UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

APUNTES DE MATEMATICAS FINANCIERAS E INTRODUCCION A LA TOMA DE DECISIONES

SEMINARIO DE INVESTIGACION CONTABLE

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN CONTADURIA

P R E S E N T A :

MANUEL RICARDO CASTAÑEDA BERNAL

MEXICO, D. F. 1982

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

APUNTES DE MATEMATICAS FINANCIERAS E INTRODUCCION A LA TOMA DE DECISIONES

SEMINARIO DE INVESTIGACION

CONTABLE QUE PARA OBTENER EL

T I T U L O DE

LICENCIADO EN CONTADURIA

P r e s e n t a :

MANUEL RICARDO CASTAÑEDA BERNAL

Directora de Seminario: C.P. Elsa Alvarez Maldonado.

1 9 8 2

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo lo he proyectado como un libro de consulta para los alumnos que cursan la materia -- "Matemáticas Financieras e Introducción a la toma de-Decisiones" en la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Nacional Autónoma de México.

He procurado que el material cuente con un apoyo - teórico-práctico que facilite al alumno la elaboración de los diversos modelos matemáticos que se contemplan en la temática del curso.

En particular me interesé por:

a) Presentar detalladamente la deducción de las - fórmulas de matemáticas financieras, porque considero que son un fuerte soporte técnico y con esto se otorgan al alumno diversas opciones para enfrentar los -- problemas.

b) Emplear un lenguaje sencillo, con el fin de salvar la barrera que representa el uso de tecnicismos - en los primeros años de estudio a nivel profesional.

c) Ilustrar las técnicas por medio de problemas - relacionados con el área contable-administrativa, con el objeto de mostrar aplicaciones concretas dentro -- del campo en que los alumnos se desenvolverán en el - futuro.

CAPITULO 1

TEMAS PRELIMINARES

En el presente capítulo, se introducen los elementos matemáticos básicos para la mejor comprensión de los temas de Matemáticas Financieras que se desarrollarán en este trabajo.

1.1 Razones y proporciones:

Una "RAZON" es el cociente de dos cantidades de la misma especie.

$R = \frac{A}{B}$ razón de A respecto a B.

P.e. La razón de 12 y 10 con respecto a 12 es:

$$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

P.e. El Activo circulante de una persona es de $10,000.00, mientras que su Pasivo a corto plazo es de $7,500.00 ¿Cuál es la razón respecto al Pasivo a corto plazo?

$$\frac{10,000}{7,500} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3}$$

Una "PROPORCION" es la igualdad de dos razones:

Las proporciones se denotan por:

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ "A" sobre "B" es igual a "C" sobre "D" o bien: A: B:: C: D "A" es a "B" como "C" es a "D".

En las proporciones, a "A" y a "D" se les conoce como "extremos" y a "B" y a "C" se les llama "medios"; se establece que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Si se conoce el valor de tres de las cuatro varia--

bles de una proporción, el valor de la cuarta variable puede ser obtenido por medio de un despeje adecuado.

P.e. Encontrar el valor de X en las siguientes proporciones:

a) $\frac{X}{4} = \frac{8}{9}$ $\quad 9X=4(8) \quad X = \frac{4(8)}{9} = \frac{32}{9} = 3.55$

b) $\frac{10}{X} = \frac{3}{16}$ $\quad 3X=10(16) \quad X = \frac{10(16)}{3} = \frac{160}{3} = 53.33$

c) $\frac{4}{9} = \frac{X}{-18}$ $\quad 9X = -18(4) \quad X = \frac{-18(4)}{9} = \frac{-72}{9} = -8$

d) $\frac{5}{4} = \frac{10}{X}$ $\quad 5X = 10(4) \quad X = \frac{10(4)}{5} = \frac{40}{5} = 8$

1.2 Exponentes.

1.2.1 Concepto.

Cuando a.a.a.a.a. es expresado como a^5 (se lee "a"- elevada a la quinta potencia), a "a" se le denomina -- "base" y al "5" se le dice "exponente". Un "exponente" es un número escrito en la parte superior derecha de - la base e indica el número de veces que la base aparece como factor.

P.e. $a^3 = a.a.a.$ $\qquad 2^3.\ 3^3 = 2.2.2.3.3.3.$

$5^2 = 5.5$ $\qquad (1+i)^3 = (1+i)\ (1+i)\ (1+i)$

$10^3 = 10.10.10$

1.2.2 Leyes de los exponentes.

Si m y n son enteros positivos y $a \neq 0$, se tiene:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^2 \cdot a^3 = (a.a.)\ (a.a.a) = a.a.a.a.a = a^5$

$a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$

b) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ Cuando $m > n$

$\dfrac{a^5}{a^3} = \dfrac{\cancel{a}.\cancel{a}.\cancel{a}.a.a.}{\cancel{a}.\cancel{a}.\cancel{a}} = a.a. = a^2$

$\dfrac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$

c) $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}} =$ cuando $m < n$

$\dfrac{a^4}{a^6} = \dfrac{\cancel{a}.\cancel{a}.\cancel{a}.\cancel{a}}{\cancel{a}.\cancel{a}.\cancel{a}.\cancel{a}.a.a.} = \dfrac{1}{a.a.} = \dfrac{1}{a^2}$

$\dfrac{a^4}{a^6} = \dfrac{1}{a^{6-4}} = \dfrac{1}{a^2}$

d) $(a^m)^n = a^{mn}$

$(a^3)^2 = (a.a.a)^2 = (a.a.a)\ (a.a.a) =$
$a.a.a.a.a.a = a^6$

$(a^3)^2 = a^{3.2} = a^6$

e) $(a.b)^m = a^m \; b^m$

$(a.b)^3 = (a.b)\;(a.b)\;(a.b) = (a.a.a)\;(b.b.b) =$

$a^3 \; b^3$

f) $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$

$(\frac{a}{b})^4 = (\frac{a}{b})\;(\frac{a}{b})\;(\frac{a}{b})\;(\frac{a}{b}) = \frac{a.a.a.a.}{b.b.b.b.} = \frac{a^4}{b^4}$

1.2.3 Exponente cero, negativo o fraccionario.

Por definición:

a) $a^0 = 1$ Todo número diferente de cero elevado a la potencia cero es igual a la unidad.

b) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ con $a \neq 0$

$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ | $\frac{a^5}{a^{-2}} = a^5 . a^{-(-2)} = a^5 . a^2 = a^7$

$\frac{1}{a^{-5}} = a^{-(-5)} = a^5$ $\quad (1+i)^{-1} = \frac{1}{(1+i)}$

c) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$ | $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{64} = 8$

$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{3^6} = 3^{\frac{6}{3}} = 3^2 = 9$

1.3 Logaritmos.

En los cálculos que se realizan dentro de las matemáticas financieras, el empleo de los logaritmos es de gran importancia porque facilitan el desarrollo de las operaciones matemáticas; a continuación se enuncia su concepto y sus principales aplicaciones.

1.3.1 Concepto.

El logaritmo en base b (diferente de 1) de un número positivo N (denotado por $\log._b N$) es el exponente L de tal forma que $b^L = N$.

1.3.2 Leyes generales.

a) El logaritmo de 1 es cero

$$\text{Log}._b\ (1) = 0$$

b) El logaritmo de la base es 1

$$\text{Log}._b\ (b) = 1$$

c) El logaritmo del producto de dos o más números positivos es igual a la suma de los logaritmos de los números.

$$a \cdot b \cdot c = \log._b\ (a) + \log._b\ (b) + \log._b\ (c)$$

d) El logaritmo del cociente de dos números positivos es el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador $\log._b\ (a/b) = \log._b\ (a) - \log._b\ (b)$

e) El logaritmo de la potencia de un número positivo es el producto del exponente por el logaritmo del número.

$$\text{Log}._b(a^c) = c\ \log._b\ (a)$$

f) El logaritmo de la raíz de un número positivo - es igual al logaritmo del número dividido entre el número de la raíz, $\log._b(\sqrt[n]{a}) = \frac{\log._b(a)}{n} = \frac{1}{n}\log._b(a)$

1.3.3 Logaritmos vulgares.

Los logaritmos que tienen al 10 como base son los - de uso más generalizado y se les conoce como "logaritmos vulgares", "logaritmos de Briggs" o "logaritmos -- decimales".

1.3.3.1 Propiedades de los logaritmos vulgares:

Las propiedades de los logaritmos vulgares son una- aplicación particular de las leyes generales de los logaritmos.

a) Log. (1) = 0

b) Log. (10) = 1

c) El logaritmo de una potencia de 10 es igual a la potencia.

$100 = 10^2$		Log. 100 = 2
$10 = 10^1$		Log. 10 = 1
$1 = 10^0$		Log. 1 = 0
$.1 = 10^{-1}$		Log. .1 = -1
$.01 = 10^{-2}$		Log. .01 = -2

1.3.3.2 Obtención del logaritmo de un número.

El logaritmo de un número en base 10 consta de 2- partes:

"Característica", que es la parte entera.

"Mantisa", que es la parte decimal.

La característica de un número mayor que 1 es igual al número de dígitos de la parte entera del número menos 1.

P.e. 524 = 3 dígitos - 1 = 2

34.1 = 2 dígitos - 1 = 1

Si el número es menor de 1 (no existe el logaritmo de un número negativo), la característica es igual al lugar que ocupa la primera cifra significativa del número y será negativa.

0.34 = primer lugar de la cifra significativa = $\bar{1}$

0.006 = tercer lugar de la primera cifra significativa = $\bar{3}$

La mantisa de un número se busca en tablas de mantisas (generalmente las incluyen las tablas financieras), sin importar el punto decimal y tomando como referencia la primera cifra significativa.

Log. 348.49 = 2.__________

La mantisa se busca por el número 34849 y se coloca después del punto decimal.

Log. 0.0809 = $\bar{2}$.__________

y la mantisa se busca por el número 809 y se pone después del punto decimal.

1.3.4 Antilogaritmos.

El antilogaritmo es el número al que corresponde un logaritmo dado, para determinarlo se sigue el proceso inverso del procedimiento para obtener el logaritmo.

Primero se busca la mantisa en el "cuerpo" de las -

tablas de mantisas y se ve en los márgenes a que número corresponde y el punto decimal estará dado por la característica.

Si la característica es negativa, nos indicará cuantos lugares a la derecha del punto se encuentra la primera cifra significativa; si la característica es positiva será menester aumentar un <u>uno</u> para que la característica nos señale el número de dígitos que son enteros.

1.4 Progresiones.

1.4.1 Progresión Aritmética.

Una "progresión aritmética" es una sucesión finita de números llamados términos que tienen una diferencia común.

Se denota por "a" al primer término, "d" a la diferencia común y "ü" al último término (el n-ésimo término).

$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-2)d, \quad a + (n-1)d$

$ü = a + (n-1)d$

La suma de los n términos de una progresión aritmética es: $s = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (ü-d) + ü$ ó empezando por el último término $s = ü + (ü-d) + \dots + (a+2d) + (a+d) + a$, sumando las dos formas de representar una suma se obtiene $2s = (a+ü) + (a+ü) + \dots + (a+ü)$

vemos que $(a+ü)$ se repite un número de veces igual al número de términos: $2s = n(a+ü)$

$$s = \frac{n(a+ü)}{2}$$

Por ejemplo: 4, 13, 22, 31, 40, 49, 58, 67

$a = 4$ $\quad u = 67$ $\quad n = 8$ (términos), aplicando la fórmula para la suma:

$$s = \frac{8\ (4 + 67)}{2} = \frac{8\ (71)}{2} = \frac{568}{2} = 284$$

1.4.2 Progresión Geométrica.

Una "progresión geométrica" es una sucesión finita de números llamados términos, con la cualidad que cualquier número de la sucesión puede obtenerse del anterior al multiplicarlo por una cantidad constante llamada "razón". $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-2}, ar^{n-1}$.

a = primer término $\quad r$ = razón $\quad n$ = número de términos; la suma de los términos es:

$$s = a + ar + ar^2 + \ldots + (ar^{n-2}) + ar^{n-1}$$

multiplicando ambos miembros por la razón se tiene:

$$sr = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$$

si se resta la segunda suma a la primera:

$$s - sr = (a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \ldots + ar^n)$$

queda: $s - sr = a - ar^n$ $\qquad$ factorizando:

$$s\ (1 - r) = a - ar^n$$

$$s = \frac{a - ar^n}{(1 - r)}$$

que conviene utilizarla cuando la razón es mayor a la unidad y $s = \dfrac{ar^n - a}{r - 1}$

cuando la razón es menor a la unidad.

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

$a = 2$ $\qquad r = 2$ $\qquad n = 7$

$$s = \frac{2 - 2\ (2)^7}{1 - 2} = \frac{2 - 128}{-1} = \frac{2 - 256}{-1} = 254$$

cuando $r < 1$

$2, -6, 18, -54, 162, -486$

$a = 2 \qquad r = -3 \qquad n = 6$

$$s = \frac{2(-3)^6 - 2}{-3 - 1} = \frac{2(729) - 2}{-4} = \frac{1458 - 2}{-4} = \frac{1456}{-4} = -364$$

CAPITULO II.

INTERES SIMPLE E INTERES COMPUESTO

En la actualidad, la obtención de fondos que necesita una empresa es una preocupación constante de la persona encargada de negociarlos, puesto que necesita lograrlos en las condiciones más favorables, ya que, normalmente, cuando se obtiene un préstamo es necesario pagar un interés por el tiempo que se usa el dinero y una decisión equivocada puede traer consigo cargos excesivos para la empresa.

Asimismo, cuando se dispone de excedentes de dinero, conviene "ponerlos a trabajar", por lo que es necesario conocer los medios para obtener los resultados más ventajosos.

2.1 Definiciones.

Capital, es la cantidad de dinero que se tiene disponible para invertir.

Interés, es la cantidad de dinero que se tiene que pagar por un capital tomado a préstamo.

Tasa de Interés o Tipo de Interés, es el interés expresado como fracción del capital (tanto por ciento).

2.2. Cálculo del Interés Simple.

Los contratos de préstamo (o de inversión) constan de tres elementos: la suma de dinero tomada en préstamo (o invertida); el tiempo de duración del contrato; y la tasa de interés, que son los elementos básicos para determinar la cantidad adicional (interés) a pagar (o a recibir).

El interés simple se obtiene por:

$$I = C\ t\ i \qquad (2.1$$

en donde:

I = Interés simple

C = Capital

t = Tiempo

i = Tasa de interés

P.e. Calcular el interés simple de \$4,000.00 al 6% durante 2 años.

$$I = 4{,}000\ (2)\ (.06) = \$480.00$$

El año de calendario tiene una duración de 365 días, si hacemos $t = h/365$ (h = número de días), el interés simple será:

$$I = C\ (h/365)\ i \qquad (2.2$$

Hay que señalar que las prácticas comerciales, consideran al año con una duración de 360 días ($t = h/360$) con lo cual se admite un error en el cálculo del interés simple. De este modo, $I = C(h/360)\ i$ (2.2a

Para determinar la relación entre el interés comercial (360 días) y el interés real (365 días), se procede de la siguiente manera:

Interés comercial $\quad Ic = \dfrac{C\ h\ i}{360}$

Interés real $\quad Ir = \dfrac{C\ h\ i}{365}$

$$\frac{Ic}{Ir} = \frac{\frac{C\ h\ i}{360}}{\frac{C\ h\ i}{365}} = \frac{365\ \cancel{(C\ h\ i)}}{360\ \cancel{(C\ h\ i)}} = \frac{365}{360} = \frac{73}{72}$$

$$Ir = \frac{72\ Ic}{73} = Ic\left(1 - \frac{1}{73}\right) \qquad Ir = Ic - \frac{Ic}{73} \qquad (2.3$$

lo cual determina que el interés real es igual al interés comercial menos 1/73 del mismo interés comercial, o sea, de los intereses comerciales que recibe el prestamista el 1.37% (1/73) adicional, procede del simple hecho de utilizar un año de 360 días en el cálculo de los intereses.

P.e. Cálcular los intereses de $1,000.00 al 5% durante 180 días.

$C = \$1,000.00 \quad i = .05 \quad h = 180$ días.

$$Ic = \frac{C\ h\ i}{360} = \frac{1,000\ (180)\ (.05)}{360} = 25.00$$

$$Ir = \frac{C\ h\ i}{365} = \frac{1,000\ (180)\ (.05)}{365} = 24.66$$

Ahora bien, si se conoce el interés comercial, el cálculo del interés real sería de la siguiente forma:

$$Ir = Ic - \frac{Ic}{73}$$

$$Ir = 25 - \frac{25}{73} = 25 - 0.34 = 24.66$$

2,3 Determinación del Tiempo.

En las prácticas comerciales mexicanas, para medir el tiempo en el cálculo de los intereses, no se toma en cuenta el día en el cual se contrae un préstamo, pero sí el de su vencimiento y en caso de que éste sea inhábil, el préstamo se paga al siguiente día hábil sin cargo adicional de intereses.

P.e. Se contrae un préstamo a 20 días el día 5 de diciembre. En este caso, el vencimiento será el 25 de diciembre, que por ser inhábil, el préstamo se cubrirá al siguiente día hábil sin intereses adicionales.

En las operaciones comerciales, la práctica indica: Calcular el tiempo sobre la base de 360 días por año y de 30 días mensuales.

P.e. Determinar el tiempo entre el 15 de junio de 1981 y el 17 de septiembre de 1985.

	1985	años	9	meses	17	días
menos	1981	"	6	"	15	"
	4	años	3	meses	2	días

Lo cual convertido a días sería :

$$
\begin{aligned}
4 \text{ X } 360 \text{ días} &= \quad 1,440 \text{ días} \\
3 \text{ X } 30 \text{ "} &= + \quad 90 \text{ "} \\
& \qquad\quad 2 \text{ "} \\
\hline
& \quad 1,532 \text{ días.}
\end{aligned}
$$

Si se toma como fecha inical la misma indicada en - el ejemplo anterior, el plazo entre ésta y el 4 de --- abril de 1985 sería:

	1985	años	4	meses	4	días
menos	1981	"	6	"	15	"

ya que aritméticamente no se puede hacer la resta, se-piden "prestados" días a los meses, por lo que el mi-- nuendo quedaría:

1985 años 3 meses 34 días

Como en los meses se presenta el mismo problema, se procede de la misma manera y se toman meses de los --- años, por lo que el minuendo sería:

	1984	años	15	meses	34	días
menos	1981	"	6	"	15	"
	3	años	9	meses	19	días

lo cual en días es: 3×360 días $= 1{,}080$ días

9×30 " $= +\ 270$ "

19 "

2,369 días

<u>Se destaca que el interés siempre será comercial - salvo estipulación en contrario</u>.

2.4 Monto a Interés Simple.

El "monto" es la suma del capital más los intereses devengados en el período considerado.

$$M = C + I \qquad (2.4$$

en donde: M = Monto

C = Capital

I = Interés

de la fórmula 2.1 $I = C\,t\,i$

reemplazando I en 2.4; $M = C + C\,t\,i$ (2.4a

factorizando C; $M = C\,(1 + t\,i)$ (2.4b

P.e. Calcular el monto a pagar por una deuda de $4,000.00, si el préstamo se efectuó el 9 de marzo y se liquidará el 4 de septiembre, con un cargo del 5% anual.

Procederemos a calcular el tiempo:

	9 meses	4 días
menos	3 "	9 "

como no es posible realizar la resta, se replantea la operación:

	8 meses	34 días
menos	3 "	9 "
	5 meses	25 días

convertido en días 5×30 días = 150 días

+ 25 "

175 días

$C = 4000 \qquad t = 175/360 \qquad i = .05$

aplicando la fórmula 2.4b

$$\begin{aligned} M &= 4{,}000\ (1 + (175/360)\ (.05)) \\ &= 4{,}000\ (1 + 0.024305) \\ &= 4{,}000\ (1.024305) \\ &= 4{,}097.22 \end{aligned}$$

1.5 Valor Actual o Presente a Interés Simple

El "valor presente" es aquel capital original que,- a una tasa dada, llegará a ser un monto (conocido) en un tiempo determinado.

De lo anterior se desprende que son conocidos: La - tasa de interés, el tiempo y el monto de una deuda.

Por 2.4b se sabe que:

$$M = C\ (1 + t\ i)$$

despejando $$C = \frac{M}{(1 + ti)} \qquad (2.5$$

P.e. Encontrar el valor presente de \$3,000.00 al 6% de interés anual durante 9 meses.

$M = 3{,}000 \qquad i = .06 \qquad t = \dfrac{270}{360} = \dfrac{9}{12} = 0.75$

$$C = \frac{3{,}000}{1 + (0.75)\ (.06)}$$

$$= \frac{3{,}000}{1 + .045} = \frac{3{,}000}{1.045}$$

$$= 2{,}870.81$$

1.6 Gráficas del Interés Simple.

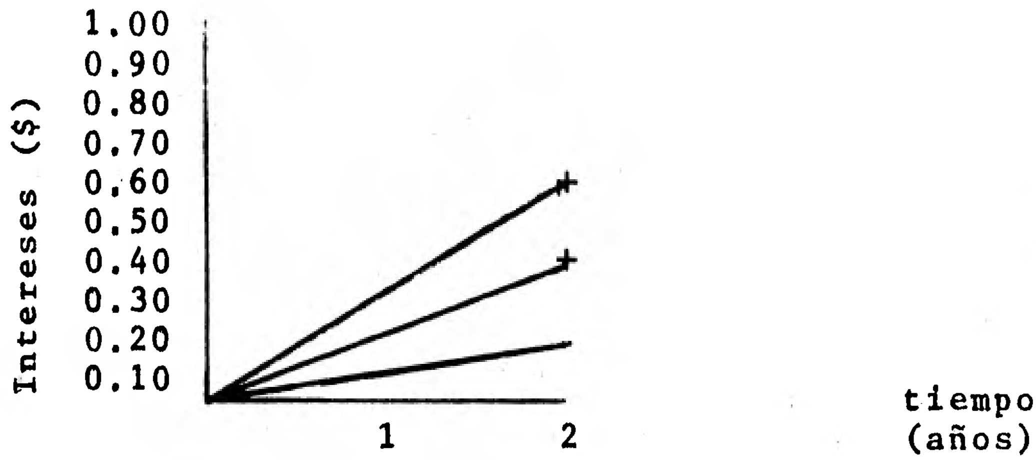
El interés simple se puede graficar en forma sencilla, si se toma un plano cartesiano.

Sobre el eje "Y" se toman los valores que van asumiendo los intereses y sobre el eje "X" el tiempo.

$I = C \quad t \quad i$

$C = \$1.00 \qquad t = 2$ años

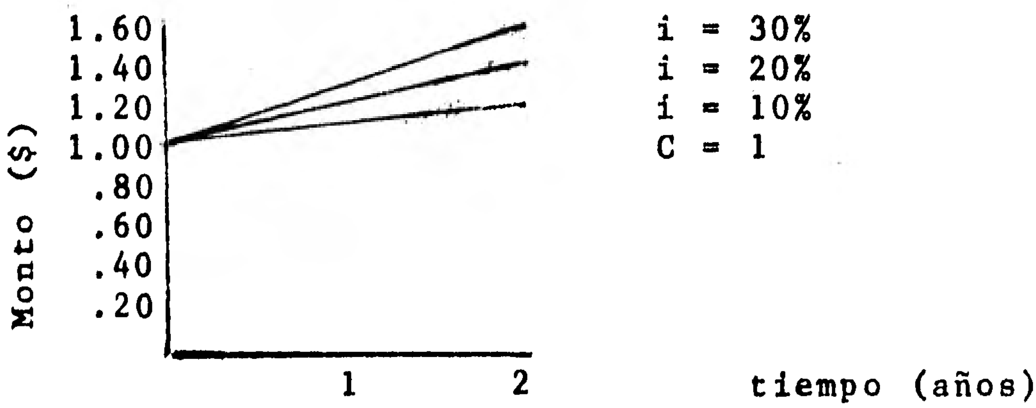
$i = 10\%$, 20% y 30% anual



2.1 Gráfica del interés simple.

<u>Nótese que las líneas que describen al interés simple son rectas</u>.

Se sabe que $M = C\ (1 + t\ i)$, si se considera un capital de $1.00 y los mismos datos utilizados en la gráfica del interés simple, se tiene:



2.2 Gráfica del monto simple

2.7 Ecuaciones de Valores Equivalentes a Interés -- Simple.

Cuando dos operaciones financieras distintas producen el mismo resultado económico, se dice que son --- "equivalentes", en otras palabras, son "equivalentes"- cuando existe una igualdad de obligaciones.

P.e. En una fecha determinada, una persona obtiene un- préstamo de $5,000.00 a 60 días con un interés del 4%- anual, 30 días después propone a su acreedor pagarle - $2,000.00 en ese momento y el resto 30 días después de la fecha de vencimiento inicialmente acordada, pero -- ahora con un interés del 6% anual.

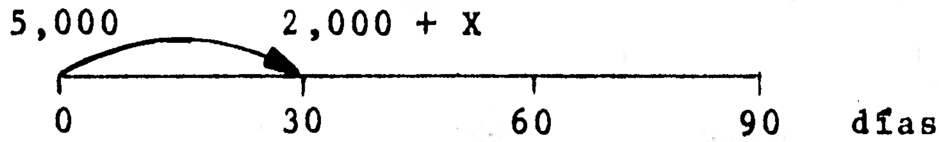
a) ¿Cuál será el valor de la deuda después de realizar el primer pago?

b) ¿Cuál será el valor de la deuda cuando se vence- la prórroga?

Como auxiliar de las ecuaciones de valor se emplean los "diagramas de tiempo-valor", ya que refuerzan la - idea intuitiva sobre los problemas y permiten un mejor análisis de ellos; los "diagramas de tiempo-valor" son líneas en las cuales se gráfica el tiempo, que se --- leen de izquierda a derecha si se tiene una fecha inicial y se pretende ubicar una fecha de vencimiento; o- bien, de derecha a izquierda, si se tiene una fecha de vencimiento y se desea precisar una fecha inicial.

a) Para encontrar el valor de la deuda en el momento en que se realiza el primer pago, la deuda original debe contar con unos intereses, y el capital original-más los intereses (monto) deben ser igual al pago efectuado más una cantidad que quede pendiente de liquidar.

En un diagrama de tiempo-valor, la operación se presenta de la siguiente manera:



y se plantearía como sigue:

$C\ (1 + t\ i\ ) =$ Pago efectuado + pago pendiente

$C = \$5{,}000 \qquad t = 30/360 \qquad i = .04$

Pago efectuado $= \$2{,}000$

Nótese que existe una igualdad de obligaciones.

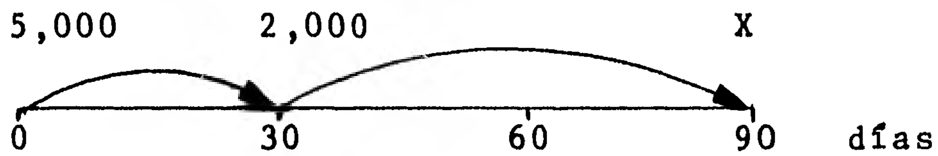
Sustituyendo por los valores

$$5{,}000\ (1 + (30/360)\ (.04)) = 2{,}000 + X$$
$$5{,}000\ (1 + (.083333)\ (.04)) = 2{,}000 + X$$
$$5{,}000\ (1 + .003333) = 2{,}000 + X$$
$$5{,}000\ (1.003333) = 2{,}000 + X$$
$$5{,}016.66 = 2{,}000 + X$$
$$5{,}016.66 - 2{,}000 = X$$
$$3{,}016.66 = X$$

El adeudo por liquidar asciende a \$3,016.66

b) Este caso será resuelto de dos maneras diferentes con el fin de enfatizar la cualidad de las ecuaciones de valor, que se pueden solucionar de distintas formas.

1º. En el inciso a), se obtuvo el valor presente de la deuda en la fecha en que se efectúa el primer pago, después se procede a obtener su monto en la fecha en que se vence la prórroga; lógicamente, con la nueva ta sa de interés, a fin de determinar el valor que se tendrá que cúbrir.



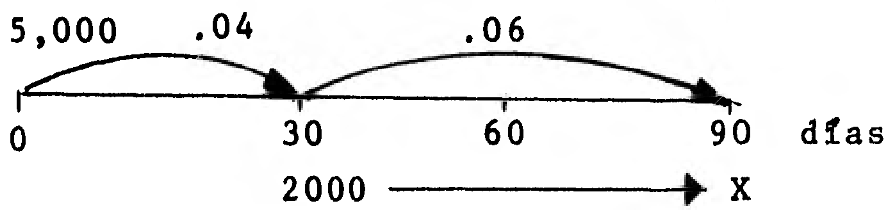
$$C\ (1 + t\ i\ ) = X$$

$C = \$3{,}016.66$ $\qquad t = 60/360$ $\qquad i = .06$

$$3{,}016.66\ (1 + (60/360)\ (.06)) = X$$
$$3{,}016.66\ (1 + (0.166666)\ (.06)) = X$$
$$3{,}016.66\ (1 + 0.01) = X$$
$$3{,}016.66\ (1.01) = X$$
$$3{,}046.83 = X$$

\$3,046.83 es la cantidad a pagarse al final de la prórroga.

2o. Se calcula el monto de la deuda original a la fecha enque se recibió el primer pago y el resultado se valúa en la fecha en que se vencerá la prórroga (obsérvese que hay un cambio en la tasa de interés), lo anterior debe ser igual al pago inicial valuado en la fecha en que termina la prórroga, más un pago en esa misma fecha.



$$C\ (1 + t\ i)\ (1 + t'\ i') = C'\ (1 + t'\ i') + X$$

$C = 5{,}000$ $\qquad t = 30/360$ $\qquad i = .04$

$C' = 2{,}000$ $\qquad t' = 60/360$ $\qquad i' = .06$

$5,000\ (1+(30/360)\ (.04))(1+(60/360)(.06)) = 2,000$
$(1+(60/360)\ (.06)) + X$
$5,000\ (1.003333)(1.01) = 2,000\ (1.01) + X$
$5,016.66\ (1.01) = 2,020 + X$
$5,066.66 = 2,020 + X$
$5,066.66 - 2,020 = X$
$3,046.83 = X$

2.8 Descuento a Interés Simple.

Existen dos tipos de descuento derivados de las operaciones comerciales: El "descuento racional ó matemático" y el "descuento bancario."

El "descuento racional o matemático", es la diferencia entre el importe del monto y el importe del valor presente; se denota por D.

$$D = M - C \qquad (2.6$$

D = Descuento

M = Monto

C = Capital

Si $M = C\ (1 + t\ i)$

entonces $D = C\ (1 + t\ i) - C = \cancel{C} + Ct\ i - \cancel{C}$

$$D = Cti \qquad (2.7$$

de la fórmula obtenida se desprende que el descuento racional ó matemático es igual al interés simple y, para diferenciar las fórmulas, se acostumbra denotar la tasa de descuento como "d". En consecuencia la fórmula del descuento racional es:

$$D = C\ t\ d \qquad (2.7a.$$

El "descuento bancario" se fundamenta en la costumbre de cobrar los intereses por anticipado y tomando -

como base el monto, con lo cual, el prestamista puede disponer de inmediato de los intereses.

En general, el descuento que se utiliza en las operaciones comerciales es el bancario y cuando se habla de descuento se hace referencia a éste (el bancario), salvo que se especifique que sea el racional.

El descuento bancario también se denota por "D", y es:

$$D = M\,t\,i \qquad (2.8$$

Se diferencía del descuento racional en la base sobre la cual se calcula: Monto para el descuento bancario y Capital para el descuento racional.

La fórmula 2.8 normalmente es cambiada por:

$$D = M\,t\,d \qquad (2.8a$$

P.e. Se recurre al Banco para descontar documentos de clientes por un importe de $90,000.00, documentos que vencen en 45 días. Calcular el importe del descuento, si la tasa de descuento es del 28% anual.

$$D = M\,t\,d$$

$$M = 90{,}000 \qquad t = 45/360 \qquad d = .28$$

$$\begin{aligned} D &= 90{,}000\ (45/360)\ (.28) \\ &= 90{,}000\ (0.125)\ (.28) \\ &= 90{,}000\ (0.035) \\ &= 3{,}150 \end{aligned}$$

El descuento que hace el Banco (comisión que cobra) es de $3,150.00 .

Cuando se realiza una operación de descuento banca rio se puede encontrar el valor presente (importe lí-- quido) por la diferencia entre el monto y el descuento bancario.

$$C = M - D \qquad (2.9$$

De la fórmula 2.8a se sabe que $D = M\ t\ d$

sustituyendo D $\quad C = M - M\ t\ d$

factorizando M $\quad C = M\ (1-t\ d) \qquad (2.9a$

P.e. Encontrar el importe líquido del abono a la cuenta, con los datos del ejemplo anterior.

$$M = 90{,}000 \qquad t = 45/360 \qquad i = .28$$

$$C = 90{,}000\ (1 - (45/360)\ (.28))$$

$$= 90{,}000\ (1 - (0.125)\ (.28))$$

$$= 90{,}000\ (1 - 0.035)$$

$$= 90{,}000\ (0.965)$$

$$= 86{,}850$$

En seguida se demostrará que el descuento bancario- es mayor que el descuento racional.

Si se toma un monto M al cual se le aplican ambos - tipos de descuento, con las mismas tasas, durante el - mismo tiempo y si los importes de los valores líquidos difieren, se analiza la diferencia.

$$Cr = \frac{M}{1 + td} \qquad Cb = M\ (1-td)$$

$$\frac{Cr}{Cb} = \frac{\frac{M}{1 + td}}{M(1-td)} = \frac{M}{M(1-td)(1+td)} = \frac{1}{(1-td)\ (1+td)} =$$

$$\frac{Cr}{Cb} = \frac{1}{1 - (td)^2}$$

$$Cr = \frac{Cb}{1 - (td)^2} \qquad (2.10$$

Se tiene que, a la misma tasa y en tiempos iguales, el importe líquido con descuento racional es mayor que el importe líquido con descuento bancario, puesto que éste último está dividido entre una cantidad menor a la unidad; y si el descuento es la diferencia entre el monto y el capital, esta diferencia es mayor en el descuento bancario por tener un capital menor.

P.e. Calcular el importe del valor actual, con descuento racional y con descuento bancario, de un préstamo de $50,000.00 a 4 meses a la tasa del 30% anual.

$M = \$50{,}000 \qquad t = 4/12 = 1/3 = 0.333333 \qquad d = .30$

$$Cr = \frac{M}{1 + td} \qquad Cb = M\,(1 - td)$$

$$Cr = \frac{50{,}000}{1 + (.333333)(.30)} \qquad Cb = 50{,}000(1 - (.333333)(.30))$$

$$Cr = \frac{50{,}000}{1 + .10} \qquad Cb = 50{,}000\,(1 - .10)$$

$$Cr = \frac{50{,}000}{1.10} \qquad Cb = 50{,}000\,(.90)$$

$$Cr = 45{,}454.54 \qquad Cb = 45{,}000.00$$

Obtención del descuento:

$$Dr = M - Cr \qquad Db = M - Cb$$

$$Dr = 50{,}000 - 45{,}454.54 \qquad Db = 50{,}000 - 45{,}000$$

$$Dr = 4{,}545.46 \qquad Db = 5{,}000.00$$

El descuento bancario es mayor.

2.9 Interés Compuesto.

En el interés simple, el capital original siempre es la base del cálculo de los intereses, o sea, que los intereses del primer período serán iguales a los de períodos subsecuentes.

Si de un determinado capital se calculan los intereses del primer año y para determinar los intereses del segundo año se toma una nueva base formada por el capital original más los intereses del primer año, y para obtener los intereses del tercer año se toma como base el capital original más los intereses generados hasta el segundo año, y así en lo sucesivo, se dice que hubo una "capitalización" de intereses y que la operación financiera fue realizada con "interés compuesto".

El efecto que tiene la capitalización de intereses puede observarse si se calculan y comparan los intereses por el método de interés simple y por el de interés compuesto.

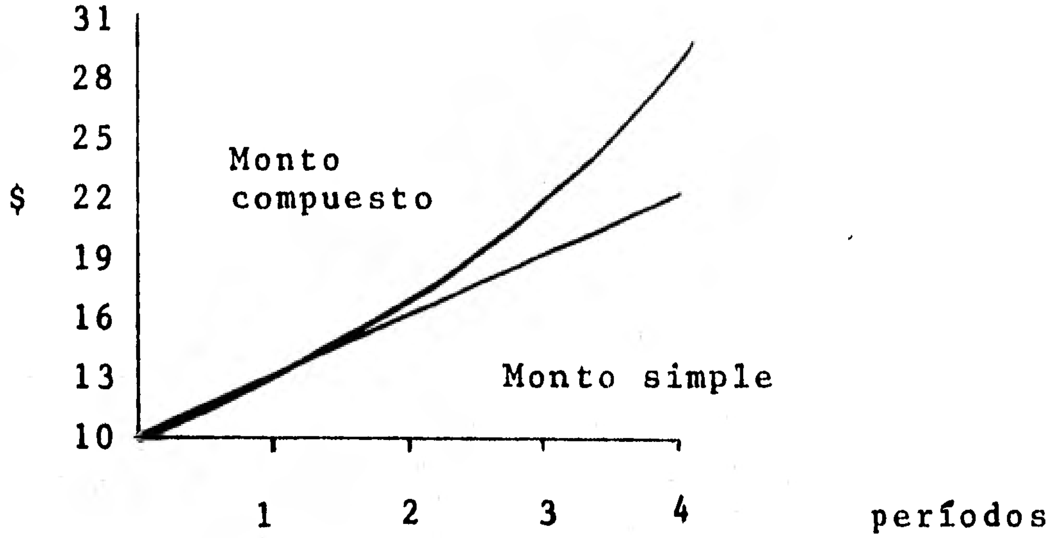
C = $10.00 i = 30%

Interés Simple:

Período	Capital al principio del período	Intereses del período	Monto al final del período
1	$ 10.00	$ 3,00	$ 13.00
2	10.00	3.00	16.00
3	10,00	3.00	19.00
4	10.00	3.00	22.00

Interés Compuesto:

Período	Capital al principio del período	Intereses del período	Monto al final del período
1	$ 10.00	$ 3,00	$ 13.00
2	13.00	3.90	16.90
3	16.90	5.07	21.97
4	21.97	6.59	28.56



2.2 Gráfica comparativa del monto simple y del monto compuesto.

Se observa que el interés simple es descrito por -- una recta mientras que el interés compuesto lo es por- una curva ascendente (es una función exponencial).

2.10 Monto Compuesto.

Se tiene un capital C que va a ser invertido a la - tasa "i" de interés por período de capitalización, o sea, la tasa aplicable cada vez que se capitalicen los intereses.

El capital C gana C t i de interés para el primer - período, y el monto será:

$M_1 = C + I$

$M_1 = C + C\, i$ porque $t = 1$

factorizando $M_1 = C\,(1 + i)$

Para el segundo período los intereses serán $M_1 \cdot i$ y el segundo monto esta dado por:

$M_2 = M_1 + iM_1$

$M_2 = C\,(1+i) + i\,C\,(1+i)$

$$M_2 = C + Ci + Ci + C\,i^2$$

factorizando C; $M_2 = C\,(1 + 2\,i + i^2)$

$$M_2 = C\,(1+i)\,(1+i)$$

$$M_2 = C\,(1 + i)^2$$

los intereses del tercer período se obtienen por $M_2 . i$

el tercer monto está dado por:

$$M_3 = M_2 + i\,M_2$$

factorizando

$$M_3 = M_2\,(1 + i)$$

$$M_3 = C\,(1 + i)^2\,(1 + i)$$

$$M_3 = C\,(1 + i)^3$$

En general, si n es cualquier número de períodos

$$M_n = C\,(1 + i)^n \qquad (2.11$$

P.e. Encontrar el monto compuesto al finalizar el cuarto período para un capital de \$10.00 y una tasa de interés del 30%

$C = 10.00 \qquad n = 4 \qquad i = .30$

$$M = 10\,(1+.30)^4$$

$$M = 10\,(1.30)^4$$

$$M = 10\,(2.8561)$$

$$M = 28.56$$

Los valores de $(1+i)^n$ se obtienen de tablas financieras, en las cuales se encuentra el valor de éste factor por cada tasa de interés (i) en los distintos períodos (n).

2.11 Tasa Nominal y Tasa Efectiva de Interés.

Se denomina "tasa nominal de interés" a la tasa de interés que es acordada en una operación financiera; - la "tasa efectiva de interés" es la que realmente grava al capital en cada período de capitalización.

Normalmente, la tasa nominal se establece para períodos de un año, pero cuando los períodos de capitalización son diferentes al año, la tasa nominal se divide entre el número de capitalizaciones que ocurren en un año, a fin de obtener la tasa con que habrá de gravarse al capital en cada período de capitalización.

La simbología que se utiliza (en matemáticas financieras) para estos efectos es:

i = Tasa efectiva de interés

j = Tasa nominal de interés

m = Número de capitalizaciones en un año.

y se establece la siguiente igualdad:

$$i = \frac{j}{m}$$

Cuando el lapso de una operación financiera es de - un año, se tiene:

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} \qquad (2.12$$

Cuando el lapso difiere de un año:

$$(1 + i)^{n} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m.n} \qquad (2.12a$$

Si se quiere obtener la tasa efectiva de interés, - conocidos: La tasa nominal y el número de períodos de capitalización en un año, se procede de la siguiente - manera:

Cuando $n = 1$

$$(1 + i) = (1 + j/m)^m$$

$$\text{Log. } (1 + i) = m \ \text{ Log. } (1 + j/m)$$

$$\text{Antlog. } (\log.(1 + i)) = \text{Antlog. } (m \text{ Log. } (1 + j/m))$$

$$1 + i = \text{Antlog. } (m \log. (1 + j/m))$$

$$i = (\text{Antlog. } (m \log. (1 + j/m))) - 1 \qquad (2.12b$$

Cuando $n \neq 1$

$$(1 + i) = (1 + j/m)^{m.n.}$$

$$n \ \log. (1 + i) = m.\ n \ \log. (1 + j/m)$$

$$\log. (1 + i) = \frac{m.\ \cancel{n} \log. (1 + j/m)}{\cancel{n}}$$

$$\text{Antlog.}(\log.(1 + i)) = \text{antlog. } (m \log.(1 + j/m))$$

$$1 + i = \text{antlog. } (m \log. (1 + j/m))$$

$$i = (\text{antlog. } (m \log.(1 + j/m))) - 1 \qquad (2.12c$$

nótese que ambas fórmulas son iguales para $n = 1$ y para $n \neq 1$.

P.e. Encontrar la tasa efectiva que equivale a una tasa nominal del 28% anual capitalizable trimestralmente.

$j = .28 \qquad m = 4$ (el año tiene 4 trimestres).

$$i = (\text{antlog. } (m \ \log. (1 + j/m))) - 1$$

$$i = (\text{antlog. } (4 \log. (1 + .28/4))) - 1$$

$$i = (\text{antlog. } (4 \log. (1.07))) - 1$$

$$\log.(1.07) = 0.029384$$

$$i = (\text{antlog. } (4 (0.029384))) - 1$$

$$i = (\text{antlog. } (0.117536)) - 1$$

Antlog. (0.117536) = 1.310798

$$i = 1.310798 - 1$$

$$i = 0.310798 = 31.0798\ \%$$

También se puede encontrar la tasa nominal si se -- conoce la tasa efectiva y el número de capitalizaciones en el año.

Cuando $n = 1$

$$(1 + j/m)^m = (1 + i)$$

sacando la m -ésima raíz

$$(1 + j/m) = (1 + i)^{1/m}$$

$$\log.\ (1 + j/m) = \frac{\log.\ (1 + i)}{m}$$

$$\text{antlog.}\ (\log.(1 + j/m)) = \text{antlog.}\left(\frac{\log.\ (1 + i)}{m}\right)$$

$$1 + j/m = \text{antlog.}\left(\frac{\log.\ (1 + i)}{m}\right)$$

$$j/m = (\text{antlog.}\left(\frac{\log.\ (1 + i)}{m}\right)) - 1$$

$$j = ((\text{antlog.}\left(\frac{\log.(1+i)}{m}\right)) - 1)\ m$$

(2.12d

Cuando $n \neq 1$

$$(1 + j/m)^{mn} = (1 + i)^n$$

sacando la mn-ésima raíz, se tiene:

$$(1 + j/m) = (1 + i)^{\frac{\cancel{n}}{m\cancel{n}}}$$

$$(1 + j/m) = (1 + i)^{\frac{1}{m}}$$

con lo cual se llega al segundo paso de la fórmula anterior, lo cual significa que con la fórmula 2.12d puede determinarse la tasa efectiva a partir de la tasa -

nominal, no importando si $n = 1$ ó si $n \neq 1$.

P.e. Calcular la tasa nominal de interés que capitalizado mensualmente corresponde a una tasa efectiva del 14% anual.

$$i = .24 \qquad m = 12$$

$$j = \left(\left(\text{antlog.} \left(\frac{\log.\ (1 + i)}{m}\right)\right) - 1 \right) m$$

$$j = \left(\left(\text{antlog.} \left(\frac{\log.\ (1 + .24)}{12}\right)\right) - 1\right) 12$$

$$\log.\ (1.24) = 0.093422$$

$$j = \left(\left(\text{antlog.} \left(\frac{0.093422}{12}\right)\right) - 1 \right) 12$$

$$j = ((\text{antlog.}\ (0.007785)) - 1)\ 12$$

antlog. 0.007785 = 1.018087

$$j = (1.018087 - 1)\ 12$$

$$j = (0.018087)\ 12$$

$$j = 0.217044 = 21.7044\ \%$$

Una regla comercial de la aplicación del interés compuesto a las operaciones financieras consiste en que, cuando existe una fracción de período al final de una serie de períodos enteros, se calcula el monto compuesto para los períodos enteros y, sobre éste, se determina el monto a interés simple por la fracción de período restante.

P.e. Calcular el monto a 2 años 6 meses de un préstamo de $20,000.00 a una tasa del 15% anual capitalizable cuatrimestralmente.

$$C = 20{,}000 \quad j = .15 \quad m = 3 \quad n = 2.5$$

periódos completos = 7 fracción de período $= \frac{30}{360}$

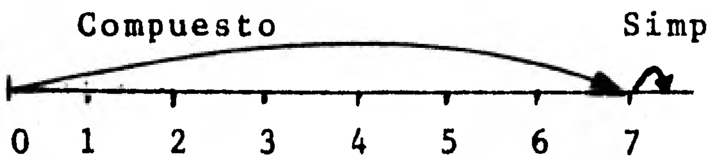
Nótese que la fracción de período se determina en base al lapso en el cual está dada la tasa nominal; en este caso: un año.

Se calcula el monto compuesto

$$M = 20,000\ \left(1 + \frac{.15}{3}\right)^7$$

$$M = 20,000\ (1 + .05)^7$$

$$M = 20,000\ (1.05)^7$$



se busca el valor de $(1.05)^7$ en tablas financieras.

$$M = 20,000\ (1.407100)$$

$$M = \$28,142.00$$

Este monto compuesto ganará interés simple durante los dos meses restantes.

$$M = 28,142\ \left(1 + \left(\frac{30}{360}\right) (.15)\right)$$

$$= 28,142\ (1 + (0.166666)\ (.15))$$

$$= 28,142\ (1 + 0.024999)$$

$$= 28,142\ (1.024999)$$

$$= 28,845.52$$

El monto de la deuda al cabo de 2 años y medio será de \$28,845.52.

Es necesario resaltar que las tablas financieras - sólo muestran los valores de $(1 + i)^n$ hasta para n=100, razón por la que cuando se tiene un problema que rebase este número de períodos se utiliza la siguiente propiedad de los exponentes.

$$a^n = a^h \cdot a^k \qquad \text{con} \qquad n = h + k$$

lo que aplicado a la fórmula del monto sería:

$$(1 + i)^n = (1 + i)^h \; (1 + i)^k \qquad \text{con} \qquad n = h + k$$

P.e. Cálcular el monto a 15 años de una inversión de -$50,000.00 al 24% anual capitalizable mensualmente.

$$C = 50,000 \qquad j = .24 \qquad m = 12 \qquad n = 15$$

$$M = 50,000 \; (1 + .24/12)^{12.15}$$

$$M = 50,000 \; (1 + .02)^{180}$$

como no se encuentran en las tablas financieras los valores para $(1.02)^{180}$ se procede a hacer 180 = 90 + 90- y se sustituye .

$$M = 50,000 \; (1.02)^{90} \; (1.02)^{90}$$

$$M = 50,000 \; (5.943133) \; (5.943133)$$

$$M = 1,766,041.49$$

al cabo de 15 años el valor de la inversión será de --$1,766,041.49.

2.12 Aproximación de la Tasa de Interés y del Tiempo.

Existen dos métodos para el cálculo de la tasa de -interés si se conoce el monto (M), el capital (C), el-tiempo (n) y, en su caso, el número de capitalizacio--nes en el año (m), éstos métodos son: el de interpolación (que es el utilizado en la práctica) y el de logaritmos.

De la fórmula 2.11 se tiene.

$$M = C\,(1 + i\,)^n$$

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n$$

$$\log.\left(\frac{M}{C}\right) = n\ \log.\ (1 + i)$$

$$\frac{\log.\left(\frac{M}{C}\right)}{n} = \log.\ (1 + i)$$

$$\text{antlog.}\left(\frac{\log.\ \left(\frac{M}{C}\right)}{n}\right) = \text{antlog.}\ (\log.\ (1 + i))$$

$$\text{antlog.}\left(\frac{\log.\ \left(\frac{M}{C}\right)}{n}\right) = 1 + i$$

$$\text{antlog.}\left(\frac{\log.\ \left(\frac{M}{C}\right)}{n}\right) - 1 = i \qquad (2.13$$

El método de interpolación es empleado cuando se -- dispone de tablas financieras y consiste en una aproxi mación entre dos valores conocidos.

P.e. Un capital de $80,000.00 al cabo de 16 años se ha convertido en $115,000.00 ¿A qué tasa de interés con - capitalizaciones anuales fue colocado el capital?

$M = 115,000 \qquad C = 80,000 \qquad n = 16$

Solución por interpolación

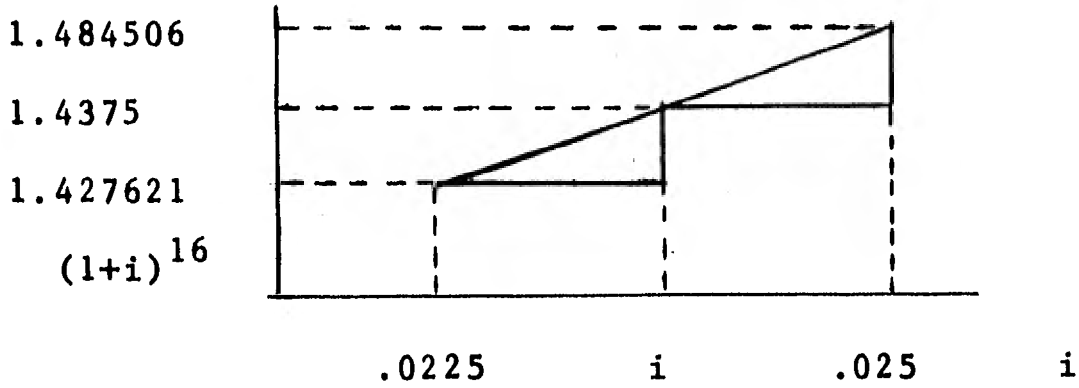
$$M = (C\ 1 + i)^n$$

$$115,000 = 80,000\ (1 + i)^{16}$$

$$\frac{115,000}{80,000} = (1 + i)^{16}$$

$$1.4375 = (1 + i)^{16}$$

El valor 1.4375 con n = 16 se encuentra entre - - - 1.427621 que corresponde a una tasa del 2.25% y 1.484506 que es el valor de 2.5% para n=16.



1.484506	.0250		1.4375	X
1.427621	.0225		1.427621	.0225
0.056885 :	0.0025	: :	0.009879:X-.0225	

Con los valores obtenidos se establece la siguiente relación:

$$\frac{X-.0225}{.009879} = \frac{.0025}{.056885}$$

despejando la incógnita

$$X-.0225 = \frac{(.009879)\ (.0025)}{.056885}$$

$$X = \frac{(.009879)(.0025)}{.056885} + .0225$$

$$X = \frac{.000025}{.056885} + .0225$$

$$X = .000439 + .0225$$

$$X = .022939 = 2.2939\%$$

Solución por logaritmos

$$i = \text{antlog.} \left(\frac{\log. \left(\frac{M}{c}\right)}{n} \right) - 1$$

$$i = \text{antlog.} \left(\frac{\log. \left(\frac{115,000}{80,000}\right)}{16} \right) - 1$$

$$i = \text{antlog.} \left(\frac{\log. \ (1.4375)}{16} \right) - 1$$

$\log. \ (1.4375) = 0.157608$

$$i = \text{antlog.} \left(\frac{0.157608}{16} \right) - 1$$

$$i = \text{antlog.} \ (0.009850) - 1$$

$\text{antlog.} \ (0.009850) = 1.022939$

$$i = 1.022939 - 1$$

$$i = \ .022939 = 2.2939\%$$

Para el cálculo del tiempo, conocidos M, C e i se procede en forma similar al cálculo de la tasa de interés y también puede efectuarse por logaritmos o por interpolación.

Por logaritmos

$$M = C \ (1 + i)^n$$

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n$$

$$\log. \left(\frac{M}{C}\right) = n \log. \ (1 + i)$$

$$\frac{\log. \left(\frac{M}{C}\right)}{\log. (1 + i)} = n \qquad (2.14$$

Nota: No es lo mismo log.(A/B) que log. A/log. B, lo primero es log. A- log. B y lo segundo es el cociente de los logaritmos.

P.e. ¿En qué tiempo un capital de $5,000.00 será $8,500.00 al 10% convertible trimestralmente?

$C = 5{,}000 \qquad M = 8{,}500 \qquad j = .10 \qquad m = 4$

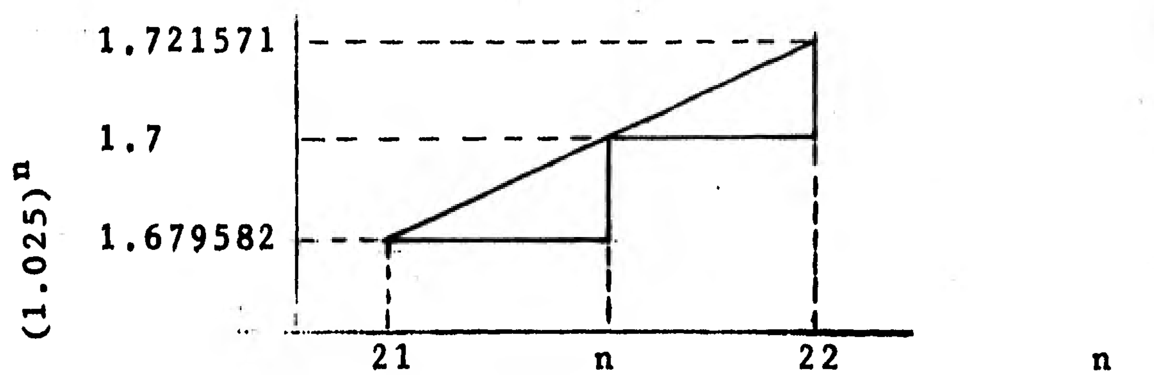
Por interpolación $M = C\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m.n}$

$$8{,}500 = 5{,}000\left(1 + \frac{.10}{4}\right)^{4.n}$$

$$\frac{8{,}500}{5{,}000} = (1 + .025)^{4.n}$$

$$1.7 = (1.025)^{4.n}$$

Se buscan valores en tablas financieras y se tiene:



22		1.721571		X		1.7
21		1.679582		21		1.679582
1	:	.041989	: :	X-21	:	.020418

Con estos valores se establece la proporción siguiente:

$$\frac{1}{.041989} = \frac{X - 21}{.020418}$$

se despeja la incógnita

$$\frac{.020418}{.041989} = X-21$$

$$0.486270 + 21 = X$$

$$21.486270 = X$$

que equivale a 21 trimestres y 0.486270 de trimestre;- para convertir a días basta con multiplicar por el número de días que tiene un período, en este caso, 90 -- días.

0.486270×90 días $= 43.7643$ días $\simeq 44$ días

en años se tiene: 5 años 134 días.

Por logaritmos

$$n = \frac{\log.\left(\frac{M}{C}\right)}{\log.\ (1+i)} \qquad (2.14$$

$$n = \frac{\log.\left(\frac{8,500}{5,000}\right)}{\log.\left(1 + \frac{.10}{4}\right)}$$

$$n = \frac{\log.\ (1.7)}{\log.\ (1 + 0.025)}$$

$$n = \frac{\log.\ (1.7)}{\log.\ (1.025)}$$

$\log.\ (1.7) = 0.230449 \qquad \log.\ (1.025) = 0.010723$

$$n = \frac{0.230449}{0.010723}$$

$n = 21.491093$ trimestres

Se hace la conversión a días de la parte fracciona ria.

0.491093×90 días $= 44.19837$ días $\simeq 44$ días.

en años el plazo es de: 5 años 134 días.

Como se dijo anteriormente, el monto debe calcularse a interés compuesto por los períodos enteros y a interés simple por las fracciones de período.

P.e. Calcular el monto del ejemplo anterior

$C = 5{,}000 \qquad j = .10 \qquad m = 4 \qquad h = 44 \qquad i = .10$

$$\text{Monto total} = \left(C\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{21}\right)\left(1 + \left(\frac{h}{360}\right)(i)\right)$$

Nótese que i = .10 pues, en este caso, es interés simple y por lo tanto no se respeta la igualdad de tasas del interés compuesto $i = \frac{j}{m}$

$$\text{Monto total} = \left(5{,}000\left(1 + \frac{.10}{4}\right)^{21}\right)\left(1 + \left(\frac{44}{360}\right)(.10)\right)$$

$$= \left(5{,}000\,(1+.025)^{21}\right)(1+(.12222)(.10))$$

$$= \left(5{,}000\,(1.025)^{21}\right)(1+0.012222)$$

se busca el valor de $(1.025)^{21}$ en tablas financieras.

$$= 5{,}000\,(1.679582)\,(1.012222)$$

$$= 8{,}397.91\,(1.012222)$$

$$= 8{,}500.55$$

El monto determinado difiere por $0.55 del monto con el cual fue planteado el problema original.

2.13 Valor actual o valor presente a interés compuesto.

En las operaciones comerciales frecuentemente se tiene que determinar el "valor actual" de alguna deuda o inversión con vencimiento en una fecha futura.

El "valor actual o presente a interés compuesto" de -

una cantidad futura, es el capital que a interés compuesto será igual a la cantidad futura señalada.

Considero que el concepto de valor presente a interés compuesto es uno de los conceptos financieros más importantes para los Contadores y para los Administradores, puesto que permite evaluar proyectos de inversión, esto es, si en este momento se invierte en algún proyecto, durante un cierto período se estarán recibiendo utilidades, pero por efectos inflacionarios un peso de utilidades que se recibe en el futuro tiene un poder adquisitivo menor que un peso en este momento (peso con el cual fue hecha la inversión), entonces el valor presente a interés compuesto señala el valor que en este momento tienen las utilidades futuras y nos permite evaluar las diferentes opciones de inversión que se encuentren al alcance.

Recuérdese que: $M = C\,(1+i)^n$ (2.11

despejando C: $\frac{M}{(1+i)^n} = C$

$$M\left(\frac{1}{(1+i)^n}\right) = C \qquad (2.15$$

como $\frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$

entonces $M\,(1+i)^{-n} = C$ (2.15a

En caso de tener una tasa nominal (j) que se capitaliza m veces al año.

$(1+i) = (1+\frac{j}{m})^m$ se sustituye esta igualdad en la fórmula anterior

$$M\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-(m.n)} = C \qquad (2.15b$$

A $(1+i)^{-n}$ se le denomina "factor de descuento"- y señala el valor presente de una unidad monetaria -- (un peso) y sus valores pueden ser localizados en las tablas financieras como: $(1+i)^{-n}$ ó V_i^n .

P.e. ¿Cuál es la cantidad que se requiere invertir para tener $20,000.00 dentro de 10 años, si se considera a)una tasa del 8% efectiva anual, b) una tasa del 8%- anual capitalizable trimestralmente.

a) $M = 20,000 \qquad i = .08 \qquad n = 10$

$$C = M\,(1+i)^{-n}$$

$$= 20,000\,(1+.08)^{-10}$$

$$= 20,000\,(1.08)^{-10}$$

se busca el valor de $(1.08)^{-10}$ en tablas financieras

$$= 20,000\,(0.463193)$$

$$= 9,263.86$$

b) $M = 20,000 \qquad j = .08 \qquad n = 10 \qquad m = 4$

$$i = \frac{j}{m} = \frac{.08}{4} = .02$$

$$C = M\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-(m.n)}$$

$$C = 20,000\,(1+.02)^{-(4.10)}$$

$$C = 20,000\,(1.02)^{-40}$$

Se busca en tablas financieras el valor de $(1.02)^{-40}$ ó $V_{.02}^{40}$

$$= 20,000\ (0.452890)$$
$$= 9,057.80$$

Cuando las tablas financieras no cuentan con los va- lores de $(1 + i)^{-n}$ para n mayor de 100, se utiliza el- mismo recurso que en el monto.

$$(1 + i)^{-n} = (1 + i)^{-h}\ (1 + i)^{-k} \quad \text{con } n = h + k$$

P.e. Calcular el valor actual de $200,000.00 pagaderos dentro de 22 años, con una tasa del 9% capitalizable - bimestralmente

$$M = 200,000.00 \qquad j = .09 \qquad m = 6 \qquad n = 22$$

$$C = M\ (1 + \frac{j}{m})^{-(mn)}$$

$$C = 200,000\ (1 + \frac{.09}{6})^{-(6.22)}$$

$$C = 200,000\ (1 + 0.015)^{-132}$$

$$C = 200,000\ (1.015)^{-132}$$

como no se encuentra en tablas el valor de $(1.015)^{-132}$ se sustituye - 132 por - 100 - 32

$$C = 200,000\ (1.015)^{-100}\ (1.015)^{-32}$$

se buscan los valores en tablas financieras

$$C = 200,000\ (0.225629)\ (0.620993)$$

$$C = 28,022.81$$

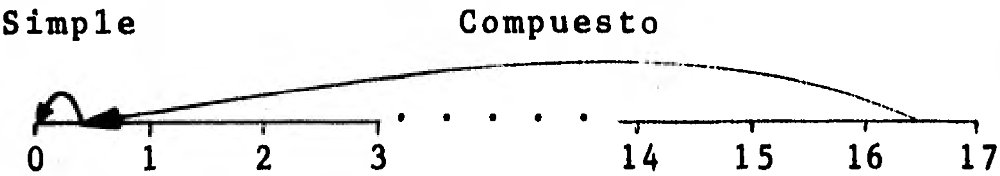
Cuando existen períodos fraccionarios en el cálculo del interés simple, por regla comercial, se determina- el valor actual a interés compuesto por el número de - períodos enteros y sobre éste valor presente, se deter mina un nuevo valor presente pero a interés simple por la fracción de período que falta.

P.e. Hallar el valor presente de \$70,000.00 a pagar dentro de 5 años 6 meses, a la tasa de interés del 9% convertible cuatrimestralmente.

$M = 70,000.00 \quad j = .09 \quad m = 3 \quad n = 5.5$

$mn = 16.5$

períodos completos $= 16$ fracción de período $= \frac{60}{360}$



Se calcula el valor presente a interés compuesto

$$C = M \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-16}$$

$$C = 70,000 \left(1 + \frac{.09}{3}\right)^{-16}$$

$$C = 70,000 \ (1 + .03)^{-16}$$

$$C = 70,000 \ (1.03)^{-16}$$

Se busca en tablas el valor de $(1.03)^{-16}$ ó $V^{16}_{.03}$

$$C = 70,000 \ (0.623167)$$

$$C = 43,621.69$$

Con este valor presente compuesto se procede a obtener el valor presente a interés simple por la fracción de período restante.

$$C = \frac{M}{(1 + t\ i)}$$

$$C = \frac{43{,}621.69}{\left(1 + \frac{60}{360}(.09)\right)}$$

$$C = \frac{43{,}621.69}{(1 + .015)}$$

$$C = \frac{43{,}621.69}{(1.015)}$$

$$C = 42{,}977.03$$

que resulta ser el capital que al cabo de 5 años y medio será $70,000.00.

1.14 Ecuaciones de valor a interés compuesto.

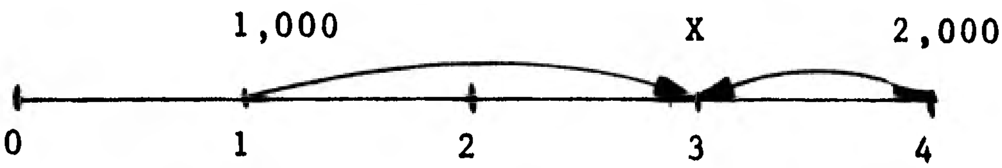
En las operaciones comerciales, frecuentemente se cambia un paquete de obligaciones por otro, ambos valuados en un mismo momento de referencia llamado "fecha de valuación" ó "fecha focal". En otras palabras, "las ecuaciones de valor" es la igualdad de obligaciones valuadas en una misma fecha.

Es importante señalar, que <u>todas</u> las obligaciones deben ser valuadas en la misma fecha focal, sin importar cual sea ésta, ya que dos conjuntos de obligaciones que son equivalentes en una cierta fecha, también lo son en cualquier otra.

P.e. Una empresa debe $1,000.00 pagaderos en 1 año y $2,000.00 pagaderos en 4 años; acuerda con su acree--

dor que se liquiden ambas deudas, mediante un pago único al final del tercer año.

¿Cuál será el valor del pago único si la tasa de interés es del 10% convertible semestralmente?



X = pago único

Fecha focal = final del tercer año

La deuda de $1,000.00 del primer año, valuada en el tercero, será: $1,000\ (1 + (.10/2))^{4}$

la de $2,000 del año 4, valuada en el año 3 es:

$$2,000\ (1 + (.10/2))^{-2}$$

el valor del pago único en la fecha focal es X.

Si se igualan las deudas valuadas en la fecha focal con el valor del pago único se tiene:

a) $X = 1,000\ (1+(.10/2))^{4} + 2,000\ (1+(.10/2))^{-2}$

Si se hubiera tomado la fecha inicial como fecha focal, la ecuación de valor sería:

b) $X\ \ (1+(.10/2))^{-6} = 1,000\ (+(.10/2))^{-2}$

$+\ \ 2,000\ (1 + (.10/2))^{-8}$

Si se evalúa con una fecha focal igual al final del cuarto año:

c) $X(1+(.10/2))^2 = 1{,}000\ (1+(.10/2))^6 + 2{,}000$

Obsérvese que a), b) y c) son equivalentes puesto que: b) puede ser obtenida de a) si se multiplica por $(1+ (.10/2))^6$ y c) se obtiene de multiplicar b) por $(1+(.10/2))^8$, de las ecuaciones de valor anteriores, la más simple y que da una mejor apreciación del problema es la a) pero, evidentemente, cada persona elegirá la forma que prefiera para enfrentar un problema de este tipo.

Resolviendo el problema con a)

$X = 1{,}000(1+(.10/2))^4 + 2{,}000(1+(.10/2))^{-2}$

$X = 1{,}000(1+.05)^4 + 2{,}000(1+.05)^{-2}$

obteniendo en tablas los valores de $(1.05)^4$ y $(1.05)^{-2}$

$X = 1{,}000\ (1.215506) + 2{,}000\ (.907029)$

$X = 1{,}215.51 + 1{,}814.06$

$X = 3{,}029.57$

P.e. El Sr. Pérez debe \$10,000 pagaderos en 2 años y \$9,000 pagaderos en 5 años; acuerda con su acreedor abonar \$8,000 de inmediato y el resto pagarlo dentro de 4 años, ¿De qué cantidad será el pago al finalizar el cuarto año, si la tasa de interés es del 5% capitalizable semestralmente?

$$X + 8{,}000\ (1+(.05/2))^{8} = 10{,}000\ (1+(.05/2))^{4} + 9{,}000\ (1+(.05/2))^{-2}$$

$$X + 8{,}000(1.025)^{8} = 10{,}000(1.025)^{4} + 9{,}000(1.025)^{-2}$$

Se buscan los valores en tablas

$$X + 8{,}000(1.218403) = 10{,}000(1.103813) + 9{,}000(.951814)$$

$$X + 9{,}747.22 = 11{,}038.13 + 8{,}566.37$$

$$X = 11{,}038.13 + 8{,}566.37 - 9{,}747.22$$

$$X = 9{,}857.28$$

Supóngase que para el ejemplo anterior no se conoce la fecha en la cual se deben abonar $9,057.28 para i-- gualar la operación financiera.

Si se toma como fecha focal el momento actual, la - ecuación de valor resulta:

$$8{,}000+9{,}857.28(1.025)^{-n}=10{,}000(1.025)^{-4}+9{,}000(1.025)^{-10}$$

Se utiliza n puesto que se valúa en el momento actual

$$9{,}857.28(1.025)^{-n}=10{,}000(1.025)^{-4}+9{,}000(1.025)^{-10}-8{,}000$$

$$(1.025)^{-n}=\frac{10{,}000(1.025)^{-4}+9{,}000(1.025)^{-10}-8{,}000}{9{,}857.28}$$

buscando los valores en tablas

$$(1.025)^{-n}=(10{,}000(.905951)+9{,}000(.701190)-8000)/9{,}857.28$$

$$(1.025)^{-n}= (9{,}059.51 + 7{,}030.78 - 8{,}000)/9{,}857.28$$

$$(1.025)^{-n}= 8{,}090.29/9{,}857.28$$

$$(1.025)^{-n}=0.820743$$

Se despeja -n utilizando logaritmos.

$-n \log. (1.025) = \log. (.820743)$

$-n = \log. (.820743)/\log.(1.025)$

$\log. (.820743) = -.085793 \quad \log. (1.025) = .010723$

$-n = -.085793/.010723$

$-n = -8.000839 \simeq -8$

8 semestres equivalen a 4 años, que era lo considerado en el planteamiento del problema original.

1.15 Fecha de vencimiento promedio y tiempo equivalente.

La fecha en la cual un conjunto de obligaciones -- con diferentes fechas de vencimiento se liquidan mediante un pago único, se denomina "fecha de vencimiento promedio" y el lapso que existe entre el momento - actual y la fecha de vencimiento promedio se conoce - como "tiempo equivalente".

Analizando las definiciones anteriores, se aprecia- que el tiempo equivalente es una particularidad de -- las ecuaciones de valor en las que no se conoce el -- tiempo en el que se debe efectuar un pago único para- saldar un conjunto de deudas.

P.e. Calcular la fecha de vencimiento promedio de una deuda de \$50,000 con vencimiento en 8 años y de otra- de \$20,000 que vence en 10 años, si se supone un interés del 3% efectivo anual.

$$(50{,}000+20{,}000)(1.03)^{-n} = 50{,}000(1+.03)^{-8}+20{,}000(1+.03)^{-10}$$

sustituyendo por los valores en tablas

$$(70{,}000)(1.03)^{-n} = 50{,}000(0.789409) + 20{,}000(0.744094)$$

$$(70{,}000)(1.03)^{-n} = 39{,}470.45 + 14{,}881.88$$

$$(1.03)^{-n} = 54{,}352.33 / 70{,}000$$

$$(1.03)^{-n} = 0.776462$$

Solución por logaritmos

$$-n \log.\ (1.03) = \log.\ (0.776462)$$
$$-n = \log.\ (0.776462) \ / \ \log.\ (1.03)$$

$$\log.\ (0.776462) = -0.109880 \qquad \log.\ (1.03) = 0.012837$$

$$-n = -0.109880 / 0.012837$$

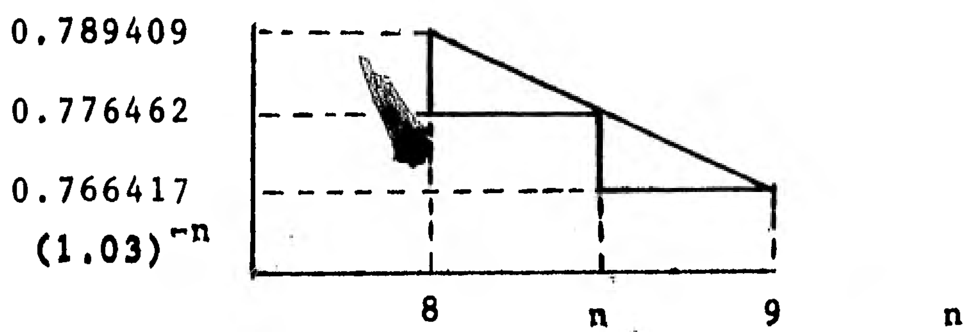
$$-n = -8.559632$$

$$n = 8.559632$$

convirtiendo $\underline{n}$ a años comerciales, 8 años 6 meses 21 días.

Solución por interpolación

8	0.789409			n	0.776462
9	0.766417			9	0.766417
-1 :	0.022992	:	:	n-9 :	0.010045



Se establece la siguiente relación

$$\frac{\quad - 1}{0.022992} = \frac{n - 9}{0.010045}$$

$$\frac{-0.010045}{0.022992} = n - 9$$

$$-0.436891 = n - 9$$

$$8.563109 = n$$

convirtiendo n a años comerciales, 8 años 6 meses 23-días.

CAPITULO III.

ANUALIDADES.

Una anualidad se define como una serie de pagos a intervalos iguales, como ejemplos de anualidades se tienen: las pólizas de seguros, los dividendos sobre acciones, las letras de una deuda (el pago a plazos de una deuda), los sueldos, etc.

Me permito hacer dos pequeñas aclaraciones sobre las anualidades:

a) la palabra "anualidad" no significa pagos anuales sino pagos periódicos.

b) la palabra "pago" debe ser entendida en sentido amplio, o sea, desembolsos para pagar una deuda o para hacer una inversión.

En las operaciones con anualidades es empleada una terminología especial, la cual a continuación se detalla:

Intervalo de pago.-es el tiempo que transcurre entre cada pago de la anualidad.

Plazo de la anualidad.-es el tiempo existente entre el inicio del primer intervalo de pago y el final del último intervalo de pago.

Renta.-el valor de cada pago periódico

Tasa de interés de una anualidad.-el tipo de interés fijado, puede ser nominal o efectivo.

3.1 Clasificación de las anualidades.

Existen varios criterios de clasificación de los diversos tipos de anualidades, entre los principales se cuentan:

1) Si el período de pago y el período de capitalización son iguales, la anualidad se denomina "simple", en caso contrario la anualidad es llamada "general".

2) Si la fecha inicial y terminal de la anualidad se conocen, la anualidad será "cierta", si las fechas inicial y/o terminal de la anualidad dependen de un evento que se preve pero no se puede fijar su fecha de realización, la anualidad se llama "contingente" o "eventual".

3) Si el pago de la renta se realiza al principio de cada período, nos encontramos ante una anualidad "anticipada"; si el pago de la renta se efectúa al final de cada período, la anualidad se llamará "ordinaria" o "vencida".

4) Las anualidades "finitas" son aquellas en las que el número de los pagos de la anualidad es finito (que tienen un último pago), en caso contrario se denominan "infinitas" o "perpetuidades".

5) Existen anualidades que su plazo tiene inicio después de transcurrido un intervalo de aplazamiento (tiempo entre la fecha actual y el primer período de-

pago), este tipo de anualidades son llamadas "<u>diferidas</u>".

Tomando como base los criterios anteriores, las anualidades pueden ser clasificadas en la forma siguiente:

- Anualidades
  - Simples *
    - Ciertas
      - Ordinarias
        - Finitas
        - Infinitas
      - Anticipadas
        - Finitas
        - Infinitas
    - Contingentes
      - Ordinarias
        - Finitas
        - Infinitas
      - Anticipadas
        - Finitas
        - Infinitas

* La clasificación de las anualidades generales es idéntica.

Las anualidades más comunes en las operaciones financieras son las anualidades simples ciertas, en lo sucesivo cuando se hable de una "anualidad" se entenderá que es una anualidad simple cierta.

Para el planteamiento de problemas de anualidades se emplea la siguiente simbología.

R = Renta o pago periódico de una anualidad.

i = tasa efectiva de interés por período de capitalización.

j = tasa nominal de interés.

m = número de capitalizaciones o períodos de capitalización en el año.

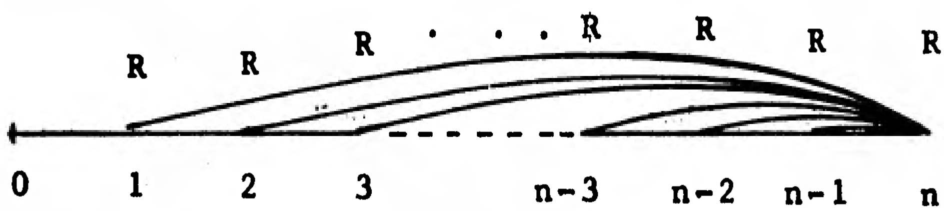
n = lapso de la anualidad expresada en años.

S = monto de una anualidad.

A = valor actual o presente de una anualidad.

3.2 Monto y valor actual de las anualidades simples ciertas ordinaria.

En el cálculo del monto de una anualidad se tiene - que los pagos R que se efectúan al final de cada período ganan un cierto interés compuesto hasta la fecha final; lo anterior puede ser graficado en un diagrama de tiempo-valor.



Se tiene que el primer pago acumula intereses por - el número de períodos de la anualidad menos uno (ver - gráfica) puesto que el pago fue efectuado al final del primer período, el segundo pago gana intereses durante n-2 períodos, y así hasta el pago final que no gana intereses ya que coincide con la fecha terminal.

Si se empieza por el último pago el monto será:

$$S=R+R(1+i)+R(1+i)^2+\ldots+R(1+i)^{n-2}+R(1+i)^{n-1}$$

factorizando R:

$$S=R\left(1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-1}\right)$$

los términos multiplicados por R forman una progresión geométrica puesto que cualquier número puede ser obtenido del anterior al multiplicar éste por un factor constante, el número de términos es n, la razón es (1+i) y el primer término es 1, si se aplica la fórmula de la suma de una progresión geométrica con razón mayor a la unidad.

$$\text{suma} = \frac{ar^n - a}{r - 1}$$

$a = 1 =$ primer término $\qquad r = (1 + i) =$ razón

sustituyendo:

$$\text{suma} = \frac{1\,(1 + i)^n - 1}{(1 + i) - 1} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

si se reemplaza el valor de la suma de la progresión en el cálculo del monto de la anualidad, se obtiene:

$$S = R \left(\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right) \qquad (3.1$$

$\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$ se expresa con el símbolo $S_{\overline{n|}\,i}$ que se lee "S de n a la i" y sus valores pueden ser localizados en tablas financieras, en las que normalmente se representa la tasa de interés en tanto por uno: sustituyendo en la fórmula anterior el símbolo $S_{\overline{n|}\,i}$:

$$S = R \quad S_{\overline{n|}\,i} \qquad (3.1a$$

El valor $\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$ también puede ser calculado por logaritmos.

Si se determina $(1 + i)^n$ por logaritmos y al resultado se le obtiene su antilogaritmo, entonces podemos realizar el cociente normalmente, al final tendríamos:

$$\frac{\text{ant. log. } (n \text{ log. } (1 + i)) - 1}{i} \qquad (3.1b$$

P.e. Calcular el monto de una anualidad de \$15,000 bimestrales durante 5 años, al 9% convertible bimestral mente.

$R = 15,000$ $\quad j = .09$ $\quad n = 5$ $\quad m = 6$ $\quad i = j/m = .09/6 = .015$

aplicando la fórmula 3.1a. $S = R\ s_{\overline{n|}i}$

se sustituyen valores $S = 15,000\ s_{\overline{5(6)|}.09/6}$

$S = 15,000\ s_{\overline{30|}.015}$

se busca en tablas el valor de $s_{\overline{30|}.015}$

$S = 15,000\ (37.53868)$

$S = 563,080.20$

El monto de la anualidad será de \$563,080.20 .

Solución por logaritmos

$$S = R\left[\frac{\text{ant.log. }(n \text{ log. }(1+i))) - 1}{i}\right]$$

$n = (5)(6) = 30$ $\qquad i = j/m = .09/6 = 0.015$

$$S = 15,000\left[\frac{\text{ant. log. }(30 \text{ log.}(1.015))) - 1}{0.015}\right]$$

$\text{log. }(1.015) = .006466$ $\qquad 30 \text{ log.}(1.015) = .193981$

$$S = 15,000\left[\frac{(\text{ant.log.}(.193981)) - 1}{0.015}\right]$$

$\text{ant. log. }(.193981) = 1.563079$

$$S = 15,000\left(\frac{1.563079 - 1}{0.015}\right) = 15,000\left(\frac{.563079}{0.015}\right)$$

$S = 15,000\ (37.5366)$

$S = 563,079.00$

Cuando se emplean tablas financieras para determinar el monto de una anualidad se encuentra el pro blema de que las tablas financieras no consideran los- valores de $S_{\overline{n}|\,i}$ para $\underline{n}$ mayores de 100, esto puede ser salvado si se emplea el siguiente recurso:

$$S_{\overline{n}|\,i} = S_{\overline{h+k}|\,i} = \frac{(1+i)^{h+k}-1}{i} \qquad \text{con } n= h+k$$

si se suma y se resta $(1+i)^h$ en el numerador la igualdad no se altera puesto que $(1+i)^h - (1+i)^h = 0$

$$S_{\overline{h+k}|\,i} = \frac{(1+i)^{h+k}-(1+i)^h + (1+i)^h - 1}{i}$$

$$S_{\overline{h+k}|\,i} = \frac{(1+i)^{h+k}-(1+i)^h}{i} + \frac{(1+i)^h - 1}{i}$$

se factoriza el primer término:

$$S_{\overline{n+k}|\,i} = (1+i)^h \left(\frac{(1+i)^k -1}{i}\right) + \frac{(1+i)^h - 1}{i}$$

simplificando:

$$S_{\overline{h+k}|\,i} = (1+i)^h \quad S_{\overline{k}|\,i} + S_{\overline{h}|\,i}$$

entonces:

$$S_{\overline{h+k}|\,i} = S_{\overline{h}|\,i} + (1+i)^h \quad S_{\overline{k}|\,i} \qquad (3.1c$$

P.e. Una persona deposita en una cuenta de inversión - \$20,000.00 al final de cada mes. Si se considera una- tasa de interés del 24% anual convertible mensualmente ¿Cuál será el saldo de la cuenta al final del décimo - año?

R= 20,000 $\quad$ j= .24 $\quad$ n=10 $\quad$ m= 12 $\quad$ i= j/m= .24/12 =.02

$$S = R \quad S_{\overline{nm}|\,i}$$

$$S = 20,000 \quad S_{\overline{10(12)}|\,.02}$$

$$S = 20,000 \quad S_{\overline{120}|\,.02}$$

como no se encuentra en tablas el valor de $S_{\overline{120|}\,.02}$ entonces:

$$S_{\overline{120|}\,.02} = S_{\overline{70+50|}\,.02} = S_{\overline{70|}\,.02} + (1.02)^{70}\, S_{\overline{50|}\,.02}$$

$$S = 20{,}000\left(S_{\overline{70|}\,.02} + (1.02)^{70}\quad S_{\overline{50|}\,.02}\right)$$

se buscan en tablas los valores

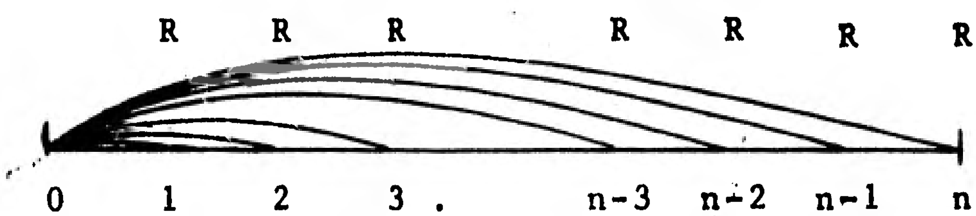
$$S = 20{,}000\ (149.97791 + 3.999558\ (84.5794))$$

$$S = 20{,}000\ (149.97791 + 338.280216)$$

$$S = 20{,}000\ (448.258126)$$

$$S = 8{,}965{,}162.52$$

El valor actual o presente de una anualidad es la - suma de los valores presentes de cada pago, en una grá fica de tiempo-valor se representa el valor presente de una anualidad en la forma siguiente:



con lo que tendríamos por similitud con el monto

$$A = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} +\ldots + R(1+i)^{-(n-1)} + R(1+i)^{-(n)}$$

factorizando R:

$$A = R\left((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} +\ldots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}\right)$$

los términos que multiplica R, forman una progresión - geométrica de n términos con razón $(1+i)^{-1}$ y primer -- término $(1+i)^{-1}$, aplicando la fórmula de la suma de -- una progresión geométrica con razón menor a la unidad, se tiene:

$$\text{suma} = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

a= primer término = $(1 + i)^{-1}$ r= razón = $(1 + i)^{-1}$

sustituyendo $\text{suma} = \dfrac{(1+i)^1 - (1+i)^{-1}\,(1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}}$

multiplicando numerador y denominador por (1+i) la --- igualdad se corvierte en:

$$\text{suma} = \frac{(1+i)}{(1+i)}\left[\frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-1}\,(1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}}\right]$$

como $(1+i)\,(1+i)^{-1} = 1$, entonces

$$\text{suma} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1 + i) - 1}$$

$$\text{suma} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

sustituyendo el valor de la suma de la progresión en - el cálculo del valor presente de la anualidad

$$A = R\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}\right] \qquad (3.2$$

$\dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ se denota con el símbolo $a_{\overline{n|}i}$ que se lee "A de n al i", sus valores pueden obtenerse de tablas- financieras y la tasa de interés se expresa en tanto - por uno; si se sustituye en la fórmula 3.2 el símbolo - $a_{\overline{n|}i}$:

$$A = R\ a_{\overline{n|}i} \qquad (3.2a$$

El valor de $\dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ también puede ser obtenido por logaritmos; se obtiene el logaritmo de $(1+i)^{-n}$ y -

al resultado se le calcula su antilogaritmo, con lo - anterior se puede efectuar el cociente, de modo que - tendríamos:

$$\frac{1 - (\text{ant. log. } (-n \text{ log. } (1+i)))}{i} \qquad (3.2b$$

P.e. Determina el valor presente del ejemplo empleado en el monto de una anualidad. Ver página 58.

R= 15,000 j=.09 n=5 m=6 i= j/m =.09/6 =0.015

Aplicando la fórmula 3.2a $A = R\ a_{\overline{n}|}\, i$

$$A = 15,000\ a_{\overline{(5)(6)}|}\ .09/6$$

$$A = 15,000\ a_{\overline{30}|}\ .015$$

se busca en tablas el valor de $a_{\overline{30}|}\ .015$

$$A = 15,000\ (24.01584)$$

$$A = 360,237.66$$

El valor presente de la anualidad es $360,237.66

Solución por logaritmos

$$A = R \left[\frac{1 - (\text{ant. log.}(-n \text{ log. } (1\ i)))}{i}\right]$$

$$A = 15,000 \left[\frac{1 - (\text{ant.log.}(-30 \text{ log.}(1\quad .09/6)))}{.09/6}\right]$$

$$A = 15,000 \left[\frac{1 - (\text{ant. log.}(-30 \text{ log.}(1.015)))}{0.015}\right]$$

log.(1.015) =0.006466 $\qquad$ - 30 log.(1.015) = $\bar{0}$.193981

$$A = 15,000 \left[\frac{1 - (\text{ant.log. } (\bar{0}.193981))}{0.015}\right]$$

ant. log. ($\bar{0}$.193981) =0.639763

$$A = 15,000 \left(\frac{1 - 0.639763}{0.015}\right)$$

$$A = 15{,}000 \left(\frac{0.360237}{.015}\right)$$

$$A = 15{,}000\ (24.0158)$$

$$A = 360{,}237.00$$

Cuando se desea calcular el valor presente de una - anualidad con un número de períodos "grande", existe el- problema de que las tablas financieras no contienen -- los valores de $a_{\overline{n}|\,i}$ para n mayor de 100; para salvar este obstáculo se emplea el siguiente recurso.

$$a_{\overline{n}|\,i} = a_{\overline{h+k}|\,i} = \frac{1 - (1+i)^{-(h+k)}}{i} \quad \text{con } n = h+k$$

sumando y restando $(1+i)^{-h}$ en el numerador

(la ecuación no se altera puesto que $(1+i)^{-h} - (1+i)^{-h} = 0$)

$$a_{\overline{h+k}|\,i} = \frac{1-(1+i)^{-h}+(1+i)^{-h}-(1+i)^{-(h+k)}}{i}$$

$$a_{\overline{h+k}|\,i} = \frac{1-(1+i)^{-h}}{i} + \frac{(1+i)^{-h} - (1+i)^{-(h+k)}}{i}$$

se factoriza el segundo término:

$$a_{\overline{h+k}|\,i} = \frac{1-(1+i)^{-h}}{i} + (1+i)^{-h}\left(\frac{1-(1+i)^{-k}}{i}\right)$$

simplificando:

$$a_{\overline{h+k}|\,i} = a_{\overline{h}|\,i} + (1+i)^{-h}\ a_{\overline{k}|\,i} \qquad (3.2c$$

P.e. ¿Cuál será el valor de contado de una casa adquirida mediante pagos mensuales de \$15,000.00 durante 10 años, si se considera una tasa de interés del 18% anual convertible mensualmente?

R = 15,000 j=.18 n=10 m= 12 i=j/m = .18/12= .015

$$A = R \; a_{\overline{nm|}\, i}$$

$$A = 15{,}000 \; a_{\overline{10(12)|}\ .15}$$

$$A = 15{,}000 \; a_{\overline{120|}.015}$$

el valor de $a_{\overline{120|}.015}$ no se encuentra en tablas, entonces,utilizando la fórmula (3.2c:

$$a_{\overline{120|}.015} = a_{\overline{60+60|}\ .015} =$$

$$a_{\overline{60|}.015} + (.1.015)^{-60} \; a_{\overline{60|}\ .015}$$

$$A = 15{,}000 \left(a_{\overline{60|}.015} + (1.015)^{-60} \; a_{\overline{60|}.015}\right)$$

Se buscan en tablas los valores

$$A = 15{,}000 \; (39.3827 + 0.409296 \; (39.28027))$$

$$A = 15{,}000 \; (39.38027 + 16.118187)$$

$$A = 15{,}000 \; (55.498457)$$

$$A = 832{,}476.85$$

El valor de contado de la casa es de \$832,476.85

3.3 Renta de una anualidad simple cierta ordinaria.

Dentro del cálculo de las anualidades la operación más común es conocer el importe de los pagos periódicos con los cuales se logra un cierto resultado ya conocido (monto o valor presente de la anualidad).

Ejemplos típicos de ésta operación se encuentran -- cuando se desea saber el valor de los pagos iguales -- que debemos hacer para cancelar una obligación ó que - cantidad se debe abonar periódicamente en un fondo de- inversión para poder contar con un monto determinado.

3.3.1 Cálculo de la renta cuando se conoce el monto

de una anualidad.

De la fórmula 3.1a sabemos:

$$S = R\, S_{\overline{n|}\, i}$$

Despejando: $\dfrac{S}{S_{\overline{n|}\, i}} = R$

$$S \left[\frac{1}{S_{\overline{n|}\, i}}\right] = R$$

El símbolo $\dfrac{1}{S_{\overline{n|}\, i}}$ se llama "factor del fondo de amortización" y significa el monto de las rentas iguales a la unidad (un peso) después de n pagos a la tasa i por período de pago; sus valores se pueden encontrar en tablas financieras, ó por logaritmos en la forma siguiente:

$$S = R \left(\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right) \qquad (3.1$$

$$S \left(\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right) = R$$

para determinar el valor de $\dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$ se procede de -- forma similar a lo descrito en la sección 3.2

$$S \left[\frac{i}{(\text{ant.log.}(n \log.\ (1+i))) - 1}\right] = R \qquad (3.3a$$

P.e. Determinar el importe de los depósitos mensuales- que se tienen que hacer para poder disponer de $200,000 dentro de 2 años, suponiendo que el Banco ofrece el -- 24% de interés anual convertible mensualmente.

$S = 200{,}000 \quad j = .24 \quad m = 12 \quad i = j/m = .24/12 = .02$

aplicando la fórmula 3.3

$$R = S \left[\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} \right]$$

$$R = 200{,}000 \quad \frac{1}{s_{\overline{2(12)}|.24/12}}$$

$$R = 200{,}000 \quad \frac{1}{s_{\overline{24}|.02}}$$

se busca en tablas el valor de $\frac{1}{s_{\overline{24}|.02}}$

$$R = 200{,}000 \quad (.032871)$$

$$R = 6{,}574{,}20$$

Solución por logaritmos con la fórmula 3.3a

$$R = S \left(\frac{i}{(\text{ant. log. } (n \text{ log. } (1 + i))) - 1} \right)$$

$$R = 200{,}000 \left(\frac{.02}{(\text{ant. log. } (24 \text{ log. } (1.02))) - 1} \right)$$

log. (1.02) = 0.008600 24 log. (1.02) = 0.2064

ant. log. (0.2064) = 1.608422

se sustituye en la fórmula el valor del antilogaritmo

$$R = 200{,}000 \left(\frac{.02}{1.608422 - 1} \right) = 200{,}000 \left(\frac{.02}{0.608422} \right)$$

$$R = 200{,}000 \ (0.032872)$$

$$R = 6{,}574.40$$

3.3.2 Cálculo de la renta cuando se conoce el valor presente de una anualidad.

Cuando se dedujo el valor presente de una anualidad se obtuvo la fórmula 3.2a

$$A = R\, a_{\overline{n}|i}$$

despejando: $$A\left[\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}\right] = R \qquad (3.4$$

El símbolo $\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$ se conoce como "factor de amortización" que es el valor presente de las rentas iguales a la unidad (un peso) después de n pagos a la tasa i por período de pago; sus valores se encuentran en tablas financieras, o pueden ser obtenidos por logaritmos.

$$A = R\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \qquad (3.2$$

$$\frac{A\,i}{1-(1+i)^{-n}} = R$$

$$A\left(\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right) = R$$

el valor $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ puede ser determinado siguiendo los pasos enunciados en la sección 3.2, con lo cual llegaríamos a:

$$A\left(\frac{i}{1-(\text{ant. log. }(-n\text{ log. }(1+i)))}\right) = R \qquad (3.4a$$

P.e. Una persona adquiere un inmueble con valor de contado de \$500,000 que acuerda pagarlos en un lapso de -

15 años, mediante abonos semestrales; si se le carga una tasa del 14% anual capitalizable semestralmente - ¿Cuál será el importe de los pagos?

$A = 500{,}000 \qquad j = .14 \qquad m = 2 \qquad n = 15$

Solución con la fórmula 3.4

$$R = A \frac{1}{a_{\overline{n|}i}}$$

$$R = 500{,}000 \frac{1}{a_{\overline{15(2)|}.14/2}}$$

$$R = 500{,}000 \frac{1}{a_{\overline{30|}.07}}$$

se busca en tablas el valor de $S_{\overline{30|}.07}$

$R = 500{,}000\ (0.080586)$

$R = 40{,}293.00$

Solución por logaritmos

$$R = A \left(\frac{i}{1 - (\text{ant.log.}\ (-n \log.\ (1 + i)))} \right)$$

se sustituye por los valores

$$R = 500{,}000 \left(\frac{.07}{1 - (\text{ant. log.}\ (-30 \log.\ (1.07)))} \right)$$

$\log.\ (1.07) = 0.029384 \qquad -30 \log.\ (1.07) = \bar{0}.88152$

$\text{ant. log.}\ (\bar{0}.88152) = .131365$

sustituyendo en la fórmula el valor de ant. log. (-30 log. 1.07)

$$R = 500{,}000 \left(\frac{.07}{1 - .131365} \right) = 500{,}000 \left(\frac{.07}{.868635} \right)$$

$R = 500{,}000\ (0.080586)$

$R = 40{,}293.00$

Los abonos semestrales serán de la cantidad de --
$40,293.00.

Nota: En las diversas tablas financieras se incluye sólo el "factor de fondo de amortización" ó en su caso el "factor de amortización", debido a que:

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}i}} = \frac{1}{s_{\overline{n|}i}} + i$$

desarrollando el segundo miembro de la igualdad:

$$\frac{1}{s_{\overline{n|}i}} + i = \frac{i}{(1+i)^n-1} + i = \frac{i+i\ ((1+i)^n - 1)}{(1+i)^n - 1} =$$

$$= \frac{\cancel{i} + i\ (1+i)^n - \cancel{i}}{(1+i)^n - 1} = \frac{i\ (1+i)^n}{(1+i)^n-1} =$$

se dividen numerador y denominador entre $(1 + i)^n$:

$$= \frac{\cancel{(1+i)^n}}{\cancel{(1+i)^n}} \left[\frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}} \right]$$

como $\frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$, entonces $= \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$

Este último es el factor de amortización, entonces, en las tablas financieras en que aparecen los valores de $\frac{1}{s_{\overline{n|}i}}$ para obtener $\frac{1}{a_{\overline{n|}i}}$, al valor de $\frac{1}{s_{\overline{n|}i}}$ se le suma "i" expresada en tanto por uno; y en las tablas financieras que contienen $\frac{1}{a_{\overline{n|}i}}$ se le debe restar "i" expresada en tanto por uno para determinar el valor de $\frac{1}{s_{\overline{n|}i}}$.

3.4 Cálculo del plazo y de la tasa de interés de una anualidad simple cierta ordinaria.

3.4.1 Plazo de una anualidad simple cierta ordinaria.

Los procedimientos básicos para el cálculo de los períodos de una anualidad son: interpolación de los valores en tablas y logaritmos.

Determinación del número de períodos por logaritmos:

$$S = R \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right)$$

$$S\ i = R \quad ((1+i)^n - 1)$$

$$S\ i = R \quad (1+i)^n - R$$

$$S\ i + R = R\ (1+i)^n$$

$$\frac{S\ i + R}{R} = (1+i)^n$$

$$\log. \left(\frac{S\ i + R}{R} \right) = n \log. (1+i)$$

$$\frac{\log. \left(\frac{S\ i + R}{R} \right)}{\log. (1+i)} = n \qquad (3.5$$

La solución por interpolación se detalla en el ejemplo númerico.

P.e. ¿Cuántos pagos de \$2,500.00 se deberán efectuar para acumular \$30,000.00 si el dinero gana interés del 18% anual capitalizable bimestralmente?

$S = 30,000 \quad R=2,500 \quad j=.18 \quad m= 6 \quad i=j/m=.18/6=.03$

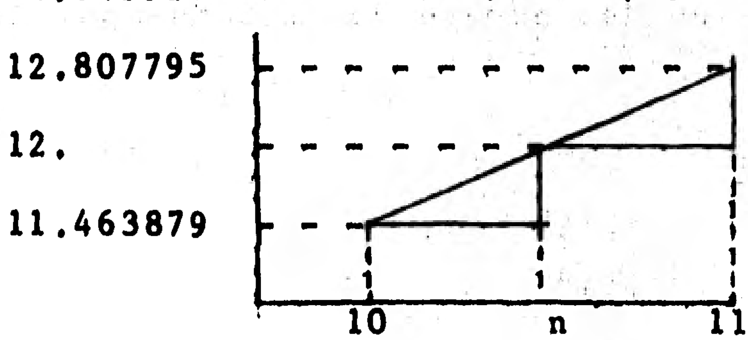
$S = R \quad S_{\overline{n|}i}$

$$\frac{S}{R} = S_{\overline{n|}\,i} \qquad \text{sustituyendo por sus valores}$$

$$S_{\overline{n|}\,.03} = 30{,}000/2{,}500 = 12$$

Se busca en las tablas los valores de $S_{\overline{n|}\,.03}$ y se tiene:

12.807795	11		12.	n
11.463879	10		11.463879	10
1.343916 :	1 :	:	0.536121 :	n-10



con lo cual se puede obtener la siguiente relación:

$$\frac{n - 10}{0.536121} = \frac{1}{1.343919}$$

$$n - 10 = \frac{0.536121}{1.343919}$$

$$n - 10 = 0.398924$$

$$n = 0.398924 + 10$$

$$n = 10.398924$$

Solución por logaritmos, fórmula 3.5

$$\frac{\log.\left(\dfrac{S\ i + R}{R}\right)}{\log.\ (1+i)} = n$$

$$\text{sustituyendo}\quad \frac{\log.\left(\dfrac{30{,}000\ (.03) + 2{,}500}{2{,}500}\right)}{\log.\ (1.03)} = n$$

$$\frac{\log.\left(\frac{3,400}{2,500}\right)}{\log.\ (1.03)} = n$$

$$\frac{\log.\ (1.36)}{\log.\ (1.03)} = n$$

$\log.\ (1.36) = .133538$ $\log.\ (1.03) = .012837$

$$\frac{.133538}{.012837} = n$$

$$n = 10.402586$$

Evidentemente no se pueden hacer 10.40.. pagos y - para solucionar éste problema se tienen las siguien-- tes opciones:

a) efectuar pagos iguales por el número de "n" enteros y un último pago un período después con el fin- de cancelar el saldo; en el caso del ejemplo tenemos- la ecuación siguiente:

$$30,000 = 2,500\ S_{\overline{10|}.03}\ (1 + .03) + X$$

se buscan los valores en tablas

$$30,000 = 2,500\ (11.463879)(1.03) + X$$

$$30,000 = 29,519.49+X$$

$$30,000 - 29,519.49 = X$$

$$X = 480.51$$

Nótese que el monto de la anualidad es capitaliza do al siguiente período.

b) realizar pagos iguales por el número de "n" enteros pero aumentando al último pago el importe del - saldo.

$$30{,}000 = 2{,}500 \quad s_{\overline{10|}.03} + X$$

obtenemos el valor en las tablas

$$30{,}000 = 2{,}500\ (11.463879) + X$$

$$30{,}000 = 28{,}659.70 + X$$

$$30{,}000 - 28{,}659.70 = X$$

$$X = 1{,}340.30$$

El importe del último pago será:

$$2{,}500 + 1{,}340.30 = 3{,}840.30$$

3.4.2 Tasa de interés de una anualidad simple cierta ordinaria.

Para el cálculo de la tasa de interés de las anualidades el método más socorrido es el de interpolación de los valores de las tablas financieras.

P.e. Con el objeto de reunir \$90,000 dentro de un año se hacen depósitos de \$8,000 en un Banco; determine la tasa efectiva de interés por período que otorga el Banco. Supóngase capitalización bimestral.

$S = 90{,}000 \qquad R = 8{,}000 \qquad m = 6 \qquad n = 1$

$$S = R\ s_{\overline{mn|}\, i}$$

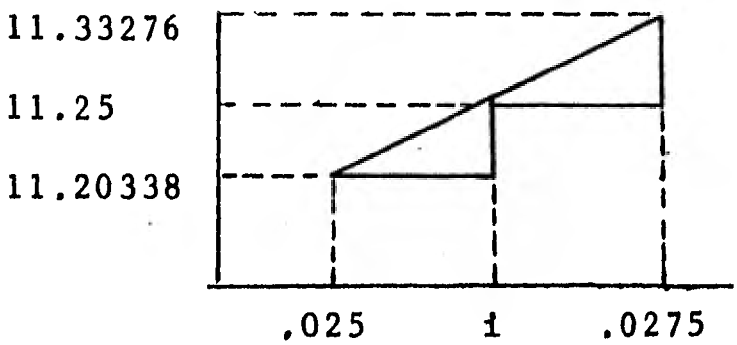
$$\frac{S}{R} = s_{\overline{mn|}\, i}$$

$$\frac{90{,}000}{8{,}000} = s_{\overline{6|}\, i}$$

$$11.25 = s_{\overline{6|}\, i}$$

Por inspección en las tablas financieras con valores de $S_{\overline{n}|i}$ se tiene:

11.33276	.0275	11.25	i
11.20338	.025	11.20338	.025
0.12938 :	0.0025 :	: 0.04662 :	i-.025



Con lo cual se obtiene la relación siguiente:

$$\frac{i - .025}{.04662} = \frac{0.0025}{.12938}$$

$$i - .025 = (.0025)(.04662)/\ .12938$$

$$i = \frac{(.0025)(.04662)}{.12938} + .025$$

$$i = \frac{.00011655}{.12938} + .025$$

$$i = .0009008 + .025$$

$$i = .0259008 = 2.59008\ \%$$

CAPITULO IV.

AMORTIZACION Y FONDO DE AMORTIZACION.

4.1 Cálculo de los valores de las amortizaciones.

Cuando hay necesidad de solicitar un préstamo, normalmente se pacta cubrir la deuda a plazos, en los -- cuales se entrega una cantidad que contiene una parte de capital y una parte de intereses, de tal suerte -- que al término de un plazo previamente establecido la deuda se salda, éste método se denomina "amortización" (del latín mors, mortis-muerte) ya que es la "muerte" de una deuda.

Como se ve, la amortización es un caso de anualidad y los problemas de determinación de: pago periódico, tasa de interés, plazo o la deuda, son iguales a- los detallados en el capítulo anterior, sin embargo - (y principalmente para la elaboración de los estados- financieros presupuestados) se necesita tener un registro que nos muestre período a período la parte del pago que se aplica a los intereses, la parte que se - destina al abono del capital y el saldo insoluto de - la deuda en una fecha determinada, a este registro se le denomina "tabla de amortización".

P.e. Se obtiene un préstamo de \$50,000.00 que va a -- ser amortizado por medio de 5 abonos iguales semestrales, si se le carga el 8% anual convertible semestralmente.

¿Cuál será el valor de los pagos iguales? Construir - la tabla de amortización.

$A = 50,000 \quad m= 2 \quad n= 2.5 \quad i=j/m=.08/2= .04$

Aplicando la fórmula 3.4

$$R = A \frac{1}{a_{\overline{mn|}i}}$$

sustituyendo los valores:

$$R = 50,000 \frac{1}{a_{\overline{2(2.5)|}.04}}$$

$$R = 50,000 \frac{1}{a_{\overline{5|}.04}}$$

se busca el valor de $\frac{1}{a_{\overline{5|}.04}}$ en las tablas financieras

$$R = 50,000\ (.2246271) = 11,231.36$$

Tabla de amortización

período	pago	intereses en el pago	capital en el pago	saldo insoluto
0				50,000.00
1	11,231.36	2,000.00	9,231.36	40,768.64
2	11,231.36	1,630.75	9,600.61	31,168.03
3	11,231.36	1,246.72	9,984.64	21,183.39
4	11,231.36	847.34	10,384.02	10,799.37
5	11,231.36	431.97	10,799.37	0.02
	56,156.80	6,156.78	50,000.00	

Los intereses se calculan aplicando la tasa "i" a - el saldo insoluto del período anterior.

La suma de los pagos iguales es igual a la suma de- los intereses contenidos en el pago más la suma del - capital contenido en el pago; normalmente aparece una- pequeña diferencia en el saldo, lo cual es efecto del-redondeo matemático.

Para derivar la construcción de la tabla de amortización se considera que la deuda en el momento cero, es el importe de una renta unitaria (un peso) por el factor $a_{\overline{n|}i}$, un período después los intereses que hay que pagar son $i(a_{\overline{n|}i})$: recuérdese que $a_{\overline{n|}i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ (fórmula 3.2a)

entonces $i(a_{\overline{n|}i}) = i\left(\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) = 1-(1+i)^{-n}$

y como la renta fue considerada unitaria, la parte que se destina al pago del capital es:

$$1-i(a_{\overline{n|}i}) = 1-(1-(1+i)^{-n}) = 1-1+(1+i)^{-n} = (1+i)^{-n}$$

y en consecuencia el saldo insoluto del primer período será:

$$a_{\overline{n|}i} - (1+i)^{-n} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - (1+i)^{-n} = \frac{1-(1+i)^{-n}-i(1+i)^{-n}}{i}$$

$$= \frac{1-((1+i)^{-n}(1+i))}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i} = a_{\overline{n-1|}i}$$

Se utiliza el mismo razonamiento para los demás períodos, y la tabla es:

período	pago	intereses en el pago	capital en el pago	saldo insoluto
0				$a_{\overline{n|}i}$
1	1	$1-(1+i)^{-n}$	$(1+i)^{-n}$	$a_{\overline{n-1|}i}$
2	1	$1-(1+i)^{-n+1}$	$(1+i)^{-n+1}$	$a_{\overline{n-2|}i}$
3	1	$1-(1+i)^{-n+2}$	$(1+i)^{-n+2}$	$a_{\overline{n-3|}i}$
t	1	$1-(1+i)^{-n+(t-1)}$	$(1+i)^{-n+(t-1)}$	$a_{\overline{n-t|}i}$
n	1	$1-(1+i)^{-1}$	$(1+i)^{-1}$	$a_{\overline{0|}i} = 0$

Considérese a "t" como cualquier período.

Si se utiliza la tabla anterior se puede calcular en forma independiente las columnas del saldo insoluto y del capital contenido en el pago.

a) la columna del saldo insoluto se obtiene multiplicando el pago periódico por los valores de $a_{\overline{n-t|}\,i}$ que correspondan.

Utilizando el ejemplo numérico anterior se tiene:

período	pago	$a_{\overline{n-t|}\,i}$	saldo insoluto
t=0	11,231.36	$a_{\overline{5-0|}\,.04} = 4.45182$	50,000.00
t=1	11,231.36	$a_{\overline{5-1|}\,.04} = 3.62990$	40,768.71
t=2	11,231.36	$a_{\overline{5-2|}\,.04} = 2.77509$	31,168.03
t=3	11,231.36	$a_{\overline{5-3|}\,.04} = 1.88609$	21,183.36
t=4	11,231.36	$a_{\overline{5-4|}\,.04} = 0.96154$	10,799.40
t=5	11,231.36	$a_{\overline{5-5|}\,.04} = 0$	0.00

b) la columna del capital contenido en el pago se logra multiplicando el valor del pago por el factor - $(1 + i)^{-n+(t-1)}$ que corresponda. En el ejemplo tenemos:

período	pago	$(1+i)^{-n+(t-1)}$	capital contenido
t=0	0.00		0.00
t=1	11,231.36	$(1+.04)^{-5+(1-1)} = .821927$	9,231.36
t=2	11,231.36	$(1+.04)^{-5+(2-1)} = .854804$	9,600.61
t=3	11,231.36	$(1+.04)^{-5+(3-1)} = .888996$	9,984.63
t=4	11,231.36	$(1+.04)^{-5+(4-1)} = .924556$	10,384.02

t=5   11,231.36 $(1+.04)^{-5+(5-1)}$=.961538 10,799.38

En ocasiones solo se desea construir un renglón de la tabla, para lo cual se calcula el saldo insoluto del renglón y el capital contenido en el pago de ese renglón, y por diferencia obtenemos los intereses contenidos en el pago.

P.e. Si se quiere calcular el tercer renglón del ejemplo y se considera que se conoce el pago periódico y que ya fue determinado el saldo insoluto y el capital contenido en el pago por los ejercicios anteriores, los valores del renglón son:

período	pago	intereses en el pago	capital en el pago	saldo insoluto
3	11,231.36		9,984.63	21,183.36

los intereses contenidos en el pago es la diferencia entre el pago y el capital contenido en el pago

$$11,231.36 - 9,984.63 = 1,246.73$$

Un problema típico en el cálculo de las amortizaciones es conocer el saldo insoluto de la deuda al final de un período determinado antes de haber efectuado el pago correspondiente; nótese que el factor $a_{\overline{n-t|}\,i}$ nos señala el saldo insoluto al final de un período después de haber hecho el pago.

Para resolver éste problema, se calcula el saldo insoluto al final del período anterior, se obtienen los intereses sobre ese saldo y el saldo al final del período será la suma del saldo del período anterior más los intereses, en otras palabras, el saldo insolu to del período anterior se capitaliza durante un período.

P.e. Con los datos del ejemplo anterior, determinar el saldo insoluto al final del cuarto período antes de haber realizado el pago.

Se calcula el saldo insoluto del tercer período = 21,183.36, se obtienen los intereses del período ---- 21,183.36(.04)=847.33 y se suman a el saldo 21,183.36+ 847.33 = 22,030.69

4.2 Ventas a plazos.

Las ventas a plazos es una aplicación de la amortización de deudas, en éstos problemas se establece un - precio de contado y el saldo de la deuda debe amortizarse en pagos iguales periódicamente. La amortización puede ser en dos formas:

a) haciendo pagos periódicos iguales a partir del - final del primer período de pago, en tal caso -- los valores de obtienen en la forma descrita en la sección anterior.

b) se hace un pago inicial y el saldo insoluto se - amortiza periódicamente a partir del final del - primer período de pago, en éste caso la ecuación de valor que describe la operación es:

Precio de contado = Pago inicial + $R\, a_{\overline{n|}\, i}$

para efecto del cálculo de la renta se reduce el pago inicial al precio de contado ya que por esa cantidad - no se cobran intereses.

P.e. El Sr. López compró una casa en $750,000.00 pagan do de enganche $300,000 y el resto lo amortizará en dos años y medio mediante pagos semestrales iguales, la operación causará el 24% de interés anual convertible semestralmente.

Encuéntrese el valor del pago periódico y contrúyase la tabla de amortización correspondiente.

Precio de contado = 750,000 Pago inicial= 300,000

$n = 2.5$ $m=2$ $j= .24$ $i=j/m = .24/2 = .12$

Precio de contado = Pago inicial + $R\ a_{\overline{n|}i}$

sustituimos por los valores

$$750{,}000 = 300{,}000 + R\ a_{\overline{5|}.12}$$

$$750{,}000 - 300{,}000 = R\ a_{\overline{5|}.12}$$

se efectúa la resta y se busca el valor de $a_{\overline{5|}.12}$ en tablas:

$$450{,}000 = R\ (3.60478)$$

$$\frac{450{,}000}{3.60478} = R$$

$$R = 124{,}834.25$$

período	pago	intereses en el pago	capital en el pago	saldo insoluto
0				450,000.00
1	124,834.25	54,000.00	70,834.25	379,165.75
2	124,834.25	45,499.89	79,334.36	299,831.39
3	124,834.25	35,979.77	88,854.48	210,976.91
4	124,834.25	25,317.23	99,517.02	111,459.89
5	124,834.25	13,375.19	111,459.06	0.83
	624,171.25	174,172.08	449,999.17	

4.3 Derechos sobre un bien que se paga por cuotas.

Cuando se compra un bien y su pago se hace mediante abonos, se puede determinar en cualquier momento cual ha sido el capital que se ha amortizado y cual es el capital que aún queda por amortizar; lo que podemos escribir de la siguiente manera:

Precio de compra = capital amortizado + capital no amortizado

Si sabemos que el capital amortizado en una compra-venta se denomina "derechos del comprador" y al capital no amortizado (saldo insoluto) se le llama "derechos del vendedor", la ecuación anterior la podemos transformar en:

$$\text{Precio de compra} = \text{derechos del comprador} + \text{derechos del vendedor}$$

P.e. Determínese el derecho del comprador de la casa del ejemplo anterior (sección 4.2) después del segundo pago.

Como dato adicional se sabe que la renta es de $124,834.25

Precio de compra = Valor de contado - pago inicial

Precio de compra = 750,000 - 300,000 = 450,000

Precio de compra = derechos del comprador + derechos del vendedor

$$450{,}000 = \text{derechos del comprador} + R\ a_{\overline{n-t|}\,i}$$

$$450{,}000 = \text{derechos del comprador} + R\ a_{\overline{5-2|}\,.12}$$

$$450{,}000 = \text{derechos del comprador} + 124{,}834.25 \; a_{\overline{3|}.12}$$

se busca el valor de $a_{\overline{3|}.12}$ en tablas.

$$450{,}000 = \text{derechos del comprador} + 124{,}834.25\,(2.40183)$$

$$450{,}000 = \text{derechos del comprador} + 299{,}830.65$$

$$450{,}000 - 299{,}830.65 = \text{derechos del comprador}$$

$$\text{derechos del comprador} = 150{,}169.35$$

En ēste caso, los derechos del comprador se deben- incrementar con el pago inicial que se efectuó, entonces los derechos del comprador ascienden a $450,169.35

4.4 Cālculo de los valores de un fondo de amortización.

Un "fondo de amortización" es una serie de depósitos periódicos durante un cierto plazo en el cual se- genera un interés, de forma tal que al final del plazo se obtiene un monto predeterminado. Se le llama - fondo de amortización porque la idea original era reunir dinero para cubrir deudas a mediano y a largo plazo como: préstamos, emisión de obligaciones, pago de- pensiones, etc.; pero considero que se le debe denominar "Fondo de acumulación", puesto que lo que realmente se hace es reunir dinero y los problemas que lo involucran son de inversión.

P.e. Una persona que viaja al extranjero posee una -- propiedad que deja alquilada a una persona que se compromete a depositar la renta mensual de $7,500.00 en- una cuenta de inversión que gana el 2% mensual. - - -

¿A cuánto ascenderá el monto de la inversión al cabo de un año? Construir la tabla de acumulación.

$R = 7{,}500 \quad n = 1 \quad m = 12 \quad i = .02 \quad nm = 12$

$$S = R\, s_{\overline{nm|}\,i} \qquad \text{(fórmula 3.1a)}$$

sustituyendo por los valores

$$S = 7{,}500\ s_{\overline{12|}\,.02}$$

se busca el valor de $s_{\overline{12|}\,.02}$ en tablas

$$S = 7{,}500\ (13.41209)$$

$$S = 100{,}590.68$$

Tabla de acumulación

período	depósito	intereses	incremento al fondo	saldo del fondo
1	7,500.00	0.00	7,500.00	7,500.00
2	7,500.00	150.00	7,650.00	15,150.00
3	7,500.00	303.00	7,803.00	22,953.00
4	7,500.00	459.07	7,959.07	30,912.07
5	7,500.00	618.23	8,118.23	39,030.30
6	7,500.00	780.60	8,280.60	47,310.90
7	7,500.00	946.20	8,446.20	55,757.10
8	7,500.00	1,115.18	8,615.18	64,372.28
9	7,500.00	1,287.45	8,787.45	73,159.73
10	7,500.00	1,463.17	8,963.17	82,122.90
11	7,500.00	1,642.50	9,142.50	91,265.40
12	7,500.00	1,825.28	9,325.28	100,590.68

4.5 Cálculo de lo acumulado en el fondo y del saldo insoluto en cualquier fecha.

Para determinar los valores del fondo de acumulación en una fecha futura conocida emplearemos la si--

guiente tabla con una renta unitaria (un peso).

período	depósito	intereses	incremento al fondo	saldo del fondo
1	1	0	1	1
2	1	i	$1+i$	$1+(1+i)=s_{\overline{2}\rceil i}$ *
3	1	$i\, s_{\overline{2}\rceil i}$	$1+i\, s_{\overline{2}\rceil i}$	$s_{\overline{3}\rceil i}$ **
t	1	$i\, s_{\overline{t-1}\rceil i}$	$1+i\, s_{\overline{t-1}\rceil i}$	$s_{\overline{t}\rceil i}$

"t" puede ser cualquier período.

* $1+(1+i) = s_{\overline{2}\rceil i}$ recuérdese que en la sección 3.2- se vió que $s_{\overline{n}\rceil i}$ representa la suma de los valores futuros de una renta.

$$** \quad s_{\overline{2}\rceil i} + 1+i\, s_{\overline{2}\rceil i} = s_{\overline{2}\rceil i} + 1+\left(\frac{(1+i)^2 - 1}{\cancel{i}}\right)\cancel{i} =$$

$$= s_{\overline{2}\rceil i} + (1+i)^2 = s_{\overline{3}\rceil i}$$

P.e. Si se desea calcular el décimo renglón del ejemplo numérico anterior, tenemos:

período	depósito	intereses	incremento al fondo	saldo del fondo
10	1	$(.02)s_{\overline{10-1}\rceil .02}$	$1+(.02)s_{\overline{10-1}\rceil .02}$	$s_{\overline{10}\rceil .02}$

lo anterior se tiene que multiplicar por la renta de- \$7,500.00 para obtener los valores reales.

período	depósito	intereses	incremento
10	7,500	$7{,}500(.02)s_{\overline{9}\rceil .02}$	$7{,}500\left(1+(.02)s_{\overline{9}\rceil .02}\right)$

saldo del fondo $7{,}500\; s_{\overline{10}\rceil .02}$

se buscan los valores de $s_{\overline{9}\rceil .02}$ y de $s_{\overline{10}\rceil .02}$ en tablas:

período	depósito	intereses	incremento
10	7,500	7,500(.02)(9.75463)	7,500(1+.02(9.75463))

saldo del fondo 7,500 (10.94972)

al realizar las operaciones tenemos:

período	depósito	intereses	incremento	saldo del fondo
10	7,500	1,463.32	8,963.19	82,122.90

las diferencias que aparecen se deben al redondeo matemático.

Ahora bien, si se supone que se crea el fondo de amortización (fondo de acumulación) para poder liquidar una deuda que vence en una fecha futura conocida, se puede conocer el saldo insoluto de la deuda en una fecha determinada por la diferencia entre el valor de la deuda y el monto de lo acumulado a esa fecha.

Saldo insoluto = deuda - saldo acumulado

como se sabe que la fórmula para determinar el saldo acumulado en el fondo es $R\, s_{\overline{n|}\,i}$, se puede sustituir

Saldo insoluto = deuda - $R\, s_{\overline{n|}\,i}$

P.e. Se crea un fondo de amortización con el objeto de redimir una serie de obligaciones con valor de $500,000 y que vence en ocho años. Si se desea hallar el saldo insoluto de la deuda al finalizar el quinto año suponiendo una tasa de interés del 10% anual efectivo, en el fondo tendríamos:

$S = 500{,}000 \qquad n = 8 \qquad i = .1$

se procede a obtener la renta $S = R\, s_{\overline{n|}\,i}$

sustituyendo $500{,}000 = R\, s_{\overline{8|}\,.1}$

se obtiene en tablas el valor de $s_{\overline{8|}.1}$

$$500{,}000 = R\ (11.43589)$$

$$500{,}000 \ / \ 11.43589 = R$$

$$R = 43{,}722.00$$

Ahora se determina el saldo insoluto de la deuda - al finalizar el quinto año.

Saldo insoluto = deuda - R $s_{\overline{n|}i}$

R = 43,722.00 n = 5 i = .1 deuda = 500,000

se sustituye la fórmula por sus valores

Saldo insoluto = 500,000 - 43,722 $s_{\overline{5|}.1}$

se busca en tablas el valor de $s_{\overline{5|}.1}$

Saldo insoluto = 500,000 - 43,722 (6.1051)

Saldo insoluto = 500,000 - 266,927.18

Saldo insoluto = 233,072.82

CAPITULO V. BONOS.

En la actualidad algunas empresas que se ven en la necesidad de obtener un financiamiento emiten obligaciones al público en general, obligaciones que se pagarán en una fecha determinada (fecha de redención),- a una cantidad fija (valor de redención) y entregando intereses en períodos regulares **hasta la fecha de redención.**

Las características de ésta operación de crédito - se detallan en La Ley General de Títulos y Operaciones de Crédito, Título Primero, Capítulo V.

5.1 Precio de los bonos en una fecha de pago de interés o cupón.

Si un inversionista adquiere un bono (obligación - de una empresa) en una fecha en la cual se paguen intereses, tendrá derecho a recibir los intereses futuros y el valor de redención del bono en la fecha de - redención, entonces, el precio de compra del bono será el valor presente de los intereses periódicos más- el valor presente del valor de redención del bono.

Precio de compra del bono = valor presente de los intereses + valor presente del valor de - redención

P	Fr	Fr	Fr	Fr	Fr + VR
0	1	2	n-2	n-1	n

P = Precio de compra del bono

F = Valor nominal del bono (el valor impreso en el bono)

VR= Valor de redención del bono

r = Tasa de interés del bono por período de interés

i = Tasa de interés del inversionista por período de- interés.

n = Número de períodos de interés desde la fecha de - compra hasta la fecha de redención.

Nótese que los pagos Fr forman una anualidad cuyo- valor actual es $A= Fr\ a_{\overline{n}|i}$ y si se suma a esto el valor actual de VR a la tasa i (que es $VR(1+i)^{-n}$) se -- tiene:

$$P = Fr\ a_{\overline{n}|i} + VR(1+i)^{-n} \qquad (5.1$$

esta fórmula requiere el uso de dos tablas financie-- ras ($a_{\overline{n}|i}$ y $(1+i)^{-n}$), y con el objeto de convertirla en una fórmula que sólo utilice una tabla:

en la sección 3.2 se vió que

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

despejando $(1+i)^{-n}$: $i\ a_{\overline{n}|i} = 1 - (1+i)^{-n}$

$$i\ a_{\overline{n}|i} - 1 = - (1+i)^{-n}$$

dividiendo entre - 1: $1 - i\ a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-n}$

ahora sustituye éste valor en 5.1

$$P = Fr\ a_{\overline{n}|i} + VR\ (1 - i\ a_{\overline{n}|i})$$

$$P = Fr\ a_{\overline{n}|i} + VR - VR\ \ i\ a_{\overline{n}|i}$$

factorizando: $P = VR + (FR - VR\ i)\ a_{\overline{n}|i}$ (5.2

En ésta fórmula es necesario resaltar dos cosas:

a) un problema de notación que aparece en varios - textos de matemáticas financieras, se utiliza la literal "C" para denotar el valor de redención, por lo --

cual la anterior fórmula se modificaría a:

$P = C + (Fr - Ci)\, a_{\overline{n|}i}$, donde C puede ser confundida con el capital o valor presente de la operación.

b) se involucra la tasa de interés (i) que quiere ganar el comprador del bono, lo cual permite calcular el valor presente del bono a la tasa con la que él -- opera.

P.e. Determinar el precio de compra de un bono de -- $1,000.00 que paga un interés del 10% anual y es redimible a la par al final de 5 años.

a) si se desea un interés del 10% anual.

b) si se desea un interés del 15% anual.

a) VR= 1,000 F= 1,000 r=10% i=10% n= 5

$P = VR + (Fr - VR\,i)\, a_{\overline{n|}i}$

$P = 1,000 + (1,000(.10) - 1,000(.10))\, a_{\overline{5|}.1}$

se busca el valor de $a_{\overline{5|}.1}$ en tablas

$P = 1,000 + (100 - 100)(3.79079)$

$P = 1,000 + (0)(3.79079)$

$P = 1,000$

b) VR= 1,000 F= 1,000 r=10% i=15% n=5

$P = VR\,(Fr - VR\,i)\, a_{\overline{n|}i}$

$P = 1,000 + (1,000(.10) - 1,000(.15))\, a_{\overline{5|}.15}$

$P = 1,000 + (100 - 150)\,(3.35216)$

$P = 1,000 + (-50)\,(3.35216)$

$P = 1,000 - 167.61$

$P = 832.39$

5.2 Valor de un bono en libros.

El "valor en libros de un bono en una fecha determinada" es la cantidad invertida en el bono en esa fecha. El cambio de valor en libros se muestra en una tabla de inversión.

P.e. Tabla de inversióndel inciso a) de la sección anterior.

período	Valor en libros al principio	Intereses sobre la inversión (i)	Intereses cobrados (r)	Cambio del valor en libros	Valor en libros al final
1	1,000	100	100	0	1,000
2	1,000	100	100	0	1,000
3	1,000	100	100	0	1,000
4	1,000	100	100	0	1,000
5	1,000	100	100	0	1,000

Los intereses sobre la inversión es igual al valor en libros al principio del período por la tasa "i".

Los intereses cobrados es igual al valor nominal del bono por la tasa "r".

El cambio de valor en libros es igual a los intereses sobre la inversión menos los intereses cobrados.

P.e. Tabla de inversión del inciso b) de la sección anterior.

período	V.L. al principio	Int. s/la inversión	Intereses cobrados	Cambio del V.L.	V.L. al final
1	832.39	124.86	100.00	24.86	857.25
2	857.25	128.59	100.00	28.59	885.84
3	885.84	132.88	100.00	32.88	918.72
4	918.72	137.81	100.00	37.81	956.53
5	956.53	143.48	100.00	43.48	1,000.01

Se supone que el interés vencido que no se cobra en un período aumenta la inversión en el bono.

5.3 Cotización de los bonos en el mercado de valores.

La sección 5.1 trató el problema del precio que el comprador del bono tiene que proponer para ganar una cierta tasa de interés en la operación; pero es difícil que un bono pueda ser comprado a un precio requerido, ya que en la práctica los bonos son ofrecidos a un "valor de cotización" o "precio cotizado", que es un porcentaje del valor nominal (el término "por ciento" o % se omite), esto se había señalado como "valor en libros": el precio de compra comprenderá el valor de cotización más la fracción del interés ganado desde la fecha inmediata anterior de pago de intereses.- Esta operación se representa con la fórmula

$$P = VC + Fr\left(\frac{t}{n}\right) \qquad 4.3$$

en donde: VC= Valor de cotización

F= Valor nominal del bono

r= tasa de interés del bono por período de interés.

t= Número de días a partir de la última fecha anterior de pago de intereses.

n= Número de días entre dos fechas de pago de intereses.

P.e. Hallar el precio que tiene un bono de $1,500.00 el 15 de julio si está cotizado al 95 y la tasa de interés del bono es del 4% convertible semestralmente. Los intereses se pagan los días 31 de diciembre y 30 de junio de cada año.

VC= 1,500(.95)= 1,425 F= 1,500 r=.04/2 t=15 n=180

$$P = VC + Fr\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$P = 1,425 + 1,500(.02)(15/180)$$

$$P = 1,425 + 1,500(.02)(.083333)$$

$$P = 1,425 + 2.50$$

$$P = 1,427.50$$

5.4 Rendimiento de las inversiones en bonos.

En la práctica la tasa de rentabilidad se calcula usando unas tablas especiales que son difíciles de conseguir, razón por la cual se explicarán dos métodos sustitutos.

5.4.1 Método de promedios.

Se obtiene dividiendo el interés promedio producido por período entre el monto promedio en libros.

$$\text{Tasa promedio de rentabilidad por período} = \frac{\text{Interés promedio por período}}{\text{Monto promedio en libros}}$$

El interés promedio por período es; la suma de los intereses a recibir más la diferencia entre el valor de redención y el valor en libros, todo debe ser dividido entre "n". El monto promedio en libros es: el valor en libros en éste momento más el valor de redención, entre dos.

$$\text{Tasa promedio de rentabilidad por período} = \frac{\dfrac{F\ r\ n + (VR - VC)}{n}}{\dfrac{VC + VR}{2}}$$

en donde: F= Valor nominal del bono

r= Tasa de interés del bono por período de interés.

n= Número de períodos de interés

VR= Valor de redención

VC= Valor de cotización o valor en libros en el momento de la compra.

P.e. Calcular la tasa promedio de rentabilidad por período de un bono de $1,000.00 al 4% anual convertible trimestralmente que actualmente se cotiza al 95 y será redimido al 110 dentro de diecinueve años y medio.

$F = 1,000 \quad r = .04/4 = .01 \quad n = 19.5(4) = 78$

n= número de años x períodos de interés en el año.

$VR = 1,000(1.10) = 1,100 \quad VC = 1,000(95) = 950$

$$T.P.R.P. = \frac{\dfrac{Fr\ n + (VR - VC)}{n}}{\dfrac{VC + VR}{2}}$$

$$T.P.R.P. = \frac{\dfrac{1,000(.01)(78) + (1,100 - 950)}{78}}{\dfrac{950 + 1,100}{2}}$$

$$T.P.R.P. = \frac{\frac{780 + 150}{78}}{\frac{2,050}{2}} = \frac{\frac{930}{78}}{1,025}$$

$$T.P.R.P. = \frac{11.923076}{1.025} = .011632 = 1.1632\%$$

Si se desea calcular la tasa promedio de rentabilidad anual, sólo se multiplica la tasa promedio de rentabilidad por período por el número de períodos de interés en el año (m).

Tasa promedio de rentabilidad anual = T.P.R.P. X m

T.P.R.A. = .011632 X 4 = .046528 = 4.6528 %

5.4.2 Método de interpolación.

Este método utiliza la fórmula 5.2, que se valúa a dos tasas de interés, de tal forma que un precio sea menor y el otro mayor al precio cotizado y se hace -- una interpolación lineal entre las dos tasas.

Hay que señalar que éste método es más exacto que el de promedios, pero es inoperante porque es necesario efectuar varios cálculos hasta encontrar las tasas de interés que sirvan (las tasas se encuentran al tanteo).

P.e. Para resolver el ejemplo anterior empleando éste método, se calculará el precio de compra para rendimientos i_1 = 4.5% anual convertible trimestralmente e i_2 = 5% anual convertible trimestralmente.

$$P = VR + (Fr - VR\ i)\ a_{\overline{n}|\,i} \qquad (5.2$$

para i_1 =.045/4 = 0.01125

$$P = 1{,}100 + (1{,}000(.01) - 1{,}100(.01125))\ a_{\overline{78|}.01125}$$

$$P = 1{,}100 + (10 - 12.375)\ a_{\overline{78|}.01125}$$

se calcula el valor de $a_{\overline{78|}.01125}$

$$P = 1{,}100 + (-2.375)\ (51.745478)$$

$$P = 1{,}100 - 122.89 = 977.11$$

para $i_2 = .05/4 = .0125$

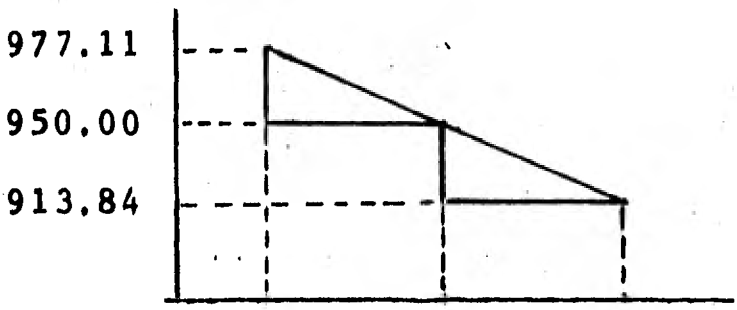
$$P = 1{,}100 + (1{,}000(.01) - 1{,}100(.0125))\ a_{\overline{78|}.0125}$$

$$P = 1{,}100 + (10 - 13.75)\ (49.641696)$$

$$P = 1{,}100 + (-3.75)\ (49.641696)$$

$$P = 1{,}100 - 186.16 = 913.84$$

Como se ve, el valor en libros para éstas tasas - son de \$913.84 y \$977.11, para encontrar la tasa co-- rrespondiente a un valor en libros de \$950.00 se in-- terpola linealmente.



977.11	.01125		950.00	X
913.84	.01250		913.84	.0125
63.27 :	.00125 :	:	36.16	:X-.0125

$$\frac{63.27}{-.00125} = \frac{36.16}{X-.0125}$$

$$63.27 : -.00125 :: 36.16 : X-.0125$$

$$X-.0125 = \frac{36.16\ (-.00125)}{63.27}$$

$$X = \frac{36.16\ (-.00125)}{63.27} + .0125$$

$$X = \frac{-.0452}{63.27} + .0125$$

$$X = -.000714 + .0125 = .011786 = 1.1786\%$$

que equivale a 4.7144% anual.

5.5 Bonos seriados, bonos de anualidad y bonos con fecha opcional de redención.

5.5.1 Bonos seriados.

Cuando una emisión de bonos va a ser redimida en plazos (con el objeto de que la compañía emisora no resienta el hecho de tener que cubrir un gran pasivo en una misma fecha) se dice que es una "emisión seriada de bonos".

Cuando se desea comprar bonos de una misma emisión pero de diferente plazo (serie), se obtiene el valor de cada serie y se suman para determinar el costo total.

P.e. Un inversionista tiene una oferta de bonos seriados de $1,000.00 (cada uno) al 8% anual convertible semestralmente y que van a ser redimidos en la siguiente forma:

25 bonos en 10 años

15 bonos en 10 años y medio

18 bonos en 11 años

¿De cuánto será el monto de la compra total si se desea un rendimiento del 10% anual convertible semes -

tralmente?

Se aplica la fórmula 5.2 para cada serie.

$P = VR + (Fr - VR\ i)\ a_{\overline{n|}i}$

VR= 1,000 F=1,000 r=.08/2 = .04 i= .10/2 = .05

n= variable

$P_1 = 1,000 + (1,000(.04) - 1,000(.05))\ a_{\overline{20|}.05}$

$P_2 = 1,000 + (1,000(.04) - 1,000(.05))\ a_{\overline{21|}.05}$

$P_3 = 1,000 + (1,000(.04) - 1,000(.05))\ a_{\overline{22|}.05}$

se efectúan las operaciones:

$P_1 = 1,000+(-10)(12.46221)=1,000-124.62=875.38$

$P_2 = 1,000+(-10)(12.82115)=1,000-128.21=871.79$

$P_3 = 1,000+(-10)(13.16300)=1,000-131.63=868.37$

Precio total = $25\ P_1 + 15\ P_2 + 18\ P_3$

Precio total = 25(875.38)+15(871.79)+18(868.37) = 50,592.01

5.5.2 Bonos de anualidad.

Los "bonos de anualidad" son bonos que su valor -- se redime mediante una serie de pagos iguales, lo que los convierte en una anualidad, dicho en otra forma,- el comprador adquiere el derecho de cobrar una renta- durante la vida del bono.

Normalmente, el valor de los pagos periódicos se- conoce en éste tipo de operaciones, y para determinar el precio de un bono de ésta clase se utiliza la fórmula del valor presente de una anualidad.

$$A = R\ a_{\overline{n|}i} \qquad (3.2)$$

P.e. ¿Cuál será el precio que debe pagar un comprador por un bono de anualidad que se redimirá con 15 pagos durante un período de 5 años, si los pagos son de -- \$7,500.00 y él desea un rendimiento del 30% anual convertible cuatrimestralmente?

$R = 7,500 \qquad m = 3 \qquad i = .30/3 = .10 \qquad n = 5$

$$A = 7,500\ a_{\overline{15|}.10}$$

$$A = 7,500\ (7.60608)$$

$$A = 57,045.60$$

5.5.3 Bonos con fecha opcional de redención.

Existen compañías que emiten bonos que tienen señalados además de la fecha de vencimiento, una anterior a ésta, a partir de la cual el bono puede ser redimido si así se desea, la ventaja que ello implica es -- que si en el mercado financiero existe una tasa mayor al momento de tener la facultad de realizar el bono,- éste es retirado e invertido con un rendimiento mayor.

Para calcular el precio al cual es necesario com-- prar un bono de éste tipo para obtener una tasa de -- rentabilidad deseada, se debe suponer como fecha de - redención la fecha en la cual existe la opción de ser redimido, con esto se tiene la certeza de obtener la- tasa de rentabilidad deseada como mínimo.

P.e. Un bono de \$1,000.00 al 8% convertible semestralmente será redimido a la par dentro de 15 años, sin - embargo puede ser redimido a la par a partir del 10°- año. Encuéntrese el precio de compra si se desea una- rentabilidad mínima del 12% anual convertible semes-- tralmente.

$$P = VR + (Fr - VR\ i)\ a_{\overline{n|}\,i}$$

$F = 1{,}000 \quad VR = 1{,}000 \quad r = .08/2 = .04 \quad i = .12/2 = .06 \quad n = 20$

$$P = 1{,}000 + (1{,}000(.04) - 1{,}000(.06))\ a_{\overline{20|}\,.06}$$

$$P = 1{,}000 + (-20)(11.46992)$$

$$P = 1{,}000 - 229.40 = 770.60$$

CAPITULO VI.

MANEJO DE LA INFORMACION PARA LA TOMA DE DECISIONES.

6.1 Relaciones entre los objetivos, la información y las decisiones a tomar.

Un objetivo se puede delimitar como el querer "llegar a" una situación, pero es difícil que un individuo o una organización tenga un solo objetivo, normalmente se tiene un conjunto de ellos y que algunos sean proritarios y/o estén en conflicto, esto da lugar a una jerarquización de objetivos.

En el caso de una organización, cada función específica tiene sus objetivos particulares llamados "subobjetivos" u "objetivos instrumentales" y estos, a su vez, conjugados con los subobjetivos de otras áreas conforman los "objetivos fundamentales" de la organización; dada su importancia primero se delimitan los objetivos fundamentales y a éstos se adecúan los objetivos instrumentales.

Por medio de un ejemplo se dará una visión somera de lo que significa que los objetivos estén en conflicto y de las relaciones entre objetivos.

El departamento de producción de una empresa, con el fin de disminuir costos de producción, quiere implantar marchas aceleradas e ininterrumpidas.

Estas marchas forzadas darán como resultado: inventarios de artículos terminados en tal volumen que el departamento de mercadotecnia no pueda venderlos en su totalidad, una gran inversión en inventarios lo cual trae problemas al departamento de finanzas, y conflictos laborales al departamento de personal.

De igual modo, el departamento de mercadotecnia desea una gran variedad de artículos y un departamento de producción flexible que pueda surtir pedidos especiales en corto plazo.

El departamento de finanzas necesita una inversión baja en inventarios, para mejorar la tasa de rendimiento del capital.

El departamento de personal no quiere problemas laborales por el incremento en la intensidad de las labores productivas.

Evidentemente los objetivos de los diversos departamentos se contraponen, están en conflicto, pero conjugando las partes componentes se debe tener como resultado un mejoramiento de la empresa en general, este mejoramiento general se llama "optimización".

Existe un concepto llamado "suboptimización", que es cuando no se logran individualmente los objetivos de las áreas componentes de una organización; pero a pesar de esto se puede lograr la optimización de toda la empresa, lo cual es un objetivo fundamental.

6.2 Datos e información: tipos de datos.

En el medio administrativo-contable se entienden los datos como sinónimo de información, lo cual no es cierto, puesto que los datos necesitan ser procesados para ser interpretados.

Los datos pueden tener dos procedencias: interna o externa.

La mayoría de los datos requeridos por la administración de una empresa son los datos internos, ----- que son los que se recopilan en los diferentes registros de la organización (compras, ventas, nóminas, -- costos, etc.), convencionalmente se dividen en: reportes financieros y reportes de operación.

Reportes financieros.-son los documentos contables que proporcionan datos monetarios, reportes que los - estudiantes de las carreras contables-administrativas conocemos como: Estado de situación financiera, Estado de resultados, Estado de cambios en la situación - financiera, etc.

Reportes de operación.-son los documentos que contienen información no contable, y que normalmente sirven para el control de las actividades, tales como: - reportes de producción, ordenes de producción, relaciones de ventas por producto, etc.

Los datos externos son los datos que tienen su procedencia en otras organizaciones ya sean publicadas - por agencias del gobierno o por grupos privados como- asociaciones de comerciantes, firmas de negocios y organizaciones especializadas en investigaciones.

Algunas veces los datos publicados por una organización también fueron recopilados por ella misma, las publicaciones que contienen esos datos originales son llamadas "fuentes primarias", otras veces las publicaciones contienen datos que fueron originalmente recopilados y publicados por otras organizaciones diferentes a la que los publica, éstas publicaciones se denominan "fuentes secundarias".

En general, es mejor contar con datos provenientes de la fuente primaria que de la secundaria, puesto -- que:

a) los datos tienden a ser más completos.

b) casi siempre los datos están complementados con información sobre los métodos de recopilación, lo cual- ayuda a la evaluación e interpretación de los datos.

c) siempre existe la posibilidad de que errores no -- contenidos en la fuente primaria aparezcan en las fuentes secundarias debido a errores personales o tipográficos.

A pesar de lo anterior, en algunos casos es preferible utilizar fuentes secundarias cuando se reunen - datos relacionados entre sí pero que se encuentran -- dispersos en varias fuentes primarias, como las publicaciones de las diversas Cámaras del país que agrupan empresas por rama de actividades, ó también pueden - ser usados para localizar rápidamente las fuentes primarias de los datos deseados.

6.3 Crítica de los datos.

Cuando se usen datos externos se debe tener la precaución de tomar en cuenta sus limitaciones, como: -- errores por uso de técnicas imperfectas o inapropia-- das cuando se recopilaron los datos, errores de oficina o tipográficos al presentar o procesar los datos,- que las definiciones al recopilar los datos no sean - las adecuadas para el propósito, etc.

Por lo anterior los datos externos no deben ser -- usados sin un avalúo previo, sino que es necesario un estudio cuidadoso de las limitaciones de los datos para que podamos tomar una decisión adecuada.

Tanto los datos externos como los internos para ser presentados a las personas que toman las decisiones, previamente deben de ser depurados ("colados") para que tengan un significado concreto para los decisores.

6.4 Organización y presentación de datos.

6.4.1 Organización de datos.

Cuando disponemos de un gran número de datos es conveniente separarlos en "clases" o "categorías" y determinar el número de datos que cae dentro de cada una de ellas, esto se conoce como "frecuencia de clase".

Una ordenación tabular de los datos en clases y con las frecuencias de cada una se denomina "distribución de frecuencias" o "tabla de frecuencias". Un método sencillo para determinar la frecuencia de cada clase es: contar por medio de "rayitas" o tarjas (el redondeo matemático debe ser estipulado antes de proceder a la clasificaicón de los datos).

P.e. Supóngase que los siguientes datos representan el peso en kilogramos que tuvieron al nacer un grupo de niños en una maternidad durante un período determinado.

2.6, 3.5, 3.4, 2.6, 3.6, 2.8, 4.3, 3.7, 2.7, 1.8, 3.5
3.1, 3.4, 3.1, 3.3, 3.4, 3.5, 3.8, 2.5, 2.9, 2.9, 3.2
3.0, 3.9, 3.6, 4.2, 3.2, 4.0, 4.3, 3.5, 2.3, 3.3, 2.1
4.7, 3.7, 3.4, 2.8, 3.3, 4.9, 2.3, 2.6, 3.1, 4.0.

Tabla de frecuencias

Peso (Kg.)	Tarjas	Frecuencias
1.5-1.9	I	1
2.0-2.4	III	3
2.5-2.9	~~IIII~~ IIII	9
3.0-3.4	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13
3.5-3.9	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
4.0-4.4	~~IIII~~	5
4.5-4.9	II	2
	Total	43

Los datos que se presentan separados por clases se denominan "datos agrupados", si se observa la tabla - se verá que todos los datos pertenecen a alguna clase, pero aún no se sabe como determinar esas clases; el - problema se resuelve si se siguen los siguientes pa-- sos:

a) se busca el valor mayor y el valor menor de los da tos, y restamos el menor del mayor para obtener el -- "rango".

b) se divide el rango entre la amplitud de clase que- se desea (en éste caso 0.5) y obtendremos el número - de intervalos de clase, que generalmente, son entre 5 y 20 (con un número mayor o menor normalmente pierde- su significado).

En la tabla de frecuencias la primera clase está - definida por 1.5-1.9, o sea, por sus extremos, el nú- mero 1.5 es el "límite inferior de la clase" y 1.9 es el "límite superior de la clase".

Como observación importante de los límites de clase se tiene que: teóricamente el intervalo de clase - 1.5-1.9 Kg. agrupa pesos desde 1.45 a 1.95 Kg. que -- son los "límites reales" o "verdaderos" de clase, los cuales quedan determinados si sumamos el límite superior de una clase y el límite inferior de la clase siguiente y después dividimos la suma entre dos.

Cabe aclarar que nunca deben utilizarse los límites reales de clase para simbolizar las clases, puesto que podrían existir datos que coincidieran con los límites de clase, como 1.95 que no sabríamos si colocarlo en la clase 1.45-1.95 ó en la de 1.95-2.45.

Se conoce como "marca de clase" o "punto medio de clase" a la suma de los límites inferior y superior - de una clase dividida entre dos (la suma). El punto - medio de clase de 1.5-1.9 es (1.5+1.9)/2 = 1.7.

La marca de clase es importante porque para análisis matemáticos todos los datos de una clase se consideran como si fueran iguales a la marca de clase.

6.4.2 Representaciones gráficas de los datos.

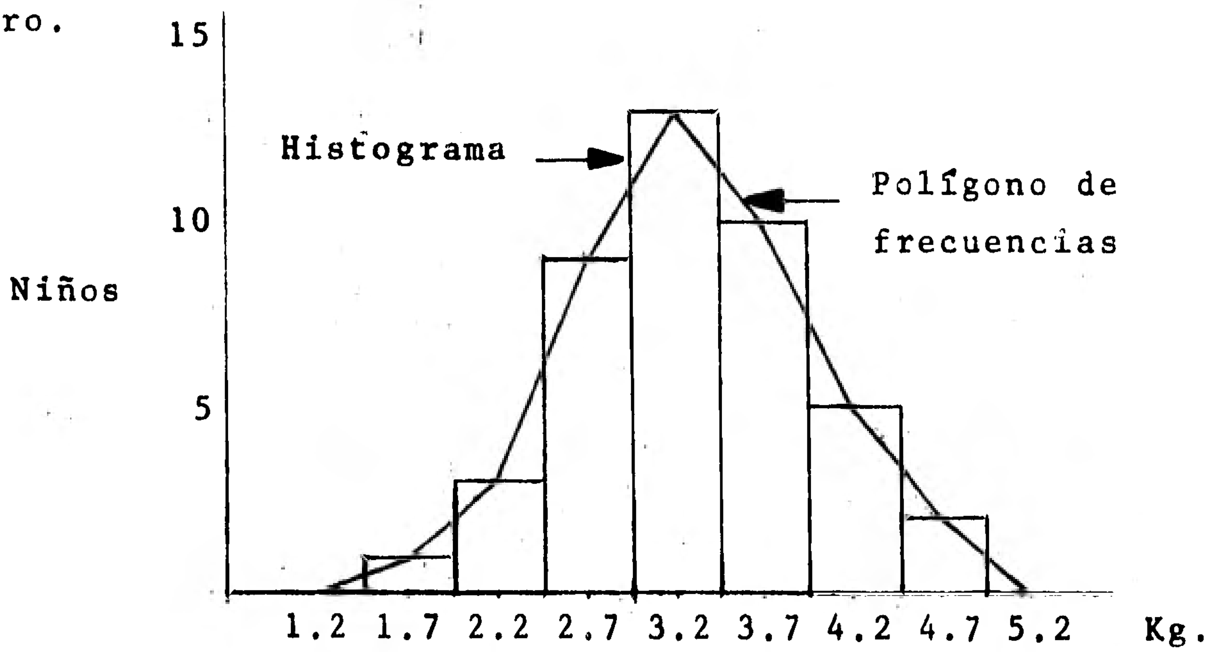
6.4.2.1 Histogramas y polígonos de frecuencias.

6.4.2.1.1 Histograma o histograma de frecuencias.

Es una gráfica en un plano cortesiano, que consta de una serie de rectángulos con base en un eje horizontal (eje de las abscisas) y con centros de las bases en las marcas de clase y altura en el eje vertical (eje de las coordenadas) en el cual se colocan -- las frecuencias; las escalas empleadas para los ejes pueden ser diferentes.

6.4.2.1.2 Polígonos de frecuencias.

Cada clase de frecuencias se traza usando el punto-medio de dicha clase, los puntos trazados se conectan-mediante una serie de líneas rectas; destacándose que-las líneas se trazan hasta las marcas de clase infe---rior y superior inmediatas que tendrían frecuencia ce-ro.



Gráfica 6.1

6.4.2.2 Tabla de frecuencias relativas, histograma-de frecuencias relativas y polígono de frecuencias re-lativas.

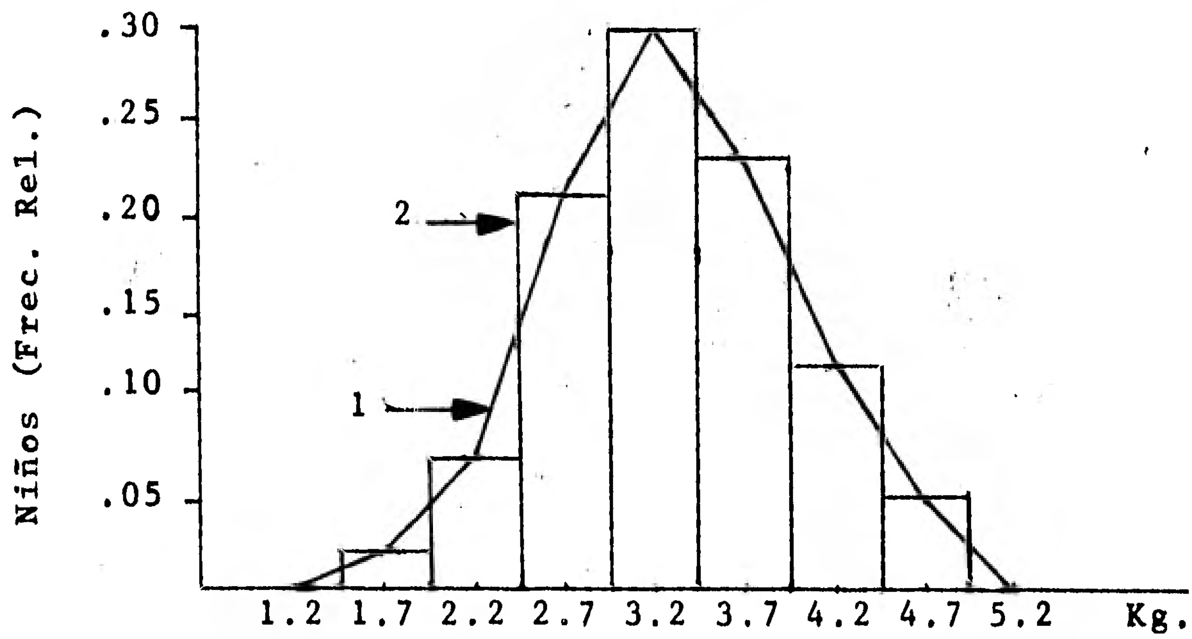
La "frecuencia relativa" es la frecuencia de una cla se dividida entre el total de frecuencias y generalmen te se expresa como porcentaje, la suma de las frecuen-cias relativas de todas las clases es 100%.

La tabla que muestra las frecuencias relativas se - denomina "tabla de frecuencias relativas".

Si el histograma y el polígono de frecuencias se -- construyen empleando las frecuencias relativas, se llaman "histograma de frecuencias relativas" y "polígono de frecuencias relativas" respectivamente.

Tabla de frecuencias relativas.

Peso (KG.)	frecuencias	frecuencias relativas
1.5-1.9	1	1/43 = .02
2.0-2.4	3	3/43 = .07
2.5-2.9	9	9/43 = .21
3.0-3.4	13	13/43 = .30
3.5-3.9	10	10/43 = .23
4.0-4.4	5	5/43 = .12
4.5-4.9	2	2/43 = .05
	43	43/43 ≈ 1.00



Gráfica 6.2

1.-Polígono de frecuencias relativas

2.-Histograma de frecuencias relativas.

6.4.2.3 Tabla de frecuencias acumuladas y polígono de frecuencias acumuladas.

La frecuencia total de los valores menores a el límite real superior de clase de una clase dada se conoce como "frecuencia acumulada".

P.e. La frecuencia acumulada hasta la clase 3.5-3.9 - es: 1 + 3 + 9 + 13 + 10= 36 que significa que 36 ni--ños nacieron con un peso menor de 3.95 Kg.

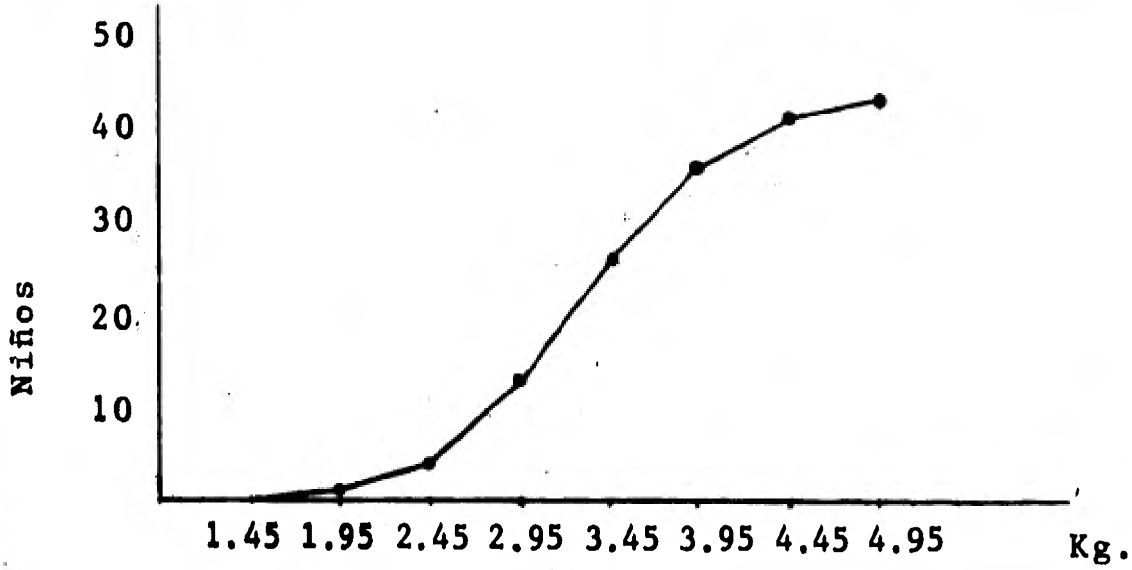
La "tabla de frecuencias acumuladas" se construye-sumando la frecuencia de clase de una clase dada más-las frecuencias de todas las clases inferiores, esto-puede tener una variante si se emplean frecuencias relativas, en tal caso será una "tabla de frecuencias -relativas acumuladas".

El polígono de frecuencias que se traza empleando-las frecuencias acumuladas o las frecuencias relati--vas acumuladas se llama "polígono de frecuencias acumuladas" u "ojiva" y "polígono de frecuencias relativas acumuladas" u "ojiva relativa".

Tabla de frecuencias acumuladas — Tabla de frecuencias relativas acumuladas

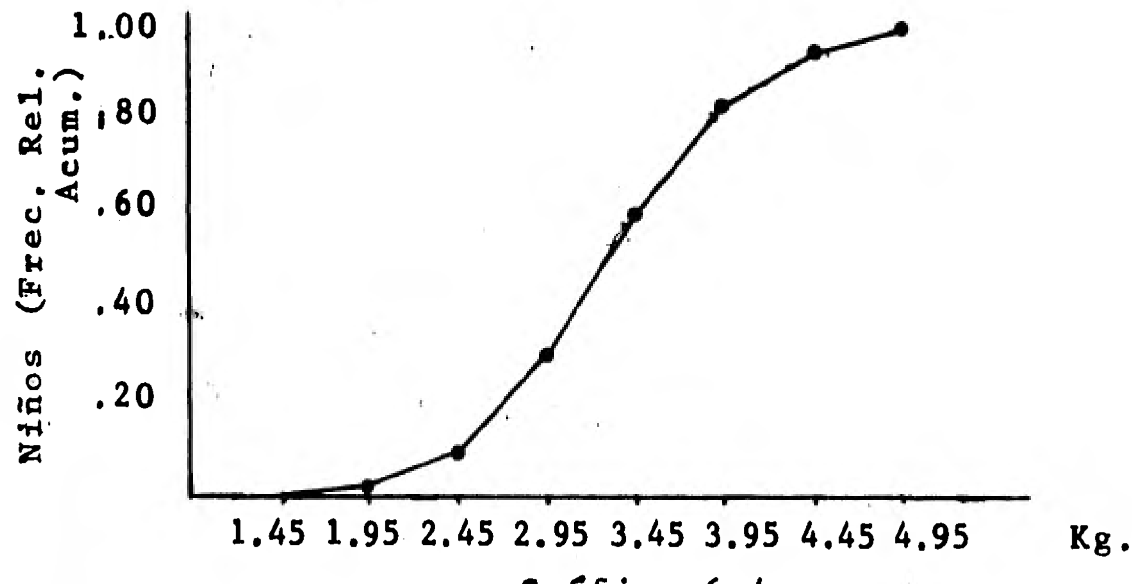
	frec.	frec.ac.	frec.rel.	frec.rel.ac.
Menores de 1.95	1	1	.02	.02
Menores de 2.45	3	4	.07	.09
Menores de 2.95	9	13	.21	.30
Menores de 3.45	13	26	.30	.60
Menores de 3.95	10	36	.23	.83
Menores de 4.45	5	41	.12	.95
Menores de 4.95	2	43	.05	1.00
Totales	43		1.00	

Polígono de frecuencias acumuladas u ojiva.



Gráfica 6.3

Polígono de frecuencias relativas acumuladas u ojiva-acumulada



Gráfica 6.4

6.4.2.4 Gráfico de líneas.

Este gráfico representa la distribución de una variable en función del tiempo.

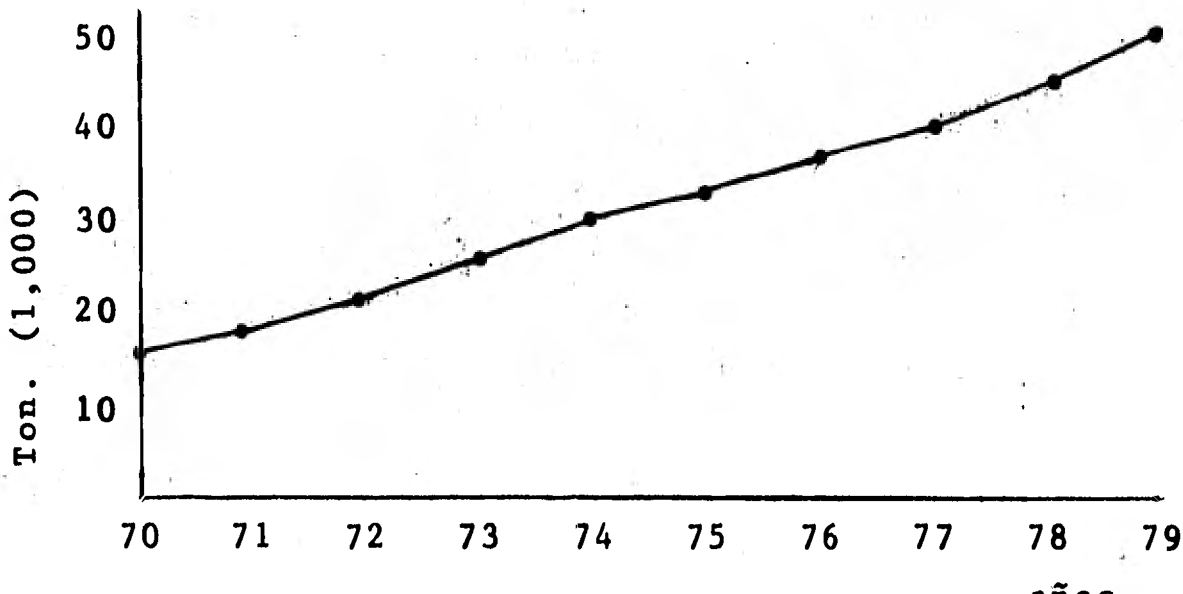
La variable dependiente (los datos) se representan en el eje vertical (eje "Y") y el tiempo en el eje horizontal (eje "X"), se sitúa un punto en el cruce del dato con el año correspondiente y posteriormente los-puntos se unen con rectas.

P.e. Supóngase que la producción de toneladas de ce--mento en una fábrica durante la década de 1970-1979 - fue como se muestra en la siguiente tabla.

Año	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
Ton.	15.2	17.5	21.0	25.4	29.6	32.4	36.3	39.2	44.6	49.5

(miles)

Gráfico de líneas.

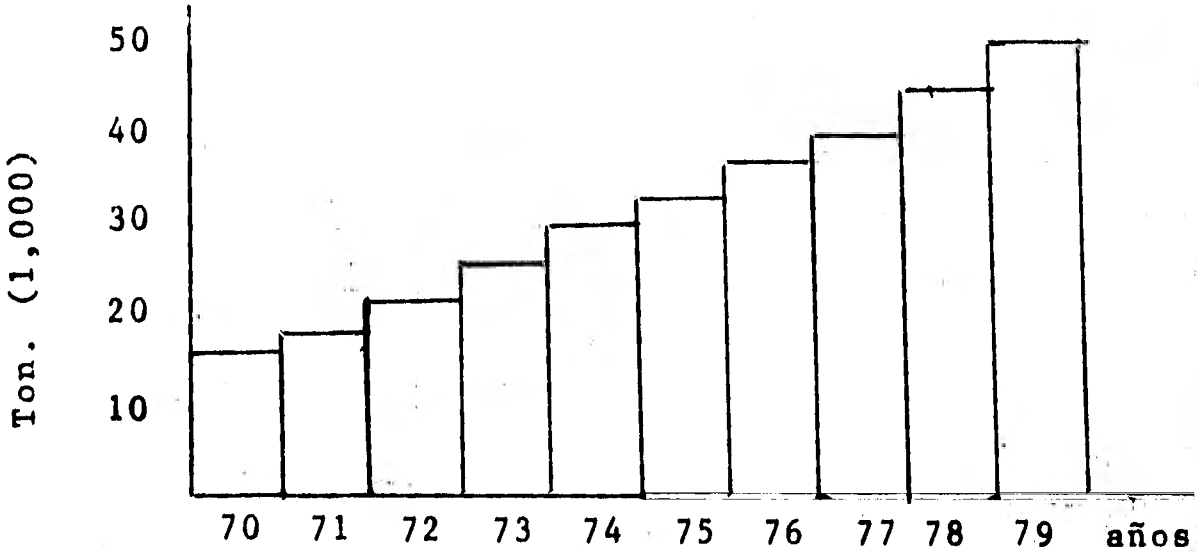


Gráfica 6.5

6.4.2.5 Gráfica de barras.

Es similar a la gráfica de líneas en cuanto a su - construcción, se diferencía en que los períodos se -- trazan como segmentos iguales del eje "X", en vez de-un punto como en el gráfico de líneas, y se alza éste segmento hasta alcanzar al dato que identifique a la-variable (en este caso: año).

Gráfica de barras.



Gráfica 6.6

6.4.2.6 Gráfica circular o de pastel.

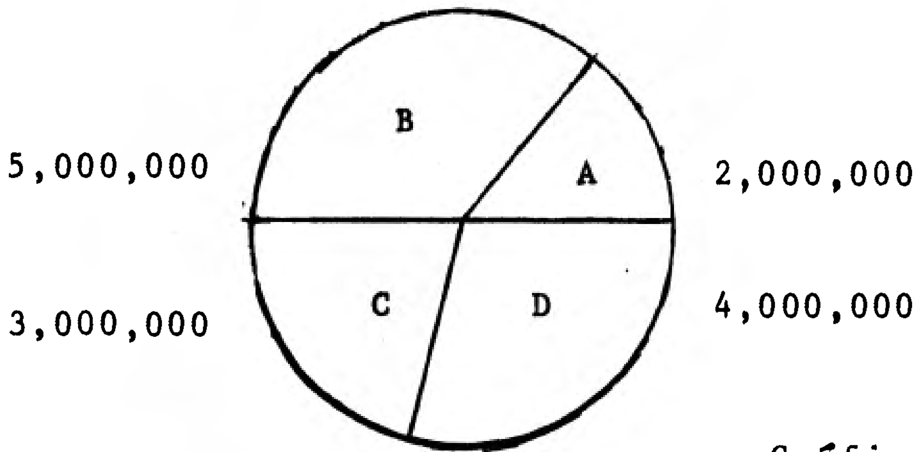
Esta gráfica se traza empleando un círculo, el área total equivale al 100% del valor de una variable y al partirla en sectores, éstos representan la parte de -- área que del total pertenece a cada factor integrante de la variable.

Para construirla se divide el valor de cada inte-- grante de la variable entre el total de la variable,- en otras palabras, obtenemos el tanto por uno que re- presenta, y el resultado se multiplica por 360°, con- esto habremos determinado el sector correspondiente a cada integrante de la variable.

P.e. Supóngase que del total de ventas de una fábrica $2,000,000 fueron generados por el artículo A, - - - $5,000,000 por el artículo B, $3,000,000 por el artículo C y $4,000,000 por el artículo D.

Art.	Ventas	tanto por uno	360°	Valor del sector
A	2,000,000	.14	360°	50°
B	5,000,000	.36	360°	130°
C	3,000,000	.21	360°	76°
D	4,000,000	.29	360°	104°
	14,000,000	1.00		360°

Gráfica circular.



Gráfica 6.7

6.5 Media, mediana y moda.

La media, la mediana y la moda, llamadas "medidas de tendencia central" o "medidas de centralización" se emplean para resumir características importantes de un conjunto de datos: hay que destacar que ninguna medida de tendencia central es mejor que la otra, su conveniencia dependerá de su aplicación y de los resultados que se quieran obtener de los datos.

6.5.1 Media.

6.5.1.1 Media para datos no agrupados en clases.

La "media" o "media aritmética" es la medida de --

centralización más comunmente usada para describir - un conjunto de elementos y se define como la suma de- los valores de los elementos dividida entre el número de éstos: se denota por $\overline{X}$ (se lee X barra) y se representa por

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{N}$$

en donde: $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ = valores de los elementos

N = número de elementos

P.e. Calcular la media aritmética del peso de los niños recién nacidos (veáse subsección 6.4.1).

$$\overline{X} = \frac{2.6+3.5+3.4+2.6+3.6+\ldots+4.0}{43} = \frac{141.80}{43} =$$

$$\overline{X} = 3.2976$$

6.5.1.2 Media para datos agrupados en clases.

Para los datos agrupados en clases, se vió que se- considera que todos los elementos que pertenecen a u- na clase tienen el valor de la marca de clase.

Para datos agrupados, la media se calcula sumando- el producto de las marcas de clase por sus frecuen--- cias respectivas y dividiendo el resultado entre el - número total de elementos.

$$\overline{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 + \ldots + f_n X_n}{N}$$

en donde: $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ = frecuencias

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ = marca de clase

N = número de elementos

P.e. Considérese que la siguiente tabla de frecuen--- cias corresponde al peso de los niños detallados en - la subsección 6.4.1 y calcúlese la media.

Tabla de frecuencias

Peso (Kg.)	f	X	fX
1.5-1.9	1	1.7	1.70
2.0-2.4	3	2.2	6.60
2.5-2.9	9	2.7	24.30
3.0-3.4	13	3.2	41.60
3.5-3.9	10	3.7	37.00
4.0-4.4	5	4.2	21.00
4.5-4.9	2	4.7	9.40
	43		141.60

$$\bar{X} = \frac{1(1.7) + 3(2.2) + 9(2.7) + \ldots + 2(4.7)}{43} = \frac{141.60}{43}$$

$\bar{X} = 3.2930$

6.5.2 Mediana.

La mediana de un grupo de elementos es el valor -- del elemento intermedio cuando todos los elementos se ordenan ya sea ascendente o descendentemente. La me-- diana se denota por $\tilde{X}$.

6.5.2.1 Mediana para datos no agrupados en clases.

Para calcular la mediana debemos ordenar los datos; se hará en forma ascendente.

1.8, 2.1, 2.3, 2.3, 2.5, 2.6, 2.6, 2.6, 2.7, 2.8, 2.8,
2.9, 2.9, 3.0, 3.1, 3.1, 3.1, 3.2, 3.2, 3.3, 3.3, 3.3
3.4, 3.4, 3.4, 3.4, 3.5, 3,5, 3.5, 3,5, 3.6, 3.6, 3.7
3,7, 3.8, 3.9, 4.0, 4.0, 4.2, 4.3, 4.3, 4.7, 4.9

Como el total de elementos del conjunto es 43, la-mediana será el valor del vigésimo segundo elemento que es $\tilde{X} = 3.3$; nótese que le preceden y le anteceden 21 elementos.

Ahora, supóngase que se elimina el último elemento (4.9), con el fin de que tenga 42 elementos el conjunto; la mediana será $\tilde{X} = \frac{1}{2}(3.3 + 3.3) = 3.3$, o sea, la suma de los valores de los dos elementos centrales dividida entre dos.

6.5.2.2 Mediana para datos agrupados en clases.

Para los datos agrupados la mediana se calcula por interpolación y su fórmula es:

$$\tilde{X} = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - (\Sigma f)\, m}{f \text{ clase med.}} \right) c$$

en donde : L = Límite real inferior de la clase que contiene a la mediana.

N = Número de elementos

$(\Sigma f)\, m$ = Suma de las frecuencias de las clases menores a la clase mediana.

f clase med. = Frecuencia de la clase mediana

c = Tamaño del intervalo

Para el ejemplo del peso de los niños, su mediana para datos agrupados será:

$$\tilde{X} = \left(\frac{2.9 + 3.0}{2} \right) + \left(\frac{\frac{43}{2} - (1 + 3 + 9)}{13} \right) .5$$

$$\tilde{X} = 2.95 + \left(\frac{21.5 - 13}{13} \right) 0.5$$

$$\tilde{X} = 2.95 + \left(\frac{8.5}{13}\right) 0.5$$

$$\tilde{X} = 2.95 + (0.6538)\ 0.5$$

$$\tilde{X} = 2.95 + 0.3269$$

$$\tilde{X} = 3.2769$$

Si se construyera un histograma de estos datos --- agrupados, la mediana se localizaría en el punto en - que partiendo al histograma en forma vertical obtuvié ramos dos áreas iguales.

6.5.3 Moda.

La moda es el valor que se presenta más veces, o - sea, el valor más común en un conjunto de datos. La - moda puede no existir (que ningún dato se repita) o - puede no ser única, si el conjunto de datos cuenta -- con una moda se denominará "unimodal", si tiene dos - "bimodal", y "multimodal" si tiene más de dos modas.- La moda se denota por $\hat{X}$.

6.5.3.1 Moda para datos no agrupados en clases.

Por definición de moda, debemos buscar el valor -- que se presenta el mayor número de veces.

En el ejemplo del peso de los niños, por el ordena miento que se hizo para calcular la mediana encontramos que aparecen dos modas 3.4 y 3.5 (ambos aparecen- cuatro veces) por lo tanto el conjunto de datos es bi modal.

6.5.3.2 Moda para datos agrupados en clases.

La moda para los datos agrupados en clases se puede obtener por medio de la fórmula siguiente:

$$\hat{X} = L + \left[\frac{f_m - f_{m-1}}{\left(f_m - f_{m-1}\right) + \left(f_m - f_{m+1}\right)} \right] c$$

en donde: L = Límite real inferior de la clase que contiene a la moda.

f_m = Frecuencia de la clase modal.

f_{m-1} = Frecuencia de la clase inmediata inferior a la clase modal

f_{m+1} = Frecuencia de la clase inmediata superior a la clase modal.

c = Tamaño de los intervalos.

P.e. Calcular la moda del conjunto de datos del peso de los recién nacidos.

$$X = \left(\frac{2.9 \quad 3.0}{2}\right) + \left(\frac{13-9}{(13-9) + (13-10)}\right) \quad 0.5$$

$$X = 2.95 + \left(\frac{4}{4+3}\right) 0.5$$

$$X = 2.95 + \left(\frac{4}{7}\right) 0.5$$

$$X = 2.95 + (.5714)\ 0.5$$

$$X = 2.95 + .2857$$

$$X = 3.2357$$

6.6 Medidas de dispersión.

Cuando se ha calculado una medida de tendencia central y se desea saber si los datos tienden a cen--

trarse en el promedio ó si tienden a extenderse, las medidas que señalan el grado en que los datos tien-- den a alejarse de la medida de tendencia central se- denominan en forma genérica "variación de datos" ó - "dispersión de datos".

P.e. I 5,5,5,5,5 II 0, 2, 5, 8, 10

La media de ambos conjuntos es 5, sin embargo el- conjunto II tiene un grado de variación, alrededor - de la media, mayor.

6.6.1 Rango

Cuando se señalaron los pasos para la determina-- ción de las clases para agrupar datos, se hizo refe- rencia al "rango", que es la diferencia entre el valor menor y el valor mayor de los datos. En el ejemplo - el rango es 4.9 - 1.8 = 3.1.

6.6.2 Desviación estándar y varianza.

6.6.2.1 Desviación estándar para datos no agrupa- dos.

La medida de dispersión más comunmente usada es - la "desviación estándar" ó "desviación típica", que- se denota por "s" y está dada por la siguiente fórmu la:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (X-\bar{X})^2}{n}}$$

en donde: X = un elemento del conjunto de datos

$\bar{X}$ = media

$(X-\bar{X})^2$ = Desviación de un dato respecto a la - media, todo elevado al cuadrado.

$\Sigma(X-\bar{X})^2$ = suma de las desviaciones al cuadrado -

n = número de datos

P.e. La producción de una fábrica durante una semana- fue de el siguiente número de unidades.

84, 88, 87, 90, 86.

Calcule su desviación estándar.

Producción	Desviación $X-\bar{X}$	Desviación al cuadrado $(X-\bar{X})^2$
84	84-87 = -3	9
88	88-87 = 1	1
87	87-87 = 0	0
90	90-87 = 3	9
86	86-87 = -1	1
Totales	0	20

$$s = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2 \quad \text{unidades de producción}$$

6.6.2.2 Desviación estándar para datos agrupados.

Para datos agrupados la desviación estándar es:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f\ (X - \bar{X})^2}{n}}$$

en donde: X = Marca de clase de una clase dada.

$(X - \bar{X})^2$ = Desviación de la marca de clase respecto a la media, todo elevado al cuadrado.

f = Frecuencia de la clase dada.

$f\ (X - \bar{X})^2$ = Suma de las frecuencias por la desviación al cuadrado.

n = Total de frecuencias.

P.e. Calcular la desviación estándar del peso de los niños nacidos en la maternidad. En la subsección 6.5.1.2 se obtuvo $\bar{X} = 3.293$.

Peso (Kg.)	f	X	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$	$f(X-\bar{X})^2$
1.5-1.9	1	1.7	-1.593	2.5376	2.31392
2.0-2.4	3	2.2	-1.093	1.1946	2.62812
2.5-2.9	9	2.7	-0.593	0.3516	0.94932
3.0-3.4	13	3.2	-0.093	0.0086	0.02752
3.5-3.9	10	3.7	0.407	0.1656	0.61272
4.0-4.4	5	4.2	0.907	0.8226	3.45492
4.5-4.9	2	4.7	1.407	1.9796	9.30412
	43				21.29064

$$s = \sqrt{\frac{21.29064}{43}} = \sqrt{0.49513} = 0.70365$$

6.6.2.3 Varianza.

El cuadrado de la desviación estándar recibe el -- nombre de "varianza", es claro que para obtener la varianza para datos no agrupados la fórmula será:

$$s^2 = \left(\sqrt{\frac{\Sigma(X - X)^2}{n}}\right)^2 = \frac{\Sigma(X - X)^2}{n}$$

y para datos agrupados:

$$s^2 = \left(\sqrt{\frac{\Sigma f(X - X)^2}{n}}\right)^2 = \frac{\Sigma f(X - X)^2}{n}$$

CAPITULO VII.

EL PROCESO RACIONAL DE LA TOMA DE DECISIONES.

7.1 Primera tipología de las situaciones de toma de decisiones.

Cuando una persona se enfrenta a un problema de cualquier índole, las primeras preguntas que se hace (tal vez inconcientemente) son: ¿está bien definido el problema?, ¿cuáles son los datos?, ¿me he enfrentado a problemas semejantes? y de acuerdo con su experiencia, la persona puede decidir si el problema está bien definido, si es repetitivo y si se cuenta con información adecuada para hacerle frente, o si por el contrario, el problema no lo puede precisar aunque sepa que existe, no es frecuente su aparición y no posee información suficiente como para delimitarlo, analizarlo y solucionarlo; en términos generales, a los problemas que presentan las primeras características se les llama "situaciones programables" y a las que presentan las segundas se les denomina "situaciones no programables".

7.1.1 Las situaciones programables.

En materia de administración existen problemas de operación del tipo de situaciones programables, que cuando se presentan ya se cuenta con una decisión tomada de antemano: por ejemplo, si un cliente solicita mercancía, ya se sabe si se puede vender a crédito o necesariamente tiene que ser al contado la operación, si se puede o no surtir la mercancía, etc.

Las decisiones de los administradores se pueden transmitir a sus subordinados por medio de "tablas de decisiones" como la siguiente:

Estado de naturaleza
Cursos de acción

"Estados de naturaleza" son los factores de un problema que no se pueden controlar, como: precios de los proveedores, precios de competencia, localización de los clientes, etc.

"Cursos de acción" son las actividades que se pueden desarrollar a nuestro libre albedrío, en otras palabras, la utilización que se puede hacer de los recursos disponibles.

La tabla señala que para un estado de la naturaleza que se presente se tiene un curso de acción específico.

La tabla anterior se divide, por medio de una línea vertical, en dos partes que son el "talón" y la "entrada"; el "talón" señala los estados de la naturaleza y los cursos de acción que se han considerado, la "entrada" establece las relaciones entre los estados de la naturaleza y los cursos de acción.

Talón	Entrada
Estados de la naturaleza	
Talón	Entrada
Cursos de acción	

Si se toma en cuenta que un curso de acción que se elige es una respuesta a un estado de la naturaleza,-

la tabla señala la decisión tomada.

Supóngase que la administración de una empresa proporciona al cajero las normas bajo las cuales debe de efectuar o retener un pago.

Acción 1 = Efectuar el pago

Acción 2 = Retener el pago

De acuerdo con la documentación que presente el cobrador se puede tener:

Estado 1 = Autorización especial.

Estado 2 = Talón de revisión de facturas.

Estado 3 = Comprobante de uso interno.

Tabla de pagos

Autorización especial	SI	NO	NO	NO
Talón de revisión de facturas		SI	NO	NO
Comprobante de uso interno			SI	NO

Efectuar el pago	X	X	X	
Retener el pago				X

Obsérvese que sólo aparece una decisión (X) en cada columna de las entradas de los cursos de acción.

7.1.2 Las situaciones no programables.

Las situaciones no programables presentan las siguientes características principales.

a) el problema hace su aparición en forma sorpresiva y no se puede definir claramente.

b) existe una completa ausencia de datos.

c) se dan muchas relaciones interdepartamentales o entre los estados de la naturaleza y no es posible de terminar la dependencia o independencia entre ellos.

Por las características anteriores el papel de la-administración en estas situaciones es de suma importancia, puesto que se tienen que conseguir los datos-para procesarlos y analizarlos, buscando darle solución al problema; se supone que la tarea de la administración se facilita si se cuenta con una adecuada-comunicación.

7.2 Elementos de un problema de toma de decisiones.

En la toma de decisiones el problema se presenta - por los síntomas de un desequilibrio en el medio ambiente (interno y/o externo) de una organización; con el fin de generar soluciones se deben buscar el mayor número de síntomas antes de decidir como se van a utilizar los recursos (siempre limitados) con que se --- cuenta.

Las condiciones que son necesarias para la existencia del más simple de los problemas son:

a) debe existir un individuo al cual se le debe -- asignar el tratamiento del problema.

b) se debe tener por lo menos un par de opciones - para resolver el problema; en caso contrario no existe el problema.

c) de las opciones de solución con que cuenta el - decisor, él tiene que elegir la más adecuada. La elección está asociada con un cierto objetivo dentro del-marco de referencia en donde se encuentra el decisor.

d) la selección de cualquiera de las opciones debe repercutir en forma diferente en los objetivos del --

sistema, o sea, se asocia una efectividad y/o eficiencia con cada solución diferente.

e) la persona que toma las decisiones ignora las eficiencias y/o efectividades reales de las soluciones, puesto que siempre existe un cierto grado de incertidumbre.

Las situaciones se complican aún más si se consideran los siguientes factores:

a) que el problema sea asignado para su tratamiento a un grupo y no a una persona.

b) que el ambiente donde se encuentra la organización sea cambiante.

c) que el número de opciones para resolver el problema sea muy grande.

d) que los integrantes del grupo tengan objetivos discordes entre sí.

e) que las alternativas de solución planteadas por el grupo sean llevadas a cabo por otro.

Ahora se verá una herramienta sumamente útil para la administración, cuando es necesario tomar decisiones que involucran relaciones cuantitativas entre los estados de la naturaleza y los cursos de acción con los cuales los enfrentamos, esa herramienta es la "matriz general de decisiones".

	Estados de la naturaleza				
Cursos de acción	E_1	E_2	E_3	...	E_m
A_1	R_{11}	R_{12}	R_{13}		R_{1m}
A_2	R_{21}	R_{22}	R_{23}		R_{2m}
A_3	R_{31}	R_{32}	R_{33}		R_{3m}
.					
.					
.					
A_n	R_{n1}	R_{n2}	R_{n3}		R_{nm}

en donde: R_{ij} = el valor que se produce por la conjugación de un estado de la naturaleza y un curso de acción.

con $i = 1, 2, 3, .. , n$

$j = 1, 2, 3, ..., m$

En esta matriz se deben considerar todos los estados de la naturaleza que puedan presentarse, así como todos los cursos de acción posibles, de tal forma que la ocurrencia de uno de ellos imposibilite la ocurrencia de los otros, en otras palabras, deben ser "mutuamente excluyentes".

P.e. Una persona desea invertir su dinero en una agencia de distribución de autos en donde tendrá las siguientes opciones:

A_1 = vender autos grandes.

A_2 = vender autos medianos

A_3 = vender autos pequeños.

y estima que sus ganancias o pérdidas en el negocio - dependerán de la relación que guarden los precios y - los salarios, a saber:

E_1 = que los salarios aumenten en un porcentaje mayor que los precios.

E_2 = que los salarios aumenten en igual proporción que los precios.

E_3 = que los salariso aumenten en un porcentaje menor que los precios.

Las ganancias o pérdidas que se producirán por la conjugación de los estados de la naturaleza y los cursos de acción son los siguientes:

Cursos de acción	Estados de la naturaleza E_1	E_2	E_3
A_1	5,000,000	3,500,000	-500,000
A_2	4,000,000	4,500,000	-200,000
A_3	3,000,000	4,000,000	6,000,000

Algunas interpretaciones que se pueden dar a la matriz son las siguientes:

Si se venden autos grandes y los salarios mantienen su relación con los precios, se obtendrá una ganancia de $3,500,000.

Si se venden autos grandes y los salarios aumentan en una relación menor que los precios, se incurrirá - en una pérdida de $500,000.

7.3 Modelos abiertos y cerrados de toma de decisiones.

Las principales características de los modelos de- toma de decisiones "cerrados" son:

a) consideran los problemas lo suficientemente independientes de otras actividades internas o externas a la organización.

b) como consecuencia de lo anterior se le otorga - poca importancia a el acto de decidir.

Para los sistemas "abiertos" la actividad de cual--- quier parte de al empresa tiene algún efecto en la actividad de otra, y así el ambiente de la organización está en constante retroalimentación con la organiza-- ción.

Para decirlo de otra forma, al tratar un problema- con el enfoque de sistema abierto, se analiza toda -- área controlada por el decisor y no solo un área de-- terminada en la cual aparece el problema, con lo que- se permite examinar los efectos del problema fuera de las áreas en donde se detectaron, llegándose a descubrir y resolver el verdadero problema en vez de sólo- un síntoma del mismo.

En consecuencia, para tomar una decisión "abierta" es menester considerar las influencias interdeparta-- mentales y ambientales.

7.4 Principio de la racionalidad limitada.

A una persona se le dice que es "racional" si para resolver un problema:

a) toma en cuenta diferentes cursos de acción con- sus respectivos resultados.

b) tiene un patrón de decisión que le permite dife renciar entre los diferentes resultados.

El principio de la "racionalidad limitada" detallado por H.A. Simon consiste en señalar que las personas pocas veces se esfuerzan por buscar la solución óptima a un problema, se conforman con suboptimizar, o sea, fijar objetivos "suficientemente buenos" y tratan de lograrlos.

7.5 Concepto de pérdida o costo de oportunidad.

Si para un estado de la naturaleza dado se tienen varios cursos de acción, es claro que sólo uno proporciona un resultado óptimo, pero si de acuerdo con la información que se posee se escoge un curso distinto al óptimo para el estado de la naturaleza que ocurrió, se dice que se tuvo una "pérdida o un costo de oportunidad".

Para calcular el valor de la pérdida de oportunidad de un estado de la naturaleza E_j y dos cursos de acción asociados con E_j, considérese A_i como el curso de acción seleccionado y A_k el curso de acción óptimo para ese estado de la naturaleza, la pérdida de oportunidad por haber seleccionado A_i está dado por:

$$l\ (R_{ij}) = R_{kj} - R_{ij}$$

Nótese que si $i = k$, o sea, se eligió el curso de acción óptimo para el estado de la naturaleza que imperó (la selección del curso de acción se hace antes de que ocurran los estados de la naturaleza), la pérdida de oportunidad será cero.

Para construir una matriz de pérdidas de oportunidad se parte de la matriz general de decisiones, y solo se resta cada elemento de una columna a el elemento máximo de la misma.

P.e. Dada la siguiente matriz general de decisiones construyase la matriz de pérdidas de oportunidad.

Cursos de acción	Estados de la naturaleza E_1	E_2	E_3
A_1	5,000,000	3,500,000	-500,000
A_2	4,000,000	4,500,000	-200,000
A_3	3,000,000	4,000,000	6,000,000

Matriz de pérdidas de oportunidad.

Cursos de acción	Estados de la naturaleza E_1	E_2	E_3
A_1	0	1,000,000	6,500,000
A_2	1,000,000	0	6,200,000
A_3	2,000,000	500,000	0

7.6 Fases del proceso racional de toma de decisiones.

En la toma de decisiones es evidente que utilizar un enfoque planeado es un requisito indispensable si se quiere tener éxito, el enfoque debe contemplar problemas como: objetivos contradictorios, recursos limitados, políticas y alternativas.

El proceso racional de toma de decisiones consta de los siguientes pasos.

a) observación.

b) definición del problema

c) desarrollo de soluciones opcionales

d) selección de la opción óptima

Observación.

El enfoque científico empieza con la observación - de los fenómenos que rodean al problema, hechos, opiniones, información al respecto, etc.

El administrador siempre debe estar alerta y ser - suceptible de detectar problemas dentro de la organización.

Definición del problema.

Al delimitar un problema se debe tener en cuenta - que toda organización se ve influenciada por su am--- biente (interno y externo), y el trabajo del administrador es delimitar las variables para cerciorarse -- que se resuelve el verdadero problema y no sólo uno - de los síntomas.

Desarrollo de soluciones opcionales.

Esta fase consiste en el desarrollo de posibles soluciones (cursos de acción), la mayoría de las veces- los cursos opcionales de acción toman la forma de modelos matemáticos y se les asocia un valor monetario.

Cuando se desarrollan varios modelos, poco a poco- van apareciendo sus deficiencias, por lo que a veces- es necesario eliminar algunos que inicialmente parecían buenos; el número de modelos tentativos se puede reducir si cuando se delimita el problema se asocia - una medida de efectividad para su solución.

Selección de la opción óptima.

Ahora el decisor debe determinar cual curso de acción es el más eficaz en relación a los objetivos, -- tiene que considerar que los objetivos no siempre son cuantitativos (metas). El presente trabajo se limita a los efectos financieros de los cursos de acción.

Si la decisión es de naturaleza financiera, el administrador debe seleccionar el curso de acción que le proporcione la mejor posición monetaria general; las dos formas tradicionales de evaluar la posición monetaria de una empresa son:

a) tomar el efectivo (dinero y valores de realización inmediata) que se posea y descontar las obligaciones que se tengan que pagar a corto plazo (Pasivo a corto plazo).

b) tomar el importe del Activo circulante y restar el Pasivo a corto plazo.

Siempre que sea posible, la verificación de la opción seleccionada deberá hacerse; puesto que se podrían tener resultados no esperados si se pasó por alto alguna variable o sí fue considerada poco relevante, o en su defecto, el ambiente de la organización tuvo cambios no previsibles.

CAPITULO VIII.

TOMA DE DECISIONES EN CONDICIONES DE CERTEZA.

8.1 Segunda tipología de las situaciones de toma - de decisiones.

Esta tipología se basa en el criterio de que los - eventos futuros no pueden predecirse con seguridad, y dependiendo de la información con que se cuente sobre el estado de la naturaleza que ocurrirá, las decisiones que deban de tomarse serán en:

1) condiciones de certeza
2) condiciones de riesgo
3) condiciones de incertidumbre

8.2 Características de un problema de decisiones - en condiciones de certeza.

Las características de estas situaciones son:

1) la persona que toma las decisiones conoce el estado natural que ocurrirá con absoluta certeza.

2) conoce los resultados para cada curso de acción que considere.

Por lo anterior, al construir la matriz de decisiones sólo habrá una columna y por lógica debe escogerse el curso de acción que tenga el mayor resultado -- económico.

P.e. Supóngase que para un estado de la naturaleza "E" una persona tiene los cursos de acción A_1, A_2, A_3, A_4 a los cuales le asocia utilidades de \$10,000, \$20,000, \$15,000 y \$17,500 respectivamente. ¿Cuál será la estrategia que escogerá la persona de acuerdo con el re sultado económico?

Tabla de decisiones.

Cursos de acción	Estado de la naturaleza E
A_1	10,000
A_2	20,000
A_3	15,000
A_4	17,500

La persona eligirá el curso de acción A_2.

Como se ve, la decisión cuando se conoce el estado de la natureleza que va a ocurrir parece muy obvia, - pero la decisión se complica cuando: se poseen res--- tricciones, se asignan tareas, se transportan objetos, etc., como se verá más adelante.

8.3 Modelos de asignación.

El modelo de asignación asocia requerimientos con- medios para satisfacerlos en la proporción uno-a-uno; con la salvedad de que busca hacerlo en una forma óp- tima , ya sea maximizando o minimizando los valores - que se asocian a los requerimientos y a los medios.

8.3.1 Minimización de los modelos de asignación.

Una compañía tiene un catálogo de cinco maquilado- res (A, B, C, D, E) a los cuales recurre para pedir-- les cotizaciones para los artículos M, N, O, P, Q. -- Las cotizaciones de los maquiladores se presentan en- la siguiente matriz de costos.

Artículos	Maquiladores				
	A	B	C	D	E
M	30	74	15	64	87
N	35	72	14	60	83
O	38	67	17	64	89
P	39	71	14	63	83
Q	29	67	19	64	84

Nota; en los modelos de asignación las matrices -- tienen que ser cuadradas (igual número de renglones - que de columnas).

El problema es encontrar una asignación de artículos a maquilarse de tal forma que el costo total sea mínimo.

Las asignaciones se señalan con el número 1 (uno), y sólo debe haber una asignación en cada renglón y en cada columna de la matriz.

Para encontrar las asignaciones se procede de la - siguiente forma:

1.- se busca el elemento <u>menor</u> de cada renglón y - se resta a todos los elementos del renglón.

Artículos	Maquiladores				
	A	B	C	D	E
M	30-15=15	74-15=59	15-15=0	64-15=49	87-15=72
N	35-14=21	72-14=58	14-14=0	60-14=46	83-14=69
O	38-17=21	67-17=50	17-17=0	64-17=47	89-17=72
P	39-14=25	71-14=57	14-14=0	63-14=49	83-14=69
Q	29-19=10	67-19=48	19-19=0	64-19=45	84-19=65

Se obtiene la siguiente matriz:

Artí-culos	Maquiladores				
	A	B	C	D	E
M	15	59	0	49	72
N	21	58	0	46	69
O	21	50	0	47	72
P	25	57	0	49	69
Q	10	48	0	45	65

2.-Se busca el elemento menor de cada columna y se resta a todos los elementos de la misma.

Artí-culos	Maquiladores				
	A	B	C	D	E
M	15-10=5	59-48=11	0-0=0	49-45=4	72-65=7
N	21-10=11	58-48=10	0-0=0	46-45=1	69-65=4
O	21-10=11	50-48=2	0-0=0	47-45=2	72-65=7
P	25-10=15	57-48=9	0-0=0	49-45=4	69-65=4
Q	10-10=0	48-48=0	0-0=0	45-45=0	65-65=0

Artí-culos	Maquiladores				
	A	B	C	D	E
M	5	11	0	4	7
N	11	10	0	1	4
O	11	2	0	2	7
P	15	9	0	4	4
Q	0	0	0	0	0

La matriz que queda después de los dos primeros pasos siempre tendrá números positivos o ceros, y se le denomina "primera matriz reducida".

Si con los ceros que aparecen en la primera matriz reducida se logra asignar un medio a todos los requerimientos con la relación uno-a-uno, entonces se habrá obtenido una asignación óptima.

En el caso de no poder determinar una asignación óptima al llegar a la primera matriz reducida (como en el ejemplo).

3.-Se unen todos los ceros con el menor número de líneas (horizontales y verticales) que se pueda.

Artículos	Maquiladores				
	A	B	C	D	E
M	5	11	0	4	7
N	11	10	0	1	4
O	11	2	0	2	7
P	15	9	0	4	4
Q	0	0	0	0	0

4.-El elemento <u>menor</u> que no está atravezado por una línea debe ser: sumado a los elementos que se encuentran en la intersección de dos líneas y restado a todos los elementos que no estén atravezados por las líneas; los demás elementos de la matriz permanecen sin cambios.

En este caso el número 1 (uno) es el elemento menor.

Artí-	Maquiladores				
culos	A	B	C	D	E
M	5-1=4	11-1=10	0	4-1=3	7-1=6
N	11-1=10	10-1=9	0	1-1=0	4-1=3
O	11-1=10	2-1=1	0	2-1=1	7-1=6
P	15-1=14	9-1=8	0	4-1=3	4-1=3
Q	0	0	0+1=1	0	0

Artí-	Maquiladores				
culos	A	B	C	D	E
M	4	10	0	3	6
N	10	9	0	0	3
O	10	1	0	1	6
P	14	8	0	3	3
Q	0	0	1	0	0

5.- Se vuelven a unir los ceros con el mínimo de - líneas posibles, cuando el número mínimo de líneas -- sea igual al número de renglones (recuérdese que la - matriz es cuadrada) se habrá llegado a una asignación óptima.

Si el número de líneas no es igual al número de -- renglones se repiten cuantas veces sean necesarias -- los pasos 3 y 4.

Artí-	Maquiladores				
culos	A	B	C	D	E
M	4	10	0	3	6
N	10	9	0	0	3
O	10	1	0	1	6
P	14	8	0	3	3
Q	0	0	1	0	0

En este caso el elemento mínimo vuelve a ser el 1 (uno).

Artí-culos	Maquiladores				
	A	B	C	D	E
M	4-1=3	10-1=9	0	3-1=2	6-1=5
N	10	9	0+1=1	0	3
O	10-1=9	1-1=0	0	1-1=0	6-1=5
P	14-1=13	8-1=7	0	3-1=2	3-1=2
Q	0	0	1+1=2	0	0

Artí-culos	Maquiladores				
	A	B	C	D	E
M	3	9	0	2	5
N	10	9	1	0	3
O	9	0	0	0	5
P	13	7	0	2	2
Q	0	0	2	0	0

Se unen los ceros con el mínimo número de líneas - posibles.

Artí-culos	Maquiladores				
	A	B	C	D	E
M	3	9	0	2	5
N	10	9	1	0	3
O	9	0	0	0	5
P	13	7	0	2	2
Q	0	0	2	0	0

Se tiene que repetir el procedimiento, pues el número de líneas es 4 y el de renglones es 5.

El elemento mínimo no cruzado por líneas es el 2 - (dos).

Artículos	Maquiladores				
	A	B	C	D	E
M	3-2=1	9-2=7	0	2	5-2=3
N	10-2=8	9-2=7	1	0	3-2=1
O	9	0	0+2=2	0+2=2	5
P	13-2=11	7-2=5	0	2	2-2=0
Q	0	0	2+2=4	0+2=2	0

Artí-	Maquiladores				
culos	A	B	C	D	E
M	1	7	0	2	3
N	8	7	1	0	1
O	9	0	2	2	5
P	11	5	0	2	0
Q	0	0	4	2	0

Se procede a unir los ceros con el número mínimo - de líneas que sea posible.

Artí-	Maquiladores				
culos	A	B	C	D	E
M	1	7	0	2	3
N	8	7	1	0	1
O	9	0	2	2	5
P	11	5	0	2	0
Q	0	0	4	2	0

En éste último paso se han obtenido cinco líneas y el número de renglones es de 5 también, por lo anterior, estamos seguros de haber encontrado una solución óptima para la asignación del maquilado.

La asignación del maquilado se presenta en la matriz siguiente:

Matriz de asignaciones óptimas

Artículos	Maquiladores				
	A	B	C	D	E
M	0	0	1	0	0
N	0	0	0	1	0
O	0	1	0	0	0
P	0	0	0	0	1
Q	1	0	0	0	0

recuérdese que las asignaciones se señalan con el número 1.

La matriz anterior indica que se debe asignar:

el artículo M al maquilador C

el artículo N al maquilador D

el artículo O al maquilador B

el artículo P al maquilador E

el artículo Q al maquilador A

El costo total del maquilado será:

15 + 60 + 67 + 83+ 29 = 254

8.3.2 Maximización de los modelos de asignación.

El procedimiento para determinar las asignaciones para encontrar el beneficio máximo total, es:

1.-Se le cambia el signo a todos los elementos de la matriz original.

2.-El elemento más negativo de cada renglón se resta a todos los elementos del mismo; nótese que resultan números positivos o ceros.

3.-Hecho lo anterior,el elemento más pequeño de cada columna se resta a todos los elementos de la misma.

4.-Se siguen los lineamientos de los pasos 3, 4 y 5 señalados en el proceso de minimización.

Lo anterior se puede hacer porque el minimizar una función negativa equivale a maximizar esa función.

P.e. Considérese que en una fábrica existen cuatro torneros (A, B, C, D) y cuatro artículos (1, 2, 3, 4) que necesitan "pasar" por el torno, y que de acuerdo con la experiencia, se pueden fabricar diariamente un determinado número de artículos como se señala en la matriz siguiente:

Producción por la asignación de torneros

Artículos	Torneros			
	A	B	C	D
1	30	74	64	87
2	35	72	60	83
3	38	67	64	89
4	39	71	63	83

Encuéntrese la asignación con la cual se obtiene la máxima producción diaria.

Paso 1

Artí-culos	Torneros A	B	C	D
1	-30	-74	-64	-87
2	-35	-72	-60	-83
3	-38	-67	-64	-89
4	-39	-71	-63	-83

Paso 2

Artí-culos	Torneros A	B	C	D
1	-30-(-87)=57	-74-(-87)=13	-64-(-87)=23	-87-(-87)=0
2	-35-(-83)=48	-72-(-83)=11	-60-(-83)=23	-83-(-83)=0
3	-38-(-89)=51	-67-(-89)=22	-64-(-89)=25	-89-(-89)=0
4	-39-(-83)=44	-71-(-83)=12	-63-(-83)=20	-83-(-83)=0

Artí-culos	Torneros A	B	C	D
1	57	13	23	0
2	48	11	23	0
3	51	22	25	0
4	44	12	20	0

Paso 3

Artí-culos	Torneros A	B	C	D
1	57-44=13	13-11=2	23-20=3	0-0=0
2	48-44=4	11-11=0	23-20=3	0-0=0
3	51-44=7	22-11=11	25-20=5	0-0=0
4	44-44=0	12-11=1	20-20=0	0-0=0

Artí- culos	Torneros			
	A	B	C	D
1	13	2	3	0
2	4	0	3	0
3	7	11	5	0
4	0	1	0	0

Paso 4

Artí- culos	Torneros			
	A	B	C	D
1	13	2	3	0
2	4	0	3	0
3	7	11	5	0
4	0	1	0	0

Como el número de líneas es tres y el número de renglones es cuatro, se debe seguir con el procedimiento.

El número menor no cruzado por líneas es el 2 (dos)

Artí- culos	Torneros			
	A	B	C	D
1	13-2=11	2-2=0	3-2=1	0
2	4	0	3	0+2=2
3	7-2=5	11-2=9	5-2=3	0
4	0	1	0	0+2=2

Artículos	Torneros			
	A	B	C	D
1	11	0	1	0
2	4	0	3	2
3	5	9	3	0
4	0	1	0	2

Se unen los ceros con el mínimo de líneas que sean posibles.

Artículos	Torneros			
	A	B	C	D
1	11	0	1	0
2	4	0	3	2
3	5	9	3	0
4	0	1	0	2

Nuevamente el número de líneas es tres, por lo tanto, repetimos el procedimiento.

El número menor no cruzado por líneas es el 1 (uno)

Artículos	Torneros			
	A	B	C	D
1	11-1=10	0	1-1=0	0
2	4-1=3	0	3-1=2	2
3	5-1=4	9	3-1=2	0
4	0	1+1=2	0	2+1=3

Artí-	Torneros			
culos	A	B	C	D
1	10	0	0	0
2	3	0	2	2
3	4	9	2	0
4	0	2	0	3

Artí-	Torneros			
culos	A	B	C	D
1	10	0	0	0
2	3	0	2	2
3	4	9	2	0
4	0	2	0	3

Como el número de líneas es cuatro y el número de-renglones también, se ha logrado una asignación ópti-ma que se presenta en la matriz siguiente.

Matriz de asignaciones óptimas

Artí-	Torneros			
culos	A	B	C	D
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	0	0	1
4	1	0	0	0

esta matriz señala que:

el artículo 1 debe ser producido por el tornero C

el artículo 2 debe ser producido por el tornero B

el artículo 3 debe ser producido por el tornero D

el artículo 4 debe ser producido por el tornero A

Hecha la asignación de artículos la producción dia-ria total será de:

$64 + 72 + 89 + 39 = 264$ artículos

8.4 Modelos de transporte.

Los modelos de transporte tratan de los problemas-en que se tienen artículos almacenados (o producidos) en diversos lugares (m lugares) y es necesario llevarlos a sus centros de consumo (n centros); el objetivo es reducir al mínimo el costo de transporte y satisfacer los requerimientos de los centros de consumo.

Para estos modelos no es necesario que los lugares de almacenamiento (m) sean iguales a los centros de consumo (n), pero el total de los requerimientos de los centros sí debe ser igual al total de la capacidad que se les puede surtir desde los lugares de almacenamiento.

Los métodos de transporte se desarrollarán con el ejemplo siguiente.

Una compañía cuenta con tres fábricas de sillas, localizadas en las ciudades de Puebla, Torreón y Celaya, con capacidades de producción de 1,000, 1,500 y 750 sillas respectivamente, los centros de consumo en los cuales se van a vender las sillas son: Distrito Federal, Guadalajara, Monterrey, Tijuana y Mérida, la demanda esperada en cada centro es como sigue:

Centros de demanda	Unidades demandadas
Distrito Federal	1,400
Guadalajara	500
Monterrey	600
Tijuana	200
Mérida	300
T O T A L :	3,000

Los costos de transporte de cada silla de las fábricas a los centros de consumo se detallan en la siguiente matriz:

	Centros de demanda				
Fábricas	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.
Pue.	5	20	25	75	45
Tor.	20	15	4	40	80
Cel.	15	3	10	45	60

Con la información anterior se procede a la construcción de la matriz de transporte.

	Centros de demanda					
Fábricas	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Disponibles
Pue.	$\boxed{5}$	$\boxed{20}$	$\boxed{25}$	$\boxed{75}$	$\boxed{45}$	1,000
Tor.	$\boxed{20}$	$\boxed{15}$	$\boxed{4}$	$\boxed{40}$	$\boxed{80}$	1,500
Cel.	$\boxed{15}$	$\boxed{3}$	$\boxed{10}$	$\boxed{45}$	$\boxed{60}$	750
Demanda	1,400	500	600	200	300	

Disponibles 3,250 Demanda 3,000

Nótese que el número total de sillas demandadas y de sillas disponibles difieren, esta es una restricción de los modelos de transporte, para salvar éste obstáculo, se crea un centro de consumo ficticio, al cual se le asigna la diferencia entre las sillas disponibles y las sillas demandadas y con un costo de transporte de cero, que significa que realmente no se transportan las sillas.

De acuerdo con lo anterior la matriz de transporte será:

Centros de demanda

Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fic.	Dispon.
Pue.	5	20	35	75	45	0	1,000
Tor.	20	15	4	40	80	0	1,500
Cel.	15	3	10	45	60	0	750
Dem.	1,400	500	600	200	300	250	3,250

8.4.1 Método de la esquina noroeste.

En éste método la asignación se inicia por la celda noroeste de la matriz.

NO	N	NE
O		E
SO	S	SE

Para esa celda se ve cual es la cantidad de artículos disponibles y cual la de artículos demandados, se asigna el número de unidades que sea menor.

En este caso las unidades disponibles son 1,000 y las demandadas 1,400, entonces se asignan a la celda noroeste la cantidad de 1,000 sillas.

Centros de demanda

Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Dispon.
Pue.	5 1,000	20	35	75	45	0	~~1,000~~
Tor.	20	15	4	40	80	0	1,500
Cel.	15	3	10	45	60	0	750
Dem.	~~1,400~~ 400	500	600	200	300	250	2,250

Con el paso anterior, ya no habrá unidades disponibles en la fábrica de Puebla y se eliminará ese -- renglón para efectos de asignación; la demanda del - D.F. se verá reducida a 400 unidades.

Como se eliminó el primer renglón, la nueva esquina noroeste es la primera celda del segundo renglón.- Para esa celda las sillas disponibles son 1,500 y las demandadas son 400, se asignan a esa celda 400 unidades.

Centro de demanda

Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Dispon.
Pue.	1,000 $\boxed{5}$	$\boxed{20}$	$\boxed{25}$	$\boxed{75}$	$\boxed{45}$	$\boxed{0}$	0
Tor.	400 $\boxed{20}$	$\boxed{15}$	$\boxed{4}$	$\boxed{40}$	$\boxed{80}$	$\boxed{0}$	~~1,500~~ 1,100
Cel.	$\boxed{15}$	$\boxed{3}$	$\boxed{10}$	$\boxed{45}$	$\boxed{60}$	$\boxed{0}$	750
Dem.	~~400~~	500	600	200	300	250	1,850

Ahora se satisfizo completamente la demanda del D. F. y se elimina esa columna para efectos de asignación, permanecen 1,100 sillas disponibles en la fábrica de Torreón,

Eliminados el primer renglón y la primera columna, ahora la esquina noroeste es la primera celda que aparece a la izquierda de la matriz, celda Torreón-Guadalajara, y se realizan los pasos anteriores en forma iterativa.

Al continuar en la forma descrita se obtiene un movimiento hacia el sureste de la matriz.

Para el ejemplo, la matriz de asignaciones por el método de la esquina noroeste será:

Centros de demanda

Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Dispon.
Pue.	1,000 $\boxed{5}$	$\boxed{20}$	$\boxed{25}$	$\boxed{75}$	$\boxed{45}$	$\boxed{0}$	1,000
Tor.	400 $\boxed{20}$	500 $\boxed{15}$	600 $\boxed{4}$	$\boxed{40}$	$\boxed{80}$	$\boxed{0}$	1,500
Cel.	$\boxed{15}$	$\boxed{3}$	$\boxed{10}$	200 $\boxed{45}$	300 $\boxed{60}$	250 $\boxed{0}$	750
Dem.	1,400	500	600	200	300	250	3,250

El costo del transporte es:

1,000(5)+400(20)+500(15)+600(4)+200(45)+300(60)+250(0)=
5,000+8,000+7,500+2,400+9,000+18,000+0 = 49,900

Con esta matriz de asignaciones se ha logrado una solución "factible" (todos los renglones y columnas han quedado satisfechos), pero como se ve, el método de la esquina noroeste no toma en cuenta los costos de transporte; enseguida se verán dos métodos que sí toman en cuenta el costo para hacer la asignación.

8.4.2 Método de inspección.

En el método de inspección se busca la celda de la matriz de transporte que tenga el costo menor (sin tomar en cuenta la columna ficticia) y se le asignan tantas unidades como lo permitan el origen y el destino correspondientes, si existen dos o más costos menores (iguales) la decisión de la asignación es arbitraria.

En el ejemplo encontramos que la celda con el menor costo unitario es la Celaya-Guadalajara, celda a la cual corresponden 500 sillas demandadas y 750 disponibles, la asignación será de 500 sillas que es lo máximo que permite la demanda.

Centros de demanda

Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Dispon.
Pue.	$\boxed{5}$	$\boxed{20}$	$\boxed{25}$	$\boxed{75}$	$\boxed{45}$	$\boxed{0}$	1,000
Tor.	$\boxed{20}$	$\boxed{15}$	$\boxed{4}$	$\boxed{40}$	$\boxed{80}$	$\boxed{0}$	1,500
Cel.	$\boxed{15}$	500 $\boxed{3}$	$\boxed{10}$	$\boxed{45}$	$\boxed{60}$	$\boxed{0}$	~~750~~ 250
Dem.	1,400	~~500~~ 0	600	200	300	250	2,750

Queda satisfecho el centro de demanda Guadalajara, razón por la cual se elimina la columna de Guadalajara para efectos de asignación; la disponibilidad de la fábrica de Celaya se ve disminuida a 250 unidades.

Se busca la siguiente celda que tenga el costo de transporte más bajo y se procede a hacer la asignación de unidades, tantas como lo permitan el origen y el destino involucrados.

Para el ejemplo, ahora el costo menor es el de la celda Torreón-Monterrey a la cual le corresponden 600 sillas demandadas y 1,500 sillas disponibles, la asignación se hará por 600 unidades que es lo máximo que permite la demanda.

El proceso sigue hasta que se han satisfecho todas las demandas. La demanda ficticia se satisface al final.

Para el ejemplo, la matriz de asignaciones utilizando el método de inspección es:

Centros de demanda							
Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Dispo.
Pue.	1,000 [5]	[20]	[25]	[75]	[45]	[0]	1,000
Tor.	150 [20]	[15]	600 [4]	200 [40]	300 [80]	250 [0]	1,500
Cel.	250 [15]	500 [3]	[10]	[45]	[60]	[0]	750
Dem.	1,400	500	600	200	300	250	3,250

con un costo total de:

1,000(5)+150(20)+250(15)+500(3)+600(4)+200(40)+300(80) + 250(0) =

5,000+3,000+3,750+1,500+2,400+8,000+24,000+0=47,650

Por el método de inspección se obtuvo un ahorro - de 2,250 en relación al método de la esquina noroeste.

8.4.3 Método de Vogel.

Los pasos del método de Vogel son:

1.-Se obtiene la diferencia entre los dos números más pequeños de cada renglón y de cada columna y se colocan en el margen derecho e inferior de la matriz original.

2.-Se selecciona la columna o el renglón con mayor diferencia y se hace la máxima asignación posible en la celda que tiene el costo menor de la columna o del renglón seleccionado.

	Centros de demanda							
Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Disp.	Dif.
Pue.	[5]	[20]	[25]	[75]	[45]	[0]	1,000	5
Tor.	[20]	[15]	[4]	[40]	[80]	[0]	1,500	4
Cel.	[15]	[3]	[10]	[45]	[60]	[0]	750	3
Dem.	1,400	500	600	200	300	250	3,250	
Dif.	10	12	6	5	15 *	0		

De acuerdo con el paso 2, se debe seleccionar la columna de Mérida, pues es la que mayor diferencia - tiene entre sus dos costos menores; y asignar 300 -- unidades a la celda con costo de 45 que es el menor costo de la columna , hecho lo anterior se obtiene - la siguiente matriz.

Dentros de demanda								
Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Disp.	Dif.
Pue.	5	20	25	75	45 300	0	700	5
Tor.	20	15	4	40	80	0	1,500	4
Cel.	15	3	10	45	60	0	750	3
Dem.	1,400	500	600	200	0	250	2,950	
Dif.	10	12	6	5		0		

3.-Si se ha satisfecho totalmente la demanda de un centro de consumo o se han agotado las existencias -- disponibles de un centro de distribución, se elimina- esa columna o ese renglón (según el caso) para cual-- quier consideración futura.

En el ejemplo la eliminación de la columna de Mérida daría origen a la siguiente matriz:

Centros de demanda								
Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Disp.	Dif.
Pue.	5	20	25	75		0	700	5
Tor.	20	15	4	40		0	1,500	4
Cel.	15	3	10	45		0	750	3
Dem.	1,400	500	600	200		250	2,950	
Dif.	10	12	6	5		0		

4.-Se repiten los pasos 1, 2 y 3 cuantas veces sean necesarias hasta llegar a hacer todas las asignaciones.

A continuación se ilustran las iteraciones del método de Vogel para el ejemplo:

Centros de demanda								
Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Disp.	Dif.
Pue.	$\boxed{5}$	$\boxed{20}$	$\boxed{25}$	$\boxed{75}$		$\boxed{0}$	700	5
Tor.	$\boxed{20}$	$\boxed{15}$	$\boxed{4}$	$\boxed{40}$		$\boxed{0}$	1,500	4
Cel.	$\boxed{15}$	500 $\boxed{3}$	$\boxed{10}$	$\boxed{45}$		$\boxed{0}$	250	3
Dem.	1,400	0	600	200		250	2,450	
Dif.	10	12	6	5		0		
		*						

Centros de demanda								
Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Disp.	Dif.
Pue.	700 $\boxed{5}$		$\boxed{25}$	$\boxed{75}$		$\boxed{0}$	0	5
Tor.	$\boxed{20}$		$\boxed{4}$	$\boxed{40}$		$\boxed{0}$	1,500	4
Cel.	$\boxed{15}$		250 $\boxed{10}$	$\boxed{45}$		$\boxed{0}$	0	10*
Dem.	700		350	200		250	1,500	
Dif.	10		6	5		0		
	*							

Centros de demanda								
Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Disp.	Dif.
Pue.								
Tor.	$\boxed{20}$		$\boxed{4}$	200 $\boxed{40}$		$\boxed{0}$	1,300	4
Cel.								
Dem.	700		350	0		250	1,300	
Dif.	20		4	40		0		
				*				

Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Disp.	Dif.
	Centros de demanda							
Pue.								
Tor.	700 [20]		[4]			[0]	600	4
Cel.								
Dem.	0		350			250	600	
Dif.	20		4			0		
	*							

Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Disp.	Dif.
	Centros de demanda							
Pue.								
Tor.			350 [4]			250 [0]	0	4 *
Cel.								
Dem.			0			0	0	
Dif.			4			0		
			*					

La matriz de asignaciones por el método de Vogel - es:

Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Dispo.
	Centros de demanda						
Pue.	700 [5]	[20]	[25]	[75]	300 [45]	[0]	1,000
Tor.	700 [20]	[15]	350 [4]	200 [40]	[80]	250 [0]	1,500
Cel.	[15]	500 [3]	250 [10]	[45]	[60]	[0]	750
Dem.	1400	500	600	200	300	250	3,250

Con un costo total de:

700(5)+700(20)+500(3)+350(4)+250(10)+200(40)+300(45)+
+250(0) =
3,500+14,000+1,500+1,400+2,500+8,000+13,500+0=44,400

Comparando el costo por éste método,obtenemos un ahorro de 5,500 con respecto al método de la esquina noroeste y de 3,250 con respecto al método de inspección.

8.4.4 Método del cruce del arroyo.

Los métodos de transporte de la esquina noroeste, de inspección y de Vogel sólo nos permiten determinar una solución factible que no necesariamente es la óptima, y ésta la podemos lograr haciendo unos arreglos a las soluciones factibles.

En primer término se procede a comprobar si la solución es "degenerada". La prueba de la no degeneración es m + n - 1, donde: n= número de centros de distribución (renglones)
m= número de centros de demanda (columnas)

si el número de asignaciones es menor de m + n - 1 existe el problema de no poder hacer una evaluación de celdas vacías (se verá esto más adelante).

Procedamos a comprobar si las asignaciones son o no degeneradas. m = 6 n = 3
entonces m + n - 1 = 6 + 3 - 1 = 8
que es el número de asignaciones que logramos en los tres métodos anteriores, por lo tanto la solución es no degenerada.

Después de probar la no degeneración, se procede a comprobar la optimálidad de las asignaciones, lo -- cual se hará en la siguiente forma:

1.-Se hace una matriz que contenga los costos unitarios de las celdas a las cuales se les han hecho las asignaciones, se usará la matriz de asignaciones por-el método de Vogel, por ser la que en el ejemplo tuvo el costo total menor (por tener el costo total menor-se supone que es la más cercana a la óptima).

5				45	
20		4	40		0
	3	10			

2.-Se colocan números en la parte superior y en el margen izquierdo de la matriz, de tal forma que sumados estos números cuando se cruzan sean iguales a los de la matriz anterior (con suma algebráica).

	5	-18	-11	25	45	-15
0	5				45	
15	20		4	40		0
21		3	10			

3.-Se llenan las celdas vacías con la suma (algebráica) de los números colocados en la parte superior e izquierda de la matriz.

	5	-18	-11	25	45	-15
0		-18	-11	25		-15
15		- 3			60	
21	26			46	66	6

4.-Los números del cuerpo de la matriz anterior se restan a los costos unitarios de las celdas vacías.

	20-(-18)=38	25-(-11)=36	75-25=50		0-(-15)= 15	
	15-(-3)=18			80-60=20		
15-26=11			45-46=1	60-66=6	0-6= 6	
				*	*	

5.-Si al efectuar la resta resulta por lo menos un número negativo, la solución no es óptima.

En este ejemplo, la solución por el método de Vogel no es óptima.

Con el objeto de encontrar la solución óptima se - procede a hacer la evaluación de las celdas vacías -- (sin asignación).

La evaluación de celdas vacías muestra el efecto - en el costo total de añadir una unidad a una celda vacía determinada, el procedimiento se ilustrará con la matriz de asignaciones por el método de Vogel.

Se evaluará la celda vacía (sin asignación) Celaya -D.F.

Si se añade una unidad a la celda Cel-D.F. le costará 15 pesos a la empresa, pero si se añade una unidad a esta celda se tendrá que restar una unidad a la celda Torreón-D.F. para que la columna del D.F. sigateniendo 1,400 unidades, esta acción le ahorrará a la empresa 20 pesos, pero quedará con una unidad menos - el renglón de Torreón, entonces habrá que sumar otra- unidad a la celda Torreón-Monterrey a un costo de 4 - pesos, con esto la columna de Monterrey tendrá una -- unidad más que a su vez será restada a la celda Celaya-Monterrey con lo cual el costo se verá reducido en 10 pesos y como al principio se había añadido una unidad a la celda Celaya-D.F., el total del renglón de - Celaya sigue manteniendo 750.

En resumen, se añadió una unidad a la celda Cel-D. F., se restó de la Torreón-D.F., se sumó una a la --- Torreón-Monterrey y se quitó de la Celaya-Monterrey;- en cuanto al costo, se sumaron 15 (Cel.-D.F.), se restaron 20 (Tor-D.F.) se sumaron 4 (Tor-Mont.) y se restaron 10 (Cel-Mont), en total la operación tuvo un -- ahorro de 11 pesos (15 - 20 + 4 - 10 = -11).

Lo anterior significa que por cada unidad añadida- a la celda Cel-D.F. la empresa se ahorrará 11 pesos.

El movimiento realizado se detalla en la matriz siguiente, en donde se señala con un signo menos (-) -- las celdas en las que se quita una unidad.

	Centros de demanda						
Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Dispo.
Pue.	700 [5]	[20]	[25]	[75]	300 [45]	[0]	1,000
Tor.	699 - [20]	[15]	351 [4]	200 [40]	[80]	250 [0]	1,500
Cel.	1 [15]	500 [3]	249 - [10]	[45]	[60]	[0]	750
Dem.	1,400	500	600	200	300	250	3,250

Obsérvese que el movimiento siempre es uno vertical y uno horizontal o viceversa. No se permite repetir consecutivamente un mismo tipo de movimiento.

Cabe señalar que algunas veces el encontrar el desplazamiento de las unidades no es fácil, porque siempre hay que tomar en consideración que se debe respetar el número total de la demanda o de los requerimientos para la celda en que se añada o reste una unidad.

P.e. Si se añade una unidad a la celda Puebla-Guadalajara, el movimiento sería:

Centros de demanda							
Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Disp.
Pue.	699 − [5]	1 [20]	[25]	[75]	300 [45]	[0]	1,000
Tor.	701 [20]	[15]	349 − [4]	200 [40]	[80]	250 [0]	1,500
Cel.	[15]	499 − [3]	251 [10]	[45]	[60]	[0]	750
Dem.	1,400	500	600	200	300	250	3,250

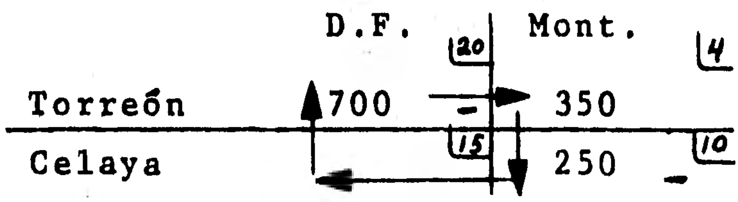
La siguiente tabla señala los ahorros o pérdidas que se tendrían al añadir una unidad a las diversas celdas vacías (si las celdas tienen varias rutas para hacer la asignación, se incluirá la cantidad más negativa que de ellas resulte).

		Costo	
Celdas vacías		Aumento	Disminución
Celaya-D.F.	15 -10 + 4 -20		-11
Puebla-Guad.	20-5+20-4+10-3+2	40	
Torreón-Guad.	15 - 4 + 10 - 3	18	
Puebla-Mont.	25 - 4 + 20 - 5	36	

Celdas vacías		Costo Aumento	Disminución
Puebla-Tijuana	75-40+20-5	50	
Torreón-Mérida	80-20+5-45	20	
Celaya-Mérida	60-10+4-20+5-45		-6
Puebla-Ficticia	0-5+20-0	15	
Celaya-Ficticia	0-10+4-0		-6

Se escoge la cifra más negativa, en éste caso Celaya-D.F. lo cua hará que el embarque sea a un costo menor.

Aún falta determinar el número de unidades que se pueden cambiar dentro de la ruta de desplazamiento de las unidades de esta celda. Tenemos:



Lo máximo que se puede mover dentro de esta ruta son 250 unidades, si se hiciera en una cantidad mayor, la celda Celaya-Monterrey tendría unidades negativas, lo que por lógica no puede ser.

Se procede a añadir 250 unidades a la celda Celaya-D.F. y se obtiene el costo total de embarque. Recuérdese que se tomó como base las asignaciones por el método de Vogel.

	Centros de demanda						
Fáb.	D.F.	Guad.	Mont.	Tij.	Mér.	Fict.	Dispo.
Pue.	700 [5]	[20]	[25]	[75]	300 [45]	[0]	1,000
Tor.	450 [20]	[15]	600 [4]	200 [40]	[80]	250 [0]	1,500
Cel.	250 [15]	500 [3]	[10]	[45]	[60]	[0]	750
Dem.	1,400	500	600	200	300	250	3,250

Costo total:

700(5)+450(20)+250(15)+500(3)+600(4)+200(40)+300(45)+
+250(0) =

3,500+9,000+3,750+1,500+2,400+800+13,500+0 = 34,450

Este costo comparado con los métodos anteriores -- presenta los siguientes ahorros:

Método de la esquina noroeste	$ 15,450
Método de inspección	13,200
Método de Vogel	9,950

Para estar seguros de que ésta es la solución óptima, se tienen que probar dos cosas: la no degeneración y sí es o no óptima la asignación.

a) Prueba de la no degeneración:

$$m + n - 1 = 6 + 3 - 1 = 8$$

y es precisamente 8 el número de asignaciones que se hizo, por lo tanto la solución es no degenerada.

b)Prueba de la optimalidad de la asignación:

Se toman los costos unitarios de las celdas en donde se hicieron asignaciones y se ponen los números -- en los margenes superior e izquierdo para igualar--los.

	15	3	-1	35	55	-5
-10	5				45	
5	20		4	40		0
0	15	3				

Ahora se llenan las celdas vacías con las sumas de los números exteriores.

	15	3	-1	35	55	-5
-10		7	-11	25		-15
5		8			60	
0			-1	35	55	-5

Se restan los números de la matriz anterior a los números de los costos unitarios de las celdas vacías.

	20-7=13	25-(-11)=36	75-25=50		0-(-15)=15
	15-8=7			80-60=20	
		10-(-1)=11	45-35=10	60-55=5	0-(-5)=5

Como no resulta ningún número negativo la solución es óptima.

Resumiendo, en los modelos de transporte creo conveniente emplear el método de Vogel, puesto que además de dar una solución no degenerada es la que (generalmente) más se aproxima a la solución óptima; sí se ha hecho la evaluación de celdas vacías y se encuentra que la nueva asignación no es la óptima, se tendrá que volver a hacer la evaluación cuantas veces sean necesarias hasta encontrar la asignación óptima.

CAPITULO IX.

TOMA DE DECISIONES EN CONDICIONES DE RIESGO.

En el capítulo anterior se vió en forma somera las decisiones en condiciones de certidumbre, en donde se destacó que la persona que decide conoce el estado de la naturaleza que ocurrirá. En los negocios pocas veces se conoce cual estado de la naturaleza ocurrirá - y es por esta razón que se detallan diversos estados- de la naturaleza (que sean factibles) y a cada uno de ellos, de acuerdo con la experiencia o criterio de la persona que decide, se le asigna una probabilidad de- ocurrencia.

9.1 Características de un problema de decisiones - en condiciones de riesgo.

La principal característica de un problema de decisiones en condiciones de riesgo es que: existe un número de estados de la naturaleza factibles y quien -- toma las decisiones conoce o asigna la probabilidad - de ocurrencia a cada uno de ellos.

9.2 Valor monetario esperado.

9.2.1 Tabla de consecuencias condicionales.

La tabla de consecuencias condicionales se aplica- a problemas en que primordialmente se encuentran involucradas la oferta y la demanda, el concepto y los pasos para la construcción de esta tabla se explicarán- con el ejemplo siguiente.

El Sr. Martínez posee un puesto de manzanas en un- mercado, su forma de operar es la siguiente: compra - cada caja de manzanas en $550 que después vende en --

$900 (tiene una ganancia de $350 por caja), pero si - no vende una caja de manzanas en un día tiene que --- ofrecerla a una pastelería, pues de lo contrario las- manzanas se pudrirían, la pastelería le compra cada - caja de manzanas en $400, con lo que tiene el vende-- dor una pérdida de $150 por caja.

Según su experiencia la demanda fluctúa entre ocho y doce cajas de manzanas diarias.

El problema consiste en determinar ¿qué número de- cajas deberá comprar diariamente para satisfacer la- demanda y obtener el máximo de utilidades posibles?

Supóngase que un día compra 10 cajas de manzanas y que la demanda de ese día fue sólo de nueve cajas, el resultado de ese día será:

Ganancia en 9 cajas ($350 X 9)	$ 3,150
Menos:	
Pérdida por no haber vendido	
una caja ($150 X 1)	150
Consecuencia condicional	$ 3,000

Ahora supóngase que el Sr. Martínez compra ocho ca jas de manzanas y la demanda de ese día fue de 10 ca- jas, el resultado que tendría en esa ocasión sería:

Ganancia en 8 cajas ($350 X 8)	$ 2,800
Consecuencia condicional	$ 2,800

Nótese que en este caso no existe pérdida por no - haber vendido mercancía que le demandaban (además se- supone que no está en juego el prestigio del vende--- dor).

Si se sigue el mismo criterio se podrán relacionar las consecuencias condicionales que tendría el Sr. -- Martínez, de acuerdo a la demanda específica de un -- día y el número de cajas que haya comprado ese día.

Tabla de consecuencias condicionales.

Existencias	Demanda 8	9	10	11	12
8	2,800	2,800	2,800	2,800	2,800
9	3,000	3,150	3,150	3,150	3,150
10	3,200	3,350	3,500	3,500	3,500
11	3,400	3,550	3,700	3,850	3,850
12	3,600	3,750	3,900	4,050	4,200

La tabla de consecuencias condicionales no señala-cuantas cajas debe de comprar cada día el Sr. Martí--nez para obtener las mayores utilidades posibles, só-lo muestra las ganancias que tendría el Sr. Martínez-de acuerdo al número de cajas compradas y el número -de cajas vendidas en un día específico.

9.2.2 Tabla de consencuencias esperadas.

Como se ve, la tabla de consencuencias condiciona-les no resuelve el problema de determinar el número -de cajas que debe comprar el Sr. Martínez para obte--ner el máximo de utilidades.

El problema se resuelve si se analiza como se com-porta la demanda. Supóngase que el Sr. Martínez deter minó que en un total de 100 días el número de cajas -de manzanas que vendió diariamente se describe en la-siguiente tabla.

Demanda (cajas)	Número de días	Probabilidad
8	10	.10
9	25	.25
10	40	.40
11	20	.20
12	5	.05
Totales	100	1.00

Las consecuencias condicionales y los factores de probabilidad de la demanda se juntan y se obtiene el valor monetario esperado (V. M. E.) para todas las alternativas de acción que se consideren.

El valor monetario esperado se determina sumando el producto de la probabilidad de ocurrencia de la demanda por la consecuencia condicional para cada curso de acción considerado.

P.e. Calcular el V.M.E. cuando el Sr. Martínez compra 10 cajas de manzanas.

Demanda	8	9	10	11	12
Consecuencia condicional	3,200	3,350	3,500	3,500	3,500
Probabilidad de demanda	.10	.25	.40	.20	.05
	320 +	837.5+	1,400 +	700 +	175 =

3,432.50

El valor monetario esperado para el curso de acción de comprar 10 cajas es de $3,432.50

Siguiendo el modelo anterior, calcúlese el valor monetario esperado para todos los cursos de acción que puede tomar el señor Martínez. La tabla que muestra el valor monetario esperado para cada curso de acción se denomina "Tabla de consecuencias esperadas".

Tabla de consecuencias esperadas.

Cajas a comprar	Consecuencias esperadas (V.M.E.)
8	$ 2,800.00
9	3,135.00
10	3,432.50
11	3,670.00
12	3,877.50

De acuerdo con el criterio del valor monetario esperado el Sr. Martínez debe comprar 12 cajas diariamente, ya que esto le dará las mayores ganancias en un período "largo" (bajo el supuesto de que la demanda se comportará como en el pasado).

Se recalca que no se elimina la incertidumbre del problema, sino que sólo se ha aprovechado la experiencia.

$3,877.50 es un promedio de utilidad al comprar 12 cajas durante un período "largo".

9.3 Criterio de decisión Bayesiano.

En el problema anterior el Sr. Martínez supuso que la demanda pasada es lo suficientemente buena como para estimar la demanda futura, pero en el caso de que se hubiera modificado subjetivamente la probabilidad de ocurrencia de la demanda, o que la demanda sea sumamente cambiante y la probabilidad de ésta se hubiese estimado por otro medio diferente a la experiencia, se estaría ante un problema de decisión de valor monetario esperado calculado con probabilidad subjetiva -

al cual se le denomina "criterio de decisión bayesiano".

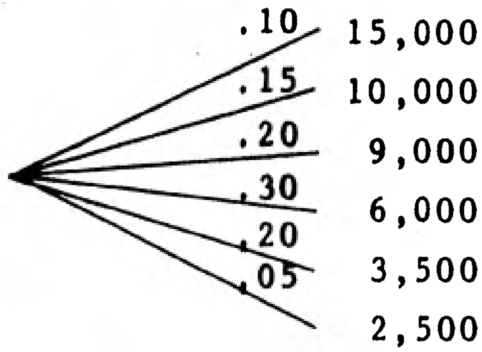
Cuando se utiliza el criterio bayesiano en la toma de decisiones se elige el curso de acción con mayor valor monetario esperado, el cual se calcula igual que cuando se emplea probabilidad empírica.

9.4 Loterías.

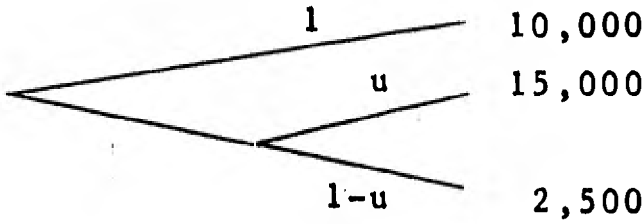
Antes de definir el concepto de lotería es necesario delimitar lo que es una "función de utilidad"; la "función de utilidad" es una función numérica de los cursos de acción posibles en la que la persona que decide elige la alternativa que maximiza su utilidad esperada.

Una "lotería" es un suceso aleatorio que tiene un conjunto de premios (resultados) posibles a los cuales se les asocia una probabilidad.

P.e. Supóngase que en una rifa las posibilidades de obtener diversos premios se representan en el siguiente diagrama:



Si se asocia al premio más favorable una función de utilidad de 1 (uno) y al premio más desfavorable una utilidad de 0 (cero) y si para cada premio diferente del máximo y del mínimo se pudiera redefinir la lotería como en el diagrama siguiente (para el caso - del premio de 10,000).



se tendría la certeza de ganar 10,000 y un probabilidad "u" de ganar 15,000.

Ahora se pregunta a un jugador ¿para qué probabilidad de "u" (probabilidad de ganar el premio mayor) le sería indiferente recibir el premio de 10,000 con certeza o jugar la rifa (lotería) con premios de $15,000 y de 2,500? A el valor que el jugador asigne a "u" - se le conoce como función de utilidad del decisor y - señala la utilidad del premio de 10,000.

En resumen, la función de utilidad es la actitud - de un decisor ante la probabilidad de ganar o perder- algo en una situación de riesgo.

Supóngase que los índices de utilidad para cada -- premio son los siguientes:

u 15,000 = 1.00	u 6,000 = .15
u 10,000 = .40	u 3,500 = .05
u 9,000 = .30	u 2,500 = .00

Se calcula la utilidad esperada para cada premio.

Premio	15,000	10,000	9,000	6,000	3,500	2,500
Probabilidad	.10	.15	.20	.30	.20	.05
Utilidad	1.00	.40	.30	.15	.05	0.00
Util.esperada	0.10	.06	.06	.045	.01	0.00

Si se busca maximizar la utilidad esperada en toda ocasión que se tenga, se preferirá buscar el premio más favorable aún teniendo la seguridad de un premio más pequeño y corriendo el riesgo de ganar el premio más desfavorable.

El criterio de la utilidad tiene aplicaciones cuando se cuenta con un conjunto de cursos de acción en los que cada uno tiene diversas consecuencias monetarias.

P.e. Un equipo profesional de futbol recibe proposiciones para jugar en dos plazas diferentes, coincidentemente las proposiciones son para jugar el mismo día, lo cual el equipo no lo puede hacer, y tiene que decidirse por una proposición o desechar ambas.

De acuerdo con las proposiciones, el equipo recibiría un procentaje de taquilla. Por estimaciones que hace el club las consecuencias (utilidades o pérdidas) y sus probabilidades al aceptar las ofertas, serían:

Proposición 1		Proposición 2	
Consecuencias	Prob.	Consecuencias	Prob.
$ 800,000	.20	$ 1,000,000	.25
500,000	.35	650,000	.35
300,000	.30	400,000	.30
- 100,000	.15	- 200,000	.10

Las consecuencias de las dos proposiciones se ordenan en forma preferencial.

1,000,000, 800,000, 650,000, 500,000, 400,000, 300,000, 0, - 100,000, - 200,000.

Se incluye el resultado $0.00 por si se decide no-aceptar ninguna proposición.

Se localizan las consecuencias más favorables - -- 1,000,000 y más desfavorables -200,000 y se les asignan utilidades de 1 y 0 respectivamente.

Para construir el resto de la función de utilidad- se pregunta al decisor ¿para qué valor de "u" le es - indiferente aceptar un determinado premio con certeza o jugar una lotería con los valores de 1,000,000 y -- -200,000?

Los valores que da de "u" para cada premio específico forman la función de utilidad.

u $ 1,000,000 =	1.00	u $ 300,000 =	.25
u 800,000 =	.63	u 0 =	.10
u 650,000 =	.46	u -100,000 =	.08
u 500,000 =	.37	u -200,000 =	0.00
u 400,000 =	.30		

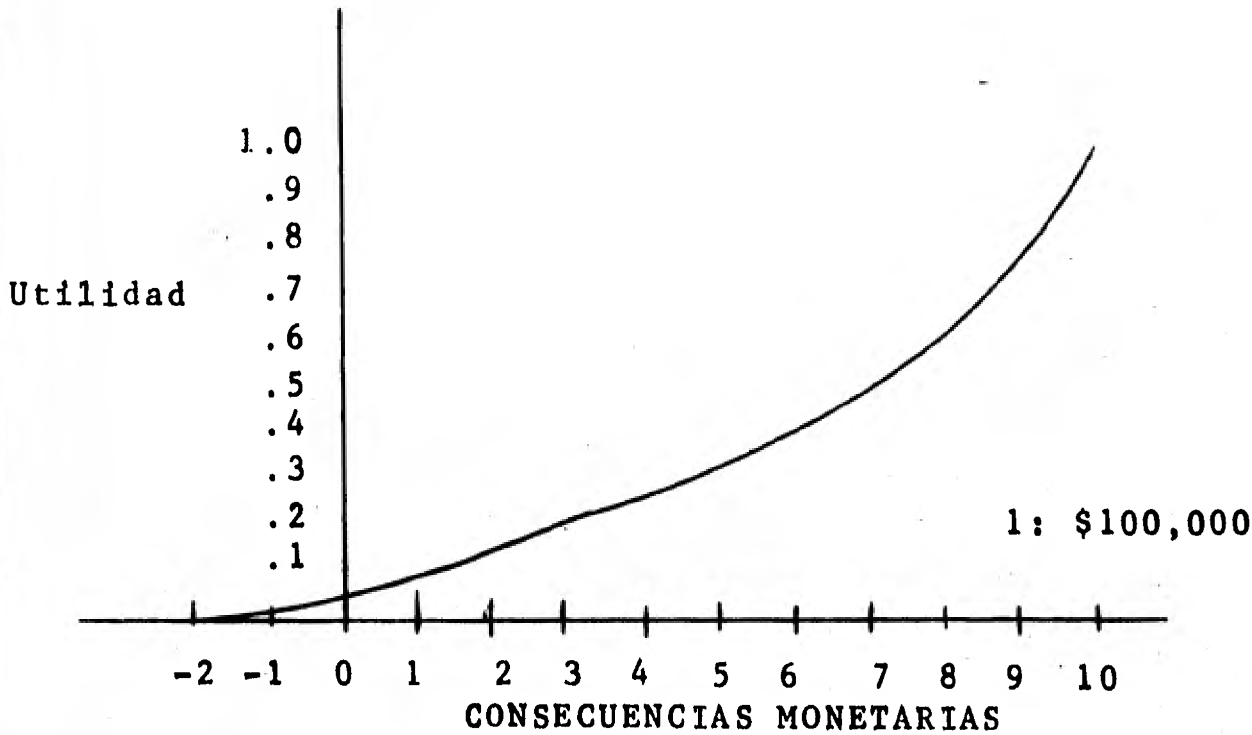
La utilidad esperada de cada proposición es:

Proposición 1 = .20(.63)+.35(.37)+.30(.25)+.15(.08) = = 0.3425

Proposición 2 = .25(1.0)+.35(.46)+.30(.30)+.10(0)=0.501

No aceptar ninguna proposición = 1 (.10) = .10

Gráficamente esta función de utilidad es:



El decisor eligirá el curso de acción que maximiza- su utilidad esperada; eligirá la proposición 2.

Si se emplea el criterio del valor monetario esperado, se tiene:

Proposición 1= 800,000(.20)+500,000(.35)+300,000(.30) - 100,000(.15) = 410,000

Proposición 2=1,000,000(.25)+650,000(.35)+400,000(.30) -200,000(.1) = 577,500

Utilizando el criterio del valor monetario esperado el decisor debe elegir la proposición 2.

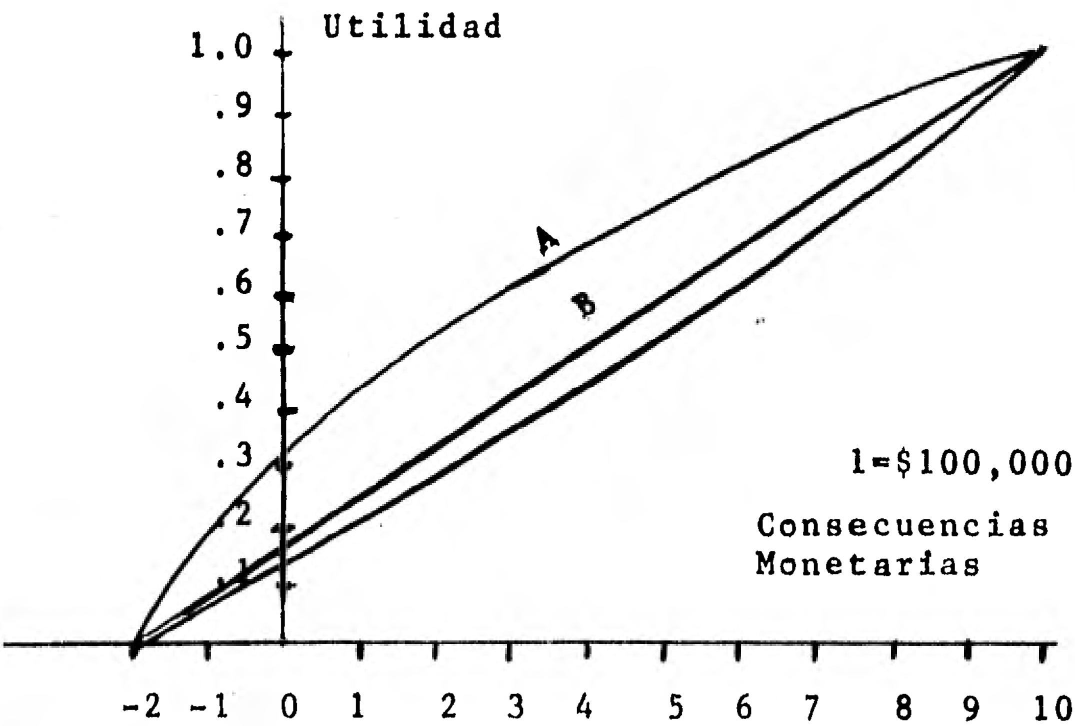
Se aclara que al evaluar un problema con el criterio de la utilidad esperada y con el criterio del valor monetario esperado, las conclusiones no necesariamente son las mismas, dado que se tiene una influencia de las preferencias del decisor.

Cuando se asigna la utilidad a una consecuencia monetaria lo que se hace es señalar una preferencia subjetiva.

Para ilustrar lo anterior, considérese que el problema de aceptar o no las proposiciones para jugar ha sido planteado a dos personas más, las cuales asignan las siguientes utilidades a las consecuencias monetarias.

Consecuencias monetarias	Decisor A	Decisor B
u $ 1,000,000	1.00	1.00
u 800,000	.95	.79
u 650,000	.87	.69
u 500,000	.79	.59
u 400,000	.72	.49
u 300,000	.63	.39
u 0	.34	.19
u -100,000	.20	.09
u -200,000	0.00	0.00

Gráficamente:



Partiendo de que la asignación de índices de utilidad son las preferencias de una persona, por medio -- del análisis de las gráficas de las funciones de utilidad se puede determinar si una persona tiene preferencia o aversión por el riesgo.

La función de utilidad del decisor A es una curva cóncava, lo que señala una tasa de utilidad decreciente, o sea, una ganancia de cualquier monto aumenta su utilidad en menos de lo que la puede disminuir una -- pérdida por la misma cantidad, el decisor A tiene --- aversión por el riesgo.

La función de utilidad del decisor que se había -- considerado inicialmente describe una gráfica que --- tiende a ser convexa (cóncava hacia arriba), lo cual - señala una tasa de utilidad creciente, en otras palabras, un desplazamiento cualquiera hacia la derecha - sobre el eje horizontal, aumenta su utilidad en más - de lo que la disminuye un desplazamiento hacia la izquierda, a las personas que actúan así se les dice -- que tienen preferencia por el riesgo.

La función de utilidad del decisor B es neutral, o sea, es una función lineal (o tiende a ser lineal) -- con pendiente de 45°sobre el eje horizontal, la recta señala que no existe ni preferencia ni aversión por - el riesgo, y al no existir ninguna preferencia, el decisor evalúa sus proyectos en base al criterio del valor monetario esperado.

9.5 Arbol de decisiones.

Los árboles de decisiones son métodos gráficos en los cuales se señalan en orden cronológico: los cursos de acción posibles y los estados de la naturaleza.

Para diseñar un árbol de decisiones, se dibujan primero los cursos de acción posibles y después los estados de la naturaleza con su probabilidad correspondiente y se asocia una consecuencia condicional a cada "rama" de los estados de la naturaleza.

Para ilustrar lo anterior considérese el ejemplo siguiente.

Una fábrica de gelatinas tiene que decidir si vende sus productos al mayoreo o al menudeo, razón por la cual tiene que considerar la demanda y las utilidades que tendría por cada curso de acción posible.

Después de una investigación detallada se obtuvieron los siguientes datos para el primer año.

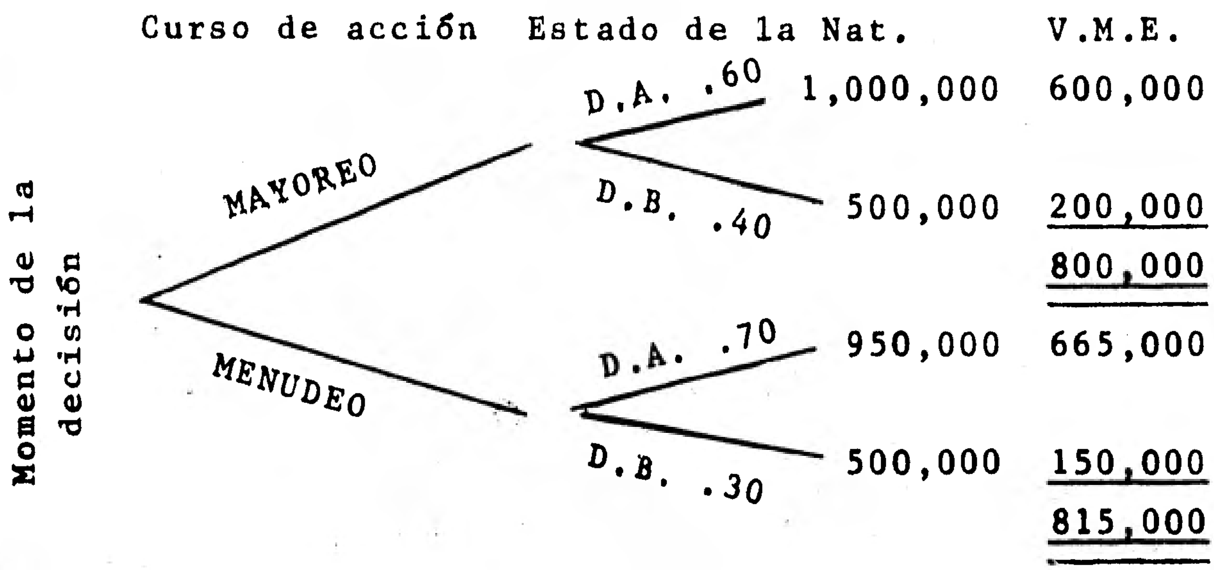
Si el producto se vende al mayoreo:

Estado de la naturaleza	Prob.	Consecuencia esperada
Demanda alta	.60	$ 1,000,000
Demanda baja	.40	500,000

Si el producto se vende al menudeo:

Estado de la naturaleza	Prob.	Consecuencia esperada
Demanda alta	.70	$ 950,000
Demanda baja	.30	500,000

Se procede a construir un árbol de decisiones



Se calcula el valor monetario esperado para cada - curso de acción, y de acuerdo con esto, hay que vender al menudeo.

Este tipo de diagrama permite utilizar probabilidades empíricas (V.M.E.), probabilidad subjetiva (criterio de decisión bayesiano) o en su caso índices de -- utilidad.

En el caso de que el decisor del problema señalara su función de utilidad como:

u 1,000,000 = 1.00

u 950,000 = .88

u 500,000 = 0.00

su utilidad esperada para cada curso de acción sería:

Venta al mayoreo = 1(.6) + 0(.4) = 0.60

Venta al menudeo = .88(.7) + 0(.30) = 0.616

en este caso el decisor también preferiría vender al menudeo.

Supóngase que se cuenta con la siguiente información sobre el segundo año.

Si se vende al mayoreo en el primer año y se pre-- senta una demanda alta, para el segundo año se ten--- drían dos cursos de acción posibles; seguir vendiendo al mayoreo o vender al menudeo, en tales casos la de- manda se comportará en la siguiente manera y se ten- drían las consecuencias condicionales que se detallan.

Si se sigue vendiendo al mayoreo:

Estados de la naturaleza	Prob.	Consecuencia condicional.
Demanda alta	.80	$ 2,200,000
Demanda baja	.20	1,600,000

Si se opta por vender al menudeo:

Estado de la naturaleza	Prob.	Consecuencia condicional.
Demanda alta	.65	$ 1,900,000
Demanda baja	.35	1,150,000

En general, para cada rama del árbol de decisiones se tienen dos cursos y por cada uno de estos una de-- manda alta y una demanda baja.

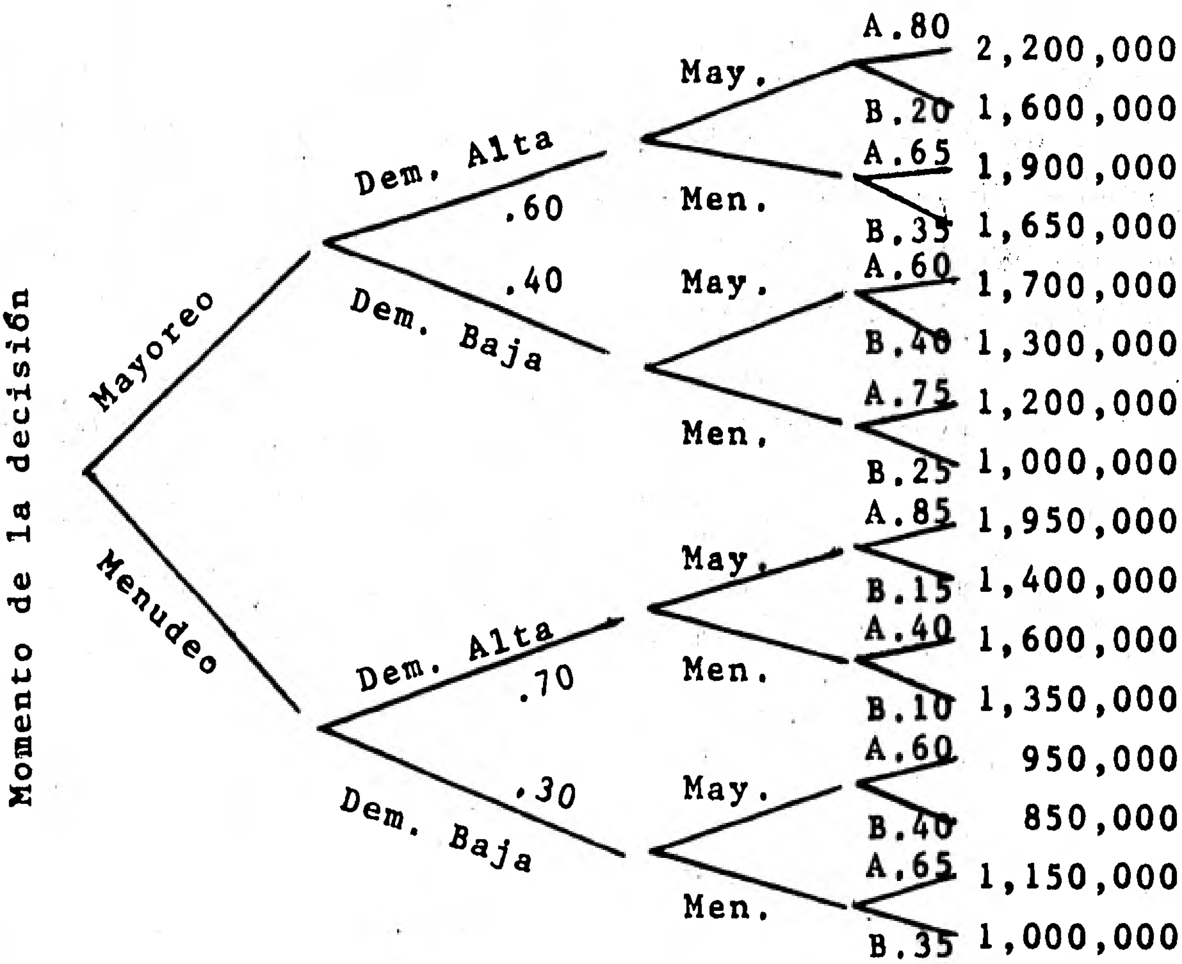
El siguiente árbol de decisiones muestra la información disponible para el primer y segundo año de operaciones de la fábrica.

Una observación a los árboles de decisiones que -- consideran más de un período: deben expresar las consecuencias condicionales en valores correspondientes- al momento de la decisión, en otras palabras, se debe tomar en cuenta que el poder adquisitivo de una uni-- dad monetaria es mayor en este momento que en el futuro (las consecuencias condicionales deben ser descontadas; vease Capítulo II).

Contando con el árbol de decisiones se procede a determinar el valor monetario esperado para los cursos de acción considerados.

Primer año — Segundo año

Cursos de acción — Edo. de la naturaleza — Cursos de acción — Edo. de la naturaleza



Valor monetario esperado de la decisión de vender al mayoreo ambos años.

(.60)(.80)($ 2,200,000)	$ 1,056,000
(.60)(.20)(1,600,000)	192,000
(.40)(.60)(1,700,000)	408,000
(.40)(.40)(1,300,000)	208,000
	$ 1,864,000

Valor monetario esperado al vender al mayoreo el - primer año y al menudeo el segundo.

(.60)(.65)($ 1,900,000)	$	741,000
(.60)(.35)(1,650,000)		297,000
(.40)(.75)(1,200,000)		360,000
(.40)(.25)(1,000,000)		100,000
	$	1,498,000

Valor monetario esperado si se vende al menudeo el primer año y al mayoreo el segundo.

(.70)(.85)($ 1,950,000)	$	1,160,250
(.70)(.15)(1,400,000)		147,000
(.30)(.60)(950,000)		171,000
(.30)(.40)(850,000)		102,000
	$	1,580,250

Valor monetario esperado si se vende al menudeo -- los dos años.

(.70)(.90)($ 1,600,000)	$	1,108,000
(.70)(.10)(1,350,000)		94,500
(.30)(.65)(1,150,000)		224,250
(.30)(.35)(1,000,000)		105,000
	$	1,431,750

Según el criterio del valor monetario esperado, la fábrica debe vender al mayoreo en ambos años.

CAPITULO X.

TOMA DE DECISIONES EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

La toma de decisiones en condiciones de incertidumbre se caracteriza por:

a) el desconocimiento de las probabilidades de los estados de la naturaleza.

b) no poderse enunciar los estados de la naturaleza en forma tal que estos sean exhaustivos.

c) como consecuencia de los incisos anteriores, los cursos de acción que se pueden seguir no logran ser evaluados.

Como no se conocen las probabilidades de ocurrencia, las decisiones se toman por criterio, y evidentemente el criterio del decisor es una forma de expresar sus actitudes hacia el riesgo y sus valores personales.

En la siguiente sección se presentan algunos criterios de decisión para escoger el "mejor" curso de acción.

10.1 Algunos criterios para decidir en condiciones de incertidumbre.

Los criterios de decisión en condiciones de incertidumbre más aceptados son:

a) Criterio de Hurwicz

b) Criterio de Wald

c) Criterio de Savage

d) Criterio de Laplace

10.1.1 Criterio de Leonid Hurwicz.

Este criterio es optimista relativo, se piensa que se tienen resultados favorables, o sea, la naturaleza es"benigna"y por esto el decisor debe escoger el curso de acción con mayor consecuencia condicional.

Considérese la siguiente matriz de consecuencias condicionales.

	Estados de la naturaleza		
Cursos de Acc.	A	B	C
1	40	60	10
2	50	40	15
3	55	20	12

Cursos de acción	Consecuencia condicional mayor
1	60
2	50
3	55

Con este criterio el decisor escogerá el curso de acción 1 por ser el de mayor consecuencia condicional: a esta consecuencia se le llama máximax (máximo, máximo).

El criterio de Hurwicz considera que la naturaleza es "buena" pero no lo suficiente como para otorgarnos siempre la condición que nos es más favorable, por esto se plantea que el decisor ,según su sentir de las condiciones favorables, debe asignar un coeficiente de optimismo a el estado de la naturaleza más favorable y un coeficiente pesimista a el estado de la naturaleza más desfavorable (ambos coeficientes deben sumar 1).

Supongamos que el coeficiente de optimismo es de -.70

Curso de Acc.	Consecuencias condicionales máxima	mínima	Consecuencia esperada de Hurwicz
1	60	10	60(.7)+10(.3)= 45
2	50	15	50(.7)+15(.3)= 39.4
3	55	12	55(.7)+12(.3)= 42.1

Si se emplea el criterio de Hurwicz el decisor debe optar por el curso de acción 1.

El criterio de Hurwicz debe usarse con cierto tacto, pues en caso de que la naturaleza sea desfavorable se lograrían utilidades tan bajas (o pérdidas) que pondrían en un aprieto económico a la entidad que lo empleara.

10.1.2 Criterio de Abraham Wald.

El criterio de Wald es sumamente conservador, se sugiere que el decisor deba ser pesimista, o sea, debe pensar que la naturaleza es "mala", pero no a tal grado que siempre presente la situación más desfavorable, con este criterio se escogen las consecuencias condicionales mínimas de cada curso de acción, dentro de estos se elige el curso de acción que tiene la menos desfavorable.

P.e. Utilizando la matriz de consecuencias condicionales de la subsección anterior se aplicará el criterio de Wald.

Curso de acción	Consecuencia condicional menor
1	10
2	15
3	12

Como con el criterio de Wald se escoge lo "menos malo", el decisor elegirá el curso de acción 2.

Este criterio máximin (máximo de lo mínimo) de Wald preve una utilidad segura con la cual se permite sobrevivir a la organización y disminuye la posibilidad de un error, pero evidentemente, como enfoque no es útil para las personas que esperan una buena utilidad de la empresa (accionistas).

10.1.3 Criterio de Leonard Savage.

Este criterio considera que el decisor después de conocer el estado de la naturaleza que prevaleció; puede arrepentirse si escogió como curso de acción uno diferente a aquel en el que la naturaleza otorgaba el máximo de rendimiento (existe una pérdida de oportunidad).

Considérese la matriz de consecuencias condicionales de la subsección 10.1.1 para obtener la matriz de pérdidas de oportunidad.

Matriz de pérdidas de oportunidad

Cursos de acción	Estados de la naturaleza A	B	C
1	55-40=15	60-60=0	15-10=5
2	55-50=5	60-40=20	15-15=0
3	55-55=0	60-20=40	15-12=3

El arrepentimiento máximo (pérdida de oportunidad-máxima) que puede tener el decisor si escoge el curso de acción 1 es de \$15.00, de \$20.00 si elige el curso de acción 2 y de \$40.00 si selecciona el curso de acción 3.

Curso de acción	Arrepentimiento máximo
1	15
2	20
3	40

De los arrepentimientos máximos el mínimo que se - tiene es el de \$15.00, razón por la cual se selecciona el curso de acción 1; este criterio también se conoce como mínimax (mínimo de los máximos).

10.1.4 Criterio de Pierre-Simon Laplace.

Este criterio supone que si no se conocen las probabilidades de los estados de la naturaleza, la probabilidad es la misma para cada uno de ellos, se aplica el principio de la "razón insuficiente": si no hay una razón lógica para asignar probabilidades, estas - deben ser iguales; conforme a lo anterior,se calcula-el valor monetario esperado y se selecciona el curso-de acción con mayor valor monetario esperado.

En el caso de la matriz de consecuencias condicionales se tienen tres estados de la naturaleza, por lo tanto la probabilidad de cada uno de ellos es de0.33.

Cursos de acción	Estados de la naturaleza A	B	C	V.M.E.
1	40(.33)	60(.33)	10(.33)	36.30
2	50(.33)	40(.33)	15(.33)	34.65
3	55(.33)	20(.33)	12(.33)	29.06

Con el criterio de Laplace se escogerá el curso de acción 1.

De los cuatro criterios señalados ninguno puede ser considerado mejor que los demás, la selección de uno de ellos o su conjugación debe ser libre para las personas que tomen las decisiones, sin olvidar que un criterio de decisión no sustituye la intuición o sentimientos del decisor.

10.2 El análisis a priori y el valor monetario esperado de la información perfecta.

En el capítulo de toma de decisiones en condiciones de riesgo, se vieron algunos modelos en los cuales se empleaba probabilidad basada en la experiencia o en el criterio del decisor; ahora, si la probabilidad puede ser actualizada por la experimentación, esta tiene un costo y es un factor determinante decidir si es conveniente pagar (y hasta que cantidad) por más y mejor información.

Esta situación se puede decidir aplicando el "criterio del valor esperado de la información perfecta", que considera que existe un pronosticador perfecto que señala con precisión que estado de la naturaleza ocurrirá.

El concepto se ilustrará con la siguiente situa---

ción.

Una persona desea invertir en una fábrica de sacos y gabardinas y supone que el éxito de la fábrica de-- pende del primer año de operaciones.

De acuerdo con sus cálculos obtiene la siguiente - matriz de consecuencias condicionales para los esta-- dos de la naturaleza:

A= Caluroso y seco

B= Variable

C= Frío y húmedo

y para los cursos de acción:

1 = Producir gabardinas

2 = Producir sacos

Matriz de consecuencias condicionales

Cursos de acción	Estados de la naturaleza A	B	C
1	40,000	100,000	180,000
2	160,000	90,000	30,000

El inversionista, basado en la experiencia de un - meteorólogo asigna las probabilidades siguientes a -- los estados de la naturaleza.

A .15

B .65

C .20

Con la información anterior se determina el valor- monetario esperado de ambos cursos de acción.

Edo. 1.-40,000(.15)+100,000(.65)+180,000(.20)=107,000

Edo. 2.-160,000(.15)+90,000(.65)+30,000(.20)= 88,500

En condiciones de riesgo el mejor curso de acción-es el 1 (producir gabardinas).

Ahora supóngase que se tiene un pronosticador perfecto que señala precisamente que estado de la naturaleza ocurrirá.

Si el pronosticador dice que ocurrirá el estado de la naturaleza A, el decisor escogerá el curso de acción 2; si dice que es el B el que sucederá, el decisor eligirá el curso de acción 1 y finalmente, si el pronosticador perfecto señala el estado de la naturaleza C como el que ocurrirá, el decisor escogerá el curso de acción 1.

El valor esperado atendiendo al pronosticador será:

Estado de la naturaleza	Consecuencia condicional	Probabilidad	Consecuencia esperada
A	160,000	.15	24,000
B	100,000	.65	65,000
C	180,000	.20	36,000
		1.00	125,000

La cantidad de 125,000 es el beneficio promedio que se obtiene con el uso de un pronosticador perfecto.

Si se compara el valor monetario esperado en condiciones de riesgo y el valor monetario esperado utilizando el pronosticador perfecto se determinará el valor esperado a-priori de la información perfecta.

125,000 - 107,000 = 18,000

que es la cantidad máxima que el inversionista estaría dispuesto a pagar con tal de poseer una información que le señale exactamente que estado de la naturaleza ocurrirá, en otras palabras, es un costo de incertidumbre.

A un análisis de este tipo se le llama a-priori -- porque se asignan probabilidades a-priori (antes de - información adicional) a los estados de la naturaleza.

10.3 El análisis a posteriori y el valor monetario esperado de la información perfecta.

La razón principal por la cual se busca más información para la toma de decisiones es el reducir lo -- más posible la incertidumbre de un problema.

El análisis a posteriori se determina tomando como base las probabilidades a priori, las cuales se modifican con la información que se logra por medio de la investigación.

Supóngase que en el ejemplo de la sección anterior, el inversionista no se conforma con la probabilidad - a priori que asignó el meteorólogo y recurre a un instituto que realiza una investigación del tiempo probable y esta determina que el estado de la naturaleza - que predominará es el A (Caluroso y seco),pero informa que en anteriores ocasiones en que fue requerido - para este tipo de consultas:

a) en el 90% de las veces que predijo tiempo caluroso y seco el tiempo efectivamente fue de este orden;

b) cuando el tiempo fue variable, el 14% de las veces predijo tiempo caluroso y seco (se equivocó); y

c) cuando el tiempo fue frío y húmedo, en el 16% - de las veces se predijo tiempo caluroso y seco (se -- equivocó).

Los anteriores márgenes de confianza, realmente -- son probabilidades condicionales que se pueden expresar en la siguiente forma:

$P(A'/A) = .90$

$P(A'/B) = .14$

$P(A'/C) = .16$

en donde: A' = es el estado de la naturaleza que fue- señalado por la agencia de investigaciones.

Se había dicho que las probabilidades a priori --- eran corregidas con la información obtenida para de-- terminar las probabilidades a posteriori, el mecanismo se señala en la tabla siguiente:

Estado de la naturaleza	Probabilidad a priori	Cond.	conjunta	a posteriori
Calur. y seco	.15	.90	.15X.90=.135	.135/.258=.52
Variable	.65	.14	.65X.14=.091	.091/.258=.35
Frío y húmedo	.20	.16	.20X.16=.032	.032/.258=.13
	1.00		.258	1.00

Determinada la probabilidad a posteriori, se procede a calcular el valor monetario esperado a posteriori para cada curso de acción.

Valor monetario esperado a posteriori

Cursos de acción

1 =40,000(.52)+100,000(.35)+180,000(.13)= 79,200

2 =160,000(.52)+90,000(.35)+30,000(.13)= 118,600

Según el valor monetario esperado a posteriori el- mejor curso de acción es el 2.

Como el instituto de investigaciones no nos propor ciona una información perfecta y el valor esperado a-priori de la información perfecta (sección anterior)-fija un límite de 18,000 para obtener esa información perfecta, se calcula el valor esperado a posteriori - de la información perfecta.

Se supone que si tuviera la información perfecta escogería el curso de acción que proporcionara la-mayor consecuencia condicional y el valor esperado en esa circunstancia sería:

Valor esperado a posteriori con información perfecta.

Estados de la naturaleza	Consecuencia condicional	Prob. a posteriori	Valor monetario esp. a posteriori
A	160,000	.52	83,200
B	100,000	.35	35,000
C	180,000	.13	23,400
			141,600

Comparando el valor monetario esperado a posteriori y el valor monetario esperado a posteriori con información perfecta, se obtiene el valor esperado a -- posteriori de la información perfecta.

141,600 - 118,600 = 23,000

que es el costo de la incertidumbre por no tener la - información perfecta, o sea, lo máximo que se está -- dispuesto a pagar por obtener la información perfecta.

Si se compara el valor monetario esperado de la información perfecta con probabilidades a priori y con-probabilidades a posteriori, se verá que con esta última probabilidad el inversionista aumentó la incerti dumbre que tenía, y ahora el poseer un pronosticador-perfecto es más relevante de lo que era antes.

10.4 El análisis pre- a posteriori.

Este método, igual que los anteriores, será desarrollado con los datos de la sección 10.2

Supóngase que al recurrir al instituto que va a brindar la información, éste señala en la siguiente tabla la confianza que se le puede atribuir a la información que proporcionará.

Estados de la naturaleza	Estados de la naturaleza pronosticados			
	A'	B'	C'	Totales
A	.90	.07	.03	1.00
B	.14	.85	.01	1.00
C	.16	.03	.81	1.00

El inversionista debe realizar un análisis pre- a-posteriori con el objeto de decidir si se realiza o no la investigación. Para esto tiene que hacer un desarrollo similar al análisis a posteriori para determinar las probabilidades pre- a posteriori, estos dos métodos de análisis se diferencían en que el margen de confianza de la investigación se proporciona para todos los estados de la naturaleza, y no sólo para el estado de la naturaleza pronosticado en la investigación (análisis a posteriori), se recomienda ver el cálculo de las probabilidades a posteriori en la sección 10.3.

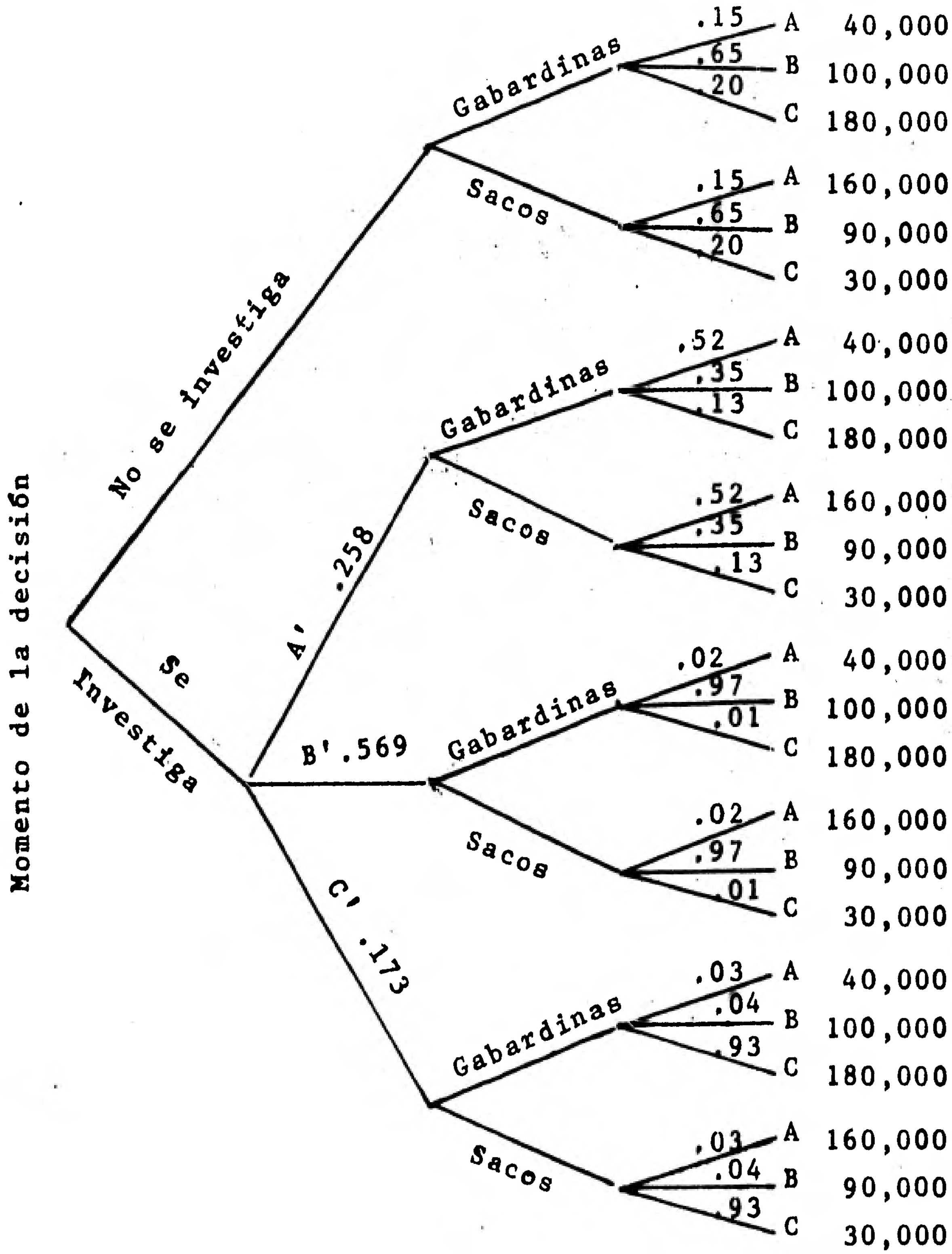
Determinación de la prob. pre- a posteriori

Edo.	a priori	Condicional A'	Condicional B'	Condicional C'	conjunta A'	conjunta B'	conjunta C'	pre- a posteriori A'	pre- a posteriori B'	pre- a posteriori C'
A	.15	.90	.07	.03	.135	.0105	.0045	$\frac{.135}{.258} = .52$	$\frac{.0105}{.569} = .02$	$\frac{.0045}{.173} = .03$
B	.65	.14	.85	.01	.091	.5525	.0065	$\frac{.091}{.258} = .35$	$\frac{.5525}{.569} = .97$	$\frac{.0065}{.173} = .04$
C	.20	.16	.03	.81	.032	.006	.162	$\frac{.032}{.258} = .13$	$\frac{.006}{.569} = .01$	$\frac{.162}{.173} = .93$
	1.00				.258	.569	.173	1.00	1.00	1.00

Probabilidad conjunta = prob. a priori X prob. condicional

$$\text{Probabilidad pre- a posteriori} = \frac{\text{probabilidad conjunta}}{\text{total de la columna de la probabilidad conjunta.}}$$

La información anterior la podemos presentar en un diagrama de árbol.



Considerando que el inversionista se encuentra en el momento en que debe decidir si se realiza la investigación o se cancela, y está interesado en obtener el valor monetario esperado pre- a posteriori al hacer la investigación y con los datos obtener el mejor curso de acción, se debe considerar los resultados de la investigación y determinar en cada caso la consecuencia esperada (V.M.E. pre- a posteriori) de cada curso de acción.

Si la investigación proporcionara un pronosticador perfecto y este señalara que predominará el tiempo caluroso y seco, el valor monetario esperado pre- a posteriori de los cursos de acción sería:

Curso de acción 1= 40,000(.52)+180,000(.35)+
180,000(.13)= 79,200

Curso de acción 2= 160,000(.52)+90,000(.35)+
30,000(.13)= 118,600

El decisor escogería el curso de acción 2, producir sacos.

Si la investigación fuera un pronosticador perfecto y señalara que predominará el tiempo variable, el valor monetario esperado pre- a posteriori de los cursos de acción sería:

Curso 1 = 40,000(.02)+100,000(.97)+180,000(.01)=99,600

Curso 2 =160,000(.02)+90,000(.97)+30,000(.01) = 90,800

El decisor escogerá producir gabardinas, curso de acción 1.

Si la investigación fuera un pronosticador perfecto y señalara que va a predominar el tiempo frío y --húmedo, el valor monetario esperado pre- a posteriori de los cursos de acción sería:

Curso 1= 40,000(.03)+100,000(.04)+180,000(.93)=172,600

Curso 2=160,000(.03)+90,000(.04)+30,000(.93) = 36,300

El decisor escogería el curso de acción 1, producir gabardinas.

Ahora el inversionista calculará el valor monetario esperado pre- a posteriori de hacer la investigación perfecta y después seleccionar el curso de acción.

Valor monetario esperado pre- a posteriori si la investigación proporcionara un pronosticador perfecto.

Estado de la naturaleza	Prob.	Mayor V.M.E. pre- a post. por curso con pronost. perfecto	V.M.E. pre- a posteriori
A	.258	118,600	30,599
B	.569	99,600	56,672
C	.173	172,600	29,860
			$ 117,131

Al comparar este valor monetario esperado pre- a posteriori de la información perfecta y el valor monetario esperado a priori (valores monetarios esperados al hacer o no la investigación) de la sección 10.2, se obtiene el valor esperado pre- a posteriori de la información perfecta.

117,131 - 107,000 = 10,131

que es el costo de la incertidumbre por no tener la - información perfecta y señala el máximo que se está - dispuesto a pagar con tal de obtener esa información- perfecta.

Considerando un costo de la investigación mayor a- 10,131, el inversionista preferiría no efectuarla,por que el beneficio que reportaría sería menor que su -- costo; entonces el decisor adoptaría como criterio de decisión el análisis a priori.

B I B L I O G R A F I A

ALCARAZ, Segura L.
1958 Cálculos Financieros
México, D.F.: Fondo de Cultura Económica.

AYRES, Frank
1963 Mathematics of Finance
N.Y., N.Y.: Schaum Publishing.

ARKIN, Herbert y Colton, Raymond
1977 Métodos Estadísticos, 5a. Ed.
México, D.F.: Cía. Edit. Continental.

CISSELL, Robert y Cissell, Helen.
1981 Matemáticas Financieras. 1a. Ed. 13 Reimp.
México, D.F.: Cía. Edit. Continental.

CUEVA, Benjamín de la
1981 Matemáticas Financieras. 1a. Ed.
México, D.F.: Porrúa.

FERRER, Jaune Luis
1947 Cálculo Financiero
Barcelona, España: Labor.

MOOD, Alexander y Graybill, Franklin.
1978 Introducción a la Teoría de la Estadística
4a. Ed.
Madrid, España: Aguilar.

MOORE, Justin.
1979 Manual de Matemáticas Financieras.
México, D.F.: UTEHA.

NETER, John y Otros.
1978 Fundamentos de Estadística para negocios.
México, D.F.: Cía. Edit. Continental.

PARDINAS, Felipe.
1980 Metodología y Técnicas de Investigación en
Ciencias Sociales. 22a. Ed.
Colombia: Siglo XXI.

POYLA, G.
1981 Cómo Plantear y Resolver Problemas. 1a. Ed., 9a. Reimp. México, D.F.: Trillas.

PORRUA, Editorial (Recopilador).
1982 Código de Comercio y Leyes Complementarias. 39a. Ed. México, D.F.: Porrúa.

PORTUS, Goviden Lincoyán.
1979 Matemáticas Financieras. 1a. Ed. Naucalpan de Juárez, Edo. de México, México: Libros Mc Graw - Hill de México.

PRAWDA, Juan.
1981 Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. Vol. I, 1a. Ed., 3a. Reimp. (Modelos Determinísticos). México, D.F.: Limusa.

PRAWDA, Juan.
1980 Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. Vol. II, 1a. Ed. (Modelos Estocásticos). México, D.F.: Limusa.

RHEAULT, Jean Paul.
1977 Introducción a la Teoría de las Decisiones con Aplicaciones a la Administración. 1a. Ed., 3a. Reimp. México, D.F.: Limusa.

SASIENI, Maurice y Otros.
1959 Operations Research: Methods and Problems. Tokio, Japón: Toppan Company, Ltd.

SPIEGEL, Murray.
1978 Estadística. 1a. Ed. Naucalpan de Juárez, Edo. de México, México: Libros Mc Graw - Hill de México (Serie Schaum).

THIERAUF, Robert y Grosse, Richard.
1980 Toma de Decisiones por Medio de Investigación de Operaciones. 1a. Ed., 6a. Reim
México, D.F.: Limusa.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL.
1981 Estadística I
México, D.F.: U.P.N.
(Area de Integración Vertical).

YAMANE, Taro.
1975 Estadística. 3a. Ed.
México, D.F.: Harla.

UNDA, Carbot Zoila.
Apuntes de clase de la materia "Matemáticas Financieras e Introducción a la Toma de Decisiones". F.C.A. - U. N. A. M.

PEREZ, Bastida Roberto.
Apuntes personales de la materia "Matemáticas Financieras I". F.C. - U. N. A. M.

I N D I C E

Página

Página

Página

Página

Página

Página