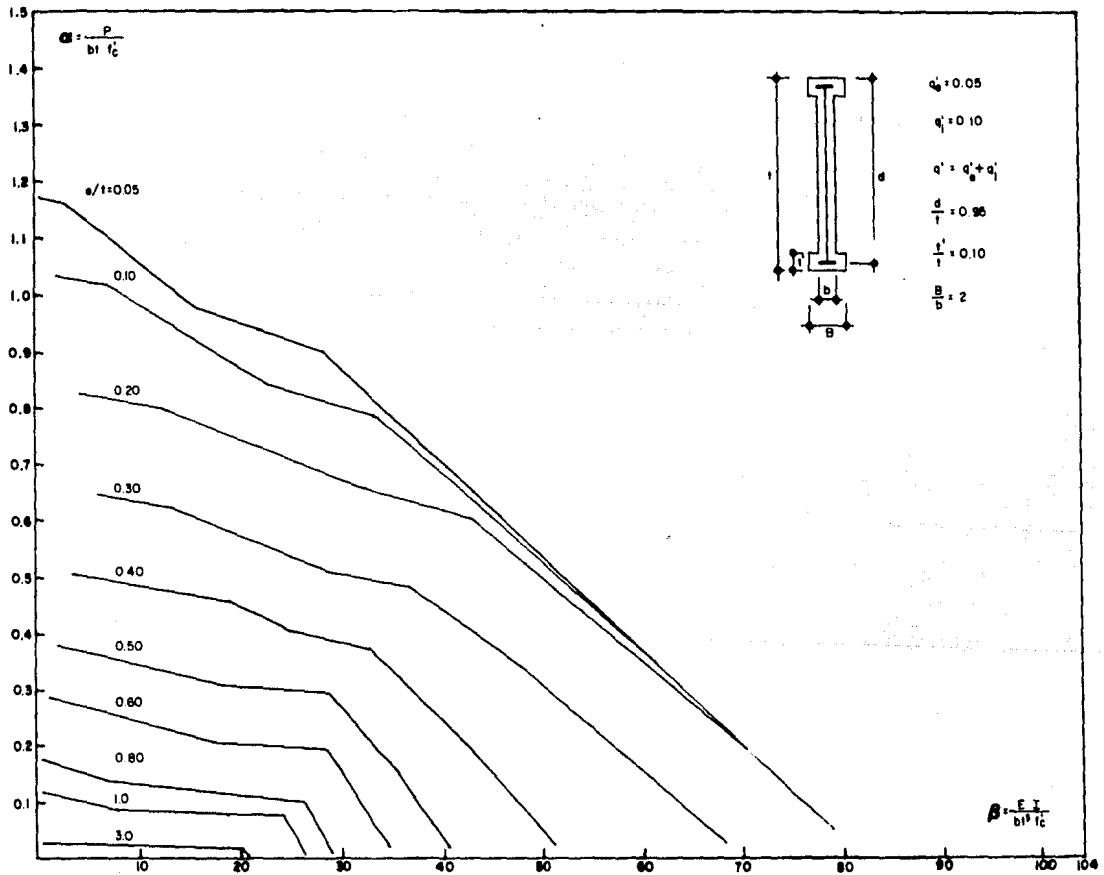






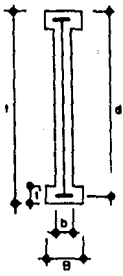






$$\alpha = \frac{P}{bt f_c}$$

$\alpha/t = 0.05$



- $q_0 = 0.05$
- $q_1 = 0.10$
- $q' = q_0' + q_1'$
- $\frac{d}{t} = 0.95$
- $\frac{t'}{t} = 0.10$
- $\frac{B}{b} = 2$

$$\beta = \frac{E I}{bt^3 f_c}$$

1.5

1.4

1.3

1.2

1.1

1.0

0.9

0.8

0.7

0.6

0.5

0.4

0.3

0.2

0.1

10

20

30

40

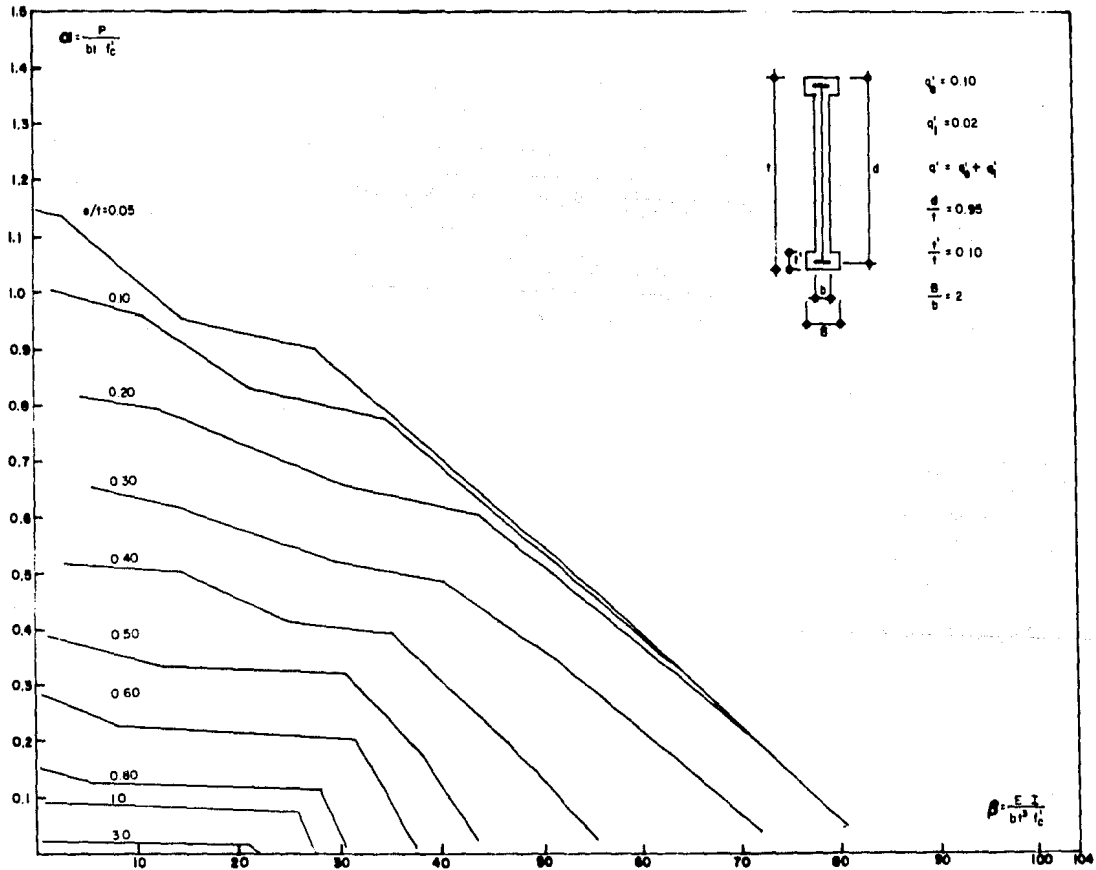
60

80

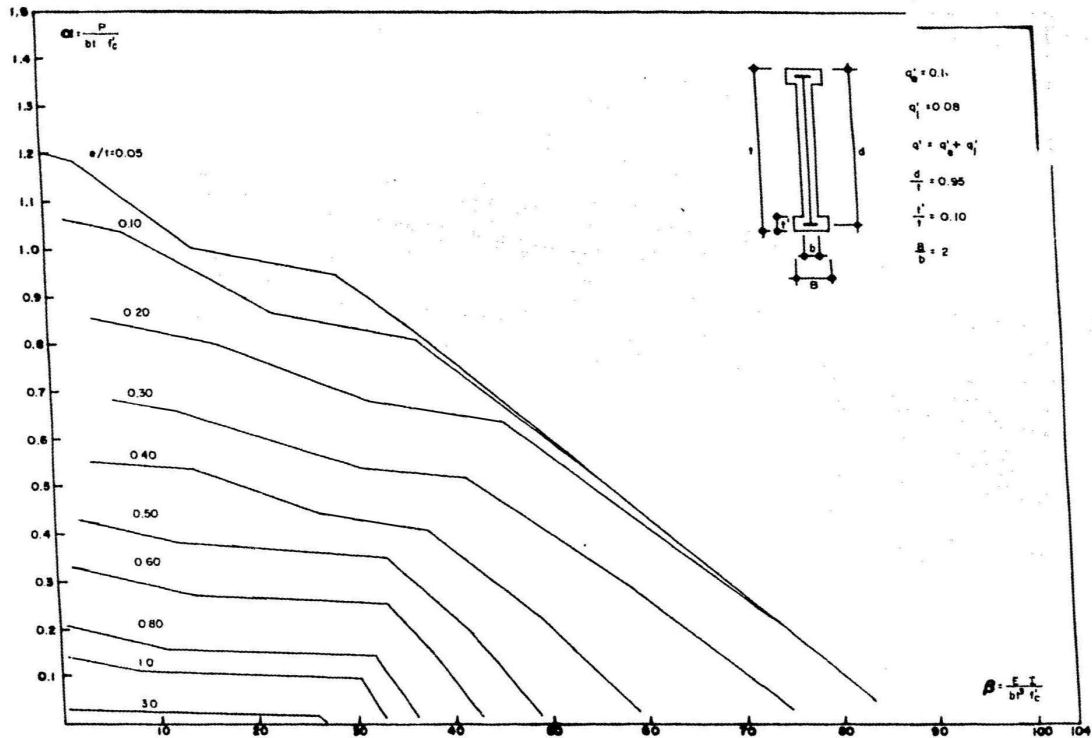
100

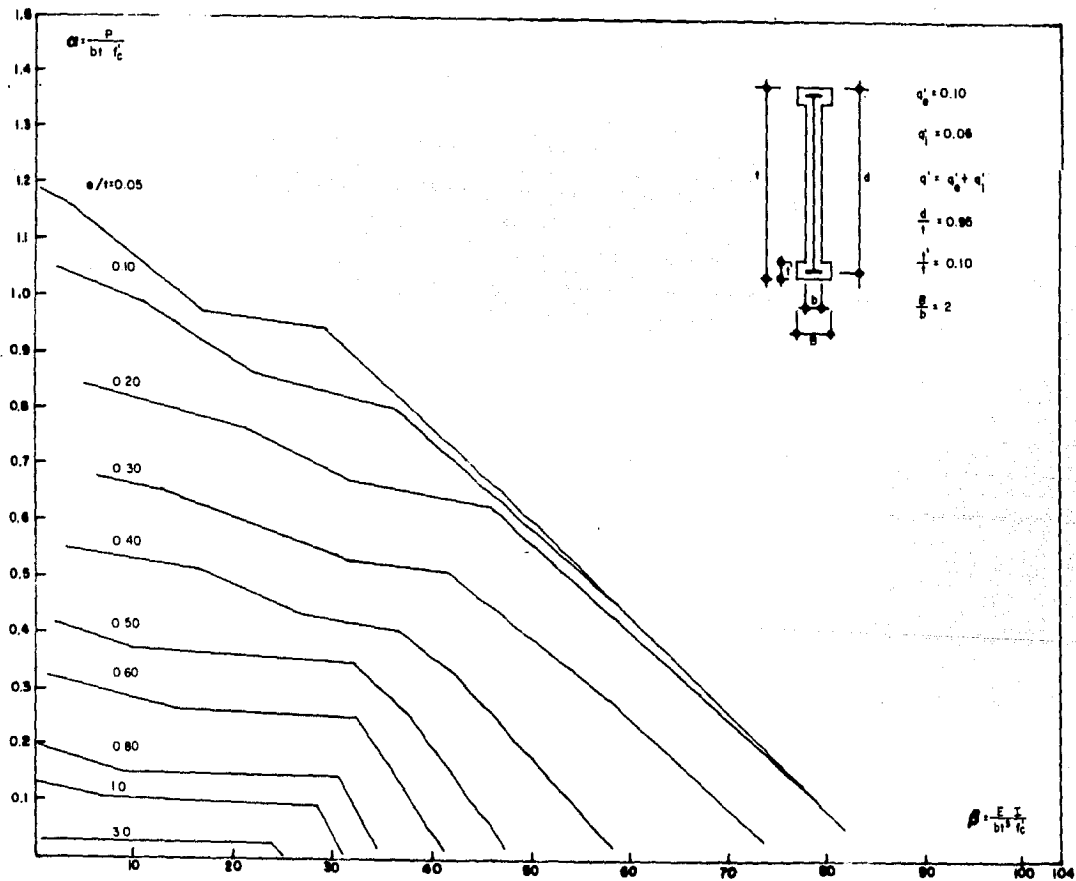
120

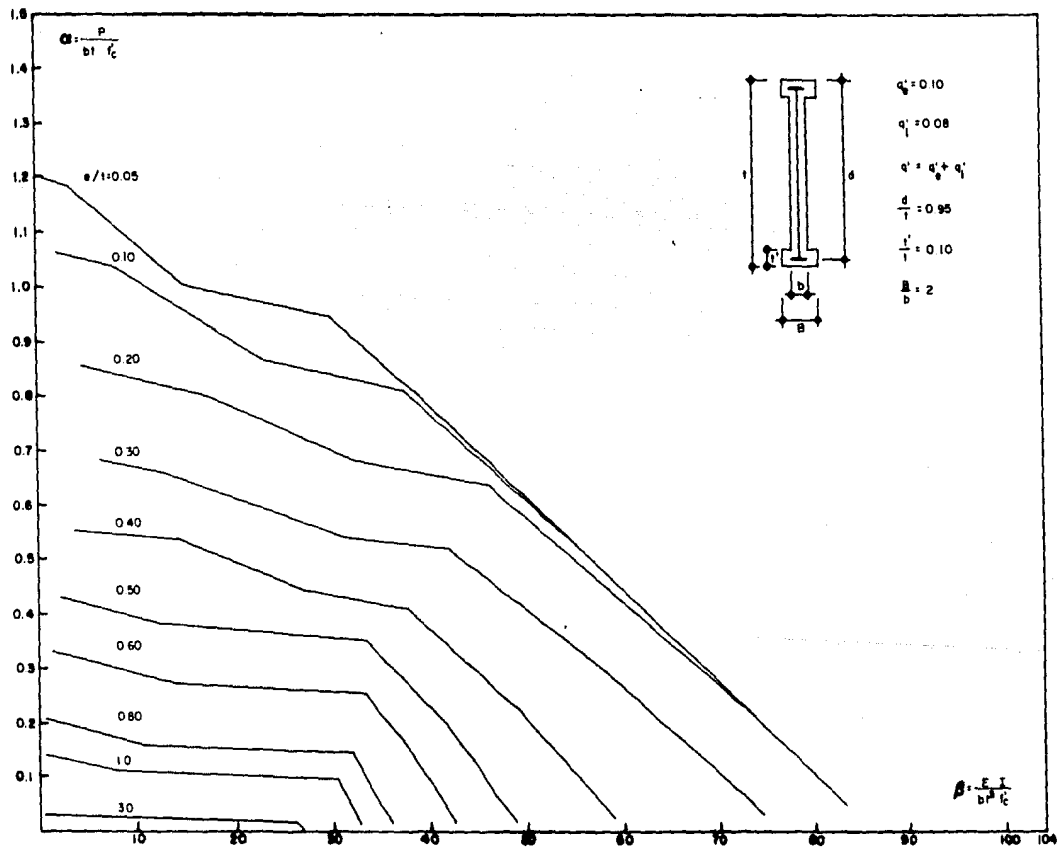
140

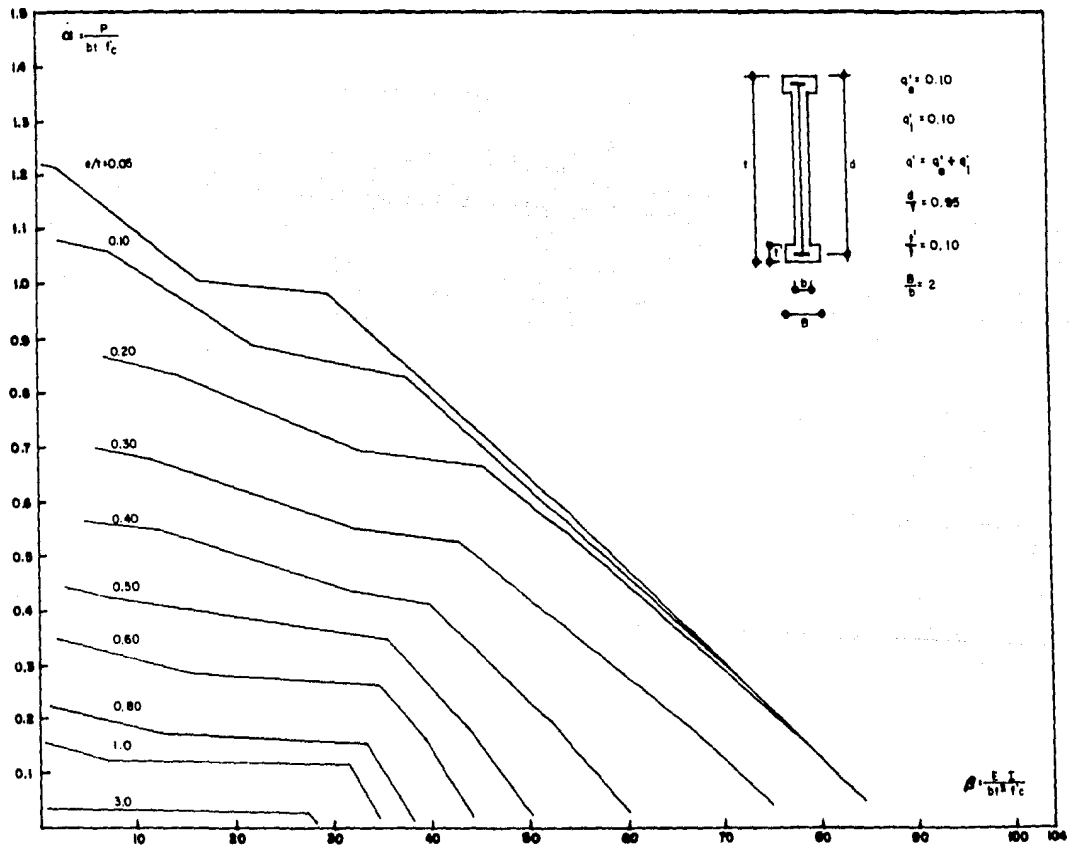




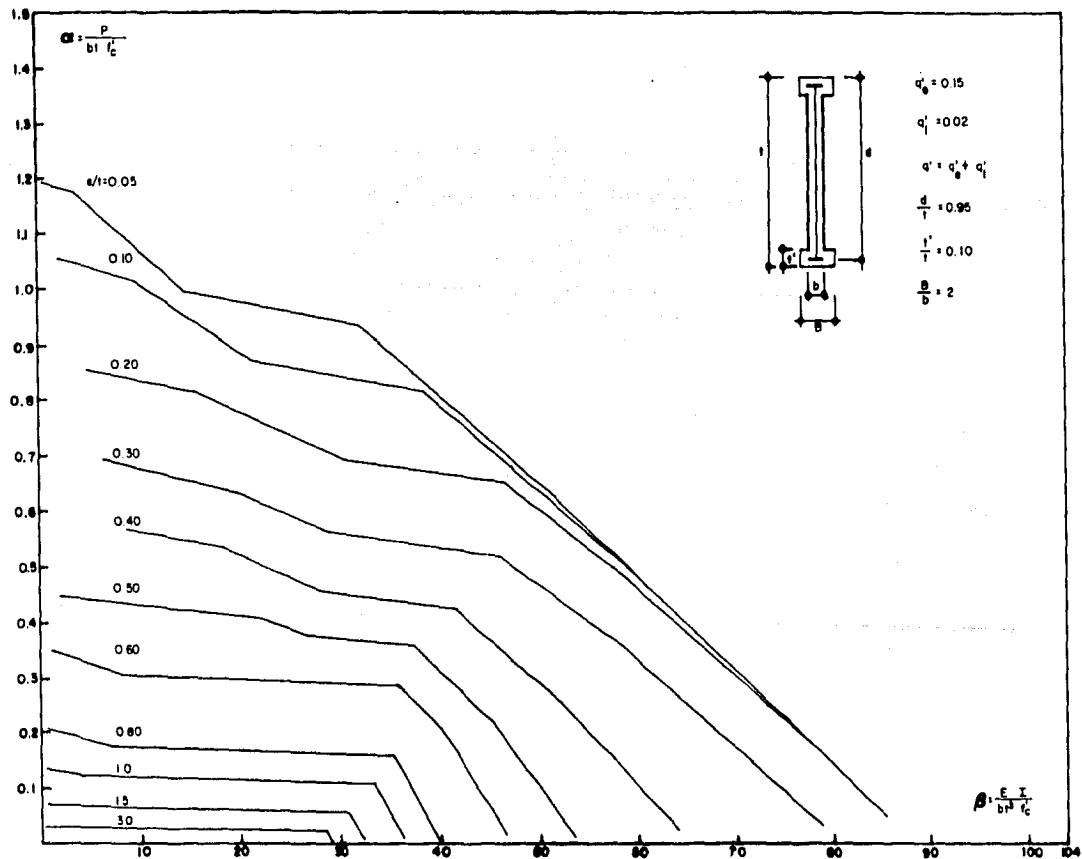


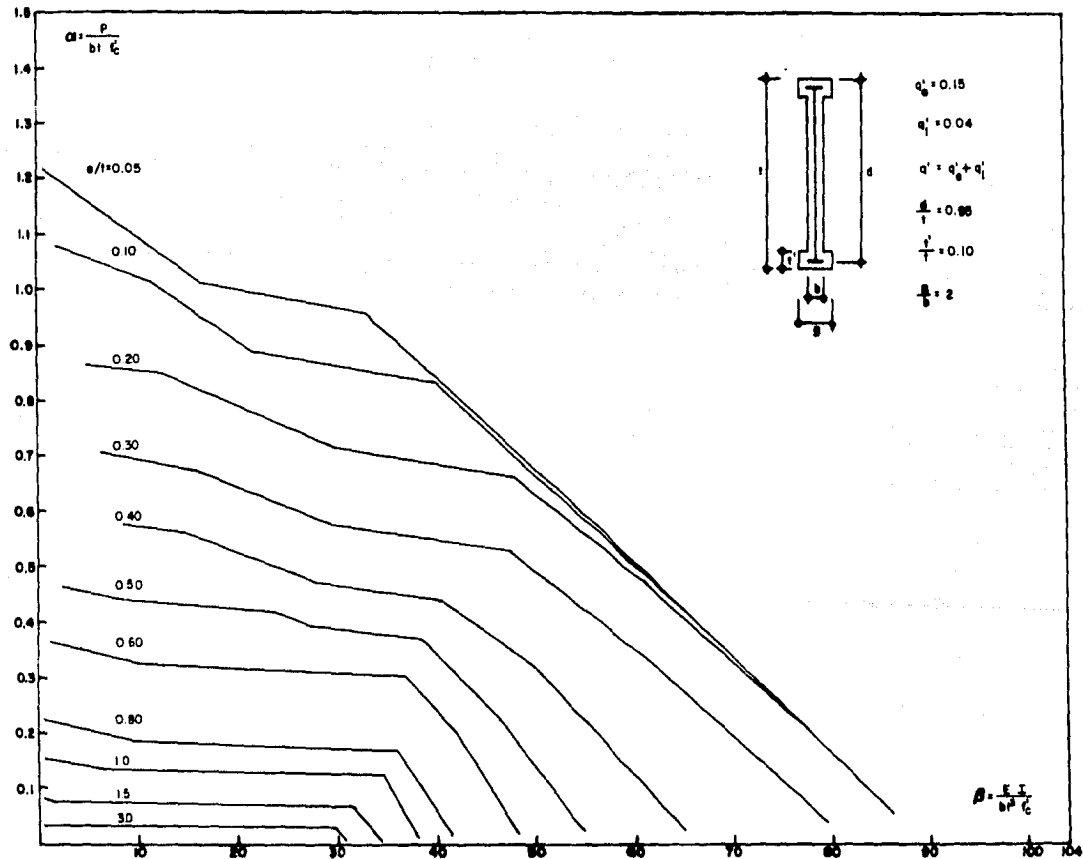


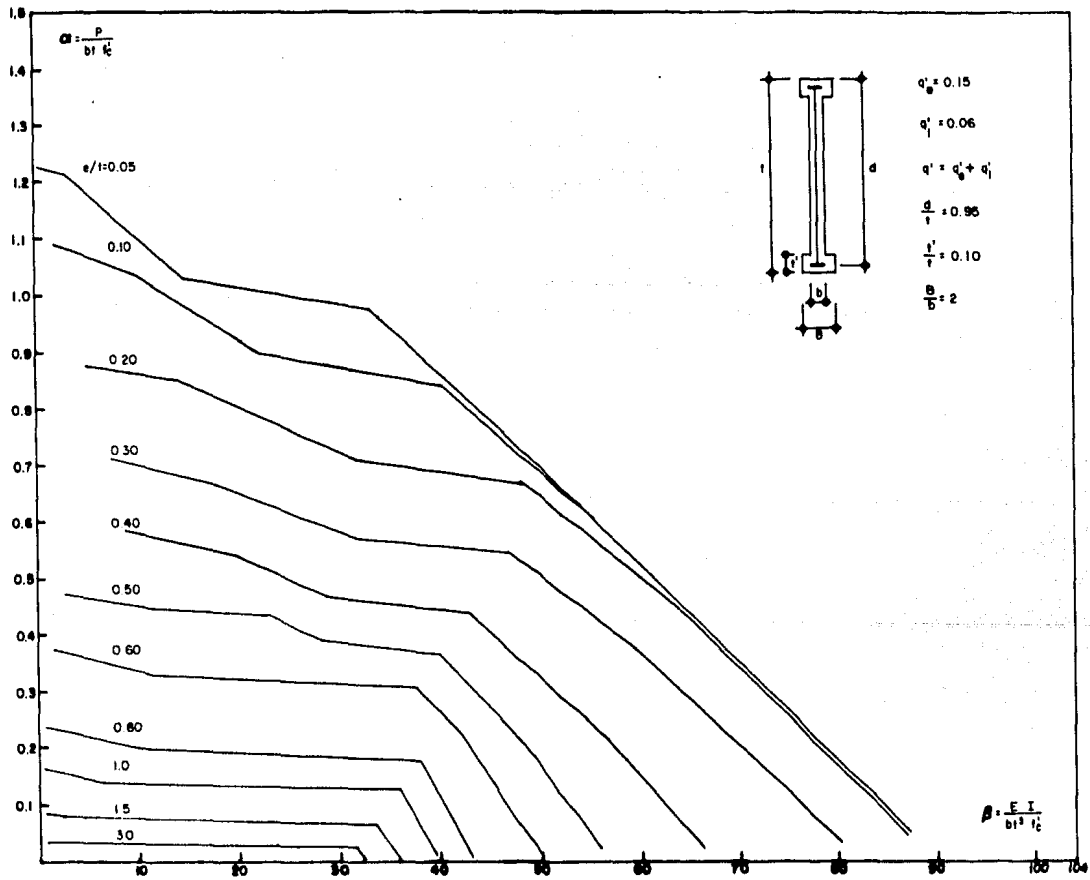


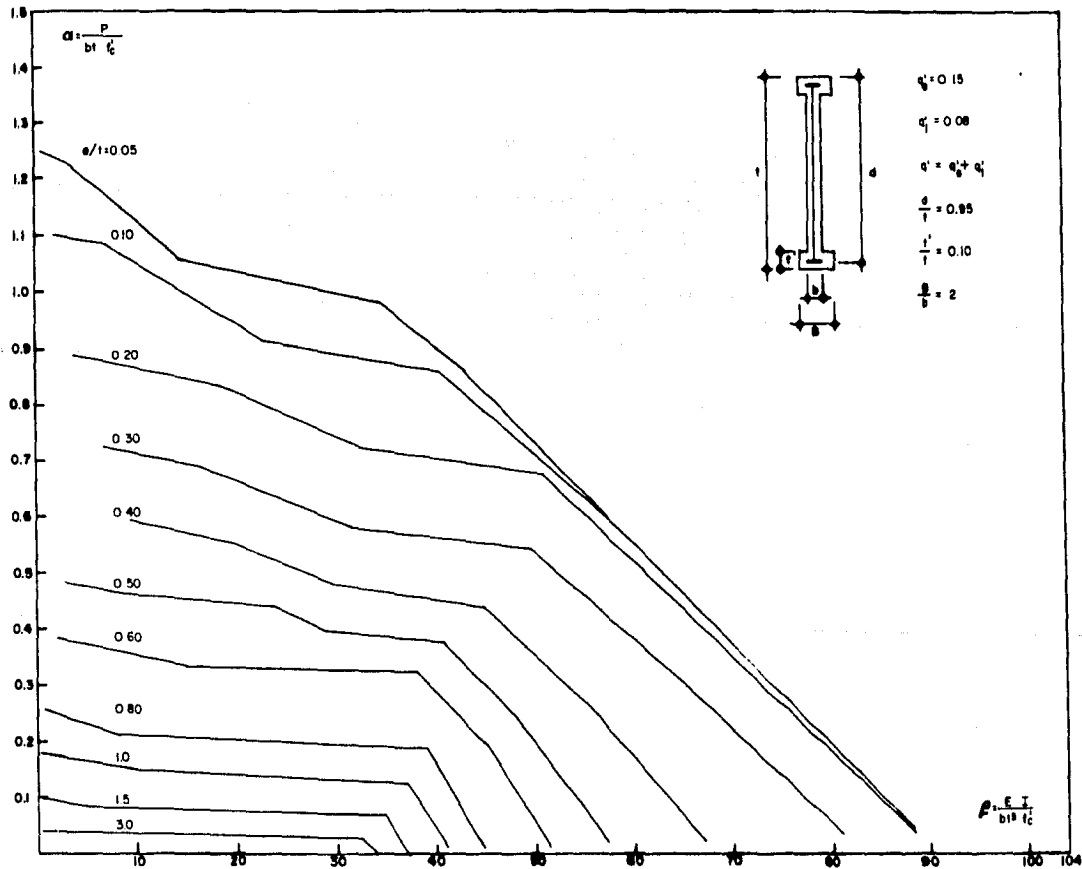


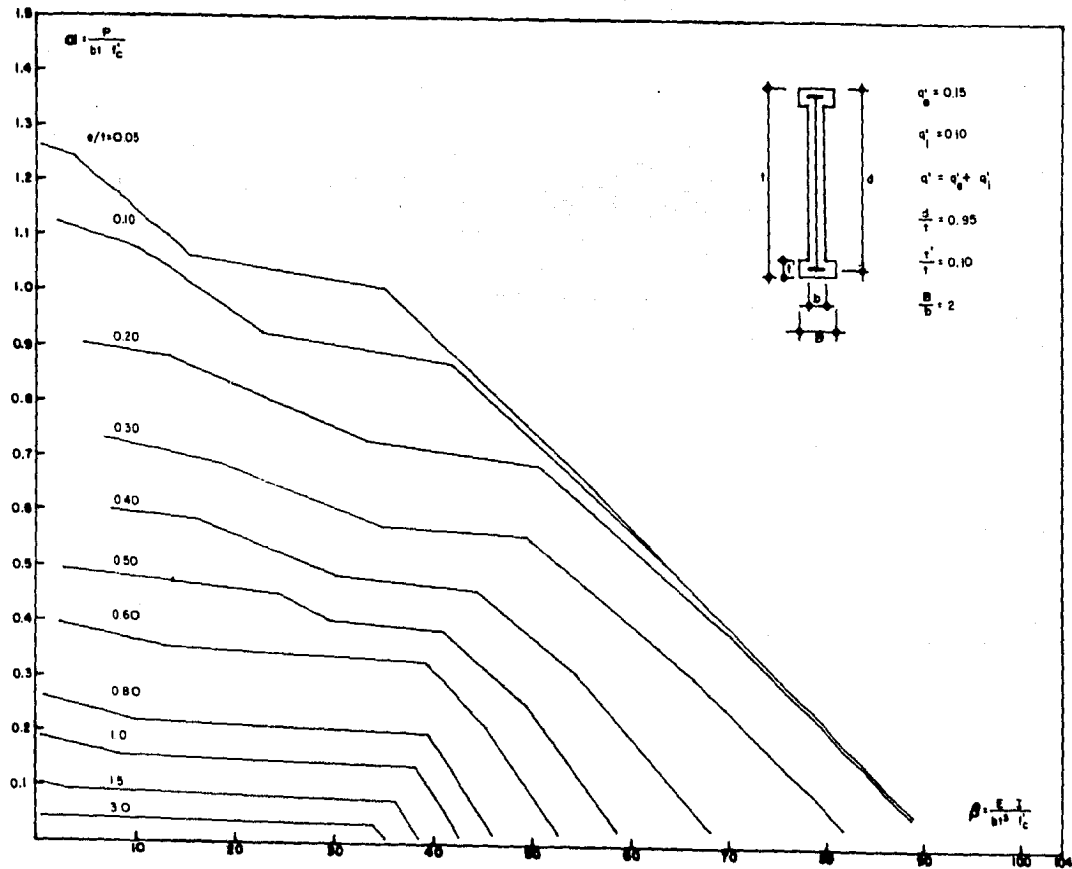


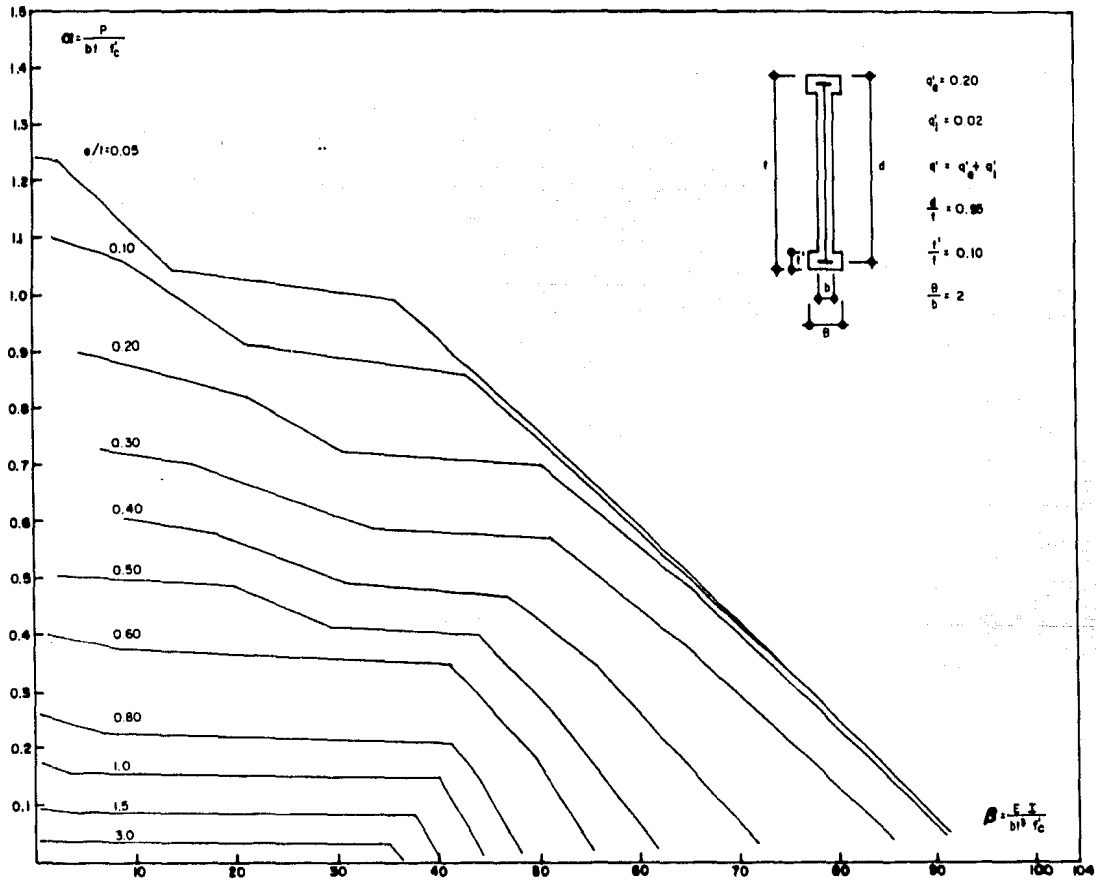


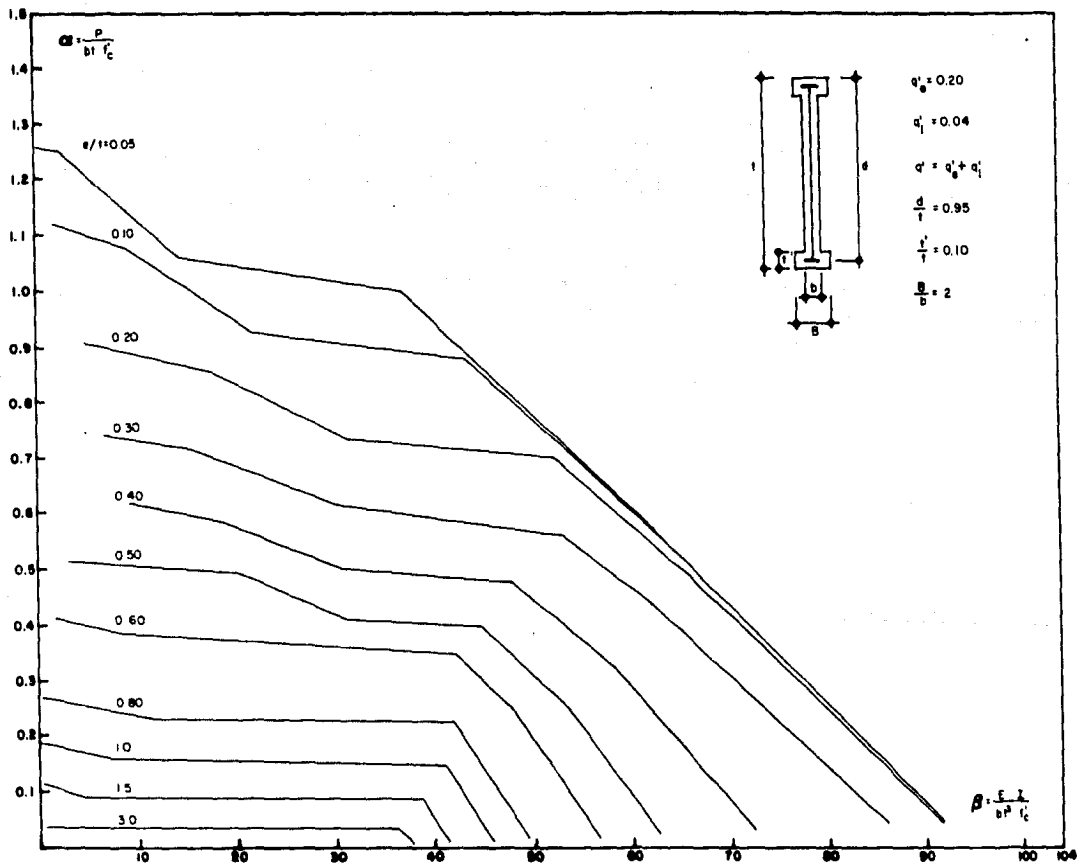


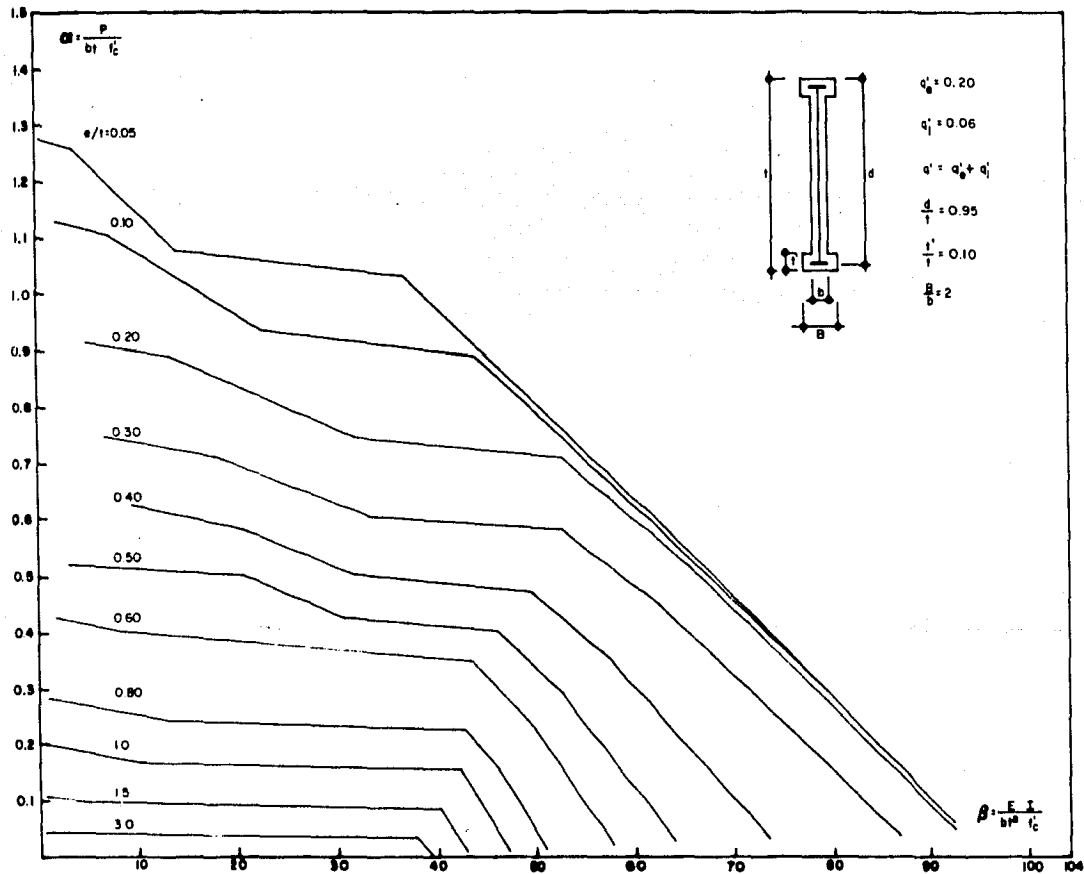




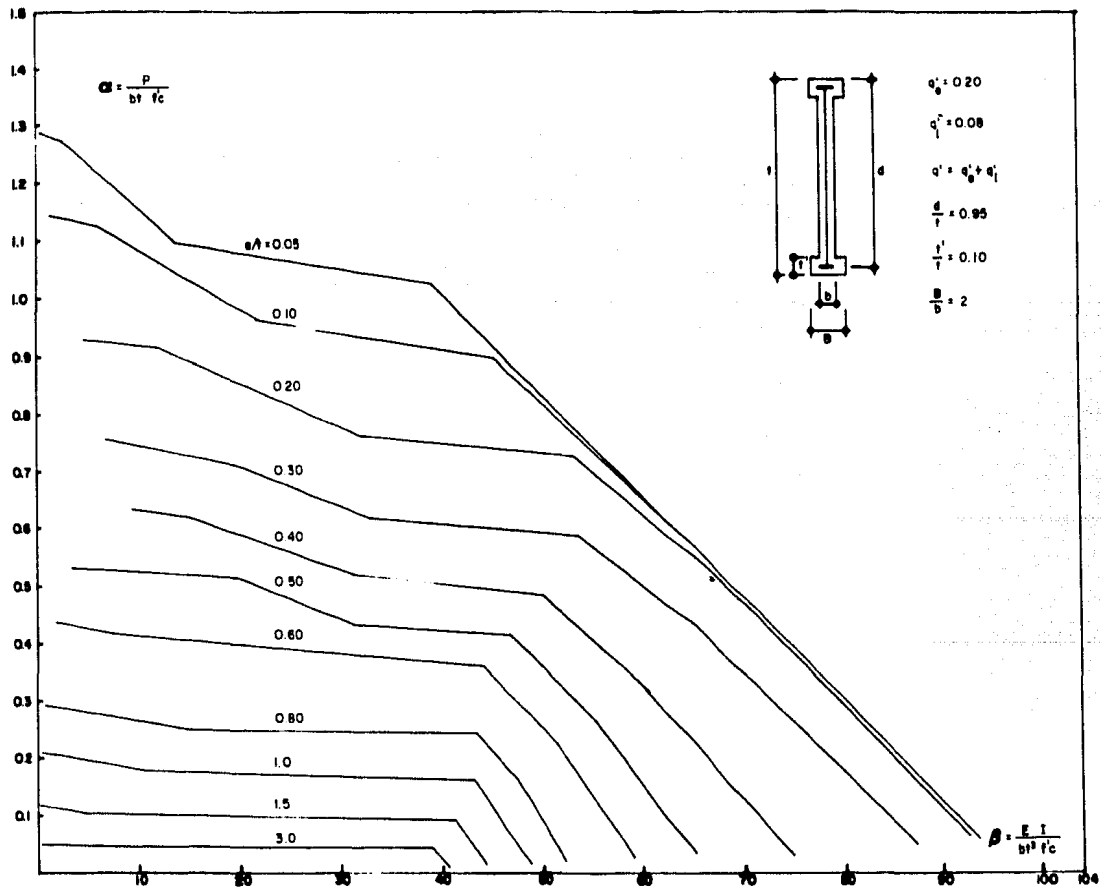


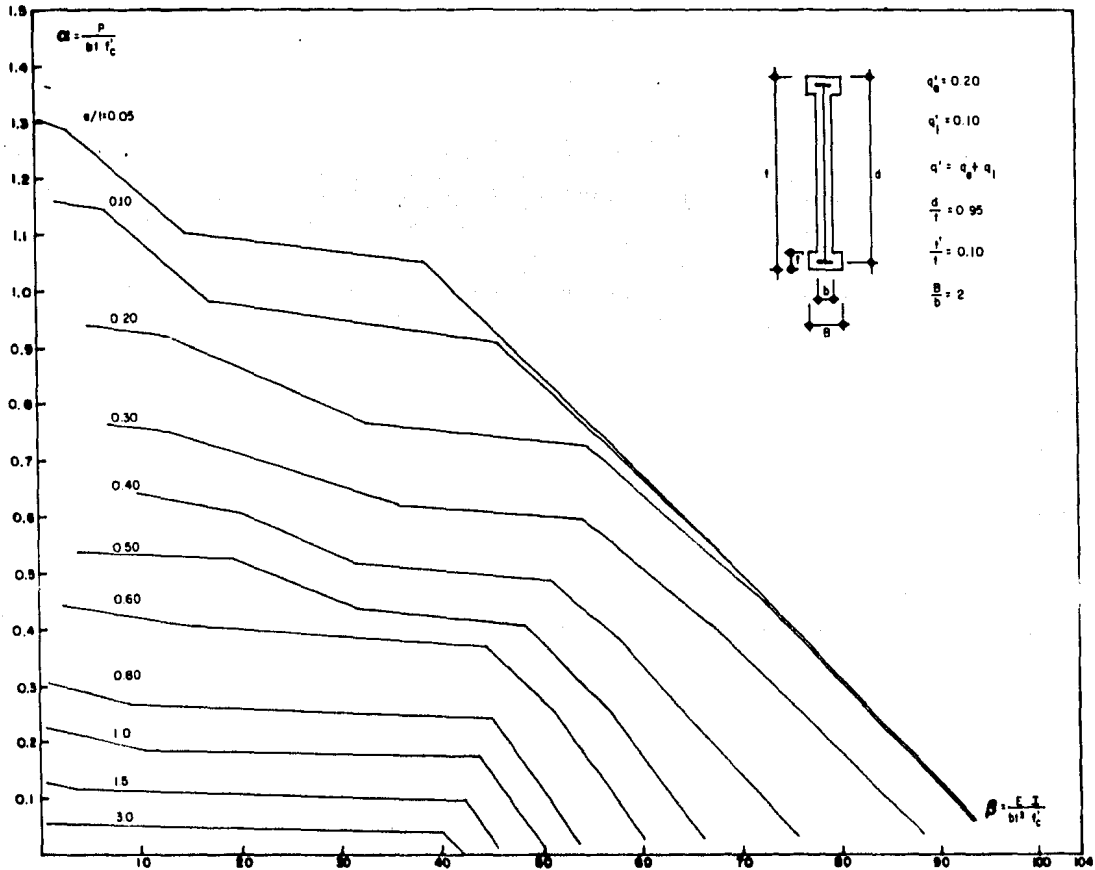


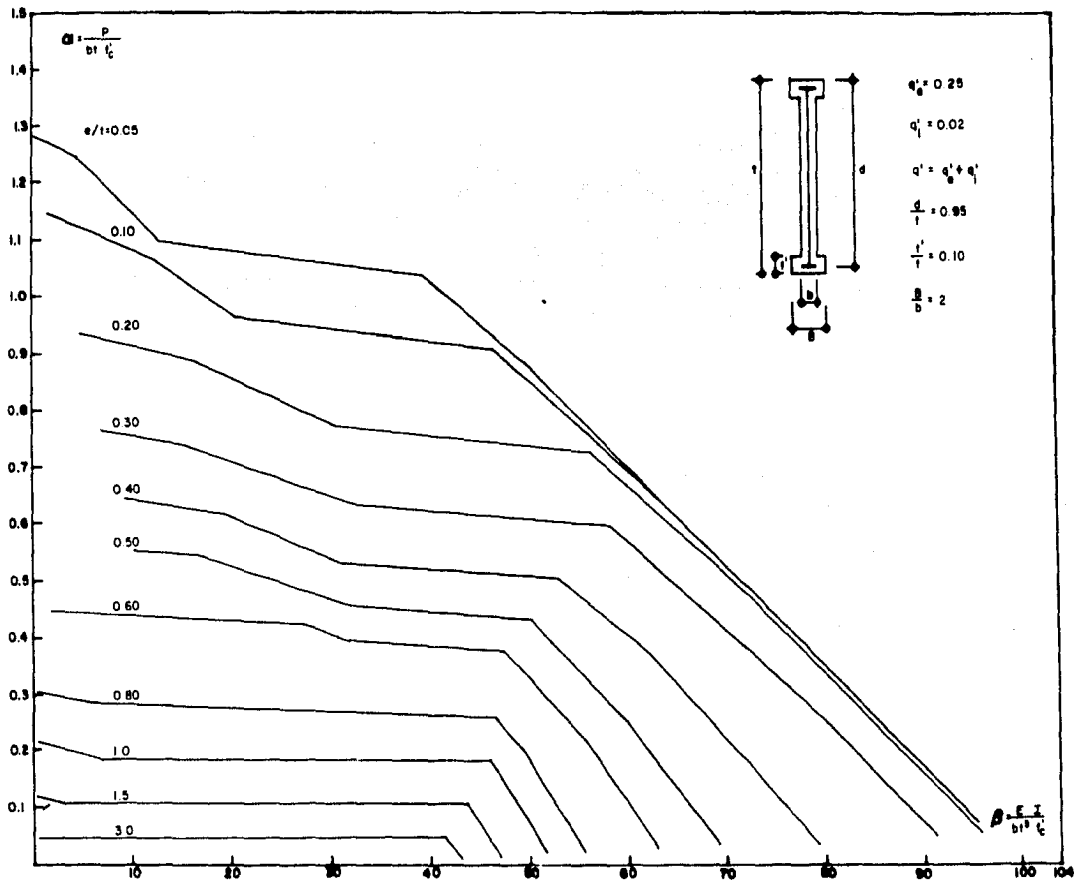


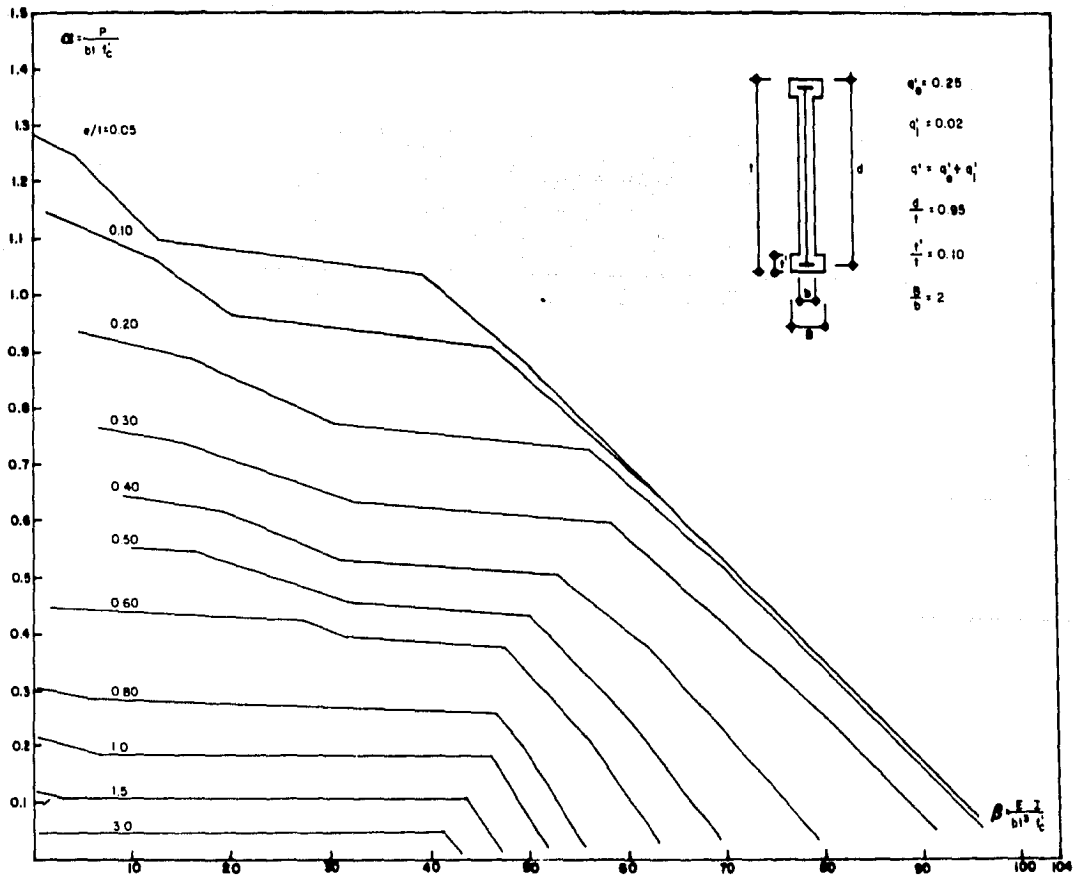


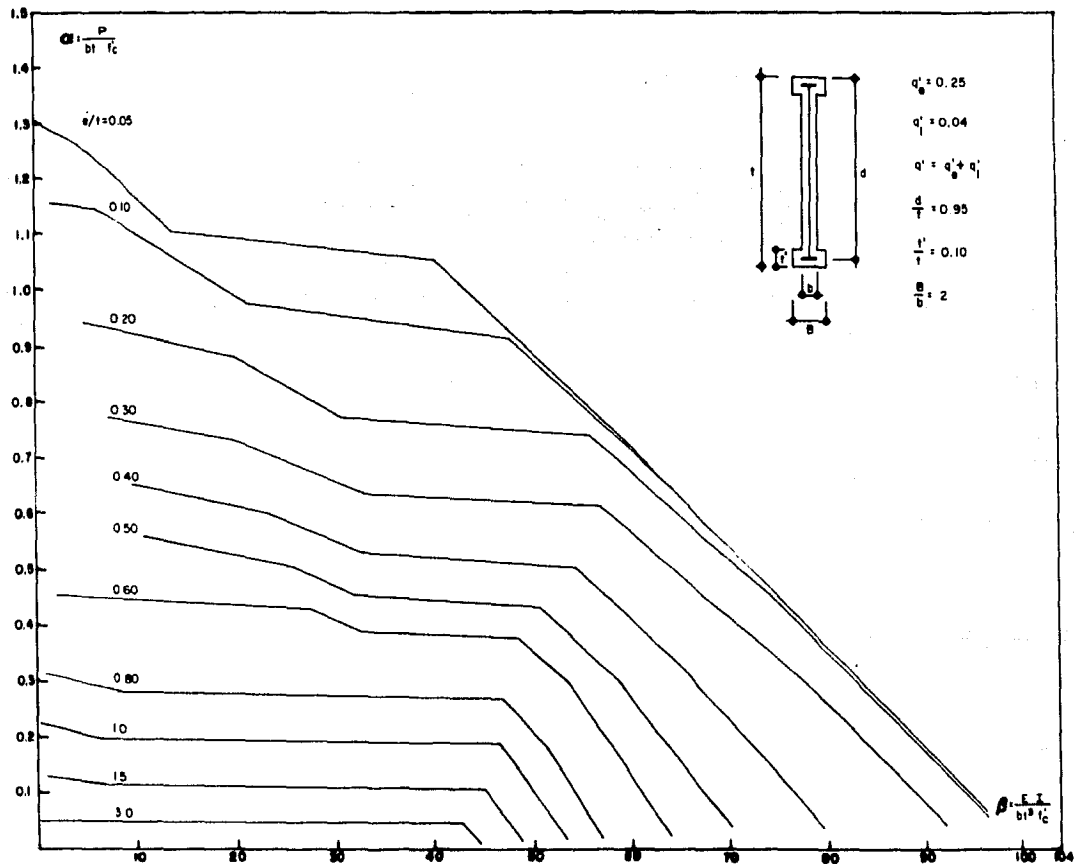


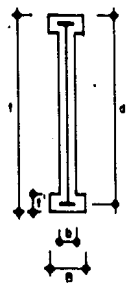
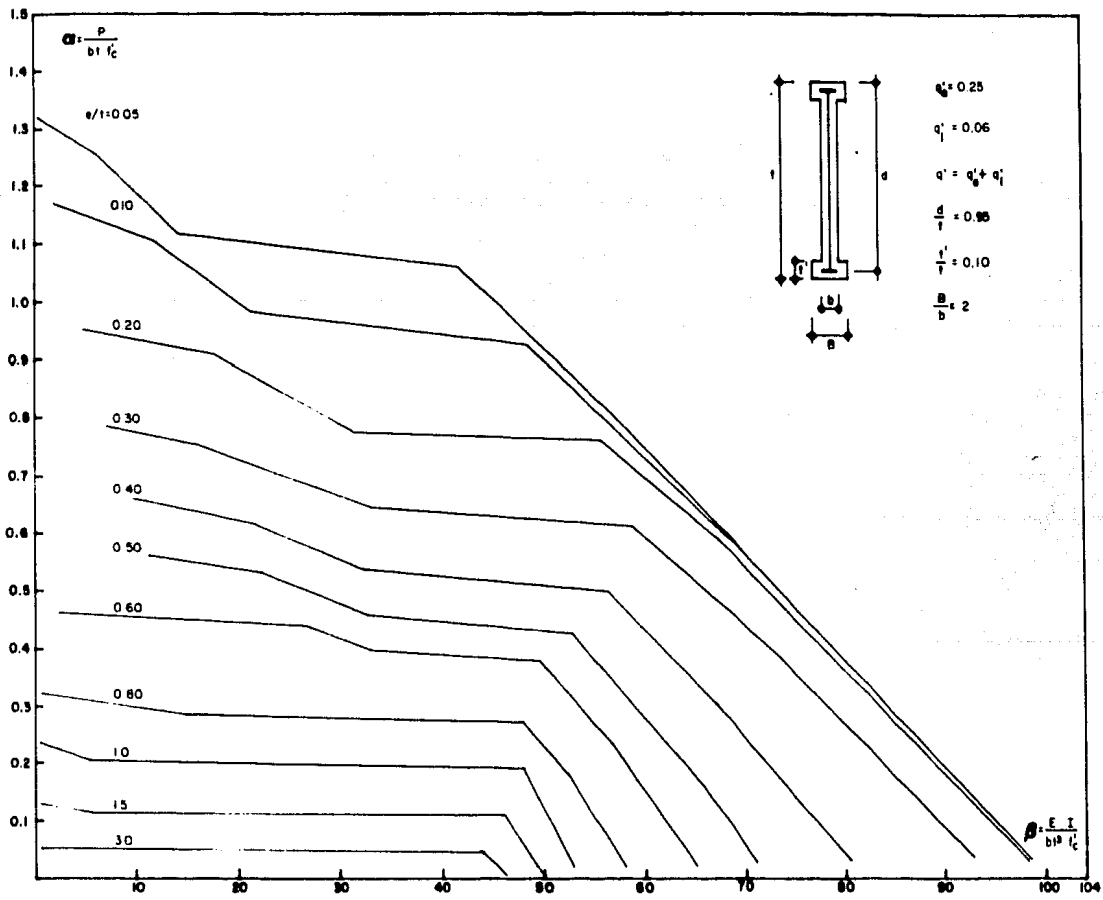


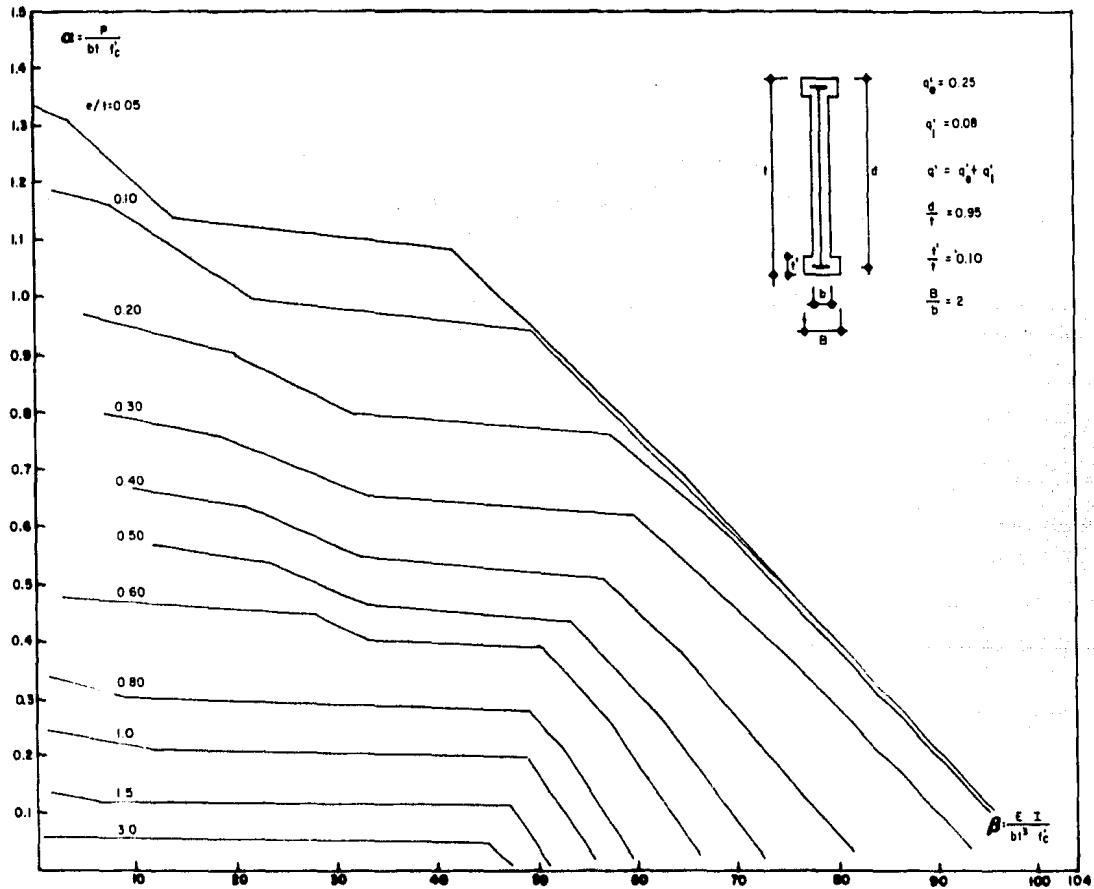


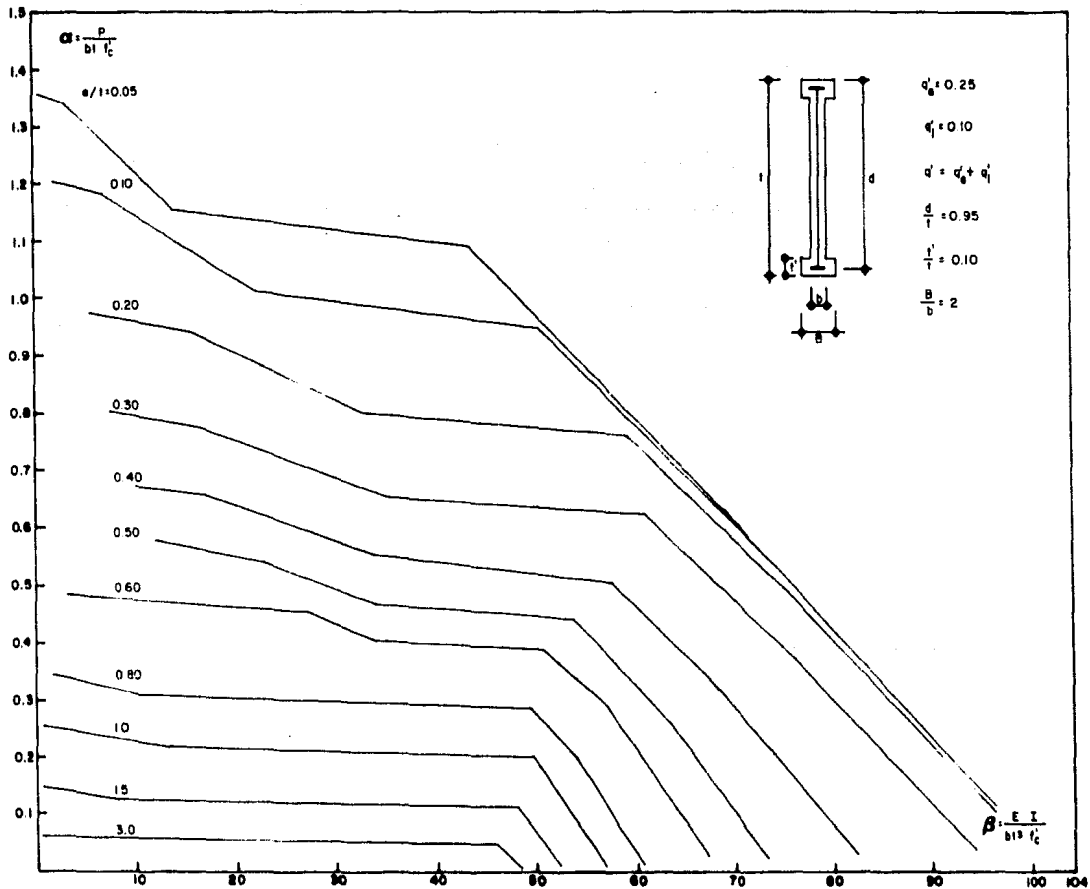




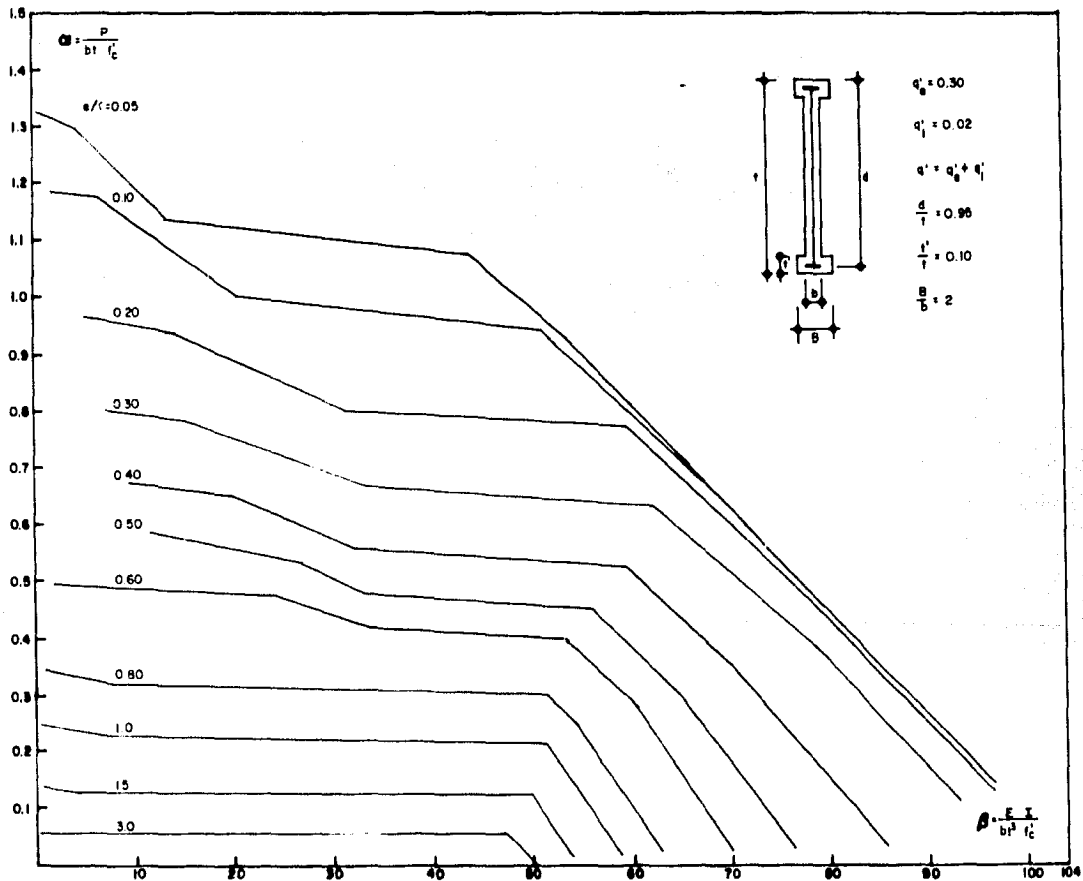


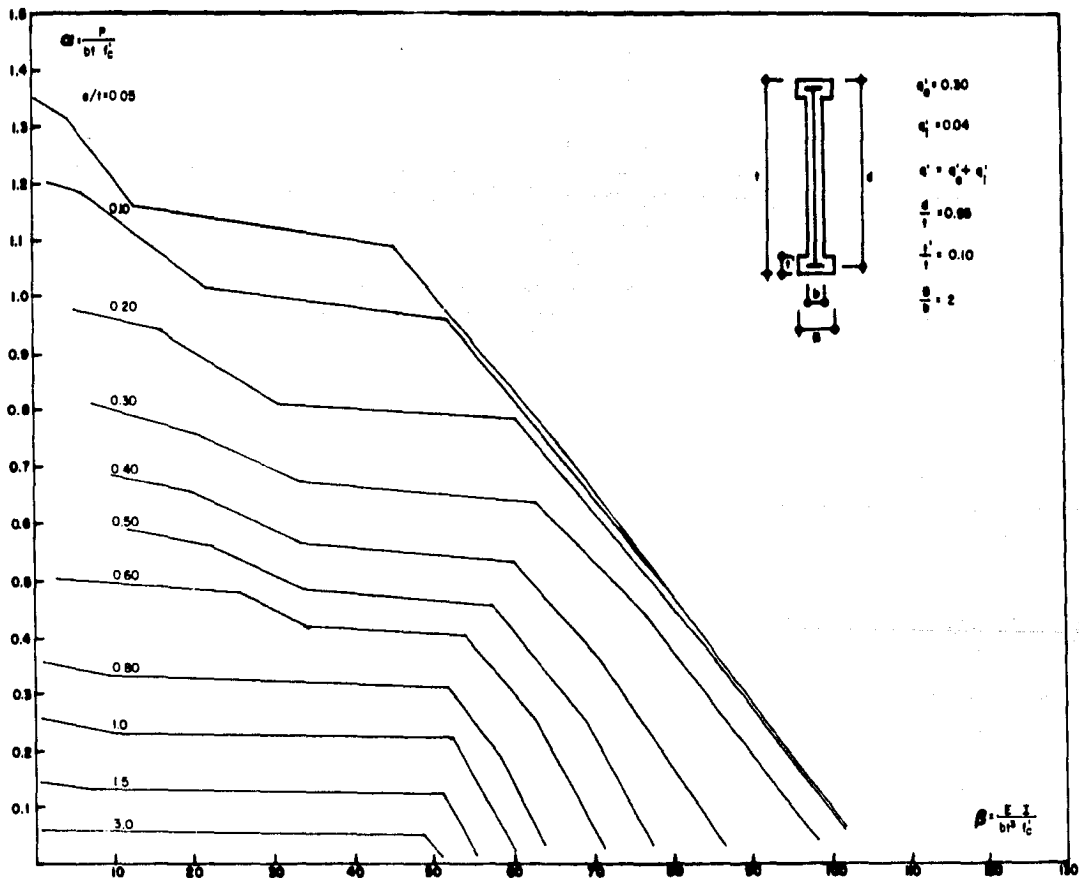


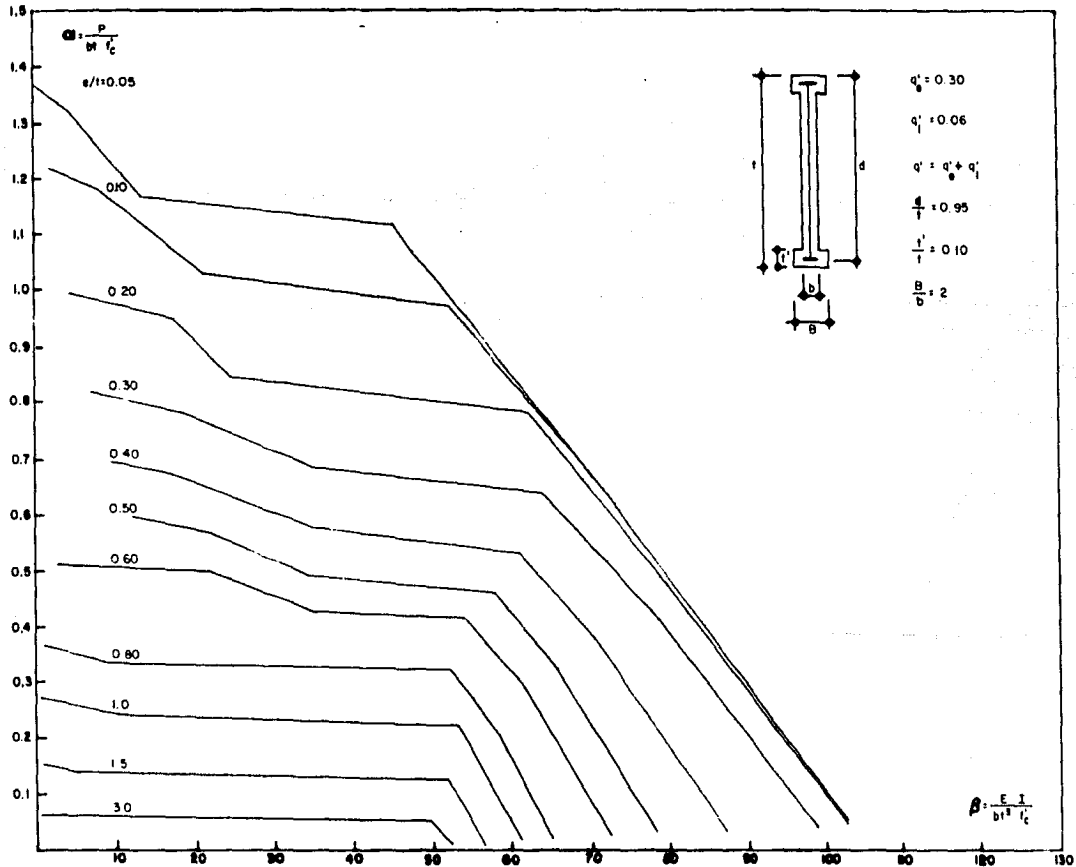


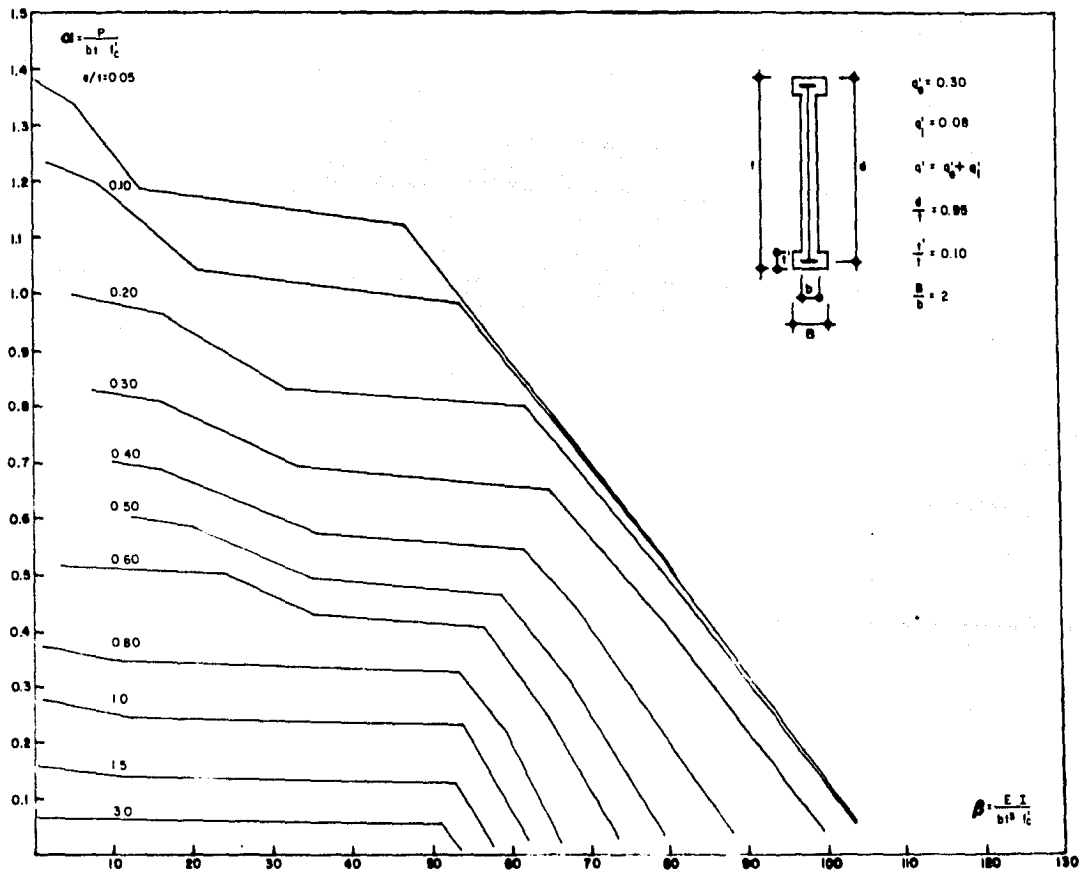


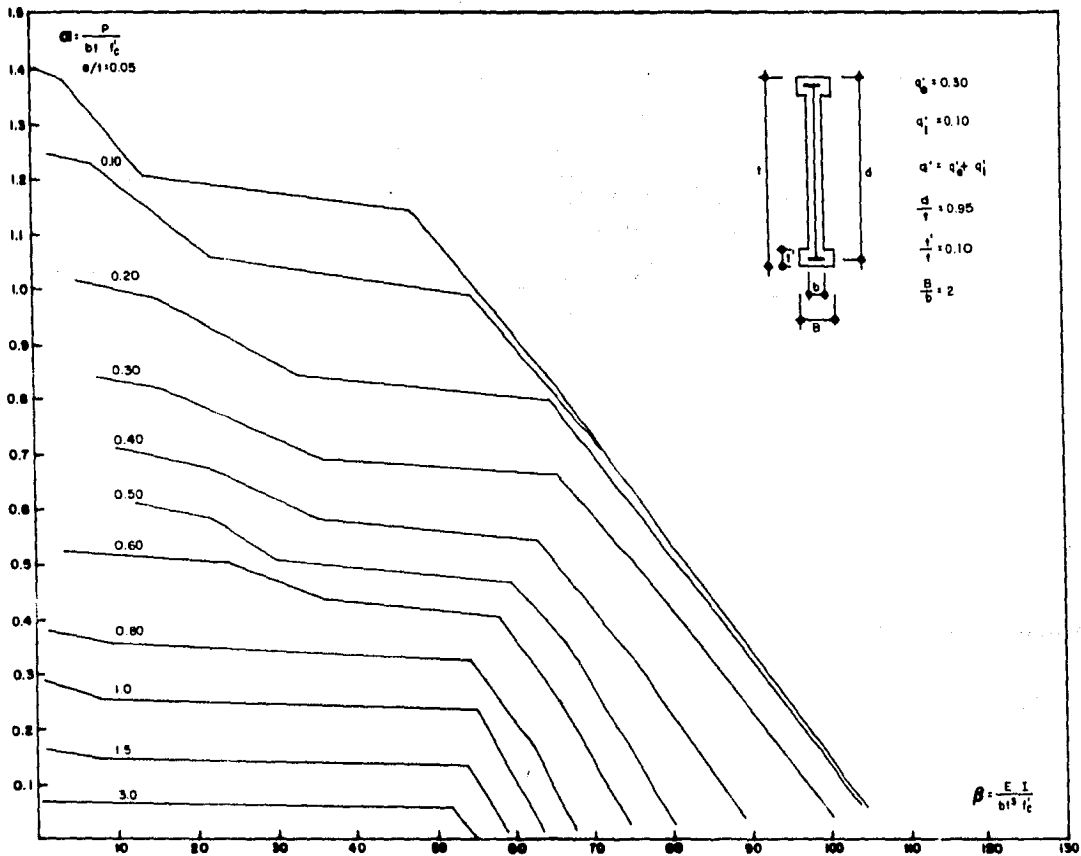


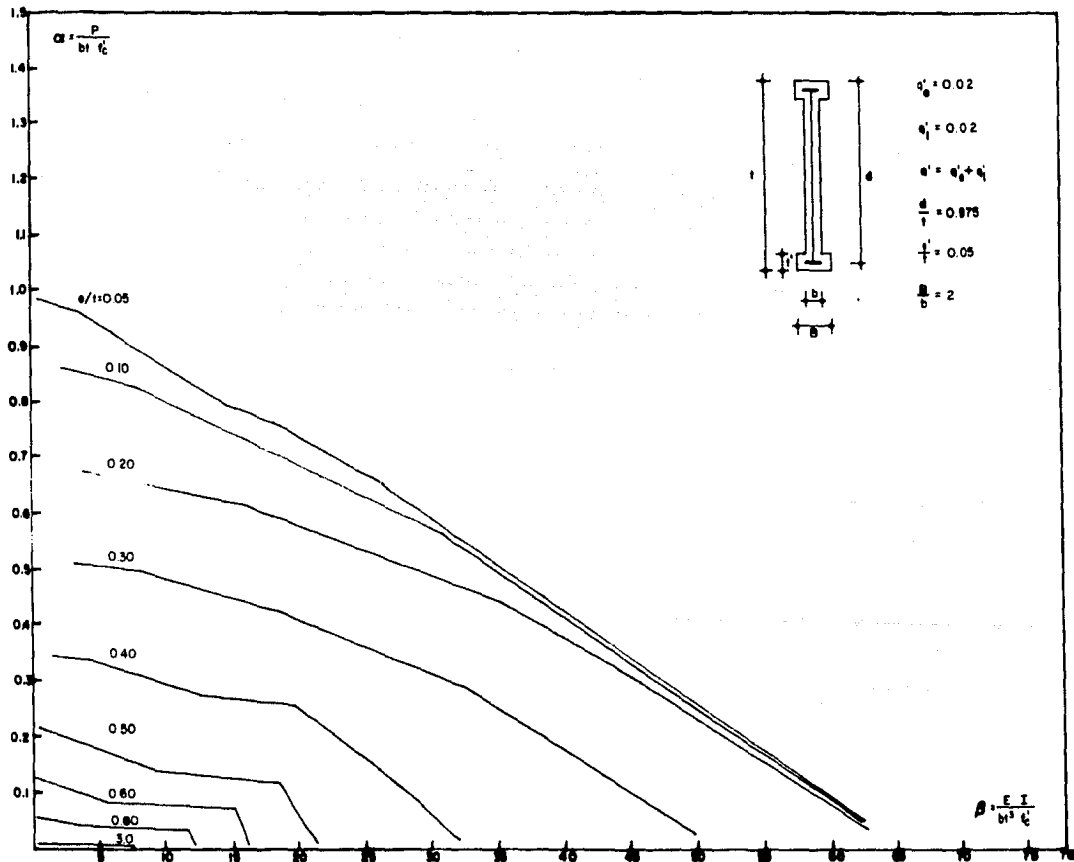


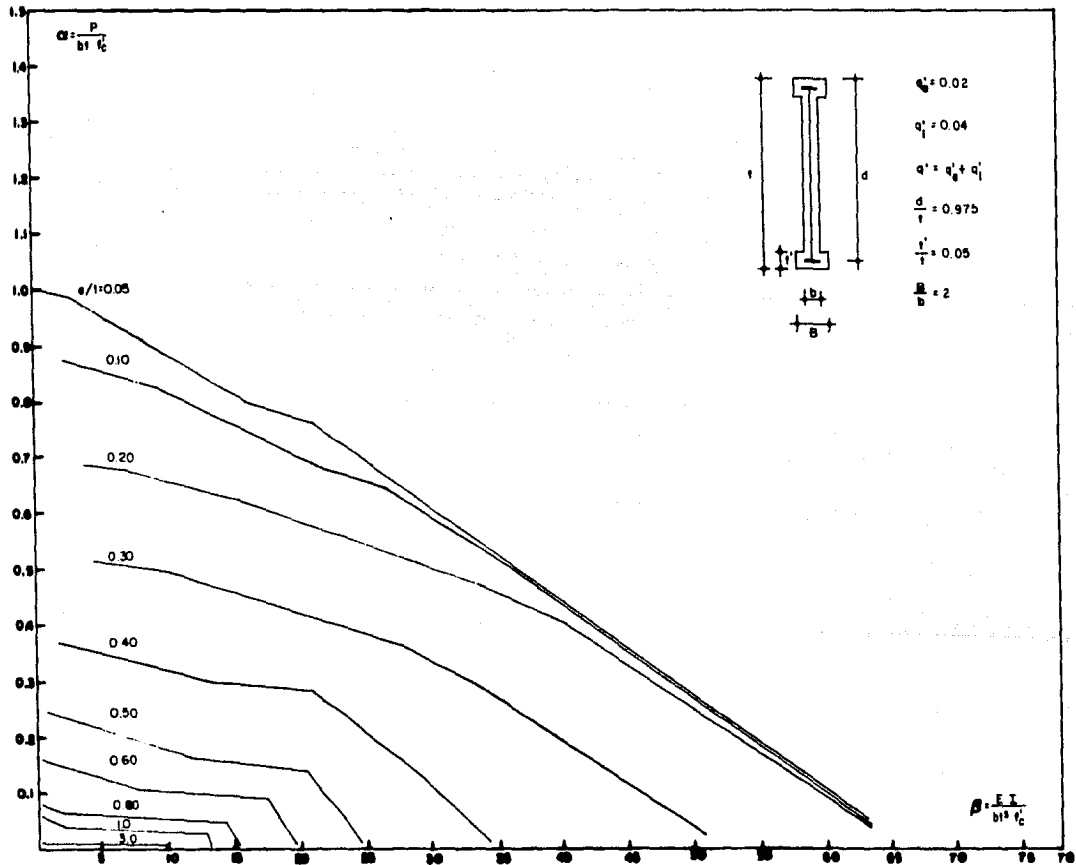


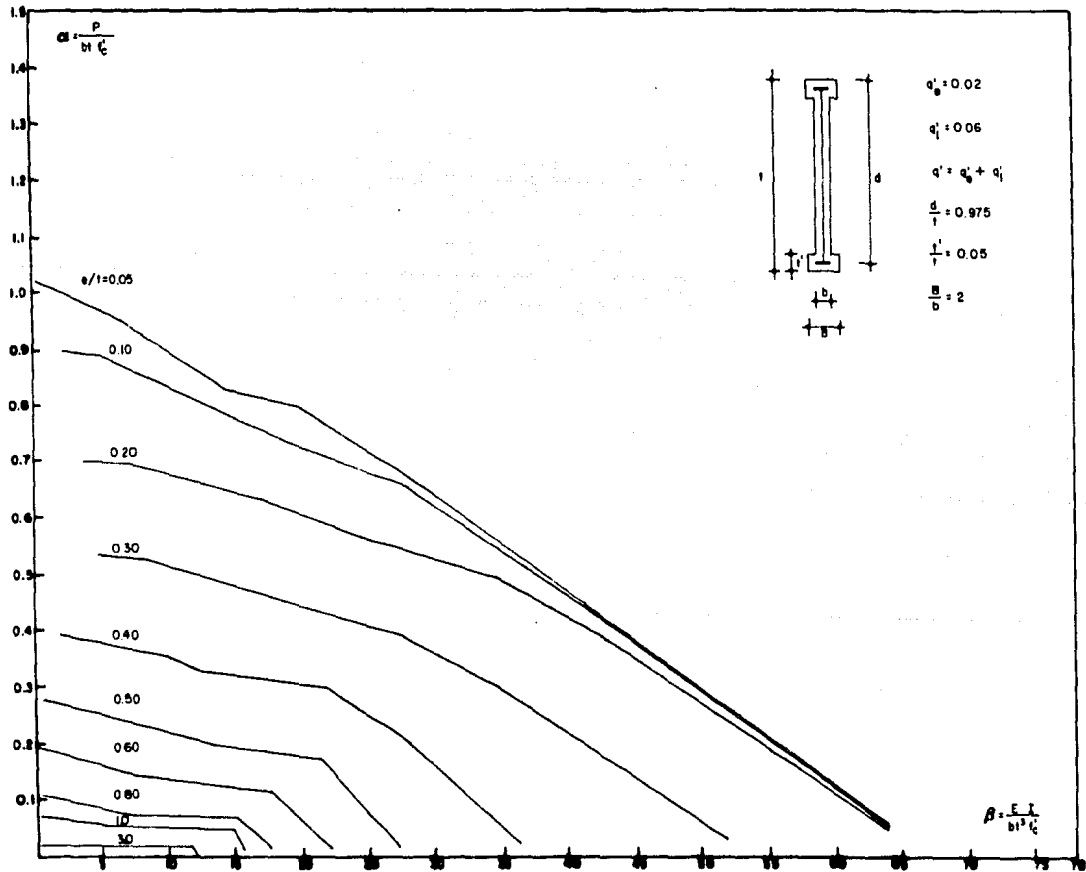




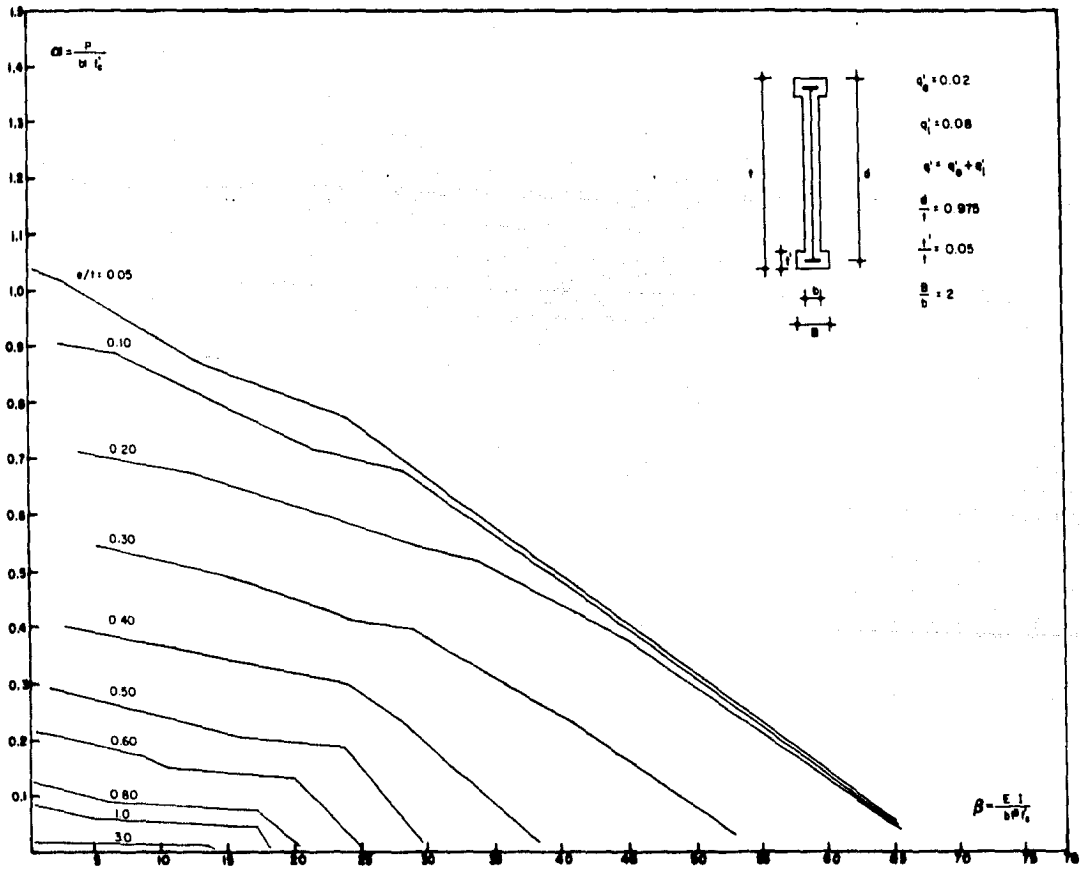


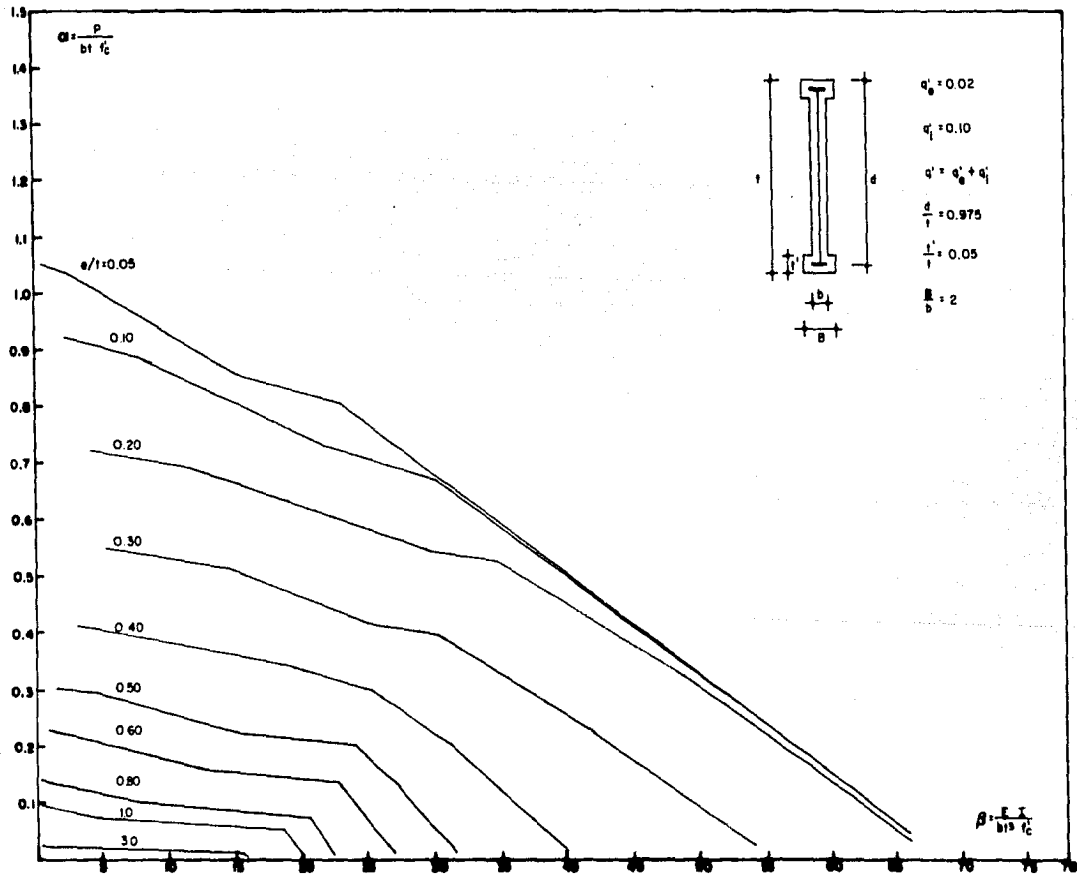


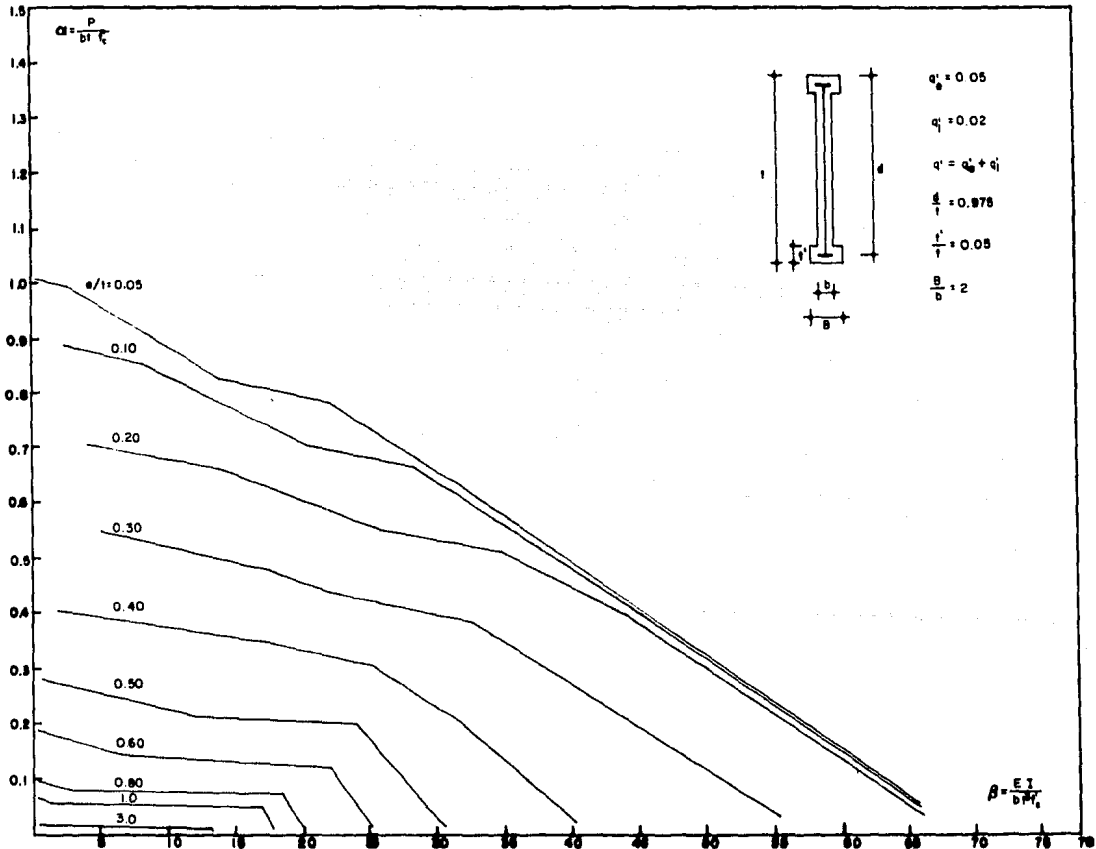


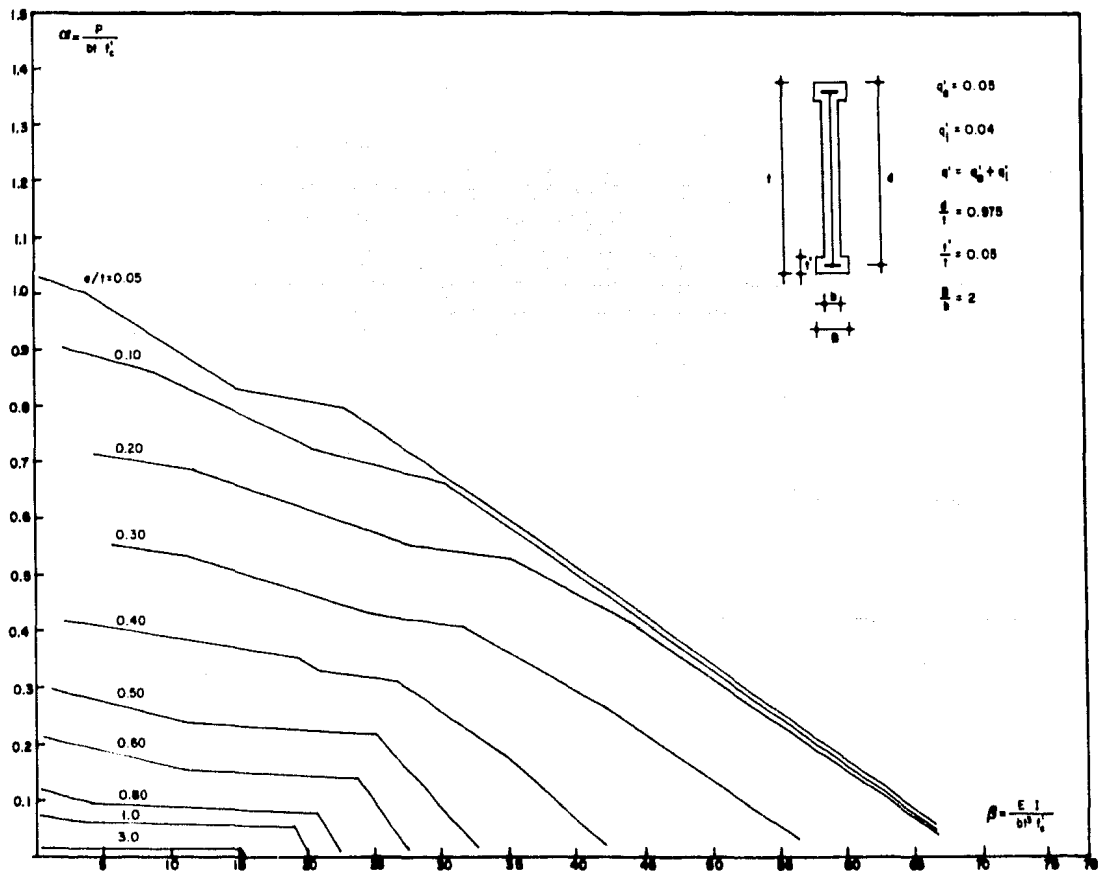


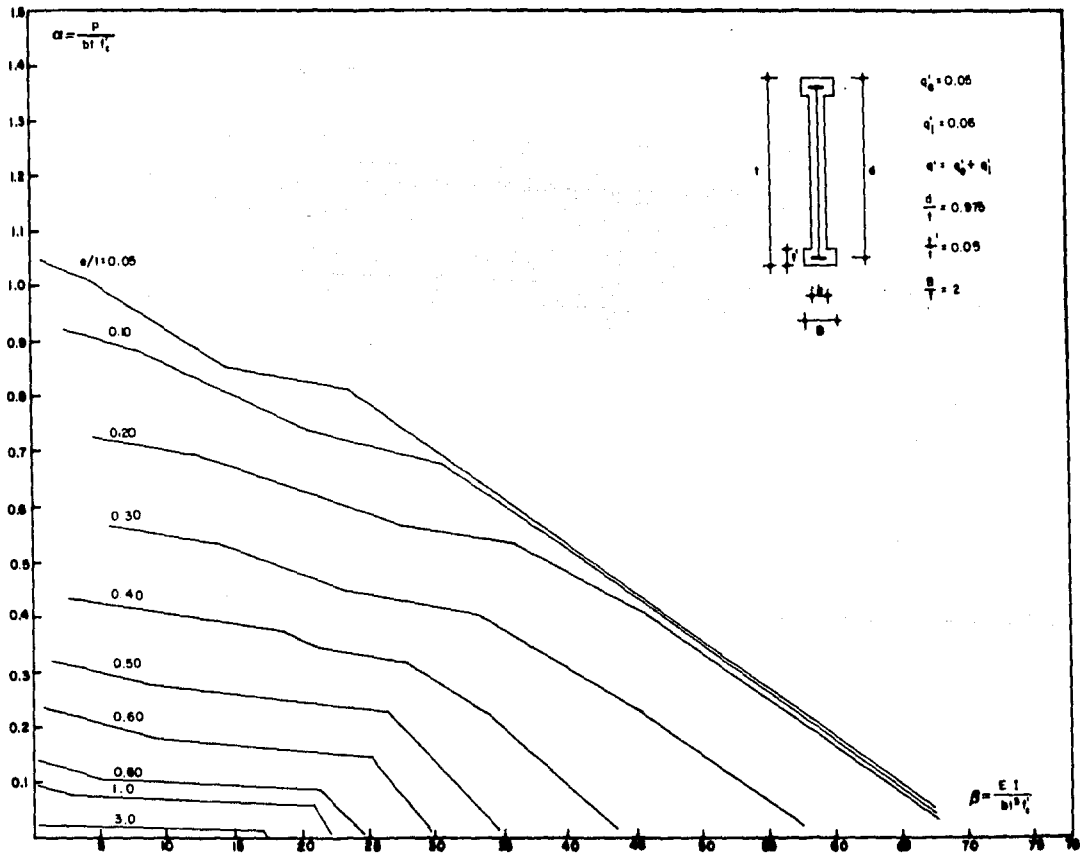




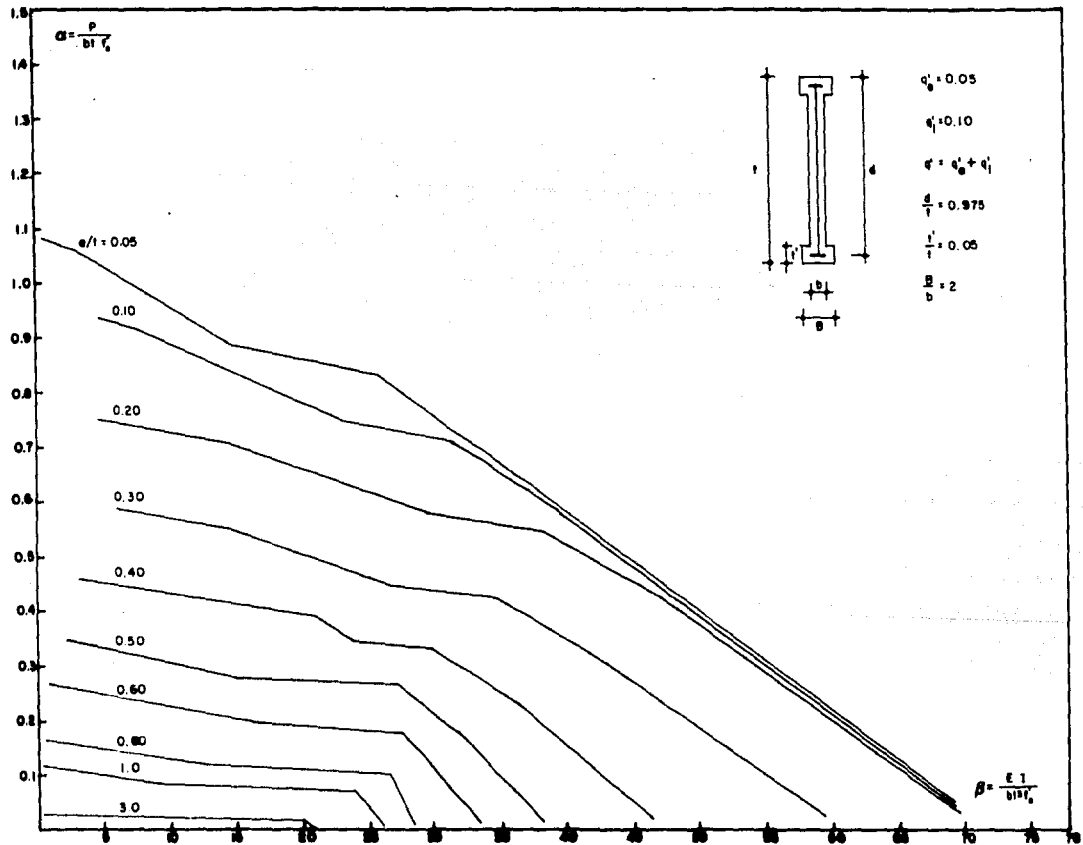


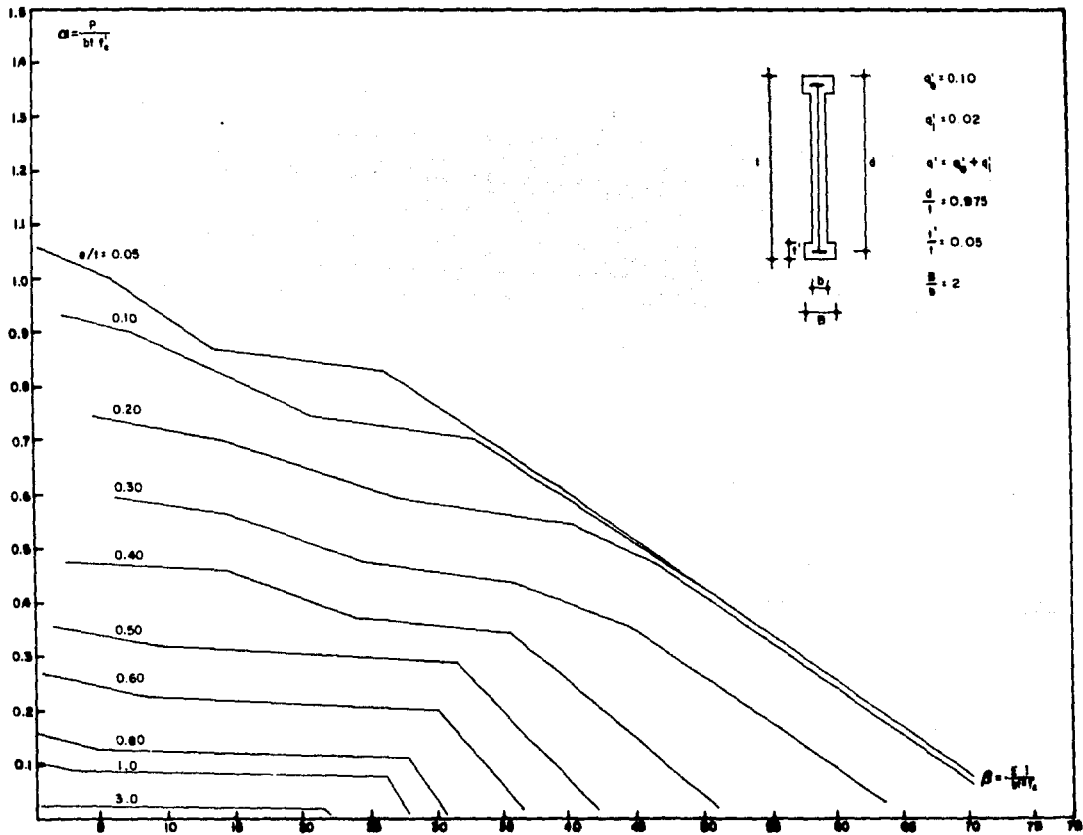




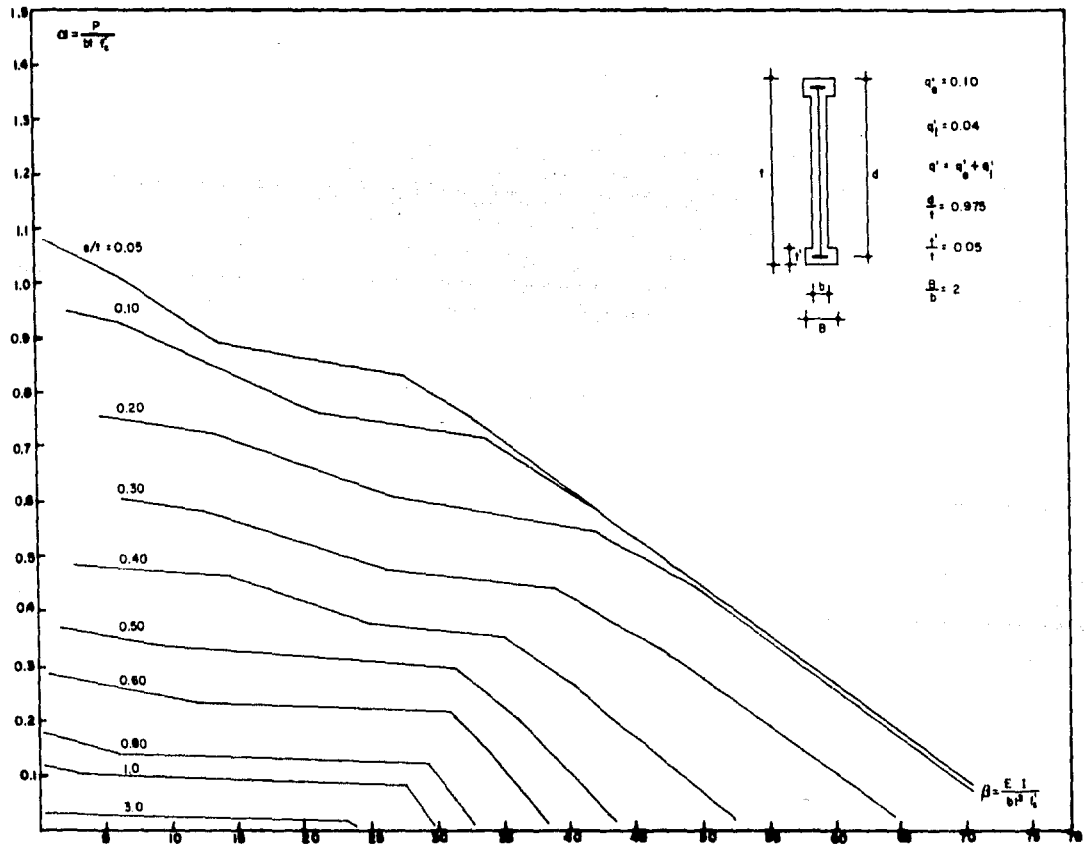


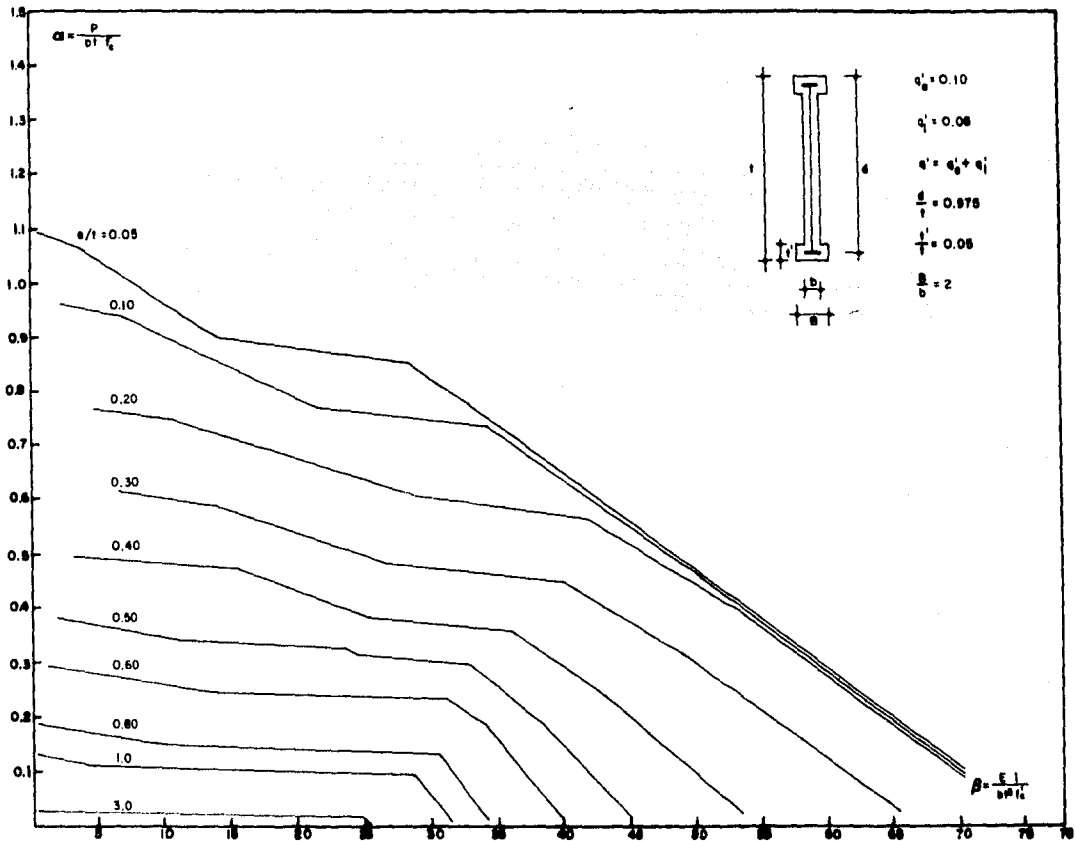


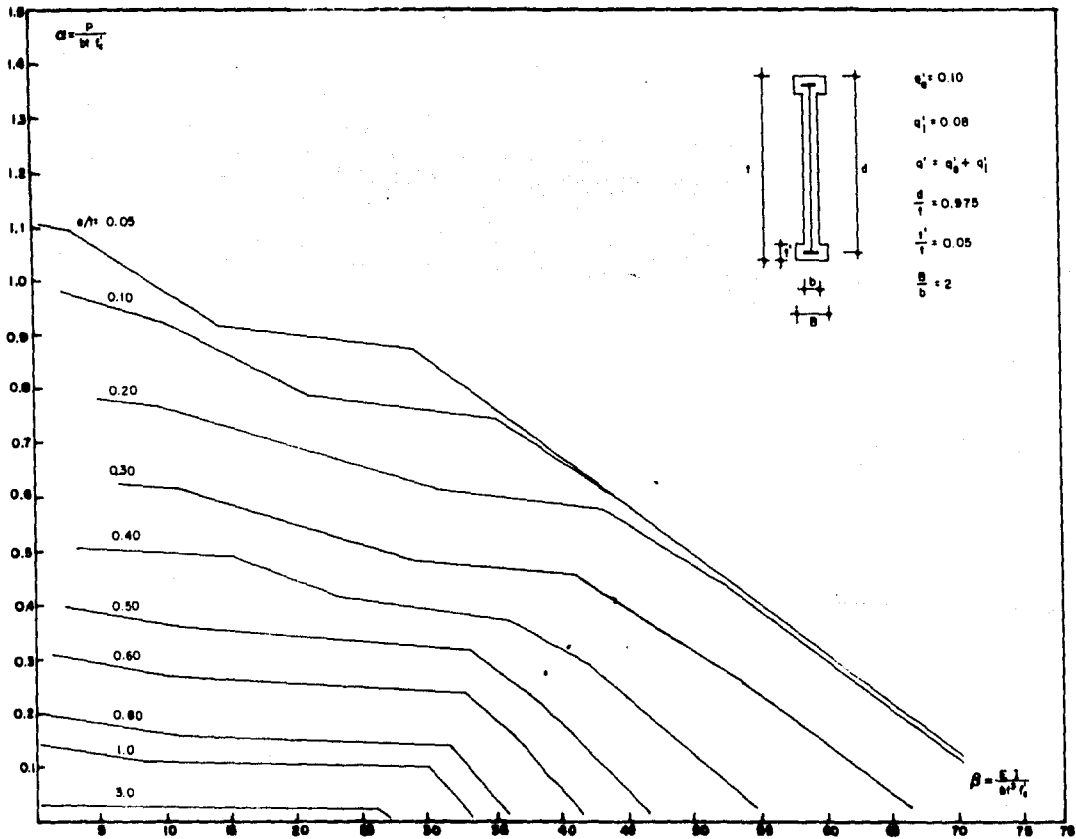


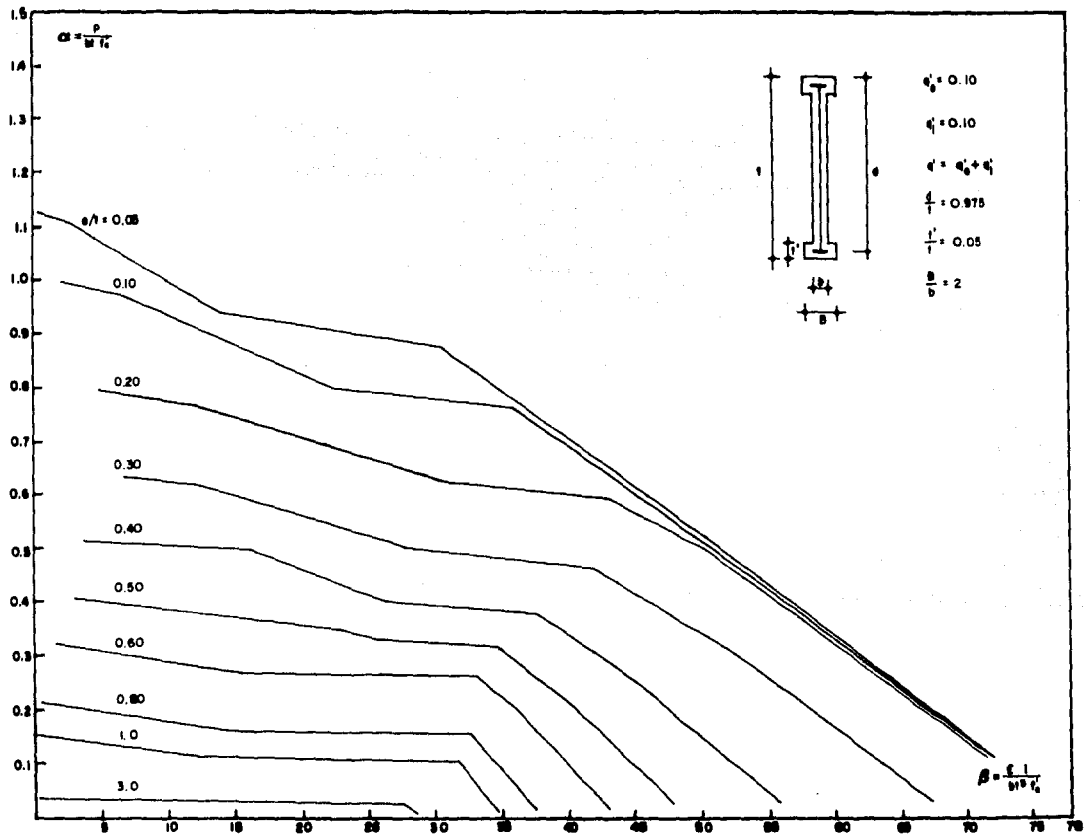


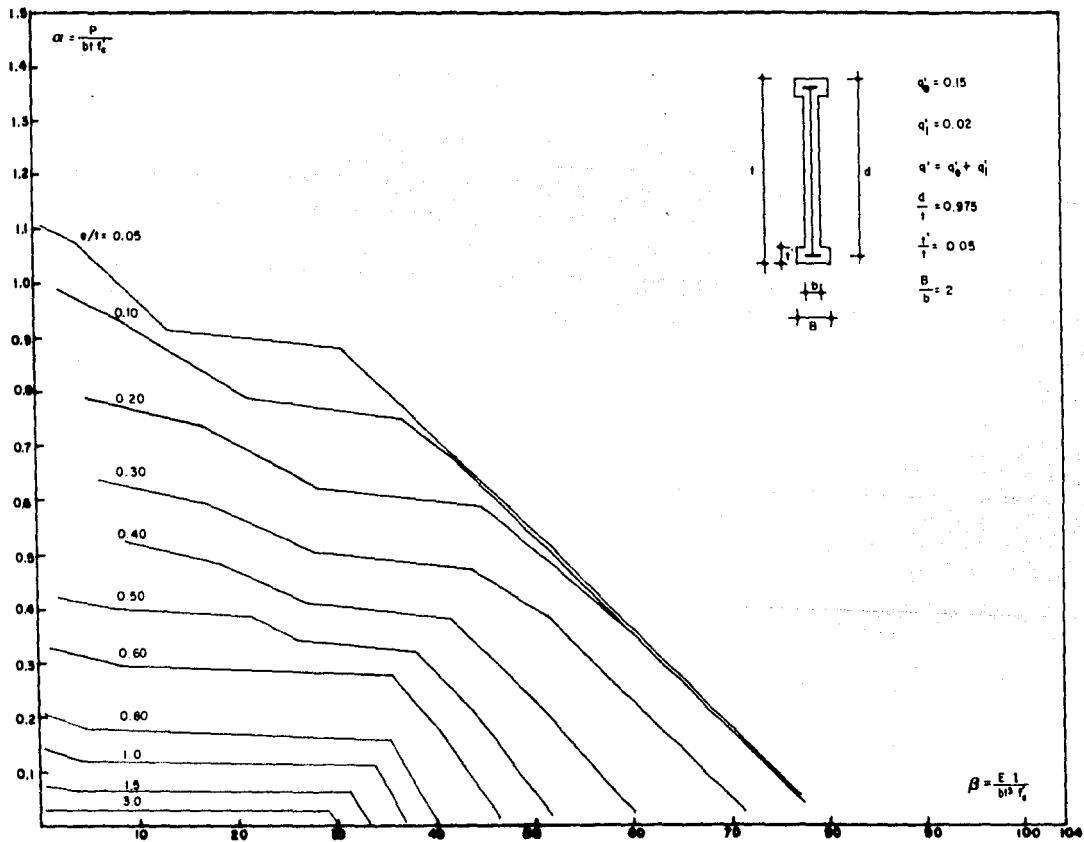


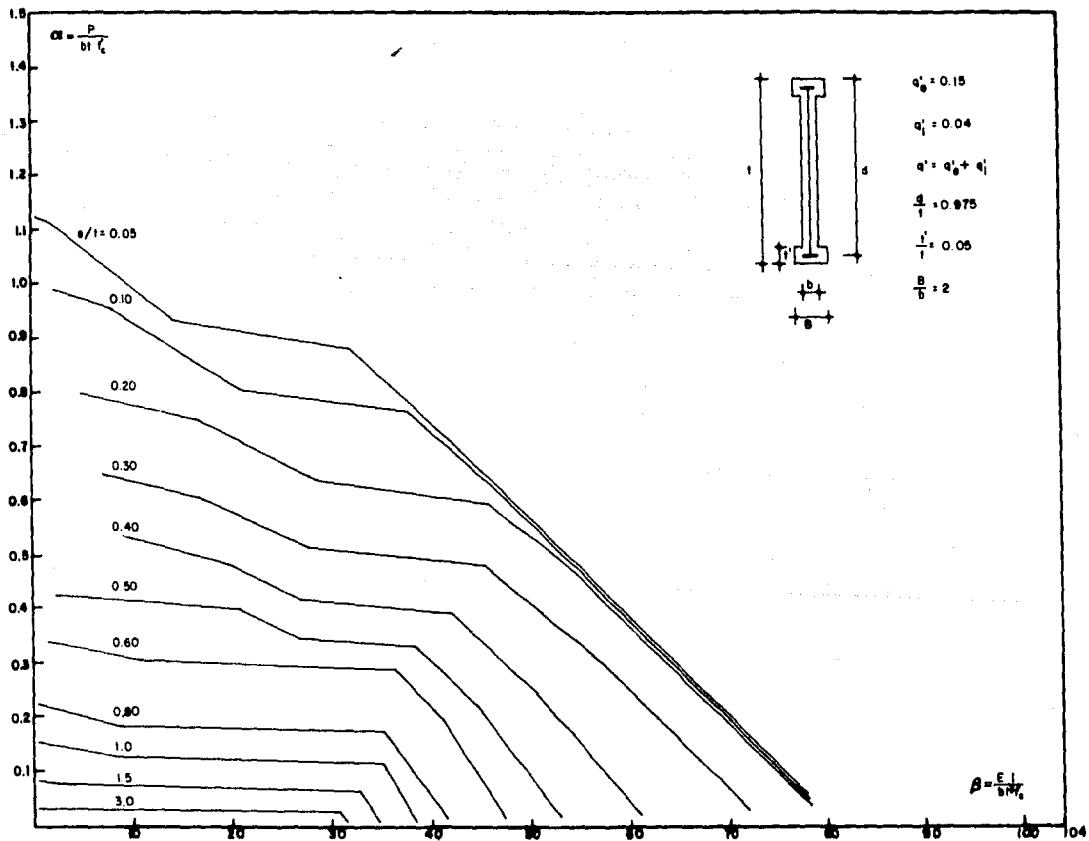


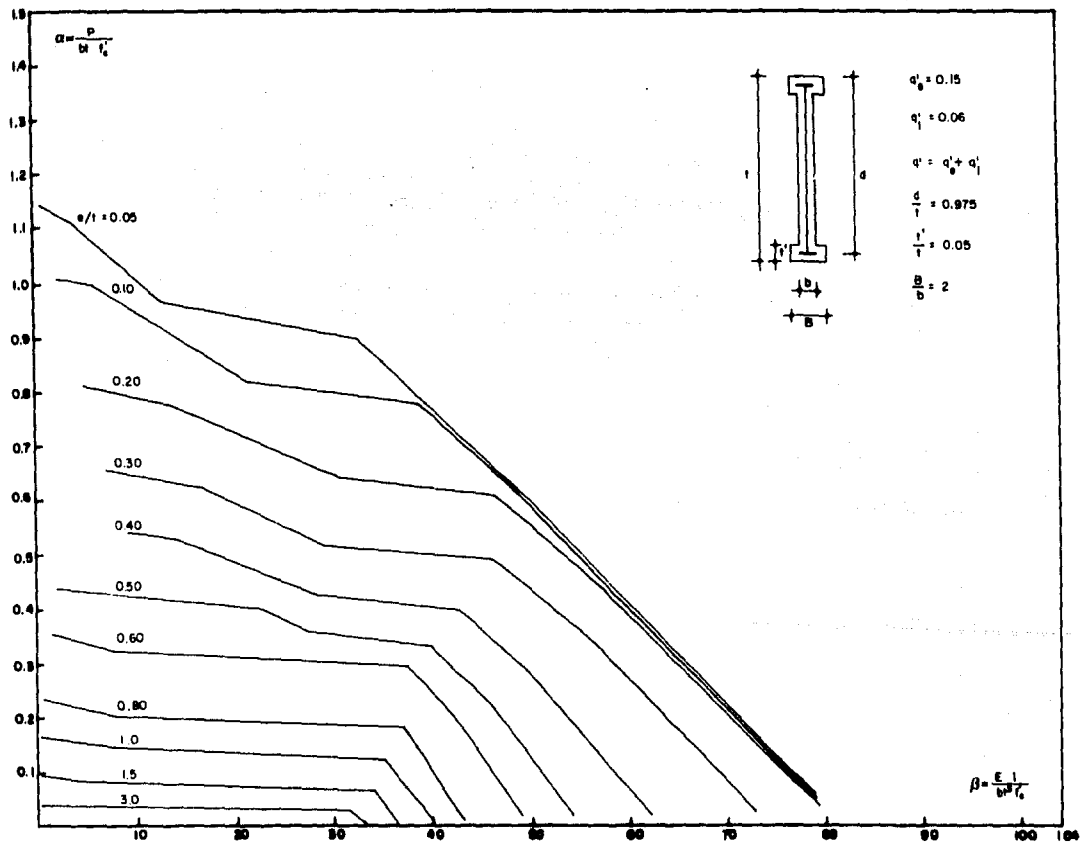


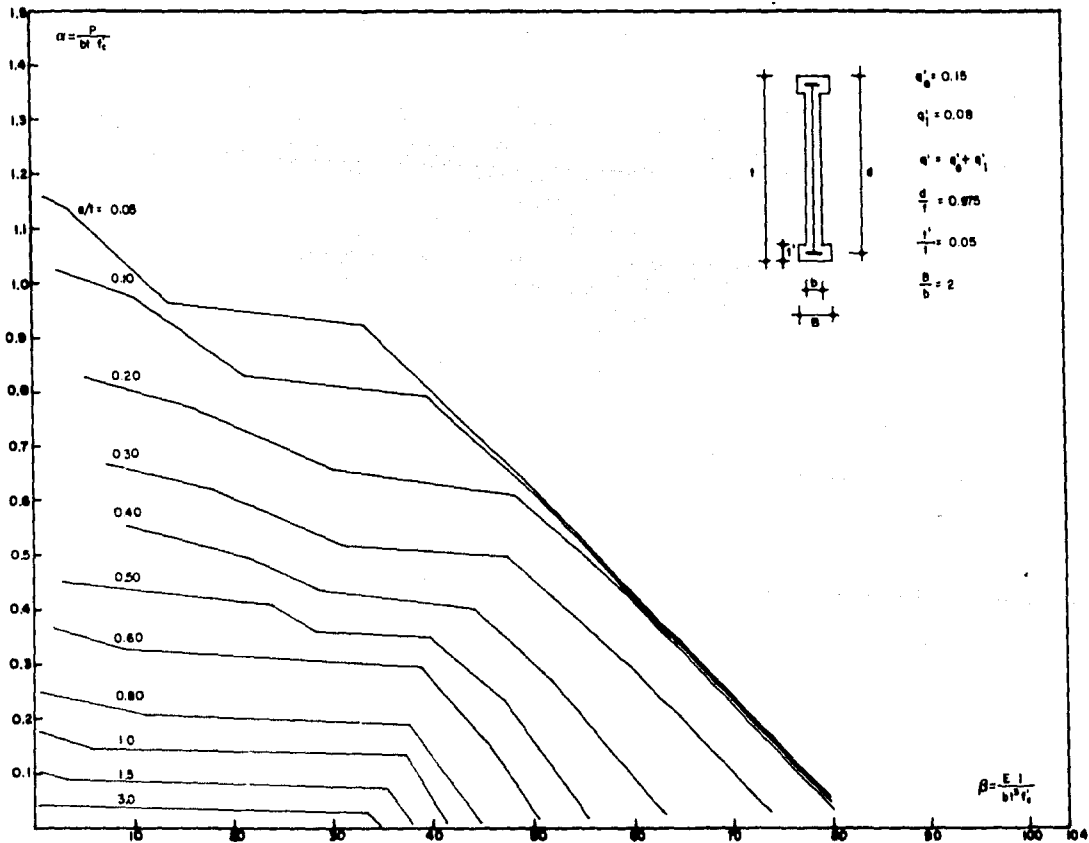




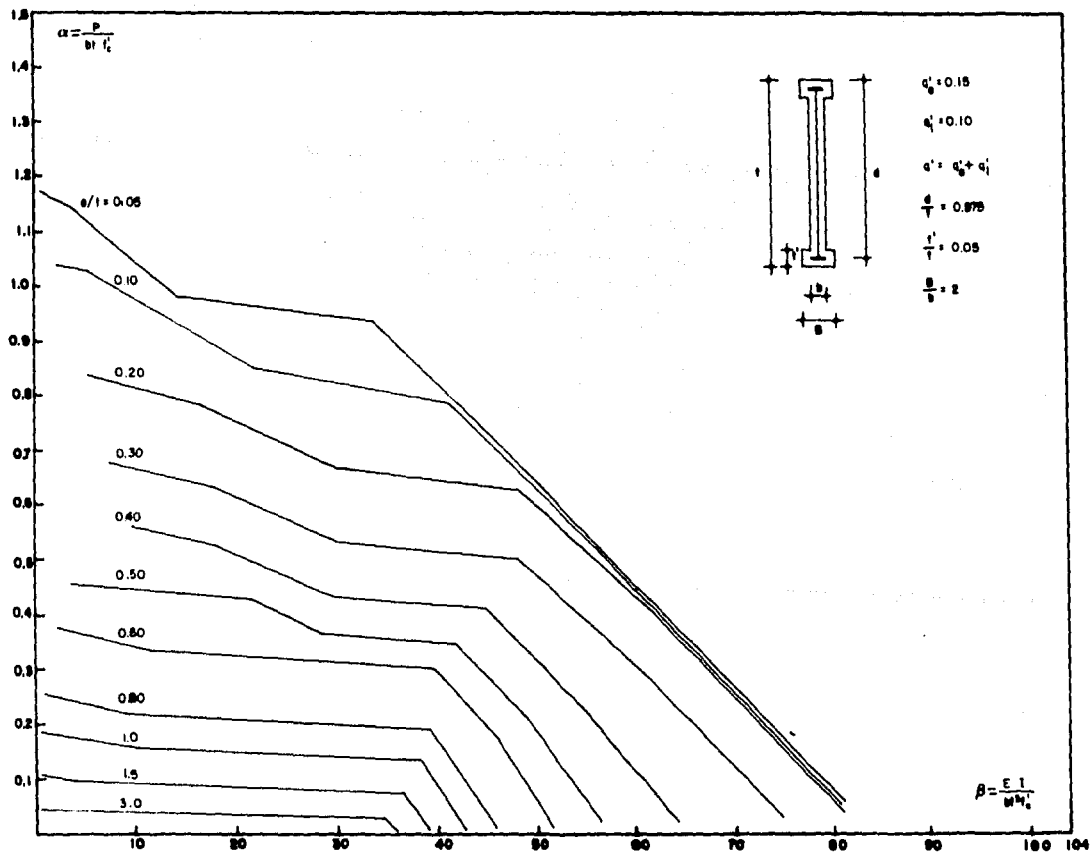


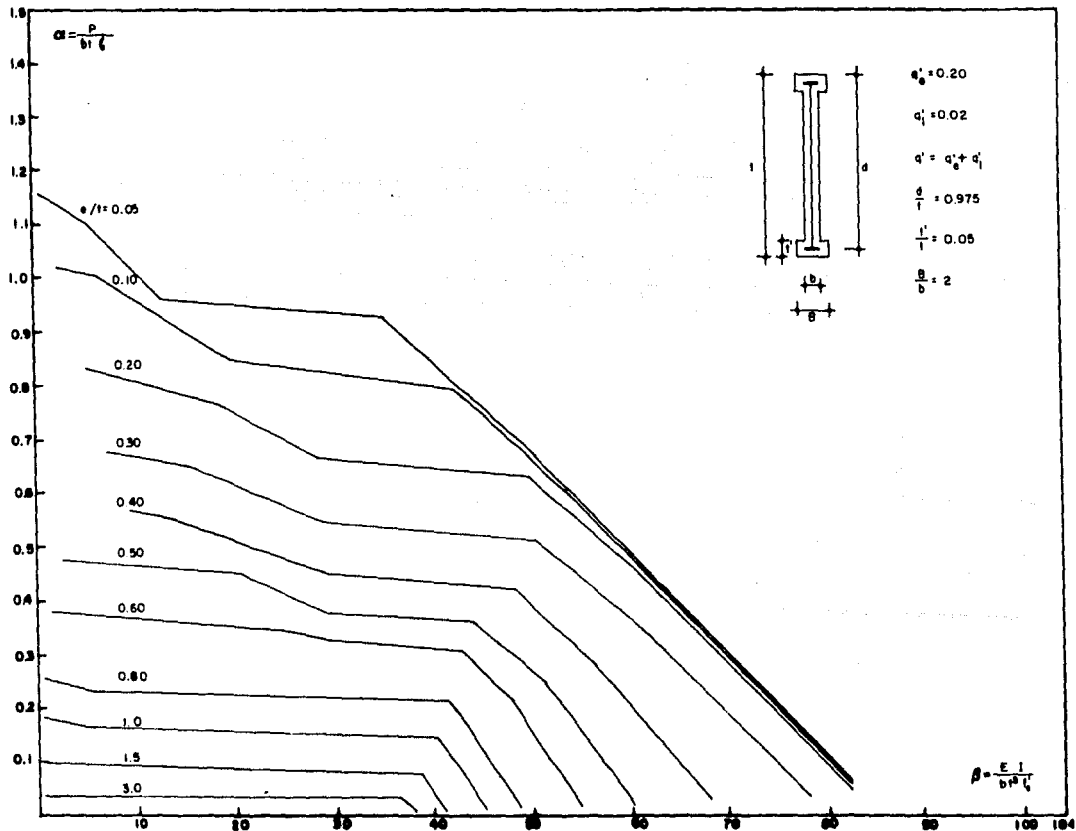


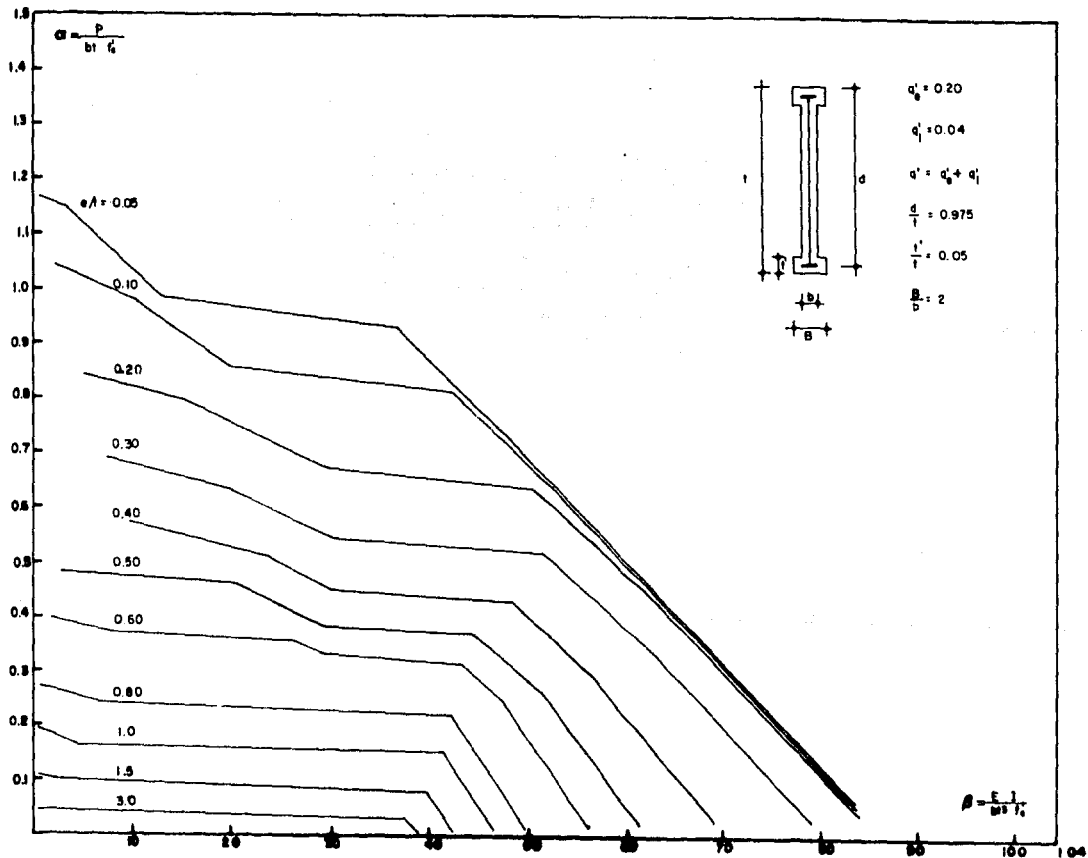


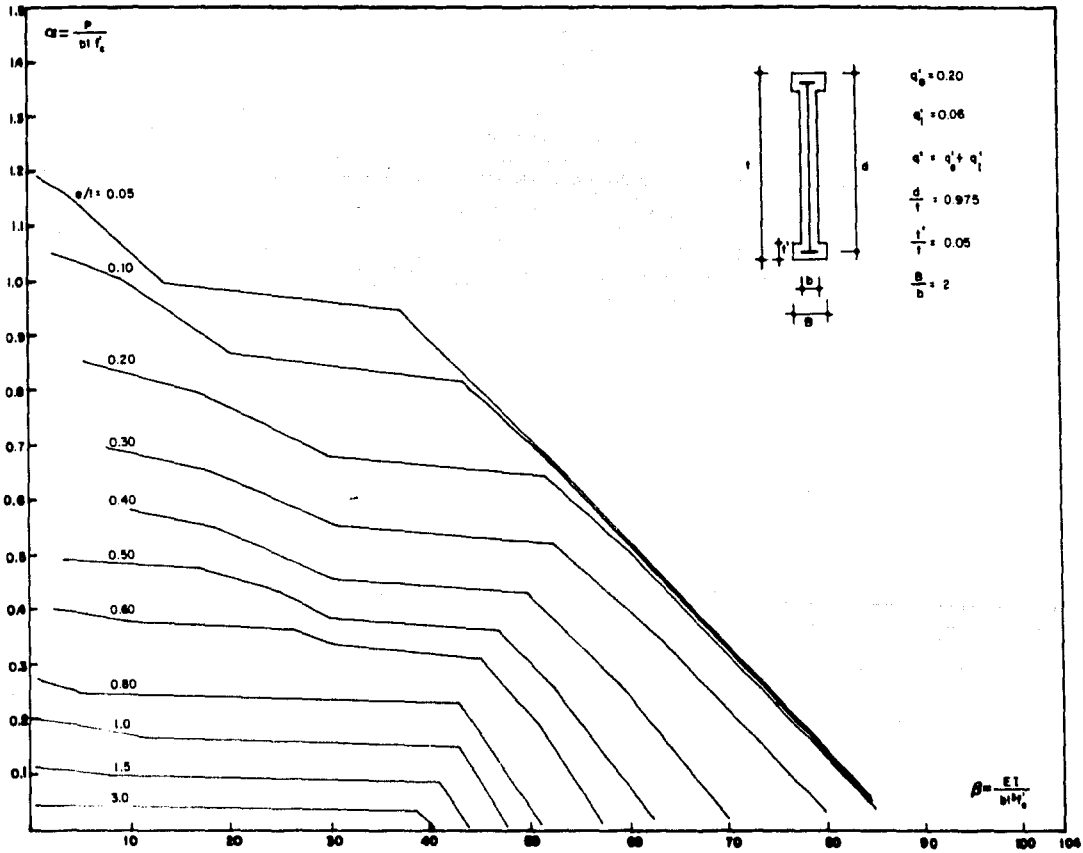


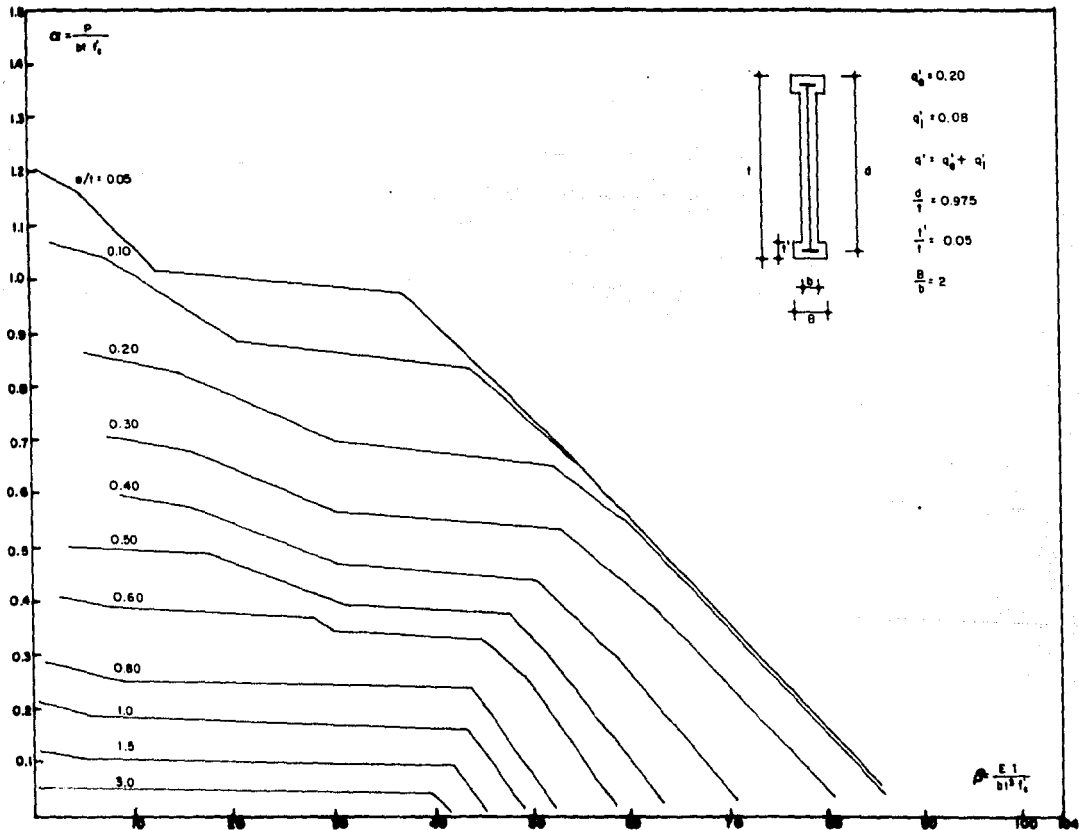


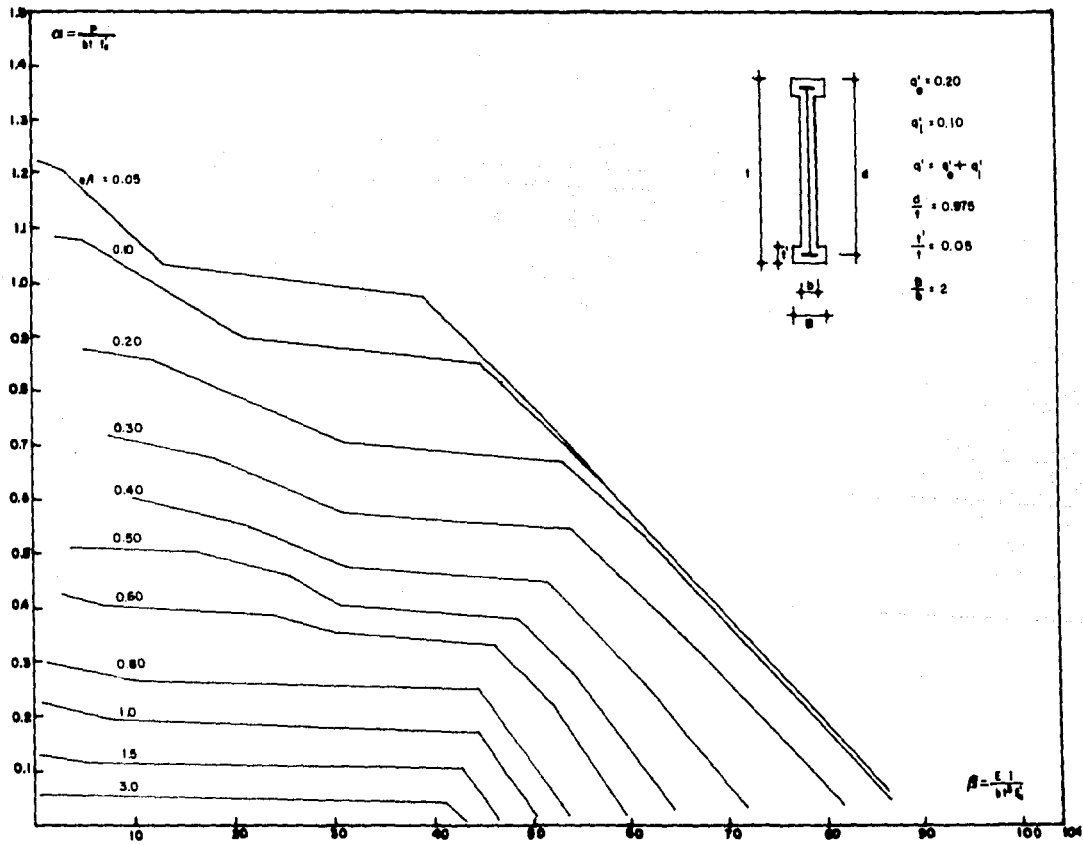


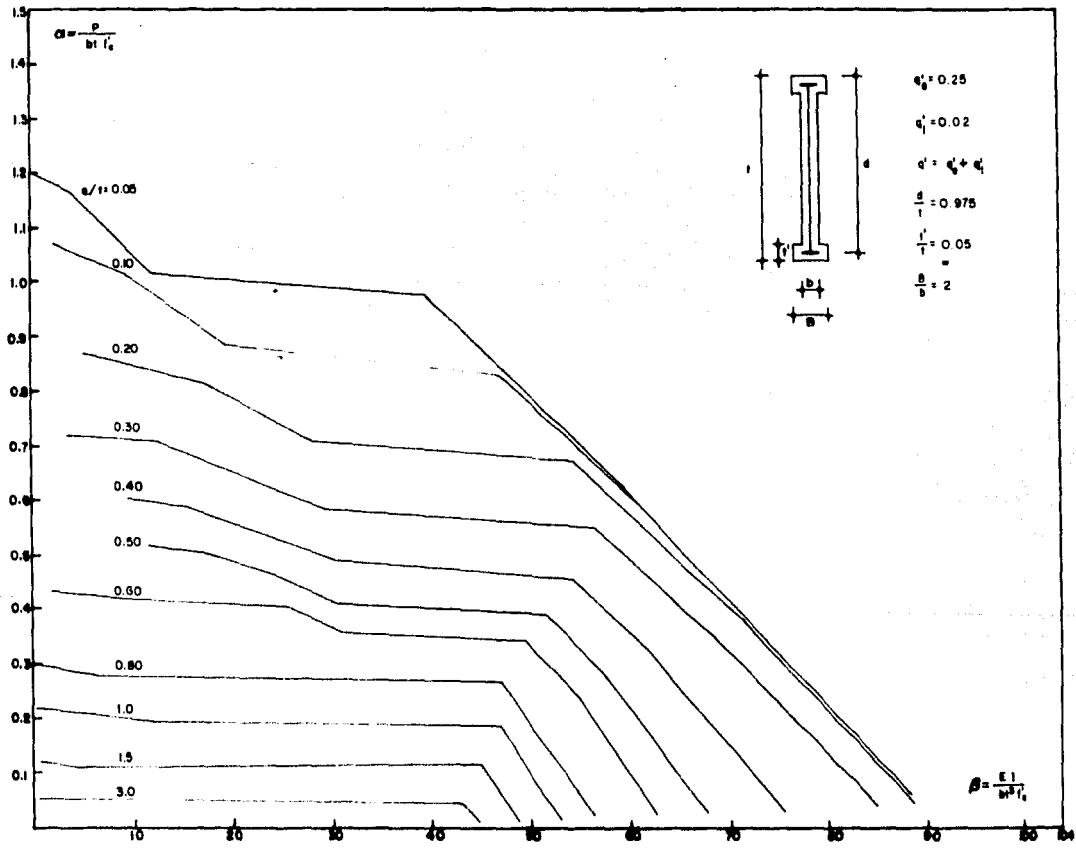


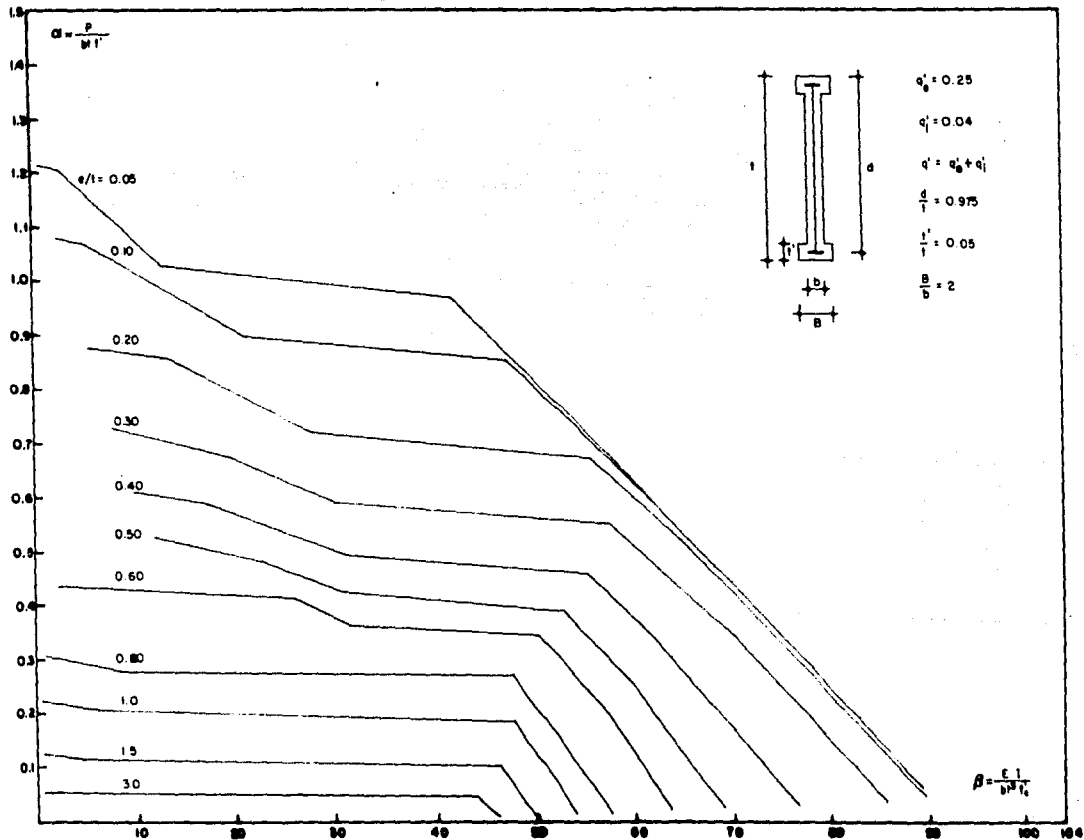




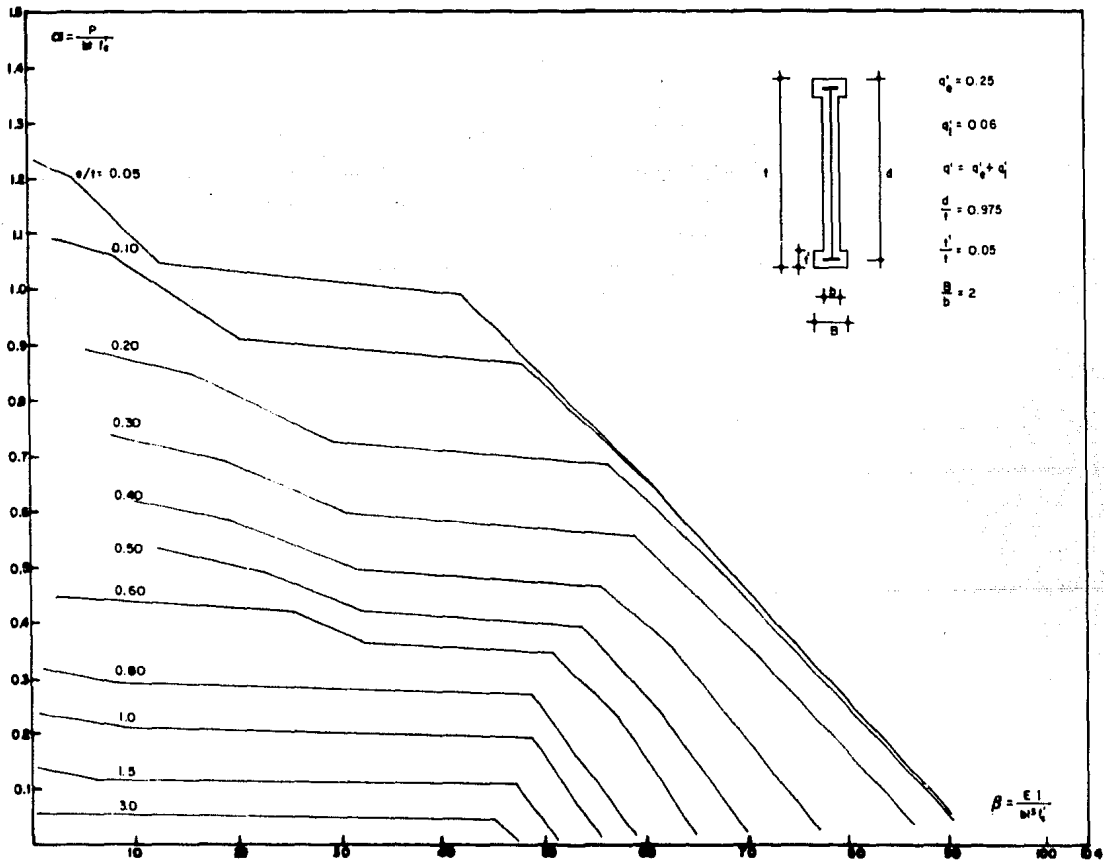


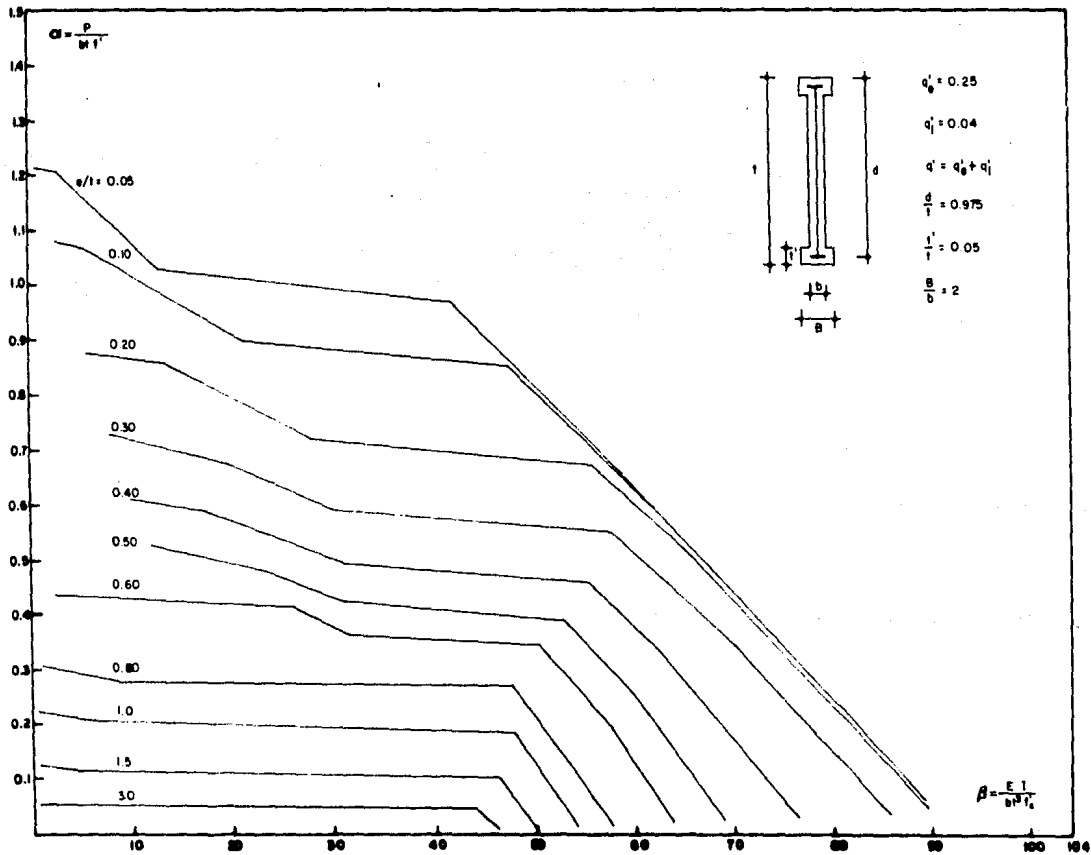


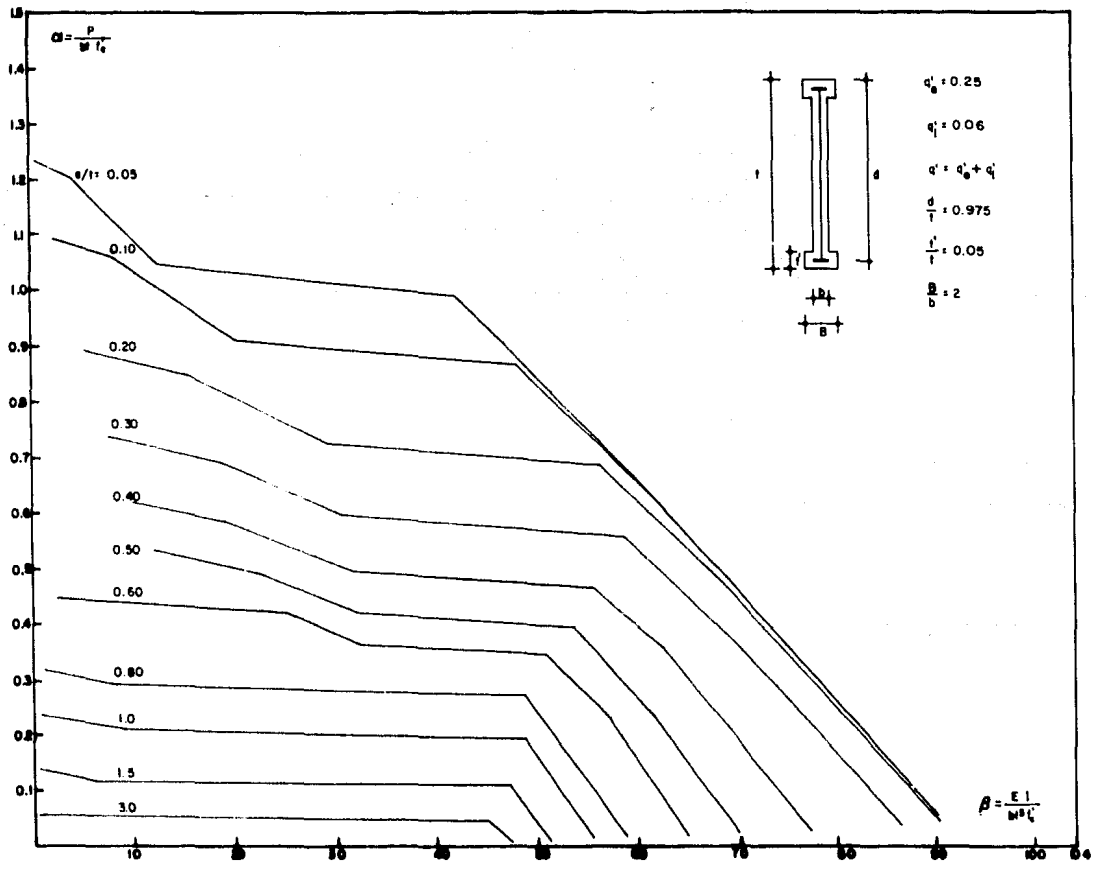


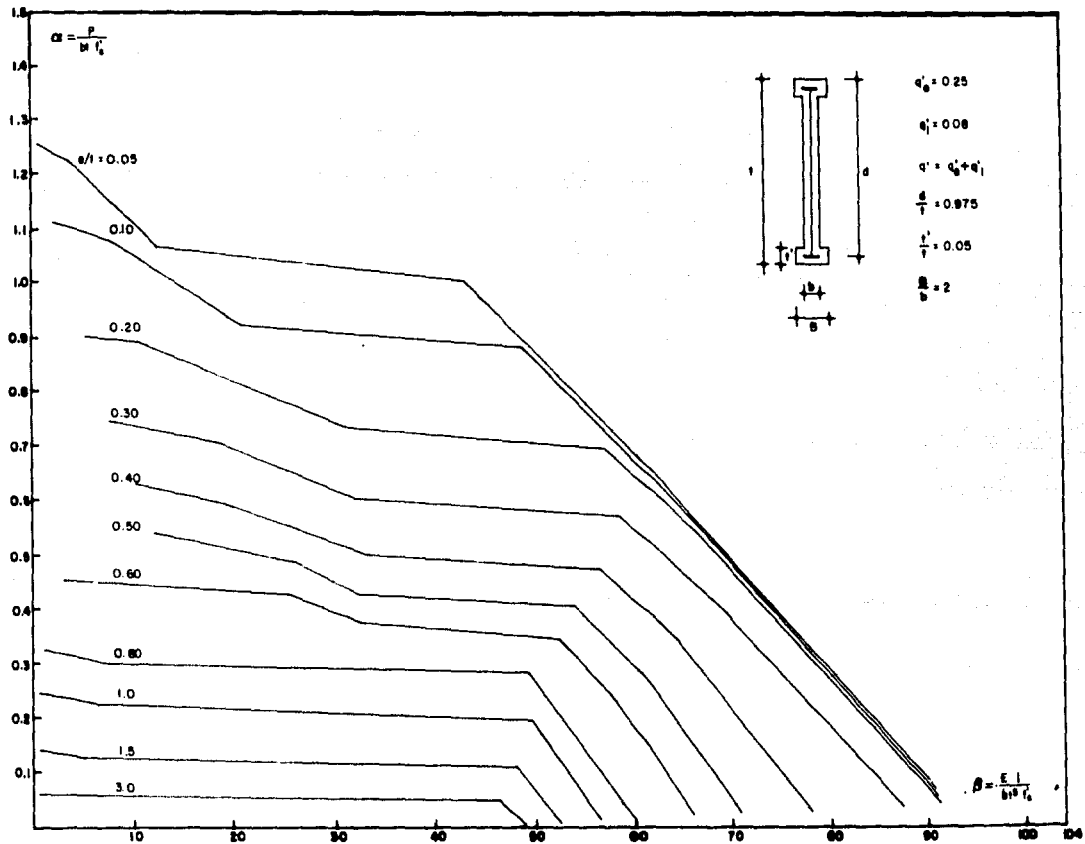


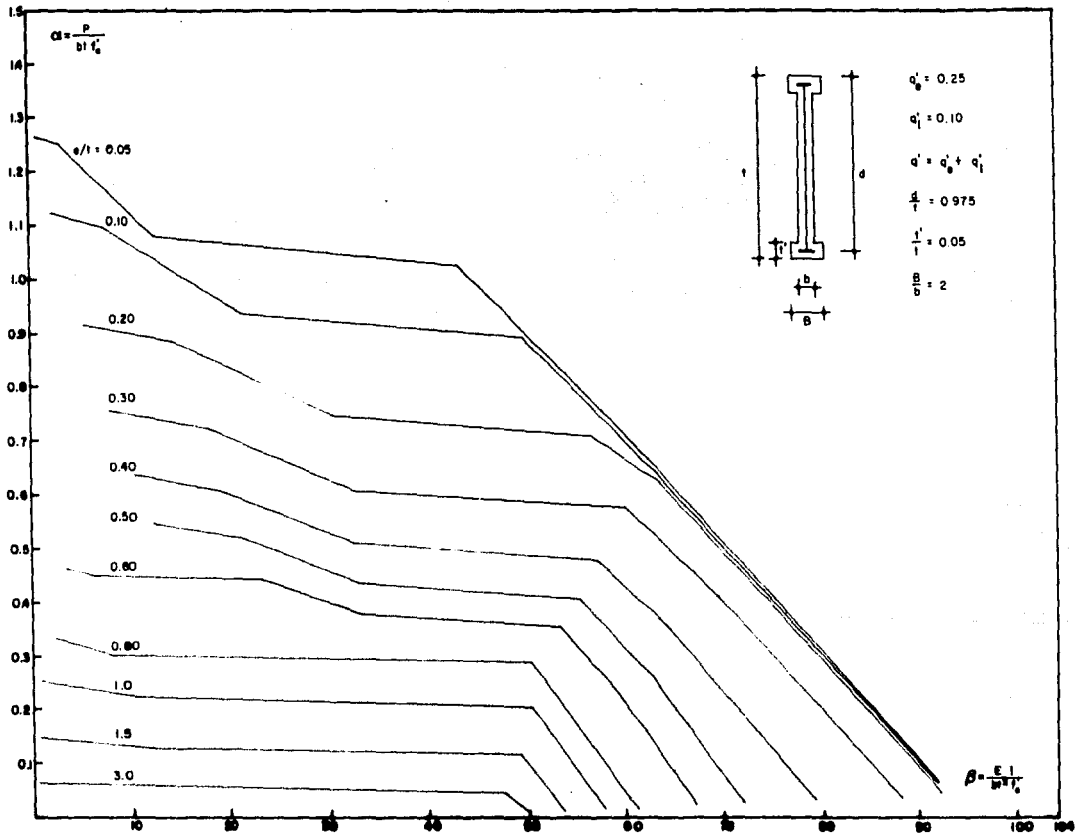


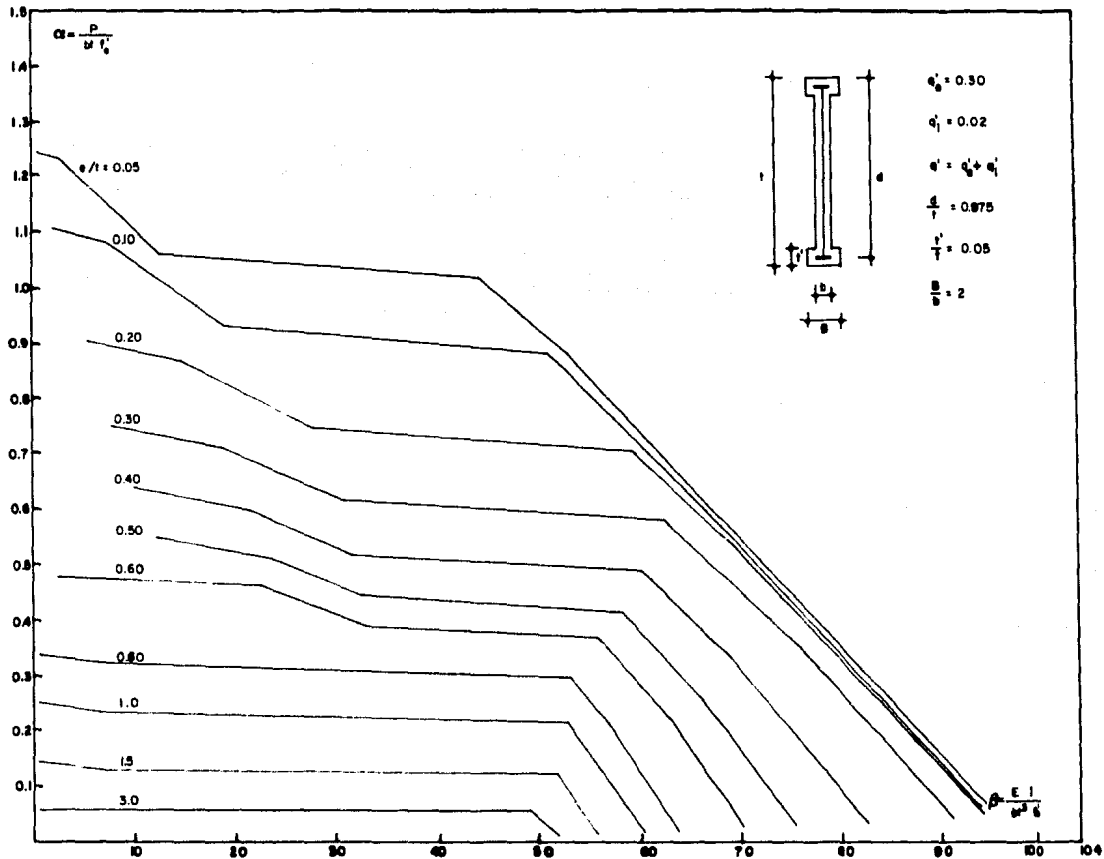


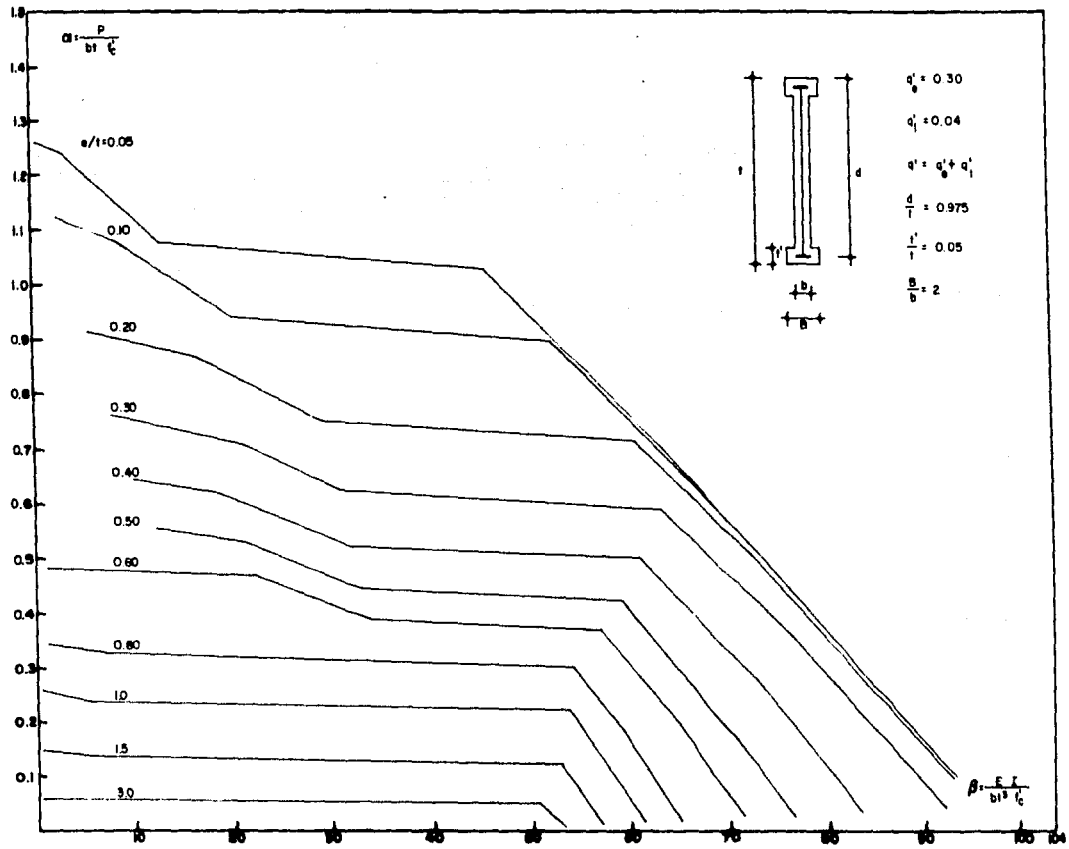


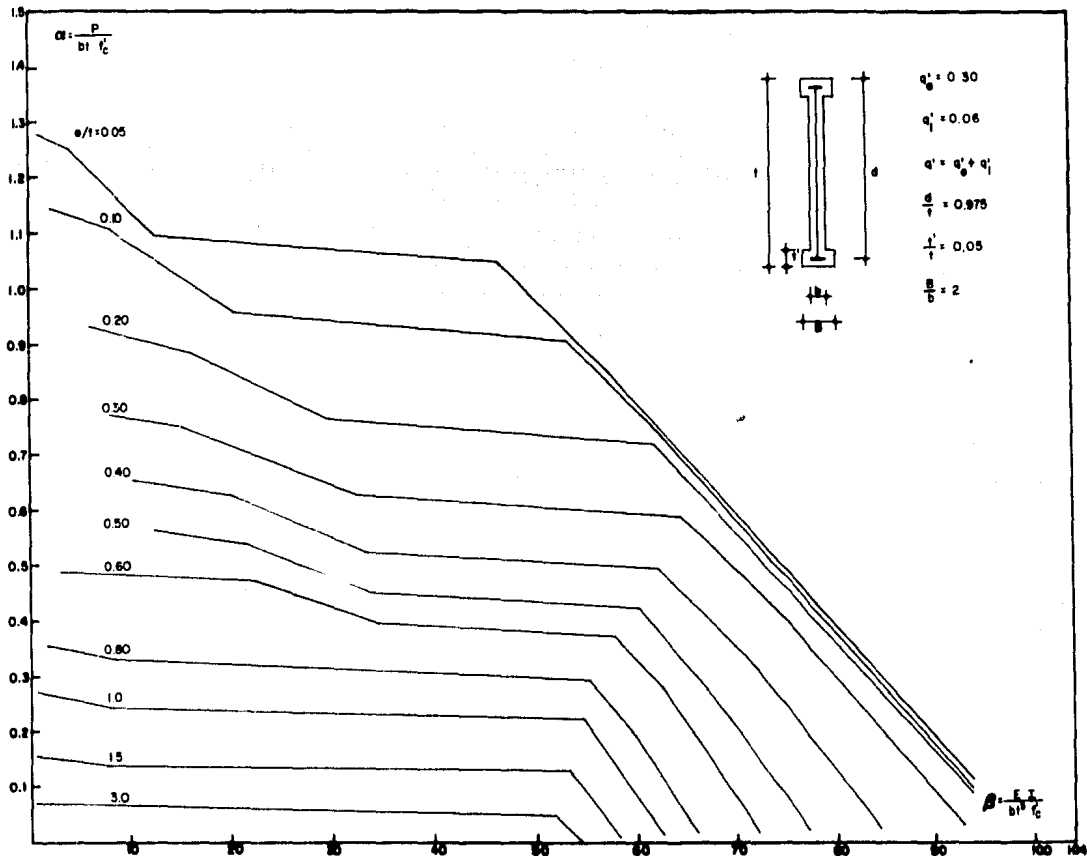




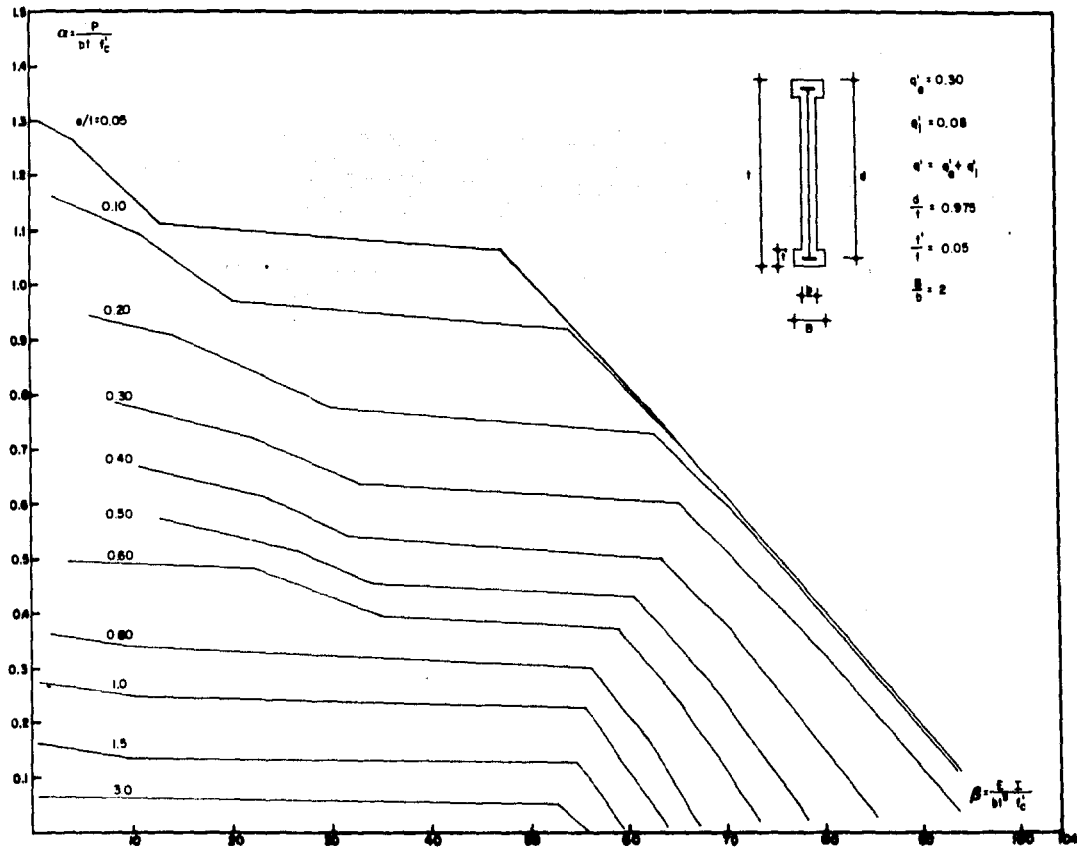


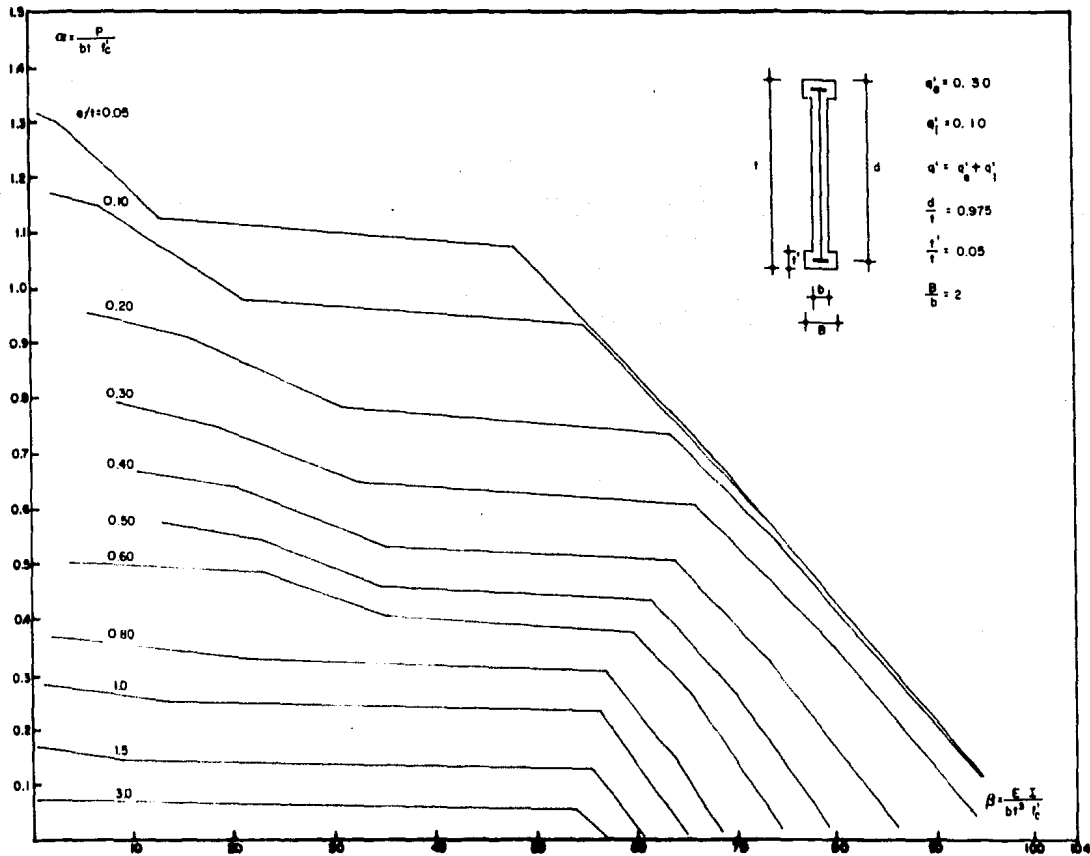












**APENDICE D**

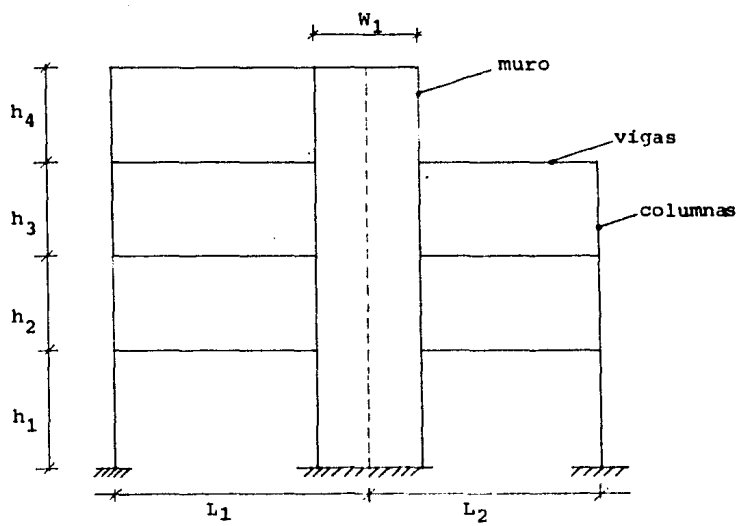
### DESARROLLO NUMERICO DEL EJEMPLO

En éste apéndice se presenta el procedimiento que se siguió para efectuar el análisis estructural de un marco o sistema plano con muro de cortante, sujeto a cargas verticales y laterales.

#### HIPOTESIS GENERALES

Para hacer el análisis bidimensional de un marco se hacen - las siguientes suposiciones, que son realistas para la mayoría - de los casos:

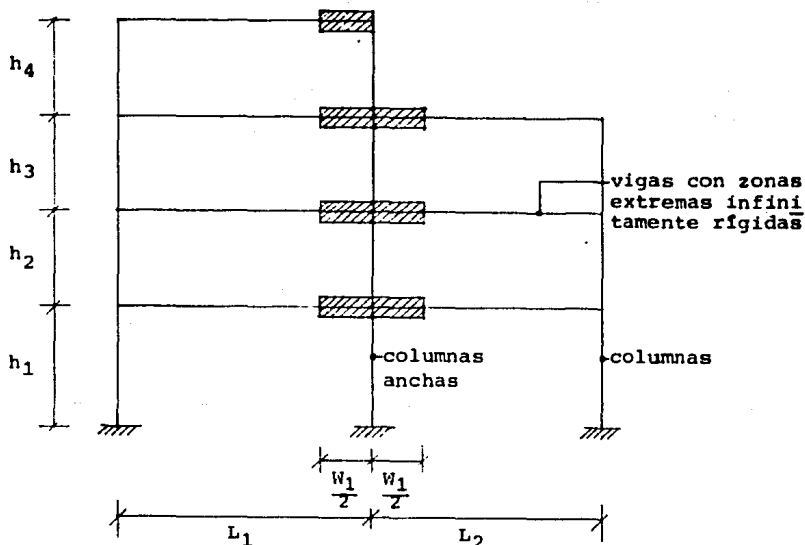
- i) El marco tiene un comportamiento elástico lineal
- ii) El marco ó sistema plano está formado por elementos verticales (columnas y/o muros) y elementos horizontales (vigas o sistema de piso, que puede ser reemplazado por una viga equivalente). En la figura A.1 se presenta el esquema del sistema plano que se pretende analizar.



SISTEMA PLANO

Figura A.1

- iii) La rigidez de los sistemas de piso en su propio plano es infinita por lo cual funcionan como diafragmas rígidos.
  - iv) Los muros son columnas anchas, es decir, se consideran en ellos las deformaciones producidas por cortante.
  - v) Las zonas de las vigas que están dentro de los muros son indeformables, es decir, infinitamente rígidas a flexión.
- En la figura A.2 se ilustra esta hipótesis y la (iv)



IDEALIZACION DEL SISTEMA PLANO  
DE LA FIGURA A.1

Figura A.2.

- vi) Se desprecia la rigidez torsional de vigas, columnas y muros
- vii) Las fuerzas laterales están aplicadas a nivel de los sistemas de piso del edificio.

viii) No se consideran deformaciones por fuerza axial en los elementos estructurales del sistema plano. En estructuras no muy esbeltas se pueden despreciar.

Las hipótesis (ii) y (iii) implican que el sistema plano -- tiene dos grados de libertad, que son el posible desplazamiento horizontal por cada nivel (igual para todas las columnas y/o muros del sistema plano por nivel) en dirección al plano del marco, y una rotación alrededor de un eje ortogonal al plano del marco, por cada nudo. Si hay N nudos y L niveles en el sistema plano, su número de grados de libertad es  $(N + L)$

Los resultados de las hipótesis propuestas se han comparado con soluciones obtenidas con elementos finitos y con métodos aproximados; las diferencias no fueron significativas en ninguno de los casos estudiados (Ref. 8).

#### PROCEDIMIENTO DE ANALISIS

Con base en las hipótesis establecidas anteriormente, el análisis se efectuó por el método de las rigideces como a continuación se indica:

- i) Obtención de la matriz de continuidad  $\{a\}$  del marco.
- ii) Obtención de la matriz de rigideces de las barras  $\{k\}$
- iii) Obtención de la matriz de rigideces del marco obtenida como

$$\{K\} = \{a\}^T \{k\} \{a\}$$

- iv) Obtención del vector fuerzas  $\{F\}$  (momentos resultantes de de equilibrio actuando sobre los nudos y fuerzas horizontales de entrepiso; Estado II).
- v) Obtención del vector desplazamientos (giros en los nudos y desplazamientos totales de entrepiso) haciendo

$$\{d\} = \{K\}^{-1} \{F\}$$

vi) Obtención del vector deformaciones (deformaciones en los nudos:  $\theta = \phi + \frac{\Delta}{L}$ ) haciendo

$$\{e\} = \{a\} \{d\}$$

vii) Obtención del vector momentos en los extremos de las barras, haciendo

$$\{p\} = \{k\} \{e\}$$

Es de hacer notar aquí que para el análisis por carga vertical, el vector  $\{p\}$  estará dado finalmente por las contribuciones parciales siguientes:

$$\{p\} = \{\bar{p}\} + \{p'\}$$

donde:

$\{\bar{p}\}$  = momentos de empotramiento en los extremos de las barras

$\{p'\}$  = momentos en los extremos de las barras obtenidas al aplicar los momentos de desequilibrio sobre los nudos.

Por lo que el diagrama de momentos final para cada barra estará dado por:

$$M = \{p\} + m$$

donde:

$m$  = diagrama de momentos considerando a la barra isostática

viii) Comprobación del equilibrio haciendo

$$\{F\} = \{a\}^T \{p\}$$

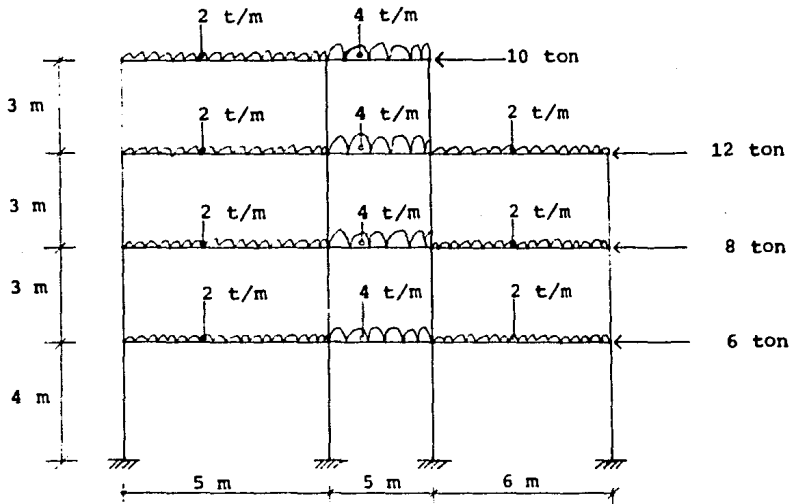
El análisis por cargas verticales y por fuerzas horizontales se hizo por separado, superponiéndose los resultados para la condición más desfavorable.

El procedimiento de análisis descrito puede resolverse con la ayuda de programas de computación. Para éste ejemplo se usó el programa CECAFI-MATRICES que se encuentra clasificado en la biblioteca de la computadora Burroughs B-6700 del Centro de Servicios de Cómputo de la UNAM.

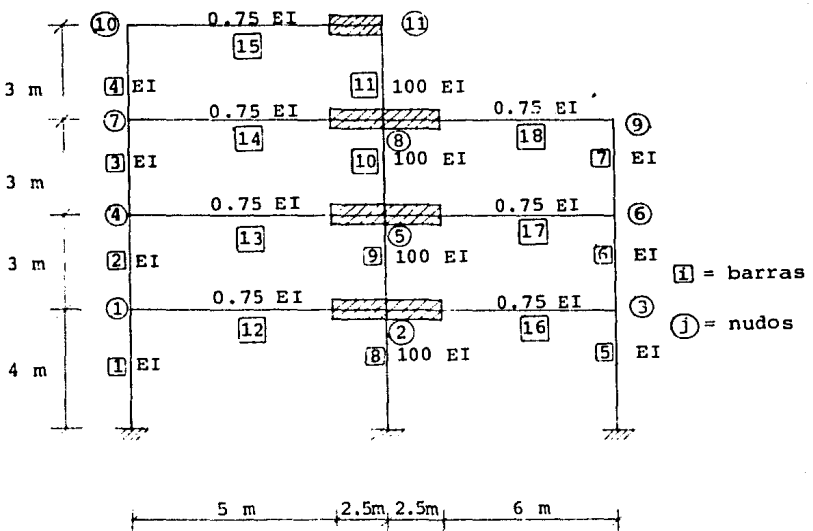
A continuación se presenta la forma y dimensiones del marco con muro de cortante por analizar, así como las condiciones de carga a las que se encuentra sometido. Se supone que las --cargas verticales a las que se encuentra sometido son producto de un análisis de cargas muertas y vivas de acuerdo a un Reglamento reconocido. También se supone que las fuerzas horizontales actuantes son debidas a sismo y obtenidas por medio de un análisis estático ó dinámico.

Se entenderá que estas fuerzas horizontales toman ya en --cuenta los efectos torsionantes de la estructura y que son las fuerzas horizontales repartidas de acuerdo a la rigidez del marco. Se supone que las columnas y muros están empotrados en la cimentación del edificio, por lo que allí no se permiten ni desplazamientos ni giros.



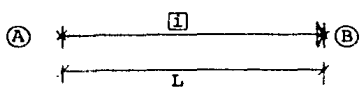


Solicitaciones Actuantes en el Sistema Plano



RIGIDEZES RELATIVAS PROPUESTAS ENTRE ELEMENTOS Y NUMERACION DE NUDOS Y BARRAS EN EL SISTEMA - EQUIVALENTE

CONVENCION DE SIGNOS PARA EL ANALISIS

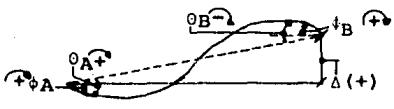


deformaciones

$$(e) \begin{Bmatrix} \Delta \\ \phi_A \\ \phi_B \end{Bmatrix}$$

desplazamientos

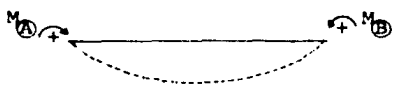
$$(d) \begin{Bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \\ \Delta \end{Bmatrix}$$



$$\phi_A = \phi + \frac{\Delta}{L}$$

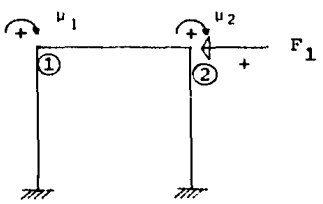
$$\phi_B = -\phi - \frac{\Delta}{L}$$

MOMENTOS FLEXIONANTES



$$(p) \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix}$$

FUERZAS EN LOS NUDOS Y ENTREPISO



$$(F) = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ F_1 \end{Bmatrix}$$



## MATRICES DE RIGIDECES DE LAS BARRAS

Barras **1** , **5** :Unidades en  
(ton) y (m)

$$(k) = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{2EI}{L} \\ -\frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} ; \quad (k) = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \times EI$$

Barras **2** , **3** , **4** , **6** , **7** :

$$(k) = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{2EI}{L} \\ -\frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} ; \quad (k) = \begin{bmatrix} 1.3333 & -0.6667 \\ -0.6667 & 1.3333 \end{bmatrix} \times EI$$

Barra **8** :

$$(k) = \begin{bmatrix} \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} & -\frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} \\ -\frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} & \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} \end{bmatrix}$$

$$EI = 100 EI$$

$$c = 6 k_f (1 + \nu) \frac{I}{AL^2}$$

para secciones rectangulares se tiene:

$$c = 6 k_f (1 + \nu) \frac{bt^3}{12 b t L^2}$$

$$c = 6 k_f (1 + \nu) \frac{t^2}{12L^2}$$

$$c = 6 (1.2) (1 + 0.25) \frac{(5)^2}{12(4)^2} = 1.1719$$

$$\{k\} = \begin{bmatrix} \frac{4(100)(2.1719)}{4(5.6876)} & \frac{-2(100)(-1.3438)}{4(5.6876)} \\ \frac{-2(100)(-1.3438)}{4(5.6876)} & \frac{4(100)(2.1719)}{4(5.6876)} \end{bmatrix} \times EI$$

$$\{k\} = \begin{bmatrix} 38.1866 & 11.8134 \\ 11.8134 & 38.1866 \end{bmatrix} \times EI$$

Barras 9 , 10 , 11 :

$$\{k\} = \begin{bmatrix} \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} & \frac{-2EI(1-2c)}{L(1+4c)} \\ \frac{-2EI(1-2c)}{L(1+4c)} & \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} \end{bmatrix}$$

$$EI = 100 EI$$

$$c = 6 k_f (1 + \nu) \frac{t^2}{12L^2}$$

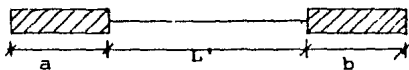
$$c = 6 (1.2) (1 + 0.25) \frac{(5)^2}{12(3)^2}$$

$$c = 2.0833$$

$$\{k\} = \begin{bmatrix} \frac{4(100)(3.0833)}{3(9.3332)} & \frac{-2(100)(-3.1666)}{3(9.3332)} \\ \frac{-2(100)(-3.1666)}{3(9.3332)} & \frac{4(100)(3.0833)}{3(9.3332)} \end{bmatrix} \times EI$$

$$\{k\} = \begin{bmatrix} 44.0478 & 22.6189 \\ 22.6189 & 44.0478 \end{bmatrix} \times EI$$

Barras **12** , **13** , **14** , **15** :



$$\{k\} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L^3} (1 + 3\alpha + 3\alpha^2) & \frac{-2EI}{L^3} (1 + 3\alpha + 3\beta + 6\alpha\beta) \\ \frac{-2EI}{L^3} (1 + 3\alpha + 3\beta + 6\alpha\beta) & \frac{4EI}{L^3} (1 + 3\beta + 3\beta^2) \end{bmatrix} \quad \alpha = \frac{a}{L}$$

$$\beta = \frac{b}{L}$$

$$EI = 0.75 EI; \quad L' = 5; \quad \alpha = 0; \quad \beta = \frac{b}{L'} = \frac{2.5}{5} = 0.5$$

$$\{k\} = \begin{bmatrix} \frac{4(0.75)}{5} & -\frac{2(0.75)}{5} (1 + 3(0.5)) \\ -\frac{2(0.75)}{5} (1 + 3(0.5)) & \frac{4(0.75)}{5} (1 + 3(0.5) + 3(0.5)^2) \end{bmatrix} \times EI$$

$$\{k\} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.75 \\ -0.75 & 1.95 \end{bmatrix} \times EI$$

Barras **16**, **17**, **18** :

$$\{k\} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L'} (1 + 3\alpha + 3\alpha^2) & -\frac{2EI}{L'} (1 + 3\alpha + 3\beta + 6\alpha\beta) \\ -\frac{2EI}{L'} (1 + 3\alpha + 3\beta + 6\alpha\beta) & \frac{4EI}{L'} (1 + 3\beta + 3\beta^2) \end{bmatrix}$$

$$EI = 0.75 EI; \quad L' = 6; \quad \alpha = \frac{a}{L'} = \frac{2.5}{6} = 0.4167; \quad \beta = 0$$

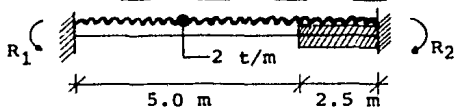
$$\{k\} = \begin{bmatrix} \frac{4(0.75)}{6} (1 + 3(0.4167) + 3(0.4167)^2) & \frac{-2(0.75)}{6} (1 + 3(0.4167)) \\ \frac{-2(0.75)}{6} (1 + 3(0.4167)) & \frac{4(0.75)}{6} \end{bmatrix} \times EI$$

$$\{k\} = \begin{bmatrix} 1.3855 & -0.5625 \\ -0.5625 & 0.5 \end{bmatrix} \times EI$$



## MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO:

Barras 12, 13, 14, 15 :

Unidades en  
(Ton) y (m)

$$R_1 = \frac{w (L - b)^2}{\frac{16}{L^2} (L^2 + bL + b^2) - 4 \left(1 + \frac{2b}{L}\right)^2} =$$

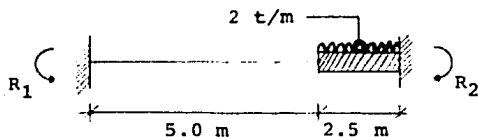
$$R_1 = \frac{2 (7.5 - 2.5)^2}{\frac{16}{(7.5)^2} \{ (7.5)^2 + 2.5 (7.5) + (2.5)^2 \} - 4 \left\{ 1 + \frac{2(2.5)}{7.5} \right\}^2}$$

$$R_1 = \frac{50.0}{12} = 4.1667$$

$$R_2 = \frac{w (L^2 + 4bL + b^2)}{\frac{16}{L^2} (b^2 + bL + L^2) - 4 \left(1 + \frac{2b}{L}\right)^2}$$

$$R_2 = \frac{2 \{ (7.5)^2 + 4 (2.5) (7.5) + (2.5)^2 \}}{12} = \frac{275}{12}$$

$$R_2 = 22.9167$$



$$R_1 = 0$$

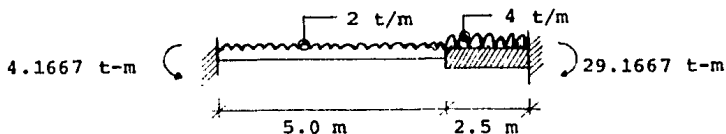
$$R_2 = \frac{3 w b^2 L^2}{8 (b^2 + bL + L^2) - 2 (L + 2b)^2} =$$

$$R_2 = \frac{3 (2) (2.5)^2 (7.5)^2}{8 [(2.5)^2 + (2.5)(7.5) + (7.5)^2] - 2 (7.5 + 5)^2}$$

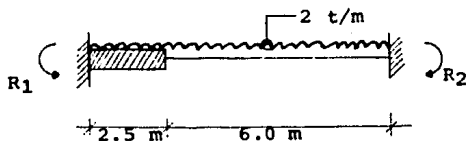
$$R_2 = \frac{2\,109.375}{337.5}$$

$$R_2 = 6.25$$

Por superposición de causas y efectos:



Barras 16, 17, 18 :



$$R_1 = \frac{w (L^2 + 4bL + b^2)}{\frac{16}{L^2} (b^2 + bL + L^2) - 4 \left(1 + \frac{2b}{L}\right)^2} =$$

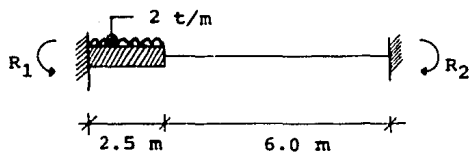
$$R_1 = \frac{2 \{ (8.5)^2 + 4 (2.5) (8.5) + (2.5)^2 \}}{\frac{16}{(8.5)^2} \{ (2.5)^2 + (2.5) (8.5) + (8.5)^2 \} - 4 \left\{ 1 + \frac{2 (2.5)}{8.5} \right\}^2}$$

$$R_1 = \frac{327}{12} = 27.25$$

$$R_2 = \frac{w (L - b)^2}{\frac{16}{L^2} (L^2 + bL + b^2) - 4 \left(1 + \frac{2b}{L}\right)^2} =$$

$$R_2 = \frac{2 (8.5 - 2.5)^2}{\frac{16}{(8.5)^2} \{ (8.5)^2 + (2.5) (8.5) + (2.5)^2 \} - 4 \left\{ 1 + \frac{2 (2.5)}{8.5} \right\}^2}$$

$$R_2 = \frac{72}{12} = 6$$



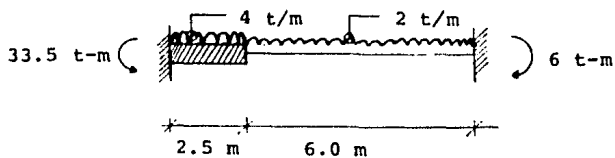
$$R_1 = \frac{3w b^2 L^2}{8 (b^2 + bL + L^2) - 2 (L + 2b)^2}$$

$$R_1 = \frac{3 (2) (2.5)^2 (8.5)^2}{8 ((2.5)^2 + (2.5)(8.5) + (8.5)^2) - 2 (8.5 + 5)^2}$$

$$R_1 = \frac{2\,709.375}{433.5} = 6.25$$

$$R_2 = 0$$

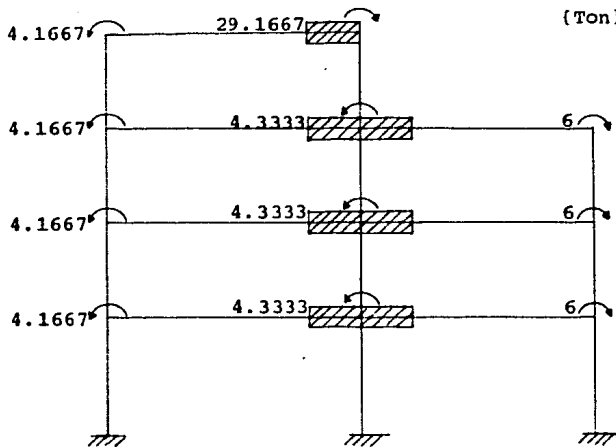
Por superposición de causas y efectos:



Los momentos de empotramiento resultantes sobre los nudos  
son los siguientes:

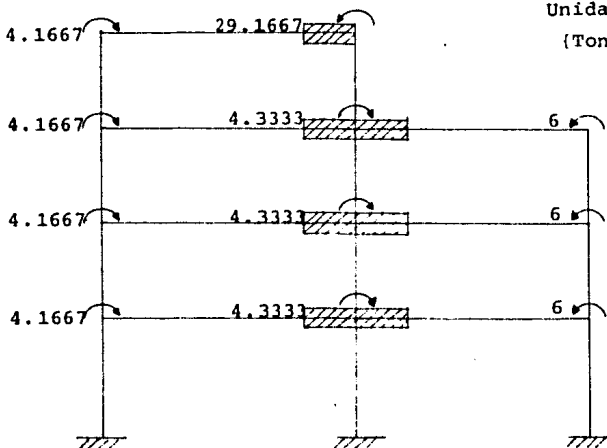
18

Unidades en  
(Ton) y (m)

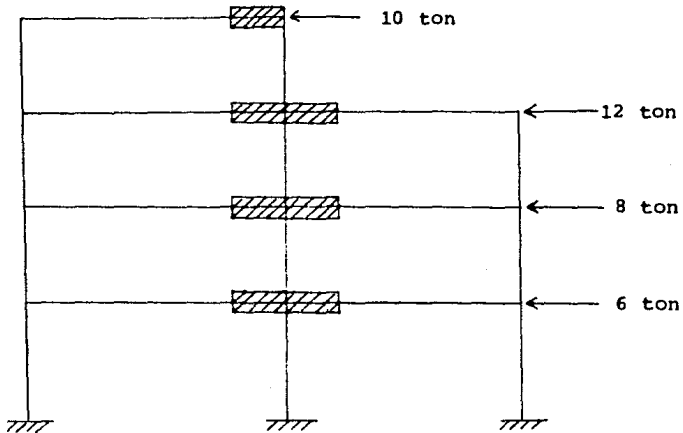


Momentos de disequilibrio (Estado II) con los que se  
hace el análisis para carga vertical.

Unidades en  
(Ton) y (m)



Fuerzas horizontales con las que se efectua  
el análisis para sismo.



A continuación se presentan los programas con los que se hicieron los análisis por carga vertical y por sismo, así como los diagramas de  $(M)$  ,  $(V)$  y  $(N)$  de cada análisis.

A PARTIR  
DE ESTA  
PAGINA

FACIA  
DE  
ORIGEN.











```

9      0.      0.      0.      0.      0.
10     0.      0.      0.      0.      0.
11     0.      0.      0.      0.      0.
12     0.      0.      0.      0.      0.
13     0.      0.      0.      0.      0.
14     0.      0.      0.      0.      0.
15     0.      0.      0.      0.      0.
16     0.      0.      0.      0.      0.
17     0.      0.      0.      0.      0.
18     0.      0.      0.      0.      0.
19     0.      0.      0.      0.      0.
20     0.      0.      0.      0.      0.
21     0.      0.      0.      0.      0.
22     0.      0.      0.      0.      0.
23     0.      0.      0.      0.      0.
24     0.      0.      0.      0.      0.
25     0.      0.      0.      0.      0.
26     0.      0.      0.      0.      0.
27     0.      0.      0.      0.      0.
28     0.      0.      0.      0.      0.
29     0.      0.      0.      0.      0.
30     0.      0.      0.      0.      0.
31     1.385E+00  5.000E+01  1.000E+01  5.000E+01  5.000E+01
32     5.000E+01  5.000E+01  1.000E+01  5.000E+01  5.000E+01
33     0.      0.      0.      0.      0.
34     0.      0.      0.      0.      0.
35     0.      0.      0.      0.      0.
36     0.      0.      0.      0.      0.

```

```

*11* *10000*
*12* *10000*
*13* *10000*
*14* *10000*
*15* *10000*
*16* *10000*
*17* *10000*
*18* *10000*
*19* *10000*
*20* *10000*
*21* *10000*
*22* *10000*
*23* *10000*
*24* *10000*
*25* *10000*
*26* *10000*
*27* *10000*
*28* *10000*
*29* *10000*
*30* *10000*
*31* *10000*
*32* *10000*
*33* *10000*
*34* *10000*
*35* *10000*
*36* *10000*

```

REGULACION 15\* COLUMNAS 1.

REGULACION (F)

```

1  4.127E+00
2  4.127E+00
3  4.127E+00
4  4.127E+00
5  4.127E+00
6  4.127E+00
7  4.127E+00
8  4.127E+00
9  4.127E+00
10 4.127E+00
11 4.127E+00
12 4.127E+00
13 4.127E+00
14 4.127E+00
15 4.127E+00
16 4.127E+00
17 4.127E+00
18 4.127E+00
19 4.127E+00
20 4.127E+00
21 4.127E+00
22 4.127E+00
23 4.127E+00
24 4.127E+00
25 4.127E+00
26 4.127E+00
27 4.127E+00
28 4.127E+00
29 4.127E+00
30 4.127E+00
31 4.127E+00
32 4.127E+00
33 4.127E+00
34 4.127E+00
35 4.127E+00
36 4.127E+00

```

```

*17* *10000*
*18* *10000*
*19* *10000*
*20* *10000*
*21* *10000*
*22* *10000*
*23* *10000*
*24* *10000*
*25* *10000*
*26* *10000*
*27* *10000*
*28* *10000*
*29* *10000*
*30* *10000*
*31* *10000*
*32* *10000*
*33* *10000*
*34* *10000*
*35* *10000*
*36* *10000*

```

COLUMNAS 15.



11 -1.515L\*J0  
 12 J.940L\*01  
 13 1.145L\*00  
 14 J.348L\*00  
 15 0.374L\*00

\*NLI 1 \*JLFORM\*CONTI\*DESPLA\*

\*IMP \*JLFORM\*

LINEAS 36

COLUMNAS 1.

VECTOR DE DERIVACIONES (e)

1

1 1.744L\*02  
 2 -1.171L\*00  
 3 -1.544L\*00  
 4 -0.976L\*01  
 5 1.226L\*00  
 6 -0.512L\*01  
 7 -0.976L\*01  
 8 -0.717L\*00  
 9 -0.940L\*02  
 10 1.020L\*00  
 11 -1.734L\*00  
 12 1.097L\*00  
 13 -0.494L\*01  
 14 0.037L\*00  
 15 -0.214L\*02  
 16 0.653L\*01  
 17 1.043L\*01  
 18 2.044L\*01  
 19 1.043L\*01  
 20 1.043L\*01  
 21 1.043L\*01  
 22 0.653L\*01  
 23 1.043L\*01  
 24 1.043L\*01  
 25 1.043L\*01  
 26 1.043L\*01  
 27 1.043L\*01  
 28 1.043L\*01  
 29 1.043L\*01  
 30 1.043L\*01  
 31 1.043L\*01  
 32 1.043L\*01  
 33 1.043L\*01  
 34 1.043L\*01  
 35 1.043L\*01  
 36 1.043L\*01

\*NLI 1 \*JLFORM\*CONTI\*DESPLA\*

\*IMP \*JLFORM\*

LINEAS 36

COLUMNAS 1.

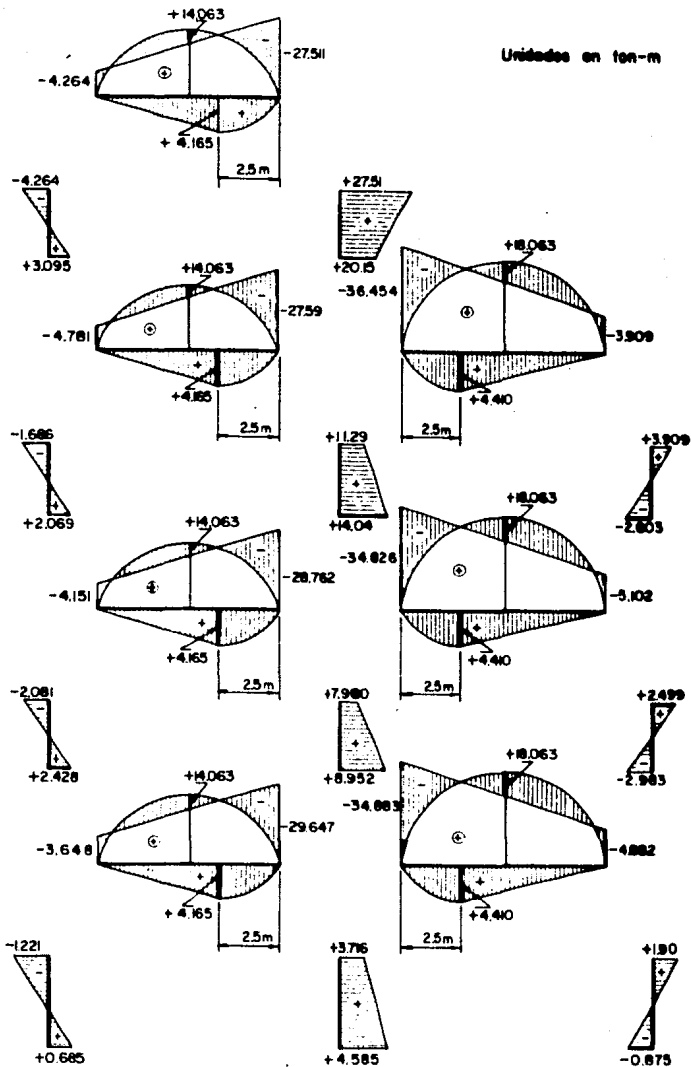
MATRIA DE POTENCIALES EN LOS EXTREMOS DE LAS BARRAS (p)

1



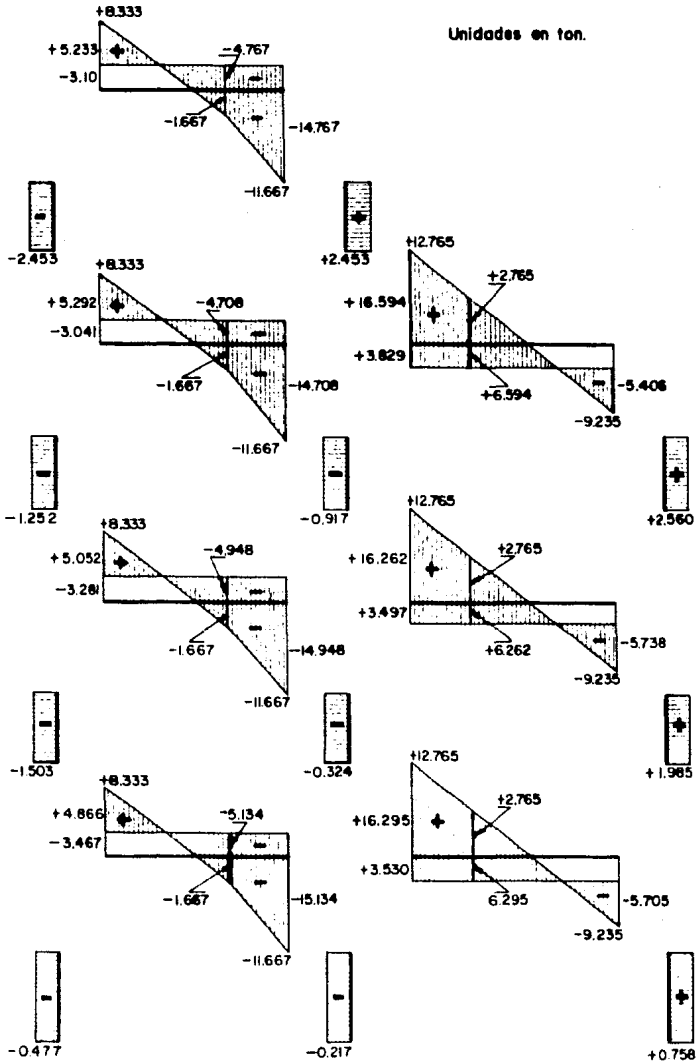
## DIAGRAMAS DE MOMENTOS POR CARGAS VERTICALES

Unidades en ton-m

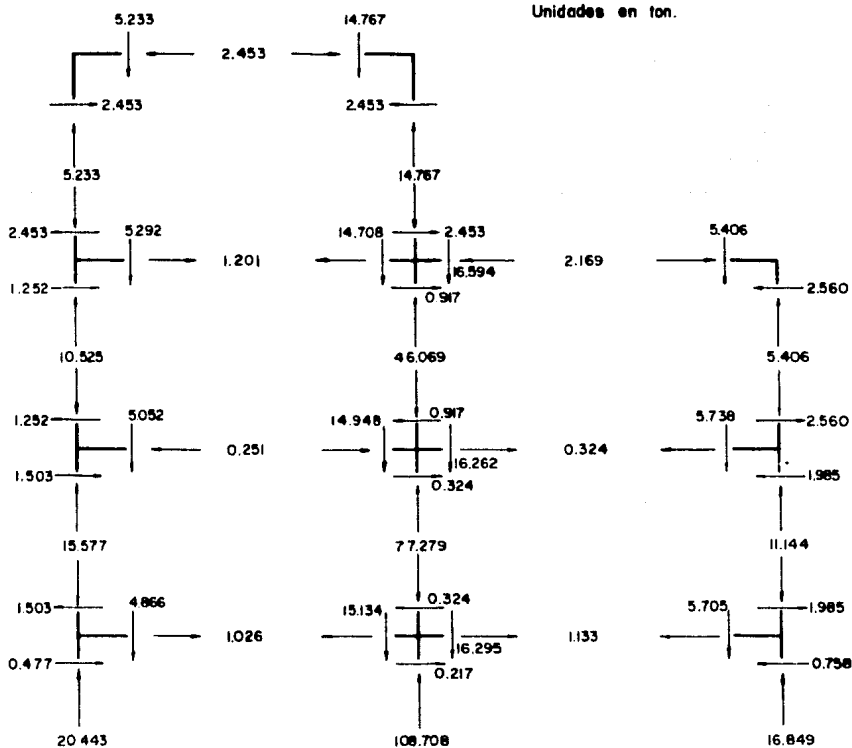




## DIAGRAMAS DE CORTANTES POR CARGAS VERTICALES



## DIAGRAMAS DE FUERZAS NORMALES POR CARGAS VERTICALES

















MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA CEBE SEN SIMETRICA (K)



|   | 1         | 2          | 3         | 4         | 5          | 6         | 7         | 8          | 9  |
|---|-----------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|----|
| 1 | 7.933E+00 | 7.500E-01  | 0.        | 0.667E-01 | 0.         | 0.        | 0.        | 0.         | 0. |
| 2 | 0.667E-01 | 3.257E+01  | 5.625E-01 | 0.        | -0.262E+01 | 0.        | 0.        | 0.         | 0. |
| 3 | 0.        | 0.425E-01  | 2.633E+00 | 0.        | 0.         | 0.667E-01 | 0.        | 0.         | 0. |
| 4 | 0.667E-01 | -4.262E+01 | 0.        | 3.267E+00 | 7.500E-01  | 0.        | 0.667E-01 | 0.         | 0. |
| 5 | 0.        | 0.         | 0.667E-01 | 7.500E-01 | 5.625E-01  | 0.        | 0.        | -0.262E+01 | 0. |
| 6 | 0.        | 0.         | 0.        | 0.667E-01 | 0.         | 0.        | 0.        | 0.         | 0. |
| 7 | 0.        | 0.         | 0.        | 0.667E-01 | -0.262E+01 | 0.        | 0.        | 0.         | 0. |
| 8 | 0.        | 0.         | 0.        | 0.        | 0.         | 0.667E-01 | 0.        | 0.         | 0. |
| 9 | 0.        | 0.         | 0.        | 0.        | 0.         | 0.        | 0.667E-01 | 0.         | 0. |

|    | 11 | 12         | 13        | 14 | 15 |
|----|----|------------|-----------|----|----|
| 11 | 0. | -2.916E-01 | 6.666E-01 | 0. | 0. |
| 12 | 0. | 2.916E-01  | 7.142E+00 | 0. | 0. |
| 13 | 0. | 0.666E-01  | 6.666E-01 | 0. | 0. |
| 14 | 0. | 0.         | 0.        | 0. | 0. |
| 15 | 0. | 0.         | 0.        | 0. | 0. |

\*IIP \*IIPR\*HIGL\*  
 \*IUT \*LESF\*HIGL\*LEF\*  
 \*IIP \*LESPL\*  
 HIGLHLS 15\* CCLPNA 1\*

MATRIZ DE RESPONDAZARIZAS (d)

|    |            |
|----|------------|
| 1  | -4.939E+00 |
| 2  | -4.800E+00 |
| 3  | -5.262E+00 |
| 4  | -5.177E+00 |
| 5  | -5.250E+00 |
| 6  | -5.123E+00 |
| 7  | -5.168E+00 |
| 8  | -5.179E+00 |
| 9  | -5.722E+00 |
| 10 | -5.179E+00 |



11 -6.066E+00  
 12 1.746L+01  
 13 4.046L+01  
 14 8.246L+01  
 15 8.246E+01

\*MUT \*LEFORM\*CONTIN\*DESPL\*

\*IMP \*DEFORH\*  
 REINGONES 36\* COLUMNA 1\*

VECTOR DE DEFORMACIONES (\*)

1

1 4.666L+00  
 2 7.252L+00  
 3 2.222L+00  
 4 1.848L+00  
 5 1.848L+00  
 6 1.013L+00  
 7 1.129E+00  
 8 3.967L+00  
 9 4.866L+00  
 10 3.967L+00  
 11 1.725L+00  
 12 1.046L+00  
 13 1.000L+00  
 14 3.488L+00  
 15 4.866L+00  
 16 4.866L+00  
 17 2.106L+00  
 18 1.174L+00  
 19 1.174L+00  
 20 1.000E+00  
 21 4.363L+00  
 22 4.363L+00  
 23 4.363L+00  
 24 4.000L+00  
 25 3.317L+00  
 26 3.317L+00  
 27 3.317L+00  
 28 6.120L+00  
 29 2.235L+00  
 30 6.120L+00  
 31 4.100L+00  
 32 2.235L+00  
 33 4.100L+00  
 34 6.120L+00  
 35 6.120L+00  
 36 3.782L+00

\*MUT \*MEXJA\*RIUDAR\*EFORH\*

\*IMP \*MEXJA\*  
 REINGONES 36\* COLUMNA 1\*

MATRIZ DE MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DE LAS BARRAS (P)

1

UNICAM

```

1 4.810E+00
2 -2.140E+00
3 4.293E+00
4 -1.950E+00
5 3.711E+00
6 -3.791E+00
7 0.129E+00
8 0.021E+00
9 0.074E+00
10 -2.057E+00
11 3.263E+00
12 -2.077E+00
13 1.752E+00
14 -1.474E+00
15 1.050E+00
16 -8.40E+00
17 7.782E+00
18 1.771E+00
19 -2.911E+00
20 0.040E+00
21 0.175E+00
22 -0.288E+00
23 0.063E+00
24 1.130E+00
25 -1.023E+00
26 1.037E+00
27 -1.037E+00
28 0.042E+00
29 -0.299E+00
30 0.299E+00
31 -0.331E+00
32 -1.174E+00
33 0.429E+00
34 -1.260E+00
35 5.324E+00

```

\* 1 \* 2 \* 3 \* 4 \* 5 \* 6 \* 7 \* 8 \* 9 \* 10 \* 11 \* 12 \* 13 \* 14 \* 15 \* 16 \* 17 \* 18 \* 19 \* 20 \* 21 \* 22 \* 23 \* 24 \* 25 \* 26 \* 27 \* 28 \* 29 \* 30 \* 31 \* 32 \* 33 \* 34 \* 35

\* 1 \* 2 \* 3 \* 4 \* 5 \* 6 \* 7 \* 8 \* 9 \* 10 \* 11 \* 12 \* 13 \* 14 \* 15 \* 16 \* 17 \* 18 \* 19 \* 20 \* 21 \* 22 \* 23 \* 24 \* 25 \* 26 \* 27 \* 28 \* 29 \* 30 \* 31 \* 32 \* 33 \* 34 \* 35

ESTE VECTOR DEBE SER IGUAL AL VECTOR DE FUERZAS

1

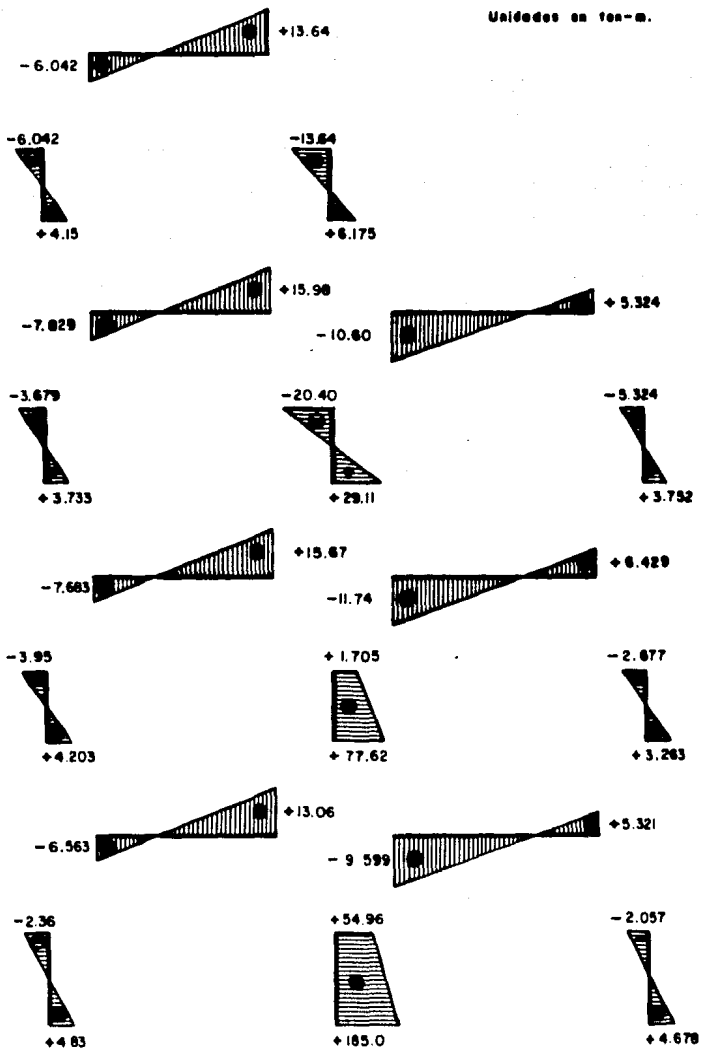
```

1 3.910E-11
2 -2.140E-11
3 4.293E-11
4 -1.950E-11
5 3.711E-11
6 -3.791E-11
7 0.129E-11
8 0.021E-11
9 0.074E-11
10 -2.057E-10
11 3.263E-10
12 -2.077E-10
13 1.752E-10
14 -1.474E-10
15 1.050E-10
16 -8.40E-10
17 7.782E-10
18 1.771E-10
19 -2.911E-10
20 0.040E-10
21 0.175E-10
22 -0.288E-10
23 0.063E-10
24 1.130E-10
25 -1.023E-10
26 1.037E-10
27 -1.037E-10
28 0.042E-10
29 -0.299E-10
30 0.299E-10
31 -0.331E-10
32 -1.174E-10
33 0.429E-10
34 -1.260E-10
35 5.324E-10

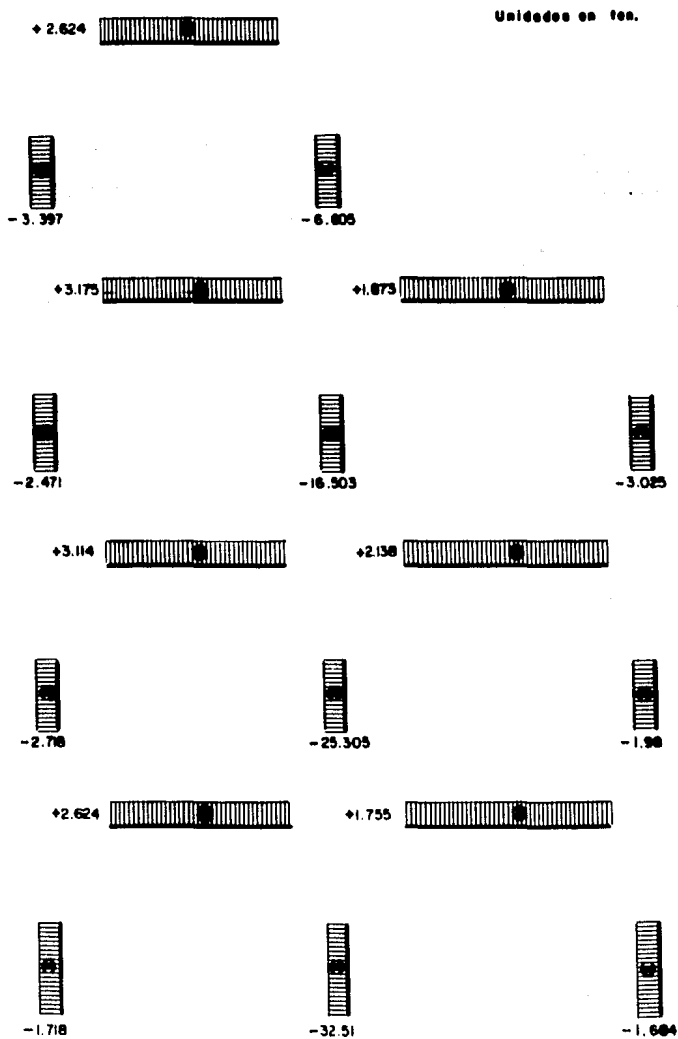
```

## DIAGRAMAS DE MOMENTOS POR SISMO

Unidades en ton-m.



## DIAGRAMAS DE CORTANTES POR SISMO



## DIAGRAMA DE FUERZAS NORMALES POR SISMO

