Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

ESTUDIO SOBRE LA CANCELACION DE RUIDO USANDO UN FILTRO ADAPTIVO LMS

T E S I S

Que para obtener el Título de

INGENIERO EN COMPUTACION

P r e s e n t a

TANG YU

México, D. F. 1984

I N D I C E

I. Introducción

En el campo de procesamiento digital de señales, se encuentra que todas las señales que provienen de alguna fuente están corruptas de alguna manera por ruido. Por ejemplo, la señal recibida de un canal corrupta por el ruido que penetra al canal, una señal grabada en un ambiente ruidoso, etc. Auí, el término " ruido " se refiere a todo tipo de interferencias aleatorias. Existen muchas formas de interferencias, cuyas estadísticas pueden ser conocidas o desconocidas, estacionarias o varian en el tiempo. Dependiendo de los casos, varios métodos de cancelación de ruido están disponibles. Si el ruido aparece en forma aditiva y sus estadísticas son deconocidas o varian lentamente en el tiempo, la forma adecuada de cancelarlo sería el uso de un cancelador adaptivo de ruido, en el cual, se supone que se tiene acceso a dos señales: una que contiene la señal corrupta por el ruido aditivo, y otra que no contiene información sobre la señal pero está correlacionada con el ruido. Estas dos señales son procesadas por el cancelador adaptivo de ruido para producir una señal a la salida con ruido atenuado.

1.1 Vista hitoríca acerca de la cancelación de ruido en forma adaptiva

La cancelación de ruido en forma adaptiva surgió aproximadamente al final de la decada 50's.

El primer sistema adaptivo para la cancelación de ruido fue diseñado e implementado por Howells y Applebaum en General Electric Company entre 1957 a 1960, cuyo objetivo era eliminar el efecto de lobulo lateral de una atena. En 1959, Widrow y Hoff en la Universidad de Stanford desarrollaron el algorítmo llamado Algorítmo LMS (Least Mean Square), el cual sirve como base para muchos sistema adaptivo.

A partir del 1965, sistemas adaptivos de cancelación de ruido han sido aplicados exitosamente para resolver problemas prácticos, como cancelación del eco en un sistema de telecomunicación, cancelación de la interferencias de 60-Hz en la salida de un amplificador de electrocardiograficador, cancelación de la interferencia de los impulsos de la corazón materna al cardiograma del bebé aún no nacido, etc.

En los años posteriores, numerosos artículos sobre la cancelación de ruido en forma adaptiva son publicados. En 1975, Widrow y sus colegas publicaron en base de los trabajos anteriores un artículo [1], en el cual se analizaron y se concluyeron los aspecto de los problemas en la cancelación de ruido usando un filtro adaptivo LMS. Al año sigueinte, se analizaron detalladamente las características de convergencia del algorítmo LMS [2]. En base de éstos, los comportamientos del filtro adaptivo LMS y sus aplicaciones son estudiados, [3], [4], [5], en los cuales, diferentes configuraciones del filtro adaptivo son tratados.

Debido al estimulo de las técnicas disponibles de la evaluación de la transformada discreta de Fourier, se puso a pensar a trabajar en el dominio de freacuencia. Dentino, McCool y Widrow analizaron las ventajas de computación de un filtro adaptivo LMS implementado en el dominio de fracuencia [6], demostraron posteriormente Bershard y Feintuch que a parte de la eficiencia en el calculo, un filtro adaptivo LMS implementado en el dominio de frecuencia es más fácil de analizar que el implementado en el dominio de tiempo [7].

1.2 Organización del trabajo

Este trabajo tiene como objetivo de estudiar las técnicas de la cancelacion de ruido en forma adaptiva, principalmente estudiar el filtro adaptivo LMS en la cancelación de ruido, analizar los comportamietos de un cancelador de ruido, así como los factores principales que afectan el funcionamiento del mismo.

En el capítulo II, se introduce el concepto de la cancelación de ruido en forma adaptiva, se presenta brevemente el principio de ortogonalidad y la solución de Winer al problema de la cancelación de ruido, se analizarán los factores que limitan el funcionamiento de un cancelador de ruido, los cuales surgen en la obtención de la entrada de referencia del mismo.

En el capítulo III, se presentará el filtro LMS, su estructura, el algorítmo que lo controla, así como la condición de convergencia. Se analizará el comportamiento del filtro adaptivo LMS en el estado estable y los factores surgidos en la aproximación que limitan el funcionamiento de un cancelador adaptivo de ruido. Al final del capítulo, se simulará el proceso de la cancelación de ruido, los resultados son graficados y analizados.

En el capítulo IV, se presentará el filtro adaptivo LMS implementado en el dominio de frecuencia, y el algoritmo LMS complejo, se analizará la convergencia de la media, así como los errores en la aproximación.

II. Principio de la Cancelación de Ruido en Forma Adaptiva

El problema de cancelación de ruido usando el filtro adaptivo LMS puede considerarse, desde el punto de vista de estimación lineal, un problema de estimar el ruido contenido en una señal mediante otro ruido al que se tiene acceso. Si el criterio de optimidad para el diseño del estimador es minimizar el error cuadratico promedio, tal estimador resulta del pricipio de ortogonalidad.

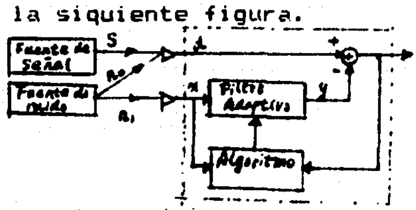
En la sección 2.1, se introducirá el concepto de cancelación de ruido en forma adaptiva, se presentará el cancelador adaptivo de ruido.

En la sección 2.2, se presentará el principio de ortogonalidad, el filtro Winer, así como la solucion de Winer al problema de la cancelación de ruido.

En la sección 2.3, se analizarán los efectos de ruidos no correlacionados y la apariencia de la señal en la entrada de referencia en el funcionamiento del cancelador de ruido basado en un filtro Winer.

2.1 Concepto de la cancelación de ruido en forma adaptiva

El cancelador adaptivo puede conceptualizarse como se muestra en la siguiente figura.



cancelador adaptivo de Ruido.

Fig.2.1.1 Cancelador adaptivo de ruido

En esta figura, el cancelador adaptivo de ruido tiene dos entradas: la entrada primaria d, la cual es la suma de una señal y un ruido, y la entrada de referencia x. Esta última es filtrada por un filtro adaptivo para producir la salida y, la cual se resta de la entrada primaria para producir a la salida del cancelador una señal limpia.

El filtro adaptivo tiene como objetivo producir una salida lo más "parecido" al ruido contenido en la entrada primaria.La diferencia fundamental entre un filtro adaptivo y uno no adaptivo es que los parametros de un filtro adaptivo (la respueta al impulso) pueden ajustarse automáticamente.

El ajuste de los parametros de un filtro adaptivo se hace bajo el control de un algorítmo, el cual usa la señal de referencia y la señal de error (la salida del cancelador) como entradas para proporcionarle al filtro adaptivo una señal de ajuste.

El algorítmo LMS controla el ajuste de los parametros del filtro adaptivo LMS, mediante minimizar el error cuadratico promedio dado por

$$E\varepsilon^2 = E(s+n_o-y)^2 \qquad (2.1.1)$$

Según las entradas que se obtienen, se pueden presentar los siguientes casos:

i) caso estacionario

a) se supone que la señal s no está correlacionada con los ruidos n_o n_1, pero los ruidos n_o n_1 sí están correlacionados de alguna manera entre sí, desarrllando la ec. (2.1.1), se tiene

$$\min E\varepsilon^2 = \min\{Es^2 + E(n_o - y)^2\}$$

$$= Es^2 + \min E(n_o - y)^2 \qquad (2.1.2)$$

de donde se observa que si el algorítmo minimiza la potencia total de la salida del cancelador $E\varepsilon^2$, se puede obtener una señal con ruido atenuado dejando la potencia de la señal igual. En caso ideal, cuando la salida del filtro y es idéntica que el ruido n_o, se obtiene a la salida del cancelador una señal con ruido totalmente eliminado.

b) se supone que la entrada primaria $d=s+n_o$ y la entrada de referencia x no están correlacionadas entre sí, en este caso, la ec. (2.1.1) convierte en

$$\min E\varepsilon^2 = \min\{E(s+n_o)^2 + Ey^2\}$$

$$= E(s+n_o)^2 + \min Ey^2 \qquad (2.1.3)$$

de la cual se observa que la potencia a la salida $E\varepsilon^2$ es mínima cuando $Ey^2=0$, es decir, el filtro adaptivo está apagado, en este caso, se tiene la misma señal a la salida que a la entrada primaria.

c) se supone que la señal s y los ruidos n_o n_1 están correlacionados mutuamente, en este caso, el cancelador de ruido se apaga, deja de pasar ni la señal ni el ruido, porque

$$\min E\varepsilon^2 = \min E(s+n_o-y)^2$$

la cual es mínima cuando $y=s+n_o$, es decir, $E\varepsilon^2=0$.

ii) caso no estacionario

En caso no estacionario, las estadísticas de las entradas varian en el tiempo. Si la variación es suficientemente lenta comparada al tiempo de convergencia del cancelador de ruido, una forma de tratarlo es considerar que los ruidos son estacionarios por intervalos y seguir los mismos procedimiento que en el caso estacionario.

Los casos que se han presentados son casos extremos, en práctica, el cancelador de ruido debe trabajar en el caso a), lo cual se puede lograr con la obtención de una entrada de referencia adecuada. Como se ha visto, el principio con que opera el cancelador de ruido basado en un filtro adaptivo LMS es minimizar el error cuadratico promedio (potencia total) a la salida del cancelador mediante el algorítmo LMS (el cual se presentará en el cap. III) para producir una señal con ruido atenuado.

2.2 Filtro Winer

2.2.1 Principio de ortogonalidad

Dado un proceso real discreto

$x_j \qquad \forall j$

se quiere estimar otro proceso real discreto d_j por medio de un estimador lineal cuya salida es

$$y_j=\sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k x_{j-k} \qquad (2.2.1)$$

y el error

$$\varepsilon_j = d_j-y_j \qquad (2.2.2)$$

Si el criterio de optimidad para la estimación es minimizar el valor esperado del error cuadratico dado por

$$E\varepsilon_j^2=E(d_j-y_j)^2 \quad (2.2.3)$$

entoces, el estimador optimo resulta del prncipio de ortogonalidad.

El principio de ortogonalidad en el contexto de estimación lineal [8] dice que el estimador (2.2.1) que minimice (2.2.3) tiene que ser tal que el error (2.2.2) sea ortogonal al proceso dado,esto es

$$E(d_j-y_j)x_l=0 \quad \forall l$$

sustituyiendo la ec.(2.2.1) en esta última expresión y desarrollándola, se obtiene

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k R_{xx}(j-k,l)=R_{dx}(j,l) \ \forall l \quad (2.2.4)$$

donde $R_{xx}(j,l)$ y $R_{dx}(j,l)$ es la autocorrelación del proceso x_j y la correlación cruzada entre los procesos d_j x_j, respectívamente.

Si los procesos son estacionarios en el sentído débil, (2.2.4) puede expresarse como

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k R_{xx}(m-k)=R_{dx}(m) \ \forall m \quad (2.2.5)$$

donde m=j-l.

En el resto del trabajo, se supone que los procesos son estacionarios en el sentido débil y con media cero.

2.2.2 Solución de Winer al problema de cancelación de ruido

Consideremos un filtro lineal discreto, no causal, de longitud infinita, como se muestra en la figura:

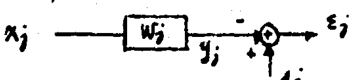


Fig.2.2.1 Filtro lineal discreto, cuya respuesta al impulso es w_j

En la figura, la entrada primaria d_j es la suma de señal y ruido, $d_j=s_j+n_j$, y la entrada de referencia x_j tiene sólo ruido correlacionado de alguna manera desconocida al ruido contenido en la entrada primaria.El problema de cancelación de ruido en este caso consiste en estimar el ruido n_j en término de x_j por medio del filtro y que el promedio del error cuadratico entre la salida del filtro y_j y el prceso d_j sea mínimo. Del principio de ortogonalidad, el filtro tiene que cumplir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k R_{xx}(m-k)=R_{dx}(m) \ \forall m \qquad (2.2.6)$$

En la cual el miembro a la izquierda es la convolución entre la autocorrelación de la entrada de referencia $R_{xx}(m)$ y la respuesta al impulso del filtro w_j. Tomando la transformada Z en ambos lados de la ec.(2.2.6), se obtiene

$$W(z)S_{xx}(z)=S_{dx}(z)$$

donde

$$W(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j z^{-j}$$

es la función de transferencia del filtro y

$$S_{xx}(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} R_{xx}(j)z^{-j}$$

$$S_{dx}(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} R_{dx}(j)z^{-j}$$

es la densidad espectral de potencia de x_j y la densidad espectral de potencia cruzada entre d_j y x_j, respectívamente.

Despejando W(z) en esta última ecuación, se tiene

$$W(z)= \frac{S_{dx}(z)}{S_{xx}(z)} \qquad (2.2.7)$$

El filtro mostrado en la fig. 2.2.1 cuya función de transferencia está caracterizada por la ec. (2.2.7) se conoce como un filtro Winer, y la ec. (2.2.7) es la solución del Winer al problema de cancelación de ruido.

De la ec. (2.2.7) se observa que el filtro Winer tiene por lo general polos y ceros. Siendo no causal, el filtro Winer no es realizable físicamente. En los capítulos posteriores, se presentara una aproximación del filtro Winer.

2.3 Factores que afectan el funcionamiento del cancelador de ruido

En esta sección, concideremos el siguiente cancelador de ruido basado en un filtro Winer

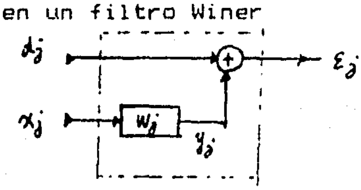


Fig.2.3.1 Cancelador de ruido basado en un filtro Winer

Para el cual se analizarán dos factores externos que limitan el funcionamiento del cancelador de ruido : el ruido no correlacionado y la apariencia de la señal en la entrada de referencia. El primer factor puede resultar en la obtención de la entrada de referencia y/o y la conversión de una señal analógica a una señal digital así como en las operaciones aritmeticas, mientras el sedundo factor resulta cuando no hay disponible una señal de referencia que sólo contiene ruido correlacionado con el ruido contenido en la entrada primaria.

2.3.1 Ruido no correlacionado

El modelo para analizar el efecto de ruido no correlacionado se muestra en la siguiente figura.

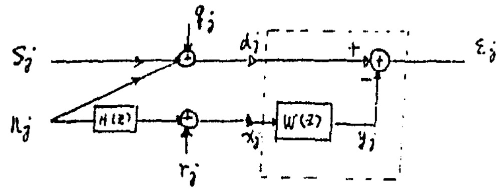


Fig.2.3.2 Modelo para analizar el efecto de ruido no correlacionado

donde H(z) es un filtro linel e invariante en el tiempo, cuya respuesta al impulso h(j) es desconocida, n_j es el ruido de referencia y q_j r_j son ruidos no correlacionados.

La señal y los ruidos satisfacen:

i) la correlación entre la señal y los ruidos es cero.

$$Es_jn_i=Es_jq_i=Es_jr_i=0 \quad \forall i,j$$

ii) la correlación entre el ruido de referencia y los ruido no correlacionados es cero.

$$En_jq_i=En_jr_i=0 \quad \forall i,j$$

iii) los ruidos no correlacionados no estan correlacionados entre si.

$$Eq_jr_i=0 \qquad \forall i,j$$

Bajo estas suposiciones, la correlación cruzada entre ambas entradas está dada por

$$R_{dx}(m)=R_{nn}(m)*h(-m) \qquad (2.3.1)$$

y la autocorrlación de la entrada de referencia está dada por

$$R_{xx}(m)=R_{nn}(m)*h(-m)*h(m)+R_{rr}(m) \quad (2.3.2)$$

Tomando la transformación Z en las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2) se obtienen las densidades espectrales de potencia correspondientes

$$S_{dx}(z)=S_{nn}(z)H(z^{-1}) \quad (2.3.3)$$

$$S_{xx}(z)=S_{nn}(z)|H(z)|^2+S_{rr}(z) \quad (2.3.4)$$

de las ecuaciones (2.2.7), (2.3.3) y (2.3.4), la función de transferencia del filtro Winer en la fig.2.3.2 está dada por

$$W(Z)=\frac{S_{nn}(Z)H(Z^{-1})}{S_{nn}(Z)|H(Z)|^2+S_{rr}(Z)} \quad (2.3.5)$$

de la cual se observa que la función de transferencia del filtro Winer en la fig.2.3.2 no depende de la señal.

El funcionamiento del cancelador de ruido en la fig.2.3.2 puede describirse en término de la razón de señal-ruido, la cual se define como la razón de la densidad espectral de potencia de la señal entre la densidad espectral de potencia del ruido.

De la fig.2.3.2 se observa que la salida ε_j tiene cuatro componentes: la señal y el ruido no correlacionado q_j aparecen directamente a la salida, el ruido de referencia n_j pasa a la salida por un filtro cuya función de transferencia equivale a $1-H(z)W(z)$, y el ruido no correlacionado r_j pasa por el filtro Winer. Entonces, la densidad espectral de potencia de la señal $S_s(z)$ y del ruido $S_r(z)$ a la salida son

$$S_s(z)=S_{ss}(z)$$

$$S_r(z)=S_{qq}(z)+S_{nn}(z)|1-H(z)W(z)|^2+S_{rr}(z)|W(z)|^2$$

respectivamente.

Si se define la razon de ruido-ruido como la razon entre la densidad espectral de potencia del ruido no correlacionado y la densidad espectral de potencia del ruido de referencia, se tienen

$$A(z)=\frac{S_{\ell\ell}(z)}{S_{nn}(z)}$$ razon de ruido-ruido de la entrada primaria

$$B(z)=\frac{S_{rr}(z)}{S_{nn}(z)\,|H(z)|^2}$$ razón de ruido-ruido de la entrada de referencia

En término de A(z) y B(z), la función de transferencia (2.3.5) puede expresarse como

$$W(z)=\frac{1}{H(z)(1+B(z))} \qquad (2.3.6)$$

y la densidad espectral de potencia de ruido a la salida

$$S_{r}(z)=S_{nn}(z)\left(A(z)+\frac{B(z)}{1+B(z)}\right) \qquad (2.3.7)$$

entonces, la razon de señal ruido a la salida esta dada por

$$\rho_{o}(z)=\frac{S_{ss}(z)}{S_{nn}(z)\left(A(z)+\frac{B(z)}{1+B(z)}\right)} \qquad (2.3.8)$$

Por otro lado, la razon de señal-ruido a la entrada primaria es

$$\rho_{pri}(z)=\frac{S_{ss}(z)}{S_{nn}(z)(1+A(z))} \qquad (2.3.9)$$

efectuando la division entre $\rho_o(z)$ y $\rho_{pri}(z)$ se obtiene la razón:

$$\frac{\rho_o(z)}{\rho_{pri}(z)}=1+\frac{1}{A(z)+B(z)+A(z)B(z)} \qquad (2.3.10)$$

De la expresion (2.3.10) se observa que la razon siempre es mayor que la unidad (debido a que A(z) y B(z) son no negativas). Es decir, la razon de señal-ruido a la salida es mayor que la razon de señal-ruido a la entrada primaria.

De acuerdo de las razones de ruido-ruido $A(z)$ y $B(z)$, consideremos los siguintes casos:

i) $A(z)=B(z)=0$

en esta caso, sólo aparece el ruido de referencia, la razón (2.3.10) tiende a infinito y la función de transferencia del filtro Winer (2.3.6) convierte en

$$W(z)=\frac{1}{H(z)} \qquad (2.3.11)$$

de la cual se observa que en este caso, el filtro Winer es el filtro inverso del filtro desconocido $H(z)$.

ii) $A(z)$ y $B(z)$ grandes

en este caso, los ruidos no corrlacionados son dominantes, la función de tansferencia del filtro Winer (2.3.6) tiende a cero, y la razón (2.3.10) tiende a la unidad.

iii) $A(z)<<1$ y/o $B(z)<<1$

en este caso, las potencias de los ruidos no correlacionados son pequeñas comparadas a la potencia del ruido de referencia, la razón (2.3.10) toma valores grandes, además, si $B(z)$ es pequeña, la función de tranferencia del filtro Winer tiende al filtro inverso del $H(z)$:

$$W(z)=\frac{1}{H(z)(1+B(z))} \doteq \frac{1}{H(z)}$$

De los casos que se han presentado, se observa que el caso i) y ii) corresponde al caso a) y b) en la sección 2.1 respectívamente, y el resultado de que el filtro Winer tinde a ser el inverso del filtro H(z) cuando la razón de ruido-ruido de la entrada de referencia es pequeña se puede obtener directamente de la fig.2.3.2, de donde se observa que el ruido de referencia contenido en la entrada primaria se elimina totalmente si H(z)W(z)=1, es decir, el filtro Winer produce una salida idéntica al ruido contenido en la entrada primaria. De aquí, el problema de cancelación de ruido convierte en un problema de identificación de sistema, esto es, identificar el filtro desconocido H(z) por medio de W(z) [9].

2.3.2 Apariencia de la señal en la entrada de referencia

Consideremos el siguiente modelo para el análisis del efecto de la apariencia de la señal en la entrada de referencia:

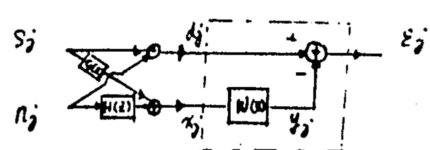


Fig.2.3.3 Modelo para el análisis del efecto de la señal en la entrada de referencia

donde G(z) y H(z) son filtros lineales e invariantes en el tiempo cuyas respustas al impulso h(j) y g(j) son desconocidas, Se supone que la señal y el ruido no están correlacionados, $Es_jn_i=0$, $\forall$ i,j, entonces, la correlación cruzada entre ambas entradas está dada por

$$R_{dx}(m)=R_{ss}(m)*g(-m)+R_{nn}(m)*h(-m)$$

y la autocorrelación de la entrada de referencia está dada por

$$R_{xx}(m)=R_{ss}(m)*g(-m)*g(m)+R_{nn}(m)*h(-m)*h(m)$$

Tomando la transformada Z en ambos miembro de las dos últimas expresiones, se obtienen las densidades espectrales de potencia correspondientes

$$S_{dx}(z)=S_{ss}(z)G(z^{-1})+S_{nn}(z)H(z^{-1}) \qquad (2.3.12\ a)$$

$$S_{xx}(z)=S_{ss}(z)|G(z)|^2+S_{nn}(z)|H(z)|^2 \qquad (2.3.12\ b)$$

Sustituyendo $S_{dx}(z)$ y $S_{xx}(z)$ en la ec. (2.2.7), se tiene la función de transferencia del filtro Winer en la fig.2.3.3

$$W(z)=\frac{S_{ss}(z)G(z^{-1})+S_{nn}(z)H(z^{-1})}{S_{ss}(z)|G(z)|^2+S_{nn}(z)|H(z)|^2} \qquad (2.3.13)$$

La densidad espectral de potencia de la señal a la salida se obtiene observando en la fig.2.3.3 que el paso por el cual pasa la señal tiene la función de transferencia $1-G(z)W(z)$, entoces,

$$S_s(z)=S_{ss}(z)|1-G(z)W(z)|^2$$

de manera semejante, el paso por el cual pasa el ruido tiene la función de transferencia $1-H(z)W(z)$, por tanto, la densidad espectral de potencia del ruido a la salida es

$$S_r(z)=S_{nn}(z)|1-H(z)W(z)|^2$$

De estas dos últimas expresiones, se obtiene la razón de señal-ruido a la salida del cancelador

$$\rho_o(z)=\frac{S_{ss}(z)|1-G(z)H(z)|}{S_{nn}(z)|1-H(z)W(z)|}$$

Sustituyendo $W(z)$ dada por la ec. (2.3.13) en esta última expresión, se tiene

$$\rho_o(z)=\frac{S_{nn}(z)|H(z)|^2}{S_{ss}(z)|G(z)|^2} \qquad (2.3.14)$$

por otro lado, la razón de señal-ruido de la entrada primaria y la entrada de referencia están dadas por

$$\rho_{pri}(z) = \frac{S_{ss}(z)}{S_{nn}(z)} \qquad (2.3.15)$$

$$\rho_{ref}(z) = \frac{S_{ss}(z)|G(z)|^2}{S_{nn}(z)|H(z)|^2} \qquad (2.3.16)$$

respectívamente.

En término de las razones de señal-ruido, se analizan a continuacion la reducción de ruido y la distorción de la señal a la salida del cancelador.

a) reducción del ruido

Dividiendo la ecuación (2.3.14) entre la ecuación (2.3.15), se obtiene la razón

$$\frac{\rho_o(z)}{\rho_{pri}(z)} = \frac{1}{\rho_{pri}(z)\,\rho_{ref}(z)} \qquad (2.3.17)$$

Por lo que $\rho_{pri}(z)$ se encuentra como una función fija de Z en la cancelación de ruido, la ec. (2.3.17) demuestra que la reducción de ruido en termino de $\frac{\rho_o(z)}{\rho_{pri}(z)}$ es inversamente proporcional a la rezón de señal-ruido de la entrada de referencia, y cuando $\rho_{ref}(z) \rightarrow 0$ ($G(z) \rightarrow 0$), $\frac{\rho_o(z)}{\rho_{pri}(z)} \rightarrow \infty$ y la función de tranferencia del filtro Winer (2.3.13) tiende al filtro inverso del filtro H(z).

b) distorsión de la señal

La distorsión de la señal a la salida se define como la razón entre la densidad espectral de potencia de la señal que pasa por la entrada de referencia y la densidad espectral de potencia de la señal que pasa por la entrada primaria, esto es

$$D(z) = \frac{S_{ss}(z)|G(z)W(z)|^2}{S_{ss}(z)} = |G(z)|^2|W(z)|^2 \qquad (2.3.18)$$

Si $|G(z)|$ es pequeña comparada a $|H(z)|$, de la ec. (2.3.13), el filtro Winer tiende al filtro inverso del H(z)

$$W(z) \doteq \frac{1}{H(z)}$$

y la distorsión (2.3.18) convierte en

$$D(z) = \frac{|G(z)|^2}{|H(z)|^2} = \frac{\rho_{ref}(z)}{\rho_{pri}(z)} \qquad (2.3.19)$$

Por lo general, en los problemas de cancelación de ruido la razón de señal-ruido de la entrada primaria es pequeña, entnces, se debe elegir una señal de referencia tal que la razón de señal-ruido de ésta sea mucho menor que la razón de señal-ruido de la entrada primaria para que la distorsión de la señal (2.3.19) sea permitible. En caso contrario, si |G(z)| es comparable con |H(z)|, la distorsión

$$D(z) = \left| 1 + \frac{S_{nn}(z) H(z^{-1}) (G(z) - H(z))}{S_{gg}(z) |G(z)|^2 + S_{nn}(z) |H(z)|^2} \right.$$

es de orden de 1. En este caso (el que corresponde al caso c) en la sección 2.1), el cancelador de ruido en la fig.2.3.3 no sigue funcionanando, así que se debe usar otras técnicas para la cancelación de ruido, como un aumentador de señal (Adaptive Linear Enhancer [1], [10]).

III. Filtro Adaptivo Implementado en el Dominio de Tiempo

Hasta ahora, se ha analizado el cancelador de ruido basado en un filtro Winer, el cual no es realizable físicamente. En ente capítulo, se presenta una aproximación del filtro Winer por medio de un filtro adaptivo LMS, el cual se adapta a la estadística de la entrada de referencia bajo el control del algorítmo LMS.

En la sección 3.1, se presenta la estructura del filtro adaptivo LMS, así como las principales características del mismo.

En la sección 3.2, se presenta el algorítmo LMS, sus ventajas y desventajas.

En la sección 3.3, se dá la condición de convergencia del algorítmo LMS, se analiza la convergencia de la media del vector de parámetros así como las constantes de tiempo.

En la sección 3.4, se analizan los errores que surgen en la aproximación: el error de gradiente, el error del vector de parámetros y el error por ajuste, suponiendo que el proceso de cancelación de ruido ha llegado al estado estable.

En la sección 3.5, se dan las consideraciones que deben tomar en cuanta en el diseño de un filtro adaptivo LMS: la longitud, la velocidad de convergencia y el tiempo de retardo.

En la sección 3.6, los resultados de los análisis son simulados.

3.1 La aproximación del filtro Winer por medio de un filtro adaptivo LMS

Un filtro adaptivo LMS es un filtro universal, cuya respuesta al impulso es ajustada automáticamente por el algorítmo LMS (el cual se presenta en la siguiente sección).

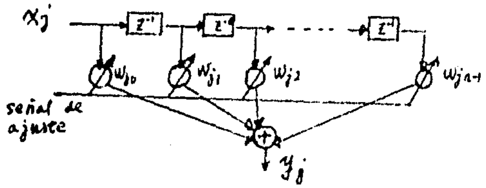


Fig.3.1.1 Filtro adaptivo LMS

Un filtro adaptivo es lineal, variante en el tiempo debido al ajuste de la respuesta al impulso, puede ser no causal si éste se implementa en una computadora introduciendo un retardo. La estabilidad del filtro adaptivo LMS depende de la estabilidad del algorítmo LMS.

En la fig.3.1.1 se muestra un filtro adaptivo LMS de longitud n, cuya respuesta al impulso en el instante j es $\{w_{j0}\ w_{j1}\ \dots\ w_{jn-1}\}$. La entrada x_j pasa por n-1 retardos unitarios para formar la secuencia $\{x_j\ x_{j-1}\ \dots\ x_{j-n+1}\}$. La salida en el instante j es la suma pesada de la secuencia de entrada

$$y_j=\sum_{i=0}^{n-1} w_{ji} x_{j-i}$$

en forma vectorial

$$y_j=W_j^T X_j=X_j^T W_j$$

donde

$$W_j=[w_{j0}\ w_{j1}\ \dots\ w_{jn-1}]^T$$

es el vector de parámetros y

$$X_j=[x_j \; x_{j-1} \; \dots \; x_{j-n+1}]^T$$

es el vector de la entrada de referencia.

Como se verá más adelante, el filtro adaptivo LMS es fácil de analizar e implementar, es eficiente en cuanto al cálculos se refieren, y en consecuencias, las operaciones se llevan rápidamente bajo ciertas restricciones a la entrada de referencia, además, no se tiene que contemplar el problema de estabilidad por parte de la estructura del filtro. Sin embargo, como el filtro Winer es de tipo IIR, en ocaciones, la aproximación resulta de orden muy grande.

3.2 Algorítmo LMS

En la siguiente figura, se muestra un cancelador de ruido basado en un filtro adaptivo LMS :

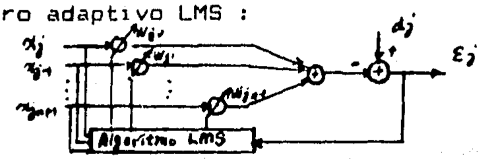


Fig.3.2.1 Cancelador adaptivo de ruido

En el cual, la salida del cancelador (señal de error) está dada por

$$\varepsilon_j = d_j - X_j^T W_j \qquad (3.2.1)$$

y el valor esperado del error cuadrático

$$E\,\varepsilon_j^2 = E(d_j - X_j^T W_j)^2 \qquad (3.2.2)$$

El gradiente del error se define como

$$\nabla_j = \frac{\partial E\,\varepsilon_j^2}{\partial W_j} \qquad (3.2.3)$$

Por lo que el filtro adaptivo LMS tiene que minimizar el error cuadratico promedio (3.2.2), entonces, debe cumplir el principio de ortogonalidad (2.2.5):

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k R_{xx}(m-k) = R_{dx}(m) \quad m=0,1,\ldots,n-1$$

en forma matricial

$$RW = P \qquad (3.2.4)$$

donde

$$R = \begin{pmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \cdots & R_{xx}(n-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}(n-2) \\ \vdots & & & \\ R_{xx}(n-1) & R_{xx}(n-2) & \cdots & R_{xx}(0) \end{pmatrix}$$

es la matriz de autocorrelacion de la entrada de referencia y

$$P = [\, R_{dx}(0) \;\; R_{dx}(1) \;\; \cdots \;\; R_{dx}(n-1) \,]^T$$

es el vector de correlación cruzada entre las dos entradas.

La ecuación matricial (3.2.4) tiene solución única si la potencia de la entrada de referencia es diferente de cero, y está dada por

$$W^* = R^{-1}P \qquad (3.2.5)$$

la cual es la solución de Winer al problema de cancelación de ruido en forma matricial.

El algogritmo LMS (Least Mean Square) es un método iterativo para encontrar W^* usando sólamente información de la entrada de referencia y la salida del cancelador, el cual se basa en el método de gradiente, consiste en estimar el vector de parámetros siguiente W_{j+1} en término del vector de parámetros presente W_j menos un cambio proporcional al gradiente estimado del error en el intante j ;

$$W_{j+1} = W_j - u\hat{\nabla}_j \qquad (3.2.6)$$

donde $\hat{\nabla}_j$ es el gradiente estimado, y u es una constante de proporcionalidad que controla la estabilidad del algorítmo.

El gradiente estimado $\hat{\nabla}_j$ se define como la derivada parcial del error cuadrático instantaneo con respecto al vector de parámetros:

$$\hat{\nabla}_j = \frac{\partial \varepsilon_j^2}{\partial W_j} = -2\,\varepsilon_j X_j \qquad (3.2.7)$$

Sustituyendo la ec. (3.2.7) en la ec. (3.2.6) se obtiene una ecuación iterativa para el vector de parámetros

$$W_{j+1}=W_j+2u\varepsilon_j X_j \qquad (3.2.8)$$

la cual se puede esquematizar como:

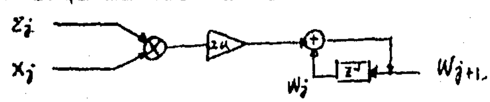


Fig. 3.2.3 Algorítmo LMS

En resumen, el algorítmo está dado por

$W_{j+1}=[w_{j0}\ w_{j1}\ \ldots\ w_{jn-1}]^T$

$X_j=[x_j\ x_{j-1}\ \ldots\ x_{j-n+1}]^T$

vectores de parámetros y vector de entrada de referencia

d_j entrada primaria

ε_j salida del cancelador

i) se pone $j=0$, $W_j=W_0$

ii) $y_j=W_j^T X_j$

iii) $\varepsilon_j=d_j-y_j$

iv) $W_{j+1}=W_j+2u\varepsilon_j X_j$

v) $j=j+1$ se va a ii)

De lo cual se observa que el algorítmo LMS lleva 2n multiplicaciones y n sumas en cada iteración adaptiva, se necesita de orden de n localidades de memorias, y como se verá en la siguiente sección, bajo ciertas condiciones el vector de parámetros W_j tiende en promedio a la solución Winer (3.2.5). La desventaja del algoritmo es que la velocidad de convergencia es relativamente lenta después de los pasos iniciales, sobre todo, cuando los valores característicos de la matriz de autocorrelación están separados, el algoritmo LMS será incapaz de seguir las variaciones de la entrada de referencia.

3.3 Características de convergencia del filtro adaptivo LMS

El proceso adaptivo se lleva a cabo por el algoritmo LMS, por lo que analizar las características de convergencia del algoritmo equivale a analizar las características de convergencia del filtro adaptivo LMS.

3.3.1 Condición de convergencia del algoritmo LMS

Sustituyendo el error $\varepsilon_j = d_j - X_j^T W_j$ en la ecuación iterativa $W_{j+1} = W_j + 2uX\varepsilon_j$, se obtiene

$$W_{j+1} = (I - 2uX_jX_j^T)W_j + 2ud_jX_j \qquad (3.3.1)$$

donde I es una matriz identidad de n×n. Se supone que el vector de parámetros W_j y el vector de entrada de referencia son independientes (por lo general, esta suposicion no es válida, pero con élla se simplifica considerablemente el análisis, y ademas, los experimentos han demostrado que los resultados deducidos bajo esta suposición son válidos aún cuando la dependencia entre ambos es fuerte [11]), tomando el valor esperado en ambos miembros de la ec. (3.3.1), se tiene

$$EW_{j+1}=(I-2uR)EW_j+2uP$$

donde R y P es la matriz de autocorrelación y el vector de correlación cruzada definidos en la sección anterior. En esta última expresión se resta la solución del Winer $W^*=R^{-1}P$ en ambos miembros y reordenando, se tiene

$$EW_{j+1}-W^*=(I-2uR)(EW_j-W^*)$$

definiendo $F_j=EW_j-W^*$, se tiene una ecuación homogenea en diferencias

$$F_{j+1}=(I-2uR)F_j \qquad (3.3.2)$$

La solución de esta ecuación está dada por

$$F_j=(I-2uR)^jF_o \qquad (3.3.3)$$

donde $F_o=EW_o-W^*$ es la condición inicial.

Haciendo una transformada de similitud

$$F_j'=Q^{-1}F_j \qquad (3.3.4)$$

donde Q es una matriz ortogonal formada por los vectores característicos de la matriz de autocorrelación R (la cual es simétrica) y cumple

$$Q^{-1}RQ=\Lambda= \mathrm{diag}[\lambda_1\ \lambda_2\ \cdots\ \lambda_n\ ]$$

entonces se tiene

$$F_j'=(I-2u\Lambda)^jF_o' \qquad (3.3.5)$$

La matriz $(I-2u\Lambda)$ es una matriz diagonal, por lo que la solución de (3.3.5) se puede expresar en forma explicita

$$F_j' = \begin{bmatrix} (1-2u\lambda_1)^j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1-2u\lambda_2)^j & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & (1-2u\lambda_n)^j \end{bmatrix} \qquad (3.3.6)$$

La ecuación (3.3.5) converge sí y sólo sí el valor $(1-2u\lambda_i)$ es menor que la unidad en valor absoluto, esto es,

$$|1-2u\lambda_i|<1 \qquad i=1,2,..,n$$

lo cual equivale a

$$0<u<\frac{1}{\lambda_{max}} \qquad (3.3.7)$$

Como la propiedad de convergencia se conserva bajo una transformación de similitud, la expresión (3.3.7) nos dá la condición suficiente y necesaria para la convergencia del algorítmo LMS.

3.2.2 Convergencia de la media del vector de parámetros

Bajo la condición de convergencia (3.3.7) la matriz $(I-2u\Lambda)^j$ en la expresión (3.3.5) tiende a cero cuando j tiende a infinito, esto es,

$$F'_j=Q^{-1}F_j\rightarrow 0,\ j\rightarrow\infty$$

la cual implica

$$F_j=EW_j-W^*\rightarrow 0,\ j\rightarrow\infty$$

o sea

$$EW_j\rightarrow W^*,\ j\rightarrow\infty \qquad (3.3.8)$$

La expresión (3.3.8) demuestra que el vector de parámetros tiende a la solución de Winer en la media.

3.3.3 Constantes de tiempo

La constante de tiempo τ para una serie geométrica

$$a_j=a_0\lambda^j=e^{j\ln\lambda}a_0 \qquad j=0,1,...$$

se define como el tiempo que se lleva para el valor a_j sea e^{-1} veces el valor inicial a_0, esto es,

$$\hat{j}=-\frac{1}{\ln\lambda}$$

De acuerdo a esta definición, la constante de tiempo para el i-simo modo en la expresión (3.3.6) es

$$\tau_i = -\frac{1}{\ln(1-2u\lambda_i)} = \frac{1}{2u\lambda_i + \frac{(2u\lambda_i)^2}{2} + \cdots} \qquad para\ 0 < u < \frac{1}{2\lambda_i}$$

Para u pequeña, esta expresión se puede aproximar como

$$\tau_i \doteq \frac{1}{2u\lambda_i} \qquad i=1,2,..n$$

para $\frac{1}{2\lambda_i} < u < \frac{1}{\lambda_i}$, sólo cambia la forma con que W_j aproxima a W^*, la constante de tiempo para una u dada es la misma.

La constante de tiempo del vector de parametros W_j es la mayor de las constantes de tiempo de los modos, esto es,

$$\tau_W = \max(\tau_i,\ i=1,2,..,n) = \frac{1}{2u\lambda_{min}} \qquad (3.3.9)$$

La constante de tiempo del cancelador adaptivo de ruido se encuentra expresando el error cuadratico promedio (3.2.2) en la siguiente forma:

$$E\varepsilon_j^2 = (Ed_j^2 - P^T W^*) + (W_0' - W^{*\prime})^T \Lambda (1-2u\Lambda)^{2j} (W_0' - W^{*\prime}) \qquad (3.3.10)$$

la cual es una función cuadratica de $(1-2u\ )^j$, entonces, la contante de tiempo del cancelador es la mitad de la constante de tiempo del vector de parametros

$$\tau_c = \frac{1}{2}\tau_W = \frac{1}{4u\lambda_{min}} \qquad (3.3.11)$$

De las expresiones (3.3.7) y (3.3.11) se puede observar que la constante de tiempo del cancelador adaptivo de ruido para u en el intervalo $(0, \frac{1}{\lambda_{max}})$ está en

$$\frac{1}{4}\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} < \tau_c < \infty$$

de lo cual se observa que cuando la razón $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ es grande, el cancelador adaptivo de ruido toma un tiempo de convergencia excesivo, consecuentemente, éste puede perder la habilidad de seguir las variaciones de la estadística del ruido.

Las constantes de tiempo nos ayudan a estimar la velocidad de convergencia, sirven como un factor de consideración en el diseño de un cancelador adaptivo de ruido, como se verá más adelante.

3.4 Factores que afectan el funcionamiento del cancelador adaptivo de ruido

3.4.1 Error de gragiente

Del gradiente en la ec. (3.2.3) y el gradiente estimado en la ec. (3.2.7) se observa que

$$\nabla_j = E\,\hat{\nabla}_j \qquad (3.4.1)$$

es decir, el gradiente es el promedio de gradiente estimado.

Se define el error de gradiente N_j como

$$N_j = \nabla_j - \hat{\nabla}_j = [n_{j1}\ n_{j2}\ \ldots\ n_{jn}]^T$$

Cuando el proceso de cancelación de ruido se encuentra en el estado estable, el gradiente $\nabla_j = 0$, y el error de gradiente se reduce a

$$N_j = -\hat{\nabla}_j = 2\varepsilon_j X_j \qquad (3.4.2)$$

Se supone que el error y el vector de entrada de referencia X_j no están correlacionados en el estado estable y que además son Gaussianos, entonces, la media del error de gradiente está dado por

$$E N_j = 2 E\varepsilon_j\, E X_j = 0$$

y la covariancia

$$C_N = E N_j N_j^T = 4\, \varepsilon_{min} R \qquad (3.4.3)$$

donde ε_{min} es el mínimo error cuadrático promedio.

De la expresión (3.4.3) se observa que la autocovariancia de las componentes de N_j son iguales, y tiene valor

$$C(n_{ji})=4\mathcal{E}_{min}R_{xx}(0) \qquad i=1,2,\ldots,n$$

la cual es directamenta proporcional a la energía de la entrada de referencia $R_{xx}(0)=Ex_j^2$.

3.4.2 Error del vector de parámetros

El gradiente (3.2.3) puede expresarse como

$$\nabla_j = 2RV_j \qquad (3.4.4)$$

donde

$$V_j=W_j-W^*=[v_{j1}\ v_{j2}\ \ldots\ v_{jn}]^T$$

es el error del vector de parámetros.

Sustuyendo $\hat{\nabla}_j = \nabla_j - N_j$ en la ecuación iterativa (3.2.6), se tiene

$$W_{j+1}=W_j-u(2RV_j-N_j)$$

Se resta W^* en ambos miembros de esta cuación y reordenando, se obtiene

$$V_{j+1}=(I-2uR)V_j+uN_j \qquad (3.4.5)$$

Se supone que W_j y X_j son independiente en el estado estable (ver el comentario en la sección 3.3), entonces

$$E\,V_jN_j^T = E\,N_jV_j^T = 0$$

Por tanto, la covariancia del error del vector de parámetros puede obtenerse de la siguiente manera:

Posmultiplicando la transpuesta de cada miembro de la ec. (3.4.5) y tomando el valor esperado, se tiene

$$EV_{j+1}V_{j+1}^T=E(I-2uR)V_jV_j^T(I-2uR)^T+u^2EN_jN_j^T$$

esto es, $$C_{V_{j+1}} = (I-2uR)C_{V_j}(I-2uR)^T + u^2 C_N$$

Si el proceso converge, entonces en el estado estable $C_{V_{j+1}} = C_{V_j} = C_V$,

$$C_V = (I-2uR)^2 \hat{C_V} + u^2 C_N$$

porque las matrices (I-2uR) y C_V son Teoplitz (una matriz Teoplitz es simétrica y los elementos en los diagonales principales son iguales), el orden de la multiplicación se puede cambiar.

Sustituyendo la ec. (3.4.3) en esta última expresión, se obtiene

$$(I-uR)C_V = u\varepsilon_{min} I$$

Si u es mucho menor que la unidad, la covariancia del error del vector de parametros es aproximadamente dada por

$$C_V \doteq u\varepsilon_{min} I \qquad (3.4.6)$$

La expresión (3.4.6) indica que la covariancia del error del vector de parametros en el estado estable es proporcional a la constante u, la cual está relacionada con la velocidad de convergencia.

3.4.3 El error adicional y la razón de error por ajuste

El error adicional es el error generado por el error del vector de parámetros en el estado estable. El error cuadrático promedio se puede expresar como

$$E\,\varepsilon_j^2 = \varepsilon_{min} + V_j^T R\, V_j \qquad (3.4.7)$$

donde $\varepsilon_{min} = E d_j^2 - P^T W^*$. De esta expresión, el error adicional está dado por

$$\varepsilon_a = V_j^T R V_j$$

tomando el valor esperado del error adicional, se tiene

$$E\mathcal{E}_a = EV_j^T R V_j = E V_j'^T \Lambda V_j' \quad (3.4.8)$$

donde $V_j' = Q^{-1} V_j$, y Q^{-1} es la transformación de similitud definida en (3.3.4).

como

$$E V_j'^T V_j' = E V_j^T V_j = u\,\mathcal{E}_{min} I$$

entonces, de la ec. (3.4.8) se obtiene el error adicional promedio expresado en función de la constante u, la longitud del filtro n y la energía de la entrada de refencia $R_{xx}(0)$:

$$E\,\varepsilon_a = \sum_{i=1}^{n} v_{ji}'^2 \lambda_i = u\,\varepsilon_{min} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$= u\,\varepsilon_{min}\, traza R = u\, n\, \varepsilon_{min} R_{xx}(0) \quad (3.4.9)$$

De esta expresión se observa que el error adicional promedio es directamente proporcional a la energía de la entrada de referencia multiplicada por n, donde n es la longitud del filtro adaptivo LMS, e inversamente proporcional a la velocidad de convergencia (ya que la velocidad de adaptación es inversamente proporcional a la contante u).

En la expresión (3.4.9) dividiendo en ambos miembros, se obtiene la razón adimensional M llamado la razón de error por ajuste:

$$M = \frac{E\,\varepsilon_a}{\varepsilon_{min}} = u\, n\, R_{xx}(0) \quad (3.4.10)$$

la cual nos dá una metida del funcionamieto del cancelador adaptivo de ruido en el estado estable, sirve como un factor de diseño del filtro adaptivo LMS, como se verá en la siguiente sección.

3.5 Consideraciones en el diseño de un cancelador adaptivo de

ruido

a)longitud del filtro adaptivo LMS

El funcionamiento del cancelador adaptivo de ruido se puede mejorar si se incrementa la longitug del filtro adaptivo LMS, sin embargo, para una velocidad de convergencia dada (es decir, u dada), incrementa la longitud n, incrementa la razón de error por ajuste, y en consecuencia, incrementa el error cuadrático promedio $E\varepsilon^2 = (1+M)\,\varepsilon_{min}$,como se indica en la siguiente figura [2]:

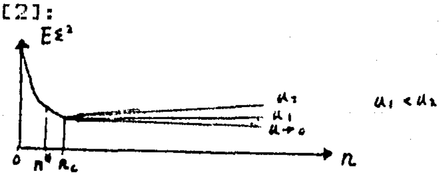


Fig.3.5.1 Curva de error cuadratico promedio v.s la longitud del filtro adaptivo LMS

De la figura se observa que el error cuadrático promedio cae rápidamente en el rango $(0,n^*)$ y léntamente en (n^*,n_c), después de n_c, tiende a crecer conforme incrementa la longitud n.Así que, la longitud del filtro adaptivo se debe seleccionar al rededor de n^*.

El valor n^* se determina mediante experimentos.

b)Velocidad de convergencia -- selección de la constante u

Como se demostró en la sección 3.3, la constante u debe cumplir (3.3.7),

$$0 < u < \frac{1}{\lambda_{max}}$$

Pero, por lo general, no se conoce λ_{max}, sin embargo,

$$\lambda_{max} < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = traza\,R = n R_{xx}(0) = n\sigma_x^2$$

donde $\sigma_x^2 = R_{xx}(0)$ es la energía de la entrada de referencia, la cual es fácil de medir, entonces, una condición suficiente de convergencia del algoritmo LMS es

$$0 < u < \frac{1}{n\sigma_x^2} \qquad (3.5.1)$$

Si el ruido es estacionario, mientras la constante u más pequeña, la razón del error por ajuste es más reducido. Por ejemplo, para $u=(100n\sigma_x^2)^{-1}$ la razón del error por ajuste es $M=10^{-2}$.

Por otro lado, si el ruido no es estacionario, pero, la estadística

del ruido varia lentamente tal que se puede condiderar como señal estacionaria en un intervalo de tiempo, la contante u se puede encontrar de la siguiente manera:

Se supone que la estadística del ruido es estacionaria en [0,T], se requiere que la constante de tiempo del cancelador (3.3.11) sea mucho menor que T, esto es

$$\tau_c < \frac{T}{K} \qquad K \gg 1$$

de la ec. (3.3.11), esta desigualdad se puede expresar como

$$u > \frac{K}{4T\lambda_{min}} \qquad (3.5.2)$$

Si la razón $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} < 10$, o sea, $\lambda_{min} > \frac{\lambda_{max}}{10}$, la desigualdad (3.5.2) cumple cuando

$$u > \frac{2.5Kn}{T n\sigma_x^2}$$

por otro lado, u debe cumplir

$$u < \frac{1}{n\sigma_x^2}$$

de estas dos ultimas desigualdades, se obtiene el rango para la constante u:

$$\frac{2.5Kn}{T n\sigma_x^2} < u < \frac{1}{n\sigma_x^2} \qquad (3.5.3)$$

De la cual se observa que existe solución para u sólo cuando

$T > 2.5Kn$ unidades de tiempo.

c) retardo en la entrada primaria

La estimación del ruido contenido en la entrada primaria por el filtro adaptivo LMS se puede mejorar si se introduce un retardo en la entrada primaria (filtro adaptivo LMS no causal), por que en este caso, el ruido contenido en la entrada primaria es estimado por los valores tanto pasados como futuros de la entrada de referencia, por lo que la correlación entre los dos ruidos es más fuerte.

El valor de retardo l no es crítico dentro de un cierto rango, por ejemplo, un valor alrededor de n/2 puede seleccionarse para l.

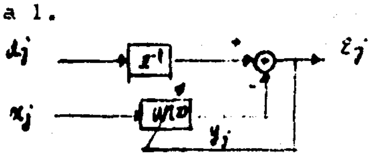


Fig.3.5.2 Cancelador de ruido con retardo en la entrada primaria

3.6 Simulaciónes:

La simulacion se lleva a cabo en una computadora PDP-11. La señal tiene la forma de onda triangular, descrita por

$$s(t)=\begin{cases} \frac{4A}{T}t - A & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -\frac{4A}{T}t + 3A & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

$$s(t+T)=s(t)$$

donde $A=\sqrt{\frac{3}{2}}$, T=2.

La potencia de la señal es $P_s=A^2/3=0.5$.

El ruido es el ruido blanco Gaussiano con media cero y variancia unitaria, dado por

$$n(t)=\sqrt{-2\ln u_1(t)}\cos 2\pi u_2(t)$$

donde $u_1(t)$ y $u_2(t)$ para un tiempo dado son variables aleatoria independientes y uniformemente distribuidos en [0,1].

La señal es muestreada con una frecuencia de muestreo $f_m=16$. El espectro de amplitud, que se obtiene tomando la transformada discreta de Fourier con 256 puntos, se muestra en la siguiente figura:

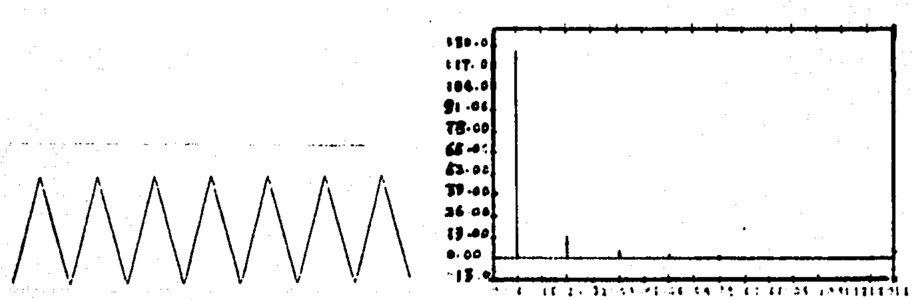
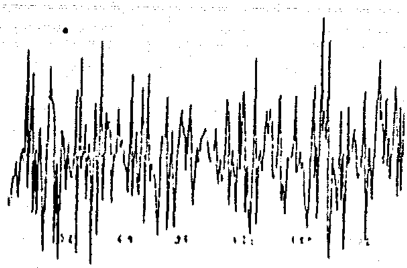


Fig.3.6.1 Señal triangular Espectro de la señal
S_j $S(\omega)$



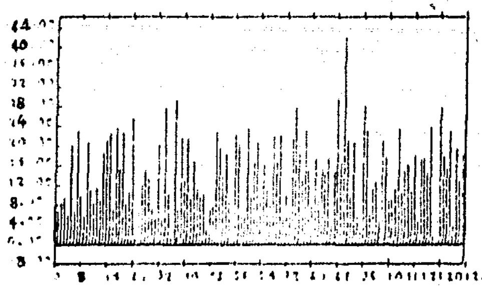


Fig.3.6.2 Ruido blanco Gaussiano n_j Espectro del ruido $N(W)$

El modelo en que se basan las simulaciones es

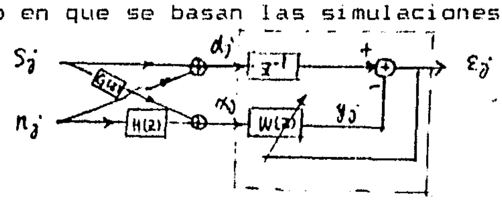


Fig.3.6.3 Modelo de simulacion

donde $H(Z)=h_0+h_1Z^{-1}+\ldots+h_{m-1}Z^{-m+1}$

$G(Z)=g_0+g_1Z^{-1}+\ldots+g_{p-1}Z^{-p+1}$

son los filtros desconocidos, y

$W(Z)=w_0+w_1Z^{-1}+\ldots+w_{n-1}Z^{-n+1}$

es el filtro adaptivo LMS.

a) Longitud del filtro adaptivo LMS

En esta simulación, los filtros deconocidos tienen función de transferencia dada por

$$H(Z)=0.2+0.96Z^{-1}+0.2Z^{-2} \quad (3.6.1)$$

$$G(Z)=0 \quad (3.6.2)$$

Se escoge en el algorítmo LMS la contante $u=0.001$ y el retardo en la entrada primaria $l=n/2$, los resultados de la simulación con $n=2$, 5, 10 se muestran a la continuación:

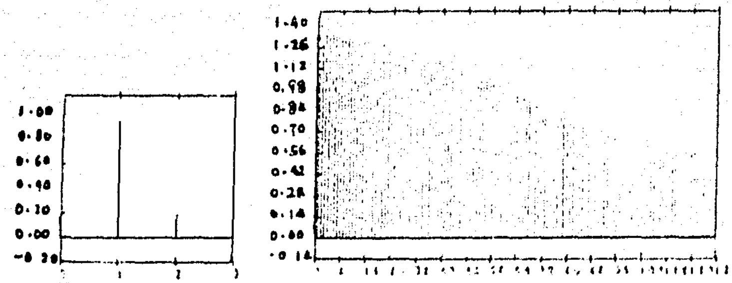


Fig.3.6.4 La respuesta al impulso del filtro H(Z) La respueta en frecuencia

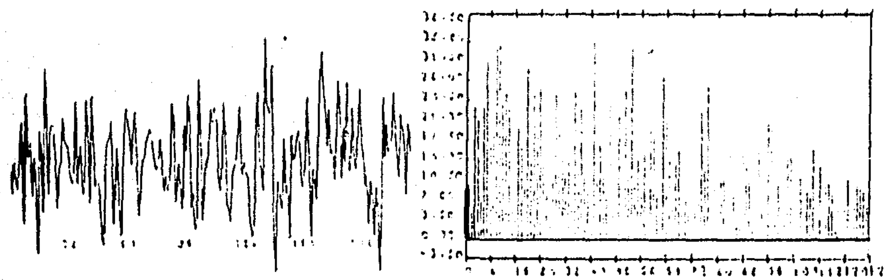


Fig.3.6.5 Entrada de referencia x_j Espectro de la entrada de referencia X(*W*)

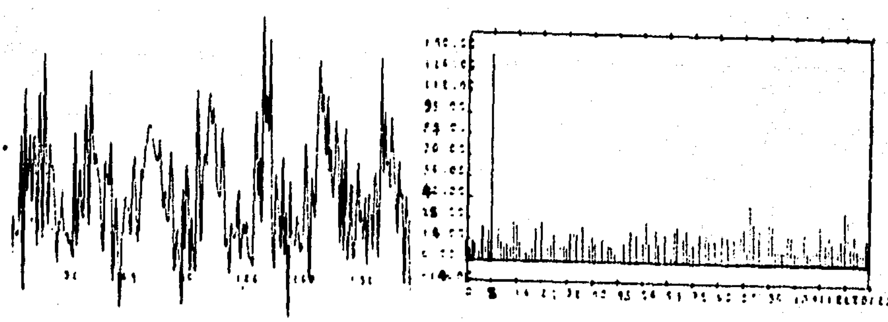
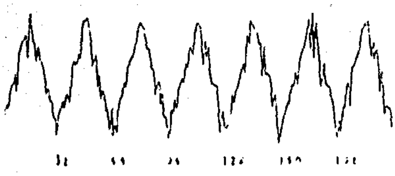
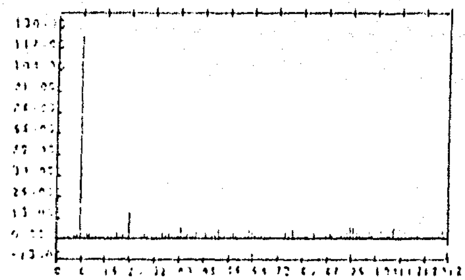


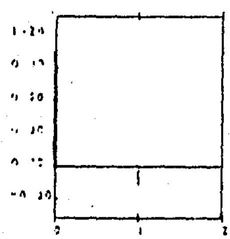
Fig.3.6.6 Entrada primaria d_j Espectro de la entrada primaria D(*W*)

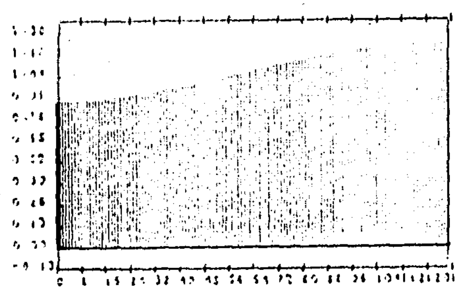




(a) Salida del cancelador de ruido ε_j

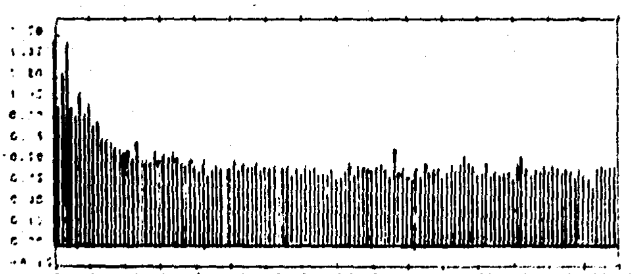
Espectro de la salida del cancelador de ruido $E(\omega)$





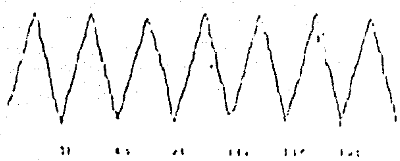
(b) Respueta al impulso del filtro adaptivo w_j

Respueta en frecuencia del filtro adaptivo $W(\omega)$

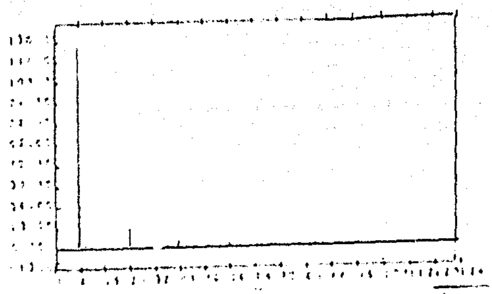


(c) Error cuadrático v.s. bloque de muestras (cada bloque contiene 32 muestras)

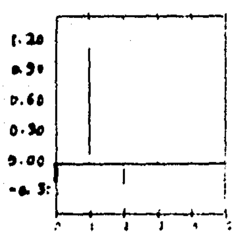
Fig.3.6.7 n=2



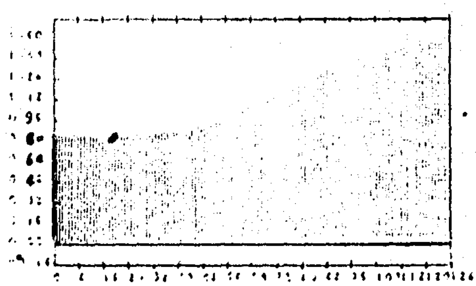
(a) Salida del cancelador de ruido ε_j



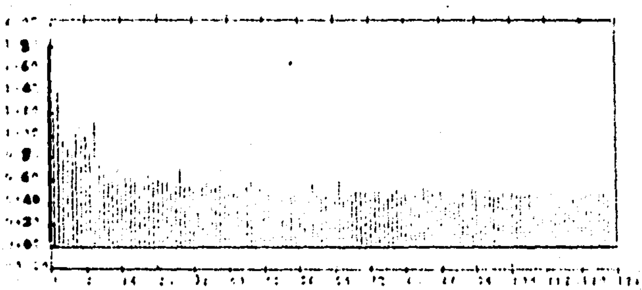
Espectro de la salida del cancelador de ruido $E(\omega)$



(b) Respuesta al impulso del filtro adaptivo w_j

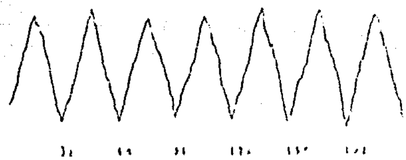


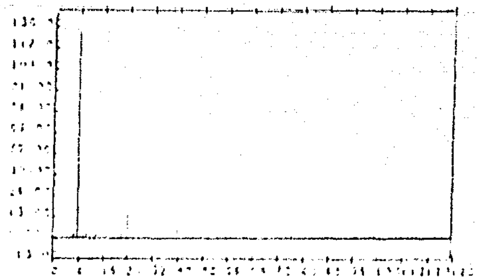
Respuesta en frecuencia del filtro adaptivo $W(\omega)$



(c) Error cuadrático v.s. bloque de muestras

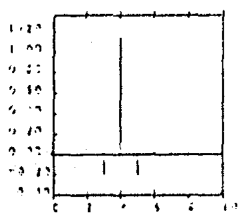
Fig.3.6.8 n=5

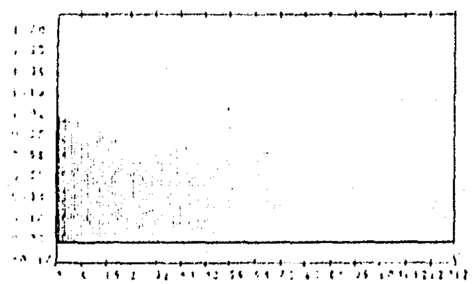




(a) Salida del cancelador de ruido ε_j

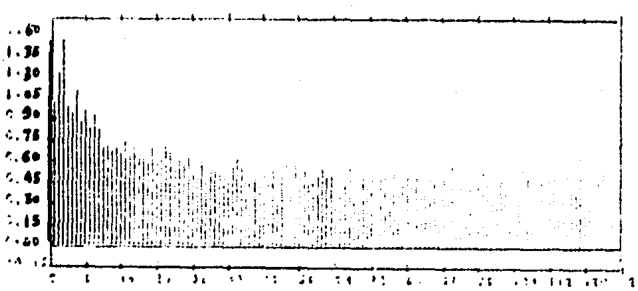
Espectro de la salida del cancelador de ruido $E(\omega)$





(b) Respuesta al impulso del filtro adaptivo w_j

Respuesta en frecuencia del filtro adaptivo $W(\omega)$



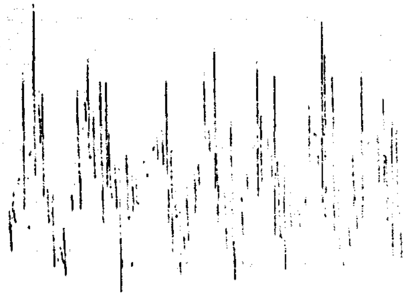
(c) Error cuadrático v.s. bloque de muestras

Fig.3.6.9 n=10

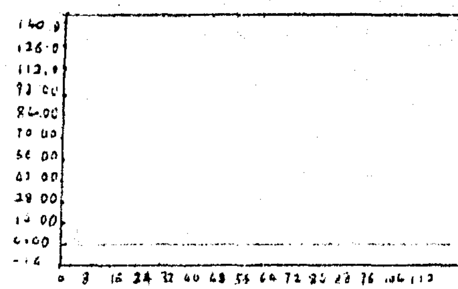
De las fig.3.6.7-fig.3.6.9 se observa que el funcionamiento del cancelador de ruido se mejora considerablemente al incrementar la longitud del filtro adaptivo de n=2 a n=5, pero el funcionamiento queda prácticamente iguales al incrementar la n de 5 a 10. esto se debe a que en este caso las muestras x_i con que estiman el ruido n_j tienen poca correlación con n_j para $|i-j|>3$, y los parámetros w_i para $|i-j|>3$ toman valores cerca de cero. Se observa también que el filtro adaptivo se aproxima al filtro inverso del filtro $H(w)$, es decir, $W(w)H(w)=1$.

b) Retardo en la entrada primaria

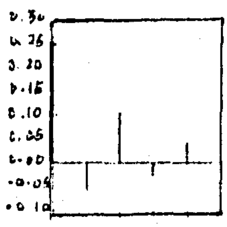
En esta simulación los filtros deconocidos tienen funcion de transferencia dada por las ecuaciones (3.6.1) y (3.6.2). Se escoge la constante u=0.001 y la longitud del filtro n=5, los resultados de la simulacion para diferentes valores del retarodo l se muestran en lo siguiente:



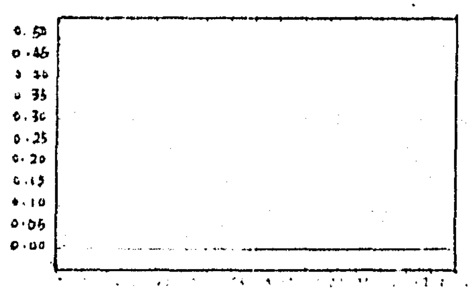
(a) Salida del cancelador de ruido ε_j



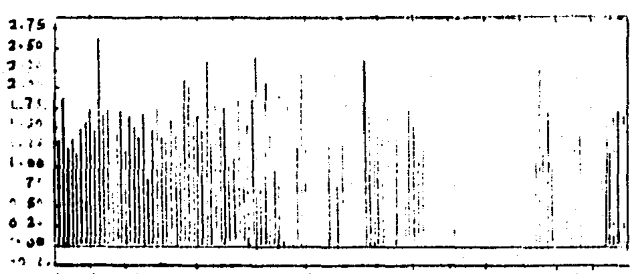
Espectro de la salida del cancelador de ruido $E(W)$



(b) Respueta al impulso del filtro adaptivo W_j

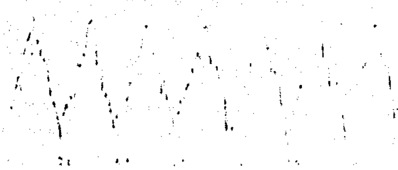


respuesta en frecuencia del filtro adaptivo $W(W)$

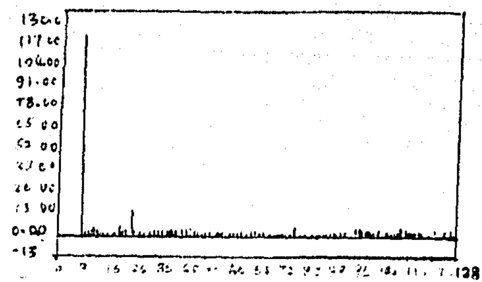


(c) Error cuadrático v.s. bloque de muestras

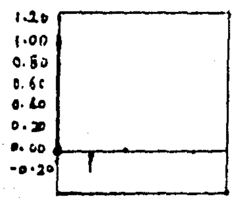
Fig.3.6.10 l=0



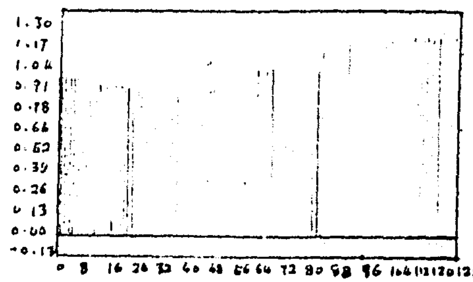
(a) Salida del cancelador de ruido ε_j



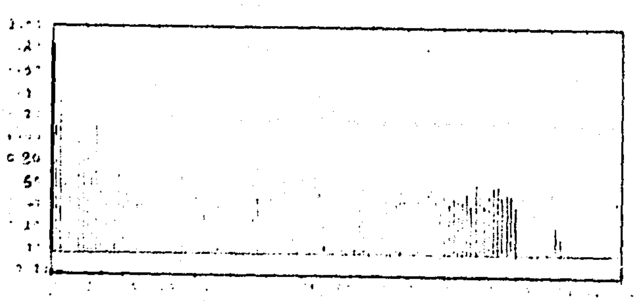
Espectro de la salida del cancelador de ruido $E(\omega)$



(b) Repuesta al impulso del filtro adaptivo w_j

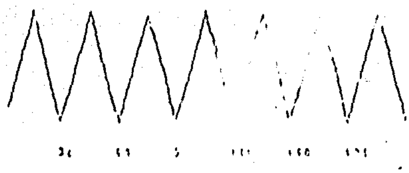


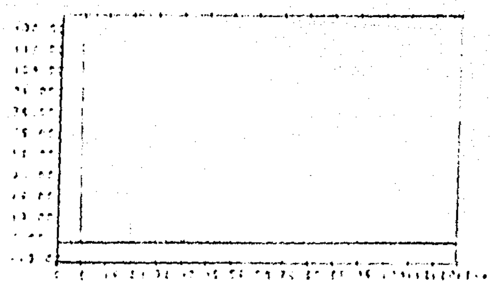
Respuesta en frecuencia del filtro adaptivo $W(\omega)$



(c) Error cuadrático v.s. bloque de muestras

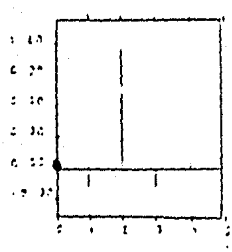
Fig.3.6.11 l=1

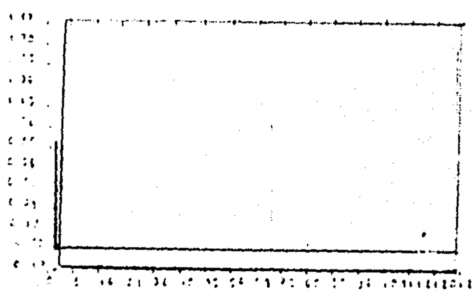




(a) Salida del cancelador de ruido ε_j

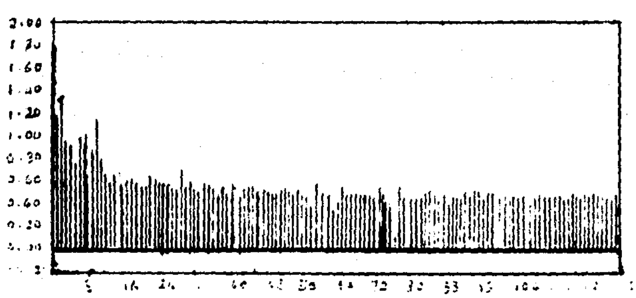
Espectro de la salida del cancelador de ruido E(w)





(b) Respuesta al impulso del filtro adaptivo W_j

Respuesta en frecuencia del filtro adaptivo W(w)



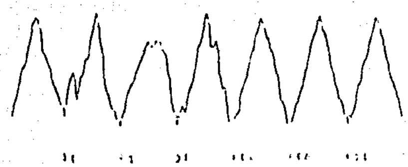
(c) Error cuadrático v.s. bloque de muestras

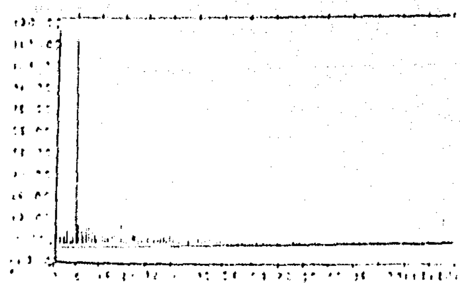
Fig.3.6.12 l=3

De las fig.3.6.10-fig.3.6.12 se observa que el funcionamiento del cancelador de ruido es insatisfactorio para l=0, porque para el filtro desconocido H(Z) en la ec.(3.6.1), la entrada de referencia x_i tienen poca correlación con el ruido n_i para l=1. Para l=1, se atenua considerablemente el ruido en la salida, y para l=3 el ruido es casi totalmente eliminado.Comparando las fig.3.6.12 y fig.3.6.8 se observa que el funcionamiento es prácticamente lo mismo para l=3 y l=2.

c) Velocidad de convergencia

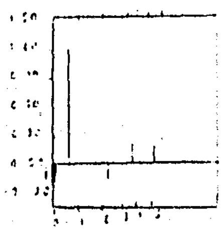
En esta simulacion, los filtros desconocidos tienen funcion de transferencia dada por las ecuaciones (3.6.1) y (3.6.2). Se escoge la longitud del filtro adaptivo n=5 y el retardo l=2, en las siguientes gráficas se muestran los resultados para diferentes valorese de la constante u:

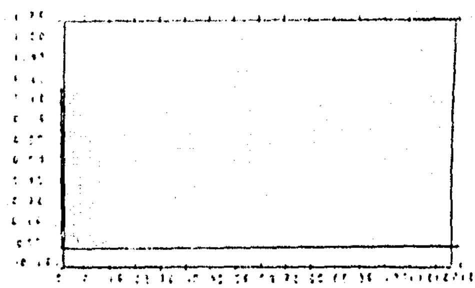




(a) Salida del cancelador de ruido ε_j

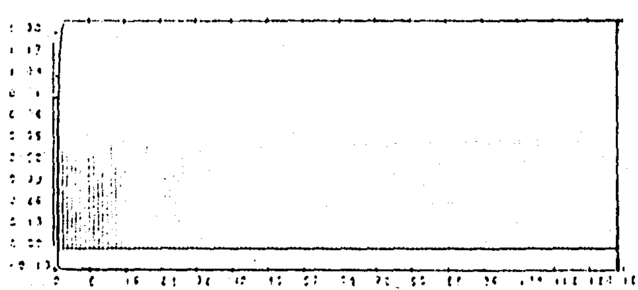
Espectro de la salida del cancelador de ruido $E(\omega)$





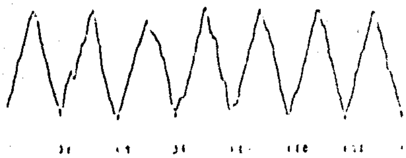
(b) Respueta al impulso del filtro adaptivo w_j

Respuesta en frecuencia del filtro adaptivo $W(\omega)$

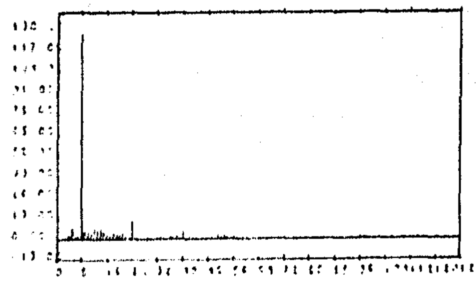


(c) Error cuadrático v.s. bloque de muestras

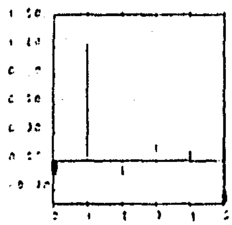
Fig.3.6.13 u=0.01



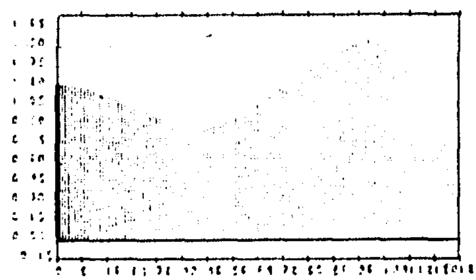
(a) Salida del cancelador de ruido ε_j



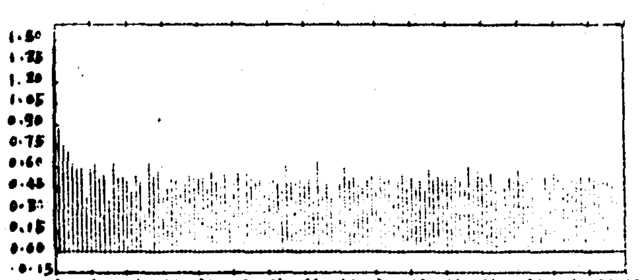
Espectro de la salida del cancelador de ruido $E(w)$



(b) Respuesta al impulso del filtro adaptivo w_j^*



Respuesta en frecuencia del filtro adaptivo $W(w)$



(c) Error cuadrático v.s. bloque de muestras

Fig.3.6.14 u=0.005

De las fig.3.6.13 (c), fig3.6.14 (c) y fig.3.6.8 (c) se observa que para u=0.01 el cancelador de ruido converge después de un bloque de muestras (32 muestras) con un error cuadrático en el estado estable aproximadamente 0.52 mientras para u=0.005 y u=0.001 el tiempo de convergencia es 5 y 10 bloques de muestras respectívamente, pero el error cuadrático en el estado estable es aproximadamente la potencia de la señal, la cual es 0.5.

d) Ruido no correlacionado

En esta simulación, los filtros desconocidos están dado por

$$H(Z)=0.54-0.65Z^{-1}+0.54Z^{-2}$$

$$G(Z)=0$$

La respueta en frecuencia del filtro H(Z)

$$|H(W)|=1.08\cos W-0.65$$

es cero para $W=0.925$ rad. (frecuencia dicreta k=38) como se muestra en la fig.3.6.15.

Se escoge la constante u=0.001, la longitud del filtro adaptivo n=6 y el retardo l=3, los resultados de la simulación se muestran en las siguientes gráficas:

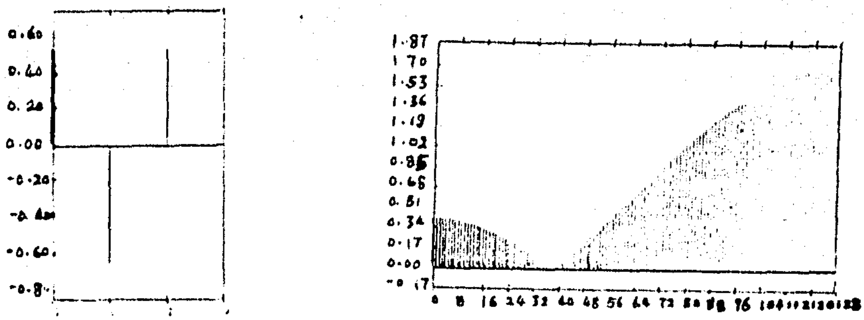


Fig.3.6.15 La respuesta al impulso del filtro H(Z) La respueta en frecuencia H(w)

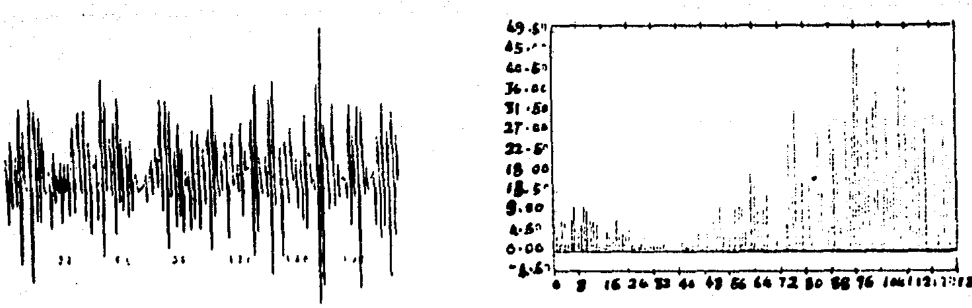
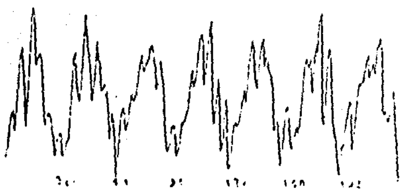
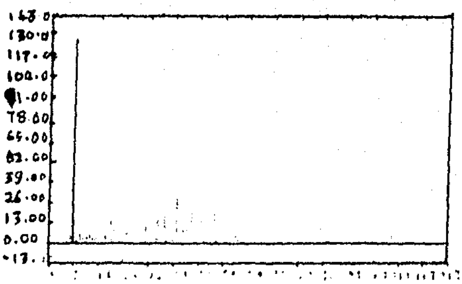


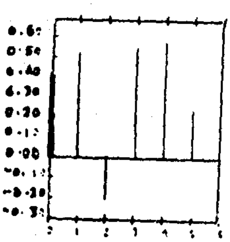
Fig.3.6.16 Entrada de referencia x_j Espectro de la entrada de referencia X(W)



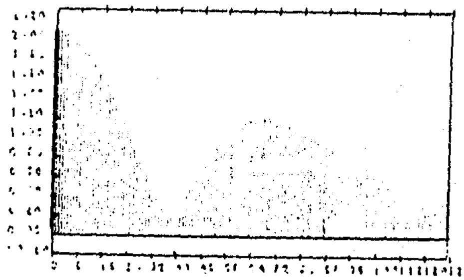
(a) Salida del cancelador del ruido ε_j



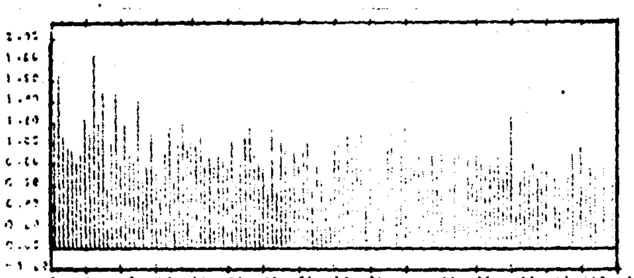
Espectro de la salida del cancelador de ruido $E(W)$



(b) Respuesta al impulso del filtro adaptivo w_j



Respuesta en frecuencia del filtro adaptivo $W(W)$



(c) Error cuadrático v.s. bloques de muestras

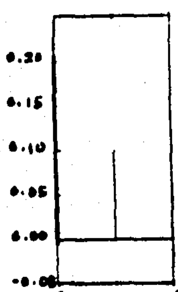
Fig. 3.6.17 Resultados con entrada primaria que contiene ruido no correlacionado

De la fig.3.6.17 (a) se observa que los componentes del ruido alrededor de la frecuencia k=38 son poco afectados, debido a que la entrada de referencia x, no tiene informacion sobre el ruido en estas frecuencias por el filtro desconocido H(Z). Se observa tambien que la respuesta en frecuencia del filtro adaptovo en la fig.3.6.17 (b) tiene valores pequeños en esas frecuencias, y el error cuadratico estable es aproximadamente 0.55, que es la suma de la potencia de la señal y la potencia del ruido no correlacionado.

e) Apariencia de la señal en la entrada de referencia

En esta simulacion, el filtro H(Z) está dado por la ec.(3.6.1) y el filtro G(Z) está dado por

$$G(Z)=0.2+0.1Z^{-1}$$



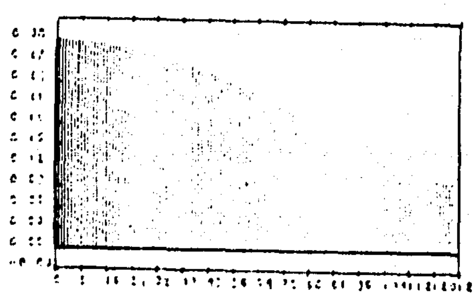


Fig.3.6.18 Respuesta al impulso del filtro G(Z) Respuesta en frecuencia del filtro G(Z)

En la simulación se escoge la constante u=0.001, la longitud del filtro adaptivo n=5 y el retardo l=2, los resultodos se grafican en las siguientes gráficas:

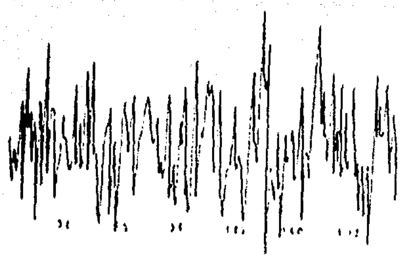
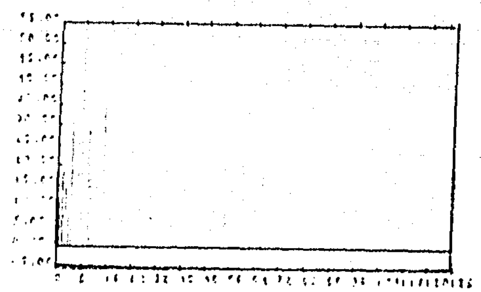
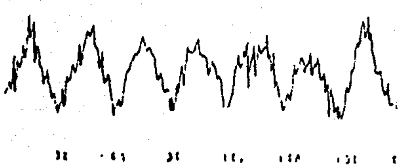


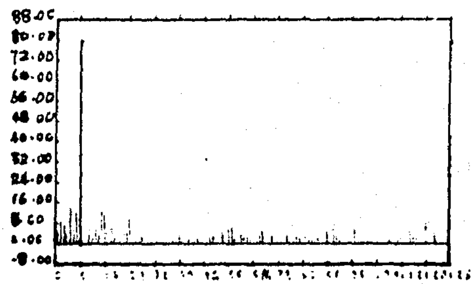
Fig.3.6.19 Entrada de referencia x_j



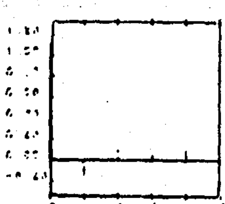
Espectro de la entrada de referencia $X(w)$



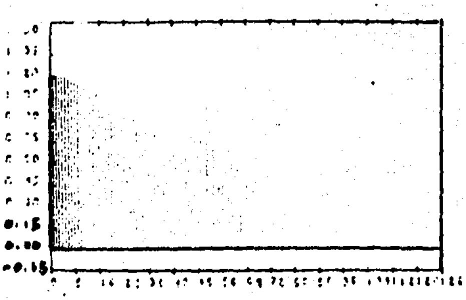
(a) Salida del cancelador de ruido ε_j



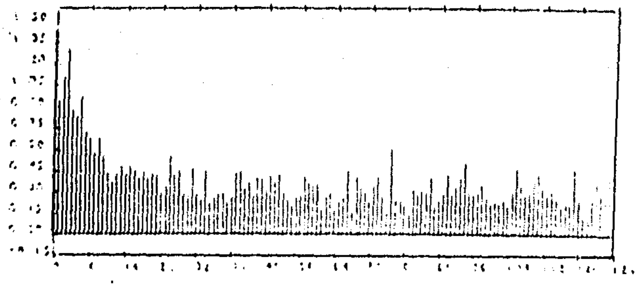
Espectro de la salida del cancelador de ruido $E(w)$



(b) Respuesta al impulso del filtro adaptivo w_j



Respuesta en frecuencia del filtro adaptivo $W(w)$



(c) Error cuadrático v.s bloque de muestras
Fig.3.6.20 Entrada de referencia que tiene componente de la señal

Comparando la fig.3.6.20 con la fig.3.6.6 se observa que la armonica fundamental de la señal se reduce la magnitud, debido a que la entrada de referencia del cancelador tiene componente correlacionado con la señal, el cual cancela parte de la señal. Se observa en la fig.3.6.20 (c) que el error cuadratico estable es menor que la potencia de la señal.

f) No estacionalidad

Para el caso no estacionario, el modelo de simulación se muestra en la siguiente figura:

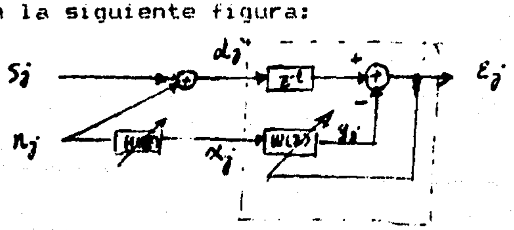


Fig.3.6.21 Modelo de simmulacion para el caso no estacionario

Donde el filtro desconocido H(Z) cambia la respuesta al impulso cada 100 bloques de muestras (3200 muestras). Se escoge el valor K=10 en la ec.(5.3.2), la constante u=0.001, la longitud del filtro adaptivo n=10 y el retardo l=5, la siguiente gráfica muestra el error cuadrático v.s bloque de muestras:

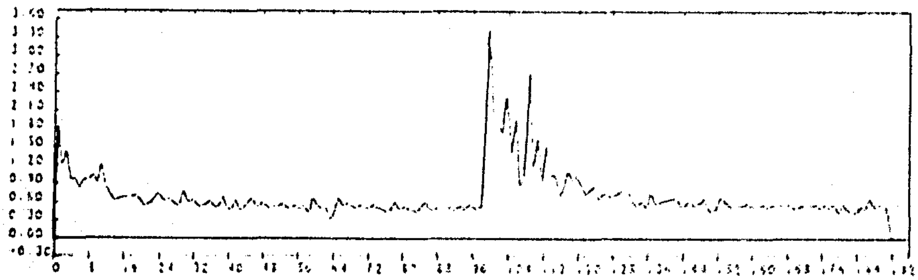


Fig.3.6.22 Error cuadrático en el caso no estacionario
$H_1(Z)=0.2+0.96Z^{-1}+0.2Z^{-2}$
$H_2(Z)=0.9+0.3Z^{-1}+0.3Z^{-2}$

De la cual se observa que el error cuadrático converge después de unos 10 bloques de muestras, cuando se cambia la respuesta al impulso del filtro H(Z) en el bloque 100, hay un cambio brusco en el error cuadratico, y después de 10 bloques de estado transitorio, el cancelador de ruido se vuelve a converger a 0.5 (la potencia de la señal).

IV. Filtro Adaptivo LMS Implementado en el Dominio de Frecuencia

Para ciertas aplicaciones, el filtro adaptivo analizado en el capítulo anterior tiene que ser de orden grande, lo cual decrece la eficiencia del filtro adaptivo LMS, pero, si este se implementa en el dominio de frecuencia a través de la transformada discreta de Fourier, resulta mucho más eficiente en cuanto a calculos se refieren.

En la sección 4.1, se presenta la configuración de un filtro adaptivo LMS implementado en el dominio de frecuencia (abreviadamente FAF-LMS), la diferencia entre un FAF-LMS y un filtro adaptivo LMS implementado en el dominio de tiempo.

En la sección 4.2, se presenta el algorítmo LMS complejo, el cual es una version del algorítmo LMS presentado en la scción 3.2 realizada en el dominio de frecuencia, el número de multiplicaciones que se llevan por los dos algorítmos es comparado.

En la sección 4.3, se analiza el comportamiento de la convergencia de la media.

En la sección 4.4, se analizan los errores que resultan en la aproximación.

Debido a la semejanza entre un filtro adaptivo LMS implementado en el dominio de tiempo y uno implementado en el dominio de frecuencia, los analisis se hacen en forma breve.

4.1 Configuración del FAF-LMS

El FAS-LMS tiene la siguiente estructura como se muestra

en la figura.

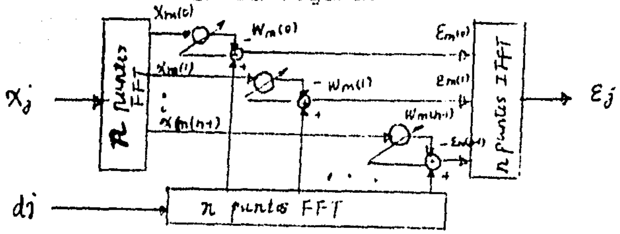


Fig.4.1.1 Filtro adaptivo LMS implementado en el dominio de frecuencia

En la cual, se observa que a diferencia de un filtro adaptivo LMS implementado en el dominio de tiempo, un FAF-LMS trabaja en base de bloque de datos, el cual se forma acumulando n muestras en un acumulador, tal que no hay traslape ni espacio entre bloques:

$D_m = \{d_{mn}\ d_{mn+1}\ \ldots\ d_{mn+n-1}\}$ (4.1.1)

$X_m = \{x_{mn}\ x_{mn+1}\ \ldots\ x_{mn+n-1}\}$ (4.1.2)

$m = 0, 1, 2, \cdots$

donde m se donota el número de bloque de datos y n es la longitud del FAF-LMS.

Tomando la transformada discreta de Fourier para formar el bloque de datos complejos:

$DF_m = \{d_m(0)\ d_m(1)\ \ldots\ d_m(n-1)\}$ (4.1.3)

$XF_m = \{x_m(0)\ x_m(1)\ \ldots\ x_m(n-1)\}$ (4.1.4)

donde

$$d_m(k) = \sum_{l=0}^{n-1} d_{mn+l}\, e^{-i\frac{2\pi}{n}lk}$$

$$x_m(k) = \sum_{l=0}^{n-1} x_{mn+l}\, e^{-i\frac{2\pi}{n}lk}$$

es el dato complejo de la frecuencia discreta k en el bloque m de la entrada primaria y la entrada de referencia.

respectívamente.

Bajo la suposición de que la entrada primaria y la entrada de referencia son estacionarias y Gaussianas, los datos en diferente frecuencias discretas son independientes [7], entonces, los parametros complejos del FAF-LMS actuan independientemente como si fueran n filtros independientes y cada uno tiene un solo parámetro.

Los n datos complejos de la entrada de referencia son filtrados por el FAF-LMS produciendo las salidas

$y_m(k)=w_m(k)x_m(k) \quad k=0,1,...,n-1$

Restando las n salidas del FAF-LMS de los datos complejos de la entrada primaria, se obtienen n errores complejos:

$\mathcal{E}_m(k)=d_m(k)-y_m(k)$

los cuales pasan a un transformador que realiza la transformada inversa de Fourier para producir n muestras a la salida del cancelador de ruido.

Como se puede tratar un FAF-LMS de orden n como n filtros independientes de orden 1,se simplifica significativamente los análisis, como se verá más adelante.

4.2 Algorítmo LMS complejo

Debido a que los datos complejos son independiente, es suficiente que el algorítmo LMS complejo sólo contemple el caso de un parámetro complejo $w_m(k)=w_{mR}(k)+jw_{mI}(k)$,como se muestra en la figura:

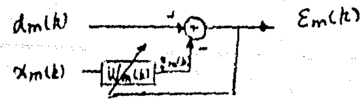


Fig.2.4.1 FAS-LMS con un parametro complejo

En la cual, el error esta dado por

$$\mathcal{E}_m(k)=d_m(k)-x_m(k)w_m(k) \qquad (4.2.1)$$

y el valor esperado del error cuadratico está dado por

$$\xi = E\,\mathcal{E}_m(k)\,\overline{\mathcal{E}}_m(k) \qquad (4.2.2)$$

donde la barra se denota el conjugado.

El gradiente del error se define como

$$\nabla_m(k) = \nabla_{mR}(k) + j\nabla_{mI}(k) \qquad (4.2.3)$$

donde $\nabla_{mR}(k)$ y $\nabla_{mI}(k)$ son parte real y parte imaginaria del gradiente, respectívamente,

$$\nabla_{mR}(k) = \frac{\partial \xi}{\partial W_{mR}(k)} \qquad (4.2.4)$$

$$\nabla_{mI}(k) = \frac{\partial \xi}{\partial W_{mI}(k)} \qquad (4.2.5)$$

Al igual que en la sección 3.2, el algorítmo LMS complejo se usa el gradiente estimado en la ecuación iterativa,

$$w_{m+1}(k)=w_m(k)-u\,\hat{\nabla}_m(k) \qquad (4.2.6)$$

donde u es una constante real.

El gradiete estimado esta dado por

$$\hat{\nabla}_m(k) = \frac{\partial|\mathcal{E}_m(k)|^2}{\partial W_{mR}(k)} + i\,\frac{\partial|\mathcal{E}_m(k)|^2}{\partial W_{mI}(k)}$$

$$= -2\,\mathcal{E}_m(k)\,\overline{x}_m(k) \qquad (4.2.7)$$

Sustituyendo la expresión (4.2.7) en la ec. (4.2.6) se obtiene el algorítmo LMS complejo:

$$w_{m+1}(k)=w_m(k)+2u\,\mathcal{E}_m(k)\,\overline{x}_m(k) \qquad (4.2.8)$$

En resumen, el algorítmo LMS complejo para un FAF-LMS de orden n está dado por:

Bloque de muestras de entrada primaria:

$D_m=\{d_{mn}\ d_{mn+1}\ ..\ d_{mn+n-1}\}$

bloque de muestras de la entrada de referencia:

$X_m=\{x_{mn}\ x_{mn+1}\ ..\ x_{mn+n-1}\}$

los parámetros complejos del FAF-LMS:

$WF_m=\{w_m(0)\ w_m(1)\ ..\ w_m(n-1)\}$

i) evaluar la transformada discreta de Fourier para formar los bloques de datos complejos:

$XF_m=\{x_m(0)\ x_m(1)\ ..\ x_m(n-1)\}$

$DF_m=\{d_m(0)\ d_m(1)\ ..\ d_m(n-1)\}$

ii) para k=0,1,..,n-1, hacer:

$\mathcal{E}_m(k)=d_m(k)-w_m(k)x_m(k)$

$w_{m+1}(k)=w_m(k)+2u\mathcal{E}_m(k)\overline{x}_m(k)$

iii) evaluar la transformada inversa de Fourier para formar

$EF_m=\{\ \mathcal{E}_m(0)\ \mathcal{E}_m(1)\ \ ...\ \ \mathcal{E}_m(n-1)\ \}$

iv) m=m+1 se va a i)

En el algoritmo LMS complejo, se observa que se necesita evaluar dos transformadas discretas de Fourier y una transformada inversa de Fourier, las cuales se puede realizar usando la técnica de transformada rápida de Fourier (FFT)[14], entoces, tres evaluaciones de n puntos de FFT llevan $3n/2\log_2 n$ multiplicaciones complejas,y en el paso ii) del algoritmo se necesitan 2n munltiplicaciones complejas, por tanto, en cada iteración de adaptación se tiene que realizar $3n/2\log_2 n+2n$ multiplicaciones complejas, si realizar una multiplicacion compleja equivale a realizar cuatro multiplicaciones reales, en la siguinte tabla, se compara el número de multiplicaciones que se necesitan en los dos algorítmos.

longitud del filtro n	# de munlt. en el algorit. real $N1 = 2n^2$	# de munlt. en el algorit. complejo $N2 = 4(\frac{3}{2} n \log_2 n + 2n)$	N1/N2
4	32	80	2.500
16	512	512	1.000
32	2,048	1.216	0.594
128	32,768	6.400	0.195
1024	2,097,125	69,632	0.033

Tabla 4.2.1 Comparación de número de multiplicaciones en los dos algorítmos

De esta tabla se observa que para la longitud del filtro adaptivo mayor que 16, el número de multiplicaciones en el algorítmo LMS complejo resulta menor que el del algorítmo real.

4.3 Convergencia de la media del parámetro complejo

Por la razón de que los parámetros del FAF-LMS $w_m(k)$ en diferentes frecuencias discretas k son independientes, se analiza la convergencia de la media del parámetro complejo sólo para el caso del FAF-LMS mostrado en la fig.4.2.1.

Sustituyendo el error dado por la ec. (4.2.1) en el algorítmo LMS complejo (4.2.8) se tiene la siguinte ecuacion en deferencia no homogenea:

$$w_{m+1}(k)=(1-2u|x_m(k)|^2)w_m(k)+2ud_m(k)\overline{x}_m(k) \quad (4.3.1)$$

Suponiendo que la condición inicial $w_0(k)=0$, la solucion de esta ecuacion está dada por

$$W_m(k) = 2u \sum_{i=0}^{m-1} d_i(k)\bar{x}_i(k) \prod_{l=i+1}^{m-1} (1-2u|x_l(k)|^2) \qquad (4.3.2)$$

donde $\prod_{l=m}^{m-1}(\cdot) \triangleq 1$. Se supone que los datos complejos $x_i(k)$ y $x_j(k)$, $d_i(k)=s_i(k)+n_i(k)$ y $x_j(k)$ son no correlacionados para $i\neq j$, debido a la suposición de que los ruidos son Gaussianos, los términos $d_i(k)x_i(k)$ y $|x_i(k)|^2$ en la expresión (4.3.2) son independientes. Tomando el valor esperado en ambos lados de la expresión (4.3.2) se obtiene

$$E\,W_m(k) = 2u \sum_{i=1}^{m-1} \sigma_{dx}^2 \prod_{l=i+1}^{m-1} (1-2u\sigma_{xx}^2) \qquad (4.3.3)$$

donde $\sigma_{dx}^2 = E\,d_i(k)\bar{x}_i(k)$. $\sigma_{xx}^2 = E\,|x_i(k)|^2$ son la covariancia entre $d_m(k)$ y $x_m(k)$ y la autocovariancia de $x_m(k)$, respectivamente. Por lo que los ruidos son estacionarios, y la señal y los ruidos son no correlacionados, la covariancia y la autocovariancia son constantes, entonces la expresión (4.3.3) se reduce a

$$E\,W_m(k) = \frac{\sigma_{dx}^2}{\sigma_{xx}^2}\left[1-(1-2u\sigma_{xx}^2)^m\right] \qquad (4.3.4)$$

la cual converge sí y sólo sí $|1-2u\sigma_{xx}^2|<1$, esto es

$$0 < u < \frac{1}{\sigma_{xx}^2} \qquad (4.3.5)$$

Bajo la condición (4.3.5), cuando m tiende a infinito, la media del parametro complejo tiende a

$$E\,W_m(k) \rightarrow \frac{\sigma_{dx}^2}{\sigma_{xx}^2} \qquad m\rightarrow\infty \qquad (4.3.6)$$

Por otro lado, del principio de ortogonalidad se tiene

$$E\,(d_m(k) - W_m(k)x_m(k))\bar{x}_m(k) = 0$$

la cual proporciona la solución óptima (solucion de Winer):

$$W_m^*(k) = \frac{\sigma_{dx}^2}{\sigma_{xx}^2} \qquad (4.3.7)$$

De las expresiones (4.3.6) y (4.3.7) se observa que la media del parametro del FAF-LMS converge a la solución de Winer bajo la condición (4.3.5).

4.4 Errores en la aproximación

Semejante a lo que se analizó en la seccion 3.4, Los errores en la aproximacion se refieren al error del parámetro

$$v_m(k)=w_m(k)-w^*(k)$$

y el error de gradiente

$$N_m(k) = \nabla_m(k) - \hat{\nabla}_m(k)$$

Se sigue el mismo prcedimiento que en la sección 3.4, el error de gradiente en el estado estable está dado por

$$N_m(k) = - \hat{\nabla}_m(k) = 2\,\varepsilon_m(k)\,\overline{x}_m(k) \qquad (4.5.1)$$

el cual tiene media cero y variancia

$$C_N = 4\,\varepsilon_{min}\,\sigma_{x_k}^2 \qquad (4.5.2)$$

El error de parametro $v_m(k)$ tiene media

$$Ev_m(k)=Ew_m(k)-w^*=0$$

y variancia

$$C_v = \frac{\mu\,\varepsilon_{min}}{1-\mu\,\sigma_{x_k}^2} \qquad (4.5.3)$$

De los análisis en la sección 3.4 y en esta sección se observa que el error de gradiente es el que causa el error del vector de parámetros y el error adicional, entonces, reducir el error de gradiente puede mejorar el funcionamiento del cancelador de ruido.

V. Conclusion

La cancelacion de ruido aditivo contenido en una señal en forma adaptiva es adecuada cuando se desconoce la estadística del ruido o esta varia lentamente en el tiempo.

El algoritmo LMS, que se basa en una estructura preestablecida del filtro adaptivo (filtro universal), garantiza que la media del vector de parametros converge a la solución de Winer bajo la condicion de convergencia. Sin embargo, la velocidad de convergencia resulta lenta para ciertas circunstancias.

Los efectos que limitan el funcionamiento del cancelador de ruido se pueden ruducir si se obtiene una entrada de referencia que solo está correlacionada con el ruido contenido en la señal y con un diseño adecuado del filtro adaptivo LMS.

Cuando la longitud del filtro adaptivo LMS es mayor que 16, resulta mas eficiente implementarlo en el dominio de frecuencia mediante la transformada discreta de Fourier.

El cancelador de ruido basado en un filtro adaptivo LMS es eficiente y simple de analizar e implementar, se puede aplicar tanto para cancelar una interferencia indeseada en una señal como para separar dos señales grabadas en un archivo. Sin embargo, como la variancia del vector de parámetros del filtro adaptivo LMS no tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito, el funcionamiento del cancelador de ruido esta limitado.

El funcionamiento del cancelador de ruido se puede mejorar con una estimacion del gradiente del error cuadrático más exacta, y la velocidad de convergencia podria ser mas rapida si se usa una función del error cuadrático $u(\varepsilon_j^2)$ en lugar de una contante u en el algorítmo.

Referencias

[1] B. Widrow et al
Adaptive noise cancelling : principles and applications
Proceding of IEEE Vol. 63 Dec. 1975

[2] B. Widrow et al
Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter
Proceding of IEEE Vol. 64 Aug. 1976

[3] Earl Ferrera, B. Widrow
The time-sequenced adaptive filter
Trans. on ASSP. Vol. 29 Jun. 1981

[4] J. R. Treichler
Transient and convergent behavior of the adaptive line enhancer
Trans. on ASSP Vol. 27 Feb.1977

[5] M. R. Sambur
Adaptive noise cancelling for speech signals
Trans. on ASSP Vol.26 Oct. 1978

[6] M. Dentino, J. McCool, B. Widrow
Adaptive filter in the frecuency domain
Proceding of the IEEE Vol.66 Dec. 1978

[7] N. J. Bershad, P. L. Feintuch

Analysis of the frecuency domain adaptive filter

Proceding of the IEEE Vol.67 Dec. 1979

[8] A. Papoulis

Probability, random variable and stochastic processes

McGraw-Hill 1965

[9] B. Feidlander

System identification techniques for adaptive noise cancelling

Trans. on ASSP Vol.30 Oct. 1982

[10] E. R. Ferrare, B. Widrow

Multichannel adaptive filtering for signal enhancer

Trans. on ASSP Vol. 29 Jun. 1981

[11] B. Widrow et al

adaptive atenna systems

Proceding of the IEEE Vol. 55 No.12 Dec.1976

[12] B. Widrow, J. M. McColl

A comparision of adaptive algorithms based on the metheds of steepsat decent and random search

IEEE Trans. on antennas and propagatio Vol.24 Sep.1976

[13] B. Widrow, J. McCool, M. Ball
The complex LMS algorithm
Proceding of the IEEE Apr.1975

[14] L. p. Rabiner
Theory and applications of digital signal processing
Prentice-Hall 1975