

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA Y EL TEOREMA DE STOKES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

ERNESTO ALONSO SANCHEZ SANCHEZ
MEXICO D.F. 1986



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION	5
CAPITULO I. INTEGRALES DE LINEA Y DE SUPERFICIE	
1. CAMPOS VECTORIALES	7
2. CURVAS	15
3. INTEGRALES DE LINEA	22
4. TRABAJO	32
5. SUPERFICIES	38
6. EL VECTOR NORMAL	42
7. AREA DE UNA SUPERFICIE REGULAR	46
8. INTEGRALES DE SUPERFICIE	50
9. INTEGRALES DE SUPERFICIE DE CAMPOS	53
CAPITULO II. LA DIVERGENCIA Y EL ROTACIONAL	
1. INTRODUCCION	57
2. LA DIVERGENCIA	60
3. EL ROTACIONAL	73
CAPITULO III. EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA Y EL TEOREMA DE STOKES	
1. INTRODUCCION	85
2. EL TEOREMA DE GREEN	87
3. EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA	95
4. EL TEOREMA DE STOKES	100
CAPITULO IV. EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA PARA REGIONES REGULARES DEL ESPACIO	
1. INTRODUCCION	103
2. CONJUNTOS DE PUNTOS	105
3. EL TEOREMA DE HEINE-BOREL	110
4. TEOREMAS ACERCA DE CURVAS	113
5. REGIONES REGULARES Y SUPERFICIES REGULARES	121
6. EXTENSION DEL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA	143
BIBLIOGRAFIA	154

I N T R O D U C C I O N

El plan inicial del presente trabajo consistía en hacer unas notas para el curso de Cálculo IV de la Facultad de Ciencias de la UNAM, explotando muchas ideas del libro Teoría del Potencial de Kellogg [6]. Aunque esto último se hizo, el plan inicial se transformó y sólo se propone como material de apoyo a dicho curso. Un motivo fue que se prefirió concentrarse fundamentalmente en el estudio de los teoremas que lleva el título de este trabajo, suponiendo conocido todo el material de integración múltiple que también son tópicos del mismo curso. Pero, también, porque unas notas debieran presuponer bastante experiencia en la impartición de esos cursos, experiencia que el autor no tiene. Pero sí tiene la convicción de que es necesario hincar el diente en la enseñanza en el paso de integración múltiple a integrales de línea y superficie, porque en estos últimos temas se introduce una buena cantidad de nueva simbología y porque el modelo intuitivo de áreas y volúmenes para la integral ya no es suficiente para los conceptos de integrales de línea y superficie.

La idea de los dos primeros capítulos que aquí desarrollamos es la de explotar el modelo de *campos vectoriales* interpretados como campos de fuerza o campos de velocidades, para dar una base intuitiva a los teoremas y definiciones más importantes relacionados con el teorema de la divergencia. En la tercera parte se formulan y prueban los teoremas para un tipo de regiones que cumplen muchas condiciones, de tal manera que permitan dar una prueba simple de ellos.

El propósito del último capítulo es probar el teorema para un tipo de regiones más generales (regiones regulares) usando únicamente resultados de cálculo elemental e integra

ción múltiple, para ello es necesario echar mano de muchos resultados geométricos, los cuales, aunque hacen un poco voluminoso el último capítulo, se formulan y prueban.

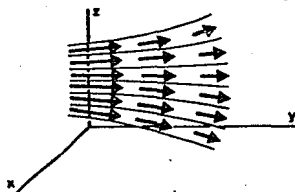
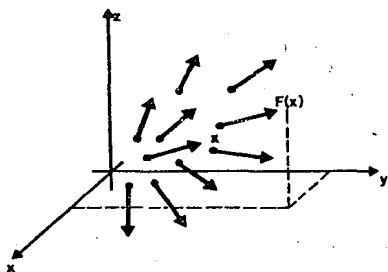
La terminología usada en todo el trabajo así como las pruebas del último capítulo, resultan hoy en día anticuadas porque actualmente se desarrollan los conceptos estudiados ahí con herramienta más sofisticada, me refiero al lenguaje y métodos de geometría diferencial. Pero tiene interés en la medida en que ilustra las dificultades que se tienen que enfrentar cuando se carece de ese lenguaje; en este sentido el último capítulo puede servir de motivación y puente para introducirir algunas definiciones de geometría diferencial y mostrar su necesidad.

C A P I T U L O I

INTEGRALES DE LINEA Y DE SUPERFICIE

1. CAMPOS VECTORIALES

En este párrafo definiremos *campo vectorial* pues es un concepto que investigaremos a lo largo de nuestro estudio, daremos dos ejemplos particulares de campos vectoriales haciendo breves comentarios acerca de ellos. Cuando una transformación asocia a cada elemento de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un elemento de \mathbb{R}^n , decimos que tenemos un *campo vectorial* definido en la región Ω . Interpretamos a cada elemento del dominio como un punto de posición y al elemento correspondiente como un vector colocado en aquel. Con esta interpretación asociamos una idea geométrica a la transformación en los casos en que $n = 2$ y $n = 3$ pues podemos dibujar el campo vectorial como una colección de flechas, una para cada punto (x, y, z) . La dirección de la flecha en cada punto es la dirección especificada por la transformación y su longitud proporcional a su magnitud.



figuras (1)

En lo sucesivo trataremos con campos vectoriales de dimen-

sión tres y eventualmente de dimensión dos, a estos le llamamos campos vectoriales planos.

Un campo vectorial es naturalmente dado por sus componentes con referencia a un sistema de coordenadas cartesiano:

$$F(x,y,z) = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$$

donde las componentes X, Y, Z son funciones reales dependientes, en general, de las tres variables x, y, z .

Los campos vectoriales son un modelo apropiado para estudiar y describir muchos fenómenos físicos. Nosotros utilizaremos las nociones de fuerza y velocidad para motivar algunos conceptos matemáticos generales referentes a campos vectoriales. Como es sabido, tanto la fuerza ejercida sobre una partícula como su velocidad son cantidades que pueden representarse por vectores. Ahora bien, en ciertas situaciones físicas podemos tener asociada una fuerza o una velocidad en cada punto de una determinada región del espacio, situación que se puede modelar con el concepto de campo vectorial. Si las cantidades vectoriales las interpretamos como fuerzas decimos que tenemos un campo de fuerza; si como velocidades, un campo de velocidades.

Campos de fuerza que han surgido del estudio de la naturaleza son los que tienen que ver con la "ley del inverso de la distancia", es decir, los campos gravitacionales, electrostáticos y electromagnéticos. Campos de velocidades los encontramos en la velocidad de cada punto de un cuerpo que gira alrededor de un eje y en el importante caso de un fluido en movimiento en el cual se asigna una velocidad a cada partícula del fluido; en este caso el campo depende, en general, además de la posición del tiempo.

Campos gravitacionales.

Veamos el ejemplo de los campos gobernados por la ley de Newton de la gravitación universal, esta ley dice que:

Toda partícula en el universo atrae cualquier otra partícula con una -- fuerza cuya dirección es la de la -- recta que los une y cuya magnitud -- es directamente proporcional al pro -- ducto de sus masas e inversamente -- proporcional al cuadrado de la dis -- tancia que los separa.

Mediante esta ley podemos describir el campo de fuerzas -- generado por una partícula de masa m , es decir, podemos en cada punto (x, y, z) en el espacio, asociar el vector que representa la fuerza con la que sería atraída por otra colocada en algún punto fijo. Si ésta está colocada en el punto (x_0, y_0, z_0) y tiene masa m , la fuerza ejercida sobre una partícula unitaria (de masa igual a 1) colocada en un punto (x, y, z) está dada por el campo F :

$$F(x, y, z) = \frac{m}{r^3} (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$$

donde $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$; en efecto, ya que la magnitud de la fuerza es m/r^2 y el vector unitario dirigido del punto (x, y, z) al punto (x_0, y_0, z_0) es el vector

$$\left(\frac{x_0 - x}{r}, \frac{y_0 - y}{r}, \frac{z_0 - z}{r} \right).$$

Un hecho importante que surge experimentalmente acerca de los campos gravitacionales de fuerza es el *principio de superposición* que afirma que un campo de fuerza no es afectado por la presencia de otro campo de fuerza, de tal manera que el resultado de sobreponer dos campos será un nuevo campo que es la suma vectorial de los primeros. Por ejemplo, para encontrar el campo generado por dos (δn) partículas atractoras una de masa m_0 colocada en el punto (x_0, y_0, z_0) y otra de masa m_1 colocada

en el punto (x_1, y_1, z_1) encontramos el campo F_0 generado por la primera y el campo F_1 generado por la segunda independientemente uno de otro; el campo generado por ambos es simplemente la suma vectorial de ellos

$$F = F_0 + F_1$$

es decir

$$F(x, y, z) = \frac{m_0}{r_0^3} (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) + \frac{m_1}{r_1^3} (x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z)$$

donde

$$r_0^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2; \quad r_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2.$$

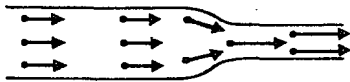
Los casos más interesantes de campos gravitacionales son aquellos que surgen no de partículas sino de distribuciones continuas de masa, por ejemplo alambres, láminas o cuerpos. Para encontrar los campos generados por estas distribuciones continuas de masa se hace una suposición adicional (demostrada empíricamente) y es la siguiente: Se divide el cuerpo en pequeños pedazos, se considera un punto en cada pedazo como si en él estuviera toda la masa del pedazo, es decir se considera el pedazo como una partícula, se encuentra el campo generado por esa partícula hipotética, entonces se suman los "campos de cada pedazo" y se pasa al límite cuando el diámetro de cada pedazo tiende a cero y el número de pedazos a infinito. El campo así obtenido será el campo generado por el cuerpo.

Con estos principios básicos y la herramienta del cálculo se plantean gran número de problemas y de hecho se puede desarrollar un cuerpo de resultados conocido en matemáticas como la teoría del potencial.

Campos de velocidades de fluidos.

Consideremos un fluido en movimiento en \mathbb{R}^3 , si a cada punto en un instante determinado le asociamos la velocidad de la --partícula que está pasando por ese punto en ese instante, obtenemos un campo vectorial que llamaremos *campo de velocidades del fluido*. Esta descripción supone que la velocidad del fluido en cada punto P puede ser dada por un vector $V(P)$, usualmente --variando suavemente con P . Estrictamente hablando esto no tiene sentido. Con una escala suficientemente pequeña veríamos moléculas que están chocando entre sí y sus velocidades estarían --cambiando bruscamente, además entre ellas habría espacios vacíos en los cuales ninguna velocidad estaría definida. En una escala aún más fina "veríamos" electrones, protones, cuantos etc., para los cuales una descripción como la propuesta sería imposible. La idea de "velocidad en un punto" es solo una aproximación que trata de describir el movimiento en una cierta escala en la cual es posible obtener medidas que promedian el comportamiento en regiones suficientemente grandes para evitar las complicaciones microscópicas. No obstante, es útil idealizar el comportamiento de un fluido en movimiento como si estuviera definida la velocidad en cada punto, las consecuencias que se desprenden de esa su posición han fructificado en aplicaciones prácticas que justifican su estudio. Mientras que el grado de aplicabilidad es cuestión de las ciencias experimentales, nuestro interés aquí es el de tener un modelo que nos llevará a obtener resultados matemáticos interesantes.

La idea de pensar los campos vectoriales como campos de velocidades nos será muy útil. Imagínese, por ejemplo, que un líquido corre por una tubería con flujo constante. Si colocamos en cada punto la velocidad del fluido en ese punto obtenemos la idea gráfica del campo de velocidades V del líquido (ver fig.). Nótese que la longitud de las flechas (la rapidez) así como la --dirección del flujo puede cambiar de punto a punto.



figuras (2)

Para trabajar con estos campos requerimos de las expresiones analíticas que los describen. Recordemos que las ecuaciones del movimiento de una partícula se puede dar mediante una curva $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde el parámetro $t \in [a, b]$ representa el tiempo:

$$(1.1) \quad x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad z = \chi(t)$$

Estas ecuaciones darán la posición de la partícula en cualquier tiempo t , la velocidad V de la partícula en un instante t se obtiene derivando:

$$(1.2) \quad \dot{x} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \dot{y} = \frac{d\psi}{dt} \quad \dot{z} = \frac{d\chi}{dt}$$

$$V = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Así naturalmente V es un campo de velocidades sobre la curva definida por las ecuaciones (1.2)

Por otro lado, para caracterizar el movimiento de toda una porción de fluido, es decir de un conjunto de partículas, requeriremos un conjunto de ecuaciones de la forma (1.1), un sistema de ecuaciones (1.1) para cada partícula; pero podemos idealizar, aún más, la situación del flujo, de tal manera que se pueda describir el movimiento de toda la porción del fluido mediante tres ecuaciones solamente (al igual que en el caso de una partícula) añadiendo tres parámetros (que para cada partícula serán constantes) que representen la posición de cada partícula en algún instante $t = t_0$:

$$(1.3) \quad \begin{cases} x = \varphi(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = \psi(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = \chi(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

En el tiempo $t = t_0$ el fluido ocupa una región T_0 , el punto $(x_0, y_0, z_0) \in T_0$ representa la posición de una partícula en ese instante y se cumple la igualdad

$$(1.4) \quad \begin{cases} x_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0, t_0) \\ y_0 = \psi(x_0, y_0, z_0, t_0) \\ z_0 = \chi(x_0, y_0, z_0, t_0) \end{cases}$$

Si variamos en las ecuaciones (1.3) los puntos (x_0, y_0, z_0) sobre la región T_0 obtenemos las trayectorias de todas las partículas del sistema.

El campo de velocidades de esa porción de fluido en un instante t serán las ecuaciones

$$X = \dot{x} = \frac{d}{dt} \varphi(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$(1.5) \quad Y = \dot{Y} = \frac{d}{dt} \psi(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$Z = \dot{Z} = \frac{d}{dt} \chi(x_0, y_0, z_0, t)$$

Mientras que pensemos en el movimiento de una partícula a ella le corresponde un punto (x_0, y_0, z_0) que representa su posición en el instante $t = t_0$ y debemos considerar al punto (x_0, y_0, z_0) constante, no obstante en las ecuaciones (1.3) del movimiento global de todo el fluido esos puntos varían en la región T_0 y de hecho son variables en esa región. Esta consideración es importante pues de este modo podemos hablar de las ecuaciones () como una transformación de \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 y hablar de las derivadas parciales con respecto a x_0, y_0, z_0, t .

Cuando hablemos de las ecuaciones

$$x = \varphi(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$y = \psi(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$z = \chi(x_0, y_0, z_0, t)$$

supondremos que son continuas y doblemente diferenciables con derivadas parciales de primero y segundo orden continuas, además supondremos que pueden ser despejadas las variables x_0, y_0, z_0 en términos de x, y, z ; ésto último se asegura pidiendo que la matriz jacobiana de cada transformación

$$F_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F_t(x_0, y_0, z_0) = (\varphi, \psi, \chi)$$

sea no singular.

2. CURVAS

En este parágrafo enunciaremos las principales definiciones acerca de curvas generalizando la forma más conocida de expresar una curva, a saber, la gráfica de una función, motivando con -- ello, esperamos, la expresión general de curvas que es dada mediante ecuaciones paramétricas.

La expresión más conocida de una curva es aquella que se obtiene de graficar una función real de variable real. Si $f(x)$ es una función continua y derivable, el conjunto de puntos $(x, f(x))$ forman una curva en el plano. En general se restringe el dominio de la función a un intervalo cerrado $[a, b]$ obteniendo -- así una curva acotada y se le llama *extremos de la curva* a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

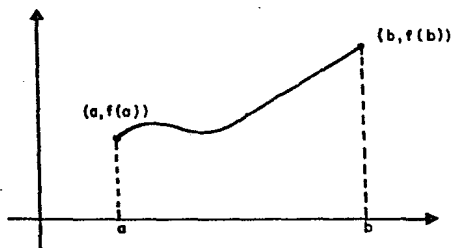


fig (3)

Necesitamos, sin embargo, extender esta definición en dos sentidos. Lo primero es que con esta definición se excluyen una gran cantidad de conjuntos que claramente quisiéramos considerar como curvas, por ejemplo una circunferencia o el contorno de un cuadrado, y segundo, no restringirnos a el plano, sino considerar curvas en espacios de mayor dimensión, en particular en \mathbb{R}^3 . Las extensiones se pueden hacer de aquella definición sin hacer cambios esenciales.

Empecemos por la segunda; la idea es extender a \mathbb{R}^3 de manera directa, la definición de curva enunciada arriba. Si consideramos una función(*) $y = f(x)$ como una función de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} es decir como:

$$y(x, z) = f(x) \quad x \in [a, b]$$

la gráfica de la función es una superficie.

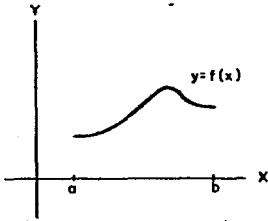


fig (4)

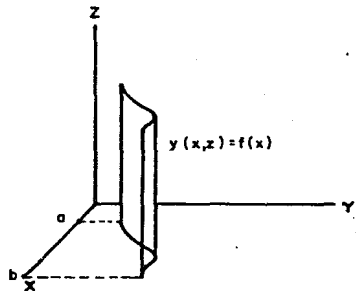


fig (5)

Si ahora consideramos cualquier otra curva $z = g(x)$ también definida en $[a, b]$ y la vemos nuevamente como una función de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}

$$z(x, y) = g(x),$$

su gráfica es una superficie que es "ortogonal" a la anterior:

(*) Estamos tratando con funciones continuas y derivables, salvo que se diga lo contrario.

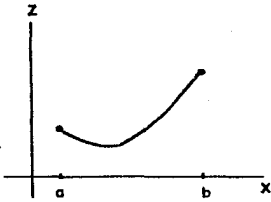


fig (6)

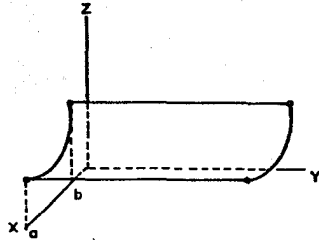


fig (7)

Si intersectamos ambas superficies obtendremos una curva en \mathbb{R}^3 , que es una extensión apropiada de la definición dada al principio para curvas en \mathbb{R}^2 . Su expresión analítica es como si que:

Una curva en \mathbb{R}^3 es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen las ecuaciones:

$$y = f(x) \quad \text{y} \quad z = g(x)$$

donde f y g son funciones continuas y derivables, definidas en un intervalo $[a, b]$.

NOTA: En general la intersección de dos superficies no necesariamente es una curva, puede ser el vacío o un punto, o peor aún, un pedazo de superficie. En el caso que tratamos es claro que estos problemas no se presentan. Se asegura que no puede ser un pedazo de superficie --

con la condición de ortogonalidad, es decir asegurando que los *planos tangentes* a las superficies en los puntos de intersección sean ortogonales, o más generalmente, que los planos tangentes a cada superficie en un punto de intersección no coincidan.

La extensión en el otro sentido es muy simple, se trata de dar una definición que no excluya curvas como la circunferencia o el cuadrado. Esto lo hacemos simplemente ampliando primero nuestras curvas a aquellas de la forma:

$$x = h(y)$$

donde igualmente se pide que h sea una función definida en un intervalo cerrado, etc. Enseguida admitiremos como curvas a - aquellas que estén formadas por un número finito de curvas que tengan las características anteriores 'pegadas' adecuadamente de la manera que precisaremos enseguida. Esta extensión obviamente se puede llevar tal cual a \mathbb{R}^3 admitiendo como curvas a aquellas definidas en la forma:

$$x = \phi(y) \quad z = \psi(y) \quad y \in [c, d]$$

y

$$x = \phi(z) \quad y = \psi(z) \quad z \in [e, f].$$

Precisaremos de una vez las definiciones pertinentes:

Sea I un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ del eje X . Decimos que $f(x)$ es *continua* en I si es continua en todo punto de I . Decimos que $f(x)$ tiene *derivada continua* en I o que es *continuamente diferenciable* en I si es continua en I y su derivada existe y es continua en todo punto interior de I y coincide en todos los puntos interiores a I con una función que es continua en I . Esta definición es necesaria al hablar de derivada en un intervalo cerrado, pues la definición ordinaria de derivada no es aplicable a los puntos extremos.

La función $f(x)$ es *continua por pedazos* en I si hay un conjunto finito de puntos $a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$ del intervalo I , tal que en el interior de cada uno de los subintervalos (a_i, a_{i+1}) , $f(x)$ coincide con una función que es continua en el subintervalo cerrado.

Decimos que $f(x)$ es *diferenciable por pedazos* en I si hay un conjunto de subintervalos de I , al igual que arriba, en cada uno de los cuales $f(x)$ es continuamente diferenciable (los intervalos se consideran cerrados).

Un ARCO REGULAR es un conjunto de puntos ζ de la forma (x, y, z) tal que, *para alguna orientación de los ejes*, admite una representación:

$$(2.1) \quad y = f(x) \quad z = g(x) \quad x \in [a, b] = I$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y continuamente diferenciables en I .

Llamaremos a los puntos $(a, f(a), g(a))$ y $(b, f(b), g(b))$ puntos extremos del arco. Con esta convención daremos una orientación al arco dependiendo si consideramos como punto inicial al primero y como final al segundo, o viceversa. Si a una curva se le ha asignado una orientación la denotamos con el símbolo $+$ antepuesto a la letra que denote la curva, por ejemplo $+\zeta$, y a la misma curva con orientación contraria con $-\zeta$.

Una CURVA REGULAR es un conjunto de puntos que consiste de un número finito de arcos regulares tal que el punto final de un arco es el punto inicial de otro (y sólo de uno). Ningún par de arcos debe tener puntos comunes con excepción, quizá, de los extremos.

Si todos los arcos son tales que sus dos extremos se intersectan con otros arcos, diremos que la curva es cerrada, en caso contrario, que es abierta.

Podemos ahora dar el paso a la expresión de curvas mediante su representación paramétrica. La forma más común y más general de representar curvas es a través de tres funciones definidas en un mismo intervalo.

$$(2.2) \quad x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad z = \chi(t) \quad t \in [a, b].$$

La forma en que hemos expresado los arcos regulares es un caso particular de las ecuaciones (2.2), a saber, las que admiten una representación de la forma

$$(2.3) \quad x = t \quad y = f(t) \quad z = g(t) \quad t \in [a, b].$$

Pero si damos cualquier función biyectiva $\tau = \varphi(t)$ entonces $t = \varphi^{-1}(\tau)$ $\tau \in [\varphi(a), \varphi(b)]$ y las ecuaciones (2.3) toman la forma:

$$x = \varphi^{-1}(\tau) \quad y = f(\varphi^{-1}(\tau)) \quad z = g(\varphi^{-1}(\tau)).$$

Ahora bien, sobre las ecuaciones (2.2) se piden condiciones de regularidad para asegurar un comportamiento adecuado:

Se dice que una curva ζ representada por las ecuaciones (2.2) es suave si φ , ψ , χ son continuas y continuamente diferenciables y, además, que no exista $t \in [a, b]$ para el cual --- $\varphi'(t) = \psi'(t) = \chi'(t) = 0$ simultáneamente, o dicho de otra manera, que para toda $t \in [a, b]$

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 \neq 0.$$

Es *simple* si para cualquier par de puntos $t_1, t_2 \in [a, b]$ con $t_1 \neq t_2$, entonces $f(t_1) \neq f(t_2)$.

Con estas definiciones se tiene que una curva suave simple es una curva regular, pero no necesariamente un arco regular. (Se deja como ejercicio).

3. INTEGRALES DE LINEA

Si tenemos una función $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y un arco regular ζ podemos considerar la nueva función $f = F/\zeta$ (la restricción de F a ζ) como una función $f: \zeta \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre los puntos de la curva. La idea es extender el concepto de integral para este tipo de funciones. La extensión tendrá que coincidir con el concepto de integral ordinaria para el caso en que ζ sea un intervalo. Hay dos definiciones distintas (aunque ligadas entre sí) de integrales de línea de f sobre la curva ζ ; los textos soviéticos las distinguen llamándolas integrales de línea del primer y segundo tipo. Daremos aquí brevemente ambas definiciones.

Integrales de línea del primer tipo.

Sea ζ una curva regular y $f(x, y, z)$ una función real definida sobre la curva.

Dividimos la curva ζ en partes mediante los puntos de división P_0, P_1, \dots, P_n (P_0 y P_n coincidiendo con los extremos de la curva) y elegimos un punto arbitrario P'_i en cada arco $P_{i-1}P_i$ para formar la suma

$$\sum_{i=1}^n f(P'_i) \Delta S_i$$

donde ΔS_i es la longitud del segmento $\overline{P_i P_{i+1}}$. Nos referimos a tales sumas como *sumas integrales*.

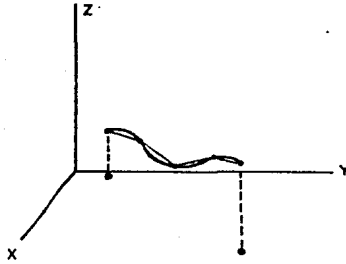


fig (8)

Si las sumas integrales (3.1) tienden a un límite finito, cuando el máximo de las longitudes de los pedazos tiende a cero, el límite es llamado la *integral de línea del primer tipo* de la función f sobre la curva ζ . Denotaremos la integral por el símbolo

$$\int_{\zeta} f(x, y, z) ds.$$

La integral de línea del primer tipo no difiere esencialmente de la de integral de una función real de variable real y se reduce fácilmente a una integral de ese tipo.

Sea ζ una curva cuyos extremos denotaremos por A y B , tomamos la longitud de arco s recorrido desde el punto inicial A como parámetro para la curva ζ y escribimos las ecuaciones de la curva en la forma

$$x = \varphi(s) \quad y = \psi(s) \quad z = \chi(s) \quad s \in [0, \ell]$$

donde ℓ es la longitud de la curva ζ . Entonces la función $f(x, y, z)$ se reduce a una función de una variable $f(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))$. Sea s_i el valor del parámetro s correspondien

te al punto P_i , con $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces la suma integral (3.1) puede ser reescrita en la forma

$$(3.2) \quad \sum_{i=1}^n f(\varphi(s_i), \psi(s_i), \chi(s_i)) \Delta s_i$$

la cual no es otra cosa que una suma integral correspondiente a la integral definida:

$$(3.3) \quad \int_0^l f(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)) ds$$

las sumas integrales (3.1) y (3.2) son iguales, y por tanto las integrales relacionadas a ellas también son iguales, obteniendo que:

$$(3.4) \quad \int_{\zeta} f(x, y, z) ds = \int_0^l f(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)) ds,$$

y ambas integrales existen o no existen simultáneamente. Consecuentemente, si la función $f(x, y, z)$ es continua (o continua por pedazos) a lo largo de una curva ζ la integral de línea existe, porque bajo esas condiciones, la integral del lado derecho de la igualdad (3.4) existe.

Finalmente si la curva es expresada en la forma

$$y = \phi(x) \quad z = \psi(x) \quad x \in [a, b]$$

con ϕ, ψ continuas y continuamente diferenciables por pedazos en el intervalo $[a, b]$ entonces:

$$(3.5) \quad \int_{\zeta} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x, \phi(x), \psi(x)) \sqrt{1 + (\phi'(x))^2 + (\psi'(x))^2} dx.$$

En efecto, considérese $P_0, \dots, P_n, \Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ como en la definición. Sabemos que

$$\Delta s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + (\phi'(x))^2 + (\psi'(x))^2} dx$$

por el teorema del valor medio existen puntos x_i^* tal que para cada i

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + (\phi'(x_i^*))^2 + (\psi'(x_i^*))^2} \Delta x_i .$$

Podemos formar la suma

$$(3.6) \quad T = \sum_{i=1}^n f(x_i', y_i', z_i') \sqrt{1 + (\phi'(x_i^*))^2 + (\psi'(x_i^*))^2} \Delta x_i$$

que es la suma integral correspondiente a $\int_C f(x, y, z) ds$ según la expresión (3.1).

Por otro lado, la suma integral correspondiente al lado derecho de (3.5) es:

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^n f(x_i', y_i', z_i') \sqrt{1 + (\phi'(x_i^*))^2 + (\psi'(x_i^*))^2} \Delta x_i$$

La diferencia consiste en que bajo el signo radical en ésta última, x' es arbitraria, la abscisa correspondiente al punto x_i^* está predeterminado por el teorema del valor medio. Pero como ϕ, ψ son continuamente diferenciables en $[a, b]$ la función

$$\sqrt{1 + (\phi'(x))^2 + (\psi'(x))^2}$$

es uniformemente continua en el intervalo $[a, b]$, y por tan-

to dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sqrt{1 + (\phi'(x))^2 + (\psi'(x))^2} - \sqrt{1 + (\phi'(x'))^2 + (\psi'(x'))^2} \right| < \varepsilon$$

siempre que $|x - x'| < \delta$.

Finalmente como $f(x, y, z)$ es continua en ζ está acotada y en el límite T y \tilde{T} coinciden.

Integrales de línea del segundo tipo.

Las integrales de este tipo son, en general, integrales de campos vectoriales sobre curvas, es decir el integrando es un campo vectorial definido sobre la curva, sin embargo se pueden definir primero, al igual que las del primer tipo, para funciones reales, sacando ventaja de los teoremas para integrales de funciones reales de variable real y posteriormente extenderlas a campos vectoriales de manera inmediata. El concepto de integral de línea del segundo tipo de campos vectoriales se relaciona con el concepto de *trabajo* realizado por el campo a lo largo de una curva cuando el campo es interpretado como campo de fuerzas, y a la *circulación* del campo a lo largo de una curva, cuando es interpretado como campo de velocidades; en el siguiente apartado discutiremos el concepto de trabajo y dejamos hasta el capítulo 2 la discusión acerca de la circulación.

Sea ζ una curva regular y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una función continua en Ω y tal que $\zeta \subset \Omega$.

Dividimos la curva con puntos P_0, P_1, \dots, P_n , (P_0, P_n coincidiendo con los extremos) y denotemos las diferencias de las abscisas de P_i y P_{i+1} por Δx_i , elegimos cualquier punto (x_i, y_i, z_i) del arco $\overline{P_i P_{i+1}}$ y formamos la suma integral

$$(3.7) \quad J_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i$$

Haciendo el número de subdivisiones del arco tender a infinito y el máximo de las longitudes tender a cero, entonces el límite de las sumas J_n tiende a un límite finito (¿por qué?), y dicho límite lo denotamos con el símbolo:

$$(3.8) \quad \int_{\zeta} f(x, y, z) dx$$

y se llama una *integral de línea* de la función $f(x, y, z)$ a lo largo de la curva ζ .

De manera totalmente análoga, pero ahora considerando las diferencias $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ y $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ de la segunda y tercera coordenada de los puntos P_i formamos las sumas

$$\begin{aligned} & \sum f(x_i, y_i, z_i) \Delta y_i \\ & \sum f(x_i, y_i, z_i) \Delta z_i \end{aligned}$$

Tomando el límite obtenemos las integrales de línea con respecto a y y z , denotadas por los símbolos respectivos:

$$\int_{\zeta} f(x, y, z) dy \quad \text{y} \quad \int_{\zeta} f(x, y, z) dz.$$

Las integrales de línea así definidas se reducen a integrales ordinarias. Supongamos que la siguiente es una representación paramétrica de la curva ζ

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in [a, b]$$

Sean t_i los puntos de $[a, b]$ tales que

$$P_i = (x_i, y_i, z_i) = (\varphi(t_i), \psi(t_i), \chi(t_i))$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$, entonces las sumas J_n () toman la forma

$$J_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*), \chi(t_i^*)) \Delta \varphi_i$$

donde

$$t_i^* \in [t_i, t_{i+1}], \Delta \varphi_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i).$$

Multiplicando y dividiendo J_n por $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ obtenemos la suma

$$J_n = \sum_{i=0}^n f(\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*), \chi(t_i^*)) \frac{\Delta \varphi_i}{\Delta t_i} \Delta t_i.$$

Por el teorema del valor medio existe $t_i^{**} \in [t_i, t_{i+1}]$, para toda i tal que

$$J_n = \sum_{i=0}^n f(\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*), \chi(t_i^*)) \frac{d\varphi(t_i^{**})}{dt} \Delta t_i.$$

Esta última expresión se transforma al pasar al límite en:

$$\int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt.$$

Omitimos la demostración formal, pero para hacerla se deben considerar las sumas \tilde{J}_n correspondientes a esta última integral y demostrar que para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que $|J_n - \tilde{J}_n| < \epsilon$, siempre que $n > N$.

Obtenemos así la fórmula para calcular la integral de línea; los mismos pasos se siguen para las otras dos integrales y se tiene:

$$\int_C f(x, y, z) dx = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt$$

$$\int_C f(x, y, z) dy = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \frac{d\psi}{dt} dt$$

$$\int_{\zeta} f(x, y, z) dz = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

EJEMPLO:

Calculemos las tres integrales de línea que acabamos de definir de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$, a lo largo de la curva ζ dada por

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t - 1$$

$$t \in [0, 2\pi].$$

$$f(x, y, z) dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t - 1)(-\sin t) dt = \int_0^{2\pi} -t \sin t dt = 2\pi$$

$$f(x, y, z) dy = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t - 1) \cos t dt = \int_0^{2\pi} t \cos t dt = 0$$

$$f(x, y, z) dz = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t - 1) dt = \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2$$

Algunas propiedades de las integrales de línea son las siguientes:

El valor de una integral de línea depende del sentido en el cual recorremos la curva ζ y se multiplica por -1 si es recorrida en sentido contrario:

$$\int_{+\zeta} = - \int_{-\zeta}$$

Si la curva ζ es descompuesta en curvas $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ expresamos dicha relación con el signo + escribiendo

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n,$$

con esta relación se tiene que:

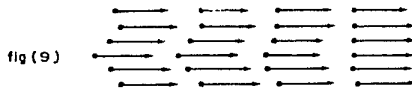
$$\int_{\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n} = \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_i}$$

4. T R A B A J O

Un concepto físico relacionado con campos de fuerza es el del trabajo realizado por el campo al moverse una partícula en un punto P_0 a un punto P_1 a lo largo de una curva ζ uniendo los dos puntos.

Un campo de fuerza ejerce en cada punto del espacio una fuerza, si una partícula es puesta en algún punto, el campo imprimirá cierta fuerza a la partícula y la pondrá en movimiento en alguna dirección. Si ahora pensamos que en el espacio donde está definido el campo transportamos de alguna manera una partícula a lo largo de una curva, en cada punto donde esté pasando la partícula la fuerza del campo en ese punto "ayudará", "se opondrá" o "no influirá" en el movimiento de la partícula. Obsérvese que la trayectoria en la cual transportamos a la partícula no es la trayectoria en que el campo la transportaría si se dejara libremente bajo la influencia del campo. El trabajo realizado por el campo a lo largo de la trayectoria es una medida que expresa esa idea de "qué tanto" ayuda o se opone el campo a ese movimiento. Al final veremos ciertas relaciones del concepto de trabajo en términos más precisos como el de energía cinética, potencial, etc.

Si el campo es constante en magnitud y dirección el trabajo realizado por él, al transportar una partícula a lo largo de un segmento de recta cuya dirección (y sentido) es la del campo, se define como la magnitud de la fuerza por la distancia recorrida.



campo constante en magnitud y dirección

Ahora supongamos que el campo es constante en dirección pero variando en magnitud. Si restringimos el campo a lo largo de un segmento de recta cuya dirección es la del campo entonces, dando un sistema de coordenadas cartesianas de tal manera que el eje X coincida con el segmento, podemos representar el campo sobre el segmento por una función real de variable real $f(x)$, donde los valores de $f(x)$ representan la magnitud del campo en el punto $(x, 0, 0)$ del segmento. En este caso el trabajo se define:

$$T = \int_a^b f(x) dx$$

donde $(a, 0, 0)$ es el punto inicial del movimiento y $(b, 0, 0)$ su punto final. Esta definición se obtiene de una generalización directa de la definición anterior que se puede ver como sigue: se divide el segmento en pequeños pedazos, en cada pedazo se elige un punto y la fuerza definida en ese punto se supone es constante en el pedazo, entonces el trabajo aproximado realizado por el campo en cada pedazo será el producto de la magnitud de la fuerza elegida por la longitud del intervalo, una estimación del trabajo total será la suma de las aproximaciones encontradas para cada pedazo; como se ha supuesto que la trayectoria del movimiento coincide con el eje X , obtenemos:

$$T \approx \sum f(x_i) \Delta x_i$$

y al pasar al límite cuando el número de pedazos se hace infinito y la longitud de cada pedazo tiende a cero se llega a:

$$T = \int_a^b f(x) dx.$$

Consideremos ahora un campo con magnitud y dirección constantes y la trayectoria de la partícula un segmento de recta oblicuo a la dirección del campo. Pensemos primero en un campo plano dado por $F = (X_0, Y_0)$, donde X_0, Y_0 son constantes y sea α el ángulo que el segmento de recta AB hace con el eje X.

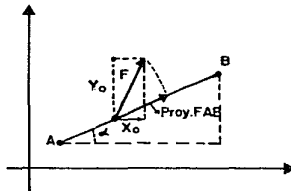


fig (10)

Al definir el trabajo en este caso sólo se considera la componente de la fuerza en la dirección del movimiento, la componente de la fuerza en la dirección ortogonal a la del movimiento no coopera ni impide el movimiento, y por tanto no se considera. La proyección del vector (X_0, Y_0) sobre AB es el producto punto de (X_0, Y_0) con el vector $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ que es el vector unitario en dirección del segmento AB, como el campo es constante, el trabajo será la longitud del segmento AB, supongamos que es L, por la proyección de (X_0, Y_0) en el segmento AB es decir

$$(4.1) \quad T = (X_0 \cos \alpha + Y_0 \sin \alpha) L$$

Si $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$ se tienen las igualdades:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = L \cos \alpha$$

$$\Delta y = y_1 - y_0 = L \sin \alpha$$

y la expresión (4.1) toma la forma:

$$T = X_0 \Delta x + Y_0 \Delta y .$$

El caso análogo en \mathbb{R}^3 se encuentra de la misma manera. Es decir, supongamos el campo constante $F = (X_0, Y_0, Z_0)$ y un segmento de recta \overline{AB} con α, β, γ los ángulos que forma con los ejes X, Y, Z respectivamente, entonces el trabajo está dado - por la expresión:

$$(4.2) \quad T = [X_0 \cos \alpha + Y_0 \cos \beta + Z_0 \cos \gamma] L$$

donde L es la longitud del segmento AB . Si $A = (x_0, y_0, z_0)$ y $B = (x, y, z)$ y el recorrido es del punto A al punto B , tenemos que:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = L \cos \alpha$$

$$\Delta y = y_1 - y_0 = L \cos \beta$$

$$\Delta z = z_1 - z_0 = L \cos \gamma$$

y la ecuación (4.2) toma la forma

$$(4.3) \quad T = X_0 \Delta x + Y_0 \Delta y + Z_0 \Delta z$$

Ahora abordemos el caso general en el cual el campo en el espacio varía en cada punto (x, y, z) de su dominio y consideremos el movimiento a lo largo de una trayectoria ζ arbitraria uniendo los puntos $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $P = (x, y, z)$. Dividimos la curva ζ mediante los puntos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n = P$ y consideremos el arco $\overline{P_i P_{i+1}}$. Elegimos un punto P_i^* y consideremos el segmento de recta $\overline{P_i P_{i+1}^*}$.

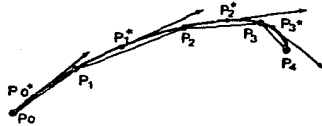


fig (11)

Si el arco $\overline{P_i P_{i+1}}$ es un arco regular, para puntos P_i , P_{i+1} suficientemente cercanos y suponiendo que el campo es continuo, se puede dar una aproximación a la cantidad que sería una generalización del concepto de trabajo de la manera siguiente: consideramos que la trayectoria de la partícula es como el segmento de recta $\overline{P_i P_{i+1}^*}$ y que en ese pedazo la fuerza del campo es constante en magnitud y dirección igual a $F(x_i', y_i', z_i')$ donde $P_i^* = (x_i', y_i', z_i')$ obteniéndose de acuerdo a la ecuación (4.3) que el trabajo es:

$$(4.4) \quad X(x_i', y_i', z_i') \Delta x_i + Y(x_i', y_i', z_i') \Delta y_i + Z(x_i', y_i', z_i') \Delta z_i$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$.

El TRABAJO se define como el límite de la suma de todas las expresiones (4.4) cuando el número de pedazos tiende a in finito y la longitud de cada uno de ellos tiende a cero, es decir

$$T = \int_C X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz$$

Si la curva está parametrizada por las ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in [a, b]$$

el trabajo es:

$$T = \int_a^b [X(x, y, z) \frac{d\varphi(t)}{dt} + Y(x, y, z) \frac{d\psi(t)}{dt} + Z(x, y, z) \frac{d\chi(t)}{dt}] dt$$

Otra expresión común es cuando la curva está parametrizada por la longitud de arco s

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) \quad s \in [0, l]$$

y se dan los ángulos α , β , γ que la recta tangente a la curva hace con los ejes X , Y , Z respectivamente, obteniéndose que:

$$T = \int_0^l (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) ds.$$

5. SUPERFICIES

Mencionaremos en este párrafo las tres definiciones más comunes de superficie adoptando la que consideremos más fácil de trabajar y que nos servirá para desarrollar las ideas en el resto de este trabajo. Relacionado con superficies, trabajaremos bastante con el vector normal y el área de una superficie, por ello daremos aquí las definiciones de esos conceptos y la forma de calcularlos para finalmente abordar el problema de integración sobre superficies.

La noción intuitiva de superficie es la de un conjunto de puntos en \mathbb{R}^3 que forman un pedazo de plano "ligeramente deformado"; hay tres formas analíticas mediante las cuales podemos obtener conjuntos de puntos que "satisfagan" esa noción, todas ellas, es claro, apoyadas en el concepto de función o -- transformación. Es natural pensar que si mediante una transformación se manda un conjunto plano a \mathbb{R}^3 de manera "más o menos uniforme", el conjunto así obtenido tendrá las características que deseamos para una superficie. De las tres definiciones siguientes, la primera y la tercera reflejan esta idea, mientras que en la segunda es necesario verla de otra manera: se puede ver como una superficie de nivel de una función de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R} , no obstante apoyados en el teorema de la función implícita se llega a la misma idea.

Las definiciones a las que hacemos referencia son:

a) Forma explícita.

Una superficie es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $z = f(x, y)$ donde f es una función continua y derivable definida en alguna región 'apropiada' (*) del plano.

(*) Más adelante definiremos "región regular"

b) Forma implícita.

El conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $F(x, y, z) = 0$, donde F es continua y con derivadas parciales continuas definida en alguna región del espacio y donde si (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de F , entonces $F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

c) Forma paramétrica.

El conjunto de puntos (x, y, z) dado por las ecuaciones

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v) \quad z = \chi(u, v)$$

donde φ, ψ, χ son funciones continuas y diferenciables en alguna región del plano.

Es claro que las definiciones enumeradas tienen distintos grados de generalidad, es decir, mientras que en la primera no "cabén" las superficies que al intersectarlas con una recta paralela al eje Z se obtienen dos o más puntos (por -- ejemplo una esfera), las otras dos sí las abarcan. Pero esta carencia en la primera definición lleva paralelamente la ventaja de que es más familiar y "manipulable". Aprovechando ésto y para no detenernos en las aclaraciones pertinentes sobre la segunda y tercera definición adoptaremos la primera, haciendo una extensión de ella que será suficiente para nuestros propósitos.

Empezaremos definiendo las regiones que serán el dominio de las funciones que consideraremos para definir las superficies.

Una REGION REGULAR del plano es un conjunto cerrado y acotado de puntos en el plano cuya frontera es una curva regular cerrada. Diremos que una región regular R es la suma de las

regiones regulares R_1, R_2, \dots, R_n si todo punto de R está en algunas de las regiones R_i , todo punto de cada R_i está en R y cada par de regiones R_i no tiene puntos en común excepto, posiblemente, en las siguientes condiciones: un arco regular de la frontera de una de esas regiones y un arco regular de la frontera de otra pueden, ya sea coincidir o tener uno o ambos puntos extremos en común.

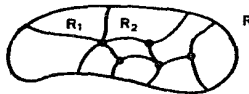


fig (12)

Ahora pasaremos a dar nuestra definición de *superficie* - extendiendo la definición a) dada al principio y considerando ésta como base para definir lo que entenderemos por elemento de superficie regular.

Un ELEMENTO DE SUPERFICIE REGULAR es un conjunto de puntos que, para alguna orientación de los ejes, admite una representación

$$z = f(x, y) \quad (x, y) \in R$$

donde R es una región regular del plano XY y donde $f(x, y)$ es continuamente diferenciable en R .

La *frontera* de un elemento de superficie regular es el conjunto de aquellos puntos (x, y, z) contenidos en el elemento de superficie regular en que (x, y) está sobre la frontera de R .

Una consecuencia de esta definición (que no probaremos) es que la frontera de un elemento de superficie regular es una curva regular. Llamaremos *lado* de la superficie a cualquiera del número finito de arcos regulares del que está compuesta la frontera; *vértice* a cualquier punto que sea la intersección de dos lados.

Con esta definición de elementos de superficie se tienen superficies cuya forma o comportamiento es muy parecido a un plano, como "sábanas" sin dobleces ni picos, pero no se tienen superficies tan importantes como la esfera o como la superficie de un cubo, para poder abarcarlas "pegaremos" adecuadamente elementos de superficie en la siguiente definición de superficie regular:

Una SUPERFICIE REGULAR es un conjunto de puntos que consiste de un número finito de elementos de superficie regular, relacionados como sigue:

- a) Dos elementos de superficie regular pueden tener en común ya sea un sólo punto, que es un vértice para ambos, o un sólo arco regular, que es un lado de ambos, pero ningún otro punto.
- b) Tres o más elementos de superficie regular pueden tener, a lo más, vértices en común.
- c) Cualesquiera dos elementos de superficie regular son el primer y el último "eslabón" de una cadena tal que cada una tiene un lado común con la siguiente, y
- d) todos los elementos de superficie regular que tienen un vértice en común forman una cadena tal que cada una tiene un lado (terminando en el vértice) en común con la siguiente; la última y la primera pueden tener, o no, un la

do en común.

Una *superficie regular es cerrada* si cualquier lado de cualquiera de uno de sus elementos de superficie pertenece a dos elementos de superficie.

Esta definición nos permitirá, por un lado, estudiar las superficies reduciéndonos a sus elementos de superficie, y por otro lado, no excluir gran cantidad de superficies que no son expresables con una sola función $f(x, y)$, pero que si lo son por un número finito de éstas, como la circunferencia, el toro, la superficie de un cubo, etc.

6. EL VECTOR NORMAL

Hablaremos frecuentemente del vector normal a una superficie en un punto y por ello encontraremos aquí una expresión de él cuando tenemos una superficie regular. Definiremos el vector normal en el interior de los elementos de superficie ya que en los lados de una superficie regular, en general, - habrá esquinas.

Si S es un elemento de superficie regular, un VECTOR NORMAL a S en un punto P no sobre la frontera de S , es un vector normal al plano tangente a S en P . Así se tienen dos vectores normales en cada punto de un elemento de superficie, si uno de ellos es \hat{n} el otro es $-\hat{n}$.

Sea S un elemento de superficie regular dada por la función $z = f(x, y)$ definida en una región regular R y sea $p = (x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre S no sobre su frontera.

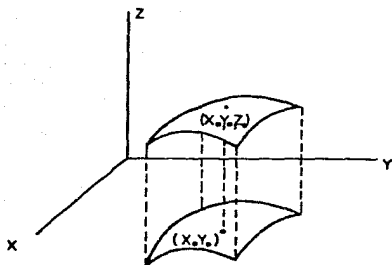


fig (13)

Cortemos a la superficie con dos planos pasando por el punto (x_0, y_0, z_0) , uno paralelo al plano XZ y el otro paralelo al plano YZ, obteniendo dos curvas dadas por las ecuaciones:

$$\zeta_1 : y = y_0 \quad z = f(x, y_0) \quad \text{con } x \text{ tal que } (x, y_0) \in R$$

$$\zeta_2 : x = x_0 \quad z = f(x_0, y) \quad \text{con } y \text{ tal que } (x_0, y) \in R$$

Un vector tangente a ζ_1 en P es el vector

$$\hat{t}_1 = \left(1, 0, \frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0) \right) \Big|_{x=x_0}$$

y un vector tangente a ζ_2 en P es:

$$\hat{t}_2 = \left(0, 1, \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y) \right) \Big|_{y=y_0}$$

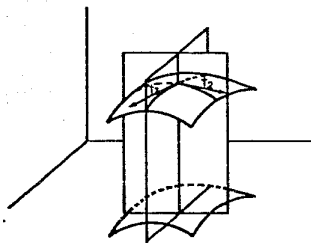


fig (14)

Denotemos las derivadas parciales simplemente así:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0) \Big|_{x=x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y) \Big|_{y=y_0}$$

Ahora bien, los vectores \hat{t}_1 , \hat{t}_2 forman una base del plano paralelo al plano tangente a la superficie en el punto P, la normal al plano será la normal a la superficie en P. Haciendo el producto cruz de \hat{t}_1 , \hat{t}_2 hallaremos un vector ortogonal al plano y multiplicando por el inverso de su norma encontraremos un vector normal a la superficie:

$$\hat{t}_1 \times \hat{t}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

y entonces

$$\hat{n}_1 = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$$

y

$$\hat{n}_2 = -\hat{n}_1.$$

Se acostumbra dar el vector normal mediante sus cosenos directores $l = \cos \alpha$, $m = \cos \beta$, $n = \cos \gamma$, donde α , β , γ son los ángulos que la normal hace con los ejes X , Y , Z , respectivamente:

$$l = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad m = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

7. AREA DE UNA SUPERFICIE REGULAR

Definiremos el área de superficie regular definiendo primero el área de un elemento de superficie, y después aquella será la suma de las áreas de sus elementos.

Consideremos un elemento de superficie dado por la función $z = f(x, y)$ definida en una región regular R del plano $X-Y$. Expresemos la región R como la suma de las n -subregiones R_1, \dots, R_n con áreas $\Delta R_1, \Delta R_2, \dots, \Delta R_n$ y en esas subregiones elegimos puntos $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$ de tal manera que cada (ξ_i, η_i) sea la esquina más cercana al origen de las esquinas del rectángulo $R_i^{(*)}$,

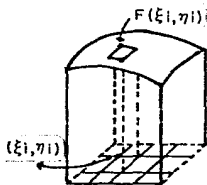


fig (15)

construimos el plano tangente a la superficie en el punto $f(\xi_i, \eta_i)$ y calculamos el área del paralelogramo sobre el plano cuya proyección es el rectángulo R_i

Para encontrar la relación entre el área del pedazo de plano, llamémosle a dicha área ΔS_i , y el área ΔR_i hacemos lo

(*) Se puede elegir (ξ_i, η_i) como cualquier punto del rectángulo R_i , sin que la relación que encontremos cambie, sin embargo, lo hacemos así para facilitar los cálculos.

siguiente: supongamos que los lados de R_i son Δx_i , Δy_i , obteniendo la relación $\Delta R_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

Supongamos que la superficie está orientada y la normal a ella en el punto $(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))$ es el vector $\hat{n} = (\ell, m, n)$. Para simplificar la situación ubicaremos el rectángulo R_i con el vértice (ξ_i, η_i) en el origen obteniendo el rectángulo R_i' con vértices $O = (0, 0, 0)$, $A = (\Delta x_i, 0, 0)$, $B = (0, \Delta y_i, 0)$ y $C = (\Delta x_i, \Delta y_i, 0)$, y consideraremos el paralelogramo sobre el plano que pasa por el origen, cuya normal es el vector $\hat{n} = (\ell, m, n)$ y su proyección es el rectángulo R_i' , sea $\square OA'B'C'$ dicho paralelogramo:

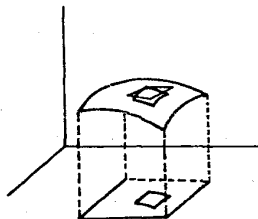


fig (16)

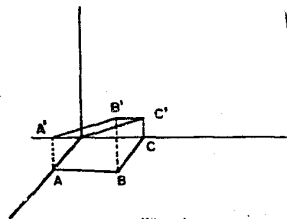


fig (17)

Es evidente que la relación entre las áreas de ΔR_i y ΔS_i es la misma que entre las áreas de R_i' y $\square OA'B'C'$. Calcularemos el vector \vec{OA}' y \vec{OC}' y la norma del producto cruz de ellos será la medida del área de $\square OA'B'C'$ y por tanto ΔS_i . El vector \vec{OA}' es un vector de la forma $(\Delta x_i, 0, z_0)$ y el vector \vec{OC}' es de la forma $(0, \Delta y_i, z_1)$ para algunas z_0 y z_1 .

Para determinar z_0 y z_1 usamos el hecho de que los vectores \vec{OA}' y \vec{OC}' están en el plano cuya normal es $\hat{n} = (\ell, m, n)$, es decir:

$$(\Delta x_i, 0, z_0)(\ell, m, n) = 0$$

$$(0, \Delta y_i, z_0)(\ell, m, n) = 0$$

de donde

$$z_0 = -\frac{\ell}{n} \Delta x_i, \quad z_1 = -\frac{m}{n} \Delta y_i.$$

Entonces:

$$\vec{OA}' = (\Delta x_i, 0, -\frac{\ell}{n} \Delta x_i), \quad \vec{OC}' = (0, \Delta y_i, -\frac{m}{n} \Delta y_i)$$

$$\begin{aligned} \vec{OA}' \times \vec{OC}' &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Delta x_i & 0 & -\frac{\ell}{n} \Delta x_i \\ 0 & \Delta y_i & -\frac{m}{n} \Delta y_i \end{vmatrix} = \left(\frac{\ell}{n} \Delta x_i \Delta y_i, \frac{m}{n} \Delta x_i \Delta y_i, \Delta x_i \Delta y_i \right) = \\ &= \left(\frac{\ell}{n}, \frac{m}{n}, 1 \right) \Delta x_i \Delta y_i \end{aligned}$$

y

$$|\vec{OA}' \times \vec{OC}'| = \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{|n|}.$$

Si γ_i es el ángulo entre la normal y el eje Z entonces $n = \cos \gamma_i$. Así la relación entre ΔS_i y ΔR_i es

$$\Delta S_i = \Delta R_i \sec \gamma_i$$

sumando todos los ΔS_i se obtiene una aproximación del área de la superficie. El límite de la suma cuando hacemos tender n a infinito y cada rectángulo tender a un punto, es la definición de área del elemento de superficie.

$$\begin{aligned} A(S) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \Delta S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \Delta R_i \sec \gamma_i \\ &= \iint_R \sec \gamma \, dx \, dy \end{aligned}$$

donde S denota el elemento de superficie.

El *área de una superficie regular* es la suma de las áreas de sus elementos de superficie.

8. INTEGRALES DE SUPERFICIE

Daremos la definición de integral de superficie, restringiéndonos a elementos de superficie regular y a funciones reales definidas en alguna región de \mathbb{R}^3 que contenga a la superficie.

Sea S un elemento de superficie regular y F una función definida en una región Ω tal que $S \subset \Omega$. Dividimos la superficie S en subregiones S_1, S_2, \dots, S_n de tal manera que cada S_i sea un elemento de superficie regular y que cualquier pareja S_i, S_j no tenga puntos en común, excepto, quizá, vértices comunes o lados comunes. Elegimos un punto $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ en cada S_i y sea $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ las áreas de cada pedazo; formamos la suma

$$I = \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$

Nos referiremos a tales sumas como *sumas integrales* correspondientes a la función F , a la partición $\{S_i\}$ de S y a la elección de los puntos P_i .

Definición:

Si las sumas integrales I tienden a un límite finito cuando el máximo de los diámetros de las partes S_i tiende a cero, entonces este límite es la *integral de superficie* de F sobre la superficie S y la denotamos con el símbolo:

$$\iint_S F(x, y, z) dS,$$

es decir:

$$(8.1) \quad \iint_S F(x, y, z) dS = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

Las condiciones bajo las cuales el límite (8.1) existe y la fórmula para calcularlo surgen inmediatamente si reducimos la integral (8.1) a una integral doble ordinaria. Veamos como reducirla.

Ya hemos encontrado la relación de las áreas ΔS_i con las áreas de los elementos R_i

$$\Delta S_i = \iint_{R_i} \sec \gamma \, dx \, dy \quad i = 1, \dots, n$$

o si $z = f(x, y)$ y dado que $\sec^2 \gamma = 1 + \tan^2 \gamma$

$$\Delta S_i = \iint_{R_i} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

Si usamos el teorema del valor medio, existen puntos $(x'_i, y'_i) \in R_i$ tal que

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x'_i, y'_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x'_i, y'_i)\right)^2} \Delta R_i$$

llegamos entonces a que la ecuación () se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \iint_S F(x, y, z) \, dS = \\ & = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x'_i, y'_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x'_i, y'_i)\right)^2} \Delta R_i \end{aligned}$$

Pero como las derivadas parciales son continuas, el límite de la derecha converge a una integral doble, obteniéndose:

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_R F(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy .$$

Como $z = f(x, y)$ una notación más explícita es la siguiente:

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_R F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy .$$

9. INTEGRALES DE SUPERFICIE DE CAMPOS VECTORIALES. FLUJO.

Sea S un elemento de superficie, para cada punto de la superficie, que no está sobre la frontera, podemos elegir un vector normal de tal manera que obtenemos una función que a cada punto (x, y, z) le asigna un vector normal, denotemos a la función con el símbolo

$$\hat{n} = \hat{n}(x, y, z) \quad (x, y, z) \in S_0$$

donde S_0 denota a la superficie menos su frontera.

Como el elemento de superficie tiene una representación $z = f(x, y)$, donde ésta tiene derivadas parciales continuas, la elección de los vectores normales de la función \hat{n} puede hacerse de tal manera que sea continua (recuerde que en cada punto hay dos vectores normales). Cuando damos tal función decimos que *orientamos* la superficie o que le asignamos una *orientación*.

Si F es un campo vectorial definido sobre S ya ésta se le ha asignado una orientación podemos formar una nueva función definida sobre la superficie haciendo el producto punto de F con el vector \hat{n} , es decir:

$$F(x, y, z) \cdot \hat{n}(x, y, z).$$

Esta es una función real, entonces definimos *la integral de superficie* del campo F sobre S como la integral de superficie de $F \cdot \hat{n}$ sobre S , es decir

$$\iint_S F(x, y, z) \cdot \hat{n}(x, y, z) dS.$$

A esta integral también se le llama el FLUJO DEL CAMPO F A TRAVÉS DE S .

Si $F(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ y $\hat{n} = (\ell, m, n)$ entonces se tiene la expresión (donde omitimos los argumentos)

$$\iint_S F \cdot \hat{n} \, dS = \iint_S (X\ell + Ym + Zn) \, dS.$$

También se acostumbra darla en términos de los ángulos α , β , γ que son los ángulos que forma la normal con el eje X , Y , Z , respectivamente:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_S (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) \, dS.$$

Veamos la razón de por qué se le llama a esta integral el flujo a través de S . Supongamos que el campo respresenta un *campo de velocidades* de un fluido en movimiento. El volumen del fluido que pasa a través de una superficie por unidad de tiempo se llama el flujo del campo F a través de la superficie. Veremos geoméricamente como podemos calcular el flujo a través de la superficie S . Para este propósito consideremos el fluido moviéndose en cada punto con la velocidad dada por el campo F . Nos preguntamos por el volumen de fluido que cruza un área ΔS perpendicular a la dirección del flujo en un tiempo Δt . Claramente todo el fluido dentro del cilindro (ver figura) de longitud $f\Delta t$ ($f = |F|$) con el pedazo S como base, cruzará ΔS en el intervalo de tiempo Δt .

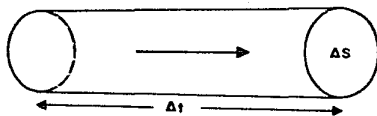


fig (18)

El volumen de ese cilindro es $f\Delta t \Delta S$. Dividiendo entre Δt obtenemos el flujo a través de ΔS en una unidad de tiempo,

$$\left(\text{flujo a través de } \Delta S\right) = f\Delta S.$$

Ahora, consideremos el caso en que la superficie no es perpendicular a la dirección del flujo (fig.19). El volumen conteniendo el fluido, que fluye a través de ΔS en el tiempo Δt , es ahora el volumen del cilindro oblicuo que tiene por base ΔS . Su volumen es $f\Delta t \Delta S \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre el vector velocidad F y n el vector normal a ΔS apuntando hacia afuera del cilindro oblicuo:

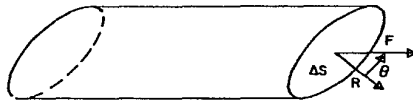


fig (19)

Pero, $f \cos \theta = F \cdot \hat{n}$ así, dividiendo por Δt llegamos a que:

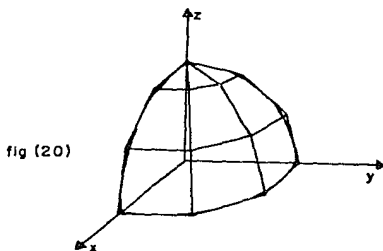
$$\left(\text{flujo a través de } \Delta S\right) = F \cdot \hat{n} \Delta S.$$

Finalmente consideremos el elemento de superficie S y aproximemos la superficie por un poliedro (fig.20). Por el argumento anterior el flujo a través de la i -ésima cara de este poliedro es, aproximadamente:

$$F(x_i, y_i, z_i) \cdot \hat{n}_i \Delta S_i.$$

Aquí (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas del punto en la i -ésima cara, en el cual la cara es tangente a S y n_i es el vector --

normal a la i -ésima cara en ese punto.



Sumando sobre todas las caras y tomando el límite cuando los lados del poliedro se aproximan a infinito llegamos a:

$$(\text{flujo a través de } S) = \iint_S F(x, y, z) \cdot \hat{n} \, dS.$$

Basados en esta idea, definimos para cualquier campo vectorial F y superficie S el flujo de F a través de S como

$$\iint_S F(x, y, z) \hat{n} \, dS,$$

siempre y cuando la integral exista.

C A P I T U L O II

LA DIVERGENCIA Y EL ROTACIONAL

1. INTRODUCCION

En este capítulo llegaremos a la definición de DIVERGENCIA Y ROTACIONAL a través de hacernos algunas preguntas sobre fluidos. Hagamos una analogía del procedimiento que vamos a seguir, comparándolo con un procedimiento que podríamos seguir con funciones reales para "obtener" el *Teorema Fundamental del Cálculo*.

Supóngase que una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ representa la función distancia de un móvil que viaja en línea recta, con $t \in [a, b]$ representando el tiempo.



fig (20)

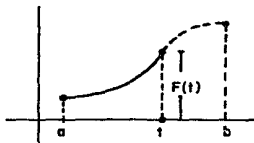


fig (21)

Dados dos valores cualesquiera del intervalo $[a, b]$, digamos t_0 y t_1 , podemos definir la función "la distancia recorrida por el móvil del instante t_0 al instante t_1 "; esta función de intervalo está dada por:

$$(1.1) \quad d([t_0, t_1]) = f(t_1) - f(t_0).$$

Ahora bien, nos gustaría que la función d fuera "una fun-

ción puntual", sin embargo, ésta sería cero y no daría ninguna información; pero si dividimos entre la longitud del intervalo $[t_0, t_1]$ obtenemos un "índice" que lleva la información de la distancia recorrida

$$\frac{d([t_0, t_1])}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{\Delta t}$$

$$\Delta t = t_1 - t_0 .$$

Entonces, este promedio (la velocidad media) sí lo podemos definir puntualmente para cada punto $t \in [a, b]$, a saber:

$$f'(t) = \lim_{[t_0, t_1] \rightarrow t} \frac{d([t_0, t_1])}{\Delta t} = \lim_{[t_0, t_1] \rightarrow t} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{\Delta t}$$

donde $[t_0, t_1] \rightarrow t$ significa que reducimos el intervalo hasta que se transforma en el punto t .

Ahora bien, teniendo la función $f'(t)$ que es un "índice" puntual que lleva la información de la "distancia global recorrida por el móvil" en cada intervalo $[t_0, t_1]$, podemos plantearnos cómo reconstruir la distancia recorrida por el móvil en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$.

Lo que hacemos para reconstruir la distancia recorrida por el móvil es lo siguiente: dividimos el intervalo $[t_0, t_1]$ en subintervalos pequeños, en cada subintervalo el desplazamiento será aproximadamente el valor $f'(t_i^*)$ en algún punto t_i^* del i -ésimo intervalo, multiplicado por su longitud Δt_i , y el desplazamiento global será aproximadamente la suma de los desplazamientos sobre todos los subintervalos:

$$\sum f'(t_i^*) \Delta t_i ;$$

entre más pequeños sean los subintervalos es mejor la aproximación, y en el límite cuando la longitud máxima de los subintervalos tiende a cero, podemos suponer que nos da el desplazamiento exacto, es decir:

$$\left(\begin{array}{l} \text{desplazamiento del} \\ \text{móvil en el inter-} \\ \text{valo } [t_0, t_1] \end{array} \right) = \lim \sum f'(t_i^*) \Delta t_i = \int_{t_0}^{t_1} f'(t) dt .$$

La expresión de la derecha se obtiene de la definición de integral. Pero el cálculo del desplazamiento ya lo habíamos hecho trivialmente (1.1) y llegamos a la siguiente igualdad:

$$\int_{t_0}^{t_1} f'(t) dt = f(t_1) - f(t_0) .$$

2. LA DIVERGENCIA

Supongamos que un fluido se mueve de acuerdo al campo de velocidades $V = (X, Y, Z)$. Observamos una porción de fluido que en el tiempo t_0 ocupa una región T_0 , cuyo volumen sea $V(T_0)$, al tiempo t esa porción de fluido ocupará una región T con volumen $V(T)$, en general es posible que los volúmenes $V(T_0)$ y $V(T)$ no sean iguales, (podemos imaginar que hay fuentes en el sistema o que el fluido es un gas y hay cambio de presión). Entonces nos podemos preguntar ¿cuál es la razón de expansión o compresión de la porción de fluido T ? Es decir, ¿en qué razón se expande el fluido en el instante t ?

Esta razón de expansión la podemos calcular a partir del campo V , y del concepto de FLUJO. Para mayor claridad hagamos otra vez una analogía con el caso real de distancia.

Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una curva de izquierda a derecha, (véase figura 23). El punto sobre esta figura indica la posición de esta partícula en cierto instante.

fig (23)



fig (24)



La partícula se mueve sobre la curva bajo la influencia de fuerzas exteriores, de acuerdo al principio de inercia formulado por Newton:

"Un cuerpo en reposo o en movimiento, se mantendrá en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme, a menos que sobre él actúen fuerzas exteriores que la obliguen a modificar dichos estados".

Supongamos que en un instante dado dejen de obrar sobre la partícula todas las fuerzas. De acuerdo con el principio de inercia, el movimiento, a partir de ese instante, debe ser uniforme y rectilíneo. Es decir, a partir de ese instante la partícula seguirá la trayectoria de la recta tangente y la magnitud de la velocidad en ese instante será la longitud de la distancia que la partícula recorrería en una unidad de tiempo.

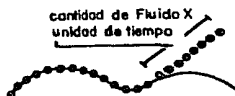
fig (25)



Así la velocidad es, de hecho, "la distancia que la partícula recorrería en dirección de la tangente por unidad de tiempo" si se dejara de ejercer fuerzas sobre ella.

Podemos interpretar esto de manera ligeramente distinta para conectarla con la idea de flujo. Supóngase que no es una partícula la que corre a lo largo de la trayectoria, sino que es todo un conjunto de partículas, es decir, un "flujo lineal" o un "chorro" (*). Supongamos que medimos la cantidad de flujo linealmente. Entonces la velocidad en un punto es la cantidad de "flujo" de este "fluido lineal" que pasa a través del punto en cuestión, en una unidad de tiempo.

fig (26)



(*) Nos podemos imaginar la curva como un tubo capilar por donde fluye el fluido.

Esta idea la podemos extender al problema que ahora nos interesa. Queremos medir la razón de expansión del volumen que ocupa la región T , si el fluido tiene como campo de velocidades a $v = (X, Y, Z)$.

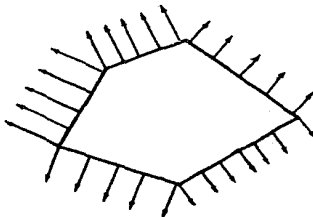
Análogamente al problema de la distancia, podemos medir en un instante t cuánto se expandirá el volumen en una unidad de tiempo, suponiendo que a partir de ese instante el volumen se expande de manera uniforme y cada partícula sigue una trayectoria rectilínea; esta medida nos dará la razón de expansión del volumen en el instante t .

El caso más sencillo es cuando el fluido está encerrado en un poliedro (en la figura 27 dibujamos un polígono) y que la velocidad del fluido es perpendicular a esas caras dirigida hacia afuera del poliedro, además siendo constante en cada una de sus caras, entonces la razón de expansión del volumen será la suma de los productos de la magnitud de la velocidad en cada cara por el área de la cara.

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n |V(x_i, y_i, z_i)| \Delta S_i$$

donde (x_i, y_i, z_i) es un punto cualquiera de la i -ésima cara y ΔS_i su área. Esa suma corresponde a la suma del volumen de los cilindros rectos que tienen como base las áreas ΔS_i y altura $|V(x_i, y_i, z_i)|$.

fig (27)



Fluido en expansión con velocidad constante en cada cara.

Si la velocidad es constante en magnitud y dirección en cada cara, pero no es perpendicular a ella, entonces la razón de expansión será la suma de los volúmenes de los cilindros oblicuos con base ΔS_i y altura $V(x_i, y_i, z_i) \cdot n_i$ ($V(x_i, y_i, z_i) \cdot n_i$ es la proyección del vector V sobre la normal a la i -ésima cara n , es decir la altura del i -ésimo cilindro), obteniendo que:

$$\frac{dV}{dt} = \sum V(x_i, y_i, z_i) \cdot \hat{n}_i \Delta S_i.$$

Supongamos ahora que la región que encierra el fluido es cualquier superficie cerrada S (suficientemente suave). Podemos inscribir en S un poliedro y suponer, para cada cara del poliedro, que la velocidad del fluido es constante, la cual, en algún punto de la cara, coincide con el vector velocidad del campo. Una aproximación a la razón de expansión del fluido será:

$$\frac{dV}{dt} = \sum V(x_i, y_i, z_i) \cdot \hat{n}_i \Delta S_i.$$

Si el campo de velocidades es continuo, y si las caras del poliedro aumentan indefinidamente mientras el diámetro de cada una de ellas tiende a cero, entonces en el límite llegaremos a la razón de expansión del volumen de la región T

$$(2.1) \quad \frac{dV}{dt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V(x_i, y_i, z_i) \cdot \hat{n}_i \Delta S_i = \iint_S V(x, y, z) \cdot \hat{n} \, dS.$$

La expresión de la derecha es el *flujo del campo* a través de la superficie S . A la razón de expansión del volumen de la región T , es decir a la dV/dt , se le llama **DIVERGENCIA TOTAL** de la región T .

Si el campo es $V = (X, Y, Z)$ y ℓ, m, n son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie, la divergencia total tiene la forma:

$$(2.2) \quad \frac{dv}{dt} = \iint_S (X\ell + Ym + Zn) dS.$$

Hemos visto cómo calcular la divergencia total o la razón de expansión de una porción de fluido. ¿Podremos extrapolar "la razón de expansión" a un punto? Si tomamos el límite de la integral

$$\iint_S V(x, y, z) \cdot \hat{n} dS$$

conforme S se reduce a un punto, dicha integral será cero (¿por qué?), pero si dividimos esta integral entre el volumen de T (T es la región encerrada por S) y pasamos al límite conforme S se reduce a un punto, entonces es posible que su valor sea distinto de cero. ¡De hecho en general lo es!, y ese valor nos servirá para reconstruir la divergencia total.

Ese límite es muy importante y se conoce como la DIVERGENCIA del campo en el punto (x, y, z)

$$(2.3) \quad \text{div } V(x, y, z) = \lim_{T \rightarrow P} \frac{1}{V(T)} \iint_S V(x, y, z) \cdot \hat{n} dS$$

donde T es la región encerrada por S , $V(T)$ su volumen y $P = (x, y, z)$.

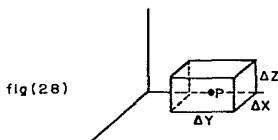
Dejaremos pendiente algunos resultados: las condiciones bajo las cuales dicho límite existe y que no depende de la elección de las superficies que van encerrando al punto.

Bajo estos supuestos podemos encontrar una expresión ade-

cuada de la divergencia; el hecho de que en caso de existir no dependa de la elección de las superficies nos permite elegir una superficie adecuada para hacer los cálculos.

La discusión que sigue no es satisfactoria desde un punto de vista formal, pero se puede formalizar haciendo ligeras modificaciones.

Consideremos un pequeño paralelepípedo con lados de longitud Δx , Δy y Δz paralelos a los ejes coordenados.



Sea (x, y, z) el centro del paralelepípedo. Calcularemos la integral de superficie de F sobre la superficie del paralelepípedo considerando esta integral como la suma de los seis términos, uno por cada cara del paralelepípedo.

Sean S_1, S_2 las caras paralelas al plano YZ , (fig.) la normal exterior a la región encerrada por la superficie en S_1 es el vector $(1, 0, 0)$ y a la superficie S_2 es $(-1, 0, 0)$, de esta manera para los puntos de S_1

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = x$$

y para los puntos de S_2

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -x.$$

Nos interesa calcular $\iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$, si el paralelepípedo es

"pequeño" podemos dar una aproximación de la integral evaluando el integrando en el centro de la superficie S_1 y multiplicándolo por el área de la superficie:

$$\iint_{S_1} V \cdot \hat{n} \, dS \approx X\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \Delta y \Delta z$$

análogamente para S_2

$$\iint_{S_2} V \cdot \hat{n} \, dS \approx -X\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \Delta y \Delta z.$$

Sumando las anteriores obtenemos:

$$\iint_{S_1+S_2} V \cdot \hat{n} \, dS \approx \left[X\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - X\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\right] \Delta y \Delta z$$

multiplicando y dividiendo el segundo miembro por Δx y observando que $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ es el volumen del paralelepípedo, se tiene:

$$\frac{1}{V} \iint_{S_1+S_2} V \cdot \hat{n} \, dS \approx \frac{X\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - X\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x}$$

reduciendo el paralelepípedo al punto (x, y, z) tenemos que $\Delta x \rightarrow 0$ y $V \rightarrow 0$, y

$$\begin{aligned} (2.4) \quad \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_{S_1+S_2} V \cdot \hat{n} \, dS &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{X\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - X\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x} \\ &= \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{p=(x, y, z)} \end{aligned}$$

Haciendo el mismo procedimiento con las otras caras del

paralelepípedo contribuyen con los sumandos

$$\frac{\partial Y}{\partial y} \quad Y \quad \frac{\partial Z}{\partial z}$$

obteniendo así que

$$(2.5) \quad \operatorname{div} V = \lim_{T \rightarrow P} \frac{1}{V(T)} \iint_S V(x, y, z) \cdot \hat{n} \, dS = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

que es una expresión más manipulable de la divergencia.

Calcularemos de manera distinta la DIVERGENCIA TOTAL o la razón de expansión del volumen de un fluido obteniendo una nueva expresión de ella; mediante ésta obtendremos nuevamente la expresión de la DIVERGENCIA. La igualdad de las dos formas de la divergencia total sugerirán el importante TEOREMA DE LA DIVERGENCIA.

Recordemos que las ecuaciones del movimiento de un fluido que en el tiempo $t = t_0$ ocupan una región T_0 puede ser expresado por medio de tres ecuaciones dependiendo del tiempo t y de la posición que en el tiempo t_0 ocupan las partículas:

$$(2.6) \quad \begin{cases} x = \varphi(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = \psi(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = \chi(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

y suponemos que en estas ecuaciones se pueden despejar (x_0, y_0, z_0) obteniendo

$$(2.7) \quad \begin{cases} x_0 = \phi(x, y, z, t) \\ y_0 = \psi(x, y, z, t) \\ z_0 = \chi(x, y, z, t) \end{cases}$$

La velocidad de las partículas es simplemente la derivada con respecto al tiempo de las ecuaciones (2.6):

$$(2.8) \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{d}{dt} \varphi(x_0, y_0, z_0, t) \\ \dot{y} = \frac{d}{dt} \psi(x_0, y_0, z_0, t) \\ \dot{z} = \frac{d}{dt} \chi(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

Pero quisiéramos conocer la velocidad en un instante t , con referencia no a la posición inicial $t = t_0$, sino con referencia a la posición en la que está pasando la partícula en un instante t , es decir con referencia a un punto (x, y, z) en el instante t .

Podemos lograr esto sustituyendo las ecuaciones (2.7) en las ecuaciones (2.8) obteniendo tres ecuaciones de la forma:

$$(2.9) \quad \begin{cases} \dot{x} = X(x, y, z, t) \\ \dot{y} = Y(x, y, z, t) \\ \dot{z} = Z(x, y, z, t) \end{cases}$$

Las expresiones de la derecha en estas ecuaciones definen un *campo de velocidades* y proporcionan la velocidad de una partícula que en un instante t pasa por el punto (x, y, z) .

Consideremos un fluido que se mueve de acuerdo a las ecuaciones (2.6) cuyo campo de velocidades es, como vimos, dado por las ecuaciones (2.9). Supongamos que en el instante t , el fluido, que ocupaba la región T_0 , ocupa ahora la región T . El volumen en el tiempo t es:

$$(2.10) \quad V(t) = \iiint_T dx dy dz .$$

Podemos relacionar esta expresión con el volumen en la región T_0 , pues por las ecuaciones (2.7) todo punto (x, y, z) de T corresponde a un punto (x_0, y_0, z_0) de T_0 . Considerando t constante, hacemos cambio de variables en (2.10) y se tiene:

$$(2.11) \quad V(t) = \iiint_{T_0} J(x_0, y_0, z_0, t) dx_0 dy_0 dz_0,$$

donde J es el determinante jacobiano de la transformación (2.6), es decir:

$$(2.12) \quad J(x_0, y_0, z_0, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & \frac{\partial \chi}{\partial x_0} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} & \frac{\partial \psi}{\partial y_0} & \frac{\partial \chi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} & \frac{\partial \psi}{\partial z_0} & \frac{\partial \chi}{\partial z_0} \end{vmatrix}$$

Si el jacobiano tiene derivada continua con respecto al tiempo, podemos derivar la expresión (2.11) y la derivada de la integral será la integral de la derivada (con respecto al tiempo) del integrando, obteniéndose:

$$\frac{dV}{dt} = \iiint_{T_0} \frac{dJ}{dt} dx_0 dy_0 dz_0.$$

Podemos calcular la derivada del jacobiano en $t = t_0$. Ahora bien, nótese que el tiempo t_0 puede ser cualquier instante, es decir, se elige arbitrariamente pero en el transcurso de las consideraciones permanece constante. Así mediremos la razón de expansión en el instante t_0 , pero como t_0 lo podemos elegir arbitrariamente, el resultado será general:

$$\frac{dJ}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial x_0} & \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x_0} & \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial y_0} & \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial y_0} & \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial z_0} & \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial z_0} & \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial z_0} \end{vmatrix}$$

Si suponemos que todas las derivadas que aparecen son continuas, entonces como x , y , z se reducen a x_0 , y_0 , z_0 en $t = t_0$, en este instante se tiene que:

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = \frac{\partial y}{\partial y_0} = \frac{\partial z}{\partial z_0} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y_0} = \frac{\partial x}{\partial z_0} = \frac{\partial y}{\partial x_0} = \frac{\partial y}{\partial z_0} = \frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{\partial z}{\partial y_0} = 0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{\partial X}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial y_0} = \frac{\partial Y}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial z_0} = \frac{\partial Z}{\partial z_0};$$

donde (X, Y, Z) es el campo de velocidades del fluido.

De acuerdo con esas igualdades llegamos a que:

$$\left. \frac{dJ}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\partial X}{\partial x_0} + \frac{\partial Y}{\partial y_0} + \frac{\partial Z}{\partial z_0} \right|_{t=t_0}$$

Podemos quitar los subíndices puesto que x , y , z coincide con x_0 , y_0 , z_0 en $t = t_0$ y t_0 puede ser cualquier tiempo. Tenemos entonces que la razón de expansión del fluido ocupando una región T en el tiempo t es:

$$\frac{dV}{dt} = \iiint_T \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dv.$$

¡Hemos llegado a una nueva expresión de la DIVERGENCIA

TOTAL del campo (X, Y, Z)!

El cálculo de la divergencia a partir de esta última expresión es sencillo, por el teorema del valor medio:

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{V} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x}}{V} + \frac{\frac{\partial Y}{\partial y}}{V} + \frac{\frac{\partial Z}{\partial z}}{V}$$

donde la raya encima del segundo miembro representa la función

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

evaluada en algún punto de la región encerrada por el volumen. Al tomar el límite conforme la región tiende a un punto se llega a la divergencia del campo:

$$\text{div}(X, Y, Z) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} .$$

Hemos encontrado dos expresiones de la divergencia total, a saber:

$$\frac{dv}{dt} = \iint_S (Xl + Ym + Zn) dS$$

$$\frac{dv}{dt} = \iiint_T \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV .$$

La igualdad de estas dos expresiones para la divergencia total es la afirmación del TEOREMA DE LA DIVERGENCIA:

$$(2.13) \quad \iiint_T \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV = \iint_S (Xl + Ym + Zn) dS,$$

o escrito en forma vectorial:

$$\iiint_T \operatorname{div} F \, dV = \iint_S F \cdot \hat{n} \, dS$$

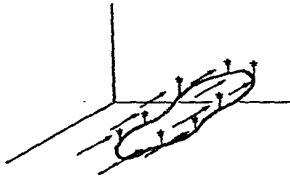
donde S es una superficie cerrada que acota el volumen T .

3. EL ROTACIONAL

La integral de línea $\int_{\zeta} X dx + Y dy + Z dz$ a lo largo de una curva ζ representa, en un campo de fuerzas, el trabajo realizado por el campo. Pero para campos de velocidades no hay un concepto análogo al de trabajo, y por tanto la integral de arriba para campos de velocidades no se puede interpretar como trabajo. Sin embargo, en el caso de flúidos en movimiento, dicha integral indica un cierto grado del movimiento general del flúido sobre la curva. Más aún, si la curva es cerrada y la integral es distinta de cero a lo largo de esta curva, entonces quiere decir que en la región encerrada por ella el movimiento del flúido forma un "vórtice" o remolino.

La integral $\int_{\zeta} X dx + Y dy + Z dz$ a lo largo de trayectorias cerradas se llama la CIRCULACION del campo a lo largo de la curva cerrada ζ . Una interpretación común es aquella en que nos imaginamos la curva con "pequeñas paletas" o "aspas", suponemos que las aspas son móviles a lo largo de la curva y son perpendiculares al flujo; si en un punto P suponemos que hay una "paleta" y medimos la velocidad que le imprimirá el flúido, estará dada por la componente tangencial de la velocidad del campo sobre la curva en el punto en cuestión.

fig (29)



Para obtener una medida global sobre la curva de este movimiento podemos considerar una partición de la curva y ele-

gir puntos arbitrarios P_i en cada i -ésimo pedazo de ella, para cada uno de ellos la velocidad tangencial será:

$$V(x_i, y_i, z_i) \cdot \hat{t}_i$$

donde V es el campo de velocidades del fluido, $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ y \hat{t}_i es el vector tangente unitario a la curva con una orientación asignada a la curva. Ahora bien es "conveniente" multiplicar cada una de estas cantidades por la longitud del i -ésimo pedazo, se entiende que la información así obtenida ya no será la velocidad, pero seguirá siendo un "índice" o -- una medida del movimiento ejercido por el campo sobre el pedazo de curva. [Newton definió la cantidad de movimiento de una partícula o su momento como $m \cdot V$ (masa por velocidad); si pensamos nosotros a la curva como un "alambre" o una curva material con densidad igual a 1, al multiplicar ΔS_i (la longitud del i -ésimo pedazo) por la velocidad en algún punto, estamos encontrando aproximadamente la *cantidad de movimiento* del pedazo de alambre]. Así pues, para cada pedazo ese índice será:

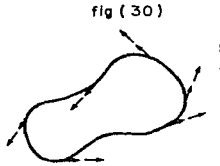
$$V(x_i, y_i, z_i) \cdot \hat{t}_i \Delta S_i,$$

al tomar el límite conforme el número de divisiones de la curva tiende a infinito y el máximo de sus longitudes tiende a cero, obtenemos:

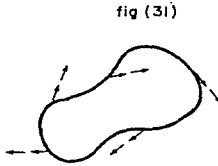
$$\int_C V(x, y, z) \cdot \hat{t} \, ds = \int_C x \, dx + y \, dy + z \, dz.$$

Así, $\int_C V \cdot \hat{t} \, ds$ es la cantidad de movimiento "neta" alrededor de C . Esto significa que las pequeñas paletas colocadas en la curva girarán si la circulación del fluido fuera diferente de cero, por ello el nombre de CIRCULACION. Bajo esta interpretación resulta evidente por qué la circulación al ser distinta

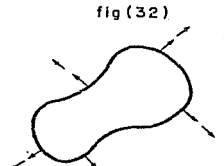
de cero detecta un vórtice o remolino en su interior.



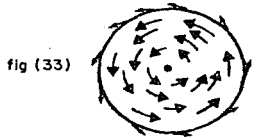
$$\int \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} > 0$$



$$\int \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} < 0$$



$$\int \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0$$



En el centro se forma un vórtice o remolino.

Así hemos relacionado o asociado con el campo otra medida global relacionada con una curva cerrada. Nuestro siguiente paso será extrapolar esa medida a un punto.

Ahora encontraremos una característica asociada a la CIRCULACION en cada punto del dominio del campo; al igual que en la divergencia se extrapoló la característica de "razón de expansión" a un punto y encontramos una relación entre la integral (triple) de la divergencia con el flujo sobre la superficie, así también al encontrar la característica relacionada con "la circulación en un punto" que se llamará ROTACIONAL, podremos reconstruir la circulación por integración a lo largo de una curva llegando al importante TEOREMA DE STOKES.

Para hacer esto empezemos con un ejemplo. Consideremos el campo de velocidades de un fluido dado por:

$$V(x, y, z) = (-y, x, 0).$$

Calculemos la circulación a lo largo de una circunferencia de radio a en el plano XY con orientación positiva con respecto al vector normal $\hat{n} = (0, 0, 1)$

$$\int_{\zeta} -y \, dx + x \, dy = 2\pi a^2.$$

Si reducimos el círculo al punto $(0, 0, 0)$ mediante círculos con radio cada vez más pequeño, el límite será cero. Pero si antes de pasar al límite dividimos la circulación entre el área del círculo, obtenemos que el límite es 2

$$\lim_{\zeta \rightarrow P} \frac{1}{A(\zeta)} \int_{\zeta} -y \, dx + x \, dy = 2,$$

donde $A(\zeta)$ representa el área encerrada por la curva.

Se puede mostrar que en este caso el límite no depende de la forma que tengan las curvas siempre y cuando estén en el plano XY y encierren al origen. Si calculamos la circulación a lo largo de círculos en el plano YZ , como los vectores velocidad son perpendiculares a dichos círculos la circulación es cero y

$$\lim_{\zeta \rightarrow P} \frac{1}{A(\zeta)} \int_{\zeta} -y \, dx + x \, dy = 0.$$

Lo mismo si los círculos están en el plano XZ . Así la "circulación en un punto" depende de las direcciones en que esté colocada la curva. Ahora bien, cuando un concepto parece de-

pende de una direcció, es natural preguntarse si tiene un caracter vectorial. Esta es la clave para definir "la circulaci3n en un punto".

Antes de dar la definici3n de ROTACIONAL veamos que pasa si en el ejemplo anterior calculamos la circulaci3n en una curva que no est3 en un plano paralelo a los planos XY, YZ, XZ. Por ejemplo la curva que surge de intersectar un cilindro con un plano que no sea paralelo a los ejes.

Sea ζ la curva dada por la intersecci3n de las siguientes superficies:

$$\begin{aligned}y - z &= 0 \\x^2 + y^2 &= a^2\end{aligned}$$

ζ es una elipse que est3 en el plano $y - z = 0$. Una expresi3n α que tiene a esa curva como traza con orientaci3n positiva respecto al vector normal $\hat{n} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ es la siguiente:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (a \cos t, a \sin t, a \sin t) \\0 \leq t &\leq 2\pi.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\int_{\zeta} X dx + Y dy + Z dz &= \int_{\zeta} -y dx + x dy = \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2 t dt + \\&+ a^2 \cos^2 t dt = 2\pi a^2.\end{aligned}$$

Como el área de la elipse es $\sqrt{2} \pi a^2$ tenemos que:

$$\frac{\int X dx + Y dy + Z dz}{A(\zeta)} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

y al tomar el límite cuando $a \rightarrow 0$ obtenemos que la "circulación en el punto" $(0, 0, 0)$ tomado sobre estas curvas es $2/\sqrt{2}$.

Con este ejemplo hemos obtenido la siguiente información al calcular "la circulación en un punto".

Cuando la curva ha sido tomada sobre el plano XY el resultado es 2, al tomarla en el plano YZ y XZ el resultado es 0, y en un plano con normal $(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ el resultado ha sido $2/\sqrt{2}$. Si asignamos el vector $(0, 0, 2)$ como la medida de la "circulación en el punto $(0, 0, 0)$ " el resultado $2/\sqrt{2}$ no es otra cosa que la proyección de ese vector sobre la normal al plano en donde se calculó la circulación, es decir:

$$\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (0, 0, 2) = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

también se tiene que:

$$(0, 0, 1) \cdot (0, 0, 2) = 2$$

$$(0, 1, 0) \cdot (0, 0, 2) = 0$$

$$(1, 0, 0) \cdot (0, 0, 2) = 0$$

y los vectores de la izquierda son las normales a los planos en donde se tomaron las curvas para calcular la circulación.

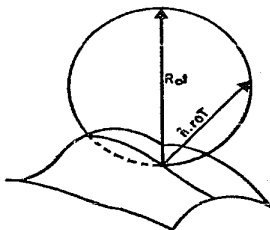
Esperamos que esto clarifique la adopción de la siguiente definición del ROTACIONAL:

Sea $F(x, y, z) = (X, Y, Z)$ un campo vectorial, P un punto de su dominio y S cualquier superficie orientada suave conteniendo al punto P . Sea \hat{n} la normal a S en P y ζ cualquier curva sobre la superficie encerrando al punto P , entonces calculamos la circulación a lo largo de esta curva orientada de acuerdo a la regla de la mano derecha respecto a la normal. Dividimos el valor de la circulación por el área encerrada por la curva y tomamos el límite de ésta cantidad cuando reducimos la curva al punto P . Definimos éste como *la componente del ROTACIONAL en la dirección de \hat{n}* ; es decir:

$$(3.1) \quad \hat{n} \cdot \text{ROT } F = \lim_{\zeta \rightarrow P} \frac{1}{A(\zeta)} \int_{\zeta} X dx + Y dy + Z dz .$$

El ROTACIONAL es un vector asociado al campo definido en cada punto del dominio de éste.

fig (34)



Admitiremos que el ROTACIONAL existe si no depende de la forma particular en que tomemos la superficie S y las curvas ζ , siempre y cuando encierren al punto en cuestión y además que las componentes definidas por los límites en varias direcciones de \hat{n} sean las componentes de uno y el mismo vector; si no se cumple alguna de esas condiciones, simplemente diremos que el rotacional no existe. La idea es, pues, obtener una "medi-

da de la circulación en un punto" y para ello debemos asegurar que sólo depende del campo y del punto. Veremos más adelante que el rotacional existe cuando el campo tiene derivadas continuas.

Ahora encontraremos una expresión conveniente del ROTACIONAL, suponiendo que él existe, esto implica que podemos elegir superficies convenientes y calcular la circulación en curvas también convenientes. Sea pues $F(X, Y, Z)$ el campo y calculemos el rotacional en el punto (x_0, y_0, z_0) .

Empecemos calculando su componente en el eje Z , es decir a lo largo del vector $(0, 0, 1)$, para ello una elección conveniente de la superficie es el plano $z = z_0$ donde z_0 es la tercera componente del punto en cuestión y una familia de curvas convenientes en este plano son los cuadrados con centro (x_0, y_0, z_0) y de lado, digamos, $2a$.

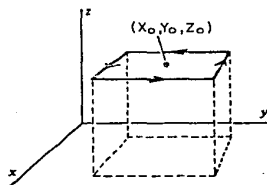


fig (35)

Consideraremos las curvas orientadas positivamente respecto a la normal, para manipularse de la mejor manera daremos las siguientes parametrizaciones:

$$\begin{aligned} \zeta_1 : x &= x_0 + a \\ y &= y_0 + t \quad -a \leq t \leq a \\ z &= z_0 \end{aligned}$$

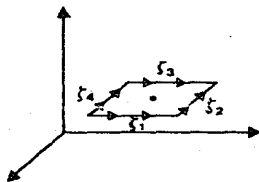
$$\begin{aligned} \zeta_2 : x &= x_0 + t & -a \leq t \leq a \\ y &= y_0 + a \\ z &= z_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_3 : x &= x_0 - a \\ y &= y_0 + t & -a \leq t \leq a \\ z &= z_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_4 : x &= x_0 + t & -a \leq t \leq a \\ y &= y_0 - a \\ z &= z_0 \end{aligned}$$

Con estas parametrizaciones $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3 + \zeta_4$

fig (36)



Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\zeta} Xdx + Ydy + Zdz &= \int_{-a}^a Y(x_0+a, y_0+t, z_0) dt - \int_{-a}^a X(x_0+t, y_0+a, z_0) dt - \\ &- \int_{-a}^a Y(x_0-a, y_0+t, z_0) dt + \int_{-a}^a X(x_0+t, y_0-a, z_0) dt = \\ &= \int_{-a}^a [Y(x_0+a, y_0+t, z_0) - Y(x_0-a, y_0+t, z_0)] dt - \\ &- \int_{-a}^a [X(x_0+t, y_0+a, z_0) - X(x_0+t, y_0-a, z_0)] dt \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio para integrales hay números ξ , ξ' tales que la anterior integral es igual a:

$$2a[Y(x_0+a, y_0+\xi, z_0) - Y(x_0-a, y_0+\xi, z_0)] - 2a[X(x_0+\xi', y_0+a, z_0) - X(x_0+\xi', y_0-a, z_0)] \quad \text{con} \quad -a \leq \xi \leq a \quad \text{y} \quad -a \leq \xi' \leq a.$$

Aplicando nuevamente el teorema del valor medio pero ahora para diferenciales, se tiene que:

$$\int_{\zeta} X dx + Y dy + Z dz = \left(\left[\frac{\partial Y}{\partial X} \Big|_{P'} \right] - \left[\frac{\partial X}{\partial Y} \Big|_{P''} \right] \right) 4a^2$$

donde P' y P'' son puntos sobre la superficie del cuadrado.

Dividiendo la circulación entre el área del cuadrado y pasando al límite cuando el cuadrado tiende al punto (x_0, y_0, z_0) , es decir cuando $a \rightarrow 0$, obtenemos

$$\hat{n}_3 \cdot \text{Rot } F = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4a^2} \int_{\zeta} X dx + Y dy + Z dz = \frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{\partial X}{\partial Y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}$$

donde $\hat{n}_3 = (0, 0, 1)$.

De forma análoga llegamos cuando $\hat{n}_2 = (0, 1, 0)$ a que

$$\hat{n}_2 \cdot \text{Rot } F = \frac{\partial X}{\partial Z} - \frac{\partial Z}{\partial X}$$

y con $\hat{n}_1 = (1, 0, 0)$

$$\hat{n}_1 \cdot \text{Rot } F = \frac{\partial Z}{\partial Y} - \frac{\partial Y}{\partial Z}.$$

Por tanto el vector ROTACIONAL en el sistema coordenado cartesiano es:

$$\text{Rot } F = \left(-\frac{\partial Z}{\partial Y} - \frac{\partial Y}{\partial Z}, \frac{\partial X}{\partial Z} - \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{\partial X}{\partial Y} \right).$$

Nuestra tarea ahora será reconstruir la circulación, a partir de conocer el ROTACIONAL en cada punto del campo $F = (X, Y, Z)$, a lo largo de alguna curva suave ζ . Supongamos que ζ es tal que hay una superficie suave S que la contiene. Supongamos además que S está orientada, es decir, que se ha asignado un lado positivo, dividimos la superficie encerrada por ζ en pequeños pedazos, cada uno de ellos acotado por curvas suaves por pedazos y orientadas en sentido positivo. Entonces la suma de las circulaciones alrededor de las fronteras será la circulación alrededor de ζ . Pues las partes de esta suma que corresponden a la frontera común de dos elementos adyacentes se eliminan mutuamente, porque esta frontera común es recorrida dos veces, una en un sentido y otra en el contrario, y el resultado es el recorrido sobre la curva ζ en sentido positivo.

fig (37)



Si el ROTACIONAL existe, la circulación a lo largo de la frontera de un elemento ΔS_k es aproximadamente igual a la componente normal del rotacional en alguno de los puntos del elemento multiplicado por el área del elemento, pues por la ecuación (3.1) podemos escribir:

$$\hat{n} \cdot \text{Rot } F = \frac{\int_{\zeta_k} X dx + Y dy + Z dz}{\Delta S_k} + \xi_k$$

ζ_k siendo la frontera de ΔS_k y ξ_k una cantidad que se aproxima a cero cuando el diámetro de ΔS_k tiende a cero.

Si la última ecuación es multiplicada por ΔS_k y sumamos sobre todos los pedazos de S tenemos:

$$\int_{\zeta} X dx + Y dy + Z dz = \sum (\text{ROT}_n F) \Delta S_k - \sum \xi_k \Delta S_k .$$

Al pasar al límite cuando el máximo diámetro de los pedazos tiende a cero, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\int_{\zeta} X dx + Y dy + Z dz = \iint_S (\text{ROT}_n F) dS ,$$

esta identidad es conocida como el *teorema de STOKES*.

C A P I T U L O III

EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA Y EL TEOREMA DE STOKES

1. INTRODUCCION

En el capítulo anterior llegamos de manera heurística a dos fórmulas que son las tesis del *teorema de la divergencia* y del *teorema de Stokes*, la fórmula del primero la podemos expresar en palabras como sigue:

La integral de la divergencia de un campo vectorial sobre una región del espacio es igual a la integral, sobre la superficie de esa región, de la componente del campo en la dirección de la normal exterior a la superficie.

Analíticamente lo anterior se formula:

$$(1.1) \quad \iiint_T \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV = \iint_S (Xl + Ym + Zn) dS$$

o equivalentemente:

$$\iiint \operatorname{div} F \, dV = \iint F \cdot \hat{n} \, dS,$$

donde $F = (X, Y, Z)$ y $\hat{n} = (l, m, n)$, \hat{n} siendo la normal exterior a la superficie.

La fórmula correspondiente al teorema de Stokes la expresamos en palabras como:

La circulación a lo largo de una curva cerrada simple es igual a la integral de la componente normal del rotacional integrada sobre cual-

quier superficie simple limitada por la curva. La superficie debe ser orientable y la curva con la orientación inducida por la superficie de acuerdo a la regla de la mano derecha.

Su expresión analítica es la siguiente:

$$(1.2) \quad \iint_S \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial Y} - \frac{\partial Y}{\partial Z} \right) \ell + \left(\frac{\partial X}{\partial Z} - \frac{\partial Z}{\partial X} \right) m + \left(\frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{\partial X}{\partial Y} \right) n \right] dS = \\ = \int_{\partial S} X dx + Y dy + Z dz$$

o equivalentemente:

$$\iint_S \text{Rot } F \cdot \hat{n} dS = \int_{\partial S} F \cdot \hat{t} ds ,$$

donde $F = (X, Y, Z)$, \hat{n} es el vector normal a S y \hat{t} tangente a ∂S .

Esas fórmulas surgieron en nuestra discusión acerca de *campos de velocidades*, pero claramente no dependen de esa interpretación, ellas forman parte de enunciados matemáticos válidos para campos vectoriales abstractos, esos enunciados deben contener con precisión las condiciones, tanto para los campos como para las regiones de integración, bajo las cuales se pretende que la fórmula es cierta, además de ir acompañados de la prueba correspondiente. En lo siguiente enunciaremos y probaremos esos teoremas aunque, antes de ello, discutiremos el teorema de Green, el cual es el equivalente a los teoremas de la divergencia y de Stokes en el plano.

2. EL TEOREMA DE GREEN

El teorema de Green se puede considerar el teorema de la divergencia o el teorema de Stokes, pero en el plano.

Veamos cómo obtenerlo a partir de la fórmula (1.1) y de nuestra interpretación de campos como campos de fluidos.

Si un fluido se mueve de tal manera que las trayectorias de las partículas son planas, paralelas a un plano dado y su velocidad es independiente de la distancia a dicho plano, entonces el *campo de velocidades* asociado al movimiento de ese fluido lo llamamos *flujo plano*. Mediante una elección adecuada de los ejes coordenados las componentes del flujo plano se pueden expresar en la forma:

$$X = X(x, y) \quad Y = Y(x, y) \quad Z = 0$$

la divergencia de este campo es:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} .$$

Sea T un cilindro recto de altura unitaria con base G y superficie lateral Σ (fig. 1.1)

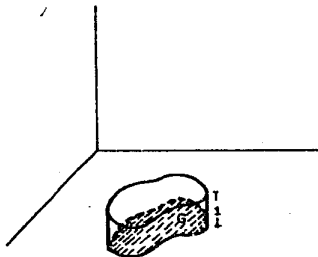


fig 38

Aplicando la fórmula (1.1) a este caso obtendremos la con-
clusión del teorema de Green. Antes de ello notemos que en es-
ta situación la integral de Volumen de la parte izquierda de
 (1.1) se reduce a una integral de superficie sobre la región
 G, es decir que:

$$(2.1) \quad \iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dV = \iint_G \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dS$$

pues

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy dz = \iint_G \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy \int_0^1 dz$$

lo último se obtiene al aplicar la regla de integrales itera-
 das del cálculo integral, considerando que el campo (y por tan-
 to su divergencia) no depende de la variable z.

Por otro lado, aplicando el campo y la región propuesta
 a la parte derecha de la fórmula (1.1) ésta se convierte de
 una integral de superficie a una integral de línea. En efec-
 to, para calcular el flujo a través de la superficie Σ , divi-
 dimos ésta en bandas de altura 1 y de base un pedazo del arco
 ∂G (∂G es la frontera de G), es decir, damos una partición de
 $\partial G, \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, cada elemento ΔS_k tiene como área la lon-
 gitud del arco $P_k P_{k+1}$; sea ΔS_k esta longitud, entonces

$$(2.2) \quad \iint_{\Sigma} (X \cos \alpha + Y \cos \beta) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} [X_k \cos \alpha_k + Y_k \cos \beta_k] \Delta S_k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} [X_k \cos \alpha_k + Y_k \cos \beta_k] \Delta S_k = \int_{\partial G} (X \cos \alpha + Y \cos \beta) ds$$

Así, combinando (1.1), (2.1) y (2.2) obtenemos la fórmu-
 la correspondiente al teorema de la divergencia en el plano:

$$(2.3) \quad \iint_G \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dS = \int_{\partial G} (X \cos \alpha + Y \cos \beta) dS ;$$

aquí, $(\cos \alpha, \cos \beta)$ es el vector normal exterior a la curva ∂G , la integral de la derecha es una integral respecto a la longitud de arco. La función $X \cos \alpha + Y \cos \beta$ es la proyección del vector (X, Y) sobre el vector normal $(\cos \alpha, \cos \beta)$; como α y β son complementarios, aquél se puede escribir como el vector $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, ahora bien, si este es el vector normal exterior entonces el vector tangente a la curva, dirigido en el sentido contrario a las manecillas del reloj, es $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ y podemos escribir el integrando de la parte derecha de (2.3) en la forma $-Y(-\sin \alpha) + X \cos \alpha$ que se puede interpretar como la proyección del vector $(-Y, X)$ sobre el vector tangente a la curva, es decir sobre $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$, bajo esta interpretación la parte derecha de (2.3) no es otra cosa que la *circulación* del campo $(-Y, X)$ sobre la curva ∂G ; recordemos (pág.) que

$$\int_{\partial G} [-Y(-\sin \alpha) + X \cos \alpha] ds = \int_{\partial G} X dy - Y dx$$

y por tanto tenemos la siguiente forma alternativa de la fórmula (2.3):

$$(2.4) \quad \iint_G \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right] dS = \int_{\partial G} X dy - Y dx$$

Si en la anterior fórmula sustituimos $+Y$ por $-Y$ obtenemos la fórmula siguiente que se puede considerar el teorema de Stokes en el plano para el campo $\vec{F} = (Y, X)$.

$$(2.5) \quad \int_{\partial G} X dy + Y dx = \iint_G \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dS$$

Las fórmulas (2.3), (2.4) y (2.5) son distintas formas

de expresar la conclusión del *teorema de Green*. Si hubiésemos de mostrar el *teorema de la divergencia*, la anterior forma en que dedujimos la fórmula (2.3) sería, de hecho, su demostración, sin embargo ese no es el caso y lo podemos demostrar de manera independiente; además dicha demostración es una ilustración sencilla de la demostración que haremos del teorema de la divergencia. Primero definiremos el tipo de regiones más simples para las cuales las fórmulas (2.3), (2.4) y (2.5) son válidas y con éstas daremos una versión débil del teorema de Green.

Sea G un conjunto de puntos en el plano. Diremos que G es una *región proyectable sobre el eje X* si se cumple que:

- a) La proyección de G sobre el eje X es un intervalo cerrado $I = \{a \leq x \leq b\}$.
- b) Cada recta $x = x_0$ con $x_0 \in I$ intersecta a G en exactamente un intervalo cerrado, el cual puede ser un punto cuando la recta es $x = a$ ó $x = b$.

De manera semejante, intercambiando los papeles de x y y definimos una *región proyectable sobre el eje Y* . Una región que es proyectable tanto sobre el eje X como sobre el eje Y se llama *región normal del plano**.

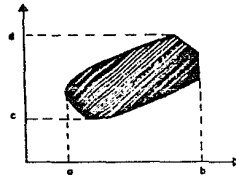
Si G es una región normal del plano entonces existen funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, $x_1(y)$, $x_2(y)$ tal que:

$$(2.6) \quad G = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad x \in I_x\},$$

$$(2.7) \quad G = \{(x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), \quad y \in I_y\};$$

* También se le llama *región estandar*.

donde $I_x = [a, b]$, $I_y = [c, d]$ son las proyecciones de G en el eje X y en el eje Y , respectivamente.



Región Plano Normal
fig 39

Ahora formularemos y probaremos el *teorema de Green* para regiones normales.

Sea G una región normal en el plano y $P(x, y)$, $Q(x, y)$ dos funciones reales definidas y continuas en G con derivadas parciales continuas en G , entonces

$$(2.8) \quad \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) ds = \int_{\partial G} P dy + Q dx$$

Demostración:

Primero probaremos que

$$(2.9) \quad \iint_G \frac{\partial P}{\partial x} ds = \int_{\partial G} P dy$$

Consideremos G expresada en la forma (2.7); aplicando las reglas del cálculo integral a la parte izquierda de (2.9) tenemos:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial x} dS = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy = \int_c^d [P(x_2(y), y) - P(x_1(y), y)] dy =$$

$$= \int_c^d P(x_2(y), y) dy + \int_d^c P(x_1(y), y) dy$$

Estas últimas integrales pueden interpretarse como integrales de línea de P a lo largo de las curvas dadas por

$$x = x_1(y) \quad (c \leq y \leq d)$$

y

$$x = x_2(y) \quad (c \leq y \leq d)$$

Si la frontera de G tiene pedazos horizontales, entonces la integral de P sobre esos pedazos es cero. La primera de las últimas dos integrales es una integral de abajo hacia arriba de la curva $x_2(y)$, mientras que la segunda es de arriba a abajo sobre la curva $x_1(y)$, (véase fig. 40). Si añadimos las partes horizontales en la dirección adecuada entonces lo anterior equivale a una integración en sentido contrario de las manecillas del reloj sobre la frontera de G;

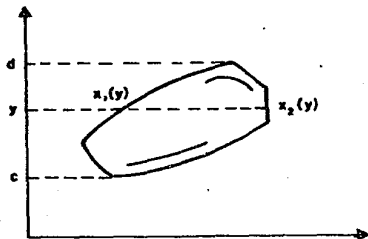


fig 40

de esta manera:

$$\int_C^d P(x_2(y), y) dy + \int_d^c P(x_1(y), y) dy = \int_{\partial G} P dy$$

y la fórmula (2.9) se cumple.

De manera análoga se prueba que

$$(2.10) \quad - \iint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dS = \int_{\partial G} Q dx$$

Consideremos la región G en la forma (2.6), entonces

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dS &= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial y} dy dx = \int_a^b [Q(x, y_2(x)) - Q(x, y_1(x))] dx = \\ &= - \left[\int_b^a Q(x, y_2(x)) dx + \int_a^b Q(x, y_1(x)) dx \right] = - \int_{\partial G} Q dx \end{aligned}$$

donde la integración sobre la frontera de G es en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Sumando (2.9) y (2.10) obtenemos la conclusión del teorema de Green y, por tanto, hemos demostrado la validez del teorema para regiones normales.

Podemos generalizar este resultado para regiones ligeramente más complicadas. Sea G una región cerrada la cual puede dividirse en dos regiones normales G_1 y G_2 mediante un arco regular ζ como se muestra en la figura (). Entonces

$$(2.11) \quad \int_{\partial G_1} P dy + Q dx = \iint_{G_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dS$$

$$(2.12) \quad \int_{\partial G_2} P dy + Q dx = \iint_{G_2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dS$$

las integrales se toman en el sentido contrario a las manecillas del reloj. La curva ζ se tiene tanto en ∂G_1 como en ∂G_2 y de ahí que la integral de línea a lo largo de ζ forma parte de los dos primeros miembros, tanto de (2.11) como de (2.12). Además forma parte de estas dos fórmulas con signos opuestos puesto que el movimiento en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj respecto a ∂G_1 da una orientación a ζ opuesta a la inducida por el movimiento en sentido contrario al de las manecillas del reloj respecto a ∂G_2 . Cuando se suman (2.11) y (2.12) la contribución debida a ζ se cancela, dejando únicamente la integral alrededor de G , de manera que la fórmula (2.8) es válida para regiones que pueden cortarse en dos regiones normales mediante una curva ζ .

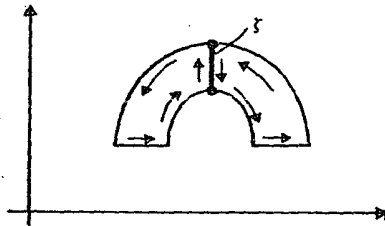


fig 41

3. EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

El teorema de la divergencia involucra dos cosas: una cierta región o porción del espacio y , un campo vectorial o tres funcions X, Y, Z , dependientes de tres variables x, y, z definidas en la región.

Como en el párrafo anterior, definiremos las regiones más simples para las cuales el teorema de la divergencia es válido, le llamaremos *regiones normales en el espacio*.

Una región N es normal si es un poliedro convexo o si es una región acotada por una superficie S consistente de un número de partes de planos y una superficie (curvada) F , y tal que para alguna orientación de los ejes coordenados las siguientes condiciones son satisfechas (fig.):

- a) La proyección \bar{F} de F en el plano XY está acotada por una curva cerrada simple consistente de un número finito de arcos, cada uno de ellos con tangente en todo punto la cual gira continuamente sobre sus puntos*; la proyección de todos los lados de S sobre el plano XY dividen al plano en un número finito de regiones, cada una acotada por una curva cerrada simple,
- b) cualquier paralela al eje Z conteniendo un punto interior de N tiene en común con N un sólo segmento y ningún otro punto, y F está dado por una ecuación de la forma $z = f(x,y)$, donde $f(x,y)$ es una función continua, junto con sus derivadas parciales de primer orden, en \bar{F} ,
- c) esas mismas condiciones se satisfacen cuando intercambiamos x, y, z de cualquier manera.

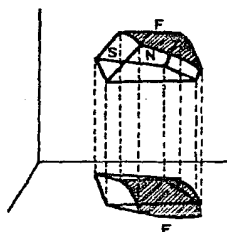


fig 42

Si $F = (X, Y, Z)$ es un campo continuo cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas dentro y en la frontera de una región normal N , entonces la fórmula (1.1) es válida, con $T = N$ y S la frontera de N .

Demostración:

Sea $\bar{\sigma}$ una de las regiones en que la proyección de los lados de S divide al plano XY y v la porción de N cuya proyección es $\bar{\sigma}$; v está acotada por una superficie σ consistente de una superficie cilíndrica vertical que pasa a través de la frontera de $\bar{\sigma}$ y por dos superficies $z = \varphi(x, y)$ y $z = f(x, y)$ $\varphi(x, y) \leq f(x, y)$, una de ellas plana, y así ambas satisfacen el requerimiento b). Empezaremos estableciendo el teorema de la divergencia para la región v y el campo $(0, 0, z)$:

$$(3.1) \quad \iiint_v \frac{\partial z}{\partial z} dV = \iint_{\sigma} zn d\sigma$$

Por el teorema de las integrales iteradas se tiene:

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} \, dV &= \iint_{\bar{\sigma}} \left[\int_{\varphi(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial Z}{\partial z} \, dz \right] d\bar{\sigma} \\
 &= \iint_{\bar{\sigma}} Z(x,y, f(x,y)) \, d\bar{\sigma} - \iint_{\bar{\sigma}} Z(x,y, \varphi(x,y)) \, d\bar{\sigma}
 \end{aligned}$$

Cambiaremos la región de integración en las integrales de superficie de $\bar{\sigma}$ a la superficie σ que acota la región v . Si $\Delta\sigma$ es un elemento de la porción superior $z = f(x,y)$ de σ , y $\Delta\bar{\sigma}$ la porción correspondiente de $\bar{\sigma}$, es decir, su proyección, entonces tenemos

$$\Delta\sigma = \iint_{\Delta\bar{\sigma}} \sec \gamma \, d\bar{\sigma} = \sec \gamma' \, \Delta\bar{\sigma}, \quad \Delta\bar{\sigma} = \cos \gamma' \, \Delta\sigma$$

donde γ' es un valor medio del ángulo agudo entre la normal a la superficie y el eje Z . La aplicación de la ley de la media se justifica por la condición b) sobre $f(x,y)$. De esta manera la integral de la derecha de (3.2) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \lim \sum_k Z(x_k, y_k, f(x_k, y_k)) \Delta\bar{\sigma}_k &= \lim \sum_K Z(x_k, y_k, f(x_k, y_k)) \cos \gamma_k \, \Delta\sigma_k \\
 &= \iint_{\sigma''} Z \cos \gamma \, d\sigma
 \end{aligned}$$

donde σ'' es la porción de σ en la superficie $z = f(x,y)$. La segunda integral de la derecha de (3.2) puede ser transformada de la misma manera. Sobre σ'' , $\cos \gamma$ es exactamente la tercera componente del vector normal $\hat{n} = (\ell, m, n)$, es decir $n = \cos \gamma$, ya que en σ'' la normal exterior forma un ángulo agudo con el eje Z . Sobre la porción σ' de σ en la superficie $z = \varphi(x,y)$, la normal exterior hace con el eje Z un ángulo obtuso, a saber el suplemento de γ , y por lo tanto $\cos \gamma = -n$. Obtenemos así que:

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} dv = \iint_{\sigma''} Z_n d\sigma + \iint_{\sigma'} Z_n d\sigma .$$

Las partes de σ no comprendidas en σ' y σ'' son las paredes cilíndricas verticales. Sobre ellas $n = 0$, así la última ecuación es equivalente a (3.1). Ahora podemos establecer la ecuación correspondiente para la región N , pues si sumamos las ecuaciones (3.1) correspondiendo a cada una del número finito (por S la condición a)) de regiones del tipo v en las cuales N está dividida, la suma de las partes izquierdas es:

$$\iiint_N \frac{\partial Z}{\partial z} dv ,$$

mientras que las integrales de superficie suman la integral sobre S (la frontera de N); las integrales de superficie sobre las paredes verticales son cero. Así,

$$\iiint_N \frac{\partial Z}{\partial z} dv = \iint_S Z_n dS .$$

Por la condición c) podemos derivar de la misma manera las ecuaciones:

$$\iiint_N \frac{\partial X}{\partial x} dv = \iint_S X_l dS \qquad \iiint_N \frac{\partial Y}{\partial y} dv = \iint_S Y_m dS$$

y la suma de las últimas tres ecuaciones dan el teorema de la divergencia para N y para la orientación particular de los ejes involucrada en las hipótesis de N . Sin embargo se puede probar que el fórmula (1.1) no depende de la elección de los ejes coordenados (como lo sugiere la forma en que dedujimos el teorema de la divergencia en el capítulo anterior), así es que el teorema es cierto para N y cualquier elección de los ejes.

También para cualquier región que pueda ser cortada en regiones normales por un número finito de planos será válida la fórmula (1.1) si mantenemos la hipótesis sobre el campo. En efecto: para cada subregión normal vale el teorema, sumando las partes izquierdas de la fórmula correspondiente a (1.1) para las subregiones en cuestión, obtenemos la expresión del lado izquierdo de la fórmula (1.1) para toda la región; por otro lado las integrales sobre las superficies se toman sobre dos clases de superficies, a saber, las que pertenecen a la frontera exterior de la región total y las que pertenecen a los planos de corte, éstas últimas pertenecen a dos subregiones simultáneamente y se integra dos veces sobre ellas, pero los vectores normales en cada punto de esas superficies tienen sentidos contrarios según pertenezcan a una subregión o a su adyacente, y por tanto en el resultado final de la suma no cuentan y sólo queda la integral sobre la superficie que pertenece a la frontera de toda la región.

Así, el teorema de la divergencia es válido para cualquier región que, en el sentido anterior, es la suma de regiones normales.

4. EL TEOREMA DE STOKES

El teorema de Stokes involucra una superficie S cuya frontera es una curva cerrada simple ζ y un campo (X, Y, Z) . Se asigna un sentido positivo a la normal a S y los cosenos directores de la normal con este sentido se supone varían continuamente con respecto al pie de la normal sobre S . Así se puede asignar un sentido positivo a ζ de acuerdo a la regla de la mano derecha.

Primero probaremos el teorema para una clase muy simple de superficies S correspondientes a las regiones normales para el teorema de la divergencia, a saber, aquellas que satisfacen las condiciones impuestas sobre la cara curva F de una región normal en a), b) y c) del párrafo anterior, suponemos además que en las proyecciones de F sobre los planos coordenados es válido el teorema de Green. Para el campo suponemos que en una región del espacio con S en su interior, X, Y, Z y sus derivadas parciales de primer orden son continuas.

Para superficies S y campos (X, Y, Z) satisfaciendo las condiciones anteriores es válida la fórmula (1.2).

Consideremos primero los términos en la fórmula (1.2) que involucran X , probaremos que:

$$(4.1) \quad \iint_S \left(\frac{\partial X}{\partial z} m - \frac{\partial X}{\partial y} n \right) dS = \int_{\zeta} X dx$$

La función X está dada como una función de x, y y z pero como sus valores sobre la superficie S , que satisfacen la ecuación $z = f(x, y)$, son los que están involucrados en la ecuación (4.1) podemos hacer la sustitución siguiente y expresar X en términos solamente de x y y :

$$\phi(x, y) = X[x, y, f(x, y)].$$

Entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{m}{n},$$

ya que (véase página).

$$-\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{n}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial X}{\partial z} m - \frac{\partial X}{\partial y} n \right) dS &= - \iint_S \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{m}{n} \right) n dS \\ &= - \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial y} n dS = - \iint_{\bar{S}} \frac{\partial \phi}{\partial y} d\bar{S} \end{aligned}$$

donde \bar{S} es la proyección de S en el plano XY . Esta última integral la podemos transformar en una integral de línea sobre la curva γ , que es la proyección de ζ en el plano XY , mediante el teorema de Green. Escribiendo en la fórmula (2.8) (página) $P = 0$ y $Q = \phi$, vemos que la última integral es igual a

$$\int_{\gamma} \phi(x, y) dx,$$

y como los valores de ϕ sobre γ son idénticos con aquellos de X en los puntos correspondientes de ζ , esta integral es igual a:

$$\int_{\zeta} X dx$$

haciendo válida la ecuación (4.1). Como las condiciones sobre S permanecen invariantes cuando intercambiamos los ejes, podemos llegar de manera semejante a dos identidades similares que resultan de intercambiar en (4.1) las letras x , y , z en

forma cíclica, la suma de las tres identidades da la ecuación (1.2) quedando así probado el *teorema de Stokes*, para la orientación especial de los ejes. Pero también en este caso se puede probar que la expresión (1.2) no depende del sistema de ejes involucrado, habiéndose así establecido el teorema de Stokes para cualquier orientación de los ejes.

El teorema establecido puede también ser extendido. Llamaremos un *elemento normal de superficie** a aquella superficie que satisfaga las condiciones impuestas arriba. Entonces si una superficie puede ser dividida, por medio de un sistema de curvas, en un número finito de elementos normales de superficie y si se asigna un sentido a las normales y a las curvas acotando los elementos de acuerdo a la regla de la mano derecha, estas asignaciones para dos elementos adyacentes debe ser tal que fronteras comunes son recorridas en sentidos opuestos. La suma de las identidades (1.2) de cada uno de los elementos por separado dará la identidad (1.2) para toda la superficie. No es necesario que la normal a S cambie continuamente sobre toda la superficie S , puede tener discontinuidades en los lados comunes a dos elementos normales de superficie pues en la integral de superficie los conjuntos de puntos de la frontera no tienen peso, mientras que en las integrales de línea la normal no interviene. Pero para este tipo de regiones se debe asegurar que la superficie sea orientable.

* 'normal surface elements' en Kellogg [].

'normal surface elements' en Kellogg [] .

EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA PARA REGIONES
REGULARES DEL ESPACIO

1. INTRODUCCION

Una *región regular del espacio* es una región cerrada y acotada cuya frontera es una superficie regular cerrada. El propósito de este capítulo es probar que la afirmación del teorema de la divergencia se cumple para este tipo de regiones.

Dentro de las regiones regulares hay regiones suficientemente complicadas para las cuales no es natural que el teorema de la divergencia resulte verdadero; por ejemplo, consideremos una región que tenga una cara igual a la superficie dada por la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 y^3 \operatorname{sen} \frac{1}{xy} & \text{si } (x \neq 0) \text{ y } (y \neq 0) \\ 0 & \text{si } (x=0) \text{ o } (y=0) \end{cases}$$

con $(x,y) \in R$ donde $R = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$, cuyo corte en cualquier plano $x=k$ o $y=k$ con $k \neq 0$ tiene la forma de la gráfica siguiente:

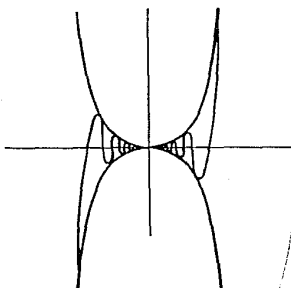


fig 43

No parece, al menos a simple vista, que podamos expresar dicha región como la suma de un número finito de regiones normales para poder utilizar la prueba del capítulo anterior. Pero sí podremos aproximar esas regiones por regiones normales tanto como se quiera, y eso es lo que haremos en la última sección de este capítulo. Para ello requeriremos de varios resultados geométricos que, aunque muchos de ellos evidentes, es necesario probar. Iniciamos con algunas definiciones y resultados de conjuntos de puntos, continuamos con teoremas sobre curvas y superficies para terminar con el teorema de extensión.

En el tratamiento del capítulo no se renuncia a echar mano de la intuición geométrica y, no obstante, alcanzar cierto grado de rigor.

2. CONJUNTOS DE PUNTOS.

En este parágrafo daremos las definiciones que utilizaremos en los siguientes, relativos a conjuntos de puntos; aunque las definiciones son generales, nuestro trabajo está enfocado a conjuntos de puntos en \mathbb{R}^3 .

Los elementos de \mathbb{R}^3 los denotamos por $\bar{X} = (x, y, z)$. Si $\bar{X} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\bar{Y} = (x_2, y_2, z_2)$ están en \mathbb{R}^3 el producto punto $\bar{X} \cdot \bar{Y}$ está definido por $\bar{X} \cdot \bar{Y} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. La longitud del vector \bar{X} es la raíz cuadrada positiva de $\bar{X} \cdot \bar{X}$ y la denotamos por $\|\bar{X}\|$. La distancia entre dos vectores \bar{X} y \bar{Y} es $\|\bar{X} - \bar{Y}\|$. El ángulo entre dos vectores distintos de cero está dado por la fórmula

$$\cos \vartheta = \frac{\bar{X} \cdot \bar{Y}}{\|\bar{X}\| \|\bar{Y}\|}$$

donde ϑ es el ángulo entre los vectores y $0 \leq \vartheta \leq \pi$. La esfera con centro \bar{X} y radio r está dada por

$$\{\bar{Y} : \|\bar{X} - \bar{Y}\| = r\}$$

o equivalentemente

$$\{(x, y, z) \mid \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} = r\}$$

donde $\bar{X} = (x_1, y_1, z_1)$.

La bola con centro \bar{X} y radio r está dada por

$$\{\bar{Y} : \|\bar{X} - \bar{Y}\| < r\}$$

o equivalentemente

$$\{(x, y, z) \mid \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} < r\}.$$

Si los puntos de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^3$ están a su vez contenidos en un plano, diremos que E es un *conjunto plano*; si E está contenido en una recta, diremos que E es un *conjunto lineal*. Un conjunto plano se puede considerar como un subconjunto de un plano; por otro lado, un conjunto lineal se puede considerar como un subconjunto de un plano o como subconjunto de una recta, a parte, naturalmente, de poderlos considerar como subconjuntos de \mathbb{R}^3 . Dado un conjunto plano hay una orientación de los ejes para la cual la tercera coordenada de la expresión del conjunto relativa a esos ejes es cero. Para conjuntos lineales se puede encontrar una orientación de los ejes en que la expresión del conjunto relativo a esos ejes tenga segunda y tercera coordenada igual a cero.

Un *conjunto finito* es el que tiene un número finito de elementos, en otro caso es *infinito*; un conjunto es *acotado* si todos sus puntos están dentro de alguna esfera.

Un punto P es un *punto límite* del conjunto E si hay puntos de E , distintos de P , en toda esfera con centro en P . Un punto límite puede o no pertenecer al conjunto. Un conjunto finito no tiene puntos límite. Un importante teorema referente a puntos límites es el *teorema de Bolzano-Weierstrass* que afirma que *todo conjunto infinito acotado tiene al menos un punto límite*. Su prueba se basa en el axioma de continuidad de los números reales. Sea A un conjunto de números reales. Si hay un número real x tal que si a está en A implica que a es menor o igual a x , entonces x es llamada una *cota superior* de A y decimos que A está acotada superiormente. Supongamos que hay un número real S satisfaciendo las siguientes propiedades: (i) S es una cota superior de A , y (ii) si y es cualquier cota superior de A entonces S es menor o igual que y . Entonces a S se le llama la *mínima cota superior* del conjunto A . También se le llama el *supremo* del conjunto A .

Axioma de Continuidad: Si S es un conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente, entonces A tiene un supremo.

Teorema (Bolzano-Weierstrass). Si A es un conjunto de números reales, infinito y acotado, entonces hay al menos un número real tal que es un punto límite de A .

Para probarlo consideremos un intervalo $[a, b]$ conteniendo al conjunto A . Dividimos $[a, b]$ en dos subintervalos iguales. Al menos uno de esos subintervalos contiene un subconjunto infinito de A . Sea $[a, b]$ tal subintervalo. Ahora dividimos $[a_1, b_1]$ y aplicando el mismo criterio obtenemos un subintervalo $[a_2, b_2]$ conteniendo un subconjunto infinito de A y así continuamos este proceso obteniendo una colección numerable de intervalos; el n -ésimo intervalo siendo $[a_n, b_n]$ de longitud

$$b_n - a_n = \frac{(b - a)}{2^n} .$$

De donde el supremo de $\{a_n\}$ coincide con el ínfimo de $\{b_n\}$.

Supongamos que no son iguales; es decir, sea $x = \sup\{a_n\}$, $y = \inf\{b_n\}$ y $x \neq y$, como $a_n < b_n$ entonces $x < y$ y $y - x = \delta > 0$ pero esto implica que para ningún n se cumple que

$$\frac{(b - a)}{2^n} < \delta ,$$

lo cual es una contradicción, de donde $x = y$. El punto x será un punto límite de A porque si r es cualquier número positivo, hay alguna n tal que $[a_n, b_n]$ está contenido en el intervalo

$$\left[x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2} \right],$$

pues se puede elegir n suficientemente grande para que

$$b_n - a_n < \frac{r}{2} .$$

El intervalo

$$\left[x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2} \right]$$

contiene un número infinito de puntos de A y por tanto contiene un punto de A distinto de x , de lo cual concluimos que x es un punto límite de A.

El conjunto de puntos que consiste de todos los puntos límites de un conjunto E se llama el *derivado* de E y se denota por E' . El derivado de un conjunto finito es el conjunto vacío.

Un punto P en $E \subset \mathbb{R}^3$ es un *punto interior* de E si hay una esfera alrededor de P totalmente contenida en E. Un punto P de un conjunto plano E es un *punto interior de E con respecto al plano* si hay un círculo en el plano con centro en P totalmente contenido en E. Un punto P de un conjunto lineal E es un *punto interior de E con respecto a la recta*, si es el punto medio de un segmento de recta totalmente contenido en E. La frontera de un conjunto E es el conjunto de puntos límites de E que no son interiores a E. Como esta definición involucra la noción de puntos interiores, la definición de frontera para conjuntos planos y lineales es relativa, teniéndose la frontera de un conjunto plano E con respecto al espacio y la frontera de E con respecto al plano, etc.

Un conjunto *cerrado* de puntos es el que contiene todos sus puntos límite. Un conjunto *abierto* es aquel que todos sus puntos son interiores. El espacio total y el conjunto vacío son abiertos y cerrados a la vez.

Un *dominio* es un conjunto abierto, tal que cualquier par de sus puntos puede ser unido mediante una poligonal, de un número finito de lados, totalmente contenida en el conjunto.

Una *región* es un dominio o un dominio junto con algunos o todos los puntos de su frontera. Una *vecindad de un punto* es un dominio conteniendo al punto.

3. EL TEOREMA DE HEINE - BOREL.

La idea de uniformidad es fundamental en análisis. En general, una función posee una cierta propiedad *uniformemente* con respecto a una variable cuando las desigualdades que la definen son independientes de esa variable. Por ejemplo la serie

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$$

define por medio de los primeros términos una función $s_n(x)$. Decimos simplemente que la serie converge en el intervalo $a \leq x \leq b$ a $\ell(x)$ si para cualquier x en el intervalo y cualquier $\epsilon > 0$ existe una N tal que para ese valor de x y $n > N$ se tiene

$$|s_n(x) - \ell(x)| < \epsilon.$$

Pero si decimos que la serie *converge uniformemente* en el intervalo a $\ell(x)$ tenemos que probar que dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un N *independiente* de x tal que

$$|s_n(x) - \ell(x)| < \epsilon$$

para toda x en el intervalo y toda $n > N$.

Una función $f(P)$ definida en una región R es continua en la región si dado $\epsilon > 0$ y cualquier punto P en R existe una $\delta > 0$ (que depende tanto de ϵ como de P) tal que

$$|f(Q) - f(P)| < \epsilon$$

siempre que Q esté en R y la distancia \overline{PQ} sea menor que δ .

Decimos que f es uniformemente continua en R si a cualquier $\epsilon > 0$ le corresponde una $\delta > 0$ *independiente* de P tal que si P y Q son cualquier par de puntos en R y la distancia \overline{PQ}

es menor que δ entonces

$$|f(P) - f(Q)| < \epsilon.$$

Las pruebas que establecen muchos teoremas de uniformidad tienen una parte común que se puede formular como un teorema sobre conjuntos de puntos:

El Teorema de Heine-Borel: *Sea E cualquier conjunto de puntos cerrado y acotado, y S un conjunto de dominios, tal que cada punto p de E está en uno de los dominios T_p del conjunto S. Entonces hay un subconjunto S' que consiste de un número finito de dominios T_p tal que cualquier punto de E está en uno de los dominios de S'.*

Para probarlo, mostraremos que hay un número $\alpha > 0$, tal que cada punto x de E está a una distancia mayor que α de quiera de los puntos frontera de alguno de los dominios T_p que contienen a x. Supongamos que éste no es el caso. Entonces para cualquier entero positivo n, hay un punto P_n en E tal que todos los dominios del conjunto S que contienen a P_n tienen sus puntos frontera a una distancia menor o igual que $\frac{1}{n}$ de P_n . Se puede elegir una sucesión infinita* de tales puntos y como E está acotada entonces, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, hay un punto límite de la sucesión, digamos P_0 . Como E es cerrado, entonces P_0 está en E. Por lo tanto P_0 está en algún conjunto de S, digamos en T_0 . Pero esto es una contradicción. Pues si δ fuera el radio de una esfera con centro en P_0 totalmente contenida en T_0 , habría puntos de la sucesión P_1, P_2, \dots a una distancia menor que $\frac{\delta}{3}$ de P_0 con índice n tal que $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{3}$. Para uno de tales puntos no hay dominios con puntos frontera a una distancia mayor que $\frac{1}{n}$, pero tal punto a su vez está en T_0 y tiene con

* ¿Por qué?

los puntos de la frontera de T_0 una distancia mayor que $\frac{1}{n}$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto el número α existe.

Supongamos ahora que A es un conjunto de un número finito de puntos de E con la propiedad de que cada punto de E está a una distancia menor que α de algún punto de A . Entonces para cada punto p de A hay un dominio del conjunto S cuyos puntos frontera están todos a una distancia mayor que α de p . Para cada punto de A elegimos un dominio de esos, teniendo así un subconjunto S' de S de un número finito de dominios. S' es tal que cada punto de E está en algún dominio de S' y por tanto tiene las características pedidas por el teorema.

La elección del conjunto A se hace dividiendo la región E en cubos mediante sistemas de planos paralelos, de tal manera que la diagonal de cada cubo tenga una longitud menor que α . Como el conjunto E está acotado habrá sólo un número finito de cubos que contienen puntos de E , de cada uno de esos cubos se elige un punto que esté en E . Esos puntos constituyen el conjunto A .

4. TEOREMAS ACERCA DE CURVAS

En este parágrafo precisaremos algunos hechos mencionados en el capítulo I, parágrafo 2, acerca de curvas. Enunciaremos y probaremos algunos teoremas que serán de utilidad para los fines de este capítulo.

Recordemos que un *arco regular* es un conjunto de puntos ζ de la forma (x,y,z) tal que, *para alguna orientación de los ejes*, admite una representación:

$$y = f(x), \quad z = g(x), \quad x \in [a,b] = I \quad - - - (1)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y continuamente diferenciables en I . Una representación como (1) le llamaremos *representación estándar* del arco.

PROPOSICION I: *Un arco regular admite una 'representación paramétrica' en términos de la longitud de arco, es decir, una representación en la forma:*

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) \quad 0 \leq s \leq l$$

donde l es la longitud de la curva y $x(s)$, $y(s)$ y $z(s)$ son continuas y continuamente diferenciables en el intervalo $[0,l]$.

NOTA: La definición de función continuamente diferenciable (ver capítulo 2, pág.) es equivalente a lo siguiente: $f(x)$ tiene una derivada en todo punto interior de I , y derivadas laterales en los puntos extremos. Entonces la derivada se puede definir en todo el *intervalo cerrado*, siendo ahí continua.

PRUEBA: Consideremos la representación (1), entonces la longitud del arco que va del punto $[a, f(a), g(a)]$ a un pun-

PRUEBA: Sea $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ las coordenadas de la curva con la orientación de los ejes en que ninguna tangente a la curva es perpendicular al eje X . Consideremos los vectores $\hat{t} = (x'(s), y'(s), z'(s))$ y $\hat{e}_1 = (1, 0, 0)$ el coseno del ángulo formado por ellos es

$$\cos(\hat{t}, \hat{e}_1) = \frac{x'(s)}{\|\hat{t}\|}$$

entonces la condición de no perpendicularidad implica que para toda s $x'(s) \neq 0$, pues si en algún punto fuera cero, entonces se tendría que $\cos(\hat{t}, \hat{e}_1) = 0$ y esto sólo se verifica si el ángulo entre \hat{t} y \hat{e}_1 es 90° , contrario a la hipótesis. Como $x'(s)$ es continua entonces, ó $x'(s) > 0$, ó bien, $x'(s) < 0$ para toda s , y entonces $x(s)$ es estrictamente monótona; luego $x(s)$ tiene una inversa $s = s(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$ donde $a = x(a)$, $b = x(\ell)$. Claramente $s(x)$ es continua y continuamente diferenciable. Definimos las funciones f y g de la siguiente manera:

$$f(x) = y(s(x)), \quad g(x) = z(s(x)) \quad \text{con } x \in [a, b]$$

los puntos (x, y, z) definidos por $y = f(x)$, $z = g(x)$, $x \in [a, b]$ describen los puntos de la curva y en virtud de las propiedades de las funciones compuestas, esas ecuaciones son la representación estándar de un arco regular.

El siguiente teorema nos proporciona una propiedad importante que utilizaremos más adelante. Dicha propiedad nos dice que en cualquier punto de un arco regular, un pedazo del arco, suficientemente pequeño, alrededor de ese punto es 'muy parecido' a una recta en el sentido de que no se dobla demasiado y que no se aleja mucho de una recta. Esa propiedad nos permitirá dividir un arco regular de tal manera que cada subarco no 'gire' demasiado y entonces puedan ser encerrados,

por ejemplo, en círculos con diámetro la cuerda que une los puntos extremos del subarco

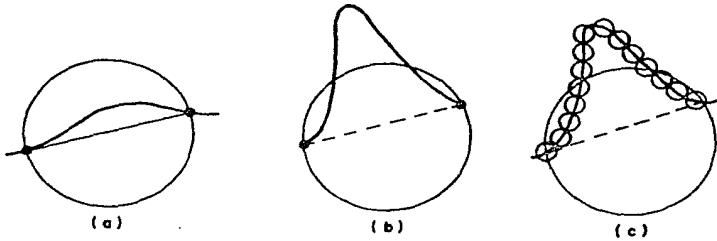


fig 44

En (a) la curva no gira demasiado y puede ser encerrada en un círculo con diámetro el segmento que une los extremos; en (b) no es posible eso, no obstante se puede dividir en subarcos más pequeños y cada subarco si puede ser encerrado en círculos, (c).

TEOREMA I. Dado un arco regular C y un número $\alpha > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que no hay dos tangentes a C en los puntos de cualquier porción de longitud menor que δ , que hagan una con otra un ángulo mayor que α .

PRUEBA: Sea C dada en ecuaciones paramétricas con parámetros la longitud de arco:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) \quad s \in [0, l].$$

Por la proposición I las coordenadas $(x'(s), y'(s), z'(s))$ del vector tangente son continuas en el intervalo cerrado $[0, l]$ y, entonces, *uniformemente* continuas. Por lo tanto hay un número $\delta > 0$ tal que si s y t son cualesquiera puntos para los cuales $|s - t| < \delta$, entonces

$$[x'(s) - x'(t)]^2 + [y'(s) - y'(t)]^2 + [z'(s) - z'(t)]^2 < 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

desarrollando los paréntesis y considerando que $\|\hat{t}\| = 1$ donde $t = (x'(s), y'(s), z'(s))$ para cualquier s , tenemos que:

$$2 - 2x'(s)x'(t) - 2y'(s)y'(t) - 2z'(s)z'(t) < 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

de donde

$$x'(s)x'(t) + y'(s)y'(t) + z'(s)z'(t) > 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha \quad (3)$$

es decir que

$$\cos(s, t) > \cos \alpha$$

donde $\cos(s, t)$ representa el coseno del ángulo formado por la tangente en t y la tangente en s . Como $0 < \alpha < \pi/2$ y en este intervalo el coseno es decreciente, la anterior desigualdad nos dice que el ángulo formado por las tangentes es menor que α .

Para curvas planas, del teorema anterior se infiere que cualquier tangente en un punto de un pedazo, hace un ángulo menor que α con la secante que une los puntos extremos del pedazo, puesto que por el teorema del valor medio hay una tangente en el pedazo de arco que es paralela a la secante. Pero para arcos que no son planos no es claro que eso suceda, pues no necesariamente hay un punto en el pedazo tal que su tangente sea paralela a la secante que une puntos extremos. En el dibujo se muestra una hélice en donde claramente eso no sucede.

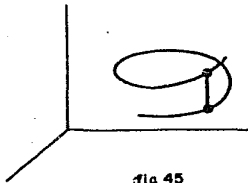


Fig 45

El hecho subsiste, sin embargo, para curvas \mathbb{R}^3 como lo muestra el siguiente

TEOREMA II. *Dado un arco regular C y un número $\alpha > 0$, hay un número $\delta > 0$ tal que la tangente a C en cualquier punto de una porción de longitud menor que δ hace con la cuerda que une los puntos extremos un ángulo menor que α .*

PRUEBA: La misma δ que fue determinada en la prueba anterior nos servirá. De hecho, si integramos ambos lados de la desigualdad (3) con respecto a s de s_1 a s_2 , $0 < s_2 - s_1 < \delta$ llegamos a la desigualdad:

$$(x_2 - x_1)x'(t) + (y_2 - y_1)y'(t) + (z_2 - z_1)z'(t) > (s_2 - s_1)\cos \alpha$$

de donde $x_1 = x(s_1)$, $x_2 = x(s_2)$, $y_1 = y(s_1)$, ..., etc.

Dividiendo esta desigualdad entre

$$C = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

tenemos que la parte izquierda de la desigualdad así obtenida es el coseno del ángulo formado por la tangente en t y el segmento que une los puntos correspondientes a s_1 y s_2 , mientras que la parte derecha es algo no menor que $\cos \alpha$. En tonces si $s_1 \leq t \leq s_2$, el ángulo entre la cuerda y la tangente en t es menor que α .

TEOREMA III. *La proyección de un arco regular sobre un plano, en el que ninguna tangente a la curva es perpendicular, consiste de un número finito de arcos regulares.*

PRUEBA: Sea C el arco regular dado en ecuaciones paramétricas dependiendo de la longitud de arco: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, $0 \leq s \leq \ell$; y el plano de proyección el plano XY . Esto es posible, pues las propiedades de $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, (continuidad, diferenciabilidad, etc) permanecen bajo transformaciones rígidas de los ejes.

Como el arco nunca es perpendicular al plano XY se tiene que $|z'(s)| < 1$, y como una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado alcanza su supremo, es decir, tiene máximo, entonces $|z'(s)|$ tiene un máximo menor que 1, sea $\mu = \max |z'(s)|$, $\mu < 1$. Si σ es la longitud de arco de C_1 , la proyección en el plano XY de C , entonces

$$\sigma(s) = \int_0^s \sqrt{[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2} ds$$

de donde

$$[\sigma'(s)]^2 = [x'(s)]^2 + [y'(s)]^2$$

y como

$$[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 + [z'(s)]^2 = 1$$

tenemos que

$$[\sigma'(s)]^2 = 1 - [z'(s)]^2 \geq 1 - \mu^2.$$

Entonces, eligiendo adecuadamente el sentido positivo C_1 , σ es una función monótona creciente de s para $0 \leq s \leq \ell$ con derivada continua y no nula en todo punto. Entonces existe la función inversa de $\sigma(s)$, digamos $s(\sigma)$, y si 0 y λ son los valores de σ correspondiendo a 0 y ℓ de s , $s(\sigma)$ es continua y tiene derivada continua (a saber $1/\sigma'(s)$) en el intervalo cerrado $[0, \lambda]$. Entonces C_1 está dada por las ecuaciones:

$$x = x[s(\sigma)], \quad y = y[s(\sigma)], \quad z = 0 \quad 0 \leq \sigma \leq \lambda$$

las coordenadas siendo funciones continuas y continuamente diferenciables de σ en el intervalo cerrado $[0, \lambda]$.

Falta mostrar que C_1 puede ser dividida en un número finito de pedazos, cada uno de los cuales gira un ángulo menor que 90° , pues correspondiendo a cada pedazo con esa condición, habrá una orientación de los ejes tal que ninguna tan gente al pedazo sea perpendicular al eje X. Satisfaciendo eso los pedazos, serán arcos regulares de acuerdo a la proposición II. Pero las coordenadas de C_1 expresadas como fun ciones de σ satisfacen las condiciones usadas en la prueba del Teorema II, entonces ese teorema es aplicable a C_1 , y C_1 tiene la propiedad requerida para $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

5. REGIONES REGULARES Y SUPERFICIES REGULARES.

En las pruebas de los teoremas que involucran regiones complicadas, se suele proceder dividiendo la región en partes más simples; para cada una de esas partes se prueba el teorema y después se pasa a la región complicada mediante la suma de esas partes simples, este procedimiento resulta, en general, más sencillo que encontrar una prueba a partir de la región complicada. En este párrafo dedicaremos atención a la forma de dividir regiones en otras más simples.

Recordemos que una *región regular del plano* es una región del plano cerrada y acotada cuya frontera es una curva regular cerrada. Cada arco regular de la frontera de la región se llama *lado* de la región y la intersección de dos lados se llama *vértice*. El *ángulo en un vértice* de la región es el ángulo entre las tangentes de cada uno de los lados que forman el vértice. Recuérdese que cada lado es un arco regular y en los extremos las derivadas de sus coordenadas alcanzan un límite, además, expresado el arco en su *representación estándar*, la derivada de la primera coordenada es 1, por tanto, podemos hablar de las rectas tangentes en los extremos de cualquier arco. Sin embargo, todavía queda la ambigüedad de qué ángulo entre las rectas tangentes debemos tomar. Por ejemplo, en la figura__ (a), el ángulo del vértice de la región es el ángulo agudo que hacen las tangentes; pero en la figura__ (b); es el ángulo obtuso; finalmente, en la figura__ (c) debemos tomar como ángulo en el vértice de la región el complemento (respecto a 360°) del ángulo agudo.

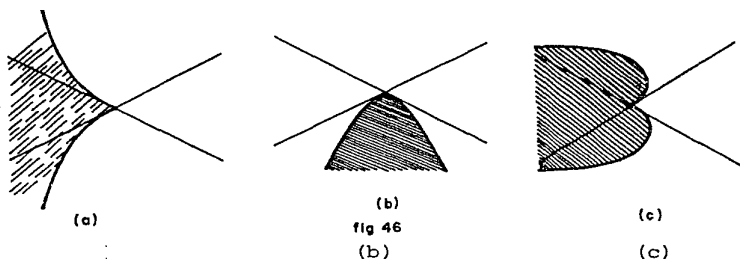


Fig.

Para precisarlo demos primero una orientación a la frontera de la región dirigida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, ahora coloquemos en el vértice P un primer vector tangente al arco que sale, cuyo sentido coincida con el sentido del arco que *sale* del vértice, [ver fig. (a)]; consideremos un segundo vector tangente en el vértice con *sentido opuesto* a un vector tangente al arco que entra en el vértice cuyo sentido coincide con el del arco que *entra* en el vértice, [véase fig. (b)]. Al ángulo dirigido en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj que parte del primer vector al segundo, se le define como el *ángulo en el vértice P de la región* [fig. (c)]. En un lado de la región podemos elegir cualquier punto y considerarlo como un nuevo vértice, en ese caso el ángulo en ese vértice es de 180° . Si el ángulo de un vértice de una región es mayor que 180° , decimos que es un *vértice entrante*.

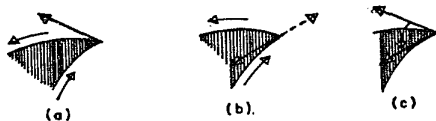


fig 47

(a)

(b)

(c)

Fig.

Con estas definiciones podemos formular el siguiente:

TEOREMA IV. *Dada una región regular R y un número $\delta > 0$, es posible dividir R en un número finito de subregiones σ con las siguientes propiedades:*

- a) *Cada subregión está acotada por tres arcos regulares.*
- b) *Ninguna subregión tiene un vértice entrante.*
- c) *La máxima cuerda de las subregiones es menor que δ .*

La triangulación se realiza primero cortando regiones triangulares en los vértices de R , luego cortando regiones triangulares a lo largo de los lados, lo que queda de R excluyendo esos pedazos es una región acotada por lados rectos, es decir un polígono, el cual se triangula fácilmente.

PRUEBA: Primero añadiremos un número finito de vértices a la frontera C de R de tal manera que el arco entre cualesquiera dos vértices adyacentes gire un ángulo menor que 15° , [fi. (a)]. Esto es posible por el Teorema I. Determinamos un número $n > 0$ que no exceda la distancia mínima entre cualesquiera dos lados no-adyacentes de C . Con radio r menor que el mínimo entre δ y $n/3$ describimos alrededor de cada vértice un círculo. Esos círculos no tendrán puntos en común y cada uno no será cortado por cualquier lado de C distinto de los lados que forman el vértice encerrado por el círculo.

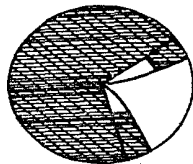
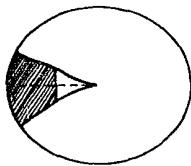
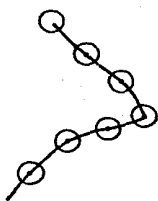


fig 48

Supongamos que el ángulo del vértice de la región en uno de esos círculos es no mayor que 60° [fig. (b)]. Entonces las tangentes a esos arcos en puntos dentro del círculo harán con la bisectriz del ángulo en el vértice, ángulos que no rebasan los 45° . Una perpendicular a la bisectriz en un punto interior a la región a una distancia $r/2$ del vértice, cortará de R una región σ con las propiedades requeridas. El resto de R tendrá un segmento de recta como parte de su frontera; los vértices en los extremos del segmento tendrán un ángulo cuya diferencia con un ángulo recto no es mayor que 45° .

Si el valor del ángulo del vértice dentro de un círculo es mayor que 60° , entonces trazamos a partir del vértice dos radios [fig. (c)], cada uno dentro de la región y cada uno haciendo un ángulo de 30° en el vértice con alguno de los lados que forman éste último. Entonces, cortamos dos porciones σ mediante dos rectas perpendiculares a los radios a una distancia $r/2$ del vértice, cada porción está acotada por un arco y dos segmentos de recta. El resto de R en una vecindad del vértice tiene una frontera poligonal.

Después de realizar los cortes en todos los vértices de R , la frontera C' de la región R' de R que resulta, tiene la propiedad de que sus arcos no giran un ángulo mayor que 15° y cada arco curvilíneo está unido en ambos extremos con segmentos de recta; los ángulos de los vértices formados por los extremos de los arcos curvilíneos y los segmentos de recta no son entrantes y difieren de un ángulo recto en no más que 45° . Ningún par de arcos curvilíneos de C' tienen puntos comunes. Ningún arco curvilíneo tiene puntos en común excepto en los extremos; con los segmentos rectos de la frontera de C' puesto que tales segmentos son interiores a los círculos y dentro de estos no es posible eso. Entonces, existe un número $n' > 0$ tal que cualquier arco curvilíneo de C' tie-

ne una distancia mayor que n' de cualquier lado no adyacente de C' , ya sea recto o curvilíneo.

Volvemos a agregar un número finito de vértices, ahora en los segmentos de C' tal que esos lados de C' sean divididos en partes cuyas cuerdas no excedan el más pequeño de los números δ o $n'/3$. Con las cuerdas de los subarcos como diagonales construimos rombos cuyos lados hagan con las cuerdas ángulos de 30° [fig.]. Como los arcos no se desvían de la dirección de sus cuerdas por más de 15° , los rombos no contienen puntos de los lados rectos de C' . Como cada rombo está a una distancia menor que $n'/3$ de su arco, ningún rombo tiene puntos en común con cualquier otro rombo que esté en otro lado diferente del lado primero. Finalmente, los rombos pertenecientes a un solo lado de C' no tienen puntos interiores comunes, puesto que los arcos cuyos extremos son los extremos de las diagonales de los rombos giran un ángulo menor que 15° .

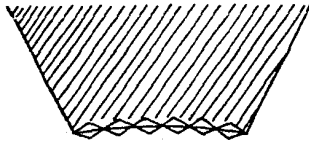


fig 49

Las regiones comunes a R' y los rombos son regiones regulares σ . Después de quitarlas, el resto de R' está acotado por un número finito de segmentos de rectas. Si prolongamos estos segmentos a través de R' cortarían la región poligonal en un número finito de polígonos convexos; cada uno de éstos puede ser triangulado uniendo sus vértices a un punto interior común mediante segmentos de recta. Si los triángulos

resultantes tienen su máxima cuerda mayor que δ , entonces pueden ser divididos en cuatro partes, uniendo los puntos medios de sus lados y repetimos este procedimiento todo lo necesario hasta que la cuerda máxima sea menor que δ , completándose así la triangulación de R .

Las regiones triangulares σ tienen propiedades adicionales, una de las cuales nos será útil y está enunciada en el siguiente

TEOREMA V. *Si A y B son cualesquiera dos puntos de una región arbitraria σ , entonces A y B pueden ser unidos por una curva regular γ cuyos puntos, excepto, quizá, los extremos, son puntos interiores de σ y cuya longitud no es mayor que $2c$, donde c es la longitud de la cuerda AB .*

Las regiones σ son de tres tipos, la construcción de γ variando de acuerdo al tipo. Primero las regiones que fueron cortadas de los vértices de R , [fig. (a)]. Esas regiones se pueden caracterizar si se toman los ejes de tal manera que el origen coincida con el vértice, y el eje x , con la bisectriz del ángulo en el vértice como sigue:

$$(a) \quad \sigma = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, \quad f(x) \leq y \leq \varphi(x), \quad \text{con } f(0) = \varphi(a) = 0 \\ f(x) < \varphi(x) \quad \text{para } 0 < x \leq a\}$$

Y donde $f(x)$ y $\varphi(x)$ son continuamente diferenciables en el intervalo cerrado $[0, a]$. Además, las curvas $y = f(x)$ y $y = \varphi(x)$ giran un ángulo menor de 15° .

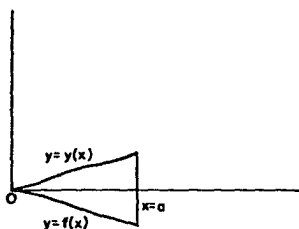
En segundo lugar tenemos las partes de los rombos que fueron cortados a lo largo de los lados [fig. (b)]. Elijiendo la cuerda del lado curvilíneo como eje X , podemos caracterizar σ como sigue:

$$(b) \quad \sigma = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, f(x) \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}} x\} \cup$$

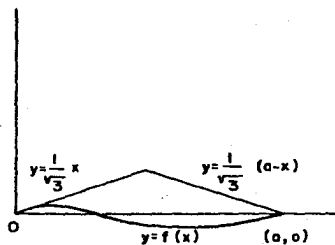
$$\{\frac{a}{2} \leq x \leq a, f(x) \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}(a-x)\} \quad \text{donde}$$

$$f(0) = f(a) = 0, f(x) < \frac{1}{\sqrt{3}} x, f(x) < \frac{1}{\sqrt{3}}(a-x) \quad \text{para}$$

$0 < x < a$, y donde $f(x)$ es continuamente diferenciable en el intervalo cerrado $[0, a]$. Además, la curva $y = f(x)$ gira un ángulo menor que 15° .



(a)



(b)

fig 50

Finalmente el tercer tipo es:

(c) σ está acotada por 3 líneas rectas.

PRUEBA: Primero reducimos el problema de construir γ al caso en que A y B son interiores a σ . Supongamos que A está en la frontera de σ ; excepto por el caso en que los lados son tangentes, siempre podemos trazar desde A un segmento de recta dentro de σ y tomar un punto A' en ese segmento a una distancia de $0.1c$ del punto A .

Si A es un vértice donde los lados son tangentes, σ debe ser del tipo (a), y A debe ser el origen en la representación dada. Podemos entonces trazar dentro de σ la curva regular

$$y = \frac{1}{2}(f(x) + \varphi(x))$$

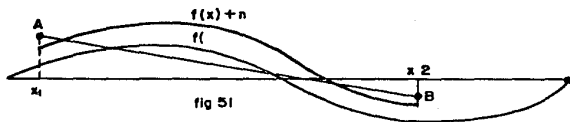
y tomar un punto A' sobre esa curva a una distancia menor que $0.1c$ de A . Si B está también en la frontera, elegimos de la misma manera un punto B' interior a σ . La cuerda $C' = A'B'$ no puede ser mayor que $1.2c$.

El teorema será probado si demostramos que es posible conectar A' y B' por una curva γ' cuya longitud sea menor que $1.8c$, y éste será el caso si su longitud es menor que $1.5c'$. Entonces, quitaremos las primas a A' , B' y demostraremos que cualquier par de puntos interiores A y B de σ pueden ser conectados por una curva regular γ enteramente interior a σ y cuya longitud sea menor o igual que $1.5c$, c siendo la longitud de AB .

Si σ es del tipo (c), hacemos γ igual a la cuerda AB . Si σ es del tipo (b) la cuerda AB no puede tener puntos en común con los lados que constituyen la parte recta de la frontera de σ y entonces servirá como γ , excepto en el caso que intersecte al lado curvilíneo de σ , es decir a la curva $y = f(x)$. Esto no puede ocurrir si A y B es vertical, así que AB tiene una representación $y = ax + b$, $x_1 \leq x \leq x_2$ si ella intersecta al lado dado por $y = f(x)$. Ahora bien, la función $ax + b - f(x)$ es positiva en los extremos x_1 y x_2 . Sea $\eta > 0$ menor que el mínimo de los valores de esta función en x_1 y x_2 y menor también que el mínimo de las diferencias:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} x - f(x) \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} (a - x) - f(x) \quad \text{para} \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

Entonces la curva $y = f(x) + \eta$ es interior a σ para $x_1 \leq x \leq x_2$



y los valores en x_1 y x_2 de $f(x) + n$ están por abajo de las abscisas de A y B , pero en algunos puntos intermedios entre x_1 y x_2 los puntos de la función están por arriba del segmento AB . Sean A' y B' las intersecciones de $f(x) + n = y$ con el segmento AB correspondiendo al mínimo y máximo de la x respectivamente. Tomamos como γ la unión del segmento AA' , el arco dado por $y = f(x) + n$ entre A' y B' y el segmento $B'B$. Entonces γ es una curva regular y todos sus puntos son interiores a σ y su dirección no se desvía de la del eje X en más de 15° , pues la recta AB es secante a la curva $y = f(x)$ y así es paralela a una tangente, lo mismo es cierto para el eje X . Entonces, la longitud de γ no excede a

$$c \sec 15^\circ < 1.5c$$

que es lo que se requería.

Si σ es del tipo (a), la misma cuerda AB servirá, excepto si intersecta uno o ambos arcos $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$. Si, por ejemplo, la cuerda AB intersecta a $f(x) = y$, entonces una porción de la cuerda AB puede ser sustituida por una curva $y = f(x) + n$, entre los puntos A' y B' de AB . Si las cuerdas AA' o $B'B$, o ambas son intersectadas por la curva $y = \varphi(x)$, porciones de tales cuerdas pueden ser sustituidas por una curva $y = \varphi(x) - n$. Tendremos entonces una curva regular γ enteramente dentro de σ conectando A y B , y cuya dirección no se

desvía del eje de las X en más de 45° , y su longitud, por lo tanto, no excede $\sqrt{2}c < 1.5c$, con lo cual queda probado el teorema.

Un *elemento de superficie regular* es un conjunto de puntos que, para alguna orientación de los ejes, admite una representación

$$z = f(x, y) \quad (x, y) \text{ en } R$$

donde R es una región regular del plano XY y donde $f(x, y)$ es continuamente diferenciable en R .

Llamamos a la anterior representación una *representación estándar*. La *frontera* de un elemento de superficie regular es el conjunto de todos sus puntos (x, y, z) , tales que (x, y) están sobre la frontera de R .

TEOREMA VI. *La frontera de un elemento de superficie regular E es una curva regular C .*

PRUEBA: Consideremos uno de los arcos regulares de la frontera de R . Como $f(x, y)$ sigue siendo continuamente diferenciable si rotamos el plano XY , podemos suponer que un arco γ de la frontera de R está dado por su representación estándar

$$y = \varphi(x) \quad a \leq x \leq b$$

donde $\varphi(x)$ tiene una derivada continua en el intervalo $[a, b]$. La porción correspondiente de C esta dada por:

$$y = \varphi(x), \quad z = f(x, \varphi(x)) \quad a \leq x \leq b,$$

y $f(x, \varphi(x))$ es claramente continua. Debemos probar que z tiene derivada continua con respecto a x en el intervalo $[a, b]$.

Sea (x_0, y_0) un punto de γ distinto de sus extremos y supongamos que los ejes han sido elegidos de tal manera que la región R está por arriba de γ en una vecindad de (x_0, y_0) .

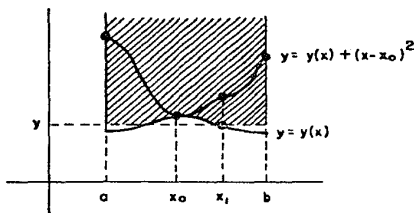


fig 52

Entonces, como la frontera de R no tiene autointersecciones la curva γ' definida por $y = \varphi(x) + (x - x_0)^2$, está dentro de R para x suficientemente cercanas a x_0 , excepto para $x = x_0$. Sea (x_1, y_1) un segundo punto de γ cercano a (x_0, y_0) y sea (x_1, y_2) el punto de γ' con la misma abscisa. Sea $z_0 = f(x_0, y_0)$, $z_1 = f(x_1, y_1)$ y $z_2 = f(x_1, y_2)$, entonces

$$z_1 - z_2 = \int_{y_2}^{y_1} \frac{\partial f(x_1, y)}{\partial y} dy = f_y(x_1, y') (y_1 - y_2) = -f_y(x_1, y') (x_1 - x_0)^2$$

donde hemos usado el teorema del valor medio para integrales y los valores $y_1 = \varphi(x_1)$ y $y_2 = \varphi(x_1) + (x_1 - x_0)^2$. (La notación f_y , f_x denota las parciales de f con respecto a y y a x , respectivamente). También integrando a lo largo de γ' obtenemos:

$$z_2 - z_0 = f(x_1, y_2) - f(x_0, y_0) = f(x_1, \varphi(x_1) + (x_1 - x_0)^2) - f(x_0, \varphi(x_0)) =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{df}{dx} dx = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} [\varphi'(x) + 2(x - x_0)] \right\} dx =$$

$$= f_x(x'', y'') (x_1 - x_0) + f_y(x'', y'') [\varphi'(x'') + 2(x'' - x_0)] (x_1 - x_0)$$

Sumando la parte izquierda de las últimas dos igualdades y dividiendo entre $(x_1 - x_0)$, determinamos que

$$\frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0} = f_x(x'', y'') + f_y(x'', y'') [\varphi'(x'') + 2(x'' - x_0)] - f_y(x_1, y') (x_1 - x_0)$$

Al tomar el límite cuando x_1 tiende a x_0 , el punto medio (x'', y'') tiende a (x_0, y_0) , y como $f(x, y)$ es continuamente diferenciable en R , sus derivadas parciales se aproximan a un límite, dicho límite puede ser considerado la definición de la derivada sobre la frontera de R . El resultado es

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi'(x)$$

Así, en los puntos de γ distintos de los extremos, z tiene una derivada con respecto a x que está dada por las reglas ordinarias de las funciones compuestas. De la forma del resultado, es claro que esa derivada coincide en el interior de $[a, b]$ con una función que es continua en el intervalo cerrado. Entonces, z tiene una derivada continua con respecto a x en el intervalo cerrado y la parte de C correspondiente a γ es un arco regular. Como C está hecha de un número finito de arcos regulares, adecuadamente ordenados, con sólo puntos extremos en común, C es una curva regular, como se quería probar.

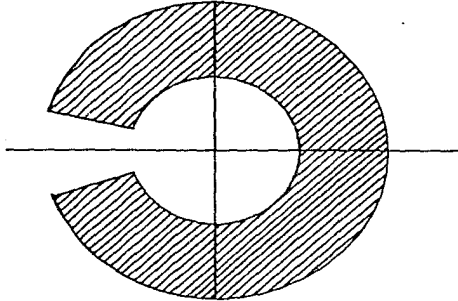
Hemos visto que un arco regular admite una representación estándar con cualquier orientación de los ejes, siempre que en ningún punto la curva sea perpendicular al eje X .

Una situación semejante no es posible para elementos de superficie regular. Consideremos, por ejemplo, la superficie helicoidal:

$$z = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad -\pi < z \leq \pi, \quad (x, y) \text{ en } R$$

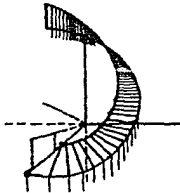
donde R está dado en coordenadas polares por

$$-\pi + \alpha \leq \varphi \leq \pi - \alpha \quad 1 \leq \rho \leq 2 \quad (\alpha > 0)$$



Region R

fig 53



Si α es muy pequeña, es posible inclinar los ejes ligeramente de tal manera que los nuevos ejes cortan el elemento de superficie dos veces, así que una representación estándar no es posible con la nueva orientación de los ejes.

Es verdad, sin embargo, que cualquier elemento de superficie regular puede ser dividido en un número finito de elementos de superficie regular, tal que cada uno admite una re-

presentación estándar, con bastante margen de elección en la orientación de los ejes. Estudiaremos esta cuestión, pero antes probaremos la desigualdad de Schwarz que utilizaremos más adelante.

Desigualdad de Schwarz. Sea $f(x)$ y $\varphi(x)$ dos funciones reales, continuas por pedazos en $[a, b]$. Entonces:

$$\left[\int_a^b f(x) \varphi(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b \varphi^2(x) dx.$$

PRUEBA: Introduzcamos dos parámetros reales, λ y μ , y observemos que la siguiente integral es siempre no negativa.

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu \varphi(x)]^2 dx.$$

Entonces, la función cuadrática

$$\lambda^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2\lambda\mu \int_a^b f(x) \varphi(x) dx + \mu^2 \int_a^b \varphi^2(x) dx$$

es irreducible sobre los reales, o sea que no puede descomponerse en factores reales distintos, pues en otro caso λ y μ podrían ser elegidos de tal manera que esos factores tengan signos opuestos, lo cual llevaría a que esa forma cuadrática sería negativa, llegando a una contradicción. Dicho de otra manera, la ecuación

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \int_a^b f(x) \varphi(x) dx + \int_a^b \varphi^2(x) dx = 0$$

no tiene raíces reales distintas, luego, el discriminante debe ser menor o igual a cero, pero eso significa que

$$\left[2 \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \right]^2 - 4 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b \varphi^2(x) dx \leq 0,$$

de donde obtenemos la desigualdad deseada.

TEOREMA VII. *Cualquier elemento de superficie regular E puede ser dividido en un número finito de elementos de superficie regular \underline{e} , cada uno con la propiedad de que si cualquier sistema de ejes es tomado, en el que el eje z no haga un ángulo de más de 70° con cualquier normal a \underline{e} , \underline{e} admite una representación estándar con este sistema de ejes.*

PRUEBA: Sea $z = f(x, y)$ y (x, y) en R , la representación estándar de E ; sea $\delta > 0$ tal que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son cualesquiera dos puntos de R cuya distancia es menor o igual a δ , entonces

$$(*) \quad (f_{x_2} - f_{x_1})^2 + (f_{y_2} - f_{y_1})^2 < \frac{1}{16} \cos^2 75^\circ$$

(Usamos la notación f_{x_2} como $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_2, y_2)}$; $f_{x_1} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)}$; ..., etc)

Esa elección de δ es posible, pues las derivadas parciales de $f(x, y)$ son uniformemente continuas en R . Entonces, triangulamos R de acuerdo a los resultados del Teorema IV, de tal manera que la máxima cuerda de las subregiones σ de R sea menor que δ . Entonces el elemento de superficie e

$$z = f(x, y) \quad (x, y) \text{ en } \sigma$$

es regular, siendo σ cualquiera de las subregiones de la triangulación de R . Demostraremos que e tiene las propiedades que establece el teorema.

Primero acotaremos el ángulo que hace cualquier segmento de recta \overline{AB} con el vector normal a e en el punto A. Sea A con coordenadas (x_1, y_1, z_1) y B, (x_2, y_2, z_2) ; denotemos

con C la longitud de la cuerda \overline{AB} . Los cosenos directores de la cuerda y de la normal a e en A son:

$$\frac{x_2 - x_1}{C}, \quad \frac{y_2 - y_1}{C}, \quad \frac{z_2 - z_1}{C}$$

y

$$\frac{-f_{x_1}}{\sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}}, \quad \frac{-f_{y_1}}{\sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{y_1}^2}}$$

entonces el ángulo agudo entre el vector normal y el segmento \overline{AB} está dado por:

$$\cos(c, n) = \left| \frac{(z_2 - z_1) - (x_2 - x_1)f_{x_1} + (y_2 - y_1)f_{y_1}}{c \sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{y_1}^2}} \right|$$

Los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pueden conectarse, por el Teorema V, por una curva regular γ interior, excepto, posiblemente, en los extremos a o, y de longitud no mayor a $2c$. Sean $x = x(s)$, $y = y(s)$ las ecuaciones paramétricas de γ , s la longitud de arco, medida desde (x_1, y_1) a algún punto de γ . Entonces $x(s)$, $y(s)$ y $z = f(x(s), y(s))$ son continuamente diferenciables en el intervalo cerrado $[0, \ell]$, ℓ siendo la longitud de γ . Entonces

$$z_2 - z_1 = \int_0^\ell \frac{dz}{ds} ds = \int_0^\ell [f_{x_1} x'(s) + f_{y_1} y'(s)] ds.$$

Los términos restantes en el numerador de la expresión para $\cos(c, n)$ pueden también ser expresados como una integral sobre γ . Como f_{x_1} y f_{y_1} son constantes y

$$x_2 - x_1 = \int_0^\ell x'(s) ds, \quad y_2 - y_1 = \int_0^\ell y'(s) ds$$

entonces

$$(x_2 - x_1) f_{x_1} + (y_2 - y_1) f_{y_1} = \int_0^l [f_{x_1} x'(s) + f_{y_1} y'(s)] ds$$

y

$$\cos(c, n) = \frac{\left| \int_0^l [(f_x - f_{x_1}) x'(s) + (f_y - f_{y_1}) y'(s)] ds \right|}{c \sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{y_1}^2}}$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz a la integral del primer término del numerador tenemos que:

$$\left[\int_0^l (f_x - f_{x_1}) x'(s) ds \right]^2 \leq \int_0^l (f_x - f_{x_1})^2 ds \int_0^l x'^2(s) ds < \frac{1}{16} \cos^2 75^\circ \ell \cdot \ell;$$

esta desigualdad es consecuencia de la desigualdad (*) anterior y del hecho de que $|x'(s)| \leq 1$. Entonces

$$\left| \int_0^l (f_x - f_{x_1}) x'(s) ds \right| < \frac{1}{4} \cos 75^\circ.$$

Una desigualdad semejante se cumple para el segundo término y se tiene que:

$$\cos(c, n) < \frac{\ell}{2c} \cos 75^\circ \leq \cos 75^\circ$$

donde $\ell \leq 2c$. Concluimos que el ángulo entre cualquier cuerda de e y la normal a en un extremo de la cuerda, difiere de un ángulo recto en menos de 15° .

Supongamos ahora que seleccionamos un sistema de ejes (ξ, η, ζ) sujeto a la restricción de que el eje ζ no hace un ángulo mayor que 70° con cualquier normal a e (figura). Entonces ninguna cuerda de e puede hacer con el eje ζ un ángulo menor que 5° y, por lo tanto, ninguna paralela al eje ζ puede intersectar a la superficie e en más de un punto.

Esto significa que si τ es el conjunto de puntos que son la proyección de e en el plano (ξ, η) y (ξ, η, ζ) son las coordenadas de un punto variable en e ; $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$ es una función univaluada de ξ y η en τ .

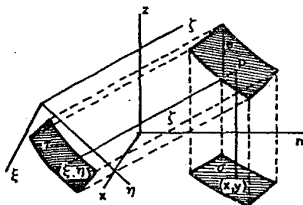


fig 53

Ahora, nuestro objetivo es probar que la ecuación

$$\zeta = \varphi(\xi, \eta) \quad \text{con} \quad (\xi, \eta) \text{ en } \tau$$

es una representación estándar de e .

La correspondencia entre los puntos $P = (x, y)$ de σ y los puntos $P' = (\xi, \eta)$ de τ , que son las proyecciones del mismo punto P de e , es *inyectiva*, ya que cada paralela al eje z intersecta a e en un sólo punto, al igual que cada paralela al eje ζ . Dicha correspondencia también es continua. De las ecuaciones de transformación de coordenadas:

$$\begin{aligned}
 \xi &= a + l_1x + m_1y + n_1f(x, y) \\
 \eta &= b + l_2x + m_2y + n_2f(x, y) \\
 \zeta &= c + l_3x + m_3y + n_3f(x, y)
 \end{aligned}
 \quad (**)$$

vemos que ξ y η son funciones continuas de x y y , puesto que $z = f(x, y)$ es continua. Para probar que x y y son fun-

ciones continuas de ξ , η se requiere probar que $z = \varphi(\xi, \eta)$ es una función continua de ξ y η en la región τ , pues para x y y hay un sistema de ecuaciones semejante a (**), donde x , y y z dependen de ξ , η y z .

Supongamos que $z = \varphi(\xi, \eta)$ no es continua en τ ; esto significa que existe un punto $P_0(\xi_0, \eta_0)$ en τ y un número $\alpha > 0$, tal que en cualquier vecindad de P_0 hay puntos en que $z = \varphi(\xi, \eta)$ difiere de $z_0 = \varphi(\xi_0, \eta_0)$ en una distancia mayor que α . Sea P_1, P_2, P_3, \dots , una sucesión infinita de números que converge a P_0 . Los puntos correspondientes en e tienen al menos un punto límite, ésto por el teorema de Bolzano - Weierstrass. Este punto límite está en e , puesto que e es cerrado, y su ordenada z' está a una distancia de z mayor que α . Esto sólo puede suceder si e tiene una cuerda paralela al eje z juntando los puntos (ξ_0, η_0, z') y (ξ_0, η_0, z_0) . Pero esto no puede pasar, entonces $\varphi(\xi, \eta)$ es continua en τ y la correspondencia es continua en ambos sentidos.

En la correspondencia entre los conjuntos cerrados y acotados σ y τ , se tiene que puntos interiores corresponden a puntos interiores (no probaremos este resultado), se sigue de esto que los puntos frontera de σ y τ también se corresponden.

Por la correspondencia de puntos interiores, el interior de τ es un dominio y por tanto τ es una región cerrada. Del Teorema III, se sigue que la frontera de τ está formada por un número finito de arcos regulares. Estos están ordenados, de acuerdo a la frontera de e , de tal manera que cada uno tiene un punto extremo en común con el siguiente, y ningún par tiene puntos en común distintos de los extremos, pues e no tiene cuerdas paralelas al eje z . Entonces τ es una región regular.

Hemos visto que $z = \varphi(\xi, \eta)$ es univaluada y continua en

τ . Sólo falta probar que es continuamente diferenciable. Las ecuaciones que determinan las coordenadas ξ , η , ζ de p son ecuaciones de cambio de unos ejes ortogonales a otros y están dadas por (**).

Las primeras dos, de acuerdo al teorema de la función implícita, determinan x y y como funciones continuas de ξ , η . La tercera entonces determina la función $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$. Hemos visto que las primeras dos ecuaciones tienen una solución correspondiente a cualquier punto interior (ξ, η) de τ . Falta verificar que el jacobiano no se anula. Este tiene el va
lor:

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_1 + \eta_1 f_x & m_1 + \eta_1 f_y \\ \ell_2 + \eta_2 f_x & m_2 + \eta_2 f_y \end{vmatrix} \\ &= (\ell_1 + \eta_1 f_x)(m_2 + \eta_2 f_y) - (\ell_2 + \eta_2 f_x)(m_1 + \eta_1 f_y) \\ &= (\ell_1 m_2 - m_1 \ell_2) + (\ell_1 \eta_2 - \ell_2 \eta_1) f_y + (\eta_1 m_2 - \eta_2 m_1) f_x \\ &= \begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 & \eta_1 \\ \ell_2 & \eta_2 \end{vmatrix} f_y - \begin{vmatrix} m_1 & \eta_1 \\ m_2 & \eta_2 \end{vmatrix} f_x \end{aligned}$$

pero cada uno de los determinantes que aparecen en la última parte de esta igualdad son menores del determinante de la matriz asociada a (**), es decir, de la matriz:

$$\begin{bmatrix} \ell_1 & m_1 & \eta_1 \\ \ell_2 & m_2 & \eta_2 \\ \ell_3 & m_3 & \eta_3 \end{bmatrix}$$

Pero en las matrices ortogonales que mandan sistemas de ejes positivamente (o negativamente) orientados en sistemas positivamente (negativamente) orientados resulta que cada menor es igual a su cofactor, es decir, que se cumple las ecuaciones:

$$n_3 = \begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{vmatrix} \quad m_3 = \begin{vmatrix} \ell_1 & n_1 \\ \ell_2 & n_2 \end{vmatrix} \quad \ell_3 = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

de donde el jacobiano es:

$$J = -\ell_3 f_x - m_3 f_y + n_3 = (\ell_3, m_3, n_3) \cdot (-f_x, -f_y, 1)$$

pero esto lo podemos expresar así:

$$J = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cos(\hat{n}, \hat{\zeta})$$

donde \hat{n} es el vector normal a la superficie y $\hat{\zeta}$ el vector unitario en la dirección del eje ζ del sistema (ξ, η, ζ) . Pero en ángulo entre \hat{n} y $\hat{\zeta}$ no es mayor que 70° y por tanto el coseno de ellos es distinto de cero en todo punto de e .

El teorema de la función implícita nos asegura entonces que las derivadas de $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ existen en los puntos interiores de τ y que se calculan de acuerdo a las reglas ordinarias del cálculo. De (***) obtenemos que

$$1 = (\ell_1 + n_1 f_x) \frac{\partial x}{\partial \xi} + (m_1 + n_1 f_y) \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$0 = (\ell_2 + n_2 f_x) \frac{\partial x}{\partial \xi} + (m_2 + n_2 f_y) \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = (\ell_3 + n_3 f_x) \frac{\partial x}{\partial \xi} + (m_3 + n_3 f_y) \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

de estas igualdades, eliminando las derivadas de x y de y obtenemos:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = - \frac{-\ell_1 f_x - m_1 f_y + n_1}{-\ell_3 f_x - m_3 f_y + n_3}$$

con una expresión correspondiente para la derivada con respecto a η . Como el denominador, que es el jacobiano de la transformación, no se anula en la región cerrada τ , entonces el carácter continuamente diferenciable de $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ en τ se sigue de que $z = f(x, y)$ es continuamente diferenciable en σ . Así queda completa la prueba del teorema VII.

6. EXTENSION DEL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA.

Hemos llegado a lo que es el objetivo de este capítulo, es decir, al punto en que podemos extender el tipo de regiones para las cuales la fórmula, que es la afirmación del teorema de la divergencia, es verdadera. La base del argumento que utilizaremos es la prueba del teorema para regiones normales dada en el capítulo III, de las conclusiones de ese capítulo y de la observación de que la suma de regiones normales son un tipo especial de regiones regulares podemos formular lo que llamaremos *primer principio de extensión*:

*El Teorema de la divergencia es válido para cualquier región regular que sea la suma de un número finito de regiones normales y cualquier campo (X, Y, Z) donde cada componente es continuamente diferenciable en cada una de las regiones normales. Si fuera posible mostrar que las regiones regulares generales son una suma finit*ta de regiones normales, el objetivo perseguido sería alcanzado al parecer, no obstante, ese plan ofrece serias dificultades y es más fácil proceder a través de un *segundo principio de extensión*:

El Teorema de la divergencia es válido para una región regular R si a cualquier $\epsilon > 0$, le corresponde una región regular R' , o un conjunto R' de un número finito de regiones regulares sin puntos comunes distintos de vértices o puntos de los lados, relacionadas como sigue:

- a) *Todo punto de R' está en R .*
- b) *Los puntos de R que no están en R' pueden ser encerrados en regiones cuyo volumen total es menor que ϵ .*
- c) *Los puntos de la frontera S de R que no son puntos de la frontera S' de R' son partes de superficies de área total menor que ϵ .*
- d) *El teorema de la divergencia es válido para R' .*

Suponemos, además, que las funciones X , Y , Z tienen de-

rivadas parciales de primer orden continuas en R.

Para establecer el principio, empezaremos de la identi-

$$(***) \quad \iiint_{R'} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV = \iint_{S'} (Xl + Ym + Zn) dS,$$

que es válida por hipótesis. Como X, Y, Z son continuamente diferenciables en R, hay un número M tal que esas funciones y sus derivadas parciales de primer orden son todas menor, en valor absoluto, que M en R. Entonces,

$$(****) \quad \left| \iiint_R \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV - \iiint_{R'} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV \right| = \\ \left| \iiint_{R-R'} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV \right| \leq \iiint_{R-R'} 3M dV < 3M\epsilon;$$

también,

$$(***) \quad \left| \iint_S (Xl + Ym + Zn) dS - \iint_{S'} (Xl + Ym + Zn) dS \right| = \\ \left| \iint_{\sigma} (Xl + Ym + Zn) dS - \iint_{\sigma'} (Xl + Ym + Zn) dS \right| \leq \\ \iint_{\sigma} 3M dS + \iint_{\sigma'} 3M dS < 6M\epsilon$$

donde σ es la parte de S que no está en S' y σ' la parte de S' que no está en S. Se sigue de la ecuación (***) y de las desigualdades (***) y (***) que

$$\left| \iiint_R \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV - \iint_S (Xl + Ym + Zn) dS \right| < 9M\epsilon$$

pero, como la parte izquierda de la desigualdad es indepen-

diente de ϵ , y ϵ es arbitraria, la parte izquierda de la desigualdad es igual a cero y entonces, el teorema de la divergencia se cumple para R , como se quería demostrar.

APROXIMACION DE UNA REGION REGULAR GENERAL POR REGIONES NORMALES. Abordaremos ahora el problema de aproximar cualquier región regular por regiones normales. Primero, dividimos los elementos de superficie regular que forman la superficie S de R en elementos de superficie regular con las siguientes condiciones:

- a) No hay un par de vectores normales en cada elemento de superficie que hagan un ángulo mayor que 15° .
- b) Cada elemento de superficie regular admite una representación estándar con cualquier orientación de los ejes tal que el eje Z no haga, con ninguna normal a la superficie, un ángulo agudo mayor que 70° .

La primera condición puede cumplirse debido a la continuidad uniforme de los cosenos directores de la normal, en las coordenadas x y y y de la representación estándar y , la segunda condición, se puede satisfacer en virtud del Teorema VII.

Llamaremos a esos elementos más pequeños las *caras* de S , a los arcos regulares que las acotan *lados* de S y a los puntos extremos de esos arcos los *vértices* de S . Sea N la suma de el número de caras, el número de lados y el número de vértices de toda la región R .

Introduciremos un sistema Σ_n de bolas, no con el propósito de subdividir R , sino como una ayuda para establecer las desigualdades del segundo principio de extensión. Sobre cada lado de S (S es la frontera de la *region* R) marcamos puntos

$P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ tal que las cuerdas $P_{i-1}P_i$ ($i=1,2,\dots,k-1$) tienen longitud η comenzando por un extremo de un lado hasta llegar a una distancia menor o igual que η del otro extremo. Alrededor de cada uno de esos puntos y alrededor del segundo extremo del lado, trazamos esferas de radio η . Esto lo hacemos para todos los lados de S y consideramos el sistema de bolas Σ_η cuyas fronteras son las esferas trazadas. La propiedad importante que nos interesa del sistema Σ_η es que contenga todos los lados de S . Para que esto se cumpla debemos imponer ciertas condiciones a η ; en primera elegimos η de tal manera que ningún lado, entre centros sucesivos de las esferas, se desvía de la dirección de su cuerda por más de 15° ; esta elección de η es posible en virtud del Teorema II; ya que ningún arco puede desviarse de su cuerda en más de lo que se desviaría si constantemente hiciera el ángulo máximo permitido, entonces todos los puntos del arco están a una distancia de la cuerda no mayor que

$$\frac{\eta \tan 15^\circ}{2}$$

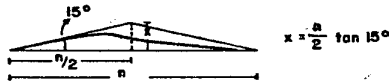


fig 54

Pero cualquier pareja de esferas sucesivas contiene en su interior todos los puntos cuyas distancias a la cuerda que une los centros son menores que $\frac{\eta}{2} \tan 60^\circ$; como $\tan 15^\circ < \tan 60^\circ$, cualquier punto de un lado es interior a al

guna esfera de Σ_η

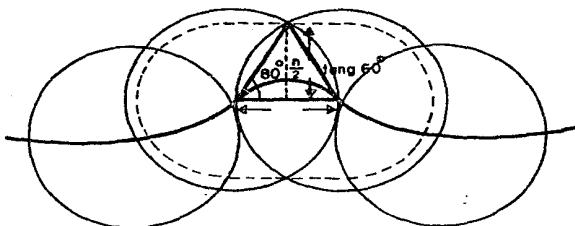


fig 55

Necesitamos una cota superior para el volumen de las bolas del sistema Σ_η y también una para el área total de un sistema de círculos máximos, tomando para cada esfera tantos círculos máximos como caras haya que tengan puntos interiores a la esfera.

El número de bolas que tienen su centro en un lado, esto es, el número de vértices del polígono que conecta centros sucesivos, no es mayor que la longitud del polígono dividido entre η más dos, pues a lo más un lado del polígono es menor que η en longitud. Si l es la longitud del lado más grande de la superficie, el número de esferas con centro sobre cualquier lado no excede a $(\frac{l}{\eta}) + 2$. Así, el número total de esferas no es mayor que $3N(\frac{l}{\eta})$, y si hacemos $N_1 = 4\pi Nl$, el volumen total de las bolas de Σ_η no es mayor que $N_1\eta^2$. La suma de las áreas de un sistema de círculos máximos, uno para cada esfera es $\frac{3}{\eta}$ veces el volumen considerado, es decir $3N_1\eta$. Como el número de caras con puntos interiores a cualquier esfera es menor que N , si escribimos $N_2 = 3NN_1$, entonces el área de un sistema de círculos máximos

de Σ_n , tantos como caras haya en S con puntos en la bola, no rebasa $N_2 n$.

Ahora dividiremos R . Notemos que, ya que los lados son interiores a Σ_n , la distancia entre las porciones fuera de Σ_n de cualquier par de caras diferentes de S , tiene un mínimo positivo k , pues, en caso contrario, dos caras tendrían al menos un punto en común no perteneciente a ningún lado.

Sea a un número positivo, tal que $\sqrt{3}a < \frac{k}{3}$ y $\sqrt{3}a < n$.

Empezando con una de las caras f_1 de S , y con alguna normal a esta cara como diagonal, construimos una red cúbica de lado a , cubriendo todo el espacio, por medio de tres conjuntos de planos paralelos, cada pareja de planos paralelos sucesivos separados por una distancia a . Denotemos con C_1 los cubos de esta red que tienen puntos de f_1 en su interior o en su frontera. Descartamos todos los otros cubos de la red. De la misma forma construimos una red para cada una de las otras caras y consideramos solamente los cubos que tienen puntos en común con la cara correspondiente. Obtenemos así un conjunto C_1, C_2, \dots, C_n de conjuntos de cubos, que juntos contienen todos los puntos de S y ningún cubo queda libre de puntos de S . La porción K de R que no es interior a ninguno de esos cubos consiste de una o más regiones acotadas por ca ras planas.

Clasificaremos los cubos C_1, C_2, \dots , de acuerdo a su relación con el sistema Σ_n de bolas construidas anteriormente; sea:

El conjunto C' de cubos ninguno de los cuales tiene puntos sobre o dentro de cualquiera de las bolas de Σ_n y, el conjunto C'' de cubos cada uno de los cuales tiene al menos un punto sobre o dentro de alguna bola de Σ_n .

Ninguna pareja de cubos de C' tienen puntos interiores

en común, porque si dos cubos pertenecen a la misma cara de S , ellos pertenecen a la misma red y están separados por un plano de la red. Si dos cubos de C' pertenecen a caras diferentes, cada uno contiene un punto de cada cara, dichos puntos están separados por una distancia mayor o igual a k y ésta es mayor que tres veces la diagonal de los cubos. Ningún cubo de C' tiene un punto interior en K .

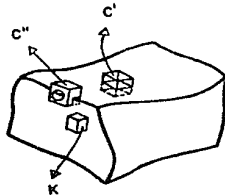


fig 56

La región o regiones K junto con las porciones de R en los cubos C' , constituye una región o un conjunto de regiones, que llamaremos R' , que aproxima a R en el sentido del segundo principio de extensión. Probaremos que R' está formada por un número finito de regiones normales y que η puede ser elegida de tal manera que R' sea una aproximación arbitrariamente cercana de R .

Es simple mostrar que K está hecha de regiones normales, pues si sus planos que la acotan son extendidos indefinidamente, ellos la dividen en un número finito de poliedros convexos los cuales son regiones normales.

Sea r la parte de R en uno de los cubos C del conjunto C' . Si elegimos los ejes coordenados de tal manera que coincidan con tres lados, adecuadamente elegidos, del cubo C , la cara f de S que interseca \bar{C} tiene un algún punto una normal cuyos cosenos directores forman el vector

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Como f gira a lo más en 15° , ninguna de sus normales hace con cualquier eje coordenado un ángulo mayor que

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 15^\circ < 70^\circ .$$

Entonces f admite una representación estándar con la orientación que ha sido elegida para los ejes, más aún, no importa que eje es elegido como eje Z . Se sigue que cada cara de C cortada por f está separada en dos regiones planas, separadas por un sólo arco regular. Además, como la normal a f hace un ángulo siempre no mayor que 70° con cualquier eje coordenado, la normal al arco en el plano nunca hace un ángulo mayor que 70° con un lado de C en el plano. Así, el arco en que f corta a una cara de C es siempre no paralelo a un lado de esa cara, y no puede cortar un lado dos veces.

Si f no contiene puntos interiores de C , o no hay puntos de R interiores a C y el cubo puede ser descartado, o todo el cubo pertenece a R y es una región normal. Suponga que f corta la cara $z=a$ de C pero no la cara $z=0$. Entonces la proyección en el plano XY de la porción de f en C es una región regular τ al igual que el resto τ' de la cara de C en este plano (se entiende que la frontera común de τ y τ' es considerada en ambos conjuntos). Como la parte de f en C es un elemento de superficie regular, las condiciones (a) y (b) [véase la definición de región normal en la pág.] para regiones normales se satisfacen en este caso.

Si f corta la cara inferior pero no la cara superior de C , la situación es la misma, como se ve si invertimos el sentido de los ejes. Si f no interseca ninguna de esas caras, entonces su proyección al plano XY es un cuadrado y las condiciones (a) y (b) para regiones normales se satisfacen nuevamente. Si f corta a ambas caras, es decir a la cara superior y a la inferior, la proyección de la parte de f en C

al plano XY está acotada por dos arcos regulares y a lo más cuatro segmentos de recta, formando una curva regular, la única situación que podría causar problemas es que los arcos regulares que son el resultado de la proyección, tuviera puntos comunes distintos de los extremos, pero ello significaría que f tiene una cuerda vertical, lo cual no es posible. El resto de la cara de C en el plano XY consiste también de regiones regulares. Así en este caso también r satisface las condiciones (a) y (b) para regiones normales. Y como hemos considerado las posibilidades con respecto a la dirección del eje Z , que puede tener cualquiera de las tres direcciones perpendiculares de los lados de C , entonces la condición (c) para regiones normales también se satisface. Entonces R' está enteramente formada por regiones normales y entonces el teorema de la divergencia es cierto para su suma R' . Así la primera parte del plan de la demostración está terminado.

Ahora estudiaremos la cercanía de la aproximación de R' a R . Sea $\Sigma_{z\eta}$ el sistema de bolas obtenidas del sistema Σ_η duplicando el radio pero conservando los centros. Entonces todos los puntos de R que no están en R' caen dentro de las bolas del sistema $\Sigma_{z\eta}$, pues ellos están en cubos del conjunto C'' que contiene puntos de las bolas de Σ_η , y como las diagonales de esos cubos son menores que η , todos los cubos de C'' están dentro de $\Sigma_{z\eta}$. Pero el volumen total de las bolas de $\Sigma_{z\eta}$ es 8 veces el del sistema Σ_η y entonces no es mayor que $8N_1\eta^2$. Así el volumen de la parte de R que no está en R' es menor que ϵ si $\eta < \sqrt{\frac{\epsilon}{8N_1}}$.

La parte σ de la frontera S de R que no es una parte de la frontera S' de R' también está dentro del sistema de esferas $\Sigma_{z\eta}$ puesto que R y R' coinciden fuera de esas bolas. Una cota para el área de la porción de una sola cara de S dentro de una de esas bolas puede encontrarse considerando

el hecho de que su proyección sobre su plano tangente en el centro de la bola tiene un área menor o igual que la de un círculo máximo, y como sus normales cambian de dirección en no más de 15° , el área de la parte de la cara dentro de la bola es menor o igual que el área de un círculo máximo multiplicada por $\sec 15^\circ$. Así, el área de un sistema de círculos máximos, cada uno de radio $z\eta$, tantos círculos como para cada bola hay caras de S con puntos en la bola, no es mayor que $4N_2\eta$, por tanto, el área total de σ no será mayor que $4N_2\eta \sec 15^\circ$. Así si $\eta < \frac{\epsilon \cos 15^\circ}{4N_2}$, el área de σ será menor que ϵ .

Finalmente el área de la porción σ' de S' que no está en S puede ser estimada de manera semejante. Observemos que σ' es una parte de las caras de los cubos del conjunto C'' , estos últimos están totalmente contenidos en el sistema de bolas $Ez\eta$. Consideremos todos los cubos que intersectan a una sola cara de S , es claro que hay a lo más uno de esos cubos sobre una sola diagonal de la red correspondiente, sin considerar a aquellos que sólo tienen un punto en común con R , es decir, consideremos un cubo cualquiera del conjunto C'' que tenga puntos de una cara fija de S , ese cubo pertenece a toda una red de cubos uno de los cuales tiene una diagonal igual a la normal a una cara de S , de todos los cubos de esa red que tienen una diagonal común con el cubo considerado solamente éste tiene puntos de esa cara de S , si descartamos a aquellos cubos que sólo tienen un punto en común con R . Todas las diagonales de esa red paralelas a la diagonal considerada cortan a un plano ortogonal a ellas en un conjunto de puntos que constituyen los vértices de una red de triángulos equiláteros.

Cada punto de un triángulo puede tener sobre él un cubo de los que intersectan a la cara de S por cada red diagonal que pasa por sus vértices y por tanto no más de tres cubos.

Así la proyección de las caras de los cubos correspondientes a una sola cara de S , sobre un plano perpendicular a la diagonal que es en algún punto normal a la cara, puede cubrir una porción de este plano en a lo más seis veces (dos caras por cada cubo). La secante del ángulo entre las caras de los cubos y este plano es $\sqrt{3}$. Entonces si multiplicamos por $6\sqrt{3}$ la expresión para el área del sistema de círculos máximos tendremos una cota para el área de σ' . Esa cota es

$$6\sqrt{3} \cdot 4N_2\eta = 24\sqrt{3} N_2\eta.$$

Si $\eta < \frac{\epsilon}{24\sqrt{3} N_2}$ el área de σ' será menor que ϵ .

De esta manera *todas* las condiciones que se requieren por el segundo principio de extensión para la región R son satisfechas si R es una región regular, obteniendo que:

El teorema de la divergencia se cumple para cualquier región regular R con funciones X, Y, Z continuamente diferenciables en R .

B I B L I O G R A F I A

- [1] Apostol, T. M,
Mathematical Analysis
Addison-Wesley Publishing Company Inc.
Massachusetts. Palo Alto, London, 1965.
- [2] Budak, B. M.; Fomin, S.V.
Multiple Integrals, Field Theory and Series.
Mir Publishing, Moscú, 1973.
- [3] Courant, Richard
Differential and Integral Calculus, V. II.
Wiley - Interscience.
- [4] Einstein, Albert; Infeld, Leopold.
La Física Aventura del Pensamiento.
Editorial Losada, S. A., Buenos Aires, 1939.
- [5] Fulks, Watson
Cálculo Avanzado
Editorial Limusa, México, 1973.
- [6] Kellogg, Oliver Dimon
Foundations of Potential Theory.
Dover Publications, Inc. New York, 1953.
- [7] Landau, L.; Ajeizer, A.; Lifshitz, E.
Curso de Física General.
Editorial Mir, Moscú, 1973.
- [8] MacMillan, William Duncan
The Theory of The Potential.
Dover Publications, Inc. New York, 1958.
- [9] Marsden, Jerold E.; Tromba, Anthony J.
Cálculo Vectorial
Fondo Educativo Interamericano, S.A. E.U.A., 1981.
- [10] Osgood, William F.
Advanced Calculus.
The MacMillan Company, New York, 1936.
- [11] Postom, Tim; Stewart Ian.
Catastrophe Theory and its Applications.
Pitman, London, 1978.