

197  
57  
*Universidad Nacional Autónoma de México*

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**DISEÑO DE UNA ANTENA DIELECTRICA  
PARA LA BANDA X**

**T E S I S**

Que para obtener el Título de  
**INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA**

P r e s e n t a

**CARLOS GABRIEL GIRON GARCIA**

México, D. F.

1979



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

	Pag.
INTRODUCCION.	3
CAPITULO UNO. CONCEPTOS GENERALES DE UNA ANTENA Y SU SISTEMA ALIMENTADOR.	7
1.1 PARAMETROS DE UNA ANTENA	8
Patrón de radiación.	8
Directividad.	13
Ganancia.	17
Eficiencia.	19
Area efectiva.	20
Impedancia terminal.	23
1.2 GUIAS DE ONDA.	39
Ondas TE y TM en guias de ondas rectangulares.	39
Ondas TE y TM en guias de onda circulares.	59
Las guias de onda como lineas de transmisión.	67
CAPITULO DOS. ANALISIS TEORICO DE UNA ANTENA DIELECTRICA.	77
2.1 INTRODUCCION.	78
2.2 MODOS DE PROPAGACION EN UNA VARILLA DIELECTRICA.	81
Designación de los modos de propagación.	83
Campos en una varilla dieléctrica.	88
2.3 PATRON DE RADIACION.	94
Cálculo de la ganancia.	103
2.4 DATOS DE DISEÑO PARA UNA ANTENA DIELECTRICA.	106
CAPITULO TRES. DISEÑO Y CONSTRUCCION.	108
CAPITULO CUATRO. PRUEBAS Y RESULTADOS.	116

	Pag.
4.1 MEDICION DEL PATRON DE RADIACION.	117
4.2 MEDICION DE LA GANANCIA.	118
4.3 MEDICION DEL SWR Y LA IMPEDANCIA.	122
CAPITULO CINCO. ANALISIS COMPARATIVO DE UNA ANTE- NA DIELECTRICA CON OTROS TIPOS DE ANTENAS EMPLEADAS EN MICROONDAS.	128
5.1 MEDICION DEL PATRON DE RADIACION.	131
Antena tipo corneta.	131
Antena parabólica.	131
5.2 MEDICION DE LA GANANCIA.	133
Antena tipo corneta.	133
Antena parabólica.	133
5.3 MEDICION DE LA IMPEDANCIA.	134
Antena tipo corneta.	134
Antena parabólica.	135
5.4 COMPARACION.	135
CAPITULO SEIS. COSTO Y CONCLUSIONES.	137
APENDICE A. TEOREMA DE LA RECIPROCIDAD.	141
APENDICE B. FUNCIONES DE BESSEL.	145
APENDICE C. MEDIOS ANISOTROPICOS.	150
BIBLIOGRAFIA.	153

## I N T R O D U C C I O N

Una de las preocupaciones más importantes del hombre ha sido el comunicarse rápida y eficazmente de un punto a otro. En sus orígenes los sistemas que hacían posible esta comunicación eran mecánicos y físicos los cuales sólo podían transmitir muy poca información y a distancias relativamente cortas. Estos sistemas fueron superados con la introducción de sistemas eléctricos de comunicación, tales como el telégrafo y el teléfono.

Un gran avance a este respecto fue dado por James C. Maxwell al investigar y describir las características teóricas de las ondas electromagnéticas que fueron comprobadas y utilizadas 25 años después por Henrich Hertz.

Maxwell dio la introducción a las corrientes de desplazamiento que generan tanto los campos electromagnéticos como los fenómenos de las ondas electromagnéticas, además descubrió que la velocidad de propagación de estas ondas en el espacio libre es aproximadamente igual a la velocidad de la luz.

La rapidez de transmisión de las ondas electromagnéticas y las necesidades concretas que iban surgiendo en los países avanzados dio origen a que el hombre desarrolla

rá una inmensa tecnología alrededor de la transmisión, propagación y recepción de estas ondas.

Hasta más o menos 1935 la mayor parte de las comunicaciones se llevaban a cabo en un rango de 0 a 300 Mhz.- A partir de aquí y por los problemas surgidos a raíz de la primera y segunda guerra mundial se inicia una serie de -- avances tecnológicos que amplían el rango de frecuencias - utilizadas hasta entonces. Algunos de estos avances fueron: las primeras versiones del magnetron, tipos especiales de triodos, el tubo de ondas progresivas de Kofner, el tubo - de onda viajera y el klystron que introdujeron a las comunicaciones electromagnéticas un tipo de ondas que tienen - amplia aplicación en el comercio, el transporte y en la divulgación de la información; las microondas.

Se dice que un sistema trabaja en la frecuencia - de las microondas cuando su frecuencia de operación es superior a los 900 Mhz.

La utilización tan grande que han tenido las microondas es debido a que ofrecen varias ventajas sobre - - otros sistemas, entre otras podemos mencionar las siguientes:

1. ALTA DIRECTIVIDAD DE SUS ANTENAS. Debido a - que la longitud de onda es pequeña la ganancia de la antena es grande pues es inversamente proporcional a la longitud de onda.

2. ADAPTABILIDAD PARA LA TRANSMISION DE BANDAS ANCHAS. En virtud de que la frecuencia en la región de las microondas es grande, la relación del ancho de banda ocupado por las señales de telefonía o televisión respecto a la frecuencia de la portadora de microondas es pequeña. Esto facilita el diseño de componentes y equipo de microondas.

3. RELACION SEÑAL.-RUIDO. Dado que la directividad de las antenas puede hacerse muy aguda, en la propagación de las microondas existe poca interferencia, ya que cuando la frecuencia aumenta el ruido disminuye.

Por otra parte se tiene que un sistema de comunicación en su forma más simple está formado por un transmisor, el medio de propagación y un receptor. La última etapa en la emisión y la primera en la recepción corresponde a un sistema de antenas.

Las antenas son componentes esenciales de un sistema de comunicación, las antenas se acoplan al transmisor y al receptor por medio de una línea de transmisión. La función principal de una antena es la de transferir energía de la línea alimentadora al espacio libre con el máximo de eficiencia y/o recoger la energía del espacio libre para transferirla a la línea de transmisión, otra función de la antena es dirigir la energía en las direcciones deseadas y suprimir la radiación en las direcciones no deseadas o sea

distribuir la energía con un patrón definido. La forma y las dimensiones de una antena dependen del uso que se le quiera dar.

Generalmente en microondas las antenas o arreglos de antenas son construídas de un material conductor, por ejemplo las antenas parabólicas y las antenas tipo corneta; sin embargo se tienen otros materiales que de acuerdo a sus características de propagación son empleados en la fabricación de antenas.

El presente trabajo contiene datos de diseño, con sideraciones de construcción y pruebas de una antena elaborada de un material no conductor, por lo que recibe el nombre de antena dieléctrica. El trabajo incluye además: los parámetros de una antena, un análisis del tipo de línea de transmisión que alimenta a la antena, un breve análisis de los modos de propagación en un dieléctrico y una comparación con otros tipos de antenas empleadas en microondas.

Aunque la antena diseñada y construida en este trabajo está destinada para utilizarse en pruebas de laboratorio, no se descarta la posibilidad de que los elementos de diseño sean tomado en cuenta para construir antenas dieléctricas cuya principal aplicación podría ser en el campo de VHF y en algunos tipos de radares.

## **CAPITULO UNO**

### **CONCEPTOS GENERALES DE UNA ANTENA Y SU SISTEMA ALIMENTADOR.**

## 1.1 PARAMETROS DE UNA ANTENA.

Una antena es un elemento transductor de energía electromagnética a energía guiada en la transmisión y de energía guiada a energía electromagnética en la recepción. Es parte fundamental de un sistema de comunicaciones. Una antena tiene características propias que la definen tales como el patrón de radiación, la ganancia, la impedancia -- etc., los cuales nos proporcionan los datos necesarios para utilizarla en forma óptima, dichos parámetros nos facilitan comparar y valorar los diferentes tipos de antenas.

### Patrón de radiación.

Se entiende por patrón de radiación de una antena la forma de como irradia su energía hacia diferentes direcciones, tomando en cuenta la potencia, la intensidad de campo eléctrico o magnético en cada punto, al considerar el patrón de radiación se toma una distancia constante en cada dirección (punto).

Una antena trasmisora en el espacio libre generalmente se representa por un radiador puntual situado en el origen de un sistema de coordenadas esféricas (fig. 1.1), donde la energía es radiada en forma radial, entonces la relación del flujo de energía por unidad de área o el vector de Poynting de la fuente puntual tiene sólo componente radial.

Una gráfica del vector de Poynting para una distancia constante en función de  $\theta$  o de  $\phi$  es usualmente conocido como patrón de radiación en potencia, en la fig. 1.2- se muestra el trazo polar del patrón donde se observa que la magnitud del vector de Poynting es proporcional a la longitud del radio vector ( $r$ ).

Si la componente del vector de Poynting ( $P=Pr$ ) es expresada en watts por metro cuadrado, la gráfica corresponde a un patrón normalizado.

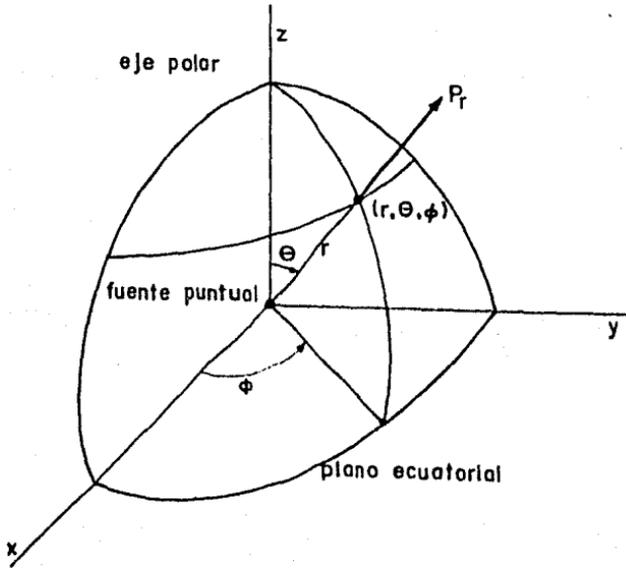


Fig. 1.1. Coordenadas esféricas para una fuente puntual.

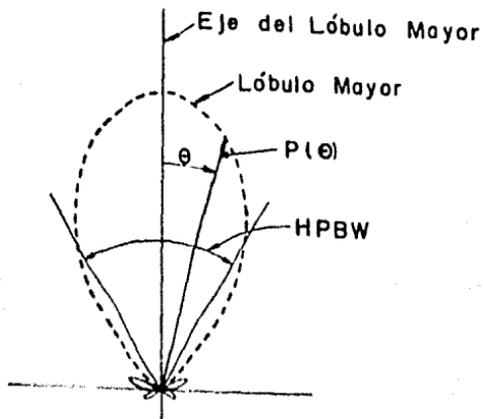


Fig. 1.2. Patrón de potencia en coordenadas polares.

Por otro lado si es expresado en términos de un cierto valor en algún punto (dirección) de referencia la gráfica corresponde a un patrón relativo; si se toma el punto de referencia como el valor máximo, entonces la gráfica recibe el nombre de patrón normalizado. Un patrón normalizado es aquel en el cual su máximo es igual a uno, como se muestra en la fig. 1.3.

Si el vector de Poynting es conocido en todos los puntos de una esfera de radio  $r$  de una fuente puntual en un medio sin pérdidas, la potencia radiada total por la fuente es igual a:

$$W = \iint Pr dS \quad (1.1)$$

Donde  $W$  es la potencia radial total.

$Pr$  es la componente radial del vector de Poynting ( $\text{watts/m}^2$ )  
 $dS$  es el elemento diferencial infinitesimal de área de una esfera ( $r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ ).

Multiplicando la densidad de potencia ( $Pr$ ) por el cuadrado de la distancia en que es medido, se obtiene la intensidad  $U$ , esto es:

$$r^2 Pr = U \quad (1.2)$$

Si  $Pr$  es expresado en watts por metro cuadrado la intensidad de radiación  $U$  es expresada en watts por unidad de ángulo sólido ( $\text{watts/rad}^2$ ). La intensidad de radiación es independiente del radio pero es función de  $\theta$  y de  $\phi$ . Sustituyendo (1.2) en (1.1) se tiene:

$$W = \iint U \sin \theta d\theta d\phi = \iint U d\Omega \quad (1.3)$$

donde  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  es el elemento del ángulo sólido. Por lo tanto la potencia radiada total está dada por la integral de la intensidad de radiación  $U$  sobre el ángulo sólido ( $4\pi$  radianes al cuadrado). El patrón de  $U$  en función del ángulo sólido es el patrón de la intensidad de radiación.

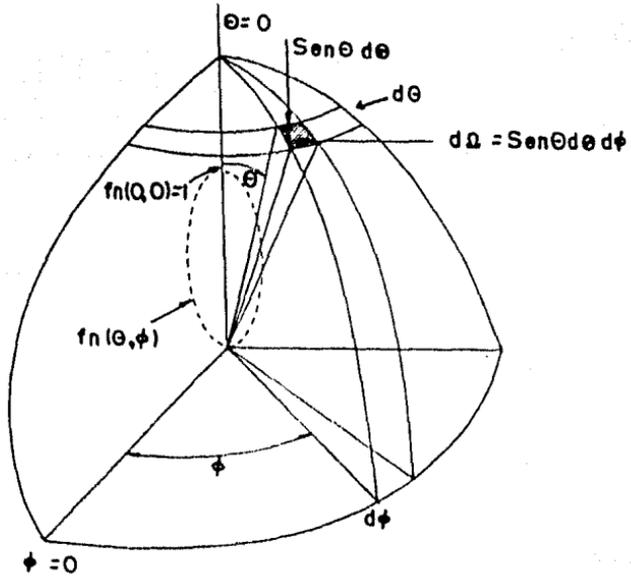


Fig. 1.3. Patrón de radiación normalizado.

En función de la intensidad de campo eléctrico la región de radiación (zona lejana) de cualquier tipo de antena en el espacio libre está dada por:

$$\vec{E} = j \frac{\omega \mu_0 I_0 \ell_{\text{eff}}}{4\pi r} f_n(\theta, \phi) e^{j(\omega t - \beta r)} \quad (1.4)$$

$$\vec{E} = j \frac{30\beta I_0 \ell_{\text{eff}}}{r} f_n(\theta, \phi) e^{j(\omega t - \beta r)}$$

donde  $I_0$  es la corriente fluyendo en las terminales de la antena.

$\beta$  es la constante de fase.

$\omega$  es la velocidad angular ( $2\pi f$ ).

$f_n(\theta, \phi)$  corresponde el patrón normalizado de la antena.

$\ell_{\text{eff}}$  es la longitud efectiva.

Se ha considerado además un sistema de coordenadas esféricas ( $r, \theta, \phi$ ).

Directividad.

La directividad de una antena es la característica de dirigir la radiación que emite la antena hacia una dirección determinada con mayor intensidad que hacia el resto de las otras direcciones. La directividad es una

constante que se especifica para una dirección particular. Esta cantidad es definida por la siguiente relación:

$$D = \frac{U_m}{U_o} \quad (1.5)$$

donde  $U_m$  es la intensidad de radiación máxima.

$U_o^1$  es la intensidad de radiación promedio de cualquier tipo de antena y es igual a  $W/4\pi$ . Entonces de (1.5) se tiene:

$$D = \frac{4 \pi U_m}{W} \quad (1.6)$$

Como la intensidad de radiación es función de  $(\theta, \phi)$ ; o sea que  $U = U_a f(\theta, \phi)$ , entonces la potencia radiada total de acuerdo a (1.3) es:

$$W = \iint U_a f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.7)$$

donde  $U_a$  es una constante.

por lo tanto:

$$D = \frac{4\pi U_a f(\theta, \phi)_{\max}}{\iint U_a f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi} \quad (1.8)$$

$$D = \frac{4\pi}{\iint f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi} \cdot f(\theta, \phi)_{\max}$$

---

1.  $U_o$  es también referida como la intensidad de radiación de una fuente isotrópica.

El denominador de (1.8) se define como el área --  
del haz:

$$B = \frac{\iint f(\theta, \vartheta) \operatorname{sen} \theta d\theta d\vartheta}{f(\theta, \vartheta)_{\max}} \quad (1.9)$$

De (1.8) y (1.5) se tiene:

$$D = \frac{U_m}{U_0} = \frac{4\pi}{B} \quad (1.10)$$

De aquí.

$$4\pi U_0 = U_m B ; B = 4\pi \frac{U_0}{U_m}$$

entonces

$$B = 4\pi \frac{U_0}{U_m} (\text{rad.})^2 = 41,253 \frac{U_0}{U_m} (\text{grad.})^2 \quad (1.11)$$

Si la intensidad de radiación  $U$  es máxima sobre el área del haz, esto es, si  $U = U_{\max}$  la potencia a través del área del haz es igual a la potencia radiada por la fuente. Bajo estas condiciones el área del haz  $B$  es el ángulo sólido a través del cual toda la potencia radiada fluye. Además para patrones típicos el área del haz es aproximadamente igual al ancho del haz para los puntos de media potencia.

Considerando un patrón unidireccional como el que se muestra en la fig. 1.4, dicho patrón es una figura de revolución sobre el eje y donde el ángulo  $\theta'$  corresponde

al área del haz.

De acuerdo a esto se tiene un método aproximado - en cálculo de la directividad para un patrón de radiación, basado en la estimación del área del haz correspondiente - al ancho del haz para los puntos de media potencia en la - dirección  $(\theta, \phi)$  para el patrón en los planos E y H. Si  $\theta_1$  es el ancho del haz para los puntos de media potencia en - un plano y  $\phi_1$  es el ancho del haz para el otro plano, en- - tonces:

$$B = \theta_1 \phi_1 \quad (1.12)$$

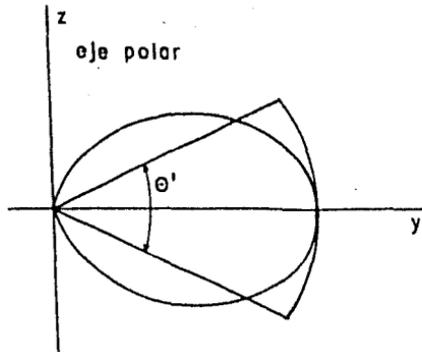


Fig. 1.4.

Sustituyendo (1.12) en (1.10) se tiene:

$$D \approx \frac{4\pi}{\theta_1 \phi_1} \quad (1.13)$$

donde  $\theta$  y  $\theta_1$  están en radianes.

o bien

$$D = \frac{4\pi}{(0.117453)^2} \cdot \frac{1}{\theta_1 \theta_1} = \frac{41253}{\theta_1 \theta_1} \quad (1.14)$$

Ganancia.

La ganancia de una antena se define por la relación:

$$G = \frac{\text{intensidad de radiación máxima}}{\text{intensidad de radiación máxima de una antena de referencia con la misma potencia de entrada.}} \quad (1.15)$$

Cualquier tipo de antena puede ser tomada por referencia, la ganancia incluye el efecto de pérdidas tanto de la antena en estudio como de la antena de referencia.

Cuando la antena de referencia es una fuente isotrópica, con una eficiencia del 100%, la ganancia definida para la antena en consideración es conocida por la ganancia con respecto a una fuente isotrópica y es designada -- por  $G_0$ , esto es:

$$G = \frac{\text{intensidad de radiación de una antena en consideración.}}{\text{intensidad de radiación de una fuente isotrópica con la misma potencia de entrada.}} \quad (1.16)$$

Sea  $U_m'$  la intensidad de radiación máxima de una antena en consideración, la cual es referida al valor de la intensidad de radiación de una antena isotrópica con una eficiencia del 100%, por el factor  $k$ , esto es:

$$U_m' = kU_m \quad (1.17)$$

donde  $0 \leq k \leq 1$ .

Por lo tanto (1.16) se expresa en la siguiente forma:

$$G_o = k \frac{U_m}{U_o} \quad (1.18)$$

en este caso  $U_o$  es la intensidad de radiación de una fuente isotrópica sin pérdidas con la misma potencia de entrada. Si  $W$  es la potencia de entrada,  $U_o = W/4\pi$ ; pero como la relación  $U_m/U_o$  es la directividad entonces (1.18) se convierte en:

$$G_o = kD \quad (1.19)$$

La ganancia de una antena con respecto a una fuente isotrópica es igual a la directividad si la antena tiene una eficiencia del 100% ( $k=1$ ); pero es menor que la directividad cuando la antena tiene pérdidas ( $k < 1$ ).

La directividad o ganancia en una dirección paralela al cual la intensidad de radiación no es máxima es designada especificando el ángulo  $\theta$  en que es medido, por el símbolo  $D(\theta, \theta)$  o  $G(\theta, \theta)$ ; esto es:

$$D(\theta, \vartheta) = \frac{U}{U_m} D \quad (1.20)$$

$$G_o(\theta, \vartheta) = \frac{U}{U_m} G_o \quad (1.21)$$

donde  $U$  es la intensidad de radiación en la dirección  $(\theta, \vartheta)$ .

$U_m$  es la intensidad de radiación máxima.

Tanto la ganancia como la directividad en la práctica se expresan en decibeles; o sea:

$$\text{directividad } Db = 10 \log D \quad (1.22)$$

$$\text{ganancia } Db = 10 \log G \quad (1.23)$$

**Eficiencia.**

La eficiencia de una antena se define como la relación de la potencia radiada por una antena a la potencia de alimentación, esta última se forma de la potencia radiada y la potencia de pérdida en la antena, o sea:

$$k = \frac{P_r}{P_r + P_p}$$

pero como  $P_r = R_r I^2$  y  $P_p = R_p I^2$

entonces:

$$k = \frac{R_r}{R_r + R_p} \quad (1.24)$$

donde  $R_p$  corresponde a la resistencia de pérdida debido a las corrientes en los puntos de alimentación de la antena.

$R_r$  es la resistencia de radiación de la antena.

Área efectiva.

El concepto de área efectiva tiene un significado especial en la teoría de antenas receptoras.

El área o apertura efectiva de una antena se define en función de la ganancia por la relación:

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} G \quad (1.25)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda empleada en la transmisión.

El área efectiva también se puede definir en función de la potencia, como la relación de la potencia disponible en las terminales de la antena (energía total recibida) a la potencia por unidad de área (densidad de energía) de una onda polarizada adecuadamente en el punto de recepción:

$$A_e = \frac{P_i}{P_0} \quad (1.26)$$

siendo  $A_e$  el área efectiva,

$P_0$  la densidad de energía ( $P/4\pi d^2$ ),

$P_i$  la energía total recibida ( $P_0 A$ ),

$A$  es el área total de la antena.

Cuando se emplea la ganancia en (1.25) se supone que toda la potencia disponible se entrega a la carga (caso ideal). Sin embargo cuando se tienen pérdidas, el área efectiva expresada por (1.26) representa la potencia útil entregada a la carga.

En la ecuación (1.4) aparece el término  $l_{\text{eff}}$ , que representa la longitud efectiva; la cual es una expresión empleada para indicar la eficiencia de una antena ya sea como radiadora o colectora de energía electromagnética.

La longitud efectiva de una antena transmisora es aquella longitud de una antena lineal que tiene una corriente  $I(0)$  en todos sus puntos y que irradia la misma intensidad de campo ( $E$ ) en una dirección perpendicular a la antena considerada. Esto es:

$$l_{\text{eff}}(\text{trans}) = \frac{1}{I(0)} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} I(z) dz \quad (1.27)$$

donde  $I(0)$  es la corriente en las terminales de la antena.

La longitud efectiva de una antena receptora se define en función del voltaje en circuito abierto que aparece en las terminales de la antena con una intensidad de campo ( $E$ ) recibida, por la relación:

$$l_{\text{eff}}(\text{recep}) = \frac{V_{\text{ca}}}{E} \quad (1.28)$$

donde  $V_{ca}$  es el voltaje en circuito abierto en las terminales de la antena producido por un campo excitador uniforme ( $E$ ) paralelo a la antena (el signo menos está conforme a la convención de los sistemas cartesianos de la mano derecha), siendo:

$$V_{ca} = - \frac{E(z)}{I(0)} \int I(z) dz \quad (1.29)$$

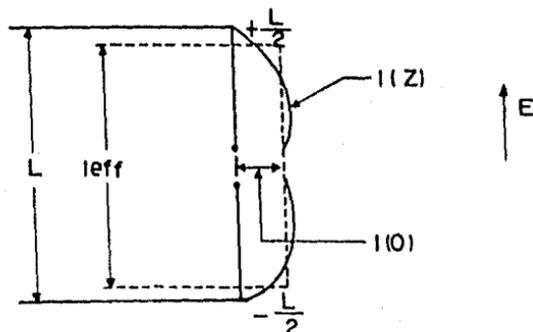


Fig. 1.5.

A partir del teorema de reciprocidad<sup>2</sup> se demuestra que las longitudes efectivas de transmisión y de recepción son iguales.

2. Ver Apéndice A.

### Impedancia terminal.

Si una antena está aislada y se considera libre de pérdidas, su impedancia terminal es la misma que la impedancia propia de la antena. Esta impedancia tiene una parte real conocida como resistencia de radiación y una parte imaginaria llamada reactancia propia. La impedancia propia es la misma para la transmisión y para la recepción.

En la Fig. 1.6 se tiene una antena delgada lineal con su extremo inferior localizado en el origen del sistema de coordenadas, la antena está situada en el aire o el vacío y tiene una distribución senoidal de corrientes con una corriente máxima  $I_1$ . La longitud de la antena es  $L$  y se considerará sólo para múltiplos de  $\lambda/2$  así que la distribución de corriente es simétrica con una corriente máxima entre sus terminales la corriente a una distancia  $z$  del origen es de la forma:

$$I_z = I_1 \operatorname{sen} \beta z \quad (1.30)$$

donde  $\beta$  es la constante de fase.

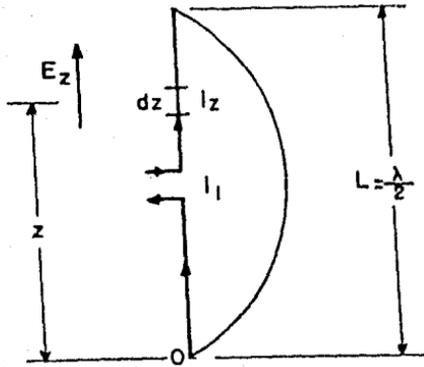


Fig.1.6. Antena lineal de media longitud de onda.

Quando se aplica una fem  $V_{11}$  a las terminales de la antena, esta produce una corriente  $I_z$  a una distancia  $z$  del extremo inferior de la antena, a la relación de  $V_{11}$  a  $I_z$  se le denomina impedancia de transferencia siendo:

$$Z_{1z} = \frac{V_{11}}{I_z} \quad (1.31)$$

Si ahora se aplica un campo eléctrico paralelo  $E_z$  a la antena, este campo produce una corriente en la antena ( $I_1$ ); además dicho campo induce un campo ( $E_{zi}$ ) en el conductor para que satisfaga las condiciones de fronte-

ra. En un conductor perfecto el campo total es cero, o sea que  $E_{zi} = E_z$  por lo tanto  $E_{zt} = E_z + E_{zi} = 0$ . La fem  $dV_z$  producida por el campo inducido sobre una longitud  $dz$  es  $-E_z dz$  o

$$dV_z = -E_z dz \quad (1.32)$$

Si la antena es corto-circuitada la fem  $dV_z$  produce una corriente  $dI$  en las terminales de la antena; entonces la impedancia de transferencia está dada por:

$$Z_{z1} = \frac{dV_z}{dI_1} \quad (1.33)$$

Aplicando el teorema de reciprocidad para dos puntos de la misma antena, se tiene que las impedancias de (1.31) y (1.33) son iguales. O sea que:

$$\frac{V_{11}}{I_2} = Z_{1z} = Z_{z1} = \frac{dV_z}{dI_1} = \frac{-E_z dz}{dI_1} \quad (1.34)$$

y

$$V_{11} dI_1 = -I_2 E_z dV_z \quad (1.35)$$

La impedancia terminal de la antena está dada por la relación:

$$Z_{11} = \frac{V_{11}}{I_1} \quad (1.36)$$

donde  $I_1$  es la corriente total.

La impedancia  $Z_{11}$  es constante e independiente de la amplitud de la corriente. Por lo tanto  $Z_{11}$  puede expresarse como la relación infinitesimal de la fem  $dV_{11}$  a la corriente infinitesimal  $dI_1$  en las terminales de la antena, o sea:

$$Z_{11} = \frac{V_{11}}{I_1} = \frac{dV_{11}}{dI_1} \quad (1.37)$$

para el cual:

$$V_{11}dI_1 = I_1dV_{11} \quad (1.38)$$

Sustituyendo (1.38) en (1.35):

$$dV_{11} = - \frac{I_z}{I_1} E_z dz \quad (1.39)$$

Integrando (1.39), sobre la longitud de la antena se tiene:

$$V_{11} = - \frac{1}{I_1} \int_0^L I_z E_z dz \quad (1.40)$$

donde  $V_{11}$  es la fem que se aplica a las terminales de la antena y produce una corriente  $I_1$ . La impedancia terminal  $Z_{11}$  es entonces:

$$Z_{11} = \frac{V_{11}}{I_1} = - \frac{1}{I_1^2} \int_0^L I_z E_z dz \quad (1.41)$$

donde  $E_z$  es la componente  $z$  del campo eléctrico originado por la corriente propia de la antena. Es conveniente indicar explícitamente este tipo de campo por el símbolo  $E_{11}$  - en lugar de  $E_z$ . Llevando el valor de  $I_z$  de (1.30) a (1.41), obtenemos finalmente la expresión para la impedancia propia:

$$Z_{11} = - \frac{1}{I_1} \int_0^L E_{11} \operatorname{sen} \beta_z dz \quad (1.42)$$

Para evaluar (1.42) se necesita conocer la componente del campo  $E_{11}$  en la antena.

Expresando el campo eléctrico en función del potencial escalar retardado debido a las cargas en la antena; se tiene la siguiente relación:

$$\vec{E} = - \nabla V - j\omega \vec{A} \quad (1.43)$$

Y en forma más particular para la componente  $z$  de  $E$ :

$$E_z = - \frac{\partial V}{\partial z} - j\omega A_z \quad (1.44)$$

Refiriéndose a la fig. 1.7, la antena coincide -- con el eje  $z$  y un punto de la antena es designado por  $z_1$ . -- Un punto en el espacio libre (punto de observación) está -- dado por las coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , las otras -- distancias son también mostradas.

El potencial escalar en cualquier punto está dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho}{r} dr \quad (1.45)$$

donde  $\rho$  es la densidad volumétrica de carga.

$r$  es la distancia del elemento de carga al punto  $P$ .

De la fig. 1.7.

$$r_0 = \sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}$$

En el caso de un alambre delgado de longitud  $L$ , -  
la ecuación (1.45) se reduce a:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\rho_L}{r} dz_1 \quad (1.46)$$

donde  $\rho_L$  es la distribución lineal de carga en el alambre.

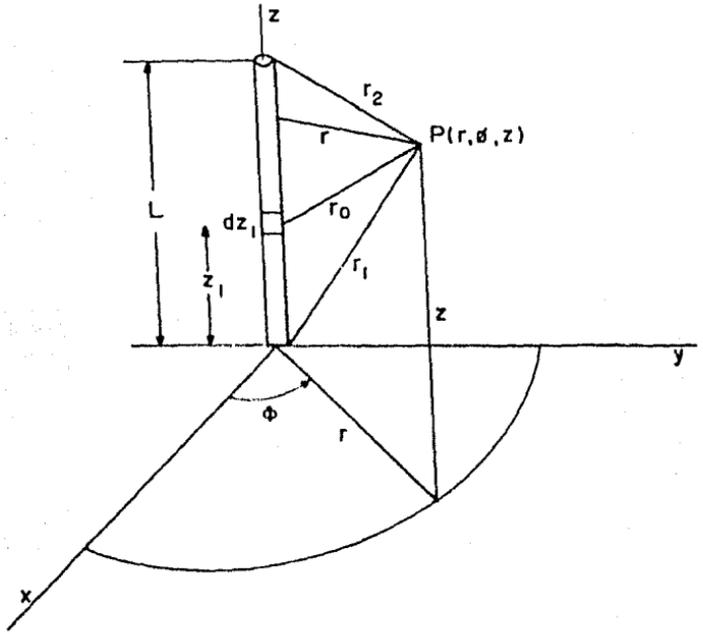


Fig.1.7. Relación de coordenadas de una antena lineal.

Ahora el vector potencial en cualquier punto está dado por:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}}{r} dr \quad (1.47)$$

donde  $\vec{J}$  es la densidad de corriente (amp./m<sup>2</sup>)

En el caso de un alambre delgado (1.47) se reduce-

a:

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^L \frac{I z_1}{r} dz_1 \quad (1.48)$$

donde  $I z_1$  es la corriente en el alambre.

Por la relación de continuidad entre la corriente y la distribución lineal de carga:

$$\rho_L = - \int \frac{\partial I_{z_1}}{\partial z_1} dt \quad (1.49)$$

Como la corriente en la antena tiene una distribución senusoidal dada por (1.30) e introduciendo el factor de retardo del tiempo se tiene:

$$I_{z_1} = I_1 \text{sen} \beta z_1 e^{j\omega(t-r/c)} \quad (1.50)$$

Sustituyendo (1.50) en (1.49) y ejecutando las -- operaciones indicadas:

$$\rho_L = j \frac{\beta I_1}{\omega} \cos \beta z_1 e^{j\omega(t-r/c)} \quad (1.51)$$

Llevando (1.51) a (1.46) y notando que  $\beta/\omega=1/c$  se obtiene:

$$V = j \frac{I_1 e^{j\omega t}}{4\pi\epsilon_0 c} \int_0^L \frac{\cos \beta z_1 e^{-j\beta r}}{r} dz_1 \quad (1.52)$$

En la misma forma llevando (1.50) a (1.48) se tiene:

$$A = \frac{\mu_0 I_1 e^{j\omega t}}{4\pi} \int_0^L \frac{\text{sen}\beta z_1 e^{-j\beta r}}{r} dz_1 \quad (1.53)$$

Usando las relaciones:

$$\cos\beta z_1 = \frac{1}{2} \left( e^{j\beta z_1} + e^{-j\beta z_1} \right) \quad (1.54)$$

$$\text{sen}\beta z_1 = \frac{1}{2j} \left( e^{j\beta z_1} - e^{-j\beta z_1} \right) \quad (1.55)$$

Por lo tanto de (1.52):

$$V = j \frac{I_1 e^{j\omega t}}{8\pi\epsilon_0 C} \int_0^L \frac{e^{-j\beta(z_1+r)} + e^{j\beta(z_1-r)}}{r} dz_1 \quad (1.56)$$

y de (1.53):

$$A_z = j \frac{\mu_0 I_1 e^{j\omega t}}{8\pi} \int_0^L \frac{e^{-j\beta(z_1+r)} - e^{j\beta(z_1-r)}}{r} dz_1 \quad (1.57)$$

Sustituyendo (1.56) y (1.57) en (1.44) se obtiene la componente  $z$  del campo eléctrico en la antena:

$$E_z = -j \frac{I_1 e^{j\omega t}}{8\pi\epsilon_0 C} \int_0^L \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{e^{-j\beta(z_1+r)} + e^{j\beta(z_1-r)}}{r} \right] dz_1 \right] +$$

$$\frac{\omega\mu_0 I_1 e^{j\omega t}}{8\pi} \int_0^L \frac{e^{-j\beta(z_1+r)} - e^{j\beta(z_1-r)}}{r} dz_1 \quad (1.58)$$

$$E_z = -j \frac{I_1 e^{j\omega t}}{4\pi\epsilon_0 C} \left( \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} + \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2} \right) \quad (1.59)$$

donde:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (1.60)$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + (L-z)^2} \quad (1.61)$$

El factor  $1/4 \pi\epsilon_0 C = 120\pi/4\pi = 30$  y tomando el valor absoluto del factor tiempo; esto es  $e^{j\omega t} = 1$ , la ecuación (1.59) se convierte en:

$$E_z = -j30I_1 \left( \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} + \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2} \right) \quad (1.62)$$

En la antena (1.60) y (1.61) se convierten en:

$$r_1 = z \quad (1.63)$$

$$r_2 = L - z \quad (1.64)$$

Sustituyendo (1.63) y (1.64) en (1.62) y convirtiendo el valor de la componente  $z$  del campo en  $E_{11}$  en la antena se tiene:

$$E_{11} = -j30I \left[ \frac{e^{-j\beta z}}{z} + \frac{e^{-j\beta(L-z)}}{L-z} \right] \quad (1.65)$$

Llevando (1.65) a (1.42), se obtiene la impedancia propia  $Z_{11}$  de una antena delgada lineal con un número impar de  $\lambda/2$  de longitud, o sea:

$$Z_{11} = j30 \int_0^L \left[ \frac{e^{-j\beta z}}{z} + \frac{e^{-j\beta(L-z)}}{L-z} \right] \text{sen}\beta z dz \quad (1.66)$$

Aplicando la relación (1.55) a (1.66) se tiene:

$$Z_{11} = -15 \int_0^L \left[ \frac{e^{-j2\beta z - 1}}{z} - \frac{e^{-j\beta L} (e^{j2\beta z - 1})}{L-z} \right] dz \quad (1.67)$$

Para  $L = n\lambda/2$ , donde  $n = 1, 3, 5, \dots$ ,  $e^{-j\beta L} = e^{-j\pi n} = -1$  entonces la ecuación (1.67) se convierte en:

$$Z_{11} = -15 \int_0^L \left( \frac{e^{-j2\beta z - 1}}{z} + \frac{e^{j2\beta z - 1}}{L-z} \right) dz \quad (1.68)$$

$$Z_{11} = 15 \int_0^L \frac{1 - e^{-j2\beta z}}{z} dz + 15 \int_0^L \frac{1 - e^{j2\beta z}}{1-z} dz \quad (1.69)$$

Para la primera integral sea  $u=2\beta z$ ;  $du=2\beta dz$  y  $dz=du/2\beta$ . En el límite  $z=L$  para  $L=n\lambda/2$   $u=2\beta L=2\pi n$ , mientras el límite inferior es igual a cero; entonces la primera integral se transforma a:

$$15 \int_0^{2\pi n} \frac{1 - e^{-ju}}{u} du \quad (1.70)$$

Para la segunda integral  $v=2\beta(L-z)$ ;  $dv=-2\beta dz$  el límite inferior es  $2\pi n$ ; entonces la segunda integral se convierte en:

$$-15 \int_{2\pi n}^0 \frac{1 - e^{j(2\pi n - v)}}{v} dv = 15 \int_0^{2\pi n} \frac{1 - e^{-jv}}{v} dv \quad (1.71)$$

Las ecuaciones (1.70) y (1.71) son integrales definidas de forma idéntica, ya que sus límites son los mismos. Por lo tanto (1.71) se convierte en:

$$Z_{11} = 30 \int_0^{2\pi n} \frac{1 - e^{-ju}}{u} du \quad (1.72)$$

haciendo un cambio de variable  $w=jw$  (1.72) se transforma - en:

$$Z_{11} = 30 \int_0^{2\pi n} \frac{1 - e^{-w}}{w} dw \quad (1.73)$$

La integral de (1.73) es una integral exponencial con argumento imaginario y es designada por  $E_{in}(jy)$ .

$$E_{in}(jy) = \int_0^{jy} \frac{1 - e^{-w}}{w} dw \quad (1.74)$$

En este caso  $y=2\pi n$ . La ecuación (1.74) se expresa en términos del seno y coseno integral; esto es:

$$E_{in}(jy) = C_{in}(y) + jS_i(y) \quad (1.75)$$

donde:

$$C_{in}(y) = \int_0^y \frac{1 - \cos v}{v} dv = \ln \gamma - Ci(y)$$

$$C_{in}(y) = 0.577 + \ln \gamma - Ci(y)$$

siendo  $0.577 = \ln(\gamma) = C$  la constante de Euler ( $\gamma \cdot e^C = 1.781$ ).

$$S_i(y) = \int_0^x \frac{\sin v}{v} dv$$

Entonces la impedancia propia es:

$$Z_{11} = R_{11} + jX_{11} = 30 \left[ \text{Cin}(2\pi n) + j \text{Si}(2\pi n) \right] \text{ ohms}$$

$$Z_{11} = 30 \left[ 0.577 + \ln(2\pi n) - \text{Ci}(2\pi n) - j\text{Si}(2\pi n) \right] \text{ ohms} \quad (1.76)$$

La resistencia de radiación es:

$$R_{11} = 30 \left[ 0.577 + \ln(2\pi n) - \text{Ci}(2\pi n) \right] = 30 \text{ Cin}(2\pi n) \text{ ohms} \quad (1.77)$$

La reactancia propia es:

$$X_{11} = 30 \text{ Si}(2\pi n) \text{ ohms} \quad (1.78)$$

Los valores de  $\text{Si}(x)$  y  $\text{Cin}(x)$  se muestran en las tablas 1.1 y 1.2 respectivamente.

TABLA 1.1

TABLA DE Si (x)

x	Si (x)	x	Si (x)	x	Si (x)	x	Si (x)
0.0	0.0000	8.0	1.5742	16.0	1.6313	24.0	1.5547
0.2	0.1996	8.2	1.5981	16.2	1.6266	24.2	1.5476
0.4	0.3965	8.4	1.6198	16.4	1.6197	24.4	1.5415
0.6	0.5881	8.6	1.6386	16.6	1.6111	24.6	1.5367
0.8	0.7721	8.8	1.6538	16.8	1.6011	24.8	1.5333
1.0	0.9461	9.0	1.6650	17.0	1.5901	25.0	1.5315
1.2	1.1081	9.2	1.6721	17.2	1.5787	26.0	1.5449
1.4	1.2562	9.4	1.6747	17.4	1.5671	27.0	1.5803
1.6	1.3892	9.6	1.6732	17.6	1.5560	28.0	1.6047
1.8	1.5058	9.8	1.6676	17.8	1.5457	29.0	1.5973
2.0	1.6054	10.0	1.6584	18.0	1.5366	30.0	1.5668
2.2	1.6876	10.2	1.6460	18.2	1.5291	31.0	1.5418
2.4	1.7525	10.4	1.6311	18.4	1.5234	32.0	1.5442
2.6	1.8004	10.6	1.6144	18.6	1.5197	33.0	1.5703
2.8	1.8321	10.8	1.5965	18.8	1.5181	34.0	1.5953
3.0	1.8487	11.0	1.5783	19.0	1.5186	35.0	1.5969
3.2	1.8314	11.2	1.5604	19.2	1.5212	36.0	1.5751
3.4	1.8419	11.4	1.5436	19.4	1.5257	37.0	1.5506
3.6	1.8220	11.6	1.5284	19.6	1.5319	38.0	1.5455
3.8	1.7933	11.8	1.5154	19.8	1.5395	39.0	1.5633
4.0	1.7582	12.8	1.5050	20.0	1.5482	40.0	1.5870
4.2	1.7184	12.2	1.4976	20.2	1.5577	41.0	1.5949
4.4	1.6758	12.4	1.4933	20.4	1.5674	42.0	1.5808
4.6	1.6325	12.6	1.4922	20.6	1.5771	43.0	1.5583
4.8	1.5900	12.0	1.4943	20.8	1.5864	44.0	1.5481
5.0	1.5499	13.0	1.4994	21.0	1.5949	45.0	1.5587
5.2	1.5137	13.2	1.5071	21.2	1.6023	46.0	1.5798
5.4	1.4823	13.4	1.5172	21.4	1.6082	47.0	1.5918
5.6	1.4567	13.6	1.5291	21.6	1.6126	48.0	1.5845
5.8	1.4374	13.8	1.5423	21.8	1.6153	49.0	1.5651
6.0	1.4247	14.0	1.5562	22.0	1.6161	50.0	1.5516
6.2	1.4187	14.2	1.5704	22.2	1.6151		
6.4	1.4192	14.4	1.5841	22.4	1.6124		
6.6	1.4258	14.6	1.5970	22.6	1.6081		
6.8	1.4379	14.8	1.6085	22.8	1.6023		
7.0	1.4546	15.0	1.6182	23.0	1.5955		
7.2	1.4751	15.2	1.6258	23.2	1.5877		
7.4	1.4983	15.4	1.6309	23.4	1.5795		
7.6	1.5233	15.6	1.6336	23.6	1.5710		
7.8	1.5489	15.8	1.6337	23.8	1.5626		

TABLA 1.2

TABLA DE Cin (x)

x	Cin (x)	x	Cin (x)	x	Cin (x)	x	Cin (x)
0.0	0.0000	8.0	2.5342	16.0	3.3640	24.0	3.7936
0.2	0.0100	8.2	2.5649	16.2	3.3879	24.2	3.7977
0.4	0.0397	8.4	2.5994	16.4	3.4103	24.4	3.8004
0.6	0.0887	8.6	2.6370	16.6	3.4310	24.6	3.8020
0.8	0.1558	8.8	2.6772	16.8	3.4495	24.8	3.8027
1.0	0.2398	9.0	2.7191	17.0	3.4657	25.0	3.8030
1.2	0.3391	9.2	2.7619	17.2	3.4795	26.0	3.8070
1.4	0.4517	9.4	2.8047	17.4	3.4908	27.0	3.8373
1.6	0.5755	9.6	2.8467	17.6	3.4997	28.0	3.8985
1.8	0.7082	9.8	2.8871	17.8	3.5064	29.0	3.9664
2.0	0.8474	10.0	2.9253	18.0	3.5111	30.0	4.0118
2.2	0.9906	10.2	2.9605	18.2	3.5140	31.0	4.0252
2.4	1.1354	10.4	2.9923	18.4	3.5157	32.0	4.0265
2.6	1.2794	10.6	3.0205	18.6	3.5163	33.0	4.0434
2.8	1.4204	10.8	3.0446	18.8	3.5165	34.0	4.0873
3.0	1.5562	11.0	3.0647	19.0	3.5166	35.0	4.1441
3.2	1.6851	11.2	3.0808	19.2	3.5169	36.0	4.1881
3.4	1.8055	11.4	3.0932	19.4	3.5179	37.0	4.2060
3.6	1.9161	11.6	3.1023	19.6	3.5200	38.0	4.2077
3.8	2.0160	11.8	3.1083	19.8	3.5235	39.0	4.2163
4.0	2.1045	12.0	3.1119	20.0	3.5285	40.0	4.2471
4.2	2.1813	12.2	3.1137	20.2	3.5354	41.0	4.2941
4.4	2.2465	12.4	3.1143	20.4	3.5440	42.0	4.3365
4.6	2.3003	12.6	3.1144	20.6	3.5546	43.0	4.3580
4.8	2.3434	12.8	3.1145	20.8	3.5669	44.0	4.3615
5.0	2.3767	13.0	3.1154	21.0	3.5809	45.0	4.3653
5.2	2.4011	13.2	3.1175	21.2	3.5963	46.0	4.3860
5.4	2.4180	13.4	3.1214	21.4	3.6129	47.0	4.4243
5.6	2.4287	13.6	3.1275	21.6	3.6304	48.0	4.4641
5.8	2.4345	13.8	3.1358	21.8	3.6484	49.0	4.4886
6.0	2.4370	14.0	3.1469	22.0	3.6666	50.0	4.4948
6.2	2.4376	14.2	3.1605	22.2	3.6847		
6.4	2.4377	14.4	3.1768	22.4	3.7022		
6.6	2.4385	14.6	3.1955	22.6	3.7188		
6.8	2.4411	14.8	3.2163	22.8	3.7343		
7.0	2.4464	15.0	3.2390	23.0	3.7484		
7.2	2.4553	15.2	3.2631	23.2	3.7609		
7.4	2.4683	15.4	3.2881	23.4	3.7717		
7.6	2.4858	15.6	3.3136	23.6	3.7807		
7.8	2.5078	15.8	3.3391	23.8	3.7880		

Las ecuaciones (1.77) y (1.78) dan los valores de la impedancia para una antena delgada, simétrica lineal, - con un número impar de  $\lambda/2$  de longitud, la cual es excitada con una distribución senusoidal de corriente.

Cuando la longitud de la antena no está restringida a un número impar de  $\lambda/2$  y es excitada con una distribución senusoidal de corriente la resistencia propia está dada por la siguiente ecuación:

$$R = 30 \left[ \left(1 - \cot^2 \frac{\beta L}{2}\right) \text{Cin}^2 L + 4 \cot^2 \frac{\beta L}{2} \text{Cin} \beta L + 2 \cot \frac{\beta L}{2} (\text{Si} 2\beta L - 2 \text{Si} \beta L) \right] \text{ ohms} \quad (1.79)$$

Cuando L es pequeña, (1.79) se reduce a:

$$R_{11} = 5(\beta L)^2 \text{ ohms} \quad (1.80)$$

Para el caso especial en que  $L = n\lambda/2$ , para  $n=1,3,5,\dots$ , (1.79) se reduce a (1.77).

## 1.2 GUIAS DE ONDA.

Ondas TE y TM en guías de onda rectangulares.

Las guías de onda que se utilizan en la práctica toman usualmente la forma de prismas rectangulares o cilindros circulares. Existen otras formas pero en general es-

tas no ofrecen ventajas eléctricas sobre las formas más simples siendo además más alto su costo de fabricación.

Para determinar la configuración del campo electromagnético dentro de una guía se resuelven las ecuaciones de Maxwell sujetándolas a las condiciones de frontera en las paredes de la guía. Vamos a suponer que las paredes de la guía están cubiertas por un conductor perfecto - entonces las condiciones de frontera serán que  $E_{tan} = H_{nor} = 0$  en la superficie del conductor.

Las ecuaciones de Maxwell y de onda son escritas en la siguiente forma:

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} \quad ; \quad \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (1.81)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E} \quad ; \quad \nabla^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{H} \quad (1.82)$$

En coordenadas rectangulares y en la región interior de la guía (considerando que la región interior de la guía es el aire), las ecuaciones se descomponen en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j\omega\epsilon E_x & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega\mu H_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\epsilon E_y & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu H_y \end{aligned} \quad (1.83)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E} \quad (1.84)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{H}$$

Si la propagación es en la dirección  $z$ , entonces la variación de todas las componentes del campo a lo largo de dicha dirección se expresa en la forma  $e^{-\gamma z}$ , si además se combina el factor variable del tiempo con el factor de variación  $z$  resulta que:

$$e^{j\omega t} e^{-\gamma z} = e^{(j\omega t - \gamma z)} = e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}$$

De acuerdo a esto la variación según  $z$  de cada componente del campo es de la forma:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-\gamma z} \quad ; \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\gamma z} \quad (1.85)$$

Por lo tanto la derivada de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  con respecto a  $z$  existe, o sea que:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = -\gamma \vec{H}_0 e^{-\gamma z} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -\gamma \vec{E}_0 e^{-\gamma z}$$

Entonces aplicando estos resultados a las ecuaciones (1.83) se tiene:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \bar{\gamma} H_y = j\omega \epsilon E_x; \frac{\partial E_z}{\partial y} + \bar{\gamma} E_y = -j\omega \mu H_x$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} + \bar{\gamma} H_x = -j\omega \epsilon E_y; \frac{\partial E_z}{\partial x} = \bar{\gamma} H_x = j\omega \mu H_y \quad (1.86)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega \epsilon E_z; \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega \mu H_z$$

Las ecuaciones de onda para  $E_z$  y  $H_z$  son:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \bar{\gamma}^2 E_z = -\omega^2 \mu \epsilon E_z$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \bar{\gamma}^2 H_z = -\omega^2 \mu \epsilon H_z \quad (1.87)$$

Acomodando las expresiones (1.80) en función de las componentes  $E_z$  y  $H_z$  o sea resolviendo en forma simultánea estas ecuaciones resultan las siguientes expresiones:

$$H_x = -\frac{\bar{\gamma}}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} + j \frac{\omega \epsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$H_y = -\frac{\bar{\gamma}}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - j \frac{\omega \epsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{\bar{\gamma}}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - j \frac{\omega \mu}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\
 E_y &= \frac{\bar{\gamma}}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + j \frac{\omega \mu}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{1.88}$$

donde:  $h^2 = \bar{\gamma}^2 + \omega^2 \mu \epsilon$

Las ecuaciones (1.88) expresan las distintas componentes de los campos eléctricos y magnético dentro de la guía, donde se observa que si  $E_z$  y  $H_z$  son iguales a cero - todos los campos en el interior de la guía se anulan, por esta razón es conveniente dividir la solución en dos casos. En el primer caso habrá componente de campo eléctrico en la dirección de propagación ( $E_z$ ) pero no habrá componente longitudinal de campo magnético estas ondas son denominadas ondas transversales magnéticas (TM o E) debido a que el campo magnético es enteramente transversal. En el segundo caso se tiene componente de campo magnético en la dirección de propagación ( $H_z$ ) pero no hay componente de  $E_z$  - estas ondas son denominadas ondas transversales eléctricas (TE o H). Para una guía de onda rectangular (fig. 1.8) -- las condiciones de frontera son:

$$E_x = E_z = 0 \text{ en } y=0, y=b$$

$$E_y = E_z = 0 \text{ en } x=0, x=a$$

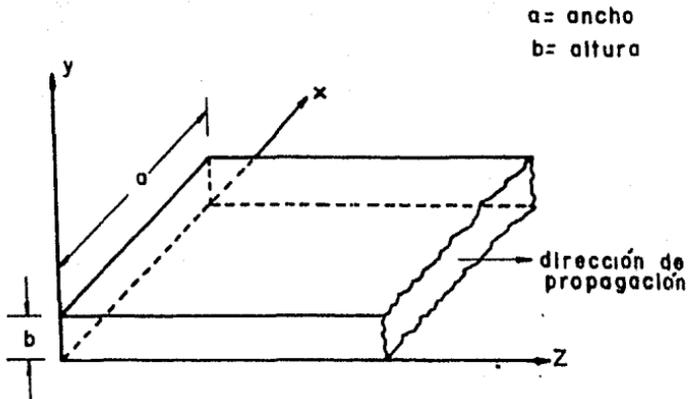


Fig. 1.8. Guía de onda rectangular.

Para obtener las ecuaciones del campo para el modo TM se hará uso de las ecuaciones (1.87), que son ecuaciones con derivadas parciales, las cuales se resuelven -- por la técnica usual de suponer una solución producto, este procedimiento conduce a dos ecuaciones diferenciales ordinarias cuyas soluciones son conocidas, para las ondas TM ( $H_z \neq 0$  y  $H_z = 0$ ), entonces el análisis se hace a partir de la componente longitudinal del campo eléctrico; o sea:

$$E_z(x, y, z) = E_z(x, y)e^{-\gamma z}$$

$$E_z = XY$$

Donde X y Y son funciones sólo de x y y respectivamente. Llevando (1.89) a (1.87) resulta:

$$y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + \bar{Y}^2 XY = -\omega^2 \mu \epsilon XY$$

Dividiendo entre  $XY$  y siendo  $h^2 = \bar{Y}^2 + \omega^2 \mu \epsilon$  se tiene:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + h^2 = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (1.90)$$

La ecuación (1.90) iguala una función de  $x$  a otra sólo de  $y$ , para que se cumpla esta relación para todos los valores de  $x$ , es necesario que cada una de estas funciones sea igual a una constante; o sea:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + h^2 = A^2 \quad (1.91)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -A^2 \quad (1.92)$$

Las soluciones de (1.91) y (1.92) son respectivamente:

$$X = C_1 \cos Bx + C_2 \operatorname{sen} Bx$$

$$Y = C_3 \cos Ay + C_4 \operatorname{sen} Ay$$

donde:  $B^2 = h^2 - A^2 \quad (1.93)$

Entonces de (1.89) se tiene ahora:

$$E_z = C_1 C_3 \cos A y \cos B x + C_1 C_4 \sin A y \cos B x + \\ + C_2 C_3 \cos A y \sin B x + C_2 C_4 \sin A y \sin B x \quad (1.94)$$

Las constantes  $C_1, C_2, C_3, C_4, A$  y  $B$  se seleccionan para cumplir con las condiciones de frontera, es decir:

$$E_z = 0 \quad \text{en } x=0, x=a, y=0, y=b$$

Si  $x=0$ , la expresión (1.94) se convierte en:

$$E_z = C_1 C_3 \cos A y + C_1 C_4 \sin A y = 0$$

Ahora para que  $E_z=0$ , para cualquier valor de  $y$ , es necesario que  $C_1=0$ , entonces la expresión (1.94) se reduce a:

$$E_z = C_2 C_3 \cos A y \sin B x + C_2 C_4 \sin A y \sin B x \quad (1.95)$$

Considerando la segunda condición, si  $y=0$ , la ecuación (1.95) es igual a:

$$E_z = C_2 C_3 \sin B x = 0$$

Para que  $E_z=0$  para cualquier valor de  $x$ , es posible lograrlo de dos maneras: que  $C_2$  o  $C_3$  sean igual a cero. Si  $C_2=0$  de la ecuación (1.95) resulta que  $E_z=0$  para cualquier valor de  $x$  y de  $y$ , entonces en su lugar se hará  $C_3=0$  y la expresión (1.95) se reduce a:

$$E_z = C_2 C_4 \operatorname{sen} A y \operatorname{sen} B x \quad (1.96)$$

Para conocer las constantes  $C=C_2 C_4$ ,  $A$  y  $B$  se tienen todavía dos condiciones de frontera que cumplir.

Si  $x=a$

$$E_z = C \operatorname{sen} B a \operatorname{sen} A y$$

Si  $E_z=0$  para todo valor de  $y$ , se requiere que la constante  $B$  tome el siguiente valor:

$$B = \frac{m\pi}{a} \quad \text{donde } m=1,2,3,\dots$$

Ahora si  $y=b$ :

$$E_z = C \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} A b$$

entonces para que  $E_z=0$  para todo valor de  $x$ ,  $A$  debe tener el valor:

$$A = \frac{n\pi}{b} \quad \text{donde } n=1,2,3,\dots$$

Por lo tanto la expresión final para  $E_z$  es:

$$E_z = \left[ C \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi}{a} \right) x \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{b} \right) y \right] e^{-\gamma z} \quad (1.97)$$

donde  $C$  es la constante de amplitud del campo.

Sustituyendo (1.97) en las ecuaciones (1.88) y poniendo  $\bar{y}=j\beta$ , se obtienen las demás componentes del campo electromagnético para una guía de onda rectangular bajo el modo TM, siendo:

$$\begin{aligned}
 E_x &= -j \frac{\beta C}{h^2} B \cos Bx \sin Ay \\
 E_y &= -j \frac{\beta C}{h^2} A \sin Bx \cos Ay \\
 H_x &= j \frac{\omega \epsilon C}{h^2} A \sin Bx \cos Ay \\
 H_y &= -j \frac{\omega \epsilon C}{h^2} B \cos Bx \sin Ay
 \end{aligned}
 \tag{1.98}$$

donde  $A = \frac{\pi n}{b}$  ;  $B = \frac{\pi m}{a}$  (1.99)

y  $h^2 = \bar{\gamma}^2 + \omega^2 \mu \epsilon$  (1.100)

Las ecuaciones (1.98) muestran que cada una de las componentes del campo electromagnético varían en función de  $x$  y de  $y$ . La variación en el tiempo a lo largo de la guía (dirección  $z$ ) se obtiene multiplicando las ecuaciones (1.98) por el factor  $e^{-j\omega t - \bar{\gamma}z}$ .

En la obtención del campo electromagnético en el interior de la guía de onda fué necesario restringir las constantes  $A$  y  $B$  a los valores dados por (1.99). En estas expresiones  $a$  y  $b$  son la anchura y la altura de la guía y  $m$  y  $n$  son números enteros que representan el número de medias longitudes de onda a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente. De (1.93):

$$A^2 + B^2 = h^2 \tag{1.101}$$

donde  $h$  está definido por la expresión (1.100) Sustituyendo (1.101) en (1.100) se tiene:

$$\bar{\gamma} = \sqrt{h^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = \sqrt{A^2 + B^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \quad (1.102)$$

Tomando en cuenta los valores de  $A$  y  $B$  dados por (1.99) se tiene:

$$\bar{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = \alpha + j\beta \quad (1.103)$$

siendo  $\alpha$  la constante de atenuación de la guía.

$\beta$  la constante de fase de la guía.

La ecuación (1.103) define la constante de propagación para una guía de onda rectangular bajo el modo TM.- En bajas frecuencias el término  $\omega^2 \mu \epsilon$  es pequeño y la constante de propagación es real, o sea  $\bar{\gamma} = \alpha$ , esto significa que no hay propagación a lo largo de la guía. Sin embargo al existir frecuencias mayores se alcanza un valor de una frecuencia que hará que la constante de propagación sea -- igual a cero, a este límite se le conoce como condición de corte. Entonces para una frecuencia mayor que la de corte, la constante de propagación es imaginaria ( $\bar{\gamma} = j\beta$ ), lo cual indica que hay propagación a lo largo de la guía. En el caso que se consideren las paredes de la guía de conductor perfecto ( $\sigma = \infty$ ) la constante de atenuación es cero para todas las frecuencias mayores que la de corte.

Para la condición de corte:

$$\omega_c^2 \mu \epsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 ; \quad \omega_c = 2\pi f_c$$

donde:

$$f_c = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (1.104)$$

y

$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (1.105)$$

si la guía es llenada de aire.

Para frecuencias mayores que la de corte:  $\gamma = j\beta$ , -

donde:

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (1.106)$$

o bien:

$$\bar{Y} = j\beta = j \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \omega_c^2 \mu \epsilon}$$

donde:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (1.107)$$

Para visualizar la velocidad de propagación en -- una guía de onda, se considerarán dos ondas planas uniformes de la misma amplitud y frecuencia pero defasadas  $180^\circ$  que se suman para producir la configuración del campo den-

tro de la guía. Las direcciones de estas ondas se muestran en la fig. 1.9, donde  $\theta$  es el ángulo entre las paredes de la guía y la dirección de propagación, cuyo valor depende de la frecuencia y de la dimensión  $a$ .

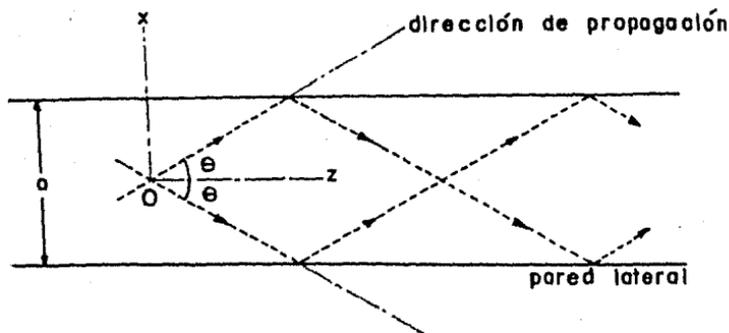


Fig. 1.9.

Para satisfacer las condiciones de frontera en las paredes de la guía, los campos eléctricos debido a la suma de las dos componentes deben ser igual a cero. El único modo de hacer el campo igual a cero en las paredes de la guía, es la de tener una distribución estacionaria del campo en los puntos nodales de la guía. Esta condición requiere que  $a$  sea múltiplos de medias longitudes de onda, o sea:

$$a = \frac{m\lambda x}{2} \quad (1.108)$$

donde  $m$  es un número entero.

$\lambda_x$  de la fig. 1.9 es:

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\text{sen}\theta} \quad (1.109)$$

Sustituyendo (1.109) en (1.108):  $a = \frac{m\lambda}{2\text{sen}\theta}$

entonces  $\text{sen}\theta = \frac{m\lambda}{2a}$  y  $\text{cos}\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}$  (1.110)

De (1.108):

$$\lambda = \frac{2a}{m}$$

es la longitud de onda de corte para cualquier valor de  $m$ .

Para una frecuencia mayor que la de corte, la velocidad de fase<sup>3</sup> en la dirección de propagación de la guía vale:

$$V_z = V_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \quad (1.111)$$

3. La velocidad de fase es una velocidad aparente, ya que no implica un movimiento físico de partículas, esta velocidad no es real.

o bien

$$V_f = \frac{V}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} = \frac{V}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (1.112)$$

De la fig. 1.9 la velocidad de fase es:

$$V_f = \frac{V}{\cos\theta} = \frac{V}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (1.113)$$

La velocidad de grupo<sup>4</sup> es:

$$V_g = V \cos\theta = V \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2} \quad (1.114)$$

o bien:

$$V_g = V \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (1.115)$$

donde V es la velocidad de propagación del medio con que es llenada la guía.

La longitud de onda medida a lo largo de la guía en la dirección z es:

---

4. La velocidad de grupo es la velocidad con la que viaja la energía dentro de la guía (en la dirección del eje de la guía), esta velocidad no la podemos medir.

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (1.116)$$

o bien de la fig. 1.9:

$$\lambda_z = \lambda_g \cos\theta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (1.117)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda del medio con que es llena da la guía.

Cada guía de onda tiene una frecuencia de corte, una longitud de onda de corte y una frecuencia de operación ( $f_0 > f_c$ ), la cual está en función de las dimensiones de la guía y del modo de propagación. La frecuencia de operación se obtiene de la ecuación (1.117), o sea:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2}}$$

$$f_0 = \frac{V}{\lambda} = V \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2} \quad (1.118)$$

Otro concepto importante en el estudio de las guías de onda es su impedancia característica, la cual está definida por la relación del campo eléctrico transver-

sal al campo magnético transversal de la guía, o sea:

$$Z_{OTM} = \frac{E_x}{H_y} = - \frac{E_y}{H_x}$$

Sustituyendo las componentes transversales del campo electromagnético dadas por (1.98) se tiene que:

$$Z_{OTM} = \frac{\bar{\beta}}{\omega \epsilon} = \eta \frac{\lambda}{\lambda_g} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (1.119)$$

donde  $\eta$  es la impedancia intrínseca del medio con que es llenada la guía.

En las expresiones (1.106), (1.111) y (1.116), la única restricción de  $m$  y  $n$  es que ambos sean números enteros. Ya que de las ecuaciones (1.98) y (1.99) se observa que si  $m$  o  $n$  son cero el campo electromagnético en el interior de la guía vale cero. Por lo tanto por un análisis de las ecuaciones (1.98) y (1.99) el valor mínimo para que no se anulen los campos, corresponde al  $m=n=1$ , que es el modo dominante<sup>5</sup> de propagación para las ondas TM en una guía de onda rectangular.

De un análisis similar al anterior (ondas TM), pero ahora trabajando con la componente longitudinal de cam-

5. Modo dominante corresponde al modo dentro de una guía que tiene la frecuencia de corte más baja.

po magnético (Hz) se obtienen las componentes del campo para una guía de onda rectangular bajo el modo TE, las cuales están dadas a continuación:

$$\begin{aligned}
 H_z &= C \cos Bx \cos Ay \\
 H_x &= j \frac{\bar{B}}{h^2} CB \sin Bx \cos Ay \\
 H_y &= j \frac{\bar{B}}{h^2} CA \cos Bx \sin Ay \\
 E_x &= j \frac{\omega \mu}{h^2} CA \cos Bx \sin Ay \quad (1.120) \\
 E_y &= -j \frac{\omega \mu}{h^2} CB \sin Bx \cos Ay \\
 A &= \frac{n\pi}{b} \quad \quad \quad B = \frac{m\pi}{a}
 \end{aligned}$$

En las expresiones anteriores se ha puesto  $\bar{\gamma} = j\bar{\beta}$ , el cual es válido para frecuencias mayores que la de corte.

Para las ondas TE, Las expresiones para  $f_c$ ,  $\lambda_c$ ,  $\bar{B}$ ,  $V_f$ ,  $V_g$  y  $\lambda_g$ , son idénticas a las de las ondas TM. Sin embargo de las expresiones (1.120) se observa la posibilidad de hacer  $m$  o  $n$  igual a cero, pero no ambas simultáneamente sin que se anule la onda, por lo tanto para este caso es posible tener una onda de orden inferior al de las ondas TM. El modo dominante de una onda TE en guías de onda rectangulares es la onda (modo)  $TE_{10}$ .

Por razones prácticas el modo más empleado en las guías de onda rectangulares es el modo dominante ( $TE_{10}$ ). Los campos eléctrico y magnético dentro de una guía de onda rectangular excitada por el modo  $TE_{10}$  están dadas por las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 H_z &= C \cos \frac{\pi x}{a} \\
 H_x &= j \frac{\bar{\beta} a C}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \\
 E_y &= -j \frac{\omega \mu a C}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \\
 E_x = E_z = H_y &= 0
 \end{aligned} \tag{1.121}$$

donde:

$$\bar{\beta} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{\beta^2 - h^2}$$

La velocidad de fase y de grupo son:

$$V_f = \frac{V}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad V_g = V \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

donde:

$$\lambda_c = 2a \text{ (longitud de onda de corte)}$$

$$f_c = \frac{v}{\lambda_c}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2}}$$

$$f_o = v \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2}$$

La impedancia característica para el modo TE está dada por la relación:

$$Z_{OTE} = \frac{E_x}{H_y} = - \frac{E_y}{H_x}$$

Sustituyendo las componentes transversales del -- campo electromagnético para el modo TE, dadas por (1.120)- se tiene que:

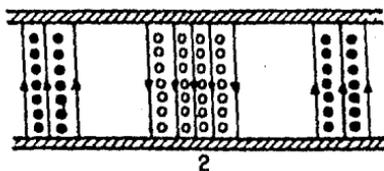
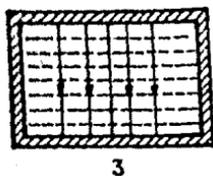
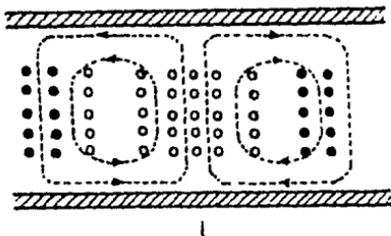
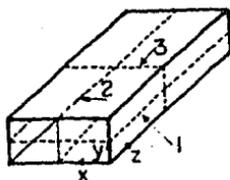
$$Z_{OTE} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \eta \frac{\lambda_g}{\lambda} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

En las ondas TE<sub>10</sub> la frecuencia de corte es independiente de la dimensión b (altura).

En la fig. 1.10, se muestran las configuraciones del campo electromagnético para las ondas dominantes de -- los modos TE y TM de una guía de onda rectangular.

Ondas TE y TM guías de onda circulares.

Para resolver las ecuaciones del campo electromagnético en una guía de onda circular es conveniente expresar las ecuaciones del campo y de onda en un sistema de coordenadas cilíndricas para simplificar la aplicación de las condiciones de frontera (campo eléctrico tangencial en la superficie igual a cero).



— E  
- - - H

TM<sub>11</sub>

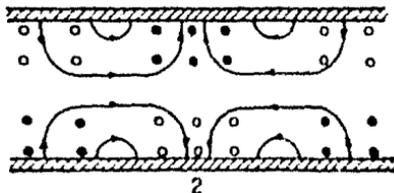
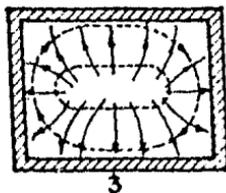
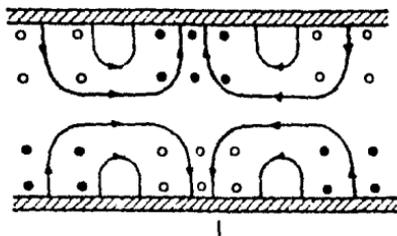
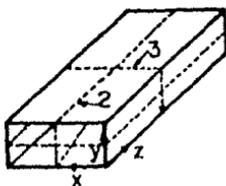


Fig. 1.10. Configuración del campo para los modos dominantes de una guía de onda rectangular.

En coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$  las ecuaciones de Maxwell en el interior de la guía son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{r \partial \phi} + \bar{\gamma} H_\phi &= j\omega \epsilon E_r \\ \frac{\partial E_z}{r \partial \phi} + \bar{\gamma} E_\phi &= -j\omega \mu H_r \\ -\bar{\gamma} H_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= j\omega \epsilon E_\phi \\ -\bar{\gamma} E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= -j\omega \mu H_\phi \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r H_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \phi} \right] &= j\omega \epsilon E_z \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r E_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right] &= -j\omega \epsilon H_z \end{aligned} \quad (1.123)$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} h^2 H_r &= j \frac{\omega \epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \bar{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ h^2 H_\phi &= -j\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\bar{\gamma}}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \\ h^2 E_r &= -\bar{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial r} - j \frac{\omega \mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \\ h^2 E_\phi &= -\frac{\bar{\gamma}}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + j\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (1.124)$$

donde:

$$h^2 = \bar{\gamma}^2 + \omega^2 \mu \epsilon$$

La ecuación de onda para  $E_z$  en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\omega^2 \mu \epsilon E_z \quad (1.125)$$

De un modo parecido al empleado en las guías de onda rectangulares, se supone una solución producto:

$$E_z = P(r) Q(\phi) e^{-\gamma z} = E_z e^{-\gamma z} \quad (1.126)$$

Sustituyendo (1.126) en (1.125) y dividiendo entre  $PQ$  se tiene:

$$\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{rP} \frac{dP}{dr} + \frac{1}{Qr^2} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} + h^2 = 0 \quad (1.127)$$

La ecuación (1.127) se descompone en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -n^2 Q \quad (1.128)$$

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} + \left(h^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) P = 0 \quad (1.129)$$

donde  $n$  es una constante. La solución de la ecuación (1.128) es:

$$Q = (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) \quad (1.130)$$

Dividiendo entre  $h^2$ , la ecuación (1.129) se tiene:

$$\frac{d^2 P}{d(hr)^2} + \frac{1}{(hr)} \frac{dP}{d(hr)} + \left[ 1 - \frac{n^2}{(hr)^2} \right] P = 0 \quad (1.131)$$

La ecuación (1.131) es la forma normal de la ecuación de Bessel<sup>6</sup> en función de  $(hr)$ , empleando sólo la solución que es finita para  $(hr)=0$  resulta:

$$P(hr) = J_n(hr) \quad (1.132)$$

donde  $J_n(hr)$  es la función de Bessel de primera clase y orden  $n$ . Sustituyendo (1.130) y (1.132) en (1.126):

$$E_z = J_n(hr) (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) e^{-\gamma z} \quad (1.133)$$

siendo  $A_n$  y  $B_n$  constantes arbitrarias.

La solución para  $H_z$  tiene la misma forma que  $E_z$  o sea:

$$H_z = J_n(hr) (C_n \cos n\phi + D_n \sin n\phi) e^{-\gamma z} \quad (1.134)$$

Para las ondas TM la condición de frontera requiere que  $E_z=0$  en  $r=a$ , por lo tanto de (1.133).

$$J_n(ha) = 0 \quad (1.135)$$

<sup>6</sup>. Ver Apéndice B.

donde  $a$  es el radio de la guía.

La ecuación (1.135) tiene un número infinito de soluciones. Si  $h^2 = \bar{\gamma}^2 + \omega^2 \mu \epsilon$ ,  $h$  debe ser inferior a  $\omega^2 \mu \epsilon$  para que tenga lugar la transmisión, esto significa que  $h$  debe ser pequeña o bien se requiere frecuencias altas, por lo tanto sólo tiene interés práctico las primeras soluciones de (1.135), siendo estas:

$$\begin{aligned} (ha)_{01} &= 2.405 & (ha)_{11} &= 3.85 \\ (ha)_{02} &= 5.52 & (ha)_{12} &= 7.02 \end{aligned} \quad (1.136)$$

El primer subíndice indica el valor de  $n$  y el segundo subíndice  $m$  indica el orden de magnitud de las raíces de (1.135). De acuerdo a esto las ondas TM se indican por  $TM_{01}$ ,  $TM_{12}$  etc.

$$\bar{\gamma} = \sqrt{h^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = \alpha + j\beta$$

la constante de fase para el  $nm$ -ésimo modo es:

$$\beta_{nm} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - h_{nm}^2} \quad (1.137)$$

La frecuencia de corte es:

$$f_c = \frac{h_{nm}}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} \quad \lambda_c = \frac{2\pi a}{(ha)_{nm}} \quad (1.138)$$

donde

$$h_{nm} = \frac{(ha)_{nm}}{a} \quad (1.139)$$

La velocidad de fase es:

$$V_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - h^2}} \quad (1.140)$$

El modo dominante es el  $TM_{01}$ , el cual tiene una longitud de onda de corte igual a:

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{2.405} = 2.61a$$

Para obtener las componentes del campo para el modo TM, se sustituye la ecuación (1.133) en (1.124):

$$\begin{aligned} E_z &= J_n(hr)A \cos n\phi \\ H_r &= -j \frac{\Lambda n \omega \epsilon}{h^2} J_n(hr) \sin n\phi \\ H_\phi &= -j \frac{\Lambda n \omega \epsilon}{h} J_n'(hr) \cos n\phi \\ E_r &= \frac{\beta}{\omega \epsilon} H_\phi \\ E_\phi &= \frac{\beta}{\omega \epsilon} H_r \end{aligned} \quad (1.141)$$

En la expresión (1.133) de  $E_z$ , la constante  $B_n=0$ . Las amplitudes relativas de  $A_n$  y  $B_n$  determinan la orientación del campo en la guía, para una guía circular y cualquier valor particular de  $n$  el eje  $\phi=0$  se oriente siempre para que  $A_n$  o bien  $B_n$  sean igual a cero.

Las componentes del campo para el modo TE en una-

guía de onda circular son obtenidas ahora sustituyendo - -  
(1.134) en (1.124):

$$\begin{aligned}
 H_z &= C_n J_n(hr) \cos n\phi \\
 H_r &= -j \frac{\beta C_n}{h} J_n'(hr) \cos n\phi \\
 H_\phi &= j \frac{n\beta C_n}{h^2 r} J_n(hr) \sin n\phi \\
 E_r &= \frac{\omega\mu}{\beta} H_\phi \\
 E_\phi &= -\frac{\omega\mu}{\beta} H_r
 \end{aligned} \tag{1.142}$$

Para las ondas TE las condiciones de frontera requieren que  $d/dr J_n(hr) = 0$  en  $r=a$ , por lo tanto:

$$J_n'(ha) = 0 \tag{1.143}$$

en éste caso también tiene interés sólo las primeras soluciones de (1.143), siendo:

$$\begin{aligned}
 (ha)'_{01} &= 3.83 & (ha)'_{11} &= 1.84 \\
 (ha)'_{02} &= 7.02 & (ha)'_{12} &= 5.33
 \end{aligned} \tag{1.144}$$

las raíces de (1.143) son designadas por  $(ha)'_{nm}$ , siendo -  
ahora:

$$h_{nm} = \frac{(ha)'_{nm}}{a} \tag{1.145}$$

El modo dominante, aquí es el  $TE_{11}$ , el cual tiene una longitud de onda de corte igual a:

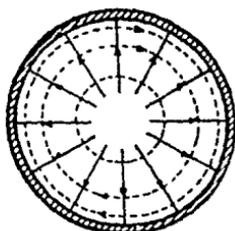
$$\frac{\lambda}{c} = \frac{2\pi a}{1.84} = 3.41a$$

En la fig. 1.11 se muestra la configuración del campo para los modos dominantes TM y TE de una guía de onda circular.

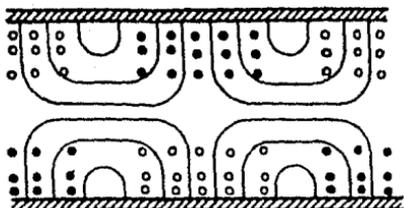
Las guías de onda como líneas de transmisión.

Para el rango de frecuencias mayores a 3Ghz. las guías de onda y principalmente las guías de onda rectangulares bajo el modo  $TE_{10}$  se han utilizado extensivamente como líneas de transmisión en sistemas de antenas.

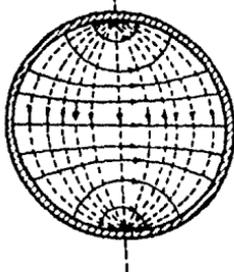
Bajo condiciones reales, la pérdida de energía -- por calentamiento en las paredes de la guía se toma en cuenta, como consecuencia la amplitud del campo de la onda disminuye a lo largo de la guía de acuerdo a la ley  $E = E_0 e^{-\alpha z}$  y por lo tanto la constante de atenuación debe calcularse.

$TM_{01}$ 


—— E  
 - - - H



← distribución del campo a lo largo de la guía.

 $TE_{11}$ 


distribución del campo a lo largo de la guía

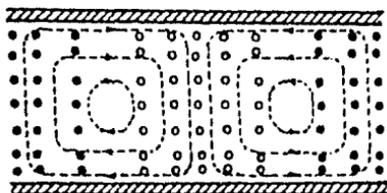


Fig. 1.11. Configuración del campo para los modos dominantes de una guía de onda circular.

Para el modo  $TE_{10}$ , los campos están dados por las ecuaciones (1.121) aparte del factor  $e^{-j\beta z}$ .

La potencia o el flujo de energía en la dirección positiva de  $z$  para el modo  $TE_{10}$  está dada por:

$$P_{10} = \frac{1}{2} R_c [\vec{E} \times \vec{H}^*] \quad (1.146)$$

$$P_{10} = \frac{1}{2} R_c \int_0^a \int_0^b (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{k} \, dx dy \quad (1.147)$$

Sustituyendo los campos dados por (1.121) en (1.147) y desarrollando los pasos algebraicos se tiene que:

$$P_{10} = C^2 \frac{ab}{4} \frac{\beta^2}{h^2} Z_{OTE_{10}} \quad (1.148)$$

donde;

$$h = \frac{\pi}{a}$$

Las corrientes en las paredes (con pérdidas) de la guía se supone que son las mismas que las corrientes libres de pérdidas y están dadas por

$$\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H} \quad (1.149)$$

donde  $\vec{n}$  es el vector unitario normal dirigido hacia adentro de las paredes de la guía. Así en las paredes  $x=0$ , a las corrientes superficiales se da:

$$\vec{J}_s = \hat{i} \times H_z = \hat{i} \times (cc. \frac{\beta}{a} \times \hat{k}) = -\hat{j} \cos \frac{\pi}{a} x$$

entonces  $\vec{J}_s = -\hat{j}C$  en  $x=0$

En  $x=a$ :

$$\vec{J}_s = -\hat{i}x(-H_z) = C \cos \pi = -\hat{j}C$$

Las corrientes en las paredes inferior y superior son:

$\vec{J}_s = \pi \times \vec{H}_t$  donde  $\vec{H}_t = H_x + H_z$ , por lo tanto

$$\vec{J}_s = \hat{j}x \left( \hat{i} \frac{j\beta a C}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x + \hat{k} C \cos \frac{\pi}{a} x \right)$$

$$\vec{J}_s = -\hat{k} \frac{j\beta a C}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x + \hat{i} C \cos \frac{\pi}{a} x \quad \text{en } y=0$$

en  $y=b$ :

$$\vec{J}_s = \pi \times \vec{H}_t = -\hat{j}x \left( \hat{i} \frac{j\beta a C}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x + \hat{k} C \cos \frac{\pi}{a} x \right)$$

$$\vec{J}_s = \hat{k} \frac{j\beta a C}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x - \hat{i} C \cos \frac{\pi}{a} x$$

Para una conductividad finita (caso real), las paredes de la guía exhiben una impedancia superficial:

$$Z_s = \frac{1+j}{\sigma \delta} (1+j) R_s \quad (1.150)$$

donde  $\delta$  es la profundidad de penetración<sup>7</sup>. La pérdida de potencia en la parte resistiva de  $Z_s$  por unidad de longitud de la guía es:

7. La profundidad de penetración se define como la profundidad  $\delta$  a la que la onda se atenúa  $1/e$  (36.8%) de su valor inicial).

$$P_{\ell} = \frac{R_s}{2} \oint \vec{J}_s \cdot \vec{J}_s^* d\ell$$

parades de  
la gufa

sustituyendo las corrientes superficiales se tiene:

$$P_{\ell} = \frac{R_s}{2} \left( 2 \int_0^b C^2 dy + 2 \int_0^a \frac{\bar{b}^2 a^2 C^2}{\pi^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{a} x dx + \right. \\ \left. + 2 \int_0^a C^2 \cos^2 \frac{\pi}{a} x dx \right)$$

desarrollando las integrales:

$$P_{\ell} = R_s C^2 \left[ b + \frac{a}{2} \left( \left( \frac{\bar{b}}{h} \right)^2 + \frac{a}{2} \right) \right] \quad (1.151)$$

Como la amplitud del campo a lo largo de la gufa-  
obedece la ley  $E = E_0 e^{-\alpha z}$ , por lo tanto la potencia obedece-  
la ley  $P = P_0 e^{-2\alpha z}$ , entonces la disminuci3n de potencia pro-  
pagada es:

$$P_{\ell} = - \frac{dP_z}{dz} = 2\alpha P_{10} \quad \text{y finalmente}$$

$$\alpha = \frac{P_{\ell}}{2P_{10}} = \frac{R_s \left[ b + \frac{a}{2} \left( \left( \frac{\bar{b}}{h} \right)^2 + \frac{a}{2} \right) \right]}{2 \frac{ab}{2} \left( \frac{\bar{b}}{h} \right)^2 P_{10}}$$

factorizando:

$$\alpha = \frac{R_s}{ab\bar{\beta}^2 Z_{OTE,10}} (2bh^2 + a\bar{\beta}^2) \text{ neper/m} \quad (1.152)$$

En la ecuación (1.152) se observa que la atenuación depende de las dimensiones de la guía, para un valor constante de  $a$  y una disminución de  $b$  la constante de atenuación aumenta. Por lo que las dimensiones de la guía no pueden cambiarse para la condición de mínima atenuación debido a que se eliminan modos de alto orden en la guía. Por lo regular  $b$  deberá ser menor que media longitud de onda y  $a$  deberá ser menor que una longitud de onda, entonces la relación  $a/b=2$  se ha adoptado en la práctica. Las curvas de atenuación en función de la frecuencia para una guía de onda rectangular con paredes de latón para diferentes modos de propagación se muestran en la fig. 1.12.

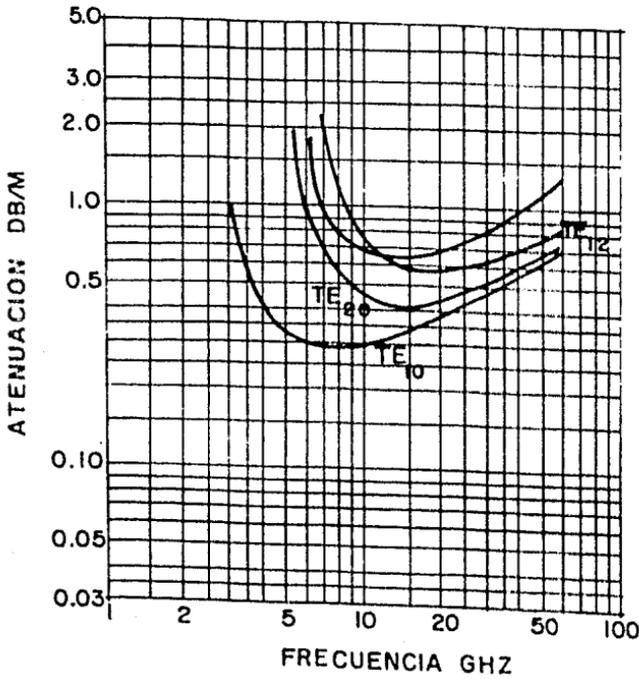


Fig. 1.12. Curvas de atenuación en función de la frecuencia para diferentes modos de una guía rectangular de latón.

Las guías de onda rectangulares para ser sintonizadas o bien acoplarse a una antena, cuando una guía de onda es empleada como línea de transmisión utiliza una serie de dispositivos, los más empleados en la práctica son los diafragmas o iris reactivos.

Los diafragmas son placas metálicas delgadas que se apoyan en el plano transversal de la guía, estas placas están soldadas en el interior de la guía, como se muestra en la fig. 1.13.

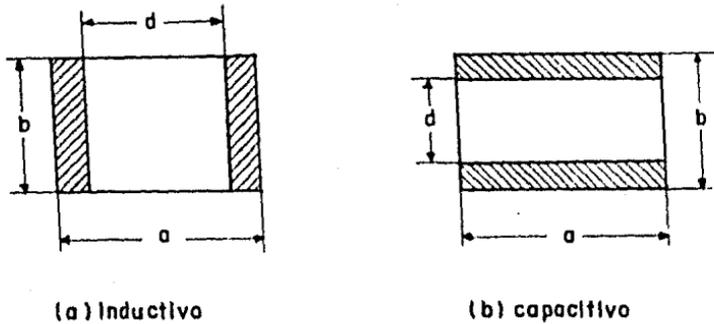
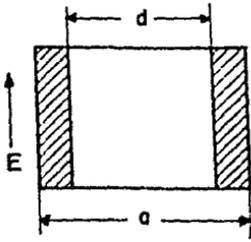


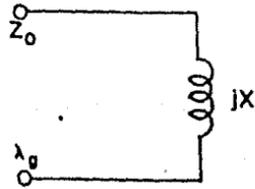
Fig. 1.13. Diafragmas reactivos.

De la fig. 1.13 se observa que el diafragma es inductivo cuando el ancho de la gufa disminuye y es capacitivo cuando la altura de la gufa disminuye.

Para un diafragma inductivo excitado por el modo  $TE_{10}$  la direcci3n del campo el3ctrico en la abertura del diafragma coincide con el eje y mientras que la amplitud en la direcci3n  $x$  cambia de acuerdo con una ley definida, los modos altos generados por el diafragma son atenuados en su vecindad y s3lo el modo dominante ( $TE_{10}$ ) se propaga, los diafragmas inductivos son los m3s utilizados en la pr3ctica. La estructura de un diafragma inductivo puede ser descrito por un circuito equivalente, como se muestra en la fig. 1.14 (o sea una disminuci3n del ancho de la gufa es equivalente a la inserci3n de una inductancia). Donde  $Z_0$ ,  $\lambda_g$  y  $X$  son los par3metros del circuito.



Seccion. transversal



Circuito equivalente

Fig. 1.14.

Para obtener el valor de la reactancia  $X$  del circuito se tiene una gráfica (fig. 1.15), la cual está en -- función de las dimensiones de la guía y del diafragma -- ( $a=d/a$ ) para tres diferentes relaciones de  $a/\lambda$ . La fig. - 1.15 contiene el trazo de  $X\lambda_g/2o\lambda_c$  en función de  $a$  para un rango de longitud de onda en que:  $0.5 < a/\lambda < 1.5$ .

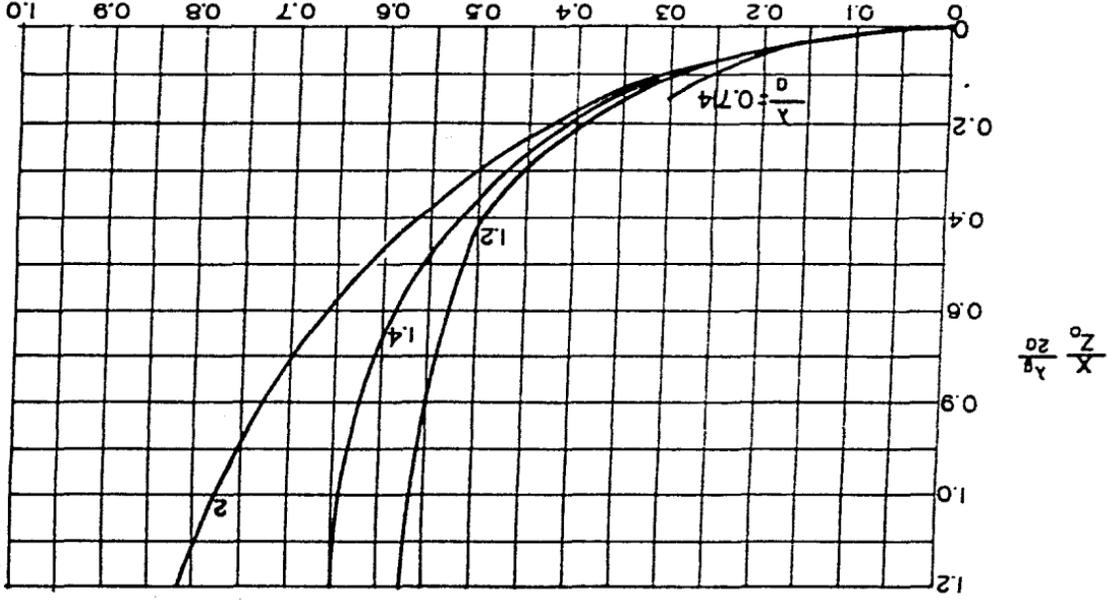


Fig. 1.15.

$$\alpha = \frac{d}{p}$$

**CAPITULO DOS.**

**ANALISIS TEORICO DE UNA ANTENA  
DIELECTRICA.**

## 2.1 INTRODUCCION

Una antena dieléctrica es una nueva forma de antena de tipo endfire<sup>1</sup> para microondas, consiste esencialmente de una varilla de dieléctrico que sale de una gufa de onda, para aplicaciones en las que se requiere una ganancia moderada esta antena posee propiedades eléctricas y mecánicas deseables.

Una varilla uniforme de material dieléctrico sin límites metálicos es un tipo de línea de transmisión, en este caso una porción de la energía viaja a través del espacio que rodea la varilla originando la radiación. La tendencia de la radiación hacia una dirección determinada es una ventaja convirtiéndose en una nueva forma de antena.

Debido a que dicha antena ha sido construida por diversos materiales dieléctricos, recibe el nombre de antena dieléctrica, donde su uso especial es para trabajar en microondas.

Una varilla dieléctrica es excitada por una infinitud de modos de transmisión, hay en general ondas que poseen componentes transversales y longitudinales de campo

---

1. Una antena endfire es aquella antena en la cual la máxima intensidad de radiación de energía está a lo largo del eje de la antena y su velocidad de fase es menor que la de la luz; esto es que  $c/v > 1$ .

eléctrico y magnético, interesándonos sólo los modos más -  
bajos que es la parte correspondiente de los modos dominan-  
tes es un conductor metálico. La forma más común de exci-  
tar una antena dieléctrica consiste en considerar una gufa  
de onda metálica rellena de dieléctrico que es excitada al  
modo dominante, si la gufa metálica se termina de repente-  
la energía continuará viajando sobre la varilla dieléctri-  
ca y estará confinada exclusivamente a los modos híbridos-  
más bajos.

El grado con el cual la potencia se concentra --  
dentro del dieléctrico está en función del diámetro de la  
varilla dieléctrica y de su permitividad relativa. Esta -  
relación se muestra en la fig. 2.1.

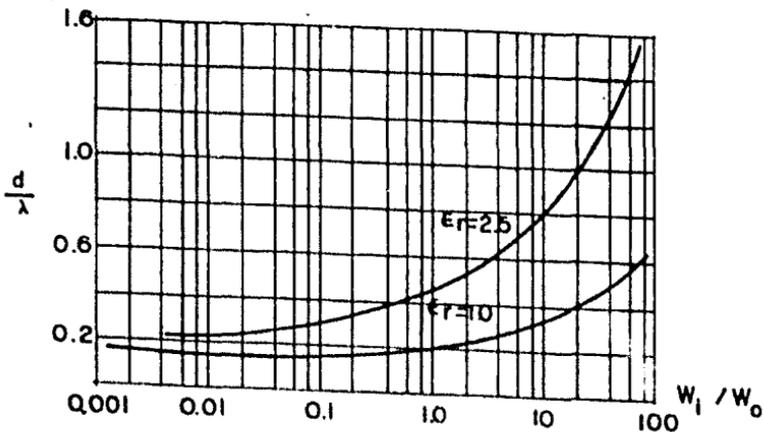


Fig. 2.1. Relación de la potencia incidente  $W_1$  a la potencia de salida de un dieléctrico cilíndrico.

La velocidad de fase dentro de una varilla dieléctrica es también función del diámetro y de la permitividad relativa, la cual se muestra en la fig. 2.2, donde se observa que cuando la relación  $d/\lambda$  es pequeña comparada con la unidad, la varilla ejerce una acción de propagación insignificante y la transmisión es confinada al espacio libre, para varillas de diámetro grande la mayor parte de la energía es confinada dentro de la varilla dieléctrica y la velocidad de fase es como en un medio sin límites.

Un entendimiento completo de la operación de una antena dieléctrica se basa en la solución de las ecuaciones de Maxwell sujetas a las condiciones de frontera apropiadas a la configuración. Un análisis matemático para esta antena es muy complejo. Sin embargo una exploración del funcionamiento de una antena dieléctrica puede establecerse de analogías con arreglos teóricos. Por lo tanto sólo se desarrollará un trabajo teórico sencillo que prediga aproximadamente la forma de radiación observadas a cierta distancia, bajo estas circunstancias una solución rigurosa del campo no es necesaria.

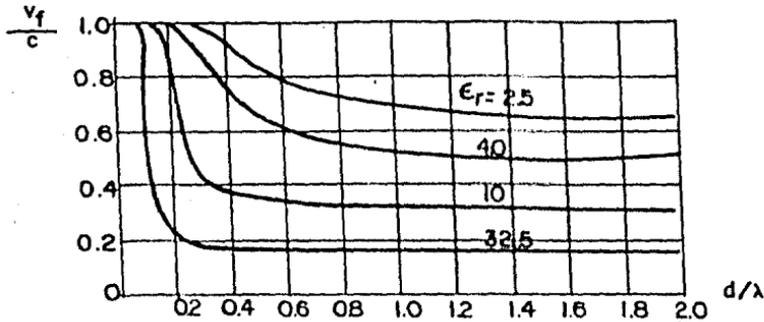


Fig. 2.2. Velocidad de fase normalizada para un dieléctrico cilíndrico.

## 2.2 MODOS DE PROPAGACION EN UNA VARILLA DIELECTRICA.

Las guías de ondas metálicas fueron tratadas por primera vez por Lord Rayleigh en 1897. Mas tarde las guías de onda dieléctricas fueron investigadas teóricamente (analizándolas como una línea de transmisión) por Hondros y Debye en 1910, pero estas adquirieron una mayor importancia como líneas de transmisión y antenas hasta después de la segunda guerra mundial.

La diferencia de propagación entre las guías de onda metálicas y las guías de onda dieléctricas está en el mecanismo de reflexión responsable de propagar la ener-

gía. En las guías metálicas la reflexión es producida por un buen conductor en la frontera. En una guía dieléctrica dicho mecanismo es producido por la reflexión interna total<sup>2</sup>.

Así en las guías de onda metálicas se tienen dos series de soluciones: modo transversal eléctrico (TE) y modo transversal magnético (TM), en una guía de onda dieléctrica todos los modos cilíndricamente simétricos:  $TE_{0m}$  y  $TM_{0m}$  son híbridos o sea que tienen componentes eléctricas y magnéticas en la dirección de propagación. Aquí también se tienen dos series de modos híbridos, ya que las condiciones de frontera dan una ecuación característica, que es cuadrática para las funciones de Bessel, las cuales describen el campo en la parte central del dieléctrico.

Un modo de propagación en un dieléctrico es una distribución coherente de energía que es producida por la reflexión interna total, la cual está localizada en la vecindad del dieléctrico y se propaga con una velocidad de fase bien definida.

---

2. La reflexión interna total ocurre cuando existe un medio menos denso que otro, bajo estas condiciones existe un campo en el medio menos denso.

### Designación de los modos de propagación.

Para una guía de onda de forma cilíndrica los modos son designados por  $TE_{nm}$  y  $TM_{nm}$  y en la literatura vieja aparecen como  $H_{nm}$  y  $E_{nm}$  respectivamente. El modo transversal eléctrico  $TE_{nm}$  es derivado de una cantidad simple del campo que corresponde a la componente longitudinal del campo magnético ( $H_z$ ) de aquí la designación alternativa de  $H_{nm}$  para este modo.

En una guía de onda dieléctrica, sólo la simetría cilíndrica o sea sólo para  $n=0$ , los modos son transversal magnético o transversal eléctrico, los otros modos (para  $n \neq 0$ ) son híbridos o sea tienen valores diferentes de cero para ambos campos  $E_z$  y  $H_z$ .

Siguiendo la notación sugerida para la designación de los modos híbridos, basados en las contribuciones relativas de los campos  $E_z$  y  $H_z$  a las componentes transversales del campo en algún punto de referencia se tiene que si  $E_z$  hace una contribución grande el modo es considerado parecido al modo  $E_{nm}$  y es designado por el modo  $EH_{nm}$ , el método de designación es arbitrario ya que depende de un cambio particular en la componente transversal del campo. El uso de las dos letras  $EH_{nm}$  y  $HE_{nm}$  designan los modos híbridos. Los subíndices  $n$  y  $m$  se refieren al  $n$ -ésimo orden y  $m$ -ésima posición, donde la posición sucesiva da la solu-

ción de la función de Bessel  $J_n$  involucrando las condiciones de frontera, se acostumbra rotular estas soluciones para empezar con  $m=1$ .

Para determinar los modos que son excitados cuando una onda incide sobre el extremo de una guía dieléctrica cilíndrica se toma como modelo teórico una varilla de dieléctrico isotrópico, sin pérdidas de longitud finita y de forma circular que está rodeado por un medio de una constante dieléctrica pequeña, en el cual dos casos de modos de excitación superficial son considerados.

1. Excitación infinita. Cuando una onda plana polarizada linealmente incide normalmente sobre el extremo de la varilla dieléctrica y se extiende sobre todo el espacio que rodea la varilla dieléctrica.

2. Excitación finita. Corresponde a una onda plana que incide normalmente en el extremo del dieléctrico y se extiende sólo sobre la sección transversal del dieléctrico.

Los modos superficiales que son excitados en una varilla circular de dieléctrico forman dos familias infinitas que son designados por los modos  $HE_{nm}$  y  $EH_{nm}$  para  $n>0$  y por  $TE_{0m}$  y  $TM_{0m}$  para  $n=0$ . El subíndice  $n$  es un número entero que va de cero a infinito y representa el número de ciclos de patrón del campo por un ciclo de rotación angular sobre el eje del cilindro, el segundo subíndice  $m$  toma valores de uno a infinito e indica el número de polari

dades invertidas del campo a lo largo de la línea radial (número de ceros incluidos en la función de Bessel).

Parte de la potencia que excita los modos superficiales se propaga a lo largo del dieléctrico y la potencia restante es radiada. Para una varilla circular de dieléctrico perfecto energizada por una onda plana que incide normalmente, sólo aquellos modos para el cual  $n=1$  son excitados, por lo tanto sólo los modos  $HE_{1m}$  y  $EH_{1m}$  están presentes en el dieléctrico. Sin embargo los modos  $EH_{1m}$  son difíciles de excitar y para propósitos prácticos son generalmente despreciados.

Los resultados de la excitación de los modos superficiales en un dieléctrico son presentados en la fig. 2.3, donde se muestra la potencia que excita los modos  $HE_{1m}$  en función de la frecuencia normalizada  $V$ , la cual es proporcional a la frecuencia ( $f$ ) por la relación<sup>4</sup>:

$$V^2 = a^2 \omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (2.1)$$

donde  $a$  es el radio de la varilla dieléctrica.

$\omega$  es la velocidad angular.

$\mu_0$  es la permeabilidad del espacio libre.

$\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  son las constantes dieléctricas del dieléctrico y el medio que rodea al dieléctrico respectivamente.

---

4. Ver referencia no. 12.

En la fig. 2.3 se ilustra la potencia transmitida por los modos híbridos para los dos casos de excitación infinita y finita. La potencia de entrada para el caso de excitación infinita es infinita puesto que la potencia está contenida en una onda plana que se extiende sobre todo el espacio. La potencia de entrada para el caso de excitación finita es unitaria ya que la potencia incidente pasando por una área igual a la sección transversal del dieléctrico ha sido normalizada a la unidad.

Los campos a lo largo de la varilla de dieléctrico están caracterizados por las funciones de Bessel dentro de la estructura del dieléctrico y por la función modificada de Hankel fuera de la estructura. Dentro de la varilla el argumento de la función de Bessel se le llama  $u$ , mientras que el argumento de la función de Hankel es  $W$ . Entonces la frecuencia normalizada  $V$  es la referida a  $u$  y  $W$  por la expresión<sup>5</sup>:

$$V^2 = W^2 + u^2 \quad . \quad (2.2)$$

Se observa que para pequeñas diferencias de constante dieléctrica entre la varilla dieléctrica y el espacio circundante, la potencia transmitida por los modos superficiales es de la forma<sup>5</sup>:

$$P = 4V^2/W^2u^2 \quad \text{para excitación infinita} \quad (2.3)$$

$$P = 4W^2/u^2V^2 \quad \text{para excitación finita} \quad (2.4)$$

5. Ver referencia no. 12.

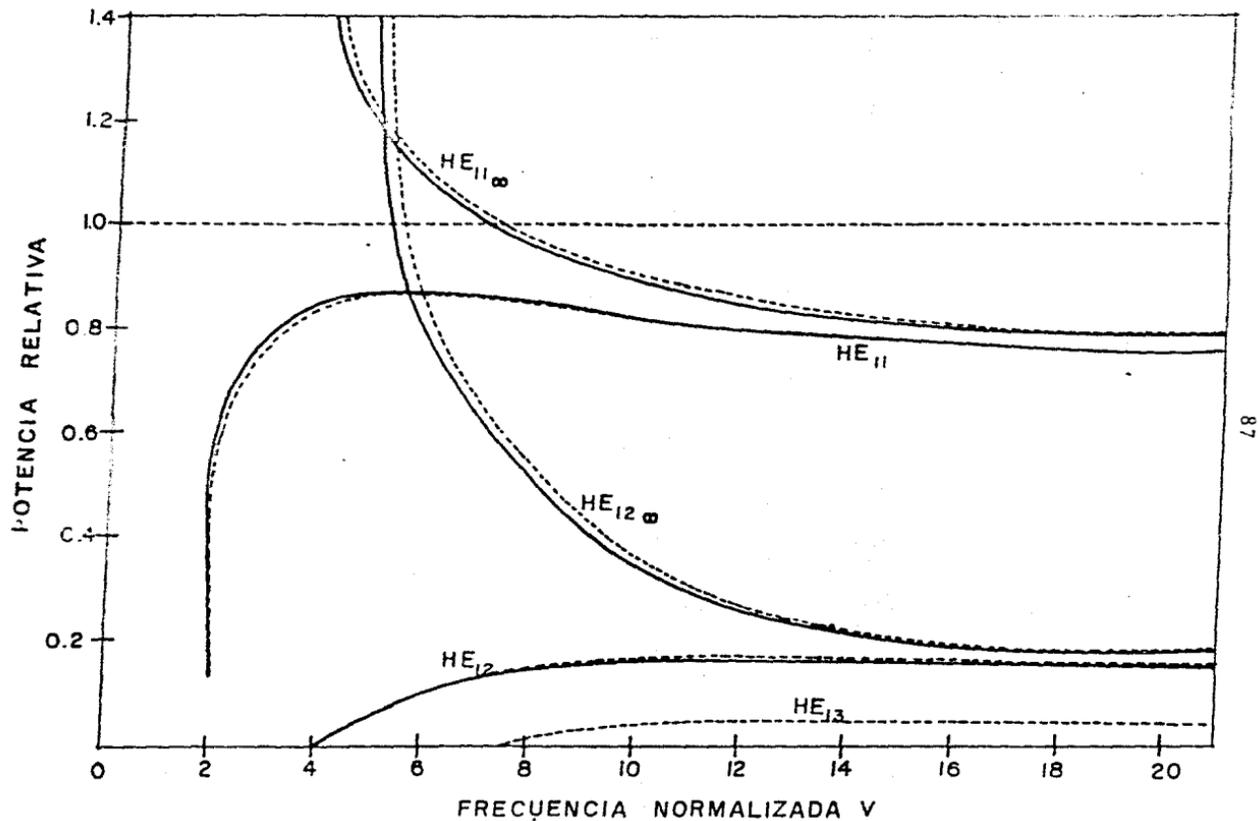


Fig.2.3. Curvas de la potencia relativa VS la frecuencia normalizada para los modos  $HE_{12}$ ,  $HE_{11}$ ,  $HE_{13}$ .

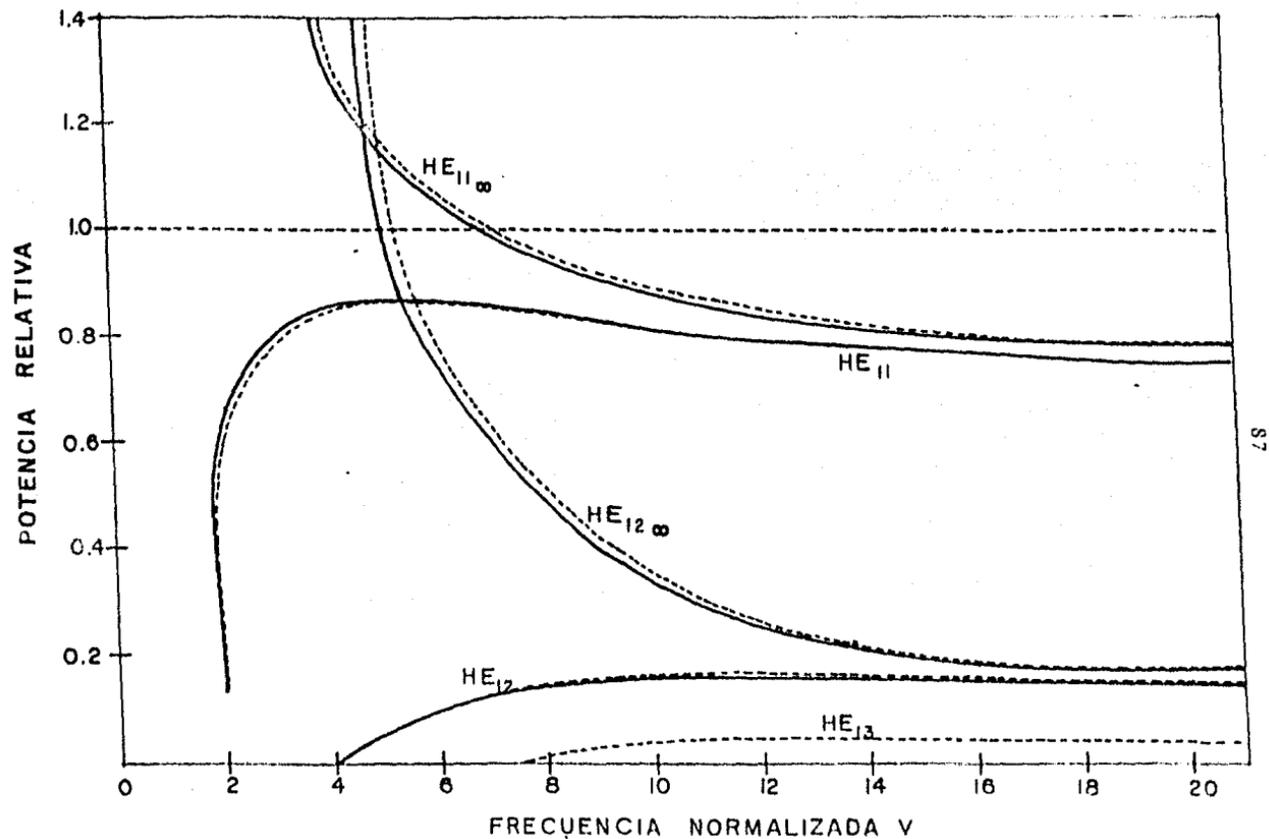


Fig.2.3. Curvas de la potencia relativa VS la frecuencia normalizada para los modos HE<sub>12</sub>, HE<sub>11</sub>, HE<sub>13</sub>.

Las curvas punteadas de la fig. 2.3 son los trazos de estas ecuaciones, estas curvas están de acuerdo con las curvas punteadas. La característica sobresaliente de la fig. 2.3 es que el modo  $HE_{11}$  transmite la mayor parte de la potencia incidente, la cual puede ser explicada por el examen del campo del modo  $HE_{11}$ , dado en la fig. 2.4, -- donde se tiene que el modo  $HE_{11}$  tiene un campo que es casi idéntico al campo uniforme constante de una onda plana y es por lo tanto excitado eficientemente.

#### Campos en una varilla dieléctrica.

Para obtener la constante de propagación de los modos híbridos se toma una varilla de dieléctrico el cual es considerado como un cristal uniaxial, con sus ejes ópticos dirigidos a lo largo de la varilla, el medio que rodea la varilla de dieléctrico es el espacio libre.

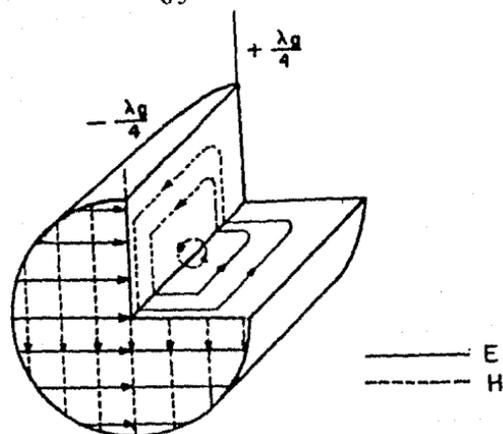


Fig. 2.4. Trazo del campo para el modo  $HE_{11}$

El tensor de permitividad del medio dieléctrico<sup>6</sup> (anisotrópico) está dado por:

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre.

$\epsilon_{\perp}$  es la constante dieléctrica en el plano perpendicular al eje del cristal.

$\epsilon_{\parallel}$  es la constante dieléctrica paralela al eje del cristal.

El dieléctrico es considerado sin pérdidas y la-

6. Ver Apéndice C.

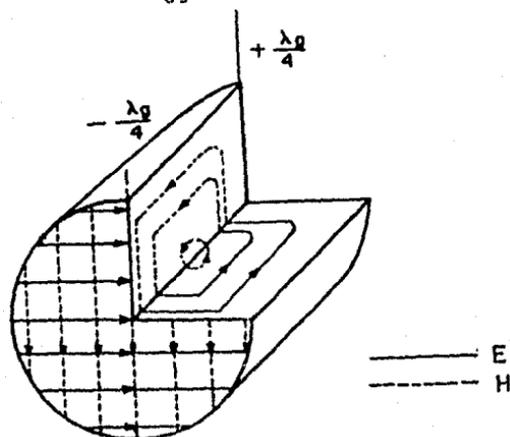


Fig. 2.4. Trazo del campo para el modo  $HE_{11}$

El tensor de permitividad del medio dieléctrico<sup>6</sup> (anisotrópico) está dado por:

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre.

$\epsilon_{\perp}$  es la constante dieléctrica en el plano perpendicular al eje del cristal.

$\epsilon_{\parallel}$  es la constante dieléctrica paralela al eje del cristal.

El dieléctrico es considerado sin pérdidas y la-

6. Ver Apéndice C.

variación del tiempo de los campos es tomado como  $e^{j\omega t}$ . La varilla es de forma circular con un radio  $a$ , para su análisis se emplea un sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$

Los campos para los modos híbridos<sup>7</sup> son obtenidos en las siguientes regiones:

Dentro de la varilla ( $r < a$ ):

$$\begin{aligned}
 E_z &= AJ_n(\rho r) \cos \beta z \cos n\phi \\
 H_z &= BJ_n(k_1 r) \sin \beta z \sin n\phi \\
 E_r &= - \left[ \frac{\beta \rho A}{k_1^2} J_n'(\rho r) + j \frac{\omega \mu_0 n B}{k_1^2 r} J_n(k_1 r) \right] \sin \beta z \cos n\phi \\
 H_r &= \left[ -j \frac{\omega \epsilon_1 n A}{k_1^2 r} J_n(\rho r) + \frac{\beta B}{k_1} J_n'(k_1 r) \right] \cos \beta z \sin n\phi \quad (2.6) \\
 E_\phi &= \left[ \frac{\beta n A}{k_1^2 r} J_n(\rho r) + j \frac{\omega \mu_0 B}{k_1} J_n'(k_1 r) \right] \sin \beta z \sin n\phi \\
 H_\phi &= \left[ -j \frac{\omega \epsilon_1 \rho A}{k_1^2} J_n'(\rho r) + \frac{\beta n B}{r} J_n(k_1 r) \right] \cos \beta z \cos n\phi
 \end{aligned}$$

Fuera de la varilla ( $r > a$ ):

$$\begin{aligned}
 E_z &= DK_n(k_2 r) \cos \beta z \cos n\phi \\
 H_z &= CK_n(k_2 r) \sin \beta z \sin n\phi \\
 E_r &= \left[ \frac{\beta D}{k_2} K_n'(k_2 r) + j \frac{\omega \mu_0 n C}{k_2 r} K_n(k_2 r) \right] \sin \beta z \cos n\phi
 \end{aligned}$$

7. Ver referencia no. 11.

$$H_r = \left[ j \frac{\omega \epsilon_0 n D}{k_2^2 r} K_n(k_2 r) - \frac{\beta C}{k_2} K_n'(k_2 r) \right] \cos \beta z \sin n \phi \quad (2.7)$$

$$E_\phi = - \left[ \frac{\beta n D}{k_2^2 r} K_n(k_2 r) + j \frac{\omega \mu_0 C}{k_2} K_n'(k_2 r) \right] \sin \beta z \cos n \phi$$

$$H_\phi = \left[ j \frac{\omega \epsilon_0 D}{k_2} K_n'(k_2 r) - \frac{\beta n C}{k_2^2 r} K_n(k_2 r) \right] \cos \beta z \cos n \phi$$

donde  $J_n(x)$  es la función ordinaria de Bessel de primer tipo orden  $n$ .

$K_n(x)$  es la función modificada de Bessel de segundo tipo orden  $n$ .

La prima (') denota  $d/d(kr)$

$n$  es el número de variaciones azimutales de los campos.

$\beta = \ell \pi / L$  es la constante de propagación longitudinal.

$\ell$  es el número de medias longitudes de onda a lo largo de la varilla dieléctrica.

$L$  es la longitud de la varilla.

$$k_1^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left[ \epsilon_\perp - \left( \frac{C}{V_f} \right)^2 \right]$$

$$k_2^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left[ \left( \frac{C}{V_f} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\rho^2 = k_1^2 \frac{C}{\epsilon_\perp}$$

$v_f/c$  es la relación de la velocidad de fase a la velocidad del espacio libre.

$\omega$  es la velocidad angular ( $2\pi f$ ).

$\lambda$  es la longitud de onda en el espacio libre.

$\mu_0$  es la permeabilidad del espacio libre.

$A, B, C$  y  $D$  son las amplitudes complejas de los campos.

En el límite  $r \rightarrow a$ , la continuidad de las componentes tangenciales del campo da cuatro ecuaciones para las --

constantes A, B, C y D. La continuidad de las componentes tangenciales de E, produce las siguientes ecuaciones:

$$J_n(\rho a)A = Kn(k_2 a)D \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta n}{k_1^2 a} J_n(\rho a)A + j \frac{\omega \mu_0}{k_1} J_n'(k_1 a)B = \\ - \frac{\beta n}{k_2^2 a} Kn(k_2 a)D - j \frac{\omega \mu_0}{k_2} Kn'(k_2 a)C \end{aligned} \quad (2.9)$$

De las componentes del campo magnético se tiene:

$$J_n(k_1 a)B = Kn(k_2 a)C \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} j \frac{\omega \epsilon_1 \rho}{k_1} J_n'(\rho a)A + \frac{\beta n}{a} J_n(k_1 a)B = \\ j \frac{\omega \epsilon_2 \rho}{k_2} Kn'(k_2 a)D - \frac{\beta n}{k_2^2 a} Kn(k_2 a)C \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para que las cuatro ecuaciones sean consistentes, el determinante de los coeficientes debe ser cero. Igualando a cero el determinante se obtiene la ecuación característica para los modos  $HE_{nm}$ , la cual está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{n}{a} \frac{C}{V_f} \left( \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) \right] = \\ \left[ \frac{J_n(k_1 a)}{k_1 J_n(k_1 a)} + \frac{Kn'(k_2 a)}{k_2 Kn(k_2 a)} \right] \left[ \frac{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}{k_1 J_n(\rho a)} + \frac{Kn'(k_2 a)}{k_2 Kn(k_2 a)} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

El modo híbrido usualmente empleado es el modo -

dominante  $HE_{11}$ , como la ecuación característica (2.12) es cuadrática se tiene una segunda serie de modos híbridos de notados por  $EH_{nm}$ , los cuales existen y son generados por los modos  $HE_{nm}$ , los modos  $EH$  están rotados  $90^\circ$  en la dirección  $\phi$  con respecto a los modos  $HE$ .

Se observa que para  $n=0$ , la ecuación (2.12) se convierte en dos ecuaciones independientes para los modos  $TE_{om}$  y  $TM_{om}$ .

Para los modos  $TE_{om}$ :

$$\frac{J_0'(k_1 a)}{k_1 a J_0(k_1 a)} + \frac{K_0'(k_2 a)}{k_2 K_0(k_2 a)} = 0 \quad (2.13)$$

Y para los modos  $TM_{om}$ :

$$\frac{\sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{\perp}} J_0(\rho a)}{k_1 J_0(\rho a)} + \frac{K_0'(k_2 a)}{k_2 K_0(k_2 a)} = 0 \quad (2.14)$$

Estos modos son simétricamente axiales (no tienen variación  $\phi$ ) y por lo tanto sólo existen para  $n=0$ , -- cualquier desimetría o sea cuando  $n \neq 0$  el modo es híbrido. -- El entero  $m$  se refiere a la raíz radial para el cual la ecuación característica es resulta.

De aquí se tiene que el modo  $TM_{om}$  depende de las constantes  $\epsilon_{11}$  y  $\epsilon_{\perp}$  del medio dieléctrico anisotrópico, -- mientras que para el modo  $TE_{om}$  depende solamente de  $\epsilon_{\perp}$  y es el mismo que un medio isotrópico.

Todos los modos tienen una frecuencia de corte -

alta cuando la relación  $v_f/c = 1/\sqrt{\epsilon_r}$ , excepto para el modo dominante  $HE_{11}$  el cual tiene una frecuencia de corte baja cuando  $v_f/c$  tiende a uno. De acuerdo a esto para una frecuencia dada el modo  $HE_{11}$  se propaga sobre varillas de diámetro pequeño que se necesita para los modos simétricos, este es el principal interés práctico cuando el medio dieléctrico es costoso o es difícil de construir con un diámetro grande. Además el modo  $HE_{11}$  es excitado directamente por el modo  $TE_{10}$  de una guía de onda rectangular el cual es bastante utilizado en la práctica.

### 2.3. PATRON DE RADIACION DE UNA ANTENA DIELECTRICA.

Para obtener el patrón de radiación de una antena dieléctrica se considera una varilla de dieléctrico la que se inserta a una guía de onda metálica, las dimensiones de la varilla de dieléctrico son las mismas que las de la guía metálica en el punto de unión. La fuente de generación de ondas está dentro de la guía metálica y para cortas distancias (unas cuantas longitudes de onda) fuera de la guía de onda metálica el campo en el dieléctrico es parecido al campo en la guía metálica.

Una antena dieléctrica consiste esencialmente de una varilla sólida de material dieléctrico excitada por el extremo abierto de una guía de onda metálica, como se mues

tra en la fig. 2.5. Las antenas dieléctricas tienen en común una propiedad que es la de producir un lóbulo mayor dirigido a lo largo de la antena.

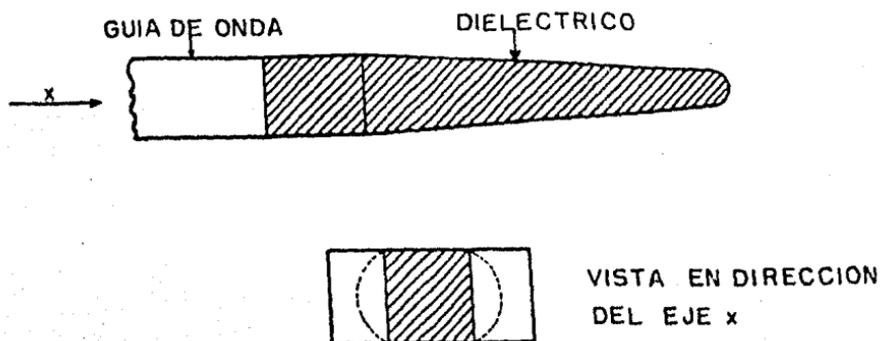


Fig.2.5.

Para derivar la expresión del campo eléctrico en esta antena se considera un circuito que conduce energía - electromagnética, tal como se muestra en la fig. 2.6, que origina un patrón de radiación dado por  $e(\theta)$ , el cual es simétrico al eje de la antena. Si se considera que la corriente es constante a lo largo de la antena y esta es terminada con su impedancia característica, entonces la corriente en el punto A de la fig. 2.6 es:

$$I = I_0 e^{-j\beta_a x} \quad (2.15)$$

siendo  $\beta_a$  la constante de fase de la antena, que es:

$$\beta_a = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \beta n$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda para el espacio libre ( $c/f$ )

$\lambda$  es la longitud de onda del dieléctrico.

$\beta$  es la constante de fase para el espacio libre.

$n$  es conocido como índice de refracción absoluto

( $c/v = \lambda_0/\lambda$ )

De acuerdo a esto la expresión (2.15) queda en la siguiente forma:

$$I = I_0 e^{-j\beta n x} \quad (2.16)$$

donde  $I_0$  es la corriente en el punto inicial de la antena (origen).

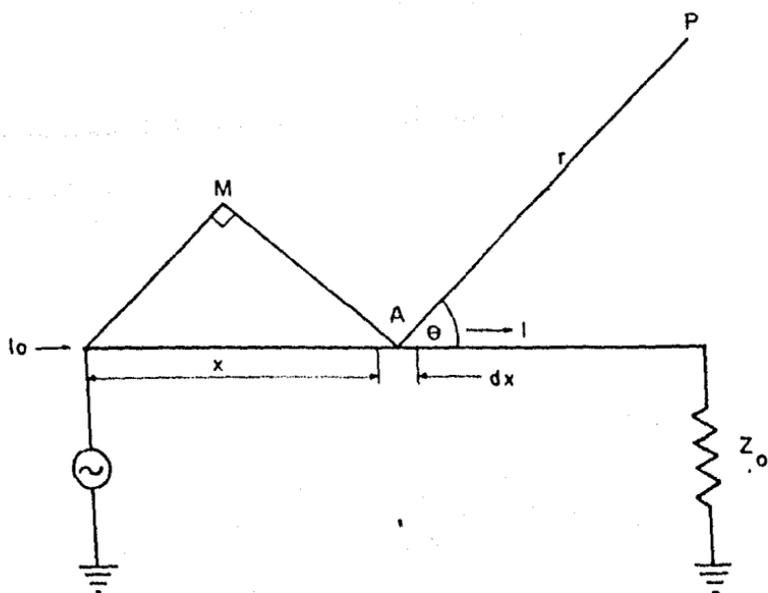


Fig. 2.6

De la expresión de campo eléctrico para un dipolo eléctrico<sup>8</sup> en el espacio libre se tiene:

$$E_{\theta} = j \frac{I l \beta^2}{4 \pi \omega \epsilon_0} e(\theta) \frac{e^{-j\beta r}}{r}$$

$$\text{donde } \frac{\beta^2}{4 \pi \omega \epsilon_0} = \frac{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0}{4 \pi \omega \epsilon_0} = \frac{2 \pi f \mu_0}{4 \pi} = \frac{\mu_0 c}{2 \lambda_0}$$

$$\text{y } \mu_0 = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi$$

entonces

$$\frac{\beta}{4 \pi \omega \epsilon_0} = \frac{120 \pi}{2 \lambda_0} = \frac{60 \pi}{\lambda_0}$$

$$E_{\theta} = j \frac{60 \pi I e(\theta)}{r} \frac{l}{\lambda_0} e^{-j\beta r} \quad (2.17)$$

Considerando un elemento diferencial de longitud en el punto A (fig. 2.6) como un elemento radiador teniendo el patrón  $e(\theta)$ ; el campo en el punto P a una distancia  $r$  del punto A es de la misma forma que (2.17). Sustituyendo (2.16) en (2.17) y considerando un elemento de longitud  $dx$  se obtiene la siguiente expresión:

$$dE = j \frac{60 \pi I_0}{\lambda_0} \frac{e^{-j\beta r}}{r} e(\theta) e^{-j\beta n x} dx \quad (2.18)$$

donde  $dE$  es la radiación del elemento de longitud  $dx$  en el

---

8. Ver referencia No. 7.

punto A.

La diferencia de fase de la señal radiada desde el punto A con respecto al origen (punto O) es  $\beta(OM)$  donde  $OM = x \cos \theta$  por lo tanto la señal irradiada del elemento  $dx$  es  $\beta x \cos \theta$ , tomando en cuenta esto, la expresión del campo queda en la siguiente forma:

$$dE = j \frac{60\pi I_0}{\lambda_0} \frac{e^{-j\beta r}}{r} e(\theta) e^{-j\beta n x} \cdot e^{j\beta x \cos \theta}$$

Arreglando esta expresión se tiene:

$$dE = j \frac{60\pi I_0}{\lambda_0} \frac{e^{-j\beta r}}{r} e(\theta) e^{-j\beta x(n - \cos \theta)} \quad (2.19)$$

La expresión del campo total de la antena se obtiene integrando (2.19) a lo largo de toda la longitud de la antena; esto es:

$$\int dE = j \frac{60\pi I_0}{\lambda_0} \frac{e^{-j\beta r}}{r} e(\theta) \int_{x=0}^L e^{-j\beta x(n - \cos \theta)} dx$$

para efectuar la integral sea:

$$\frac{1}{T} = j \frac{60\pi I_0}{\lambda_0} \frac{e^{-j\beta r}}{r} e(\theta)$$

entonces

$$E = \frac{1}{T} \int_{x=0}^L e^{-j\beta x(n - \cos \theta)} dx$$

realizando la integral:

$$E = \frac{1}{T} \frac{1}{-j\beta(n-\cos\theta)} \left[ e^{-j\beta x(n-\cos\theta)} \right]_0^L$$

$$E = \frac{1}{T} \frac{1}{-j\beta(n-\cos\theta)} \left[ e^{-j\beta(n-\cos\theta)l} \right]_0^L$$

$$E = \frac{1}{T} \frac{1}{-j\beta(n-\cos\theta)} e^{-j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)} \left[ e^{-j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)} - e^{j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)} \right]$$

$$E = \frac{1}{T} \frac{1}{-j\frac{2\beta}{2}(n-\cos\theta)} e^{-j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)} \left[ e^{-j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)} - e^{j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)} \right]$$

$$E = \frac{1}{T} \frac{1}{\frac{\beta}{2}(n-\cos\theta)} e^{-j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)} \left[ \frac{e^{-j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)} - e^{j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)}}{-2j} \right]$$

Reacomodando términos se tiene:

$$E = \frac{1}{T} \frac{1}{\frac{\beta}{2}(n-\cos\theta)} e^{-j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)} \left[ \frac{e^{-j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)} - e^{j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)}}{-2j} \right]$$

De la relación:

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$$

se tiene

$$E = \frac{1}{T} \frac{1}{\frac{\beta}{2}(n-\cos\theta)} e^{-j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)} \operatorname{sen}\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)$$

multiplicando y dividiendo por  $l$ :

$$E = \frac{l}{T} \frac{1}{\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)} e^{-j\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)} \operatorname{sen}\frac{\beta L}{2}(n-\cos\theta)$$

Sea

$$\psi = \frac{\beta L}{2}(n - \cos\theta) = \frac{\pi L}{\lambda_0}(n - \cos\theta) = \pi L \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{\cos\theta}{\lambda_0} \right) \quad (2.20)$$

Por lo tanto el campo es de la forma:

$$E = \frac{L}{r} e^{-j\psi} \frac{\text{sen}\psi}{\psi}$$

Y la ecuación completa es:

$$E = j \frac{60\pi I_0 L}{\lambda_0 r} \frac{e^{-j\beta r}}{r} c(\theta) e^{-j\psi} \frac{\text{sen}\psi}{\psi}$$

Considerando sólo la amplitud del campo se tiene:

$$E = \frac{60\pi I_0 L}{\lambda_0 r} c(\theta) \frac{\text{sen}\psi}{\psi}$$

La ecuación anterior se puede expresar en las siguientes dos formas:

$$E \doteq \frac{60\pi I_0 L c(\theta)}{\lambda_0 r} \frac{\text{sen} \left[ \frac{\beta L}{2}(n - \cos\theta) \right]}{\frac{\beta L}{2}(n - \cos\theta)} \quad (2.21)$$

$$E \doteq \frac{60\pi I_0 L c(\theta)}{\lambda_0 r} \frac{\text{sen}\pi L \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{\cos\theta}{\lambda_0} \right)}{\pi L \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{\cos\theta}{\lambda_0} \right)}$$

En estas expresiones, la función es de la forma  $\text{sen}z/z$  la cual es máxima cuando  $z=0$ ; o sea la radiación es máxima cuando:

$$\cos\theta_0 = \lambda_0/\lambda = c/V_f = n$$

Analizando las diferentes condiciones se tiene:

1. Cuando  $n \leq 1$ , la velocidad de fase de la onda es mayor o igual que la velocidad de la luz.
2. Cuando  $n = 0$ , la velocidad de fase de la onda es igual a infinito y el ángulo para la radiación máxima  $\theta_0$  es  $90^\circ$
3. Cuando  $n$  tiende a uno, la velocidad de fase de la onda se aproxima a la velocidad de la luz y la dirección de la radiación máxima se aproxima al eje de la antena ( $\theta_0$  tiende a  $0^\circ$ ).

Los campos que existen en una antena dieléctrica son una combinación de los modos TE y TM, los cuales son conocidos como modos híbridos, estos modos tienen una frecuencia de corte excepto el modo  $HE_{11}$  y cuando una varilla de dieléctrico es utilizada como una antena, el diámetro es cambiado de tal forma que sólo este modo se propague. Bajo estas condiciones  $e(\theta)$  es diferente de cero a lo largo del eje de la antena,  $\lambda$  es del mismo orden que  $\lambda_0 (\lambda_0 / \lambda > 1)$  y la radiación está dirigida sobre el eje de la antena.

Con el objeto de que la antena dieléctrica esté terminada con su impedancia característica; o sea que no existan ondas estacionarias el diámetro de la varilla dieléctrica se disminuye linealmente desde su base a su extremidad donde es terminada en forma de cúpula hemisférica.

La variación del diámetro producirá una varia-

ción en la longitud de onda a lo largo del dieléctrico y -  
modificará el patrón de la antena.

En el extremo disminuido de la antena, este debe  
rá ser acoplado al espacio libre y la relación  $n = \lambda_0 / \lambda = c/v_f = 1$ . Esto es que la impedancia del modo  $HE_{11}$  se aproxima a la impedancia del espacio libre ( $120\pi$ ) cuando  $d/\lambda_0$  se aproxima a cero, donde  $d$  es el diámetro de la antena. Esto significa que cuando  $d/\lambda_0$  es pequeña la energía es transferida en su mayor parte fuera del dieléctrico.

La expresión (2.21) es sólo aproximada, pero si la longitud no excede unas cuantas longitudes de onda y  $e(\theta) = \cos\theta$  se empleará la expresión (2.21) para obtener el patrón de radiación de una antena dieléctrica; o sea que:

$$E \doteq \frac{60\pi I_0 L \cos(\theta)}{\lambda_0 r} \frac{\text{sen}\pi L \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{\cos\theta}{\lambda_0} \right)}{\pi L \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{\cos\theta}{\lambda_0} \right)} \quad (2.22)$$

normalizando el valor  $60\pi I_0 / r$  se tiene:

$$E \doteq \frac{I}{\lambda_0} \cos\theta \frac{\text{sen}\pi L \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{\cos\theta}{\lambda_0} \right)}{\pi L \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{\cos\theta}{\lambda_0} \right)} \quad (2.23)$$

Y el patrón normalizado es:

$$E_n \doteq \frac{E}{E_0} \quad \text{donde } E_0 = E \text{ para } \theta = 0^\circ$$

La longitud de una antena dieléctrica se obtiene de la siguiente relación<sup>9</sup>:

$$\frac{L}{\lambda_0} = \frac{1}{2(n - \cos\theta)} \quad (2.24)$$

para que la máxima radiación de energía se localice en el eje de la antena se requiere que  $\theta = 0^\circ$ ; entonces:

$$\frac{L}{\lambda_0} = \frac{1}{2(n-1)} \quad (2.25)$$

El ancho del haz para los puntos de media potencia<sup>9</sup> está dado por:

$$\begin{aligned} B &\doteq 2\sqrt{0.28} \lambda_0 / L \quad (\text{rad.}) \\ B &\doteq \frac{60.63}{\sqrt{L/\lambda_0}} \quad (\text{grados}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Cálculo de la ganancia.

De la definición de directividad dada en el capítulo uno, se tiene que  $D=G/k$ , si consideramos que la antena está radiando eficientemente, entonces  $k=1$  y la ganancia máxima (teórica) está en función del área del haz por la siguiente relación:

9. Ver referencia No. 7.

$$G \pm \frac{41253}{\theta_1 \phi_1} = \frac{4\pi}{\theta_1 \phi_1} \quad (2.27)$$

donde  $\theta_1$  y  $\phi_1$  corresponde al ancho del haz para los puntos de media potencia en los planos  $\theta$  y  $\phi$  respectivamente.

De la expresión (2.27) se observa que el patrón de radiación y la ganancia están íntimamente relacionados y conociendo el patrón puede calcularse la ganancia de la antena. Para una antena dieléctrica el ancho del haz para los puntos de media potencia está dado por la relación -- (2.26). Entonces sustituyendo (2.26) en (2.27) se tiene:

$$G \pm \frac{41253}{(60.63^\circ)^2} \frac{L}{\lambda_0} \pm 11.2 \frac{L}{\lambda_0} \quad (2.28)$$

La velocidad de fase de la onda en un dieléctrico se define por la relación de la cantidad de energía -- electromagnética transferida por la onda en el interior -- del dieléctrico a la cantidad de energía electromagnética total transferida por la onda a lo largo del dieléctrico -- (fuera del dieléctrico). Esta relación se muestra en la -- fig. 2.2, la cual está en función del diámetro para algunos tipos de dieléctrico. De estas curvas se observa que -- si la varilla de dieléctrico tiene un diámetro pequeño com -- parado con la longitud de onda casi toda la energía es -- transferida por la onda hacia el espacio circundante y la -- velocidad de fase toma aproximadamente el valor de la velo -- cidad de la luz. Ahora si la varilla tiene un diámetro --

grande comparado con la longitud de onda la mayor parte de la energía se encuentra dentro del dieléctrico y la velocidad de fase es determinada por la relación  $v=c/\sqrt{\epsilon_r}$ , donde  $\epsilon_r$  es la permitividad relativa del dieléctrico. De las mismas curvas se observa también que cuando el diámetro de la varilla dieléctrica se aproxima a  $\lambda/2$  la velocidad de fase empieza a caer rápidamente.

El patrón de radiación de una antena dieléctrica está formado por la radiación de energía en las siguientes dos secciones:

1. En la sección de transición de la guía metálica con la varilla de dieléctrico.
2. En el extremo libre de la varilla de dieléctrico.

En el extremo libre de la varilla de dieléctrico la radiación se dirige hacia el eje de la varilla y es altamente direccional, en cambio la radiación en la juntura entre la guía metálica y la varilla dieléctrica origina una área igual a la sección de la guía metálica donde existe una baja directividad. Las dos formas del patrón de radiación de la antena dependen tanto de la longitud de onda como del diámetro de la varilla dieléctrica.

En una antena dieléctrica las amplitudes de los campos en el plano E ( $\phi=0$ ) y en el plano H ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ ) muestran un lóbulo delantero y un cierto número de lóbulos laterales los cuales son originados por la radiación que escapa de la alimentación.

## 2.4. DATOS DE DISEÑO PARA UNA ANTENA DIELECTRICA.

Del modelo de un arreglo endfire para una antena dieléctrica, se ha obtenido que la directividad de dicha antena aumenta cuando  $n=\lambda_0/\lambda$  se incrementa, donde  $\lambda_0$  y  $\lambda$  es la longitud de onda en el espacio libre y en el dieléctrico respectivamente, por lo tanto un valor cercano a  $n=1.1$  puede usarse para proporcionar una característica óptima de radiación, esta característica se obtiene de la consideración de que no existen ondas estacionarias a lo largo de la varilla dieléctrica; esto implica que la varilla dieléctrica ha sido acoplada al espacio libre en el extremo de la antena.

Las expresiones de diseño<sup>10</sup> para el diámetro de la varilla cerca de la alimentación  $d_{max}$  y el diámetro de la varilla en el extremo libre  $d_{min}$  se obtienen teóricamente a partir de la condición  $n=1.1$  y  $n=1$ , siendo:

$$d_{max} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\pi(\epsilon_r - 1)}} \quad (2.29)$$

$$d_{min} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2.5\pi(\epsilon_r - 1)}} \quad (2.30)$$

donde  $\epsilon_r$  es la permitividad relativa del dieléctrico.

10. Ver referencia No. 14.

Desde el punto de vista del diseño las expresiones (2.29) y (2.30) se usan como fórmulas de trabajo en el diseño de antenas dieléctricas.

La característica de radiación óptima para una antena dieléctrica está en función de la constante dieléctrica del material y de la frecuencia. La ganancia aumenta para un incremento en la longitud de la antena (como se observa de la ecuación 2.28), pero esta relación no es lineal; esto significa que un incremento considerable en la longitud de la antena no traerá consigo un incremento correspondiente en la ganancia de la antena.

## **CAPITULO TRES.**

### **DISEÑO Y CONSTRUCCION**

Para el diseño y construcción de la antena dieléctrica nos basaremos en los datos obtenidos en el capítulo dos.

El material dieléctrico que se utilizó para -- construir la antena fue de lucita conocido comercialmente como acrílico o plexiglass, el cual tiene una constante -- dieléctrica de 2.56 y un índice de refracción absoluto -- igual a 1.6. La antena es de forma cilíndrica disminuida linealmente y es diseñada para que trabaje a una frecuencia de 9 Ghz.

De las expresiones de diseño para una antena dieléctrica dadas por las ecuaciones (2.29) y (2.30) en función de la permitividad relativa del material dieléctrico, se tiene:

$$d_{\max} \doteq \frac{\lambda_0}{\sqrt{\pi(2.56-1)}} \quad (3.1)$$

Y

$$d_{\min} \doteq \frac{\lambda_0}{\sqrt{2.5\pi(2.56-1)}} \quad (3.2)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda en el espacio libre - - - ( $\lambda_0 = c/f$ ). Como la frecuencia de operación de la antena es de 9 Ghz. entonces

$$\lambda_0 = c/f = 3.33 \text{ cm} \quad (3.3)$$

Por lo tanto los diámetros de la antena tienen las siguientes dimensiones.

$$d_{\max} = 1.506 \text{ cm.} \quad (3.4)$$

y

$$d_{\min} = 0.953 \text{ cm.} \quad (3.4)$$

Para obtener la longitud de la antena, se observa de la ecuación (2.25) que la longitud está en función del índice de refracción absoluto; o sea que:

$$\frac{L}{\lambda_0} = \frac{1}{2(n-1)}$$

donde:

$$n = \frac{\lambda_0/L + 2}{2} \quad (3.6)$$

Para que la antena dieléctrica esté radiando en forma óptima se escoge un valor del índice de refracción absoluto ( $n$ ) cercano a 1.1. De la ecuación (3.6) para obtener un valor de  $n$  cercano a 1.1 se le asigna a la antena un valor de  $L/\lambda_0 = 4$ . De acuerdo a esto la antena tiene una longitud igual a:

$$L = 4\lambda_0 = 13.33 \text{ cm.} \quad (3.7)$$

La expresión aproximada para el patrón de radiación (ecuación 2.23) es:

$$E = \frac{L}{\lambda_0} \cos \theta \frac{\text{sen} \pi L \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{\cos \theta}{\lambda_0} \right)}{\pi L \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{\cos \theta}{\lambda_0} \right)}$$

de la característica de óptima radiación se tiene que para  $n=\lambda_0/\lambda=1.1$ ,  $L/\lambda_0=4$  por lo tanto  $L/\lambda=4.4$ .

Entonces el patrón de radiación queda en la siguiente forma:

$$E \doteq 4 \cos \theta \frac{\text{sen} \pi (4.4 - 4 \cos \theta)}{\pi (4.4 - 4 \cos \theta)} \quad (3.8)$$

para  $\theta=0^\circ$   $E_m=3.027$ ; así que el patrón normalizado es:

$$E_n \doteq \frac{4}{3.027} \cos \theta \frac{\text{sen} \pi (4.4 - 4 \cos \theta)}{\pi (4.4 - 4 \cos \theta)} \quad (3.9)$$

Finalmente la ganancia y el ancho del haz para la característica de óptima radiación valen aproximadamente:

$$G = 11.2L/\lambda_0 = 11.4(4)=44.8 \quad (3.10)$$

$$G=10 \log(44.8)=16.5 \text{ decibels} \quad (3.11)$$

y

$$B=2\sqrt{0.28(1/4)} = 0.529 \text{ rad.} = 30.3^\circ. \quad (3.12)$$

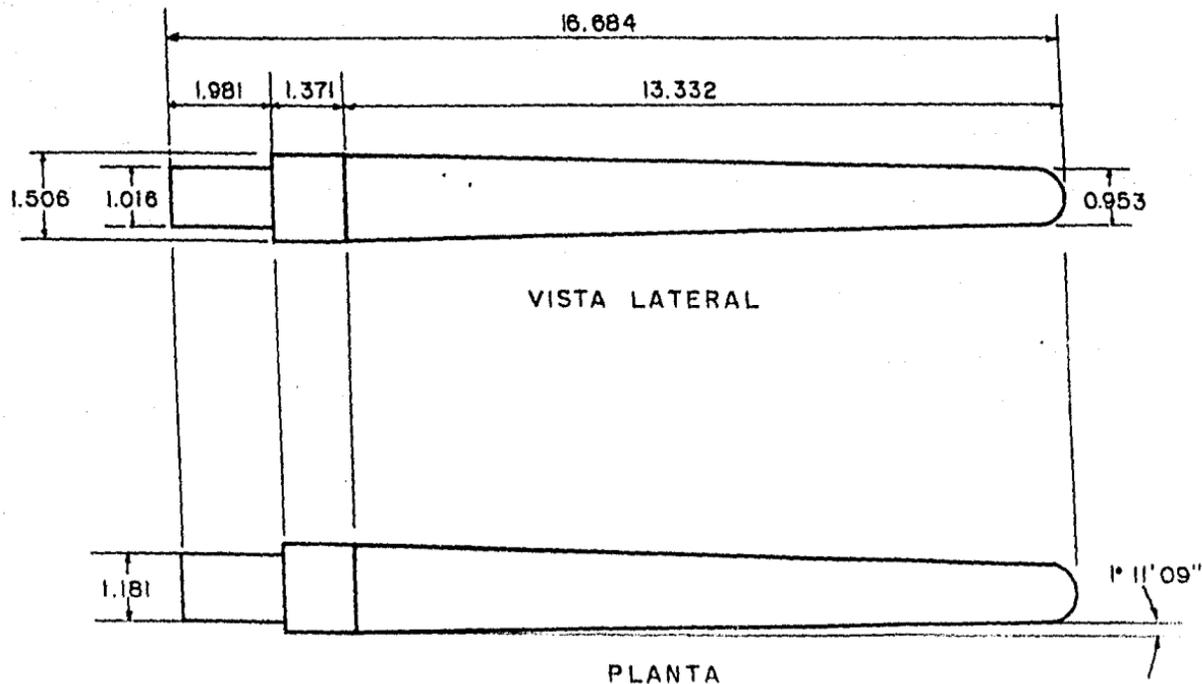
La pieza de dieléctrico que se utilizó para -- construir la antena fué obtenida de una placa de lucita -- de 2.5 cm. de espesor, para darle la forma cilíndrica con la disminución lineal fue necesario torPEARLA y después -- con una fresadora se hizo el rectángulo de 1.016x1.181cm. como se muestra en la fig. 3.1. La antena dieléctrica se alimenta por una sección de gufa de onda rectangular que

opera bajo el modo  $TE_{10}$ <sup>1</sup>. El acoplamiento de la guía de onda a la antena se efectuó por medio de un diafragma inductivo o sea dos placas metálicas (cuñas) de  $1.981 \times 1.016 \times 0.552$  cm. que fueron soldados sobre la sección transversal de la guía (perfil tubular de  $2.286 \times 1.016$  cm.) donde la abertura del diafragma (1.181 cm.) está en función de la sección transversal de la guía de onda y del diámetro máximo (1.506 cm.) de la antena como se muestra en la fig. 3.2. Para que la antena (varilla dieléctrica) quede unida directamente a la guía de onda se construyó una pieza auxiliar que sirve de apoyo o sostén de la antena, la forma y las dimensiones de esta pieza se muestran en la fig. 3.3. Las piezas número dos y tres (figs. 3.2 y 3.3) fueron hechas de latón.

---

1. Los datos técnicos de la guía de onda rectangular y del "flange" para la banda de frecuencias de 8.2 a 12.4 Ghz. fueron tomados de la referencia No. 16.

PIEZA NUMERO UNO. VARILLA DE DIELECTRICO (ANTENA).



113

Fig. 3.1.

ACOTACIONES EN CM  
ESCALA 1:1

## PIEZA NUMERO DOS.

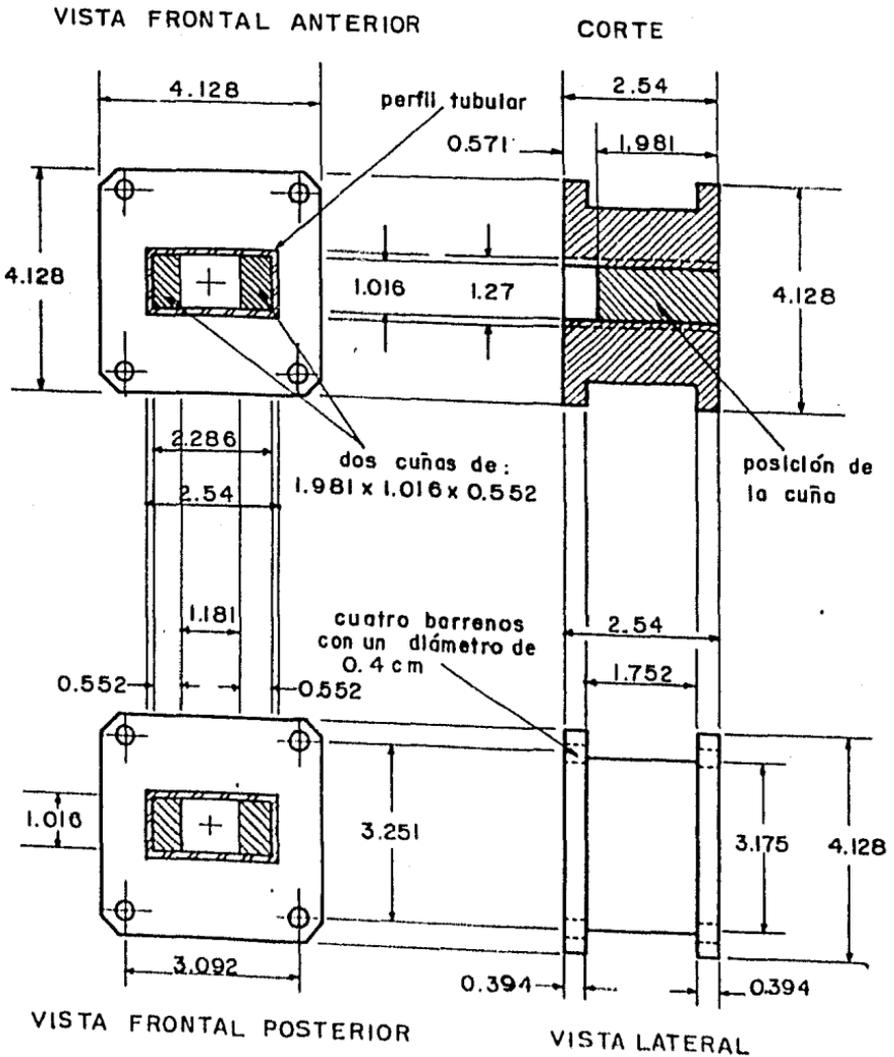


Fig. 3.2.

ACOTACIONES EN CM  
ESCALA 1:1

## PIEZA NUMERO TRES.

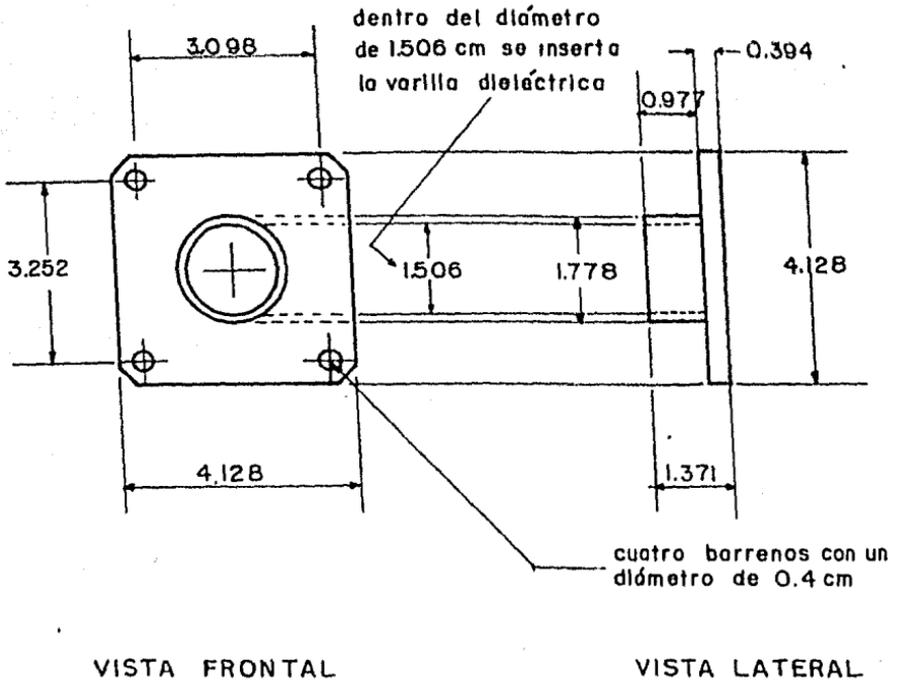


Fig. 3.3.

## **CAPITULO CUARTO**

### **PRUEBAS Y RESULTADOS**

Una vez construída la antena dieléctrica se procede a medir el patrón de radiación, la ganancia, el SWR y la impedancia de la antena.

#### 4.1. MEDICION DEL PATRON DE RADIACION.

Para medir el patrón de radiación se utilizó el circuito mostrado en la fig. 4.1. La separación entre las antenas<sup>1</sup> es para una distancia mayor que R, donde R es el límite entre el campo cercano y el campo lejano<sup>2</sup>. La distancia R está dada por la siguiente relación:

$$R = \frac{2L^2}{\lambda_0} \quad (4.1)$$

donde L es la longitud de la antena (13.33 cm.).

$\lambda_0$  es la longitud de onda en el espacio libre (3.33 cm.)

El patrón de radiación se obtuvo para una distancia igual a 1.15 mts. aproximadamente. El patrón de -

- 
1. La antena receptora es una antena tipo corneta con una disminución exponencial, sus dimensiones se muestran en el capítulo cinco.
  2. La frontera de estas dos regiones se toma en los puntos donde la onda esférica se aproxima a una onda plana y la definición generalmente aceptada del campo lejano es la distancia a partir de una antena donde la onda esférica tiene una diferencia de fase menor de  $1/16\lambda$  (aproximadamente  $22.5^\circ$ ) con respecto a la onda plana.

radiación normalizado se realiza en coordenadas rectangulares el cual se muestra en la fig. 4.2, donde aparece también el patrón normalizado teórico, de dicho patrón se obtiene que el ancho del haz a 3 decibetes<sup>3</sup> es aproximadamente 32°. Se observa que el patrón de radiación teórico obtenido a partir de la ecuación (3.9) es aproximado y empírico, ya que en la ecuación (3.9) un valor de  $n=1.1$  fue asignado, en la práctica el valor de  $n$  varía a lo largo de la antena. El ancho del haz a 3 decibetes del patrón medido es aproximadamente 29.7°.

#### 4.2. MEDICION DE LA GANANCIA.

Existen dos métodos para medir la ganancia de una antena. Un método consiste en comparar la ganancia de una antena desconocida con la ganancia de una antena cuya ganancia es conocida. El otro método consiste en usar dos antenas idénticas una como transmisora y otra como receptora.

Para medir la ganancia de una antena dieléctrica se utilizó el método de comparación (donde la antena con ganancia conocida fué una antena tipo corneta) y con

---

3. El ancho del haz a los 3 decibetes es el ángulo entre dos puntos del lóbulo mayor donde la intensidad de potencia es la mitad de la intensidad de potencia máxima.

ayuda de la ecuación de Friis (pérdida de propagación entre antenas directivas) se obtiene que:

$$G = \frac{4\pi R}{\lambda_0} \sqrt{\frac{P_r}{P_t}} \quad (4.2)$$

donde R es el límite entre el campo cercano y el campo lejano, el cual está definido por la ecuación (4.1). Pr y Pt son la potencia de recepción y de transmisión respectivamente.

La ganancia se midió para una separación entre las antenas de 1.15 mts., se tomó una Pr=40 decibeles como referencia y después se midió Pt obteniéndose una Pt=16.7 decibeles. Como las mediciones se obtuvieron en decibeles (1 decibel = 10log Pt/Pr) es necesario obtener la relación Pt/Pr, entonces

$$\frac{P_r}{P_t} = \text{antilog}\left(\frac{P_t - P_r}{10}\right) = \text{antilog}\left(\frac{16.7 - 40}{10}\right)$$

$$\frac{P_r}{P_t} = 0.00468$$

Con los datos obtenidos la ganancia es:

$$G = \frac{4\pi(1.15)}{3.33} \sqrt{0.00468} = 29.68$$

Finalmente la ganancia en decibeles es

$$G = 10\log(29.68) = 14.7 \text{ decibeles.}$$

la ganancia en función del ancho del haz medido vale

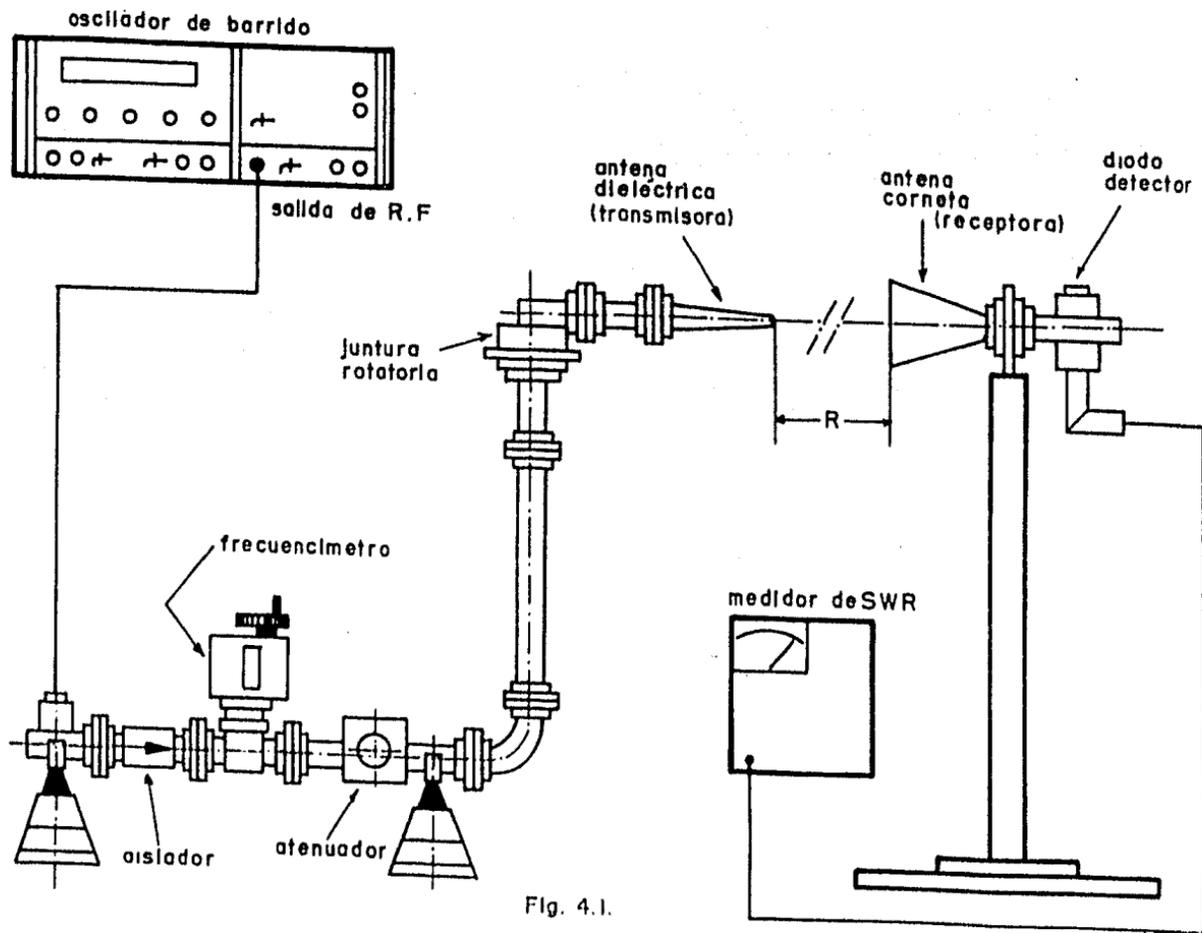


Fig. 4.1.

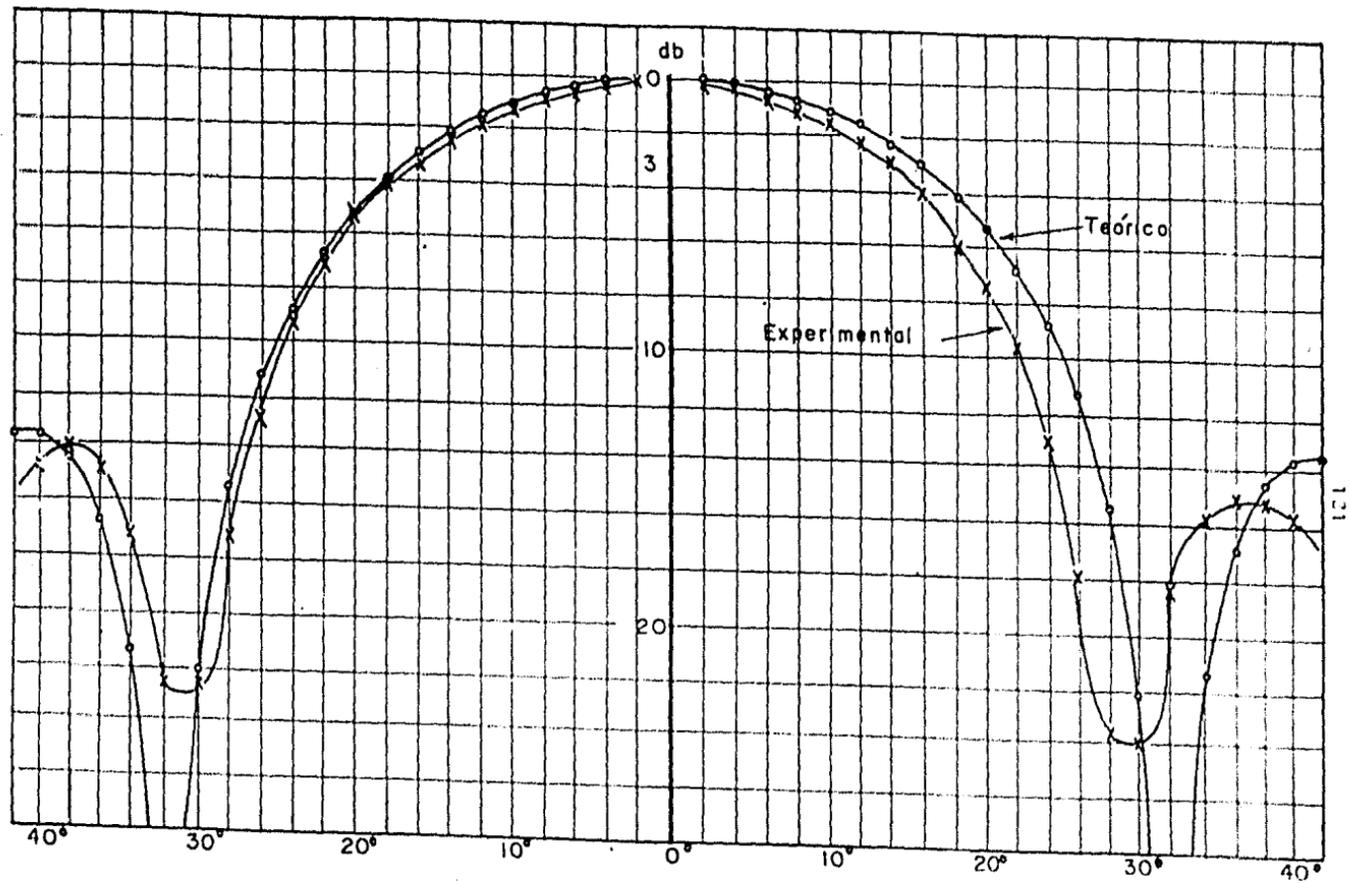


Fig. 4.2. Patrón de radiación de una antena dieléctrica.

$$G = \frac{41253}{(29.7^\circ)^2} = 46.73$$

$$G = 16.6 \text{ decibeles}$$

Donde se observa que hay una diferencia de 1.9 decibeles entre la ganancia teórica y la medida, ya que en la ganancia teórica dada por la ecuación (3.10) el índice de refracción se considera que permanece constante a lo largo de la antena.

#### 4.3. MEDICION DEL SWR Y LA IMPEDANCIA.

Para medir la impedancia de una carga es necesario definir el plano en el cual la impedancia es referida, este plano de referencia puede ser las terminales de entrada de la carga. El procedimiento para medir la impedancia se describe a continuación:

- I. Se conecta el equipo como se muestra en la fig. 4.3.
  - II. Se mide el  $SWR^d$  provocado por la carga y se anota la
- 
4. Existen varios métodos para medir el SWR con una línea ranurada (en la línea ranurada una parte del campo eléctrico excita a una antena de prueba que es colocada en el interior de la guía). Si el SWR es menor de 2 ó 3 el SWR es obtenido directamente con un medidor de SWR, este método es bastante exacto cuando la profundidad de la antena de prueba es pequeña y no distorsiona el campo en la guía. Si el SWR toma valores medios entre 3 y 10 el SWR es obtenido por el método del atenuador calibrado. Si el SWR toma valores grandes mayores de 10 el SWR es obtenido por el método de los 3 decibeles (método del doble mínimo). Aquí se utilizó sólo el método directo.

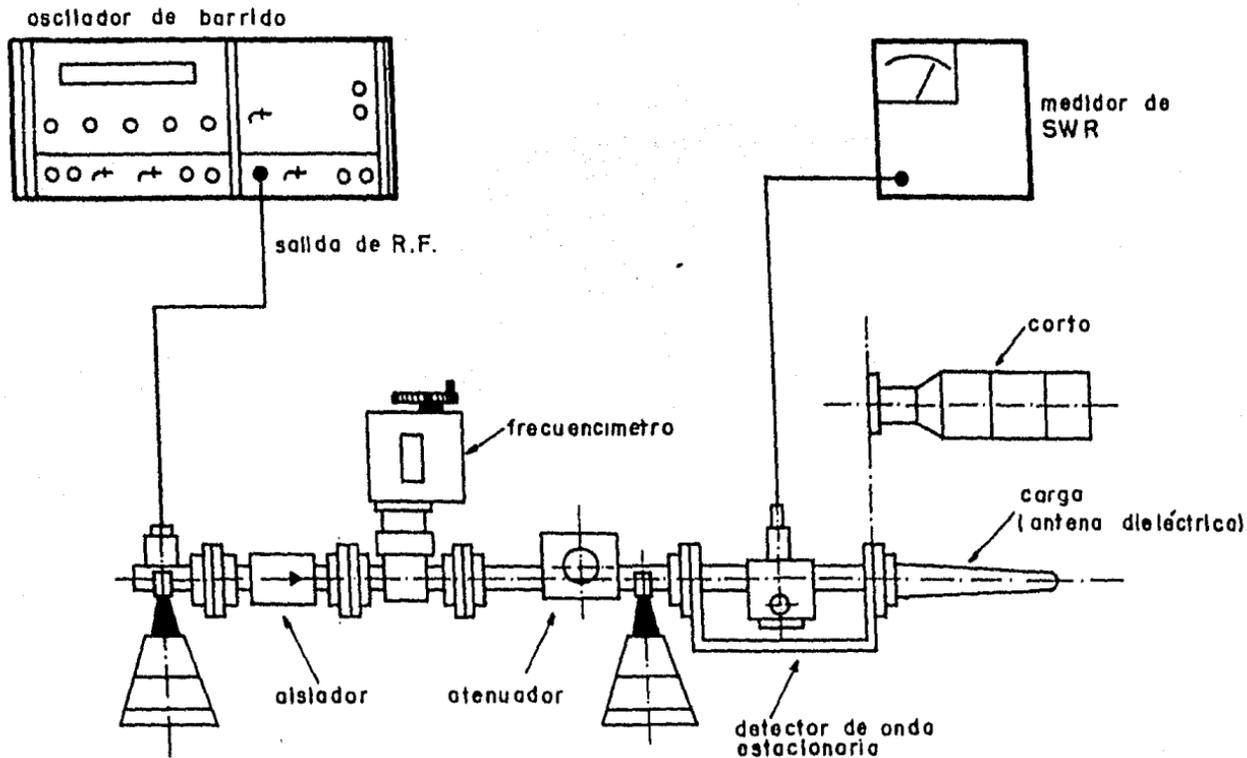


Fig.4.3. Circuito para medir la impedancia de una antena.

distancia a la que se encontró el SWR, siendo

$$\text{SWR} = 1.5 \text{ para una distancia } d_1 = 63.6 \text{ mm.}$$

III. Se desconecta la carga y se conecta al detector de onda estacionaria (línea ranurada) el corto variable en el mismo plano de la carga (posición cero del corto). En la fig. 4.4 se ilustra la distribución de las ondas estacionarias provocadas por el corto y la carga a medir.

IV. Se localiza y se anota la posición de dos mínimos sucesivos  $d_{c2}$  y  $d_{c1}$  los cuales son los mínimos más próximos a la distancia  $d_1$ . La diferencia de estos dos mínimos -- multiplicados por dos corresponde a la longitud de onda de la guía; o sea:

$$d_{c2} = 85.7 \text{ mm.} \quad \text{y} \quad d_{c1} = 61.3 \text{ mm.}$$

$$\lambda_g = (d_{c2} - d_{c1}) \times 2 = (85.7 - 61.2) \times 2 = 49 \text{ mm.}$$

se desconecta el equipo.

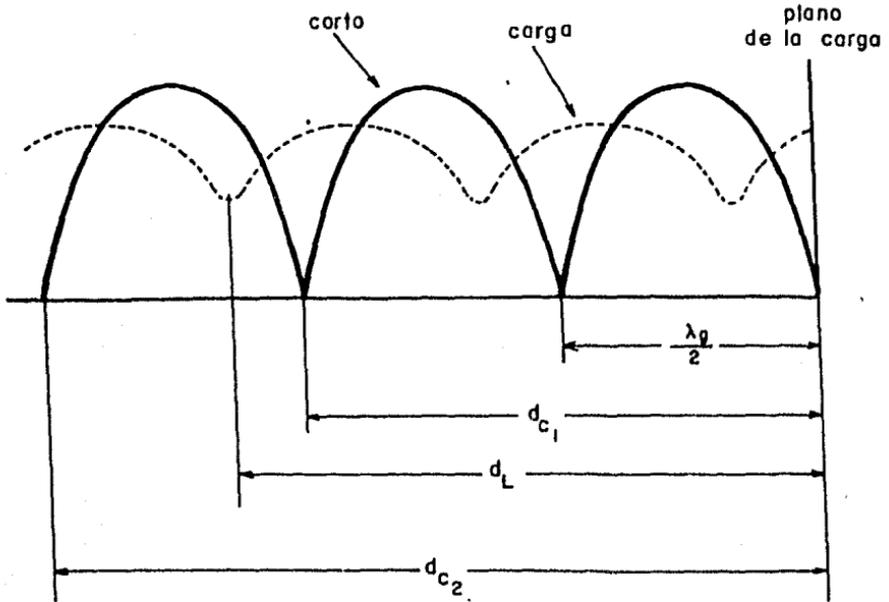


Fig. 4.4.

V. Calcular:

$$P_1 = \frac{d_L - d_{c1}}{\lambda_g} = \frac{63.6 - 61.3}{49} = 0.04898$$

y

$$P_2 = \frac{d_{c2} - d_L}{\lambda_g} = \frac{85.7 - 63.5}{49} = 0.45102$$

VI. Trazar un círculo en la carta de Smith, cuyo radio es el valor del SWR medido y cuyo centro es el punto (1,0) de la carta. Localizar el punto  $P_1$  en la escala de la carta marcada como "longitud de onda hacia la carga" o bien el punto  $P_2$  en "longitud de onda hacia el generador".

VII. Trazar una recta del punto  $P_1$  o  $P_2$  al punto  $(1,0)$ , - la intersección de esta recta con el círculo trazado en - el punto VI da el valor de la impedancia normalizada (fig. 4.5), siendo:

$$Z_n = 0.71 - j0.17$$

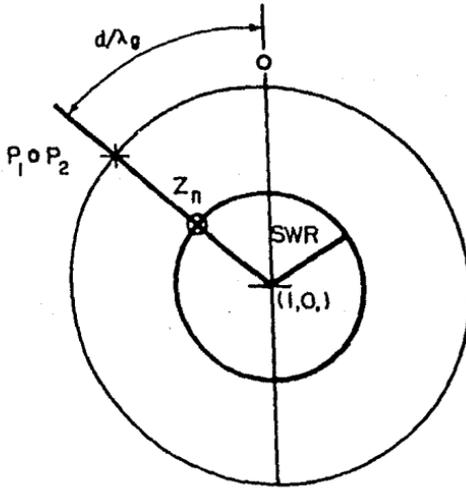


Fig. 4.5.

La impedancia normalizada vale:

$$Z_n = \frac{Z_c}{Z_0}$$

donde  $Z_0$  es la impedancia característica de la línea de - transmisión que en este caso es una guía de onda rectangu - lar bajo el modo  $TE_{10}$ , siendo:

$$Z_{0TE_{10}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}$$

donde:  $\eta = 120\pi$  ohms. (impedancia intrínseca del espacio-libre).

$a = 2.286$  cm. (ancho de la guía de onda rectangular).

$\lambda_0 = 3.33$  cm. (ya que la medición se realizó a 9 - Ghz.

Entonces

$$Z_{0TE_{10}} = 550.18 \text{ ohms}$$

Finalmente

$$Z_c = Z_n Z_o = 390.62 - j93.53 \text{ ohms.}$$

## **CAPITULO CINCO.**

**ANALISIS COMPARATIVO DE UNA ANTENA  
DIELECTRICA CON OTROS TIPOS DE AN-  
TENAS EMPLEADAS EN MICROONDAS.**

En este capítulo se hará un análisis comparativo de una antena dieléctrica con una antena tipo corneta y una antena parabólica. El análisis se obtendrá en función de la medición del patrón de radiación, la ganancia y el SWR de las antenas.

Las antenas utilizadas aquí corresponden a una antena tipo corneta con una disminución exponencial<sup>1</sup> cuyas dimensiones se muestran en la fig. 5.1.

ACOTACIONES EN CM  
ESCALA 1:1

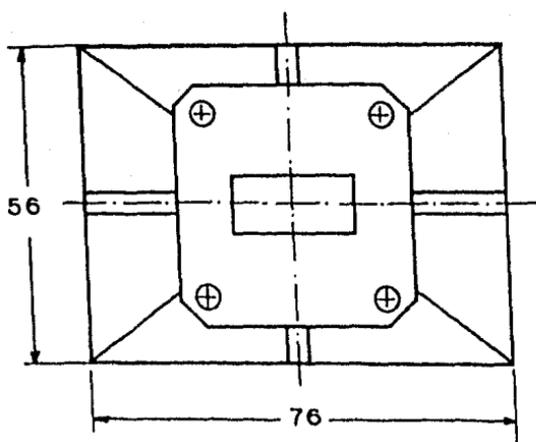


Fig.5.1.

La antena parabólica consiste de un reflector parabólico que tiene un diámetro de 25.5 cm. y es alimentada

1. Las especificaciones de esta antena pueden verse en la referencia No. 17.

tada por dos dipolos de media longitud de onda con una separación de un cuarto de longitud de onda como se muestra en la fig. 5.2, el dipolo A actúa como director y el dipolo B se comporta como reflector.

Los límites del campo cercano y del campo lejano de las antenas tipo corneta y parabólica están dados respectivamente por:

$$R = \frac{2L^2}{\lambda_0} \quad (5.1)$$

y

$$R = \frac{2D^2}{\lambda_0} \quad (5.2)$$

donde: L es la dimensión mayor de la antena tipo corneta.

D es el diámetro del reflector parabólico.

Para medir los parámetros de las antenas tipo corneta y parabólica se efectuó el mismo procedimiento -- que se utilizó para medir los parámetros de la antena dieléctrica y a la misma frecuencia.

A director  
B reflector

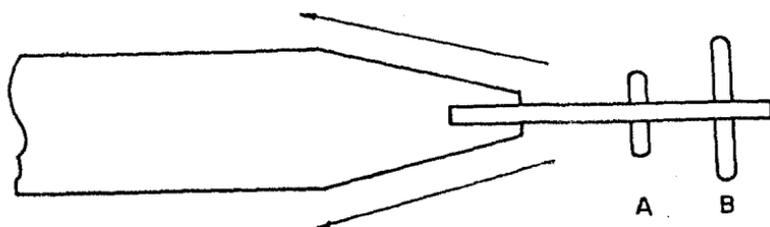


Fig.5.2.

#### 5.1. MEDICION DEL PATRON DE RADIACION.

Para obtener el patrón de radiación de una antena tipo corneta, se utilizaron dos antenas tipo corneta - de iguales características (una como transmisora y otra - como receptora) a una distancia de 50 cm. (en el campo lejano). Para la antena parabólica, se utilizó una antena tipo corneta como receptora y una antena parabólica como transmisora a una distancia de 4 mts. Los patrones normalizados obtenidos se muestran en la fig. 5.3. Donde se observa que el ancho del haz a 3 decibeles para la antena tipo corneta es de  $24^\circ$  aproximadamente y para la antena parabólica es de aproximadamente  $9.6^\circ$ .

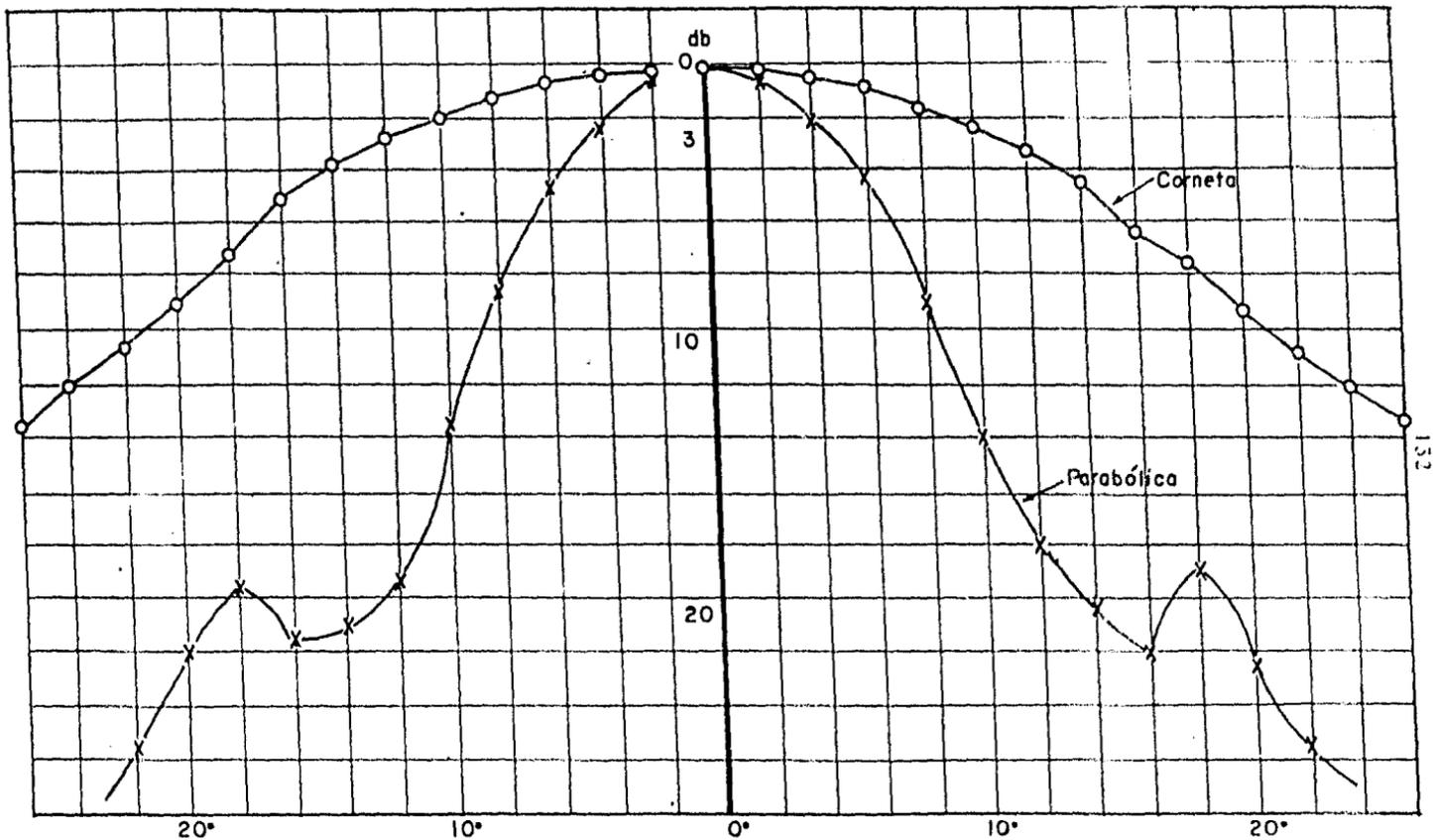


Fig. 5.3. Patrón de radiación de una antena tipo corneta y parabólica.

## 5.2. MEDICION DE LA GANANCIA.

Para medir la ganancia de las antenas tipo corneta y parabólica se utilizaron los mismos tipos de antenas empleadas para medir el patrón de radiación.

Antena tipo corneta

$P_r = 40$  decibeles a una distancia igual a 50 cm.  
de la antena transmisora.

$P_t = 24.3$  decibeles

entonces

$$\frac{P_r}{P_t} = \text{antilog} \left( \frac{24.3 - 40}{10} \right) = 0.0269$$

por lo que

$$G = \frac{4\pi(50)}{3.33} \cdot \sqrt{0.0269}$$

$$G = 10 \log(30.95) = 14.9 \text{ decibeles.}$$

Antena parabólica<sup>2</sup>.

$P_r = 40$  decibeles a una distancia igual a 4 mts.  
de la antena transmisora

$P_t = 18.4$  decibeles

entonces

$$\frac{P_r}{P_t} = \text{antilog} \left( \frac{18.4 - 40}{10} \right) = 0.0069$$

---

2. Aquí se utilizó el método de comparación.

finalmente

$$G = \frac{4\pi(400)}{3.33} \sqrt{0.0069} = 125.55$$

$$G = 10\log(125.55) = 21 \text{ decibeles}$$

### 5.3. MEDICION DEL SWR Y LA IMPEDANCIA.

Para la antena tipo corneta se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\text{SWR} = 1.14 \quad \text{para una} \quad d_1 = 72.8$$

después

$$d_{C1} = 61.8\text{mm} \quad d_{C2} = 85.8 \text{ mm.}$$

entonces

$$\lambda_g = (85.8 - 61.8) \times 2 = 49 \text{ mm}$$

calculando

$$P_1 = \frac{72.8 - 61.8}{49} = 0.2347 \text{ (longitud de onda hacia la carga)}$$

$$P_2 = \frac{85.8 - 72.8}{49} = 0.2653 \text{ (longitud de onda hacia el generador)}$$

Con estos datos obtenidos se va a la carta de Smith y se obtiene la impedancia normalizada de la carga, siendo:

$$Z_n = 1.15 - j0.02$$

como

$$Z_n = \frac{Z_c}{Z_0}$$

donde  $Z_0 = Z_{0_{TE_{10}}} = 550.18$  ohms

entonces

$$Z_c = 632.71 - j11 \text{ ohms.}$$

Para la antena parabólica se obtuvo:

$$SWR = 1.46 \quad \text{a una} \quad d_1 = 89.6 \text{ mm}$$

$$d_{c1} = 86.0 \text{ mm} \quad d_{c2} = 110.5 \text{ mm}$$

por lo que

$$\lambda_g = (110.5 - 86) \times 2 = 49 \text{ mm.}$$

Ahora

$$P_1 = \frac{89.6 - 86}{49} = 0.07347 \quad (\text{longitud de onda hacia la carga})$$

y

$$P_2 = \frac{110.5 - 89.6}{49} = 0.42653 \quad (\text{longitud de onda hacia el generador})$$

localizando estos puntos en la carta de Smith se tiene:

$$Z_n = 0.77 - j0.24$$

finalmente

$$Z_c = 423.64 - j132.04 \text{ ohms.}$$

#### 5.4. COMPARACION.

De los resultados obtenidos en los capítulos -- cuatro y cinco se tiene: En función del patrón de radiación la antena parabólica es la más directiva ya que el ancho del haz de esta antena resultó ser menor que el de-

las antenas tipo corneta y dieléctrica, pero se observa - en las antenas parabólica y dieléctrica lóbulos laterales lo que significa que hay un escape de energía en el punto de alimentación de estas antenas. En función de la ganancia la antena parabólica es la que tiene una mayor ganancia (21 decibeles) por lo tanto es la más eficiente de los tres tipos de antenas. Finalmente en función del SWR la antena tipo corneta tiene el SWR más bajo de los tres tipos de antenas, o sea que la antena tipo corneta es la que tiene menos pérdidas en el punto de alimentación. Se observa también que las antenas dieléctrica y tipo corneta tienen una ganancia parecida pero el ancho del haz de la antena dieléctrica es un poco mayor al de la antena tipo corneta.

De acuerdo a esto una antena dieléctrica resulta ser menos directiva que las antenas tipo corneta y parabólica debido a las pérdidas en el dieléctrico pero tiene algunas ventajas sobre estas antenas tales como: bajo costo (ya que el material dieléctrico es barato), dimensiones pequeñas y poco peso.

## **CAPITULO SEIS.**

### **COSTO Y CONCLUSIONES**

## COSTO

El costo aproximado de la antena dieléctrica es  
obtenido de:

## Operación.

6 horas de taladro	102	
8 horas de fresa	320	
14 horas de torno	437	859

## Energía eléctrica.

6 horas de taladro	30	
8 horas de fresa	96	
14 horas de torno	112	238

## Material.

1.9 Kgs. de latón	190	
Pieza de lucita	50	
4 tornillos de 5/32"	5	245

Desgaste de herramienta<sup>1</sup>.

1 buril de 1/4"	1.20	
1 broca de 5/32"	.75	
1 broca de 3/8"	1.00	
1 machuelo de 5/32"	3.90	
1 lima musa de 4"	1.90	
1 limatón musa 1/4"	1.50	
1 segueta	.60	
1 punto	1.50	
1 pulidor	.50	
1 lija	.15	13

Local 333

Mano de obra<sup>1</sup>. 844

Impuesto 68

T O T A L: 2,600 Pesos M/N

1. Son datos que están en función del uso de la herramienta.

## CONCLUSIONES

Como resultado de este trabajo y teniendo como objetivo el diseño de una antena dieléctrica para trabajar en microondas se recomienda que el material utilizado en la fabricación de la antena tenga un factor de disipación menor de 0.006 ya que de lo contrario la ganancia de la antena se verá disminuída por las pérdidas en el dieléctrico y la eficiencia será pobre.

Las expresiones de diseño de una antena dieléctrica fueron halladas en forma aproximada, donde se observa de acuerdo a los resultados obtenidos que dichas expresiones tienen un pequeño error pues existe una pequeña diferencia entre el ancho del haz teórico que fue de  $32^\circ$  con el ancho del haz medido que fue de  $29.7^\circ$  siendo la diferencia entre el ancho del haz teórico y práctico de  $2.3^\circ$ . Mientras que en la ganancia se tuvo una diferencia de 1.9 decibeles aproximadamente. Por lo tanto las expresiones para el patrón de radiación y la ganancia de la antena dieléctrica dadas por las ecuaciones (2.21) y (2.27) pueden usarse confiablemente con un error aproximado del 9%, también deben tomarse en cuenta las pérdidas adicionales del patrón de radiación debido a las reflexiones que se tengan en el lugar donde se mide.

De acuerdo a los resultados obtenidos una antena di-

eléctrica es un tipo de antena con un campo transversal - máximo sobre el eje de la antena, con una ganancia moderada ( $14.7 \pm 0.3$ ) decibeles y una buena eficiencia, cuya principal utilización es para las frecuencias de microondas.

Las antenas dieléctricas son muy poco afectadas por objetos que están a su alrededor y son especialmente utilizados como elementos de arreglos broadside.

Algunas aplicaciones de las antenas dieléctricas son:

1. Arreglos de antenas dieléctricas utilizadas como alimentadores en reflectores parabólico-cilíndricos.
2. Un arreglo broadside de 42 antenas dieléctricas que ha sido utilizado en radar de control naval por la armada de los Estados Unidos.

A P E N D I C E    A  
TEOREMA DE LA RECIPROCIDAD

Este teorema aplicado a antenas establece que:- Si una fem (fuerza electromotriz) es aplicada a las terminales de una antena 1 y la corriente es medida en las terminales de otra antena 2, entonces una corriente con igual amplitud y fase es obtenida en las terminales de la antena 1 si la misma fem es aplicada a las terminales de la antena 2. Se considera que las fems son de la misma frecuencia y el medio es lineal, pasivo e isotrópico. Una importante consecuencia del teorema de la reciprocidad es que bajo las circunstancias anteriores los patrones de radiación de una antena transmisora y receptora son iguales.

Como ilustración de este teorema se consideran dos casos:

Caso 1. Sea una fem  $V_1$  aplicada a las terminales de la antena 1, la cual actúa como antena transmisora (fig. A.1.a), si una energía fluye hacia la antena 2 la cual actúa como antena receptora se produce una corriente  $I_2$  en las terminales de la antena 2, se considera que el generador proporciona una fem y el ampermetro para la medición de la corriente tiene una impedancia igual a cero si no es cero las impedancias del generador y del ampermetro son iguales.

Caso 2. Si una fem  $V_2$  es aplicada a las terminales de la antena 2 la cual actúa ahora como antena transmisora y -- fluye una energía hacia la antena 1 (fig. A.1.c) se produce una corriente  $I_1$  en las terminales de la antena 1.

Si  $V_2=V_1$  entonces por el teorema de reciprocidad  $I_1=I_2$ .

La relación de una fem a una corriente es una impedancia. En el Caso 1 la relación de  $V_1$  a  $I_2$  es conocida como impedancia de transferencia  $Z_{21}$  y en el Caso 2 la relación de  $V_2$  a  $I_1$  es conocida como impedancia de -- transferencia  $Z_{21}$  y en el Caso 2 la relación de  $V_2$  a  $I_1$  es conocida como impedancia de transferencia  $Z_{21}$ . Entonces por el teorema de la reciprocidad, esto significa que las impedancias son iguales o sea:

$$\frac{V_1}{I_2} = Z_{12} = Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \quad (A,1)$$

Para probar el teorema de la reciprocidad aplicado a antenas, se reemplazan las antenas y el espacio entre ellas por un circuito lineal, pasivo con impedancias bilaterales (circuito de cuatro terminales), el cual es -- reducido a una sección T. El arreglo de antenas del Caso 1 (fig. A.1.a.) es reemplazado por el circuito de la fig. A.1.b.

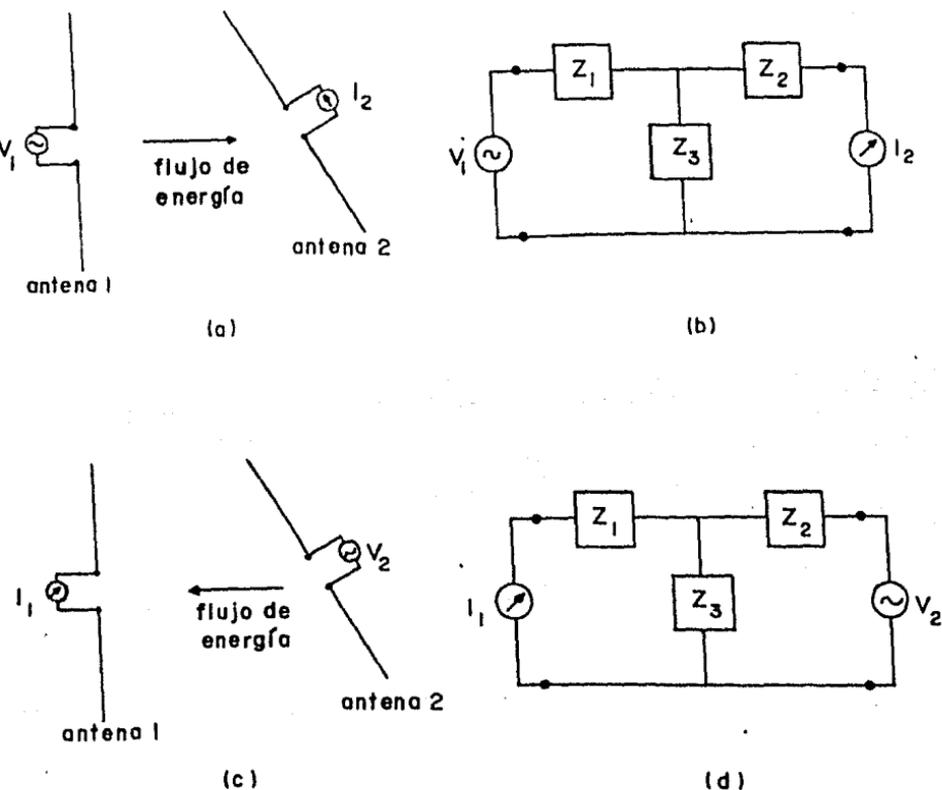


Fig. A.1

La corriente en el medidor de la antena 2 (fig.

A.1.b) es:

$$I_2 = I_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad (\text{A.2})$$

donde

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_1 + \left[ \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \right]} = \frac{V_1 (Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} \quad (\text{A.3})$$

Sustituyendo (A.3) en (A.2), la corriente a través del medidor en función de la fem  $V_1$  y de las impedancias del circuito es:

$$I_2 = \frac{V_1 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \quad (\text{A.4})$$

Si la fem y la corriente se intercambian como se muestra en la fig. A.1.d. se obtiene:

$$I_1 = \frac{V_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \quad (\text{A.5})$$

Comparando (A.5) y (A.4) se observa que  $V_1 = V_2$  cuando  $I_1 = I_2$ .

A P E N D I C E B  
 FUNCIONES DE BESSEL

La ecuación diferencial que aparece en la obtención de los campos en el interior de una guía de onda circular es conocida como ecuación de Bessel, la solución de esta ecuación conduce a las funciones de Bessel. La ecuación de Bessel es de la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dP}{dr} + \left( h^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) P = 0 \quad (\text{B.1})$$

Cuando  $h$  es real y positiva se obtienen dos soluciones independientes de la ecuación (B.1). Estas soluciones son conocidas como funciones de Bessel de primera-segunda clase, denotadas por  $J_n(hr)$  y  $Y_n(hr)$ <sup>1</sup> respectivamente. Dichas soluciones se expresan en forma de series:

$$J_n(hr) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (hr/2)^{n+2m}}{m! (n+m)!} \quad (\text{B.2})$$

$$Y_n(hr) = \frac{2}{\pi} (C + \ln \frac{hr}{2}) J_n(hr) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m)!}{m!} \left( \frac{2}{hr} \right)^{n-2m} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (hr/2)^{n+2m}}{m! (n+m)!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+m} \right) \quad (\text{B.3})$$

1.  $Y_n(hr)$  es también conocida como función de Neuman  $N_n(hr)$

donde  $C=0.5772$  es la constante de Euler. El subíndice  $n$  denota el orden de la función y generalmente es un número entero. La función  $Y_n$  se hace infinita en  $r=0$  y para valores grandes de  $hr$  las funciones de Bessel se aproximan a funciones senusoidales amortiguadas:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} J_n(hr) = \sqrt{\frac{2}{\pi hr}} \cos\left(hr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{B.4})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Y_n(hr) = \sqrt{\frac{2}{\pi hr}} \sin\left(hr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{B.5})$$

En la fig. B.1 aparecen las funciones de Bessel de primera y segunda clase.

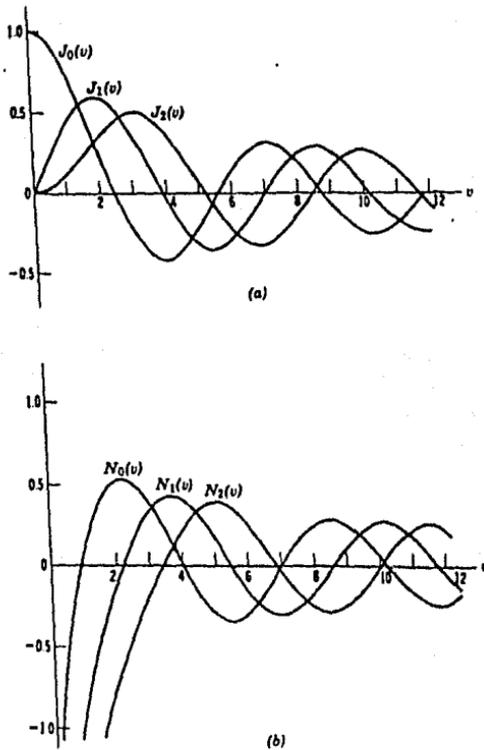


Fig. B.1. Funciones ordinarias de Bessel.

(a) Primera clase. (b) Segunda clase.

Para representar ondas que se propagan radialmente, se forman combinaciones lineales de  $J_n$  y  $Y_n$ , las cuales son conocidas como funciones de Hankel. Las funciones de Hankel de primera y segunda clase son:

$$H_n^1(hr) = J_n(hr) + jY_n(hr) \quad (B.6)$$

$$H_n^2(hr) = J_n(hr) - jY_n(hr) \quad (B.7)$$

Para valores grandes de  $hr$ , las funciones de --

Hankel están dadas por las siguientes expresiones:

$$H_n^1(hr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi hr}} e^{j(hr - \pi/4 - n\pi/2)} \quad (B.8)$$

$$H_n^2(hr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi hr}} e^{-j(hr - \pi/4 - n\pi/2)} \quad (B.9)$$

Cuando  $h^2$  es negativa  $h$  es imaginaria pura -- ( $h=jk$ ), entonces la solución de (B.1) está dada por  $J_n(jkr)$  y  $Y_n(jkr)$ , las cuales son conocidas como funciones modificadas de Bessel y son denotadas por  $I_n(hr)$  y  $K_n(hr)$ . La función modificada de Bessel de primera y segunda clase son

$$I_n(hr) = j^{-n} J_n(jkr) = j^n J_n(-jkr) \quad (B.10)$$

$$K_n(hr) = \frac{\pi}{2} j^{n+1} \left[ J_n(jkr) + j Y_n(jkr) \right] = \frac{\pi}{2} j^{n+1} H_n^1(jkr) \quad (B.11)$$

Para valores grandes de  $hr$  se tiene que:

$$I_n(hr) \sim \frac{e^{hr}}{\sqrt{2\pi hr}} \quad (B.12)$$

$$K_n(hr) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2hr}} e^{-hr} \quad (B.13)$$

En la fig. B.2 aparecen trazadas las funciones modificadas de Bessel.

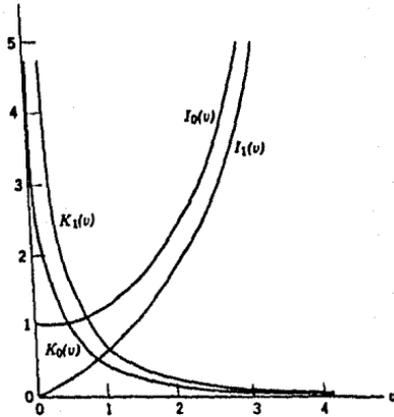


Fig. B.2. Funciones modificadas de Bessel.

A P E N D I C E C  
MEDIOS ANISOTROPICOS

Los medios anisotrópicos son aquellos que tienen diferentes propiedades mecánicas, ópticas y eléctricas en distintas direcciones. Son anisotrópicos los cristales, los líquidos, los plasmas (gases altamente ionizados).

En el caso de anisotropía, en lugar de las correlaciones:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (C.1)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (C.2)$$

se escriben otras que corresponden a la no colinealidad de los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ . Entonces cuando un medio es eléctricamente anisotrópico lineal, en lugar de (C.1) se tienen tres igualdades escalares:

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \quad (C.3)$$

siendo  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \dots, \epsilon_{zz}$  ciertas magnitudes que no dependen

den de  $\vec{E}^1$ . Es fácil observar que un medio caracterizado de tal forma es anisotrópico, esto es sus propiedades son en general diferentes para las direcciones  $x, y, z$ . Cambiando la orientación del vector  $\vec{E}$  (dirigiéndolo a lo largo de los ejes  $x, y, z$ ) se obtienen diversas  $\vec{D}$ .

Para la definición de medios anisotrópicos lineales es suficiente emplear breves relaciones y sustituir las correlaciones (C.1) y (C.2).

$$\vec{D} = \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \vec{E} \quad (C.4)$$

$$\vec{B} = \overset{\leftrightarrow}{\mu} \vec{H} \quad (C.5)$$

donde

$$\overset{\leftrightarrow}{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} ; \quad \overset{\leftrightarrow}{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}$$

son el tensor de la constante dieléctrica y el tensor de permeabilidad magnética respectivamente.

La anisotropía se manifiesta también durante la ordenación estructural, aunque la propia ordenación no lleva siempre a la anisotropía. En la fabricación de medios artificiales se obtienen con frecuencia estructuras macroscópicas que se comparan con los cristales tales son

---

1. Cuando  $\epsilon$  y  $\mu$  no dependen del campo las relaciones (C.1) y (C.2) son lineales y se dice que el medio es lineal.

los dieléctricos artificiales que se utilizan en la fabricación de antenas.

Escogiendo de algún modo los ejes  $x, y, z$  de coordenadas, el tensor de la constante dieléctrica (C.4) tiene la forma diagonal:

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (C.6)$$

Si la estructura tiene una dirección destacada (por ejemplo si se hace coincidir la estructura con el eje  $z$ ) entonces en la expresión (C.6)  $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$  y el cristal se denomina uniaxial.

## B I B L I O G R A F I A

1. Carlton H.W.: 'Traveling Wave Antenna', Dover Publications Inc., New York 1965, págs.: 5, 15-17.
2. Collin R.E.: 'Foundations for Microwave Engineering', - Mc. Graw Hill Kogakusha, 1966 págs.: 100-105, - 575-578.
3. Jordan E.C.: 'Electromagnetica Waves and Radiating Systems', Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., - 1950, págs.: 179-180, 224-227, 283-291, 294-303, 402-403.
4. Krauss and Carver: 'Electromagnetics', Mc. Graw Hill - Kogakusha, 2<sup>nd</sup> Edition 1973, págs.: 406-620-625.
5. Krauss J.D.: 'Antennas:', Mc. Graw Hill Book, New York, 1950, págs.: 13-16, 23-27, 252-262, 537-539.
6. Marcuvitz N.: 'Waveguide Book', Mc. Graw Hill, New -- York, 1951, págs.: 168-170.
7. Markov G.: 'Antenna', Progress Publishers, Moscow, -- 1965, págs.: 103-108, 127-129, 269-270, 361-368.
8. Mueller G. and Tyrrell W. A., Polyrod Antenna, Bell - Systems Tech. Journal, vol. 26, págs.: 837-851, October 1947.

9. Nikolski V.V.: 'Electrodinámica y Propagación de Ondas de Radio', Editorial Mir, Moscú 1976, págs.: 41-42, 578-581.
10. Ramo S., Whinnery J.R. and Van Duzer J.: 'Fields and Waves in Communication Electronics', John Wiley and Sons. Inc., New York 1965. págs.: 207-213.
11. Rosenbaum F.J., Hybrid Modes on Anisotropic Dielectric Rod, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. QE-1, No. 9, págs.: 367-370, December 1965.
12. Snitzer E., Cylindrical Dielectric Waveguide Modes, - Journal of the Optical Society of America, vol. 51, No. 5, págs.: 491-497, May 1961.
13. Snyder A.W., Surface Waveguide Modes Along a Semi-infinite Dielectric Fiber Excited by a Plane Wave, Journal of the Optical Society of America, vol. 56, No. 5, págs.: 601-603, May 1966.
14. Yih S., Dielectric Rod Antenna for Millimeter Wave Integrated Circuits, IEEE Transaction on Microwave Theory and Techs., vol. MTT-24, No. 11, págs. 869-872, November 1976.
15. Experiments with Antenna Test Bench, Type 6452A Series, Marconi Instruments Ltd., Sander Division, England, págs.: 2-16, 19-21.
16. The Narda Microwave Corporation, New York, págs.: 154-155, 160.
17. Basic Experiments I, Sivers Laboratories, Stockholm -- Sweden.



1000  
FEDERAL BUREAU OF INVESTIGATION  
U. S. DEPARTMENT OF JUSTICE  
WASHINGTON, D. C. 20535