UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LA CATEGORICIDAD DE LOS AXIOMAS DE HILBERT PARA LA GEOMETRIA DEL PLANO

Tesis Profesional

Que para obtener el Título de
MATEMATICO

p r e s e n t a

MARTHA SANCHEZ SOSA

MEXICO, D. F. 1986

C O N T E N I D O

INTRODUCCION

En el tiempo de Euclides, y durante más de 2000 años después, los postulados de la geometría se consideraron como verdades autoevidentes acerca del espacio físico; y la geometría se consideraba como una clase de física puramente deductiva. Comenzando con las verdades que eran autoevidentes, los geómetras consideraron que estaban deduciendo otras verdades más oscuras sin la posibilidad de error.

Sin embargo, con el desarrollo de la geometría hiperbólica, este punto de vista se hizo insostenible. Se contaba ya con dos sistemas de geometría diferentes y mutuamente incompatibles. Cada uno de ellos es matemáticamente autoconsistente y autocompatible con nuestras observaciones del mundo físico. De este punto en adelante, la discusión se efectuó en términos bastante diferentes. Ahora pensamos no en una geometría única, físicamente "cierta", sino de un número de geometrías matemáticas, cada una de las cuales resulta ser una aproximación del espacio físico, y cada una de ellas puede ser útil en diferentes investigaciones físicas.

De cualquier forma las matemáticas modernas usan los postulados como descripciones de estructuras matemáticas. Su va lor consiste en el hecho de que son ayudas prácticas en el estudio de las estructuras matemáticas que describen.

Sucede algunas veces que un grupo de postulados da una descripción completa de una estructura matemática, en el sentido de que dos estructuras cualesquiera que satisfagan todos los postulados son "esencialmente las mismas".

Para estructura algebraica, esta relación se da, cuando podemos establecer una correspondencia directa, que preserve las operaciones y relaciones definidas en ambas.

En nuestro caso demostraremos que el plano $\mathbb{R}^2$ junto con las operaciones de suma y producto es un modelo de la geometría y que los axiomas de Hilbert es un grupo de postulados algebraicos categórico.

En el primer capítulo introducimos el concepto de categoricidad, en el segundo capítulo construimos nuestro modelo $\mathbb{R}^2$; y en los últimos capítulos demostramos que nuestro modelo preserva las relaciones de "incidencia", "estar entre", y "congruencia" de la geometría además del paralelismo y la continuidad, con lo cual concluimos la categoricidad de los axiomas de Hilbert.

Capítulo I

Categoricidad

CATEGORICIDAD

Siendo el objetivo central de esta tesis el hacer ver la categoricidad de los axiomas de Hilbert, comenzaremos por introducir el concepto de "categoricidad".

Definición.- Se dice que una "definición" es categórica si cualesquiera dos objetos que la satisfacen son isomorfos.

Ejemplo 1

"Definición" Se llama campo de los números reales a todo campo ordenado linealmente en donde todo subconjunto no vacío tenga supremo.

Esta es una "definición" categórica lo que en análisis se expresa diciendo que el conjunto de los reales es único excepto por isoformismos.

Contraejemplo 2

"Definición" Se llama grupo a un conjunto G con una operación asociativa tal que:

1) Existe e tal que $ea = a \quad \forall a \in G$

2) Para cada $a \in G$ existe $a^{-1}a = e$

Esta "definición" no es categórica, como puede verse notando que el $\{o\}$ es un grupo y $\{Z, +\}$ también. Evidentemente estos grupos no son isomorfos ya que tienen distinto número de elementos.

Ejemplo 3

"Definición" Se llama dominio entero bien ordenado a todo dominio entero en clase positiva bien ordenada.

La "definición" es categórica. El único conjunto que la satisface es $\{Z, +, .\}$

En la definición anterior se introduce el concepto de isoformismo, por lo que daremos la siguiente definición, (que especializamos de una vez, para su uso en esta tesis).

Definición Sean S_1 , S_2 dos sistemas que constan de los conjuntos,

P y P' conjuntos de puntos

R y R' conjuntos de rectas

S y S' conjuntos de segmentos

A y A' conjuntos de ángulos

y las relaciones siguientes:

I e I' relaciones de incidencia $I \subset P \times R$

$I' \subset P' \times R'$

E y E' relaciones de estar entre $E \subset P \times (P \times P)$

$E' \subset P' \times (P' \times P')$

Cs y Cs' relaciones de congruencia entre segmentos

$Cs \subset S \times S$

$C's \subset S' \times S'$

Ca y Ca' relaciones de congruencia entre ángulos

$Ca \subset A \times A$

$C'a \subset A' \times A'$

Se dice que S_1 y S_2 son isomorfos si existe una función biyectiva

$f: S_1 \to S_2$

tal que f restringida a cada conjunto de S_1 y S_2 es biyectiva y tal que

$(P, \ell) \in I \iff (f(P), f(\ell)) \in I'$

$(B, (A,C)) \in E \iff (f(B), (f(A), f(C))) \in E'$

$(\overline{AB}, \overline{CD}) \in Cs \iff (f(\overline{AB}), f(\overline{CD})) \in C's$

$(<\alpha, <\alpha') \in Ca \iff (f(<\alpha), f(<\alpha')) \in C'a$

es decir que "f es una función biyectiva que preserva la estructura".

<u>Definición</u>. Un sistema axiomático es categórico si cualesquiera dos modelos que lo satisfacen son isomorfos.

Contraejemplo 4

"Definición" Se llama geometría de incidencia a un sistema que consiste de lo siguiente:

i) Un conjunto $\mathcal{P}$ (punto)

ii) Un conjunto $\mathcal{R}$ (rectas)

iii) Una relación $\mathcal{I} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{R}$ (incidencia)

tales que se satisfacen:

Axioma 1. Por dos puntos pasa una recta y solo una

Axioma 2. Toda recta tiene al menos dos puntos

Axioma 3. Existen al menos tres puntos no alineados

La "definición" no es categórica. En efecto si

$M_1 = \{\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{I}\}$ en donde

$\mathcal{P} = \{a, b, c\}$

$\mathcal{R} = \{(a,b), (a,c), (b,c)\}$

y la relación de incidencia es:

"Un punto está en una recta si como conjunto está contenido en ella", es decir: la relación de incidencia es la de contención.

$(a \in (a,b) \ ; \ a \notin (b,c))$ y

$M_2 = \{\mathcal{P}', \mathcal{R}', \mathcal{I}'\}$ en donde

$\mathcal{P}' = \{a, b, c, d\}$

$R' = \{ (a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d) \}$

I' es la contención en el mismo sentido que el anterior.

Entonces es fácil ver que tanto M_1 como M_2 son geometrías de incidencia. (No isomorfos porque los conjuntos P y P', R y R' tienen diferente número de elementos).

Ejemplo 5

Se llama geometría plana de Euclides a un sistema que consta de dos conjuntos:

P el conjunto de los puntos, y

R el conjunto de las rectas

con las relaciones de:

Incidencia $I \subset P \times R$

Congruencia entre segmentos, $C_1 \subset$ Seg. × Seg.

Congruencia entre ángulos, $C_2 \subset$ Ang. × Ang. ("segmentos" y "angulos" son conceptos definidos a partir de P y R, así como "semiplanos" o "lados de una recta", "triángulos", etc.)

Relación de estar entre, $E \subset P \times (P \times P)$ con los axiomas (Hilbert).

A_1 Dos puntos distintos A y B determinan una única recta.

A_2 Toda línea tiene al menos dos puntos.

A_3 Existen al menos tres puntos que no están alineados.

B_1 Si A, B y C son puntos de una recta y B está entre A y C, entonces B está entre C y A.

B_2 Si A y C son dos puntos de una recta, entonces existen B y D tales que B está entre A y C y C está entre A y D.

B_3 De cualesquiera tres puntos situados sobre una recta, hay uno y sólo uno que está entre los otros dos.

B_4 (Separación de planos) Para toda línea ℓ, y para cualesquiera puntos A, B y C que no están en ℓ.

i) Si A y B están del mismo lado de ℓ y B y C están del mismo lado de ℓ, entonces A y C están del mismo lado de ℓ.

ii) Si A y B están en lados opuestos de ℓ y B y C están de lados opuestos de ℓ, entonces A y C están del mismo lado de ℓ.

C_1 Dado un segmento $\overline{AB}$ y un punto A'. Sobre toda línea que pasa por A' existen dos puntos B'_1 y B'_2

tales que A' está entre B'_1 y B'_2 y el segmento $\overline{AB}$ es congruente a cada uno de los segmentos $\overline{A'B'}_1$ y $\overline{A'B'}_2$

C_2 Sean $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{A''B''}$ segmentos. Si el segmento $\overline{A'B'}$ es congruente al segmento $\overline{AB}$, y el segmento $\overline{A''B''}$ es congruente al segmento $\overline{AB}$, entonces el segmento $\overline{A'B'}$ es congruente al segmento $\overline{A''B''}$

C_3 Si B es un punto del segmento $\overline{AC}$ y B' es un punto del segmento $\overline{A'C'}$, y el segmento $\overline{AB}$ es congruente al segmento $\overline{A'B'}$, y el segmento $\overline{BC}$ es congruente al segmento $\overline{B'C'}$, entonces el segmento $\overline{AC}$ es congruente al segmento $\overline{A'C'}$

C_4 Sea $<(h,k)$ un ángulo dado; a una línea, α uno de los semiplanos definidos por a y h' un rayo sobre a. Entonces existe un único rayo k' tal que $<(h,k)$ es congruente $<(h',k')$ y tal que un punto de k' (al menos) está en el semiplano α

C_5 Cualquier ángulo es congruente consigo mismo.

C_6 (Criterio LAL). Sean ABC y A'B'C' dos triángulos tales que el segmento $\overline{AB}$ es congruente al segmento $\overline{A'B'}$, y el segmento $\overline{AC}$ es congruente al seg mento $\overline{A'C'}$ y el $< BAC$ es congruente al $< B'A'C'$. Entonces el $< ABC$ es congruente al $< A'B'C'$ y el $< ACB$ es congruente al $< A'C'B'$

D_1 Sean A, B y A_1 tres puntos colineales, A_1 entre A y B. Se construyen los puntos A_2, A_3, A_4, ... tales que A_1 está entre A y A_2, A_2 está entre A_1 y A_3, A_3 está entre A_2 y A_4, etc. y tales que los segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... son congruentes. Entonces la sucesión de puntos $A_2, A_3, A_4, \ldots$ contiene un punto An tal que B está entre A y An.

D_2 Sea $\overline{AB}$ un segmento y sean $\{An\}$,$\{Bn\}$ dos sucesiones de puntos interiores de $\overline{AB}$ con las propiedades siguientes:

a) El segmento $\overline{AnBn}$ está en el interior del segmento $\overline{A_{n-1}\ B_{n-1}}$, para toda n.

b) No existe ningún segmento cuyos puntos extremos pertenezcan a todos los segmentos $\overline{AnBn}$

Entonces existe un único punto x común a todos los segmentos $\overline{AnBn}$

E_1 (Versión "Playfair") Sea ℓ una línea y A un -- punto que no está sobre ℓ. Entonces existe una única línea que pasa por A y que no intersecta a ℓ.

Esta "definición" es categórica (Leer toda la tesis).

Capítulo II

El Universo $\mathbb{R}^2$

NUMEROS REALES

El sistema de los números reales es un conjunto $\mathbb{R}$, en el que hay dos operaciones, adición y multiplicación, y una relación de orden, denotada por " < " y leída "es menor que", que satisfacen los axiomas siguientes:

S_1 $\mathbb{R}$ es cerrado bajo la suma. Es decir, para todo a y b en $\mathbb{R}$, a + b pertenece a $\mathbb{R}$.

S_2 La adición en $\mathbb{R}$ es asociativa. Esto es, para todo a, b y c en $\mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

S_3 La adición en $\mathbb{R}$ es conmutativa. Esto es para todo a y b en $\mathbb{R}$, $a + b = b + a$

S_4 Existe un elemento en $\mathbb{R}$, denominado por "0", tal que $a + 0 = a$, para todo a en $\mathbb{R}$.

S_5 Para cada a en $\mathbb{R}$, existe un elemento en $\mathbb{R}$, llamado el inverso aditivo de a tal que, $a + (-a) = 0$

M_1 $\mathbb{R}$ es cerrado bajo la multiplicación. Es decir, si a y b pertenecen a $\mathbb{R}$, entonces ab pertenece a $\mathbb{R}$.

M_2 La multiplicación en $\mathbb{R}$ es asociativa. Es decir, si a, b y c pertenecen a $\mathbb{R}$, entonces $a(bc) = (ab)c$

M_3 La multiplicación en $\mathbb{R}$ es conmutativa. Es decir, si a y b pertenecen a $\mathbb{R}$, entonces $ab = ba$

M_4 Existe un elemento en $\mathbb{R}$, al que denotamos por "1", - (diferente de 0), tal que $a \cdot 1 = a$ para toda a en $\mathbb{R}$

M_5 Para cada a en $\mathbb{R}$, diferente de 0, existe un número - en $\mathbb{R}$, al que denotamos por a^{-1}, llamado el inverso multiplicativo tal que $a \cdot a^{-1} = 1$

El siguiente axioma establece una conexión entre las operaciones de adición y multiplicación, y se llama ley distributiva:

D. Para todos a, b y c en $\mathbb{R}$

$$a(b + c) = ab + ac$$

Los axiomas que rigen la relación de orden son:

O_1 Para cualesquiera dos elementos a y b en $\mathbb{R}$ una y solamente una de las siguientes relaciones se verifica:

$a < b$, $a = b$, $b < a$ (Ley de tricotomía)

O_2 Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$ (Ley transitiva)

O_3 Si $a < b$, entonces, para todo c en $\mathbb{R}$ $a + c < b + c$

O_4 Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$

Daremos ahora el último axioma del sistema de los números reales:

L. Si S es un conjunto no vacío de elementos de $\mathbb{R}$ superiormente acotado, entonces S tiene un supremo en $\mathbb{R}$.

ESPACIO VECTORIAL

Tomando como base al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, (que suponemos conocido, junto con toda su estructura), procederemos a construir $\mathbb{R}^2$.

<u>Definición</u>. Los elementos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ son pares ordenados de números reales. [Los elementos de $\mathbb{R}^2$ se denotarán como $P = (x,y)$ ó $\bar{a} = (a_1,a_2)$]

<u>Definición</u>. (Adición de pares ordenados de números reales). Para cada $\bar{a} = (a_1,a_2)$ y $\bar{b} = (b_1,b_2)$ en $\mathbb{R}^2$

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$$

<u>Definición</u>. (Multiplicación de un par ordenado de números reales por un número real). Para todo $\bar{a} = (a_1,a_2)$ en $\mathbb{R}^2$ y todo $r \in \mathbb{R}$ definimos

$$r\bar{a} = (ra_1, ra_2)$$

El conjunto $\mathbb{R}^2$ de pares ordenados de números reales con las operaciones que acabamos de definir, se llama espacio vectorial bidimensional. Los elementos del espacio vectorial se llaman vectores (o puntos).

Mostraremos ahora que, estas operaciones cumplen cada una de las siguientes propiedades algebraicas

Teorema 1. Para todos $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ en $\mathbb{R}^2$

a) $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ (asociatividad)

b) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (conmutatividad)

c) Hay un elemento único $\overline{0}$ en $\mathbb{R}^2$ -llamado origen o elemento cero- con la propiedad de que

$$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a} \quad \text{para todo } \overline{a} \text{ en } \mathbb{R}^2$$

d) Para cada $\overline{a}$ en $\mathbb{R}^2$ hay un elemento único $-\overline{a}$ en $\mathbb{R}^2$, al que se llama el inverso aditivo de $\overline{a}$, con la propiedad de que

$$\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$$

$$(-\overline{a} = -(a_1,a_2) = (-a_1,-a_2))$$

Demostración.

Sean $\overline{a} = (a_1,a_2)$, $\overline{b} = (b_1,b_2)$, $\overline{c} = (c_1,c_2)$

a) Por la definición de adición

$$\begin{aligned}(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1,c_2)\\ &= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2)\\ &= (a_1 + (b_1 + c_1),\ a_2 + (b_2 + c_2)) \quad [S_2]\\ &= (a_1,a_2) + (b_1 + c_1,\ b_2 + c_2)\\ &= \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})\end{aligned}$$

b) Por la definición de adición

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1,a_2) + (b_1,b_2)$$

$$= (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$$

$$= (b_1 + a_1,\ b_2 + a_2) \qquad \boxed{S_3}$$

$$= (b_1,b_2) + (a_1,a_2)$$

$$= \bar{b} + \bar{a}$$

c) Sean $\bar{a} = (a_1,a_2)$ y $\bar{0} = (0,0)$

Por la definición de adición

$$\bar{a} + \bar{0} = (a_1,a_2) + (0,0)$$

$$= (a_1 + 0,\ a_2 + 0) \qquad \boxed{S_4}$$

$$= (a_1,a_2) = \bar{a}$$

Supongamos que existe otro elemento en $\mathbf{R}^2$ con esta propiedad; sea este $\bar{0}'$

$$\bar{0}' = \bar{0}' + \bar{0}$$

$$= \bar{0} + \bar{0}' \qquad \boxed{S_3}$$

$$= \bar{0}$$

d) Sean $\bar{a} = (a_1,a_2)$, $-\bar{a} = (-a_1,-a_2)$

Por la definición de adición

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = (a_1,a_2) + (-a_1,\ -a_2)$$

$$= (a_1 + (-a_1),\ a_2 + (-a_2)) \qquad \boxed{S_5}$$

$$= (0,0) = \bar{0}$$

Aquí también se puede probar la unicidad del inverso. En efecto, supongamos que existe otro elemento en $\mathbb{R}^2$ con esta propiedad; sea esta a*

$$-\overline{a} = -\overline{a} + \overline{0}$$

$$= -\overline{a} + (\overline{a} + \overline{a}^*)$$

$$= (-\overline{a} + \overline{a}) + \overline{a}^* \qquad [S_2]$$

$$= (\overline{a} + (-\overline{a})) + \overline{a}^* \qquad [S_3]$$

$$= \overline{0} + \overline{a}^* = \overline{a}^* \qquad +$$

Como consecuencia de este teorema, tenemos

Corolario $\mathbb{R}^2$ es un grupo aditivo abeliano.

Veremos, ahora, las propiedades de la multiplicación

Teorema 2. Para todo $\overline{a}$, $\overline{b}$ en $\mathbb{R}^2$ y r,s en $\mathbb{R}$:

1) $1\overline{a} = \overline{a}$

2) $(r + s)\,\overline{a} = r\overline{a} + s\overline{a}$

3) $r(\overline{a} + \overline{b}) = r\overline{a} + r\overline{b}$

4) $r(s\overline{a}) = (rs)\,\overline{a}$

Demostración.

1) Esta propiedad se cumple trivialmente por el axioma M_4 de los números reales.

2) Sea $\overline{a} = (a_1, a_2)$ y r,s en $\mathbb{R}$

Por definición de la multiplicación

$$
\begin{aligned}
(r + s)\ \overline{a} &= (r + s)\ (a_1,a_2) \\
&= ((r + s)\ a_1\ ,\ (r + s)\ a_2) \\
&= (ra_1 + sa_1\ ,\ ra_2 + sa_2) && \boxed{D} \\
&= (ra_1,ra_2) + (sa_1,sa_2) \\
&= r(a_1,a_2) + s(a_1,a_2) \\
&= r\overline{a} + s\overline{a}
\end{aligned}
$$

3). Sean $\overline{a} = (a_1,a_2)$, $\overline{b} = (b_1,b_2)$ y r en $\mathbb{R}$

Por definición de la multiplicación

$$
\begin{aligned}
r(\overline{a} + \overline{b}) &= r\ (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2) \\
&= (r(a_1 + b_1)\ ,\ r(a_2 + b_2)) \\
&= (ra_1 + rb_1\ ,\ ra_2 + rb_2) && \boxed{D} \\
&= (ra_1,ra_2) + (rb_1,rb_2) \\
&= r(a_1,a_2) + r(b_1,b_2) \\
&= r\overline{a} + r\overline{b}
\end{aligned}
$$

4) Sea $\overline{a} = (a_1,a_2)$ y r,s en $\mathbb{R}$

Por definición de la multiplicación

$$
\begin{aligned}
r(s\overline{a}) &= r(sa_1,sa_2) \\
&= (rsa_1,rsa_2) \\
&= ((rs)a_1\ ,\ (rs)a_2) && \boxed{M_2} \\
&= (rs)\ (a_1,a_2) \\
&= (rs)\ \overline{a}
\end{aligned}
$$

+

Corolario $\mathbb{R}^2$ con las operaciones de adición y multiplicación escalar en un espacio vectorial real.

ORTOGONALIDAD DE VECTORES

Definición. La longitud $||\bar{a}||$ de un vector $\bar{a} = (a_1,a_2)$ es

$$||\bar{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Definición. El producto escalar $\bar{a} \cdot \bar{b}$, de dos vectores $\bar{a} = (a_1,a_2)$ y $\bar{b} = (b_1,b_2)$ está definido por

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

De acuerdo a estas definiciones, podemos observar que:

$$\bar{a}\cdot\bar{a} = a_1^2 + a_2^2$$

$$\text{y } ||\bar{a}|| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

De aquí se deduce el siguiente

Teorema 3. Para todos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en $\mathbb{R}^2$ y s en $\mathbb{R}$

1) $||s\bar{a}|| = |s| \; ||\bar{a}||$
2) $||\bar{a}|| \geq 0$ la igualdad solo se verifica cuando $\bar{a} = \bar{0}$
3) $|\bar{a}\cdot\bar{b}| \leq ||\bar{a}|| \; ||\bar{b}||$ (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)
4) $||\bar{a} + \bar{b}|| \leq ||\bar{a}|| + ||\bar{b}||$ (Desigualdad del triángulo)

Demostración.

Sean $\bar{a} = (a_1,a_2)$ y $\bar{b} = (b_1,b_2)$

1) $||s\bar{a}|| = ||(sa_1, sa_2)|| = \sqrt{(sa_1)^2 + (sa_2)^2}$

$$= \sqrt{s^2(a_1^2 + a_2^2)}$$

$$= \sqrt{s^2}\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$= |s|\ ||\bar{a}||$$

2) Por definición $||\bar{a}|| \geq 0$ Pero $||\bar{a}||^2 = a_1^2 + a_2^2$

Si $a_1 \neq 0$ ó $a_2 \neq 0$, entonces $||\bar{a}|| \neq 0$

Por tanto, $||\bar{a}|| = 0$ implica $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$,

de modo que $\bar{a} = (a_1, a_2) = (0,0) = \bar{0}$

3) Si $\bar{a} = \bar{0}$ ó $\bar{b} = \bar{0}$, la desigualdad se cumple trivialmente.

Supondremos $\bar{a} \neq \bar{0}$ y $\bar{b} \neq \bar{0}$. Entonces

$$0 \leq \Big|\Big| \,||\bar{b}||\bar{a} \pm ||\bar{a}||\bar{b}\Big|\Big|^2 = (||\bar{b}||\bar{a} \pm ||\bar{a}||\bar{b}) \cdot (||\bar{b}||\bar{a} \pm ||\bar{a}||\bar{b})$$

$$= ||\bar{b}||^2\ ||\bar{a}||^2 \pm ||\bar{a}||\ ||\bar{b}||(\bar{b}\cdot\bar{a}) \pm ||\bar{b}||\ ||\bar{a}||(\bar{a}\cdot\bar{b}) + ||\bar{a}||^2\ ||\bar{b}||^2$$

$$= 2||\bar{a}||^2\ ||\bar{b}||^2 \pm 2||\bar{a}||\ ||\bar{b}||\ (\bar{a}\cdot\bar{b})$$

$$= 2||\bar{a}||\ ||\bar{b}||\ (||\bar{a}||\ ||\bar{b}|| \pm (\bar{a}\cdot\bar{b}))$$

Es decir $\pm(\bar{a}\cdot\bar{b}) \leq ||\bar{a}||\ ||\bar{b}||$

O sea $|\bar{a}\cdot\bar{b}| \leq ||\bar{a}||\ ||\bar{b}||$

$$4)\quad ||\overline{a}+\overline{b}||^2 = (\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}+\overline{b})$$
$$= ||\overline{a}||^2 + 2\,\overline{a}\cdot\overline{b} + ||\overline{b}||^2$$
$$\leq ||\overline{a}||^2 + 2||\overline{a}||\;||\overline{b}|| + ||\overline{b}||^2$$
$$= (||\overline{a}|| + ||\overline{b}||)^2$$

Esto implica $||\overline{a}+\overline{b}|| \leq ||\overline{a}|| + ||\overline{b}||$ +

Corolario. Para todo $\overline{a},\overline{b} \in \mathbb{R}^2$, $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$

$$-1 \leq \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{||\overline{a}||\,||\overline{b}||} \leq 1$$

Observación. La función coseno restringida al intervalo $[0,\pi]$; cuyo rango es el intervalo $[-1,1]$, es biyectiva y bicontinua.

La observación anterior y el corolario nos permiten asignar un único número $\Theta \in [0,\pi]$, a cada pareja de vectores no cero de manera que

$$\Theta = \cos^{-1}\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{||\overline{a}||\;||\overline{b}||} \quad \ldots\ldots (1)$$

O equivalentemente

$$\cos\Theta = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{||\overline{a}||\;||\overline{b}||} \quad \ldots\ldots (2)$$

Nótese que en realidad estamos definiendo el ángulo que forman dos vectores no cero, lo cual veremos más adelante, si θ es el ángulo desde $\overline{a}$ hasta $\overline{b}$, entonces

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = ||\overline{a}|| \ ||\overline{b}|| \cos\theta$$

(Ver definición de la pág.38)

Podemos ahora definir que: Dos vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son ortogonales si y sólo si $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$, definición que incluye el caso $\overline{a} = \overline{0}$ (ó $\overline{b} = \overline{0}$)

Teorema 4. Dado $\overline{a} \in \mathbb{R}^2$ un vector no nulo, existe $\overline{b} \in \mathbb{R}^2$ no nulo, tal que $\overline{b}$ es ortogonal a $\overline{a}$.

Demostración.

Sea $\overline{a} = (a_1,a_2)$, $\overline{a} \neq \overline{0}$. Por demostrar que existe $\overline{b} \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

Se define $\overline{b} = (-a_2,a_1)$, $\overline{b} \neq \overline{0}$, dado que $\overline{a} \neq \overline{0}$ y evidentemente

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = -a_1a_2 + a_2a_1 = 0$$

Por lo cual concluimos que existe $\overline{b} \neq \overline{0}$ tal que $\overline{a}$ es ortogonal a $\overline{b}$

+

GEOMETRIA PLANA

Dado que la geometría que pretendemos estudiar es la del plano, ahora veremos a $\mathbb{R}^2$ como modelo de la geometría, y definiremos dentro de éste los conceptos y relaciones básicas de la geometría de Euclides, a saber: "punto", "recta", "estar en", "estar entre", "segmento", "ángulo", "triángulo", "congruente", etc.

<u>Definición</u>. Nuestro universo es $\mathbb{R}^2$

<u>Definición</u>. Los elementos de $\mathbb{R}^2$ son los pares ordenados de números reales (x,y) y a cada par ordenado lo llamaremos punto.

Cada "recta" en $\mathbb{R}^2$ está determinada por un punto P_0, y una dirección $\overline{a}$ ($\overline{a}$ es un vector no nulo). Los puntos P sobre la recta ℓ que se apoya en P_0, y en la dirección de $\overline{a}$, son los de la forma $P = P_0 + t\overline{a}$, en donde t es un real. Aceptamos pues lo siguiente:

<u>Definición</u>. Un conjunto ℓ de puntos de $\mathbb{R}^2$ se llama recta, si hay un punto $P_0 = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ y un vector no nulo $\overline{a} = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que:

$$\ell = \{P_0 + t\overline{a} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Usaremos la notación $\ell\ (P_0\ ;\ \overline{a})$ para denotar a la recta que pasa por P_0 en la dirección de $\overline{a}$.

La relación de "incidencia" o "estar en" en nuestro modelo se define de la forma siguiente:

<u>Definición</u>. Se dice que $P \in \ell$, si P satisface la ecuación de ℓ. Simbólicamente esto se escribe

$$P \in \ell \iff \exists\, t_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } P = P_0 + t_0\, \overline{a}$$

$$P_0, \overline{a} \in \mathbb{R}^2\ ,\ \overline{a} \neq \overline{0}$$

La misma recta, puede tener representaciones analíticas diferentes. En efecto:

Lema 1. Sea P_1 un punto que está sobre la recta $\ell\ (P_0;\overline{a})$, entonces $\ell\ (P_1;\overline{a}) = \ell\ (P_0;\overline{a})$

Demostración.

Sea $\ell_1 = \ell_1\ (P_1\ ;\ \overline{a})$, queremos demostrar $\ell = \ell_1$

Bajo la hipótesis de que $P_1 \in \ell$, existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_1 = P_0 + t_1\, \overline{a}$$

De donde $P_0 = P_1 - t_1\, \overline{a}$ por lo que si $P \in \ell$, $P = P_0 + t\, \overline{a} = P_1 + (t-t_1)\, \overline{a}$, y por lo tanto $P \in \ell_1$

Es decir $\ell \subset \ell_1$

Análogamente, si $P \in \ell_1$

$P = P_1 + s\bar{a} = P_0 + (s + t_1)\,\bar{a}$, por lo que $P \in \ell$

Es decir $\ell_1 \subset \ell$, por lo cual concluimos que $\ell = \ell_1$

+

Lema 2. Sea $\ell(P_0; \bar{a})$ y sea $\bar{b}$ un vector no nulo paralelo a $\bar{a}$, entonces $\ell(P_0; \bar{b}) = \ell(P_0; \bar{a})$

Demostración.

Sea $\ell_1 = \ell_1\ (P_0; \bar{b})$, queremos demostrar $\ell = \ell_1$

Bajo la hipótesis de que $\bar{b}$ es paralelo a $\bar{a}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$, entonces $\bar{b} = s\bar{a}$, $s \in \mathbb{R}$ y $s \neq 0$

De donde $\bar{a} = (^1/s)\ \bar{b}$, entonces si $P \in \ell$

$P = P_0 + t\bar{a} = P_0 + (t/s)\ \bar{b}$ por lo tanto $P \in \ell_1$

lo cual implica $\ell \subset \ell_1$

Recíprocamente si $P \in \ell_1$

$P = P_0 + r\bar{b} = P_0 + rs\bar{a}$ por lo que $P \in \ell$ +

En los dos lemas anteriores hemos demostrado que en la ecuación de la recta podemos cambiar el punto de apoyo, o cambiar el vector de dirección por otro vector no nulo y paralelo a este. Nótese que siempre puede tomarse un vector unitario (de tamaño uno) como vector de dirección por lo cual podemos enunciar el

Corolario. Toda recta se puede considerar generada por un vector unitario.

Demostración.

Si $\ell = \ell(P_0;\ \overline{a})$, $\dfrac{\overline{a}}{||\overline{a}||}$ es unitario

y entonces, $\ell\left(P_0;\ \dfrac{\overline{a}}{||\overline{a}||}\right) = \ell(P_0;\ \overline{a})$. +

Nota.- Denotaremos los vectores unitarios como $\hat{a}$

Lema 3. Si $\ell(P_0;\ \overline{a}) = \ell(Q_0;\ \overline{b})$, entonces $\overline{a}$ es paralelo a $\overline{b}$

Demostración.

En efecto, $P_0 \in \ell$ implica que exista $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$P_0 = Q_0 + s_0\ \overline{b}$, por lo que para cualquier $P \in \ell$

$P = P_0 + t\overline{a} = Q_0 + r\overline{b}$

$Q_0 + s_0\overline{b} + t\overline{a} = Q_0 + r\overline{b}$

$s_0\overline{b} + t\overline{a} = r\overline{b}$

De donde $t\overline{a} = (r - s_0)\ \overline{b}$

Es decir $\bar{a}$ es paralelo a $\bar{b}$, con lo que se ha com-pletado la demostración. +

A continuación mostraremos otras formas de represen-tar una recta

Sea $\ell\ (P_0;\ \hat{a})$ ..... (1)

la ecuación abreviada de una recta en la cual

$$P_0 = \begin{pmatrix} h_0 \\ k_0 \end{pmatrix} \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (||\hat{a}||^2 = a^2 + b^2 = 1)$$

Entonces, P_0 y $P_0 + \hat{a}$ están en ℓ, y esta se puede des-cribir por medio de la ecuación "de la recta que pasa por dos puntos", es decir

$$P = P_0 + t\hat{a} \quad \text{es} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ k_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

De donde

$$x = h_0 + ta \ ; \ x - h_0 = ta \ ; \ b(x - h_0) = tab$$

y $\quad y = k_0 + tb \ ; \ y - k_0 = tb \ ; \ a(y - k_0) = tab$

Por lo cual

$$a(y - k_0) = b(x - h_0)$$

$$a(y - k_0) - b(x - h_0) = 0$$

$$ay - ak_0 - bx + bh_0 = 0$$

$-bx + ay - (-bh_0 + ak_0) = 0$, que es de la forma

$$Ax + By + C = 0 \quad ..... \quad (2)$$

La cual identificamos como la "ecuación cartesiana de una recta"

En donde $N = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ es un vector ortogonal a $\hat{a}$ y unitario.

y $C = -P_0 \cdot N$ Es decir, la ecuación (2) es equivalente a

$$\ell = \{P \varepsilon \mathbb{R}^2 \mid (P - P_0) \cdot N = 0\} \;..... \; (3)$$

Esta ecuación se denomina la "ecuación vectorial de — una recta".

Recíprocamente, de cada ecuación lineal

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

se obtiene una de la forma (2) o de la forma (3).

Sea $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ una ecuación lineal

donde $\alpha, \beta, \gamma \;\varepsilon\; \mathbb{R}$ y $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

Si $N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ entonces

$$N \cdot P = -\gamma \quad ||N||^2 = \alpha^2 + \beta^2 > 0$$

Si dividimos ambos miembros de la ecuación tenemos que

$$\frac{N \cdot P}{||N||} = \frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{-\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = k \; ; \quad \frac{N}{||N||}$$ es un vector unitario.

Sea

$$k \cdot \frac{N}{||N||} = \frac{-\gamma}{||N||^2} N = P_0 \text{ de donde}$$

$$N \cdot P_0 = \frac{-\gamma}{||N||^2} N^2 = -\gamma$$

Obtenemos que

$$N \cdot (P - P_0) = N \cdot P - N \cdot P_0 = -\gamma + \gamma = 0$$

Con lo cual demostramos que toda ecuación lineal es la ecuación de una recta.

Ahora vamos a introducir la relación de "estar entre", $\mathcal{E} \subset \mathcal{P} \times (\mathcal{P} \times \mathcal{P})$, la cual se refiere al orden entre los puntos que inciden sobre una recta.

Esta relación en nuestro universo $\mathbb{R}^2$ se expresa de la forma siguiente:

Si A,B y C son puntos distintos de una recta $\ell(P_0; \bar{a})$ entonces existen $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = P_0 + t_1 \bar{a}$$

$$B = P_0 + t_2 \bar{a}$$

$$C = P_0 + t_3 \bar{a}$$

<u>Definición</u>. B está entre A y C si t_2 está entre t_1 y t_3 es decir

$$t_1 < t_2 < t_3 \quad \text{ó} \quad t_3 < t_2 < t_1$$

lo cual denotaremos como A-B-C

Esta definición no depende de la representación de la recta, lo cual demostraremos a continuación.

Teorema 5. Para tres puntos alineados A, B y C la definición de "estar entre" es independiente de la representación de la recta que los contiene.

Demostración.

Sean $\ell(P_0;\overline{a})$ y $\ell(Q_0;\overline{b})$ dos representaciones de la recta ℓ y supongamos que a A, B y C les corresponden ta,tb,tc y sa,sb,sc como parámetros respectivamente, es decir

$$A = P_0 + ta\ \overline{a}$$

$$B = P_0 + tb\ \overline{a}$$

$$C = P_0 + tc\ \overline{a}$$

y

$$A = Q_0 + sa\ \overline{b}$$

$$B = Q_0 + sb\ \overline{b}$$

$$C = Q_0 + sc\ \overline{b}$$

Supondremos además que B está entre A y C, es decir

$$ta < tb < tc \quad \text{ó} \quad tc < tb < ta$$

Por demostrar que

$$sa < sb < sc \quad ó \quad sc < sb < sa$$

De acuerdo con el lema 3, si

$\ell(P_0;\overline{a}) = \ell(Q_0;\overline{b})$ entonces, $\overline{a}$ es paralelo a $\overline{b}$

De donde existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{b} = r\overline{a}$, $r \neq 0$

Por lo cual

$$P_0 + ta\,\overline{a} = Q_0 + rsa\,\overline{a}$$

$$P_0 + tb\,\overline{a} = Q_0 + rsb\,\overline{a}$$

$$P_0 + tc\,\overline{a} = Q_0 + rsc\,\overline{a}$$

y por tanto

$$P_0 - Q_0 = (rsa-ta)\overline{a} = (rsb-tb)\overline{a} = (rsc-tc)\overline{a}$$

de modo que

$$rsa-ta = rsb-tb = rsc-tc$$

de donde

$$tb-ta = r(sb-sa)\,;\quad tc-ta = r(sc-sa)$$

y por lo cual, si $r > 0$

$$ta < tb < tc \quad \text{implica} \quad sa < sb < sc$$

Si $r < 0$ $\quad ta < tb < tc$ implica $\quad sa > sb > sc$

es decir sb está entre sa y sc, que es lo que queremos demostrar.

Continuando, con la descripción de nuestro modelo, supongamos que sea $\ell(P_0;\hat{a})$ una recta y $N = \hat{a}^{\perp}$ "su normal".

(Si $a = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ y $||N|| = ||\hat{a}|| = 1$)

Entonces según ya vimos ℓ se puede describir como

$$\ell = \{P\varepsilon\ \mathbb{R}^2\ ;\ N\cdot(P-P_0) = 0\}$$

Definimos ahora,

$$\Sigma+ = \{P\varepsilon\ \mathbb{R}^2;\ N\cdot(P-P_0) > 0\}$$

y $$\Sigma- = \{P\varepsilon\ \mathbb{R}^2;\ N\ (P-P_0) < 0\}$$

$\Sigma+$ y $\Sigma-$ se llaman los semiplanos (abiertos) determinados por ℓ. Es claro que para todo $P\varepsilon\ \mathbb{R}^2$ se cumple una única de las condiciones siguientes:

$$P\varepsilon\ \ell;\quad P\varepsilon\ \Sigma+\ \text{ó}\ P\varepsilon\ \Sigma-$$

Cada uno de estos semiplanos, es un conjunto convexo, ya que si P_1 y P_2 ε $\Sigma+$ (el caso en el que estuvieran en $\Sigma-$ es análogo) y Q un punto interior del segmento $\overline{P_1P_2}$ debe existir un real $t\varepsilon(0,1)$ -- tal que

$Q = P_1 + t(P_2-P_1)$ y por lo tanto

$$N\cdot(Q-P_0) = N(P_1 + t(P_2 - P_1) - (1-t)P_0-tP_0) =$$

$$= N(1-t)\ [P_1-P_0] + N(t)\ [P_2-P_0]$$

$$= (1-t)\ [N\cdot(P_1-P_0)] + (t)\ [N\cdot(P_2-P_0)]$$

que es una suma de positivos ($0<t<1$ y $P_1, P_2 \varepsilon \Sigma+$) y por lo cual

$N\cdot(Q-P_0) > 0$, lo que asegura que

$Q\varepsilon\ \Sigma+$ como se quería probar. +

A cada semiplano (denotado como $\Sigma+$ y $\Sigma-$) lo llamaremos un lado de la recta ℓ que los define. Y se dice que P y Q están "del mismo lado de la recta" si ambos están en el mismo semiplano. En caso contrario se dice que están en lados diferentes.

Introduciremos ahora la noción de segmento y rayo

Sean A y B $\varepsilon\ \mathbb{R}^2$ y consideremos el conjunto

$$S = \{P\varepsilon\ \mathbb{R}^2 ; P = A + t\ (B-A),\ t\varepsilon\ [0,1]\}$$

Se observa que

1) $S = \{P\varepsilon\ \mathbb{R}^2 ; P = (1-t)\ A + tB,\ t\varepsilon\ [0,1]\}$

lo cual es obvio, con base en su definición

2) Si $t = 0$, $P = A$

Si $t = 1$, $P = B$

y para todo $t\varepsilon\ (0,1)$, P "está entre" A y B (todo $t\varepsilon\ (0,1)$ es $0 < t < 1$)

Damos ahora la siguiente

<u>Definición</u>. El segmento $\overline{AB}$ es S

Nuestra definición de segmento coincide con la definición geométrica de "segmento AB" como podemos observar por lo anterior.

Supongamos ahora que, además, A es diferente de B, y consideremos

$$\mathcal{R} = \{P\varepsilon\ \mathbb{R}^2 \ ;\ P = A + t(A-B),\ t\varepsilon\ [0,\infty)\}$$

Entonces resulta que $P\varepsilon\ \mathcal{R}$ si y solo si P-A-B y por lo tanto damos la:

Definición. El rayo $\overline{AB}$ es $\mathcal{R}$, que como en el caso anterior coincide con la definición geométrica.

Los triángulos y los ángulos se definen igual que en la geometría de Euclides, lo cual es posible, dado que ya tenemos segmentos y rayos.

Asociamos a los segmentos una medida por medio de la norma euclidiana de $\mathbb{R}^2$

$$m(\overline{AB}) = ||A-B||$$

Obsérvese que si $\ell(P_0;\hat{u})$ es una recta generada por vector unitario $\hat{u}$

1) Si $P\varepsilon\ell$, $P = P_0 + t\hat{u}$ entonces $m(\overline{P_0P}) = |t|$

   En efecto $P-P_0 = t\hat{u}$

   Por lo cual

   $m(\overline{P_0P}) = ||P-P_0|| = ||t\hat{u}|| = |t|\ ||\hat{u}|| = |t|$

2) Sean A, B y C ε ℓ y A-B-C , entonces

$m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) = m(\overline{AC})$

En efecto, si $\ell = \ell\ (A,\hat{u})$

y $B = A + tb\ \hat{u}$

$C = A + tc\ \hat{u}$

Además A-B-C implica $0 < tb < tc$ y

$m(\overline{AB}) = tb$

$m(\overline{BC}) = ||C-B|| = ||(tc-tb)\hat{u}|| = tc-tb$

$m(\overline{AC}) = tc$

Obviamente:

$$tc = tc - tb + tb$$

y se da la:

<u>Definición</u>. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ segmentos. Se dice que $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$ si

$$m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$$

Definiremos ahora una medida para ángulos.

Sean $\overline{a}$ y $\overline{b}$ vectores diferentes de cero. Entonces se dice que el $<(\overline{a},\overline{b})$ que forman, es aquel cuya medida Θ satisface la ecuación

$$\cos \Theta = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{||\overline{a}||\ ||\overline{b}||}$$

y que está en el intervalo cerrado $[0,2\pi]$ y extende--

mos ésta a la

<u>Definición</u>. La medida de un ángulo, es la medida del ángulo que forman los vectores que generan sus lados. Una observación pertinente es que si en un rayo se — cambia el vector que lo genera, el nuevo vector debe ser múltiplo POSITIVO del anterior (ya que hemos pedido en la definición de rayo que $t \in [0,\infty)$), y por lo tanto si $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son generadores de los lados de un ángulo y $\overline{a}'$, $\overline{b}'$ también, resulta que

$$\overline{a}' = h\overline{a} \quad \text{y} \quad \overline{b}' = k\overline{b} \qquad h,k \in \mathbb{R}^+$$

y entonces

$$m(\sphericalangle(\overline{a},\overline{b})) = \cos^{-1} \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{||\overline{a}||\,||\overline{b}||} = \cos^{-1} \frac{hk\,\overline{a} \cdot \overline{b}}{hk||\overline{a}||\,||\overline{b}||}$$

$$= \cos^{-1} \frac{\overline{a}' \cdot \overline{b}'}{||\overline{a}'||\,||\overline{b}'||} = m(\sphericalangle(\overline{a}',\overline{b}'))$$

es decir que la medida del ángulo es independiente de los vectores que se usen para generar sus lados.

En vista de la definición anterior, y de la bicontinuidad de la función

$$\cos : [0,2\pi] \rightarrow [-1,1]$$

se puede ver que existe una biyección continua entre — los rayos que emanan de un punto O, uno de los cuales se escoge como "lado inicial" y los números reales -- (módulo 2π), que está dada por la medida del ángulo - que forma el rayo dado con el que se escogió como "la do inicial".

Definición. Sean $<(\overline{a},\overline{b})$ y $<(h,k)$ dos ángulos.
Se dice que $<(\overline{a},\overline{b})$ es congruente con $<(h,k)$
($<(\overline{a},\overline{b}) \equiv <(\overline{h},\overline{k})$) si $m(<(\overline{a},\overline{b})) = m(<(\overline{h},\overline{k}))$

La transformación de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que consiste en girar alrededor del origen un ángulo Θ, se puede representar por medio de la matriz

$$A_\Theta = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\operatorname{sen}\Theta \\ \operatorname{sen}\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

de manera que, si un vector cualquiera $\overline{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ se transforma mediante esta matriz en otro $\overline{Y} = A_\theta \overline{X}$, el ángulo $\Theta = <(\overline{X},\overline{Y})$ satisface la relación

$$\cos\Theta = \frac{\overline{X} \cdot \overline{Y}}{||\overline{X}||\,||\overline{Y}||}$$

en particular si $\Theta = \pi/2$

$T\pi/2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ resulta ser el vector "normal" (ortogonal) a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, que se obtiene cuando $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gira sobre el origen, en ángulo recto en el "sentido positivo"

$$\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix} \text{ se denotará } \begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}^{\perp}$$

Nótese también que como A_θ es una matriz unitaria (de - determinante uno), el tamaño de $T_\Theta\, \bar{a}$ coincide con el de $\bar{a}$. Finalmente y para usos posteriores, remarcaremos la observación, hecha anteriormente.

"La función coseno restringida al intervalo $[0,\pi]$; cuyo rango es el intervalo $[-1,1]$, es biyectiva y bicontinua".

Si $\bar{X}$ es un vector distinto de cero y Θ es un real, ---- $\Theta \varepsilon (0,\pi)$

$$\bar{X}^{\perp} \cdot A_\theta\ \bar{X} = \begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos\Theta & -\text{sen}\ \Theta\\ \text{sen}\ \Theta & \cos\Theta\end{pmatrix} \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\cos\Theta - b\ \text{sen}\ \Theta\\ a\ \text{sen}\ \Theta + b\cos\Theta\end{pmatrix}$$

$$= -ab\cos\Theta + b^2\ \text{sen}\Theta + a^2\ \text{sen}\Theta + a\cdot b\cos\Theta$$

$$= (a^2+b^2)\,\text{sen}\ \Theta$$

$$= \|\bar{X}\|^2\ \text{sen}\ \Theta > 0, \text{ mientras que}$$

$$\bar{X}^{\perp} \cdot A_{(-\Theta)}\bar{X} = \|\bar{X}\|^2\ \text{sen}(-\Theta) < 0$$

En este capítulo hemos definido los conceptos primitivos, algunos "definidos" y las relaciones geométricas dentro de nuestro modelo $\mathbb{R}^2$. Y demostramos algunos - resultados que usaremos más adelante.

Capítulo III

Incidencia y Estar Entre

INCIDENCIA

El primer grupo de axiomas de Hilbert describe las propiedades de la relación de "incidencia", la cual en nuestro modelo, se refiere a los puntos que satisfacen la ecuación de una recta. Propiedades que nosotros intuitivamente asignamos a lo que pensamos como puntos y rectas; y que se expresan en los tres axiomas siguientes:

A_1 Dos puntos distintos A y B determinan una única línea recta

A_2 Toda línea tiene al menos dos puntos

A_3 Existen al menos tres puntos que no están alineados

Afirmación. Estos axiomas se cumplen en el plano $\mathbf{R}^2$

Para la demostración de la afirmación anterior establecemos los teoremas siguientes:

Teorema 6. Si P_1 y P_2 son puntos diferentes cualesquiera en $\mathbf{R}^2$ hay una y solo una recta ℓ que pasa por ellos.

Demostración

Sean P_1 y P_2 puntos distintos en $\mathbf{R}^2$ (de donde $P_2-P_1 \neq \overline{0}$)

Entonces $\ell(P_1,P_2-P_1)$ es una recta y

Si $t = 0$, $P = P_1$

Si $t = 1$, $P = P_2$ es decir $P_1,P_2 \in \ell$

Demostraremos ahora que es única con tal propiedad, en efecto

Sea $\ell_1(Q_0;\overline{a})$ es una recta, tal que P_1 y P_2 inciden en ella, es decir, existen S_1 y $S_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$P_1 = Q_0 + S_1\,\overline{a}$$

$$P_2 = Q_0 + S_2\,\overline{a}$$

restando $P_2-P_1 = (S_2-S_1)\overline{a}$, por lo cual P_2-P_1 es paralelo a $\overline{a}$

Ahora bien, considerando los resultados de los lemas 1 y 2 demostrados en el capítulo anterior; en la ecuación de la recta podemos cambiar el punto de apoyo, o cambiar el vector de dirección por otro vectos no nulo y paralelo a éste.

Como $P_1 \in \ell_1$

$\ell_1 = \ell_1(Q_0;\overline{a}) = \ell_1(P_1;\overline{a})$

y $\ell_1 = \ell_1(P_1;\overline{a}) = \ell_1(P_1;P_2-P_1) = \ell_1$ que es lo que queremos demostrar. +

Teorema 7. Toda recta tiene al menos dos puntos.

Demostración.

Sea $\ell(P_0;\bar{a})$ una recta.

Ya que para cada $t \varepsilon \mathbb{R}$, ℓ tiene un punto, ℓ tiene al menos dos puntos. (¡y muchos más¡) +

Teorema 8. Existen al menos tres puntos P_1, P_2 y P_3 en $\mathbb{R}^2$ que no están alineados.

Demostración.

Sean P_1 y P_2 puntos distintos en $\mathbb{R}^2$ y sea $\ell(P_1, P_2-P_1)$ la única recta que los contiene.

Sea Pn un vector no cero y ortogonal al vector P_2-P_1, - (su existencia está garantizada por el teorema 4)

Entonces $P_3 = P_1 + Pn \not\varepsilon \ell$ ya que si $P_3 \varepsilon \ell$,

$P_3 = P_1 + Pn = P_1 + t_0(P_2-P_1)$, es decir

$Pn = t_0(P_2-P_1)$ por lo que

$Pn \cdot Pn = Pn \cdot t_0(P_2-P_1) = 0$ lo que es absurdo (ya que — $Pn \cdot Pn = ||Pn||^2$ es diferente de cero)

Dado que la única recta que contiene tanto a P_1 como a P_2 es ℓ, y ℓ no contiene a P_3; P_1 , P_2 y P_3 no pueden estar alineados. +

ESTAR ENTRE

Ahora, demostraremos que nuestro modelo también satisface otro de los conceptos "intuitivos" de la geometría, el cual se refiere a los puntos que se encuentran sobre una línea; esta relación es la de "estar entre".

El siguiente grupo de axiomas describe las propiedades de esta relación.

B_1 Si A,B y C son puntos de una recta y B está entre A y C, entonces B está entre C y A.

B_2 Si A y C son dos puntos de una recta, entonces existen B y D tales que B está entre A y C y C está entre A y D.

B_3 De cualesquiera tres puntos situados sobre una recta, hay uno y sólo uno que está entre los otros dos.

B_4 (Separación de planos) Para toda línea ℓ, y para cualesquiera puntos A,B y C que no están en ℓ;

1) Si A y B están del mismo lado de ℓ, y B y C están del mismo lado de ℓ, entonces A y C están del mismo lado de ℓ.
2) Si A y B están en lados opuestos de ℓ, y B y C están de lados opuestos de ℓ, entonces A y C están del mismo lado de ℓ.

Estas propiedades, se demuestran en los siguientes teoremas.

Teorema 9. Si A,B y C son puntos de la recta $\ell(P_0;\overline{a})$ y A-B-C, entonces C-B-A

Demostración.

Dado que "estar entre" se define como la disyunción de dos enunciados y sabemos que:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

Resulta que

$$ta < tb < tc \quad ó \quad tc < tb < ta$$

Sí y sólo si

$tc < tb < ta$ ó $ta < tb < tc$ que es lo que queremos demostrar. +

Teorema 10. Si A y C son dos puntos de la recta ℓ, entonces existen B y D en ℓ tales que A-B-C y A-C-D

Demostración.

Sea $\ell(A;C-A)$, $C-A \neq \overline{0}$ ya que $C \neq A$

Entonces si

$$B = A + \frac{1}{2}(C-A)$$

y $D = A + 2(C-A)$

resulta que $0 < \frac{1}{2} < 1$, y $0 < 1 < 2$ lo cual implica que A-B-C y A-C-D como se quería demostrar. +

Teorema 11. Si A,B y C son tres puntos diferentes sobre ℓ, hay uno y sólo uno que está entre.

Demostración.

Sean A,B y C ε ℓ, ta,tb,tc sus parámetros. Entonces -- con base en las propiedades de los números reales sabemos que, hay uno y sólo uno que está entre los otros - dos. +

Teorema 12. Para toda línea ℓ, y para cualesquiera puntos A,B y C que no están en ℓ.

1) Si A y B están del mismo lado de ℓ, y B y C están - del mismo lado de ℓ, entonces A y C están del mismo lado de ℓ.

2) Si A y B están de lados opuestos de ℓ y B y C están de lados opuestos de ℓ, entonces A y C están del -- mismo lado de ℓ.

Demostración.

1) Sea Σ uno de los semiplanos generados por ℓ y sea - $\ell = \{P \varepsilon \mathbb{R}^2 ; N\cdot(P-P_0) = 0\}$ la ecuación de la recta.

Supongamos $A,B \in \Sigma+$ (De manera análoga se puede hacer la demostración para $\Sigma-$)

Por lo cual

$$N\cdot(A-P_0) > 0 \quad y$$

$$N\cdot(B-P_0) > 0$$

Además, como B y C están del mismo lado de ℓ, y $B \in \Sigma+$, entonces C también está en $\Sigma+$, es decir

$$N\cdot(C-P_0) > 0$$

Por lo tanto A y C están del mismo lado de ℓ.

2) Sean $\Sigma+$ y $\Sigma-$ los semiplanos generados por ℓ. Dado que A y B están en lados opuestos de ℓ.

Supondremos que $A \in \Sigma+$ y $B \in \Sigma-$.

De manera similar se puede hacer la demostración del otro caso.

Entonces

$$N\cdot(A-P_0) > 0 \quad y$$

$$N\cdot(B-P_0) < 0$$

Si $B \in \Sigma-$, como B y C están en lados opuestos de ℓ, tenemos que

$$N\cdot(C-P_0) > 0, \text{ es decir } C \in \Sigma+$$

De donde A y $C \in \Sigma+$, por lo cual A y C están del mismo lado de ℓ, que es lo que queremos demostrar +

Observación.- Estas demostraciones son equivalentes a la afirmación de que $\Sigma+$, $\Sigma-$ y ℓ constituyen una partición del plano, lo que ya se demostró anteriormente.

El axioma al que se refiere este último teorema puede expresarse de la manera siguiente:

Axioma de Pasch. Sean A,B y C tres puntos que no están alineados; y sea ℓ una recta situada en el plano ABC y que no pasa por ninguno de los puntos A,B,C. Entonces, si la recta ℓ pasa a través de un punto del segmento $\overline{AB}$, también pasará a través de un punto del segmento $\overline{BC}$ o por un punto del segmento $\overline{AC}$.

Este axioma también se satisface en nuestro modelo.

En efecto. Dado que la recta ℓ pasa a través de un punto del segmento $\overline{AB}$, entonces A y B están en lados opuestos con respecto a ℓ, es decir, están en diferente semiplano. Además como ℓ no pasa por ninguno de los tres puntos, C no está sobre la recta ℓ y por lo tanto debe estar en alguno de los semiplanos generados por ℓ.

Consideramos que C está del mismo lado que B, y supongamos que B y C ε $\Sigma-$, entonces A ε $\Sigma+$.

Como ya demostramos anteriormente que los semiplanos son -

conjuntos convexos, resulta que el segmento $\overline{BC}$ está conte nido en $\Sigma-$.

La intersección del segmento $\overline{AC}$ con ℓ es no vacía.

En el caso de que C estuviera del mismo lado que A, el — segmento $\overline{AC}$ estaría contenido en $\Sigma+$ y la intersección del segmento $\overline{BC}$ con ℓ sería diferente del vacío.

Capítulo IV

Congruencia y Continuidad

CONGRUENCIA

La idea "intuitiva" de "congruencia", para cualesquiera dos figuras es siempre la misma.

Dos figuras son congruentes si son "iguales". (Semejantes con razón de semejanza igual a 1).

En nuestro modelo, la relación de congruencia, se define tomando en cuenta el concepto de "medida" o "tamaño", de un segmento o de un ángulo.

Cuando decimos que un segmento $\overline{AB}$ es congruente con el segmento $\overline{CD}$, en realidad queremos decir que la longitud de $\overline{CD}$ es la misma que la de $\overline{AB}$. El concepto de "medida" entre segmentos establece una relación biyectiva entre los puntos de cualquier línea y los números reales, dados un punto distinguido (origen) y una escala.

A continuación demostraremos, que la relación de congruencia entre segmentos satisface los axiomas siguientes:

C_1 Dado un segmento $\overline{AB}$ y A' un punto, en toda línea que pasa por A' existen dos puntos B_1 y B_2 tales que:

i) $B_1 - A' - B_2$

ii) $\overline{B_1A'} \equiv \overline{AB} \equiv \overline{A'B_2}$

En efecto. Sea ℓ una recta que pasa por A'.

Luego ℓ se puede apoyar en A' (Por el lema 1), y se puede pensar generada por un vector unitario $\hat{u}$.

Entonces, si

$$B_1 = A' - \alpha\,\hat{u}$$

$$B_2 = A' + \alpha\,\hat{u} \quad \text{en donde } \alpha = m(\overline{AB}) \geq 0$$

resulta que

$$-\alpha < 0 < \alpha \text{ , es decir } B_1 - A' - B_2$$

y
$$m(\overline{B_1A'}) = \|-\alpha\,\hat{u}\| = |-\alpha| = \alpha$$

$$m(\overline{A'B_2}) = \|\alpha\,\hat{u}\| = |\alpha| = \alpha$$

De donde $m(\overline{B_1A'}) = \alpha = m(\overline{A'B_2})$, por definición de α, -- por lo que $\overline{B_1A'} \equiv \overline{AB} \equiv \overline{A'B_2}$ +

C_2 Sean $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{A''B''}$ segmentos. Entonces

$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ y $\overline{AB} \equiv \overline{A''B''}$ implica que $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$

Lo que resulta obvio, en vista de que las congruencias geométricas se traducen en igualdades entre números.

C_3 Sean $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ segmentos y C y C' puntos en cada uno de ellos tales que $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ y $\overline{CB} \equiv \overline{C'B'}$

Entonces $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.

En efecto.

$$m(\overline{AC}) = m(\overline{A'C'}) = m_1$$

$$m(\overline{CB}) = m(\overline{C'B'}) = m_2$$

De donde

$$\begin{aligned} m(\overline{AB}) &= m(\overline{AC}) + m(\overline{CB}) \\ &= m_1 + m_2 \\ &= m(\overline{A'C'}) + m(\overline{C'B'}) \\ &= m(\overline{A'B'}) \end{aligned}$$

lo cual implica $m(\overline{AB}) = m(\overline{A'B'})$ +

Vamos a demostrar ahora, que la relación de congruencia de ángulos, satisface los axiomas de congruencia de la geometría.

Teorema 13. Sea $<(\overline{h},\overline{k})$ un ángulo dado; ℓ una recta, Σ uno de los semiplanos definidos por ℓ y $\vec{ra}$ un rayo sobre ℓ. — Entonces existe un único rayo $\vec{r}+$ tal que $<(\overline{h},\overline{k})$ es congruente al ángulo que forman $\vec{r}+$ y $\vec{ra}$ y tal que un punto de $\vec{r}+$(al menos) está en el semiplano Σ.

Demostración.

En efecto. Sean $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ dos rayos que emanan del mismo punto; Θ la medida del ángulo que forman; $\overline{h}$ y $\overline{k}$ vecto—

res que los generan y que usaremos para denotar a los respectivos rayos. Es decir:

$$\Theta = m(<(\overline{h},\overline{k}))$$

Sea $\vec{ra} = \overrightarrow{P_0P_0 + \hat{a}}$ un rayo en la recta ℓ, (que sin ninguna pérdida de generalidad puede suponerse como $\ell(P_0;\hat{a})$) y Σ uno de los semiplanos que ℓ determina. (tampoco se pierde generalidad al suponer que Σ es precisamente $\Sigma+$, ya que si no fuera así, es decir, $\Sigma = \Sigma-$, el simple cambio de Θ por $-\Theta$ en todo el argumento que se sigue, daría la demostración que se requiere en este caso).

Se debe demostrar que existe un único rayo $\vec{r}_+$ que sale de P_0 y tal que:

i) El ángulo que forman $\vec{r}_+$ con $\vec{ra}$ es congruente con $<(\overline{h},\overline{k})$. (Sus medidas son iguales) y

ii) Todo rayo $\vec{r}_+$, con excepción de P_0, está contenido en $\Sigma+$

Se construyen Q'_+ y Q_+ como sigue $Q'_+ = A_\Theta\, \hat{a}$ en donde A_Θ es la matriz asociada a la rotación de un ángulo Θ, alrededor del origen y en sentido positivo, y

$$Q_+ = P_0 + Q'_+ \quad \ldots\ldots (1)$$

Supondremos que $P_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y que $\hat{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $(a^2 + b^2 = 1)$,

con lo que la relación (1) queda

$$Q_+ = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\operatorname{sen}\Theta \\ \operatorname{sen}\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 + a\cos\Theta - b\operatorname{sen}\Theta \\ y_0 + a\operatorname{sen}\Theta + b\cos\Theta \end{pmatrix}$$

de lo que sigue:

$$m(\vec{r}_+, \vec{a}) = m(\vec{r}_+, \overrightarrow{Q_+P_0})$$

$$= \cos^{-1} \frac{(Q_+ - P_0) \cdot (P_0 + \hat{a} - P_0)}{||Q_+ - P_0|| \; ||P_0 + \hat{a} - P_0||}$$

$$= \cos^{-1} \frac{Q_+' \; \hat{a}}{||Q_+'|| \; ||\hat{a}||} = \cos^{-1}(Q_+' \; \hat{a})$$

$$= \cos^{-1} \begin{pmatrix} a\cos\Theta - b\operatorname{sen}\Theta \\ a\operatorname{sen}\Theta + b\cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \cos^{-1} \left[(a^2 + b^2) \cos\Theta \right] = \Theta,$$ lo que

demuestra la primera parte.

Si suponemos ahora que P es un punto cualquiera del rayo $\vec{r}_+$ que no sea P_0, sabemos que

$$P = P_0 + t\ Q'_+ \quad \text{para algún } t \in \mathbb{R}^+$$

y por lo cual

$$N\cdot(P-P_0) = N(P_0 + t\ Q'_+ - P_0) = t\ N\ Q'_+$$

$$= t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos\Theta - b \operatorname{sen}\Theta \\ a \operatorname{sen}\Theta + b\cos\Theta \end{pmatrix}$$

$$= t\left[-ab\cos\Theta + b^2 \operatorname{sen}\Theta + a^2 \operatorname{sen}\Theta + ab\cos\Theta\right]$$

$$= t(a^2 + b^2)\operatorname{sen}\Theta = t\operatorname{sen}\Theta \text{ y como}$$

$$\forall\ \Theta \in (0,\pi)\ \operatorname{sen}\Theta > 0,\quad N\cdot(P-P_0) > 0$$

es decir $P \in \Sigma+$ con lo que termina la demostración de la existencia. Por lo que hace a la unicidad, véase la observación en la pág. 24

Con lo cual queda demostrado. +

El segundo axioma de congruencia de ángulos, el cual dice que: "Cualquier ángulo es congruente consigo mismo". Se demuestra trivialmente, dado que todo ángulo tiene igual medida que el mismo.

Teorema 14. (Criterio LAL). Sean ABC y A'B'C' dos triángu los tales que el segmento $\overline{AB}$ es congruente al segmento $\overline{A'B'}$, el segmento $\overline{AC}$ es congruente al segmento $\overline{A'C'}$ y el $\angle BAC$ es congruente al $\angle B'A'C'$. Entonces el $\angle ABC$ es congruente al $\angle A'B'C'$ y el $\angle ACB$ es congruente al $\angle A'C'B'$.

Demostración.

Observemos primero que si A,B y C son tres puntos no alineados, el $\angle BAC$ es por definición $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ y su medida resulta ser $m(\angle(B-A,\ C-A))$, es decir

$$\theta = \cos^{-1} \frac{(B-A)\cdot(C-A)}{||B-A||\ ||C-A||}$$

$$= \cos^{-1} \frac{\overline{h}\cdot\overline{k}}{||\overline{h}||\ ||\overline{k}||}$$

Supongamos que el triángulo ABC y el triángulo A'B'C' se cumple que

$$||\overline{h}|| = ||\overline{h}'||$$
$$||\overline{k}|| = ||\overline{k}'||$$

y $m(\angle(\overline{h},\overline{k})) = m(\angle(\overline{h}',\ \overline{k}'))$

Entonces debe suceder que $||\overline{\ell}|| = ||\overline{\ell}'||$

y que

$$m(\overline{k},\overline{\ell}) = m(\overline{k}',\overline{\ell}')$$

$$m(\overline{h},\overline{\ell}) = m(\overline{h}',\overline{\ell}')$$

Nótese que de las hipótesis

$\overline{h}\cdot\overline{k} = \overline{h}'\cdot\overline{k}'$ y que

$$\overline{\ell} = \overline{k} - \overline{h}$$

$$\overline{\ell}' = \overline{k}' - \overline{h}'$$

por lo cual

$$||\overline{\ell}||^2 = ||\overline{k}||^2 + ||\overline{h}||^2 - 2\,\overline{k}\,\overline{h}$$

$$= ||\overline{k}'||^2 + ||\overline{h}'||^2 - 2\,\overline{k}'\overline{h}' = ||\overline{\ell}'||^2$$

$$m(<(\overline{k},\overline{\ell})) = \frac{\overline{k}\cdot\overline{\ell}}{||\overline{k}||\,||\overline{\ell}||} = \frac{\overline{k}\cdot(\overline{k}-\overline{h})}{||\overline{k}||\,||\overline{\ell}||}$$

$$= \frac{||\overline{k}||^2 - \overline{k}\,\overline{h}}{||\overline{k}||\,||\overline{\ell}||} = \frac{||\overline{k}'||^2 - \overline{k}'\overline{h}'}{||\overline{k}'||\,||\overline{\ell}'||}$$

$$= \frac{\overline{k}'\cdot(\overline{k}'-\overline{h}')}{||\overline{k}'||\,||\overline{\ell}'||} = \frac{\overline{k}'\cdot\overline{\ell}'}{||\overline{k}'||\,||\overline{\ell}'||} = m(\overline{k}',\overline{\ell}')$$

$$m(<(\overline{h},\overline{\ell})) = \frac{\overline{h}\cdot\overline{\ell}}{||\overline{h}||\,||\overline{\ell}||} = \frac{\overline{h}\cdot(\overline{k}-\overline{h})}{||\overline{h}||\,||\overline{\ell}||}$$

$$= \frac{\overline{h}\,\overline{k} - ||\overline{h}||^2}{||\overline{h}||\,||\overline{\ell}||} = \frac{\overline{h}'\overline{k}' - ||\overline{h}'||^2}{||\overline{h}'||\;||\overline{\ell}'||}$$

$$= \frac{\overline{h}'\cdot(\overline{k}'-\overline{h}')}{||\overline{h}'||\,||\overline{\ell}'||} = \frac{\overline{h}'\cdot\overline{\ell}'}{||\overline{h}'||\,||\overline{\ell}'||} = m(<(\overline{h}',\overline{\ell}'))$$

es decir que el "criterio LAL", también se cumple en nuestro modelo universal. +

Como podemos observar la relación de congruencia entre segmentos y ángulos cumple con las propiedades siguientes:

1) $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$

$<(\overline{h},\overline{k}) \equiv <(\overline{h},\overline{k})$ (propiedad reflexiva)

2) Si $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$

Si $<(\overline{h},\overline{k}) \equiv <(\overline{r},\overline{s})$, entonces $<(\overline{r},\overline{s}) \equiv <(\overline{h},\overline{k})$

(propiedad simétrica)

3) Si $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ y $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$

Si $<(\overline{h},\overline{k}) \equiv <(\overline{r},\overline{s})$ y $<(\overline{r},\overline{s}) \equiv <(\overline{p},\overline{q})$

entonces $<(\overline{h},\overline{k}) \equiv <(\overline{p},\overline{q})$

(propiedad transitiva)

Por tanto, la relación de "congruencia" es una relación de equivalencia.

CONTINUIDAD

Imaginemos los puntos en una recta ℓ como los elementos básicos del continuo. Al definir una medida para los segmentos, establecemos una correspondencia entre los números reales, en donde la relación $x < y$ indica un orden entre los puntos del segmento y la expresión $||x-y||$ significa la dis tancia entre el punto x y el punto y.

Además podemos observar que cada segmento de una recta corresponde a un intervalo cerrado, en el cual a los puntos extremos del segmento le corresponden los valores extremos del intervalo.

Consideraremos ahora los axiomas de continuidad y haremos ver que en nuestro modelo también se satisfacen tales axiomas.

H_1 Sean A, A_1 y B tres puntos colineales tales que $A-A_1-B$. Existen en el rayo $\vec{AB}$ puntos $A = A_0, A_1, \ldots A_n$ tales que:

i) $\overline{A_{i-1}A_i}$ es congruente con $\overline{AA_1}$ para cada i; y

ii) $A-B-A_{n_0}$ para alguna $n_0 \varepsilon N$

En efecto. Sea

$\{P = A + t\hat{a} \ , \ t \varepsilon [0,\infty)\}$ el rayo $\vec{AB}$,

entonces: existe $\Xi > 0$ y $m \varepsilon \mathbb{R}$ tal que

$$A_0 = A + 0 \cdot \hat{a}$$

$$A_1 = A + \Xi \cdot \hat{a}$$

$$B = A + m \cdot \hat{a} \quad y \ 0 < \Xi < m$$

Si para n = 2,3,...

$$A_2 = A + 2\Xi\ \hat{a}$$

$$A_3 = A + 3\Xi\ \hat{a}$$

$$\vdots$$

$$An = A + n\Xi\ \hat{a}$$

Por la propiedad arquimediana de los números reales sabemos que existe un $n_0 \varepsilon$ N tal que $0 < m < n_0\ \Xi$ y entonces A-B-An_0 como se quería demostrar. Por otra parte para cada $i = 1,2,...$, la medida del segmento $\overline{A_{i-1}A_i}$ es Ξ y por lo tanto cada uno de ellos es congruente con $\overline{AA_1}$ +

H_2 Sea $\overline{AB}$ un segmento y sean {An} y {Bn} dos sucesiones de puntos interiores de $\overline{AB}$, con las propiedades siguientes:

a) El segmento $\overline{AnBn}$ está situado en el interior del segmento $\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$

b) No existe ningún segmento cuyos puntos extremos pertenezcan a todos los segmentos $\overline{AnBn}$.

Entonces existe un único punto x común a todos los segmentos $\overline{AnBn}$

Para demostrar que este axioma también es un teorema en nuestro modelo, requerimos del axioma de los encajes de intervalos que se cumple en $\mathbb{R}$ y que dice que:

E. Sea $\{ [an,bn] \; ; \; n \varepsilon N \}$ una colección de intervalos cerrados tales que para toda $n \varepsilon N$,

$an < bn$ y $[an,bn] \supset [a_{n+1},b_{n+1}]$. Entonces

$$\bigcap_{n\varepsilon N} [an,bn] \neq \phi$$

y hacemos la siguiente:

Observación. La hipótesis $[an,bn] \supset [a_{n+1},b_{n+1}]$

implica que $\forall \; n\varepsilon N \quad an \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$

Corolario. Sea $n,m \; \varepsilon \; N$ y supondremos que $n < m$

Entonces $an \leq am \leq bm \leq bn$, es decir que $\forall \; n,m \; \varepsilon \; N$

$an < bn$ o sea que cada ai es cota inferior de

$\{bn \; ; \; n\varepsilon N\}$ y recíprocamente cada bj es cota superior de $\{an \; ; \; n\varepsilon N\}$

Corolario. Si t_1 y $t_2 \; \varepsilon \; \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$ son dos números tales que $t_i \; \varepsilon \bigcap_{n\varepsilon N} [an,bn] \quad i = 1,2,$ entonces

$\forall \; n \; \varepsilon \; N$

$an \leq t_1 < t_2 \leq bn$ y por lo tanto

$$[t_1,t_2] \subset \bigcap_{n\varepsilon N} [an,bn]$$

Regresando al axioma H_2 de continuidad de la geometría, notamos que si la recta que contiene a todos los segmentos $[a_n, b_n]$ $n \in N$ es $\ell(P_0; \hat{a})$ entonces para cada a_n existe un $s_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_n = P_0 + s_n \hat{a}$$

y análogamente, para cada b_n existe $t_m \in \mathbb{R}$ tal que

$b_m = P_0 + t_m \hat{a}$ y las hipótesis implican que los intervalos cerrados $[s_n, t_n]$ satisfacen las hipótesis del axioma de los encajes de intervalos y que

$$\bigcap_{n \in N} [s_n, t_n] \text{ sólo consta de un punto}$$

(es no vacía como concluimos del axioma) y no puede tener dos puntos, ya que entonces contendría un intervalo cerrado, el cual define un segmento contenido en todo segmento $[a_n, b_n]$ lo que viola la segunda hipótesis del axioma de la geometría que estamos considerando. +

Como consecuencia de estos axiomas, podemos decir que un segmento puede prolongarse indefinidamente en ambos sentidos, y que no existen vacíos en la recta.

Capítulo V

Paralelismo

PARALELISMO

Finalmente llegamos al "axioma de paralelas" del cual tomamos una de las versiones más conocidas (proposiciones equivalentes) que se suele designar como el "axioma de Playfair", que dice que:

Si ℓ es una recta y P un punto que no está en ℓ, entonces existe una única recta ℓ', tal que:

i) $P \in \ell'$ y

ii) ℓ' es paralela a ℓ

La demostración de este axioma, que fue tan controvertido en el pasado, resulta ser una cuestión trivial en nuestro modelo. En efecto:

Demostración.

Sea $\ell(P_0;\hat{a})$ una recta y $P \notin \ell$ un punto. Definimos $\ell' = \ell' \ (P;\hat{a})$.

Evidentemente se trata de una recta que pasa por P y que es paralela a ℓ.

Por lo que hace a la unicidad suponemos que $\ell''(Q;\hat{b})$ -

es otra recta con tales propiedades. Entonces, puesto que pasa por P, puede tomarse éste como punto de apoyo, es decir

$\ell'' = \ell''(P;\ \hat{b})$ y como ℓ'' es paralela a ℓ; $\hat{b}$ es paralelo a $\hat{a}$ y por lo tanto $\ell'' = \ell''(P;\ \hat{a}) = \ell$ +

Este postulado sólo se cumple en el plano euclidiano.

Durante mucho tiempo esta proposición se consideró como una ley natural. Sin embargo, en el siglo XIX Lobachevski, Bolyai y Gauss descubrieron que se puede obtener una teoría matemática perfectamente consistente comenzando con un postulado que enuncia que las paralelas siempre existen, pero niega que son únicos.

El postulado de las paralelas de Lobachevski. Dada una línea ℓ y un punto P fuera de ℓ, hay cuando menos dos líneas ℓ', ℓ'' que contienen a P y son paralelas a ℓ.

Existe sin embargo, otra teoría matemática que no niega la unicidad de las paralelas, sino su existencia.

El postulado de las paralelas de Riemann. No existen dos líneas en el mismo plano que sean paralelas.

Estos dos postulados junto con el de paralelismo nos dan tres clases de "geometría plana". Cada una de ellas, por su—

puesto, requiere otros postulados, pero la diferencia fundamen tal de ellos se basa en este de las paralelas.

Para poder describir algunas diferencias, haremos referencia a dos modelos matemáticos en los que el postulado de las - paralelas de Euclides falla.

MODELO DE POINCARE

El modelo de Poincare, satisface los postulados de la geometría euclidiana a excepción del postulado de las paralelas. Este modelo satisface los postulados de la geometría de ------ Lobachevski.

Considere un círculo fijo C en un plano euclidiano. Supone mos por razones de conveniencia, que el radio de C es 1. Sea - E el interior de C.

Mediante un círculo -L significamos un círculo C' que es - ortogonal a C. Cuando decimos que dos círculos son ortogonales significamos que sus tangentes en cada punto de intersección - son perpendiculares.

Los puntos de nuestro plano -L serán los puntos del inte-- rior E de C. Por una línea -L significamos la intersección de E y un círculo -L o la intersección de E y un diámetro de C.

Necesitamos enseguida definir distancia y medida angular.

Por cada par de puntos x,y ya sea sobre C o en el interior de C, sea xy la distancia euclidiana usual. Note que si R y S son puntos sobre C y T y U son puntos de nuestro plano -L ---- (puntos interiores a C), entonces R y S son puntos del plano - euclidiano con el que comenzamos. Por lo tanto las distancias TS,TR,US,UR están definidas. Usaremos estas cuatro distancias para definir una nueva distancia d(T,U) en nuestro "plano" E , por la fórmula siguiente:

$$d\ (T,U) = \left| \log_e \frac{TR/TS}{UR/US} \right|$$

La medida angular en este modelo coincide con la medida -- del ángulo euclidiano.

Es un hecho que la estructura resultante satisface los --- axiomas de "incidencia", "estar entre", y "congruencia" incluyendo el criterio LAL. Sin embargo, algunos teoremas son bas-- tante diferentes a los teoremas análogos de la geometría euclidiana. Por ejemplo:

(1) Ningún cuadrilátero es un rectángulo. De hecho, si un cuadrilátero tiene tres ángulos rectos, el cuarto ángulo siempre es agudo.

(2) Para cualquier triángulo, la suma de las medidas de --

los ángulos siempre es menor que π

(3) No existen dos triángulos que sean similares, excepto — en el caso de que sean congruentes.

MODELO ESFERICO

Este modelo esférico, satisface los axiomas de la geometría Riemanniana.

Sea V la superficie de una esfera en el espacio. Podemos suponer que el radio de V es igual a 1. Un círculo mayor es un — círculo que es la intersección de V con un plano que pasa a través de su centro. Si T y U son puntos cualesquiera de V, entonces la trayectoria más corta sobre la superficie que une T con U es un arco de un círculo mayor.

Podemos empezar a definir una clase de "geometría plana" en V tomando círculos mayores como nuestras líneas. En este esquema tomaríamos la longitud de la trayectoria más corta entre cada par de puntos como la distancia entre los dos puntos. El sistema resultante tiene algunas de las propiedades que esperamos en la geometría plana. Nuestra "geometría" presenta las siguientes propiedades:

(1) Dos puntos no determinan necesariamente una "línea". — Por los polos norte y sur N y S están un número infini-

to de círculos mayores.

(2) Aunque nuestras "líneas" nunca llegan a su fin en ningún punto, son, sin embargo, finitas en extensión.

(3) El concepto de valores intermedios, en la forma en que estamos acostumbrados a él, falla completamente.

(4) La perpendicular a una línea, desde un punto externo, siempre existe, pero no es necesariamente única.

(5) Algunos triángulos tienen dos ángulos rectos.

CONCLUSIONES

Después de haber demostrado, que nuestro modelo $\mathbb{R}^2$ satisface los axiomas de Hilbert, concluimos que estos axiomas son un conjunto categórico.

Los grupos de postulados categóricos son bastante raros, cuando escribimos un conjunto de postulados, lo hacemos no para obtener una descripción de un sistema particular, sino precisamente con el propósito opuesto.

El valor de estos postulados está en su generalidad: -- describen un aspecto común de varios sistemas matemáticos.

B I B L I O G R A F I A

Borsuk, K. y Semielew, W. 1960 Foundations of geometry
Amsterdam North Holland.

Cohen, L.W. y Ehrlich, G. 1963 The structure of the real number system
Van Nostrand

Courant, R. y John, F. 1971. Introducción al cálculo y al análisis matemático. Volumen I
Editorial Limusa-Wiley, S.A.
México, D.F.

Greenberg, M. J. 1980. Euclidean and non - euclidean geometries
W. H. Freeman and Company

Haaser, Lasalle y Sullivan. 1970 Análisis Matemático I
Traducción de: Federico Velasco Coba
Editorial F. Trillas, S.A.
México, D.F.

Meschkowski, H. 1972. Non - euclidean geometry
New York, Academic Press

Moise, Edwin E. 1968. Elementos de Geometría Superior
Editorial Continental, S.A.