UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

LOS CONJUNTOS FINITOS Y LOS CONJUNTOS INFINITOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN FILOSOFÍA

PRESENTA:

BLOCK SEVILLA, SONIA MARIA

ASESOR: ROBLES, JOSÉ ANTONIO

Ciudad Universitaria, Distrito Federal, 1980

CONJUNTOS FINITOS Y CONJUNTOS INFINITOS

Vo. Bo.

SONIA BLOCK

Tesina sobre "Conjuntos finitos y conjuntos infinitos" que presenta Sonia Block Sevilla para optar por el grado de Licenciatura en la carrera de Filosofía.

El director de la tesina es José Antonio Robles.

Octubre de 1980

Dedico este trabajo con profunda gratitud a Ignacio Jané, no sólo porque de él recibí el estímulo para llevarlo a cabo y una ayuda generosa en la corrección y el mejoramianto de cada parte, sino también porque en sus cursos he vivido el placer de descubtir las matemáticas y la lógica.

Notación

$\subseteq$ es subconjunto de.

$\subsetneq$ es subconjunto propio de.

$\supseteq$ contiene como subconjunto a

$\mathcal{P}(A)$: conjunto potencia de A.

$x R y$: x y y están relacionados mediante R.

$A-B$: intersección de A y del complemento de B.

$\emptyset$: conjunto vacío.

$A\sim B$: A es coordinable con B

$A \precsim B$: A es coordinable con algún subconjunto de B.

$<$-mínimo: elemento mínimo para el orden $<$

$\langle A, < \rangle$: conjunto A ordenado por la relación $<$.

$A \cong B$: A es isomorfo a B

$A \cong_f B$ f es un isomorfismo entre A y B.

ω: conjunto de los ordinales finitos. ($\mathbb{N}$: conjunto de los númerøs nat)

$f \circ g$: composición de f y g

$g(x)$: valor de x bajo la función g.

$g''B$: imagen de B bajo g.

$A\cap B$: intersección de A y B.

$A\cup B$: unión de A y B.

$M \models \varphi$: en el modelo M, φ es verdadero.

Introducción

El concepto de infinito ha suscitado asombro en los filósofos y los matemáticos desde la Antigüedad, quizás porque su estudio conduce a conclusiones que resultan paradójicas cuando se topa uno por primera vez con ellas. Parece extraño, por ejemplo, que la sucesión infinita de números $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ se acerque al cero indefinidamente sin alcanzarlo nunca. También causa algún desconcierto el que los conjuntos infinitos puedan dividirse infinitamente; por ejemplo, dado un conjunto numerable A, no sólo es posible dividir A en dos partes B y C disjuntas e infinitas, y luego B a su vez en dos partes disjuntas e infinitas D y F, y así sucesivamente un número numerable de veces, sino que podemos dividir A en un número mumerable de partes numerables y disjuntas, las cuales son a su vez divisibles en otras tantas partes numerables y disjuntas, y así sucesivamente.

Otro hecho extraño relativo al infinito es la posibilidad de poner en relación 1 a 1 los elementos de un conjuntos infinito con los de un subconjunto propio suyo. Así, el conjunto de los números naturales es coordinable en este sentido con el de los números pares, y el conjunto de puntos de la recta real es coordinable con el conjunto de puntos de cualquiera de sus segmentos. En este sentido se dice que un conjunto es reflexivo.

La reflexividad de los conjuntos infinitos está relacionada con la posibilidad de dividirlos infinitamente. Pero ¿de qué manera? Al descubrir las propiedades de los conjuntos infinitos no se ve inmediatamente de qué modo se relacionan entre sí. Por ejemplo, no se advierte a primera vista de qué manera conceptos como el de orden, o el de inducción podrían caracterizar la infinitud de un conjunto, o su finitud, o qué relación tendrían con la reflexividad. Este trabajo pretende mostrar de qué modo se relacionan distintos conceptos que definen la finitud de un conjunto.

Un conjunto finito es tal que si nos ponemos a contar sus elementos, o sea, si asociamos a cada elemento suyo un entero positivo siguiendo el orden natural de estos números, agotamos el conjunto al llegar a un número n. Podemos expresar este hecho trivial, diciendo que ese conjunto es coordinable con un segmento inicial propio de números naturales. Por arbitrario que sea el orden en que vayamos escogiendo los elementos al contarlos, siempre obtendremos una sucesión con primer y último elemento, y tal que cada elemento con sucesor o con antecesor en la sucesión, tiene sucesor o antecesor inmediato.

Un conjunto infinito no es ordenable de ese modo. Si pudieramos ordenarlo, la sucesión que obtendríamos carecería deprimer elemento o de último elemento o de ambos; o bien en el caso dd tener extremos, tendría necesariamente un elemento con sucesor o con antecesor, que carecería de sucesor o de antecesor inmediato. De una manera equivale n- te podemos decir que un conjunto infinito no es coordinable con un segmento inicial de números naturales. En efecto, si nos ponemos a contar sus elementos, no agotamos el conjunto al llegar a algún número n. Más bien, si llegamos a cualquier número n, podemos escoger un elemento aún no considerado en la cuenta y asociarle el número n+1. Por lo tanto, todos los números de $\mathbb{N}$ pueden asociarse de ese modo a los elementos de un conjunto infinito. En otras palabras, dado un conjunto infinito cualquiera α, $\mathbb{N}$ es coordinable con un subconjunto suyo. Esta propiedad es equivalente a la reflexividad.

Es claro que si el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, es coordinable con un subconjunto de un conjunto A, A no es coordinable con un segmento inicial propio de números naturales. Pero de que A no sea coordinable con ningún segmento inicial propio de números naturales, no podemos concluir, en una teoría de conjuntos sin axioma de elección, que $\mathbb{N}$ sea coordinable con un subconjunto de A. En el párrafo anterior, se dijo que si contamos los elementos de un conjunto infinito, llegando al n-ésimo siempre es posible escoger el n+1 ésimo. De hecho la posiblidad de hacer un número infinito de elecciones arbitrarias depende de que la teoría de conjuntos que usemos para probar resultados sobre los conjuntos incluya alguna forma del axioma de elección.

Solamente en virtud de este axioma, el que un conjunto no sea coordinable con ningún segmento inicial propio de $\mathbb{N}$, implica que $\mathbb{N}$ es sumergible en él. Así mismo, de la reflexividad de un conjunto se sigue, en virtud de este axioma, el que sea divisible en 2 subconjuntos infinitos disjuntos de la misma cardinalidad que él.

De las propiedades de los conjuntos infinitos que hemos mencionado, la más importante en cierto sentido, es la reflexividad, puesto que Dedekind la usó para definir la infinitud:

"Se dice que un sistema S es infinito cuando es semejante a una parte propia suya".(Was sind und was sollen die Zahlen).

Esta propiedad fue descubierta por Galileo, quien se percató de que el conjunto de los números naturales es coordinable con el de los cuadrados perfectos. Este hecho es tanto más desconcertante cuanto que a medida que se avanza en la serie de los números naturales, los cuadrados se vuelven más raros. En efecto, la distancia entre n^2 y $(n+1)^2$ es mayor cuanto mayor es n: $(n+1)^2-n^2= 2n+1$. Sin embargo, el conjunto de estos cuadrados es coordinable con $\mathbb{N}$. "Tenemos que decir que hay tantos cuadrados como números", admite Galileo. Pero en otro lado afirma que no puede concluirse que esos dos conjuntos sean iguales: no cabe hacer comparaciones del tipo "menor que", "mayor que" o "igual que" entre conjuntos infinitos. "Galileo, como Moisés, logró ver la tierra prometida pero no entró en ella." (Boyer, p. 360, A History of Mathematics).

Bolzano reconoció en la reflexividad de los conjuntos infinitos, una propiedad universal de estos conjuntos, y Dedekind la menciona en la definición de infinito. Para nosotros ya no es una paradoja el que $\mathbb{N}$ sea coordinable con los múltiplos de 3 o con algún subconjunto propio suyo; esta propiedad sorprende porque los conjuntos finitos no son reflexivos y la experiencia cotidiana nos acostumbra a este tipo de conjunto. Pero la historia de los descubrimientos acerca de los conjuntos infinitos nos ha familiarizado con la reflexividad. Tampoco nos extrañan otras propiedades que expresan los teoremas que se siguen de la definición de Dedekind, como el que sea posible quitarle a un conjunto infinito cualquier número finito de elementos sin disminuir su cardinalidad.

Sin embargo, hay cosas que no dejan de intrigar, como el hecho de que existan propiedades de los conjuntos infinitos que sirven para definirlos pero que no son equivalentes entre sí. El que un conjunto A sea reflexivo equivale, como lo dijimos a que $\mathbb{N}$ sea sumergible en él. Pero esto último no equivale a decir que A no es coordinable con un segmento inicial propio de números naturales. El que estas propiedades no sean equivalentes se prueba construyendo un modelo de la teoría de Zermelo Fraenkel en que hay un conjunto que no es coordinable con ningún segmento inicial propio de números naturales, pero que tampoco es reflexivo; o sea que en ese modelo, existe un conjunto infinito en un sentido pero no infinito en otro. Si la teoría Z.F. incluye el axioma de elección, entonces no es posible construir tal modelo, ya que con este axioma, todas las definiciones de infinitud son equivalentes.

El objetivo de este trabajo consiste en relacionar ciertos conceptos que definen la finitud de los conjuntos.(Si se habla indistintamente de definir la finitud o la infinitud es porque al anteponer una negación a cualquiera definición de una de estas nociones se obtiene una definición de la otra).

Cuando se topa uno por primera vez con una definición de la finitud de un conjunto en términos de un concepto como el de orden, asombra un poco el que ciertas características de un orden en un conjunto pueden tener algo que ver con su finitud o su infinitud.

El descubrir que a través de la noción de inducción se puede decir que un conjunto es finito, suge la inquietud de relacionarla con otras propiedades de los conjuntos finitos. Este trabajo pretende establecer de una manera precisa cómo se relacionan entre sí estos distintas propiedades.

Si hablamos de equivalencias, o de relaciones entre conceptos, debemos precisar que nuestro marco de referencia es la teoría de conjuntos de Zermelo Fraenkel. ¿Incluímos o no el axioma de elección? De esto depende, como vimos el que ciertos ~~senti~~ sentidos en que un conjunto es infinito sean equivalentes o no. Pero hay otras equivalencias válidas independientemente de que se tome o no encuenta la existencia de este axioma. ~~Por ellos~~ En función de este criterio, hemos decidido dividir en dos la exposición de las equivalencias entre definiciones.

Para concluir, diremos que este trabajo surgió de la necesidad de relacionar distintas propiedades de lo finito para entender con más claridad qué significa que un conjunto sea finito o infinito.

Definiciones

Una relación R es un orden en un conjunto si es una relación reflexiva , simétrica, transitiva y conexa.

Un conjunto A es ordenable si existe un orden en A.

Un conjunto A es biyectable o coordinable con un conjunto B si existe una función 1a1 y sobre de A sobre B.

R es un buen orden en A si todo subconjunto no vacío de A tiene un elemento mínimo para ese orden.en A.

Una función f es un isomorfismo entre una estructura⟨A, R⟩ y una estructura⟨B,S⟩ si f es 1 a 1 sobre y tal que para ~~todo~~ cualesquiera elementos x y y de A , xRy si y sólo si f(x)Sf(y).

La estructura⟨C,R⟩es una cadena si R ordena C.

C,R es una cadena maximal en un conjunto B si $C \subseteq B$ y si toda cadena⟨A,R⟩tal que $A \subseteq B$ y que incluya a⟨C,R⟩es igual a⟨C,R⟩ .

La estructura⟨C,R⟩está bien fundada si todo subconjunto no vacío de C tiene un elemento minimal para la relación R.

Un elemento minimal para una relación R es un elemento al que ningún otro precede.

Un elemento minimal para una relación R es un elemento mínimo si R es un orden.

A lo largo del trabajo se usarán algunas formas del axioma de elección y algunos resultados obtenidos en la teoría de conjuntos de Zermelo Fraenkel y que nos limitamos a enunciar:

Una forma del teorema de recursión para números naturales dice así:

Dado A, un conjunto cualquiera, $a \in A$, y $h: A \to A$, existe una única función $f: \omega \to A$, tal que:

$f(0) = a$

$f(n+1) = h(f(n))$.

Dados dos buenos órdenes cualesquiera uno de ellos es isomorfo a un segmento inicial del otro.

En vez del axioma de elección se usa una vez una de sus formas más débiles, llamada "axioma de elecciones dependientes".

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ tal que $(\forall x \in A)(\exists y \in A)(xRy)$. Entonces hay una sucesión $a: \omega \to A$ tal que para todo n: $a_n R\, a_{n+1}$.

Condiciones de finitud. I. Condiciones inductivas.

Sea A un conjunto cualquiera.

1. Condición numérica

C_1: A es biyectable con un segmento inicial propio del conjunto de los números naturales.

2. Condiciones inductivas.

C_2(a): Si K es una familia de subconjuntos de A tal que:

(i) $0 \in K$

(ii) $(\forall x \in A)(\{x\} \in K)$

(iii) $(\forall B, C \in K)(B \cup C \in K)$,

Entonces $K = \mathcal{P}(A)$.

Esta condición se debe a Kuratowski. (Cf. "Sur la notion de l'ensemble fini". Fund. Math., Tomo I, Warszawa 1920, p. 161.)

C_2(b): Si K es una familia de conjuntos tal que:

(i) $0 \in K$

(ii) $(\forall B \subseteq A)(\forall x \in A)(B \in K \rightarrow B \cup \{x\} \in K)$

entonces $A \in K$.

Esta condición se debe a Sierpinski. (Cf. "L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Theorie des Ensèmbles et l'Analyse." 1. Extrait du Bulletin de l'Academie des Sciences de Cracovie, Cracovie 1919, p. 106. cit. por Tarski [3]

3. Condiciones de orden.

C_3(a): A es ordenable y todo orden en A es un buen orden.

C_3(b): A es ordenable y todos los órdenes en A son isomorfos.

C_3(c): Hay un orden $<$ en A tal que tanto $\langle A, < \rangle$ como $\langle A, > \rangle$ son buenos órdenes.

C_3(d): Hay un orden en A y si $A \neq 0$, todo orden en A tiene primer elemento.

La definición $C_3(c)$ se debe a Stäckel.(Cf. Zu H. Webers Elementarer Mengenlehre. <u>Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung</u>. 16 Band, Leipzig 1907,p.425.)

Las otras tres definiciones son modificaciones de ésta debidas a Tarski y a Weber.

4. Condiciones de cadena.

$C_4(a)$:Hay una cadena $\langle C,\subsetneq\rangle$ maximal en $\mathcal{P}(A)$ y toda cadena $\langle C\subsetneq\rangle$ maximal en $\mathcal{P}(A)$ es bien fundada.

$C_4(b)$:Hay una cadena $\langle C\subsetneq\rangle$ maximal en $\mathcal{P}(A)$ y toda cadena maximal $\langle C'\subsetneq\rangle$ es isomórfica a $\langle C\subsetneq\rangle$.

$C_4(c)$: Hay una cadena $\langle C\subsetneq\rangle$ maximal en $\mathcal{P}(A)$ tal que tanto $\langle C,\subsetneq\rangle$ como $\langle C,\supsetneq\rangle$ son bien fundadas.

$C_4(d)$: Hay una cadena maximal en $\mathcal{P}(A)$ y si $A\neq 0$ toda cadena $\langle C,\subsetneq\rangle$ maximal en $\mathcal{P}(A)$ contiene un conjunto unitario,

5. Condiciones de buena fundación.

$C_5(a)$: La estructura $\langle\mathcal{P}(A),\subsetneq\rangle$ es bien fundada.

$C_5(b)$: La estructura $\langle\mathcal{P}(A),\supsetneq\rangle$ es bien fundada.

Estas definiciones se deben a Tarski (Cf. bibliografía de esta tesis).

6. Condición débil de no reflexividad.

C_6: $\mathcal{P}\mathcal{P}(A)$ no es reflexivo.

Esta condición se debe a Bertrand Russell.(Cf. Principia Mathematica, Vol.II, Parte III, Sección C, 120 y 124) .

1. Condición numérica.

C_1: A es biyectable con un segmento inicial del conjunto de los números naturales.

Si, según la propuesta de Von Neumann, identificamos cada número natural con el conjunto de sus predecesores, entonces podemos expresar C_1 en la siguiente forma:

C_1': A es coordinable con algún número natural.

2. Condiciones inductivas

El sentido intuitivo de estas definiciones inductivas podría expresarse diciendo que un conjunto finito $\underline{A}$ se caracteriza por el hecho de que la cerradura del conjunto de los subconjuntos unitarios de $\underline{A}$ bajo la operación binaria de la unión incluye todo $\underline{A}$. $\underline{A}$ es finito si se obtiene uniendo de dos en dos los unitarios del conjunto potencia de $\underline{A}$, y los conjuntos obtenidos así a partir de éstos.

Es obvio que en el caso de un conjunto infinito $\underline{B}$, a partir del conjunto de sus subconjuntos unitarios no se obtiene $\underline{B}$ cerrándolo bajo la operación binaria de la unión; todo subconjunto obtenido así es finito y distinto de $\underline{B}$.

<u>C_2(a) y C_2(b) son equivalentes.</u>

Prueba:

(1) Supongamos que A satisface C_2(a).

Sea K una familia de conjuntos tal que:

(i) $0 \in K$

(ii) $(\forall B \subseteq A)(\forall x \in A)(B \in K \rightarrow B \cup \{x\} \in K)$.

Queremos ver que $A \in K$.

Pongamos $\bar{\bar{K}} = \{ X \subseteq A : (\forall Y \in K)(X \cup Y \in K) \}$

Entonces $\bar{\bar{K}} \subseteq \mathcal{P}(A)$ y

(a) $0 \in \bar{\bar{K}}$ (trivial).

(b) $(\forall x \in A)(\{x\} \in \bar{\bar{K}})$ por (ii).

iii(c) $B, C \in \bar{\bar{K}} \rightarrow B \cup C \in \bar{\bar{K}}$ (Pues , sea $Y \in K$. Puesto que $C \in \bar{\bar{K}}$, $C \cup Y \in K$. Pero entonces $B \cup C \cup Y \in K$, ya que $B \in \bar{\bar{K}}$).

A sí pués, dado que A satisface (a), $\mathcal{P}(A) = \bar{\bar{K}}$. Por lo tanto $A \in \bar{\bar{K}}$. Pero entonces $A = A \cup 0 \in K$, ya que $0 \in K$.

(2) Supongamos ahora que A satisface C_2(b).

Sea $K \subseteq \mathcal{P}(A)$ t/que satisface (i), (ii), (iii) de C_2(a). Queremos probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq K$. Sea $B \in \mathcal{P}(A)$. Basta ver que $B \in K$.

Pongamos $K' = \{x \in K : x \subseteq B\}$

y $K^* = \{X \cup Y : X \in K', Y \subseteq (A-B)\}$

entonces

1) $0 \in K^*$ (ya que $0 \in K'$ y $0 \subseteq A-B$).

2) $Z \subseteq A$, $x \in A$, $Z \in K^* \rightarrow Z \cup \{x\} \in K$ (Pues escribamos $Z = X \cup Y$, donde $X \in K'$, $Y \subseteq (A-B)$. Si $x \in B$, entonces $Z \cup \{x\} = (X \cup \{x\}) \cup Y \in K^*$. Si $x \in A-B$, $Z \cup \{x\} = (X \cup Y \cup \{x\}) \in K^*$

Así pues, dado que A satisface (b), $A = K^*$.

$A = X \cup Y$, donde $x \in K'$, $Y \subsetneq A-B$. Pero entonces $X = B$, $Y = A-B$. Así $B \in K'$ pero $K' \subseteq K$.

Así, $B \in K$.

☒

2. Condiciones de orden.

Todo conjunto finito es bien ordenable. Esta idea se relaciona con la primera definición. cf. p. 3 Si un conjunto finito A puede correlacionarse con un segmento inicial del conjunto de los números naturales, entonces puede ordenarse; se puede definir un orden en A, en términos del orden natural de los enteros positivos.

Por el contrario, en el caso de un conjunto infinito arbitrario, no hay manera de definir un orden a menos que se use alguna forma del axioma de elección; y dado un buen orden cualquiera R en un conjunto infinito puede definirse una relación que no sea un buen orden, considerando por ejemplo el converso de R.

Si R es un buen orden en un conjunto infinito, R^{-1} no lo es. Por lo tanto, para definir la finitud de un conjunto basta mencionar la existencia de un orden R tal que R y R^{-1} son buenos órdenes. O bien, basta decir que existe un orden y que todo orden es un buen orden.

Todo conjunto finito es, entonces, una serie discreta con primero y último elementos; en otras palabras, en todo conjunto finito, hay un orden con primero y último elementos y tal que cada elemento con sucesor o predecesor tiene sucesor o pre decesor inmediato. De hecho, basta decir que todo orden en un conjunto finito tiene primer elemento, porque en un conjunto infinito si existe un orden, entonces existe un orden sin primer elemento.

$C_3(a)$ y $C_3(d)$ son equivalentes

$C_3(a)$: A es ordenable y todo orden en A es un buen orden.

$C_3(d)$: Hay un orden en A y si $A \neq \emptyset$, todo orden en A tiene primer elemento.

(1) $C_3(a) \Longrightarrow C_3(d)$.

Sea A un conjunto ordenado tal que todo orden en A es un buen orden. Se sigue obviamente que todo orden en A tiene primer elemento.

(2) $C_3(d) \Longrightarrow C_3(a)$.

Sea A un conjunto tal que todo orden en A tiene primer elemento. Supongamos que hay un oden R en A que no es un buen orden. Sea $B \subsetneq A$ tal que B carece de R-mínimo.

Definimos un orden S en A de la siguiente manera: para cualesquiera $x,y \in A$,

si $x,y \in B$, entonces $xRy \leftrightarrow xSy$

si $x,y \in A-B$, entonces $xRy \leftrightarrow xSy$.

si $x \in B$ y $y \in A-B$, entonces xSy.

Todos los elementos de B preceden en la relación S a todos los elementos de A-B y en cada uno de estos 2 subconjuntos, los elementos conservan el orden R.

Entonces S es un orden en A que carece de primer elemento y esto contradice la hipótesis.

Por lo tanto todo orden en A es un buen orden.

⊠

$C_3(a)$ y $C_3(b)$ son equivalentes

$C_3(a)$: A es ordenable y todo orden en A es un buen orden.

$C_3(b)$: A es ordenable y todos los órdenes en A son isomorfos.

(1) $C_3(a) \Rightarrow C_3(b)$

Sea A un conjunto tal que todo orden en A es un buen orden. Supongamos que existen 2 órdenes de A $\langle A <_1\rangle$ y $\langle A <_2\rangle$ que no son isomorfos. Entonces uno de ellos, digamos $\langle A <_1\rangle$ es isomorfo a un segmento inicial propio del otro, digamos $\langle B <_2\rangle$ donde $B \subsetneq A$.

Si $\langle A <_1\rangle \cong \langle B <_2\rangle$, en particular A es biyectalbe con B. Sea f una función 1-1 y sobre de A en B, y sea x en A-B.

Definamos recursivamente una función g de ω en A tal que:

$g(0)=x$

$g(n+1)=f(g(n))$.

y x no está en el rango de f.

Como f es 1-1, $g(n)\neq g(m)$ para cualesquiera números naturales n, m.

Definamos un orden R en A de la siguiente forma:

si $x,y\in g''(\omega)$, xRy si y sólo si $g^{-1}(x) > g^{-1}(y)$.

si $x,y\in A-g''(\omega)$, xRy si y sólo si $x<_1 y$.

si $x\in g''(\omega)$ y $y\in A-g''(\omega)$, entonces xRy.

$\langle A, R\rangle$ no tiene elemento mínimo, y no es un buen orden. Pero esto contradice la hipótesis; concluímos pues que todos los órdenes de A son isomorfos.

(2) $C_3(b)$ implica $C_3(a)$.

Sea A un conjunto que satisface la condición $C_3(b)$; si hubiera un orden en A que no fuera un buen orden, sería posible definir un orden en A sin primer elemento. (cf. prueba de la implicación $C_3(d) \Rightarrow C_3(a)$) Llamemos R_1 a ese orden, y definamos un orden R_2 con primer elemento de la siguiente manera. Como $A \neq 0$ (de otro modo $C_3(b) \Rightarrow C_3(a)$ se cumple trivialmente), sea $x \in A$ un elemento tal que

1) xR_2y para todo $y \in A$ tal que $y \neq x$.

2) Para todo $z, y \in A$, si $y \neq x$ y $z \neq x$, entonces zR_2y si y sólo si zR_1y.

$\langle A, R_1 \rangle \not\cong \langle A, R_2 \rangle$ porque R_2 tiene primer elemento y R_1 no. Esto último contradice la hipótesis.

$\boxtimes$

$C_3(a)$ y $C_3(c)$ son equivalentes

$C_3(c)$: Hay un orden en A tal que él y su converso son buenos órdenes.

(1) $C_3(a)$ implica $C_3(c)$

Sea A un conjunto que satisface la condición $C_3(a)$. Hay un buen orden $<$ en A. Entonces su converso también es un buen orden. (Sus propiedades de orden se sigen de la s de $<$, y es un buen orden porque A satisface $C_3(a)$).

(2) $C_3(c)$ implica $C_3(a)$.

Supongamos que $\langle A < \rangle$ y $\langle A > \rangle$ son buenos órdenes, y que $\langle A \prec \rangle$ no es un buen orden. Entonces hay un subconjunto $B \subseteq A$ que no tiene $\prec$-mímino. Sea a_0 el $<$-mínimo de B. Hay un subconjunto no vacío de B cuyos elementos preceden estrictamente a a_0 en el orden $\prec$. Sea a_1 el $<$-mínimo de ese subconjunto. En general, llememos a_{n+1} al $<$-mínimo del subconjunto de B que contiene todos los elementos que $\prec$ preceden estrictamente a a_n.

$$a_{n+1} = <\text{-mín}\{x \in B: x \prec a_n\}$$

Como B carece de $\prec$-mínimo, $\{x \in B: x \prec a_n\} \neq 0$ para todo n. El $<$-mínimo existe porque $<$ es un buen orden. Cada a_n sigue estrictamente a a_{n-1} en el orden $<$. Pero entonces la $<$-cadena $a_0 < a_1 < \ldots < a_n \ldots$ no tiene último elemento. Pero $\langle A, > \rangle$ es un buen orden, y el elemento $>$-mínimo de un subconjunto B de A es el $<$-máximo de B. Por lo tanto si $a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ no tiene último elemento, $\langle A, > \rangle$ no es un buen orden, contrariamente a la hipótesis. Concluímos que todo orden en A es un buen orden.

$\boxtimes$

3.Condiciones de cadena

Hay definiciones de la finitud de un conjunto en términos de la existencia de cadenas en $\wp(A)$. De hecho estas definiciones son una reformulación de las condiciones de finitud en términos del orden. En efecto, dado un orden en A, el conjunto de segmentos iniciales de ese orden forma una cadena maximal de subconjuntos de A. Por otro lado, dada una cadena maximal de este tipo, puede definirse un orden en A anteponiendo un elemento a otro en el caso de que el primero pertenezca a todos los conjuntos de la cadena a los cuales pertenece el segundo.

Dada esta equivalencia, el interés que tiene mencionar estas definiciones reside sólo en que el concepto de cadena en $\wp(A)$ no se traduce inmediata y trivialmente al concepto de orden en A. En esa medida, expresa otra propiedad de los conjuntos finitos, relativa a sus conjuntos potencia. Por otro lado, ofrecen un cierto interés en el sentido de que proporcionan una manera alternativa de definir el orden.

Caracterización del orden lineal por cadenas $\subsetneq$

(La expresión "orden lineal" se refiere al concepto común de orden en A, por contraposición a la definición de orden usada por Tarski, según la cual un conjunto A está ordenado si existe una cadena $\subsetneq$ maximal en $\mathcal{P}(A)$.

I. Sea F una $\subsetneq$ cadena en $\mathcal{P}(A)$.

Definimos una relación $\leqslant_F$ en A tal que para $a, b \in A$

$$a \leqslant_F b \leftrightarrow (\forall x \in F)(b \in x \rightarrow a \in x)$$

Probaremos que $\leqslant_F$ es un orden en A.

- $\leqslant_F$ es reflexivo. (Trivial).
- $\leqslant_F$ es antisimétrico,

Sean a y b tales que $a \leqslant_F b$ y $b \leqslant_F a$. Entonces $(\forall x \in F)(b \in x \leftrightarrow a \in x)$. Supongamos que $a \neq b$. Sea Y el menor $\subsetneq$ conjunto elemento de F que tiene a a como elemento, i.e. $Y = \bigcap \{X \in F : a \in X\}$

Sea $Y' = Y - \{a\}$.

Entonces $Y' \notin F$ porque $b \in Y'$ y $a \notin Y'$, pero Y' es comparable con todo elemento de F: si $a \in X$, entonces $Y \subseteq X$ por definición de Y. Como $Y' \subseteq Y$ entonces $Y' \subseteq X$.

Si $a \notin X$, entonces $X \subseteq Z$ para todo $Z \in F$ de Y. tal que $a \in Z$. Entonces $X \subseteq Y$ para tod.

$$X \subseteq Y - \{a\} = Y$$

- $_F$ es transitivo: obvio.
- $_F$ es conexo : $a \leqslant_F b$ o $b \leqslant_F a$ para todo $a, b \in A$

Si $a \leqslant_F b$ y $b \leqslant_F a$, entonces existen $X, Y \in F$ tales que $b \in X$, $a \notin X$ y $a \in Y$, y $b \notin Y$.

Entonces X y Y son incomparables , lo cual es absurdo.

Por lo tanto , toda cadena maximal en F en $\mathcal{P}(A)$ determina un orden lineal $\leqslant_F$ en A.

II. Sea $\langle A, \leqslant \rangle$ un orden lineal.

Sea F el conjunto de segmentos iniciales de A bajo $\leqslant$.

F es una dadena maximal en $\mathcal{P}(A)$.

Prueba de que F es maximal.

Sea $X \subseteq A$ tal que $X \notin F$. Probaremos que hay un $Y \in F$ tal que X y Y no son comparables. X no es un segmento inicial. Entonces hay un $a \in X$ tal que algún $b \leqslant a$, $b \notin X$.

Sea Y el segmento inicial que tiene como elementos todos los elementos estrictamente anteriores a a, i.e. $Y = \{ z \in A : z < a \}$.

Y y X son incomparables: $b \in Y - X$

$a \in X - Y$.

Todo orden lineal $\langle A, \leqslant \rangle$ determina una $\subsetneq$ cadena maximal en $\mathcal{P}(A)$. Usaremos $F_{(\leqslant)}$ para denotar esa cadena.

III. $\langle A, \leq \rangle = \langle A, \leq_{F(\leq)} \rangle$

Basta probar que para a, $b \in A$

$$a \leq b \leftrightarrow (\forall X \in F(\leq_{F\leq}))(b \in X \rightarrow a \in X).$$

osea que $a \leq b \leftrightarrow$ a pertenece a todos los segmentos iniciales a los que b pertenece. Obviamente es así.

IV. $F = F(\leq_F)$.

a) $F \subseteq F(\leq_F)$

Sea $X \in F$. Probaremos que X es un segmento inicial de A bajo $\leq_F$.

Si $b \in X$ y $a \leq_F b$, $a \in X$ por definición de $\leq_F$.

b) $F(\leq_F) \subseteq F$.

Sea X un segmento inicial de A bajo $\leq_F$.

Para ver que $X \in F$, basta probar que X es $\subsetneq$-comparable con todo $Y \in F$. Pero si $Y \in F$, Y es un segmento inicial de A bajo $\leq_F$.

Como X es un segmento inicial para $\leq_F$, X es comparable con todo $Y \in F$.

$\boxtimes$

4. Condiciones de buena fundación

Tarski define la finitud de un conjunto A aludiendo a una característica de la relación de inclusión entre los elementos de su conjunto potencia. La inclusión en este conjunto es bien fundada, o sea que dado un subconjunto cualquiera no vacío de $\mathcal{P}(A)$, hay un elemento minimal para la inclusión. Entonces, en un conjunto infinito, p usando el axioma de elección, puede establecerse la existencia de cadenas infinitas descendentes[1].

Por ejemplo, dado un conjunto ordenado como el de los números naturales, el conjunto de complementos de sus segmentos iniciales carece de elemento mínimo para la inclusión. Dicho de otra manera, el conjunto de sus segmentos iniciales carece de elemento maximal.para la inclusión. Como lo sugiere este ejemplo, la finitud puede definirse como la buena fundación de $\supsetneq$ en $\mathcal{P}(A)$, o sea menciionando la inversa de la relación de inclusión.

Hay una relación entre el concepto de buena fundación y el de inducción. El principio de inducción puede formularse en términos de la buena fundación de una relación. La definición de finitud de Kuratowski o la de Sierpinski se relacionan en este mismo sentido con la de Tarski.

1. Una cadena infinita descendente es un conjunto totalmente ordenado por una relación R y sin elemento mínimo para esa relación .

$C_5(a)$ y $C_5(b)$ son equivalentes

$C_5(a)$ implica $C_5(b)$.

Sea A tal que $\langle \mathcal{P}(A) \subsetneq \rangle$ es una relación bien fundada. Sea B cualquier subconjunto de $\mathcal{P}(A)$, y sea $C = \{A-y : y \in B\}$

Por la hipótesis C tiene minimal para $\subsetneq$. Llamemos x a un minimal de C. Entonces $A-x$ es $\supsetneq$ minimal en B. Si no fuera así, existiría $z \in B$ tal que $A-x \subsetneq Z$. Pero entonces $A-z \subsetneq x$ y x no sería minimal en C. Por lo tanto, $\langle \mathcal{P}(A), \supsetneq \rangle$ es bien fundada.

La prueba de que $C_5(b)$ implica $C_5(a)$ es análoga a la anterior.

☒

5. Condición débil de no reflexividad.

Esta condición podría pertenecer al grupo de las definiciones reflexivas porque caracteriza la finitud de un conjunto A por la no reflexividad de $\wp\wp(A)$. Pero forma parte del primer grupo de condiciones de finitud porque su equivalencia con éstas últimas se prueba sin usar ninguna forma del axioma de elección. Esto la distingue de otras condiciones de no reflexividad.

C_6: $\wp\wp(A)$ no es reflexivo.

Hemos probado que las condiciones que se formulan en términos de un mismo concepto, como el de orden, el de inducción o el de buena fundación del conjunto potencia, son equivalentes entre sí.

Veremos a continuación que todas esas condiciones son equivalentes; esas equivalencias son válidas sin el axioma de elección.

C_1 y C_6 son equivalentes.

C_1: A es biyectable con un segmento inicial propio del conjunto de números naturales.

C_6: $\mathfrak{P}\mathfrak{P}(A)$ no es reflxivo.

Lema: Ningún número natural es reflexivo.

(POR INDUCCION SOBRE $n \in \mathbb{N}$)

Prueba: 0 no es reflexivo.

Supongamos que n no es reflexivo, pero que n+1 sí lo es.

Entonces hay un subconjunto propio de n+1, digamos c, tal que $n+1 \underset{f}{\sim} c$.

Si $f(n)=n$, entonces $f-\{\langle n,f(n)\rangle\}$ es una función 1-1 y sobre entre n y un subconjunto propio de n.

Si $f(n)\neq n$, entonces

$$(f-\{\langle n, f(n)\rangle, \langle f^{-1}(n), n\rangle\}) \cup \{\langle f^{-1}(n), f(n)\rangle\}$$

es una función 1-1 y sobre entre n y un subconjunto propio de n. En cualquier caso se contradice la hipótesis inductiva.

⊠

(1) C_6 implica C_1

Sea A tal que $\mathcal{P}\mathcal{P}(A)$ no es biyectable con ningún subconjunto propio suyo. Supongamos que A no es biyectable con ningún número natural. Entonces todo número natural es biyectable con algún subconjunto propio de A.

Prueba: $0 \sim \emptyset$ y $\emptyset \subsetneq A$ ($A \neq 0$ obviamente).

si n se biyecta con algún subconjunto $B \subsetneq A$, entonces $n+1$ se biyecta también con $C \subsetneq A$, donde $C = B \cup \{x\}$ y $x \in A-B$ ($A-B \neq \emptyset$ porque $B \subsetneq A$ y $C \subsetneq A$, de otro modo $A \sim n+1$).

Sea f la siguiente función de ω en $\mathcal{P}\mathcal{P}(A)$:

$$f(n) = \{x \in \mathcal{P}(A) : x \sim n\}$$

Sea K la imagen de f y g una función con dominio $= \mathcal{P}\mathcal{P}(A)$ y tal que:

$$\text{para todo } x \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A),\ g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A)-K \\ f(n+1) & \text{si } x * f(n) \text{ para algún } n. \end{cases}$$

$g : \mathcal{P}\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}\mathcal{P}(A)$.

$f(0) \in$ dominio de g pero $f(0) \notin$ rango de g.

$f(0) = \{\emptyset\}$, $\{\emptyset\} \in K$, entonces $\{\emptyset\}$ pertenece al dominio de g; pero $f(0) \neq f(n+1)$ para todo n, por lo que $f(0)$ no pertence al rango de g.

El rango de g $\subsetneq$ dominio de g y g es biyectiva: el dominio de g $= \mathcal{P}\mathcal{P}(A)$ y su rango es un subconjunto propio de $\mathcal{P}\mathcal{P}(A)$.

Este resultado contradice la hipótesis.

Por lo tanto existe un $n \in \omega$, tal que $n \sim A$.

(2) C_1 implica C_6

Sea A tal que $A \sim n$ para algún n .

Entonces $\wp\wp(A) \sim 2^{2^n}$ y $2^{2^n} \in \omega$.

Por lo tnnto $\wp\wp(A)$ no es biyectable con ningún subconjunto propio suyo. De lo contrario 2^{2^n} sería biyectable con un subconjunto propio suyo, y esto contradiría el lema.

$C_3(c)$ y $C_2(b)$ son equivalentes

(1) $C_2(b)$ implica $C_3(c)$

Supongamos que A es un conjunto que satisface $C_2(b)$.

Sea K una familia de subconjuntos de A bien ordenados por alguna relación $<$ y por su conversa $>$.

$K = \{B \subseteq A$: existe un orden en B tal que $\langle B,<\rangle$ y $\langle B,>\rangle$ son buenos órdenes$\}$

Probaremos que $A \in K$.

$\emptyset \in K$ porque todo subconjunto no vacío de $\emptyset$ tiene mínimo y máximo para cualquier relación, y porque hay un orden en $\emptyset$.

Sea $B \subseteq A$ y $x \in A$ donde $B \in K$.

Hay un orden $<$ en B tal que $\langle B,<\rangle$ y $\langle B,>\rangle$ son buenos órdenes. Sea $\prec$ el siguiente orden en $B \cup \{x\}$:

Si $x \in B$, $\prec$ es $<$

Si $x \notin B$, $x \prec y$ $\forall y \in B$ todos los elementos de B están ordenados por $\prec$ como lo están por $<$, y x precede en el orden $\prec$ a todos los elementos de B. Si $x \notin B$:

$(\forall z y \in B)(z \prec y \leftrightarrow z < y)$ y $(\forall y \in B)(x \prec y)$.

$\prec$ y su converso bien ordenan $B \cup \{x\}$. (Todo subconjunto no vacío de B tiene elemento mímimo en el orden $\prec$ porque lo tiene en el orden $<$, y todo subconjunto de $B \cup \{x\}$ al que x pertenezca tiene a x como $\prec$-mínimo. Asímismo todo subconjunto no vacío de B tiene mínimo para $\succ$, ya que lo tiene para $>$, a menos que se trate de $\{x\}$ en cuyo caso x es el mínimo.

Por lo tanto, $B \cup \{x\} \in K$.

Entonces $A \in K$ y A está ordenado por una relación $<$, y por su conversa $>$.

(2) $C_3(c)$ implica $C_2(b)$.

Sea A un conjunto bien ordenado por $<$ y su conversa, y sea K una familia de conjuntos tal que:

(i) $0 \in K$.

(ii) para todo $B \subseteq A$ y todo $x \in A$, $B \in K \rightarrow B \cup \{x\} \in K$.

Supongamos que $A \notin K$.

Para cada $x \in A$, sea $S_x = \{y \in A: y \leq x\}$.

Llamemos F a la familia de todos los segmentos iniciales S_x con $x \in A$.

$\langle F, \subsetneq \rangle \cong \langle A, < \rangle$.

Prueba: Sea f de A en F tal que f(x)=Sx.

Es claro que a cada elemento de A le corresponde un solo conjunto de predecesores. Cada segmento inicial está determinado por un solo elemento; de otro modo tendría que haber elementos incomparables que tuvieran el mismo conjunto de predecesores, pero $<$ es un orden. f es sobreyectiva porque todo segmento inicial tiene un elemento máximo dado que es un buen orden en A.

Finalmente, dados dos elementos cualesquiera de A , $x < y \leftrightarrow Sx \subsetneq Sy$.

Si $x<y$, todo elemento anterior a x, es anterior a y. Por lo tanto $Sx \subseteq Sy$. Pero $y \in Sy$ y $y \notin Sx$, entonces $Sx \subsetneq Sy$.

Supongamos que $Sx \subsetneq Sy$. Entonces $x \neq y$ porque f es 1-1, $y \nless x$ porque si $y < x$, $y \in Sx$, y todos los predecesores de y serían predecesores de x, entonces $Sy \subseteq Sx$. Por lo tanto $x < y$.

$A = Sz$ donde z es el elemento $<$-máximo de A. Tal elemento existe, porque $>$ es un buen orden en A.

Como $A \in F$ y $A \notin K$, hay elementos de F que no pertenecen a K. Sea B el mínimo elemento de F que no pertenece a K. Dado que $>$ es un buen orden en A, B tiene último elemento. Sea w ese elemento. $B - \{w\} \in F$ y $B - \{w\} \in K$. Pero entonces, por la definición de K, $B \in K$. Esto último contradice el supuesto de que $B \notin K$. Por lo tanto $A \in K$.

$\boxtimes$

$C_2(a)$ y $C_5(a)$ son equivalentes

(1) $C_5(a)$ implica $C_2(a)$.

Supongamos que A satisface $C_5(a)$. ($\langle \mathcal{P}(A), \subsetneq \rangle$ es bien fundada) Sea K un conjunto tal que :

(i) $K \subseteq \mathcal{P}(A)$.

(ii) $0 \in K$

(iii) $(\forall x \in A)\ \{x\} \in K$.

(iv) $(\forall B, C \in K)((B \cup C) \in K)$.

Supongamos que $\mathcal{P}(A) \neq K$ o sea que $\mathcal{P}(A) - K \neq \emptyset$.

Sea B un elemento minimal de $\mathcal{P}(A)-K$.

$B \neq \emptyset$ porque $\emptyset \in K$.

Sea pues $x \in B$.

Entonces $B-\{x\} \subsetneq B$. Pero $B-\{x\} \notin K$ porque si $B-\{x\} \in K$, entonces B, o sea $(B-\{x\}) \cup \{x\} \in K$ por (iii) y (iv). Esto contradice la minimalidad de B en $\mathcal{P}(A)-K$.

(2) $C_2(a)$ implica $C_5(a)$.

Sea A un conjunto tal que $\mathcal{P}(A)=K$ para todo K tal que

(i) K es una familia de subconjuntos de A.

(ii) $0 \in K$

(iii) $(\forall x \in A)\ \{x\} \in K$.

(iv) $(\forall B, C \subseteq A)((B \in K \wedge C \in K) \rightarrow (B \cup C \in K))$

Probemos que $\langle \mathcal{P}(A), \subsetneq \rangle$ es una relación bien fundada.

Sea $K = \{X \subseteq A : \langle \mathcal{P}(X), \subsetneq \rangle$ es bien fundada$\}$.

Bastará probar que K tiene las propiedades (i)-(iv).

(i) $K \subseteq \mathcal{P}(A)$.

(ii) $\emptyset \in K$ ($\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ y $\langle \{\emptyset\}, \subsetneq \rangle$ está bien fundada.

(iii) $(\forall x \in A)(\{x\} \in K)$ porque $\langle \mathcal{P}\{x\}, \subsetneq \rangle$ o sea $\langle \{\emptyset\ \{x\}\}, \subsetneq \rangle$ está bien fundada.

Sean $B, C \in K$

$\langle \mathcal{P}(B), \subsetneq \rangle$ y $\langle \mathcal{P}(C), \subsetneq \rangle$ están bien fundadas.

Suponemos sin pérdida de generalidad que $B \cap C = \emptyset$.

Sea $F \subseteq \mathcal{P}(B \cup C)$.

Queremos ver que F tiene un elemento $\subsetneq$-minimal. Puesto que $\mathcal{P}(B)$ es bien fundado, la familia $H = \{X \cap B : X \in F\} \subseteq \mathcal{P}(B)$ tiene un elemento minimal, digamos Z_0.

Por otra parte, puesto que $\mathcal{P}(C)$ es bien fundado, sea Y_0 un elemento minimal de la familia:

$$G = \{Y \subseteq C : Z_0 \cup Y \in F\}$$

Entonces $X_0 = Z_0 \cup Y_0$ es un elemento minimal de F.

1) $X_0 \in F$ ya que $Y_0 \in G$.

2) Sea $X \in F$ tal que $X \subseteq X_0$. Vamos a comprobar que $X = X_0$. Como Z_0 y Y_0 son disjuntos, tenemos que $X \cap B \subseteq Z_0$. Pero dado que Z_0 es minimal en H, $X \cap B = Z_0$.

Por lo tanto:

$$X = (X \cap B) \cup (X \cap C) = Z_0 \cup Y_0 = X_0$$

K satisface entonces (i)-(iv), y por lo tanto $K = \mathcal{P}(A)$.

Entonces $A \in K$, y $\langle \mathcal{P}(A), \subsetneq \rangle$ es bien fundada.

C_1 y C_5 (a) son equivalentes.

(1) C_1 implica $C_5(a)$.

Sea A un conjunto biyectable con un número natural n.

$\wp(A) \sim 2^n$.

Sea $B \subseteq \wp(A)$, donde $B \neq \emptyset$. Definamos recursivamente una sucesión de longitud 2^{n+1} de elementos de B como sigue:

B_0 es un elemento arbitrario de B.

$$B_{k+1} = \begin{cases} B_k & \text{si } \forall x \in B)(x \subsetneq B_k \rightarrow x = B_k) \\ \subsetneq B_k & \text{si tal existe.} \end{cases}$$

Entonces $B_{2^n} = B_{2^n - 1}$ ya que card de $B = 2^n$.

Por lo tanto, B_{2^n} es un elemento minimal de B.

(2) $C_5(a)$ implica C_1.

Sea A un conjunto tal que $\langle \wp(A), \subsetneq \rangle$ es una relación bien fundada. Sea C la familia de todos los subconjuntos de A coordinables con algún número natural.

$$C = \{x \in \wp(A) \ : (\exists n \in \omega)(x \sim n)$$

Supongamos que $\wp(A) - C \neq \emptyset$. Sea Y un elemento minimal de $\wp(A) - C$. Ahora bien; $Y \neq \emptyset$. Sea $a \in Y$. Entonces $Y - \{a\} \in C$. Digamos que ~~el~~ card ~~de~~ $(Y - \{a\}) = n$. Pero entonces ~~el~~ card ~~de~~ $(Y) = n+1$, de modo que $Y \in C$, lo cual contradice la hipótesis de que Y era minimal en $\wp(A) - C$.

Condiciones de finitud. II. Condiciones reflexivas.

Sea A un conjunto cualquiera.

D_1: Condición de Dedekind.

A no es reflexivo.

D_2: $\mathcal{P}(A)$ no es reflexivo.

D_3: No existen 2 subconjuntos disjuntos de A cuya unión sea A y coordinables ambos con A.

D_4: ω no es coordinable con ningún subconjunto de A.

D_1 y D_4 son equivalentes

(1) D_1 implica D_4 (D_1: A no es reflexivo)

(D_4: A no es coordinable con ningún subc. de ω)

Supongamos que A no es reflexivo y que algún subconjunto B de A es biyectable con ω. Sea f una biyección de ω sobre B, y sea g la siguiente función de A en A:

Si $x \in A-B$, $g(x)=x$

Si $x \in B$, entonces $x=f(n)$ para algún $n \in \omega$; en ese caso $g(x)=f(n+1)$

g es una función 1-1 porque la identidad lo es y porque f también lo es; el dominio de g es A y el rango de g es $A - \{f(0)\}$. Entonces $A \simeq (A-\{f(0)\})$ y $A-\{f(0)\} \subsetneq A$. Esto contradice el supuesto de que A no es reflexivo.

(2) D_4 implica D_1.

Sea A un conjunto tal que ningún subconjunto de A es coordinable con ω. Supongamos que A es reflexivo. Sea f una biyección de A sobre B donde $B \subsetneq A$. Como $A-B \neq 0$, sea x un elemento cualquiera de A-B, y sea g la siguiente función de ω en A:

$g(0)=x$

$g(n+1)= f(g(n))$.

g es 1-1 porque $g(n)\neq g(n+1)$ para todo n

$g(0)\neq g(1)$ ($x\neq f(x)$ ya que x A-B),

entonces $f(g(n))\neq f(g(n+1))$ para todo $n\in\omega$ porque f es una biyección).

D_2 y D_1 son equivalentes

(1) D_2 implica D_1.

Si A es reflexivo, hay un subconjunto $B \subseteq A$ tal que $B \sim A$. Entonces $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$, y $\mathcal{P}(A)$ también es reflexivo.

(2) D_1 Implica D_2.

Esta implicación es válida solamente si añadimos el axioma de elección a los demás axiomas del sistema de Zermelo-Fraenkel. En efecto, existen modelos de este sistema sin axioma de elección, en los cuales $D_1 \Rightarrow D_2$ es falsa.

Probemos antes que $D_1 \Rightarrow D_2$ es válida en Z-F-C.

Sea A un conjunto no reflexivo. Hay que probar que $\mathcal{P}(A)$ no es reflexivo. En virtud de la equivalencia $D_1 \Leftrightarrow D_4$, $\omega \not\preccurlyeq A$ (ω no es coordinable con ningún subconjunto de A).

Por el axioma de elección, (en forma del teorema de tricotomía) para cualesquiera dos conjuntos A y B , $A \preccurlyeq B$ o $B \preccurlyeq A$.

Si $\omega \not\preccurlyeq A$, entonces $A \prec \omega$. Por lo tanto, $A \sim n$ para algún n . Entonces $\mathcal{P}(A) \sim 2^n$, y como $2^n \in \omega$, 2^n no es reflexivo, $\mathcal{P}(A)$ tampoco lo es.

$D_1 \Rightarrow D_2$ no es una implicación válida en el sistema de Zermelo-Fraenkel sin el axioma de elección, porque $D_1 \Rightarrow D_2$ es equivalente a $D_1 \Rightarrow C_1$ y hay modelos de Z-F en que $D_1 \Rightarrow C_1$ es falsa.

Las implicaciones $D_1 \Rightarrow D_2$ y $D_1 \Rightarrow C_1$ son equivalentes:

a) Supongamos que D_1 implica D_2, y que un conjunto A satisface D_1. A no es reflexivo. Entonces $\wp(A)$ no es reflexivo, ni tampoco lo es $\wp\wp(A)$.

En virtud de la equivalencia de C_1 y C_6, $A \sim n$ para algún $n \in \omega$.

b) Supongamos que D_1 implica C_1, y que un conjunto A satisface D_1. A no es reflexivo. Entonces $A \sim n$ para algún $n \in \omega$. Por la equivalencia de C_1 y C_6, $\wp\wp(A)$ no es reflexivo. Entonces $\wp(A)$ tampoco lo es (D_2 implica D_1).

Por lo tanto, todo modelo de Z-F en el cual sea falso que D_1 implique C_1, es un modelo en el cual es falso que D_1 implique D_2.

Ahora bien, como existe un modelo M de Z-F sin axioma de elección tal que

existe A tal que

$M \models$ A no es coordinable con ningún número natural

y A no es reflexivo ~~para algún conjunto A~~.

entonces $M \not\models D_1 \Rightarrow D_2$.

D_1 y D_3 son equivalentes

(1) D_1 implica D_3.

Sea A un conjunto no reflexivo. Si existieran 2 subconjuntos de A, digamos B y C tales que $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$ y $B \sim C \sim A$, entonces obviamente A sería reflexivo. Por lo tanto, A satisface D_3.

(2) D_3 implica D_1.

Sea A un conjunto reflexivo. Con el axioma de elección se demuestra que ~~que~~ para todo cardinal k , $k+k=k$ o $2.k=k$. El cardinal de A es mayor o igual al ~~de~~ ω puesto que A es infinito.

Por lo tanto $A \times \{0,1\}$ tiene el mismo cardinal que A. Sea f una relación 1 a 1 y sobre de $A \times \{0, 1\}$ sobre A, y sea B la imagen de f en A del conjunto de pares cuya segunda coordenada es 0, y C la imagen del conjunto de pares cuya primera coordenada es 1.

$$B \sim C \sim A \qquad B \cap C = \emptyset \qquad y\ B \cup C = A.$$

Llamaremos "inductivamente infinito" o "ind-infinito" a cualquier conjunto que no sea coordinable con ningún número natural. A es Dedekind-infinito si es reflexivo.

La existencia de un conjunto ind-infinito pero Dedekind -finito implica la negación de $D_3 \not\Rightarrow D_1$.

Prueba: Sea D un conjunto ind-infinito y Dedekind -finito, tal que $D \cap \omega = \emptyset$

Sea $A = D \cup \omega$.

Claramente A es Dedekind infinito.

Sin embargo, A no admite ninguna descomposición de la forma $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$ y $A \sim B \sim C$.

Pues supongamos que la admitiera. Entonces podríamos encontrar un conjunto $X \sim D$ tal que $X \cap \omega = \emptyset$, $X \cap D = \emptyset$ y

$$\omega \dot{\cup} X \dot{\cup} D \sim D \dot{\cup} \omega$$

Pero si $f : \omega \dot{\cup} X \dot{\cup} D \sim \omega \dot{\cup} D$

entonces: 1) $f''D \subseteq D$ excepto por un número finito de elementos.

2) $D - f''D$ es infinito.

Pero entonces una ligera modificación de $f \upharpoonright D$ da lugar a una biyección de D sobre un conjunto propiamente contenido en D, lo cual contradice la suposición de que D es D-finito.

C_1 y D_1 son equivalentes

(1) C_1 implica D_1.

Sea A un conjunto que satisface C_1.

$A \sim n$ para algún número natural n.

A no es reflexivo entonces, porque si lo fuera existiría $B \subsetneq A$ tal que $B \sim A$. Como f es una biyección, entonces $f"B \subsetneq f"A$ y $f"B \sim f"A$. La función $h = gof^{-1}$ es una biyección de n en un subconjunto propio suyo. Pero ningún número natural es reflexivo.

(2) D_1 implica C_1.

Una vez más, esta implicación no es válida sin el axioma de elección. Pero dado que basta una forma más débil del Axioma de elección para probar que D_1 implica C_1, usaremos esta forma llamada "Principio de elecciones dependientes".

Sea A un conjunto infinito en el sentido inductivo. A es reflexivo.

Prueba: Si A no es biyectable con ningún número natural n, entonces para todo n , existe un subconjunto B de A tal que $n \sim B$.

Toda función 1-1 $f:n \to A$ puede extenderse a una función 1-1 $g:n+1 \to A$. Entonces para cada función f de este tipo existe una función g tal que $f \subsetneq g$. Al aplicar el principio de elecciones dependientes al conjunto de todas las funciones 1-1 cuyo dominio es algún número natural y cuyo rango es algún subconjunto de A, obtenemos una sucesión X de ω en el conjunto de todas las funciones tal que $\forall n \in \omega \; X_n \subsetneq X_{n+1}$. La unión de esta cadena de funciones es una función de ω en A.

Si $\omega \lneq A$, A es reflexivo.

Conclusión

A lo largo de estas páginas, se demostró la equivalencia entre algunas definiciones del concepto de finitud. Se vió que con el axioma de elección, se puede probar que un conjunto reflexivo es infinito en cualquier sentido; sin él, puede hablarse de conjuntos infinitos en un sentido que no lo son en otro.

Hay una distancia entre el azoro de Galileo quien no se decidía del todo a igualar el número de enteros positivos con el de sus cuadrados, y la manera natural en que reconocemos que un conjunto infinito es reflexivo. Appenas nos asombra que entre dos puntos de una recta por cercanos que ~~parezcan~~ estén, haya tantos puntos como en el plano.

Otro aspecto desconcertante del que no se habló aquí, pero que también llamó la atención de Galileo, es el relacionado con la comparación ntre distintos conjuntos infinitos desde el punto de vista de sus cardinalidad. Hay infinitos mayores que otros. El conjunto potencia de un conjunto A cualquiera tiene un mayor número de elementos que A. Este hecho implica que en la coleccion de los conjuntos infinitos no hay ninguno cuyo cardinal sea mayor que el de todos los demás.

Para estudiar más a fondo el concepto de infinito, habría que mirar lo que pasa con los cardinales transfinitos. Este trabajo no es sino una primera aproximación a un objeto del que se intentó tener una idea menos vaga ~~comparando~~ relacionando entre sí distintas propiedades que lo definen.

Bibliografía

Azriel Levy, Basic Set Theory. Springer Verlag, 1979.

Tarski, Sur les ensembles finis. Fundamenta Mathematicae, Vol 6.(1924b). pp.45-95.

Boyer, A History of Mathematics.