2 ej.

36

U N I V E R S I D A D   N A C I O N A L   A U T O N O M A

D E   M E X I C O

FACULTAD DE CIENCIAS

DESARROLLO DE ALGUNOS TEMAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CALCULO EN EL C.C.H.

T E S I S

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

Presenta

MA. DE LOURDES ROMERO MIRANDA

México, D.F.

1986.

I N D I C E

INTRODUCCION

Es de todos conocido que la materia más tediosa para los alumnos es el estudio de las Matemáticas; lo cual creo que es debido, en parte, a que no tienen conceptos claros ni precisos, ni tampoco puntos de referencia definidos y en consecuencia esto ocasiona que manejen un cúmulo de conocimientos sin sistematizar ni razonar.

Por lo anterior en este trabajo de tesis se pretende introducir un método que despierte el interés del alumno por la materia, partiendo de ejemplos conocidos para ellos con el fin de que tengan puntos de referencia más claros. Además se pretende tener su participación en todo momento con el objetivo de que a partir de conceptos adquiridos, ellos mismos descubran, desarrollen o recuerden métodos que les ayuden a comprender nuevos conceptos.

Este trabajo va dirigido a alumnos del CCH que cursan el IV semestre, por lo que se presenta de una manera sencilla y metódica sin muchos formalismos.

Cada sección consta de 3 partes esencialmente, además de una breve introducción y conclusión.

En una primera parte se da un bosquejo histórico acerca del tema con la finalidad de que el alumno ubique y se dé una idea de como ha ido evolucionando éste dentro del proceso histórico de la Matemática.

En una segunda parte se plantean problemas que dan origen a la formalización de conceptos, definiciones y métodos para su solución.

Finalmente en una tercera parte se plantean fichas ó talleres que pretenden que el alumno induzca la fórmula o método para resolver ciertos problemas.

D E R I V A D A

B O S Q U E J O

H I S T O R I C O

BOSQUEJO HISTORICO.

Desarrollo Histórico sobre las ideas de movimiento.

Fueron los griegos los primeros en preocuparse seriamente por el movimiento y crearon el método racional.

En la Geometría de Tales este combinaba la experiencia y la razón, pero su desarrollo posterior la fué alejando de toda referencia al mundo real culminando con los Elementos de Euclides que resultan ser un monumento a la razón pura. Con la Geometría como modelo, los filósofos griegos creyeron que con solo sentarse a meditar podrían resolver todos los problemas como :

¿Qué es la belleza? ¿Qué es la virtud? ¿Qué es el movimiento?

Centrándonos en el problema de movimiento, fué Heráclito de Efeso (el obscuro) quien vivió a finales del siglo VI A.C. el que destacó el carácter cambiante de las cosas como la característica fundamental del mundo.

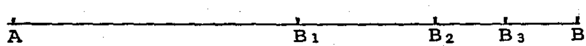
El principio del flujo universal de los seres lo expresa Heráclito en los conocidos fragmentos sobre el río :

"No es posible descender 2 veces al mismo río, tocar 2 veces una sustancia mortal en el mismo estado, sino porque el ímpetu y la velocidad de los cambios se dispersa y nuevamente se une, y viene y desaparece". "A quien desciende a los mismos ríos le alcanza nuevamente, nuevas y nuevas aguas" "Descendemos y no descendemos a un mismo río, nosotros mismos somos y no somos". Desgraciadamente la genial intuición que Heráclito plasmaba en fragmentos metafóricos, no se adaptaba ni al pensamiento ni a la ciencia de los griegos, - siendo ésta la razón por lo que le llamaban el obscuro.

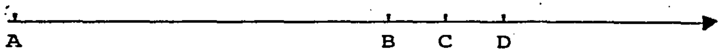
Heráclito no dejó escuela y la ciencia tomó otro camino que consistía en analizar los hechos aislados de los demás y de su devenir. En oposición a Heráclito surge la escuela de Elea en la - cual Parménides (VI A.C.) sostiene que el ser es único eterno e inmutable; para él el movimiento no existe, el fluir de las cosas es una mera apariencia; su discípulo Zenón inventó las famosas paradojas para defenderlo de los que pretendían invalidar sus argumentos sobre la inmutabilidad del ser.

Para Zenón las 3 principales paradojas son :

1.- Dicotomía: no nos podemos mover de un punto A a un punto B, porque antes de llegar a B tenemos que pasar por el punto medio B_1 de A y B, después por el punto medio de éste y B y así sucesivamente. Por lo tanto para ir de A a B tendríamos que pasar por una infinidad de puntos medios, lo cual nos llevaría un tiempo infinito.



2.- Aquiles y la Tortuga.- Aquiles el veloz, nunca podrá alcanzar a la tortuga, porque cuando Aquiles llega al punto B la tortuga ya ha avanzado algo y se encuentra en C, cuando Aquiles llega a C la tortuga se encuentra en D.



3.- La Flecha: una flecha en movimiento está en cada instante en un punto; pero si está en un punto no puede estar al mismo - tiempo moviéndose.

El origen de la dificultad de estas paradojas consiste en suponer, por una parte que el espacio es infinitamente divisible y - por la otra el no atribuirle esta cualidad al tiempo.

Si el tiempo lo dividimos en partes cada vez menores, disponemos de un número infinito de instantes en cualquier intervalo de - tiempo para recorrer una infinidad de puntos y la dificultad desaparece en ésta forma.

Diógenes de Sínope de oir los argumentos de Zenón sobre la imposibilidad del movimiento, sin decir una palabra se echó a andar. El movimiento se demuestra andando.

La existencia del movimiento nos hace ver que el espacio y el tiempo deben de tener propiedades muy similares.

La concepción antigua sobre el movimiento fué rota por Nicolás Copérnico (1473-1543) quien enunció que la tierra se movía alrede - dor del sol a una velocidad enorme.

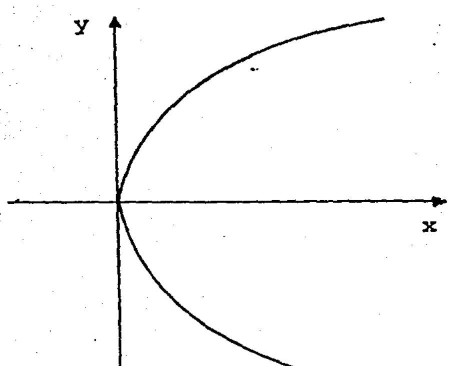
Para sus contemporáneos esto era imposible. El golpe de gracia a las ideas antiguas relativas al movimiento, lo dió Galileo Galilei (1563-1642).

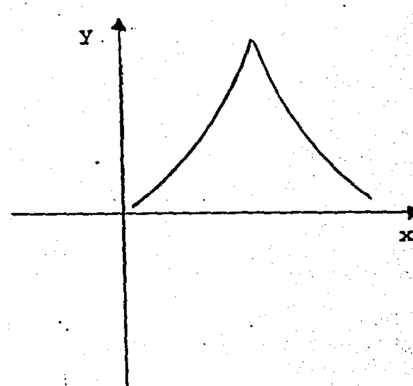
Galileo no se sentó a meditar sobre el movimiento sino que se sentó a observar y hacer experimentos.

Entonces ¿Qué es el movimiento? ¿Qué es el tiempo? ¿Qué es el espacio?. Galileo nos enseñó que hace falta no solo pensar sino también observar, experimentar y actuar.

Además de los problemas de el movimiento, tres problemas dieron origen a los métodos del Cálculo :

1.- Problema de las Tangentes: consiste en encontrar la tangente a un punto en un círculo, una elipse, una parábola, una hipérbola y en general a cualquier curva desde las más simples hasta las del siguiente tipo :





En las curvas anteriores la definición de tangente como la recta que toca a la curva en un punto puede no ser clara; por lo que optaremos por la siguiente definición: "la tangente es la recta que más se parece a la curva en un punto". Como podemos ver este concepto es utilísimo para extender muchas ideas, conceptos y leyes del caso de rectas al caso de curvas más generales.

2.- Máximos y Mínimos.

Los problemas de máximos y mínimos, aparecen en todos los aspectos de la naturaleza y de la actividad humana ¿Cuál es la recta más corta entre rectoría y el edificio LL del C.C.H. Sur? ¿Cuál es la más rápida? ¿Cuál es la mejor hora para hacer el recorrido? ¿Qué proporción de hierro y carbón da el acero más resistente? ¿Cómo se deben organizar las distintas etapas de construcción de un edificio para que su costo sea mínimo? ¿Cuál es la forma más efectiva de aprender Cálculo? ¿Cuál es la mejor forma de impulsar la Economía del país?

El Cálculo es una herramienta fundamental para resolver una amplia variedad de problemas de máximos y mínimos.

3.- El problema de las Cuadraturas.- consiste en calcular longitudes áreas y volúmenes.

Se denomina clasicamente problema de las cuadraturas debido a la forma en que lo dieron los griegos. Como ya hemos visto los grie gos abandonaron los números; por lo cual no pensaban en términos de calcular áreas sino que formulaban el problema así: dada una figura plana, encontrar un cuadrado que tenga la misma área.

El famoso problema de la cuadratura del círculo era precisamente un caso particular (hoy se sabe que es imposible hacerlo con regla y compás que es como lo proponían los griegos).

Todos sabemos calcular áreas de algunas figuras, no es difícil calcular el área de una figura limitada por segmentos de recta. El problema más serio aparece cuando se consideran figuras limitadas por curvas.

Sin embargo todo mundo sabe que el área de un círculo es $\pi \cdot r^2$ y ha utilizado esta fórmula en algunas ocasiones pero ¿Quién sabe que efectivamente es $\pi \cdot r^2$? De hecho casi nadie. Todo mundo usa esta fórmula porque le dijeron que era la buena o en el mejor de los casos le dieron un argumento más o menos convicente. Una demostración que se puede dar se basa en considerar polígonos regulares inscritos y circunscritos (con un número finito de lados) al círculo, y ver que pasa cuando hacemos cada vez más grande el número de lados.

Los primeros signos claros del concepto de derivada aparecen en la obra del matemático francés Pierre Fermat (1601-1665).

En 1629 Femant anticipaba la derivada en los métodos que usaba para encontrar los valores máximo y mínimo de funciones y en el procedimiento general que dió para encontrar la recta tangente en un punto a la gráfica de una función. Fermat concibió la recta tangente como la posición límite de la secante cuando los dos puntos de intersección de la secante con la curva se aproximan uno a otro.

Pronto el proceso de diferenciación había sido introducido y formalizado, y hacia finales del siglo XVII Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) hacían, independientemente, su gran descubrimiento.

Una de las debilidades de la noción griega de tangente es que puede extenderse fácilmente a arcos de curvas que no tengan exterior al contrario de lo que sucede con el concepto de tangente de Fermat.

El primero que descubrió que la idea de hallar la tangente a una curva y hallar el área limitada por una curva que aparentemente no tenía conexión estaban intimamente ligadas, fué el mestro de Newton, Isaac Barrow (1630-1677). Sin embargo, Newton y Leibniz fueron los primeros que comprendieron la verdadera importancia de esta relación.

Alguna veces se han utilizado diferentes notaciones para un mismo concepto, prefiriéndose una u otra según las circunstancias que acompañan el uso del símbolo. Esto es paricularmente cierto en el cálculo diferencial donde se han empleado muchas notaciones diferentes para las derivadas. Hasta ahora la derivada de una función f se ha indicado con el símbolo f', notación introducida por Lagrange (1736-1813) a finales del siglo XVIII, y que pone de manifiesto que f, es una nueva función obtenida de f por derivación, indicandose - su valor en x por f'(x). Cada punto (x , y) de la gráfica de f(x) tiene sus coordenadas "x" e "y" ligadas por la ecuación y = f(x) y el símbolo y' se utiliza también para representar la derivada f'(x). La notación de Lagrange no ha caído en desuso aunque la utilizada por Newton, que escribía $\dot{y}$, $\ddot{y}$ en vez de y' y y" también se sigue usando cuando las funciones dependen de la variable t tiempo.

Los puntos de Newton han sido utilizados por algunos autores para indicar especialmente velocidad y aceleración.

Otro símbolo fué introducido en 1800 por L. Arbogast (1759-1803) que indicaba la derivada de f por Df, símbolo cuyo uso ha tenido hoy en día gran aceptación. El símbolo D se denomina operador derivación y sugiere que Df es una nueva función que se obtiene de f por la operación derivación.

La regla de derivación de la suma de dos funciones se escribe por medio de la notación D en la forma D(f + g) = Df + Dg. Entre los primeros cultivadores del análisis matemático fué Leibniz el que mejor comprendió la importancia de los símbolos bien elegidos. Introducida una notación la experimentaba largamente y después mantenía - extensa correspondencia con otros matemáticos sobre sus ventajas e - inconvenientes.

El formidable impacto que el Cálculo ha tenido en el desarrollo de la matemática moderna, es debido en gran parte a la elección adecuada y sugestiva de los símbolos, muchos de ellos introducidos por Leibniz.

Leibniz utilizaba una notación para la derivada algo distinta a la que se ha indicado. Utilizando en vez de f(x), el cociente de diferencias $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ lo escribía en la forma $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ poniendo Δx en vez de h y Δy en vez de $f(x+h)-f(x)$. El símbolo Δ se denomina operador diferencia. El límite del cociente de diferencias, es decir la derivada $f'(x)$, la designaba Leibniz por dy/dx. Con esta notación, la definición de derivada se transforma en

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

No sólo era distinta la notación, sino también la manera de pensar de Leibniz acerca de las derivadas, pues considera el límite dy/dx como un cociente "diferencial". En vez de utilizar el paso a límite para definir las derivadas, pasaba de Δy y Δx a dy y dx indicando simplemente que $\Delta y, \Delta x$ se transformaban en infinitesimales. Leibniz imaginaba las infinitesimales como un nuevo tipo de números que sin ser cero, eran más pequeños que cualquier número real positivo.

Durante mucho tiempo se creyó que el Cálculo era intrinsecamente difícil y algo misterioso, porque nó era posible comprender lo que era un infinitesimal. Los trabajos de Cauchy y otros matemáticos en el siglo XIX condujeron gradualmente a abandonar las cantidades infinitamente pequeñas como una parte esencial de las matemáticas. No obstante, son todavía muchos, especialmente entre los que se dedicaban a la matemática aplicada, los que consideran útil razonar a la manera de Leibniz a base de los infinitesimales. Muy frecuentemente de esta forma se llega rápidamente a resultados que pueden ser tratados por métodos adecuados. Más aún a partir de los años 60 se desarrollaron trabajos encaminados a justificar la existencia de los infinitesimos y ¡oh sorpresa! resulta que existen y todos esos resultados cómodos, útiles y de deducción rápida, pueden ser demostrados rigurosamente.

Aunque algunas de las ideas de Leibniz no pasaron a la posteridad, no ha ocurrido lo mismo con sus notaciones. El símbolo dy/dx tienen la ventaja manifiesta de resumir el proceso completo del cálculo de un cociente de diferencias y posterior paso al límite.

F U N C I O N E S

I N T R O D U C C I O N

Debido a que nuestro tema en estudio (Introducción al Cálculo Diferencial e Integral) comprende problemas que involucran movimiento, es saludable iniciar su estudio desde el principio, esto es proponiendo problemas que se nos ocurran en el momento y que involucren movimiento; y observar en el problema, de una manera sencilla y natural qué elementos intervienen en éste que pueden ser fundamentales para su estudio y comprensión.

Por ejemplo:

Problema.- "Con que rapidéz crecen mis hijos"

En este problema observamos que intervienen 2 factores: tiempo y estaturas.

Estos factores que se dan de manera natural y que cambian de acuerdo al problema, dan inicio a nuestra formulación de conceptos para el estudio de este tema.

CONCEPTO DE FUNCION.

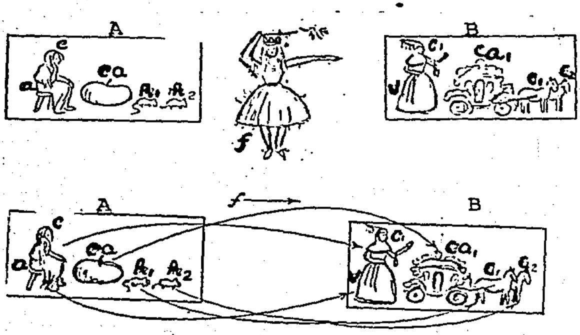
Para establecer una función se necesita de los siguientes elementos.

a) 2 conjuntos A y B.

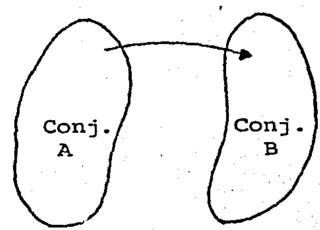
b) Una regla de correspondencia, que relacione los elementos del conjunto A, con los elementos del conjunto B.

Lo anterior se puede ilustrar de la siguiente manera :

Regla de Correspondencia



Regla de Correspondencia



Donde la regla de correspondencia debe cumplir con los siguientes requisitos :

1) Asociar a cada uno de los elementos del conjunto A con un elemento del conjunto B.

2) Ningún elemento del conjunto A deberá relacionarse con más de un elemento de B.

Ejemplos de Funciones.

En nuestra vida cotidiana estamos rodeados de ejemplos que satisfacen estos requisitos por lo que les podemos dar el nombre de funciones. Veamos algunos de ellos.

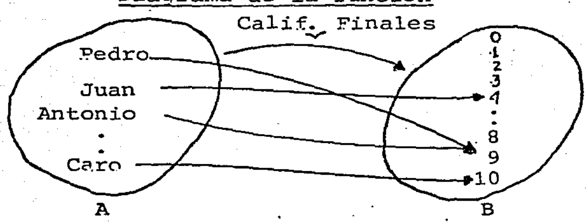
Ejemplo 1.

Conjunto A : alumnos del salón 71.

Regla de Correspondencia : calificaciones finales.

Conjunto B : Números enteros del 0 al 10.

Diagrama de la función



Ahora veamos si la regla de correspondencia "calificaciones - finales" cumple con los requisitos de función.

1.- "Asociar a cada uno de los elementos de A con un elemento de B". Esto se cumple proque todos los alumnos necesariamente deben tener una calificación final, aun cuando el - alumno no se haya presentado a clases, en este caso la ca lificación es cero.

2.- "Ningún elemento del conjunto A deberá relacionarse con más de un elemento del conjunto B". Esto se cumple porque ningún alumno podrá tener 2 calificaciones en su evaluación final. Por lo tanto el ejemplo anterior es función.

Ejemplo 2.- ¿Se les ocurre algún ejemplo de función?

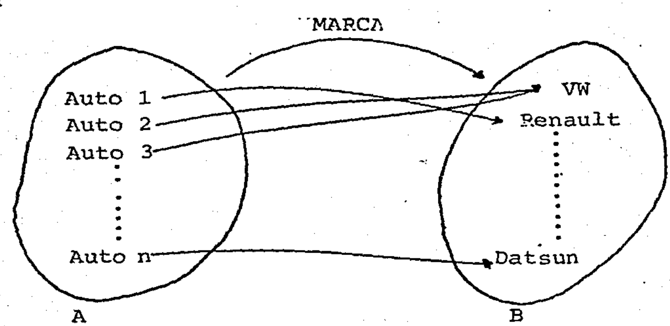
Veamos cual se le ocurrió al grupo 269.

Conjunto A : automóviles.

Regla de correspondencia : marca

Conjunto B : marcas.

Diagrama



1) Todos los automóviles necesariamente alguien los fabricó, por lo tanto tienen una marca.

2) Ningún automóvil tiene 2 marcas, o sea a la vez no puede ser digamos Renault y Volkswagen.

∴ se trata de una función.

Veamos ahora un ejemplo donde estos requisitos no se cumplen:

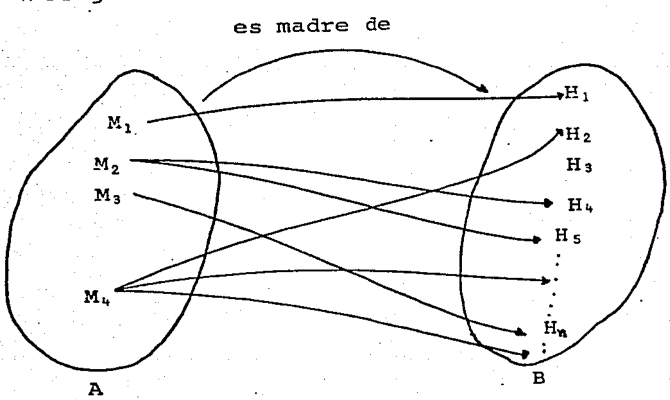
Ejemplo 3.

Conjunto A: madres del D.F.

Regla de correspndencia: ser madre de

Conjunto B: hijos del D.F.

Diagrama



1.- Para ser madre, necesariamente se tiene al menos un hijo, por lo tanto se cumple el primer requisito.

2.- Algunas de las madres dadas en el conjunto A, pueden tener más de un hijo, por lo tanto, existen elementos de A que se pueden relacionar con más de un elemento de B y por lo tanto no se cumple el segundo requisito.

∴ El ejemplo anterior <u>no</u> es función.

Ficha # 1.

1) Analiza si en el ejemplo 3, intercambiando los conjuntos A y B y definiendo como regla de correspondencia "ser hijo de" resulta una función.

2) Proporciona 3 ejemplos de funciones.

3) Proporciona un ejemplo de función que involucre movimiento.

Definiciones y Notación

En una función, al conjunto A le llamaremos El Dominio de la función y a sus elementos <u>Pre-Imágenes</u>; al conjunto B el Contradominio o Codominio de la función y a los elementos que vienen de una pre-imagen de A mediante la regla de correspondencia <u>Imágenes</u>.

- Entonces $f : A \rightarrow B$, que se lee f que va de A a B, indica una función con regla de correspondencia f cuyo dominio es A y contradominio es B.

Así de nuestro ejemplo 1 tenemos :

Dominio $A = \{x \mid x \text{ es alumno del grupo } 71\}$ o bien la podemos-expresar de la siguiente forma :

A = { Pedro, Juan, Luis, César, ... , Caro }

Pre-imágenes

B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Imágenes

Regla de Corresondencia f: Calificaciones finales.

Entonces tendremos la siguiente forma de referirnos a esta función :

$f : \{x \mid x \text{ es alumno del grupo } 71\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

y para indicar la asociación que hace lo haremos de la siguiente manera :

$\overbrace{f\ (\text{Pedro})}^{\text{pre-imagen}} = \overbrace{8}^{\text{imagen}}$, lo cual significa que la calificación final de Pedro es 8.

$\overbrace{f\ (\text{Juan})}^{\text{pre-imagen}} = \overbrace{7}^{\text{imagen}}$, lo que significa que la calificación final de Juan es 7.

Lo anterior también lo podemos expresar como un par ordenado de la siguiente forma :

(Pedro , 8). Entenderemos siempre que el 1er. elemento forma parte del dominio (pre-imágen) y el 2º elemento forma parte del contradominio (imágen).

Por lo tanto, una función también se puede interpretar como un conjunto de pares ordenados. Así en nuestro ejemplo tendríamos :

f = {(Pedro , 8), (Juan , 7), (Luis , 4), ..., (Caro , 10)}

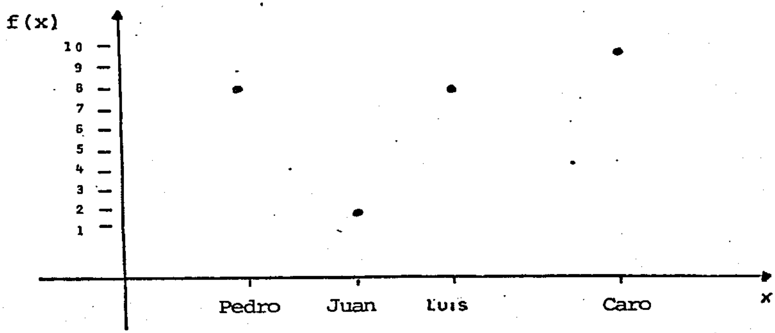
En conclusión podemos decir :

Dada una función $f : A \rightarrow B$ y suponiendo que en general "x" es cualquier elementos del conjunto A y "y" es cualquier elemento del conjunto B; la función se entenderá como $f(x) = y$ ó bien como pares ordenados de la forma (x , y) ó $(x , f(x))$.

También podemos decir que una función puede presentarse gráficamente en un plano de coordenadas, ya que como recordarás, para esto sólo se requieren de pares ordenados, en donde el 1er. elemento corresponde a las abscisas (x) y el segundo elemento a las ordenadas (y ó f(x)).

Entonces nuestros pares ordenados del ejemplo quedarán representados gráficamente de la siguiente forma :

f = {(Pedro , 8) , (Juan , 7) , (Luis , 9) . . . (Caro , 10)}



Gráfica 1.

Ficha No. 2. Menciona 10 pares ordenados de la función del ejemplo 2 y grafícala.

Ahora trataremos de interpretar una función cuya regla de correspondencia esté dada por una expresión algebraíca.

Ejemplo:

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y que la función f esta definida como:

$$f(x) = 2x - 1.$$

Con esta información:

a) Explicar cuál es el Dominio (Pre-imagen) y cual es el Contradominio (Imagen), de la función. Proporcionar al menos 10 elementos de cada uno

b) Explicar la regla de correspondencia de la función.

c) Proporcionar por lo menos 5 pares ordenados correspondientes a la función.

d) Ilustrar la función mediante un diagrama.

e) Dibujar la gráfica de la función.

Respuesta:

a) Como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esto indica que el Dominio de la función - es el conjunto de los Números Reales ($\mathbb{R}$), y el contradominio también son los Números Reales.

Como el conjunto de los Números Reales está definido como:

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{I} \quad ó \quad x \in \emptyset\}$$

entonces algunos elementos del dominio serían:

$$\mathbb{R} = \{-3, -2, -3/2, -1 -1/4, 0, 1, 7/3, \sqrt{5}, 10.6, \sqrt{15}\}$$

Pre-Imágenes

y del Contradominio

$$\mathbb{R} = \{-3, -2, -3/2, -1, -1/4, 0, 1, 7/3, \sqrt{5}, 10.6, \sqrt{15}\}$$

Imágenes

b) Como $f(x) = 2x - 1$, esto nos indica que la regla de correspondencia dice que a cada elemento del dominio lo tenemos que asociar con su doble menos uno en el contradominio.

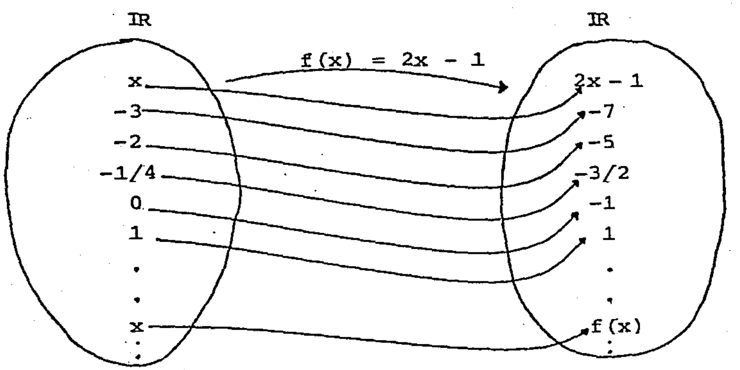
c) De acuerdo a lo anterior, los pares ordenados los podemos obtener de la siguientemanera:

$$f(-3) = 2(-3) - 1 = -7$$
$$f(-2) = 2(-2) - 1 = -5$$
$$f(-1/4) = 2(-1/4) - 1 = -3/2$$
$$f(0) = 2(0) - 1 = -1$$
$$f(1) = 2(1) - 1 = 1$$

$\therefore$ los pares ordenados pueden ser :

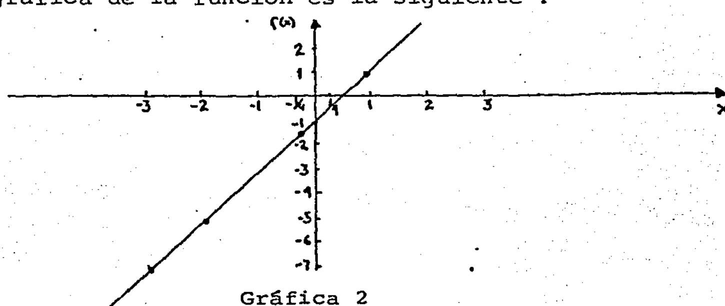
$$f = \{(-3 , -7), (-2 , -5), (-1/4 , -3/2), (0 , -1), (1 , 1) \ldots\ldots\}$$

d) En diagramas tenemos



Nota: Pero aquí solo representamos 5 pares, y los números reales son una infinidad.

e) La gráfica de la función es la siguiente :



Gráfica 2

En seguida daremos un ejemplo de una función que involucre movimiento:

Ejemplo:

Se observa el crecimiento de una planta y se obtiene la siguiente información:

En un día crece 1.5 cm.

En 2 días crece 2 cm.

En 3 días crece 2.5 cm.

En 4 días crece 3 cm.

En 5 días crece 3.5 cm.

Termina su crecimiento,

Con esta información:

a) Explica cuál es el Dominio (Pre-imágen) y cuál es el contradominio (imágen) de la función.

b) Explica la regla de correspondencia de la función.

c) Ilustra la función mediante un diagrama.

d) Dibuja la Gráfica de la función.

Respuestas:

a) Como se está observando el crecimiento de una planta, de manera natural tenemos que: un conjunto es los días que transcurren y el otro los centímetros que crece la planta; por lo que podemos decir que el Dominio de la función es el conjunto de los días y el Contradominio es el conjunto determinado por los centímetros.

Por lo tanto si llamamos a A el Dominio y a B el contradominio, algunos elementos de estos conjuntos son:

A = {1, 2, 3, 4, 5} (Pre-Imágenes)
{días}

y B = {1.5 cm, 2 cm, 2.5 cm, 3cm, 3.5 cm} (Imágenes)

¿los elementos dados en A y B son todos los elementos que contienen éstos conjuntos?

¿Podríamos preguntarnos cuántos centímetros creció la planta en 2 días y medio?.

b) De la información del problema podemos decir que los pares ordenados definidos por la función son:

(1,1.5) (2,2) (3,2,5) (4,3) (5,3.5)

lo que nos indica que por cada día que pasa, la planta crece 1/2 centímetro más.

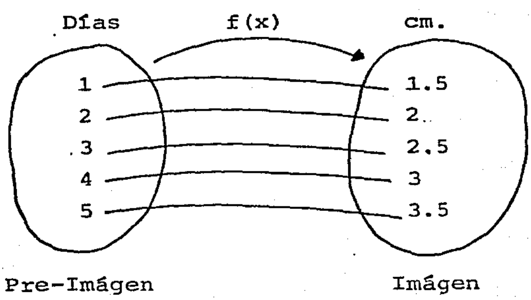
Daremos ahora una expresión algebraíca que determine el crecimiento de la planta .

¿Se te ocurre que expresión es?

¿Podría ser la función :

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 \quad ?$$

c) El diagrama de la función es:



Por lo que si $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, comprobemos que:

1) $f(1) = 1.5$

$$f(1) = \frac{1}{2} + 1 = 3/2 = \underline{1.5}$$

2) $f(2) = 2$

$$f(2) = \frac{2}{2} + 1 = 4/2 = \underline{2}$$

Y así sucesivamente.

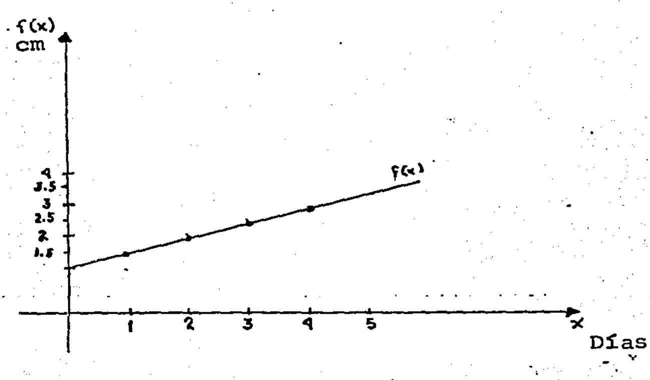
Por lo que la función efectivamente está determinada por – – $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

Ahora bien de la pregunta planteada en a) se pude decir que – si $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ y queremos calcular el crecimiento de la planta a los 2 días y medio, basta con calcular la función en 2.5, esto es:

$$f(2.5) = \frac{2.5}{2} + 1 = 9/4 = 2.25 \text{ cm}$$

Por lo que la planta creció 2.25 cm en 2 días y medio.

d) La gráfica de la función es la siguiente:



Gráfica 3

Ficha No. 3.

1.- Problema.-

Un móvil se desplaza de acuerdo a la siguiente información:

En un minuto recorre 15 m.

En 2 minutos recorre 20 m.

En 3 minutos recorre 25 m.

En 4 minutos recorre 36 m.

Etc.

Con esta información

a) Explica cuál es el Dominio y el contradominio de la función y menciona algunos de sus elementos.

b) Explica la regla de correspondencia y trata de expresarla algebráicamente.

c) Dibuja la gráfica de la función.

d) Calcula la distancia recorrida por el móvil a los 10 minutos de iniciado su movimiento.

2.- Construye la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -5x + 1$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) $f(x) = 2x$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

c) $f(x) = x$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

d) $f(x) = 3x - 1$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

C O N C L U S I O N E S

1.- Una función se define como una regla de correspondencia que asocia los elementos de 2 conjuntos, uno llamado Dominio y otro contradominio. Además esta regla debe cumplir con los siguientes requisitos :

   a) Que todos y cada uno de los elementos del Dominio estén asociados con un elemento del contradominio.

   b) Que ningún elemento del Dominio se relacione con más de un elemento del contradominio.

2.- Una función se puede expresar algebraicamente ó nominalmente.

3.- La gráfica de una función puede ser

   a) Punteada (Gráfica 1)

   b) Contínua (Gráficas 2 y 3)

RAZON DE CAMBIO

INTRODUCCION

En nuestros cursos anteriores sólo nos hemos limitado a localizar puntos que determinen cierta ecuación ó a encontrar la ecuación de una recta o una parábola, en el tema anterior hemos asociado estos elementos de una manera sencilla con problemas que expresan movimiento; en este capítulo trataremos de asociar los conocimientos ya adquiridos para contestar preguntas como las siguientes: ¿con qué rapidéz crece un árbol? ¿con qué rapidéz crece o decrece la economía?, etc.

Las preguntas anteriores involucran problemas de movimiento en los que la pregunta fundamental es ¿con qué rapidéz cambian las cosas?, a esto le llamaremos: "razón de cambio"

RAZON DE CAMBIO

Introduciremos el Tema con el Siguiente:

Problema 1

1.- En una población se hicieron estudios con respecto al número de nacimientos y de muertes, obteniéndose la siguiente información:

NO. DE MUERTES	NO. DE NACIMIENTOS
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18

Tabla 1.

De la tabla anterior, podrías decir: ¿cómo varía la natalidad de acuerdo al aumento de mortalidad entre 1 y 3 muertes?

Esto nos indica un problema de razón de cambio y para entenderlo desde el inicio, obtengamos la función que nos relacione el número de muertes con el número de nacimientos para poder observar mejor su comportamiento.

Esto es, tratamos de encontrar $f(x)$ tal que; $f(1) = 3$, $f(2) = 6$, $f(3) = 9$, $f(4) = 12$, $f(5) = 15$, $f(6) = 18$, $f(x) = ?$ ¿ya se te ocurrió?.

No te preocupes ya no lo haremos al tanteo ahora usaremos - el método de Diferencias divididas y el algoritmo de Newton para obtenerla.

Como recordarás los pasos a seguir son:

1) Acomodar en una Tabla de Tabulación la información:

x	f(x)
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18

2) Obtener las diferencias divididas.

x	f(x)	1a. Diferencia	2a. Diferencia
1	3		
		$\frac{6 - 3}{2 - 1} = \boxed{3}$	
2	6		$\frac{3 - 3}{3 - 1} = \boxed{0}$
		$\frac{9 - 6}{3 - 2} = 3$	
3	9		$\frac{3 - 3}{4 - 2} = 0$
		$\frac{12 - 9}{3 - 3} = 3$	
4	12		$\frac{3 - 3}{5 - 3} = 0$
		$\frac{15 - 12}{5 - 4} = 3$	
5	15		$\frac{3 - 3}{6 - 4} = 0$
		$\frac{18 - 15}{6 - 5} = 3$	
6	18		

3a) Sustituir en la fórmula de Newton

$$f(x) = f(x_1) + 1a.\,dif\ (x - x_1) + 2a.\,dif\ (x - x_1)(x - x_2 +$$

$$3a.\,dif\ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en donde se sabe que:

x	$f(x)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$
$\vdots$	$\vdots$

1a. dif $\boxed{}$ 2a. dif $\boxed{}$ 3a. dif $\boxed{}$ . . .

Por lo que al sustituir con los datos de nuestra segunda tabla tendremos:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + 3(x + 1) + 0(x - 1)(x - 2) \\ &= 3 + 3x - 3 \\ &= 3x \end{aligned}$$

Por lo que la función que relaciona la mortaldad con la natalidad es: $f(x) = 3x$ ¡compruebala!

Ahora graficaremos esta función para observar el movimiento que determina:

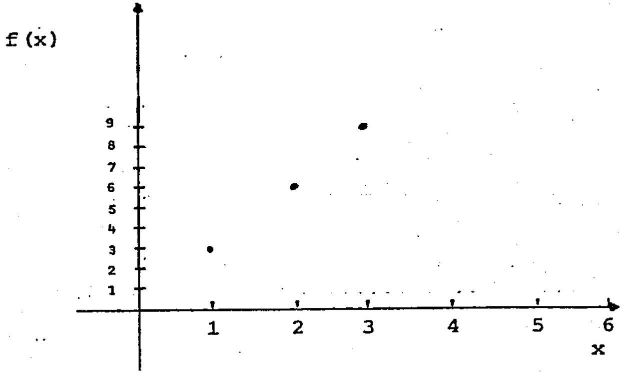


Figura 1

¿Qué podrías concluir de esta gráfica?

Ahora bien, como se nos pide calcular la variación de la natalidad con respecto a la mortalidad, entre 1 y 3 muertes $[1,3]$ haremos lo siguiente:

1ª) $[1,3]$ le llamaremos intervalo de muertes, este intervalo puede tomar los valores 1, 2 y 3.

2ª) De la Tabla 1 sabemos que:

$f(1) = 3$

$f(2) = 6$

$f(3) = 9$

3ª) Para poder encontrar la variación, un método sería encontrar el promedio de las natalidades con respecto a las mortalidades en este intervalo

$$\frac{3 + 6 + 9}{1 + 2 + 3} = \frac{18}{6} = \boxed{3}$$

Lo que significaría que la variación de las natalidades respecto de las mortalidades es del tríple (o sea que por cada persona que muere nacen 3).

Como ya tenemos la función podemos encontrar esta variación en cualquier intervalo, calculala en $[5,12]$ ¿qué observas? ¿te resulta igual?.

Problema 2 .

2.- El desplazamiento de un automóvil está dado por la siguiente función: $f(t) = 8t$ donde t representa el tiempo y $f(t)$ la distancia recorrida por el móvil.

En este problema podríamos encontrar la variación de la distancia con respecto al tiempo, (razón de cambio), esto es la pregunta sería: ¿con qué rapidéz avanza el automóvil en el intervalo $[2,4]$?.

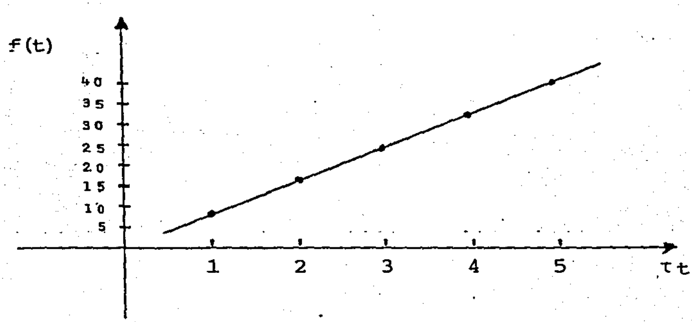
Calculamos primero los avances realizados por el móvil para los tiempos: $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, $t_4 = 4$ y $t_5 = 5$.

Como en este problema ya se nos dá la función, esto resulta más fácil.

TIEMPO t	AVANCE f(t)
1	8(1) = 8
2	8(2) = 16
3	8(3) = 24
4	8(4) = 32
5	8(5) = 40

Tabla 2

De esta Tabla podemos encontrar ya directamente la gráfica de la función f(t) = 8t.



¿Qué movimiento observamos?

Como se pide calcular la rapidéz con la que avanza el móvil en el intervalo [2,4], hagamos como en el problema anterior:

1ª) $[2,4]$ le llamaremos intervalo de tiempo, ¿qué valo - res puede tomar este intervalo? ¿2, 3 y 4?, recuerda - que el tiempo es continuo, esto es que también se pue- den tomar valores intermedios entre 2 y 3 como 2.1, - 2.2, 2.3, 2.4....etc., entonces ¿cuántos valores puede tomar el intervalo $[2,4]$? ¡una infinidad por supues- to!.

2ª) Como encontrar entonces f(x) para todos los valores, - observa lo siguiente:

a) Si tomamos como posibles valores para $[2,4]$, sólo 2, 3 y 4, tenemos:

$$f(2) = 16$$
$$f(3) = 24$$
$$f(4) = 32$$

Entonces el promedio sería:

$$\frac{16 + 24 + 32}{2 + 3 + 4} = \frac{72}{9} = \boxed{8}$$

b) Si tomanos como posibles valores para $[2,4]$ los-- valores 2, 2.5, 3, 3.5 y 4, tenemos:

$f(2) = 16$ $\quad$ $f(3.5) = 28$

$f(2.5) = 20$ $\quad$ $f(4) = 32$

$f(3) = 24$

Entonces el promedio sería:

$$\frac{16 + 20 + 24 + 28 + 32}{2 + 2.5 + 3 + 3.5 + 4} = \frac{120}{15} = \boxed{8}$$

c) Calcula el promedio si tomamos como posibles valores de $[2,4]$: 2, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8 y 4.

Resulta igual?

3) De lo anterior, podemos inducir lo siguiente:

Como el intervalo $[2,4]$ puede tomar una infinidad de valo -- res, los cuales no podemos determinar, entonces calculemos solo el incremento de los valores, esto es la medida que hay que recorrer para llegar de 2 a 4 y esto lo podemos obtener por - la resta $4 - 2 = \boxed{2}$ esto nos representa el tiempo transcurrido.

Como tampoco podemos calcular la función para todos los posi - bles valores del intervalo, entonces sólo calcula $f(2) = 16$ y $f(4) = 32$, y la resta $32 - 16 = \boxed{16}$ nos representará el avance del móvil; comparando el avance del móvil con respecto al tiempo que se llevó dicho avance tenemos:

$$\frac{32 - 16}{4 - 2} = \frac{16}{2} = \boxed{8}$$

Lo que significa que la rapidez con la que se desplaza es 8.

En conclusión, de los problemas anteriores obtenemos que:

Problema 1.

Para poder encontrar la variación de la natalidad con respecto a la mortalidad en el intervalo $[x_1, x_2]$, basta con comparar los incrementos :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Problema 2

Que para encontrar la rapidez con la que se desplaza el móvil en $[t_1, t_2]$, basta con comparar los incrementos.

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Por lo que la <u>Razón de Cambio</u>: Es el cociente que resulta de las diferencias de las imágenes (incrementos de las funciones) entre las diferencias de las pre-imágenes (incremento de las variables).

VELOCIDAD MEDIA.

Y cuando en el dominio de la función se encuentran valores que representan tiempo y las imágenes respectivas son números que representan posiciones, al cociente anterior se le llama <u>Velocidad Media</u> que es el caso del problema 2, por lo que concluímos que la velocidad media es un caso particular de la razón de cambio.

Ficha No. 1.

1. Busca algunos ejemplos que correspondan a razones de cambio y otras a Velocidad Media.

2. Problema :

Considera la siguiente tabla que muestra el aumento del Medio Circulante en determinado país en un sexenio.

1er. Año	32 %
2do. Año	35 %
3er. Año	45 %
4to. Año	62 %
5to. Año	86 %

Con base a esta información.

a) Encuentra la función que determine el aumento del medio circulante.

b) Calcula la variación del aumento con respecto al tiempo (razón de cambio) en [2 , 5]

c) ¿Cuál será el aumento del medio circulante para el 6to año?

d) Construye la gráfica correspondiente a este problema.

3. Encuentra la razón de cambio correspondiente a los intervalos que se indícan en cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x$ $[1, 5]$

b) $f(x) = 2x$ $[2, 7]$

c) $f(x) = -4x$ $[0, 4]$

d) $f(x) = 5/3\ x$ $[2, 6]$

e) $f(x) = 6x$ $[0, 4]$

f) $f(x) = -x$ $[1, 5]$

RAZON DE CAMBIO PARA FUNCIONES LINEALES

FUNCIONES LINEALES

Definiremos primero lo que es una función lineal: - "Una función lineal es de la forma $f(x) = ax + b$" donde podrás observar que se compone de una variable con potencia - uno, un coeficiente $\underline{a}$ y un término constante $\underline{b}$, donde a y $b \in \mathbb{R}$.

Ejemplos de funciones lineales:

1) $f(x) = 3x + 5$

2) $g(x) = -2x + 3$

3) $h(x) = x + 1$

4) $f(t) = \frac{3}{2}t - 3$

5) $f(i) = -\frac{7}{4}i$

6) $g(h) = h$

7) $f(x) = \frac{5}{3}$

8) $g(t) = 0$

En los ejemplos anteriores tenemos que en 1) al coeficiente a es 3 y b es 5, en 2 $a = -2$ y $b = 2$, en 5) $a = -\frac{7}{4}$ y $b = 0$, en 6) $a = 1$ y $b = 0$, en 7) $a = 0$ y $b = \frac{5}{3}$ y en 8) - $a = 0$ y $b = 0$.

Entonces si recordamos el ejercicio 3 de la ficha - anterior, observamos que son funciones lineales que carecen del término constante b.

RAZON DE CAMBIO PARA FUNCIONES LINEALES DE LA FORMA $f(x) = ax$

Ahora bien, como en este capítulo estudiaremos la - razón de cambio para funciones lineales, empezaremos por observar que pasa con la razón de cambio en las funciones lineales del ejercicio 3 de la ficha anterior.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

f(x)	Razón de Cambio
x	1
2x	2
-4x	-4

$\frac{5}{3}x$	$\frac{5}{3}$
$6x$	6
$-x$	-1

Observando estos resultados nos damos cuenta que los valores de las razones de cambio de cada función son iguales a los coeficientes de las variables de éstas, para cualquier intervalo $[p\ ,\ q]$ por lo que se puede intuir que :

"Si $f(x) = ax$, entonces la razón de cambio es igual a <u>a</u> en cualquier intervalo $[p\ ,\ q]$ ".

El resultado anterior puede ser demostrado de la siguiente forma :

Supongamos que $f(x) = ax$ es cualquier función lineal.

Ahora demos a la variable x, dos valores cualesquiera p y q.

Tomando las imágenes de p y q bajo $f(x)$ se obtiene:

$f(p) = ap$ y $f(q) = aq$

Con estos valores podemos calcular la razón de cambio de p a q.

Esto es:

$$\frac{f(p) - f(q)}{p - q} = \frac{ap - aq}{p - q}$$

desarrollando algebraícamente tenemos:

$$\frac{ap - aq}{p - q} = \frac{a(p - q)}{p - q} = \underline{a}$$ que es lo que se quería demostrar.

Ficha No. 2

1) Define lo que es una función lineal con tus propias palabras.

2) Proporciona 5 ejemplos de funciones lineales.

3) Proporciona 5 ejemplos de funciones lineales que carezcan del término b.

4) Proporciona 5 ejemplos de funciones lineales que no tengan el término a.

5) Calcula la razón de cambio de las funciones que proporcionaste en el ejercicio 3 de esta ficha.

RAZON DE CAMBIO PARA FUNCIONES LINEALES DE LA FORMA $f(x) = ax + b$.

Problema:

En el C.C.H. (5 planteles) se llevó al cabo un estudio para encontrar la relación que hay entre el número de reprobados y aprobados en Matemáticas, obteniéndose los siguientes resultados:

C.C.H.	Relación
Naucalpan	$2x + 1$
Azcapotzalco	$\frac{8}{2}x + 3$
Vallejo	$5x - 1$
Oriente	$x + 2$
Sur	$5x + 1$

Con base en la información anterior:

a) Calcula la razón de cambio para cada uno de los planteles en el intervalo que desees.

b) ¿Qué concluyes de los datos anteriores?.

Respuestas:

a) Si calculamos la razón de cambio para Naucalpan en el intervalo de 1 a 5 alumnos tendremos:

$f(1) = 2(1) + 1 = 3$ y $f(5) = 2(5) + 1 = 11$ por lo que la razón de cambio es:

$$\frac{11 - 3}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$$

Lo que puede interpretar como que por cada alumno reprobado aprueba el doble.

Haciendo lo mismo para cada plantel obtenemos la siguiente Tabla:

Plantel	Relacion	Razón de Cambio	Interpretación
Naucalpan	$2x + 1$	2	Por cada reprobado aprueba el doble.
Atzcapotzalco	$\frac{8}{2}x + 3$	4	Por cada reprobado - aprueba el cuádruplo.
Vallejo	$5x - 1$	5	Por cada reprobado - aprueba el quíntuplo.
Sur	$5x + 1$	5	Por cada reprobado - aprueba el quíntuplo.
Oriente	$x + 2$	1	El número de aprobados es igual al número de reprobados.

De esta tabla se intuye que la razón de cambio esta dada por el coeficiente de x cuando la función es de la forma: $f(x) = ax + b$ lo cual se demostrará a continuación:

Tomando las imágenes de p y q bajo $f(x)$

$f(p) = ap + b \quad ; \quad f(q) = aq + b$

Obtenemos ahora la razón de cambio

$$\frac{ap + b - (aq + b)}{p - q} = \frac{ap + \cancel{b} - aq - \cancel{b}}{p - q}$$

$$= \frac{ap - aq}{p - q}$$

$$= \frac{a(p \neq q)}{(p \neq q)} = a$$

lo cual se quería demostrar.

RAZON DE CAMBIO PARA FUNCIONES LINEALES DE LA FORMA $f(x) = b$

Problema:

En un estudio realizado a niños entre un año y año - y medio sobre su aprendizaje se observó lo siguiente:

Edades	Coeficiente de Aprendizaje
1 año	5
1 año un mes	5
1 años 2 meses	5
1 año 3 meses	5
1 año 4 meses	5
1 año 5 meses	5.1

De lo que se puede obtener que la relación de aprendizaje en este lapso de tiempo, podría ser :

$$f(x) = 5$$

¿Cuál será la razón de cambio de 1 año a 1 año 3 meses (1.25- meses)

¿Qué concluyes?

Respuestas:

Calculando la razón de cambio tenemos

$f(p) = 5$ y $f(1.25) = 5$

Entonces $\frac{5 - 5}{1 - 1.25} = \frac{0}{-.25} = 0$

lo que se podría interpretar como que no existe ningún cambio en el aprendizaje, que este es el mismo en cualquier intervalo.

De lo anterior podemos concluir que :

Si $f(x) = b$ entonces la razón de cambio es cero, esto es que no hay variación.

Esto lo demostraremos como anteriormente lo hemos hecho, de la siguiente manera:

Tomando las imágenes de p y q bajo $f(x)$ tenemos que:

$f(p) = b$ y $f(q) = b$

Obteniendo la razón de cambio

$$\frac{b - b}{p - q} = \frac{0}{p - q} = \underline{0}$$ que es lo que se quería demostrar.

Hasta aquí ya hemos calculado la razón de cambio para funciones lineales y concluimos que resulta ser el coeficiente de la variable de la función lineal, pero nos queda una pregunta por aclarar.

1) ¿Qué significa gráficamente la razón de cambio?

INTERPRETACION GRAFICA DE LA RAZON DE CAMBIO DE FUNCIONES LINEALES.

Problema:

Graficar las siguientes funciones y calcular su razón de cambio.

a) $f(x) = \frac{5}{3}x$

b) $f(x) = -x$

c) $f(x) = 2x + 1$

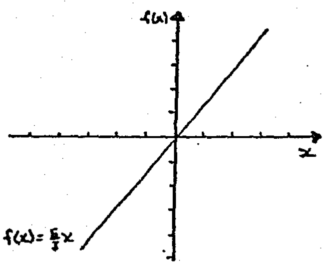
d) $f(x) = -\frac{8}{5}x + 3$

e) $f(x) = -5$

f) $f(x) = \pi$

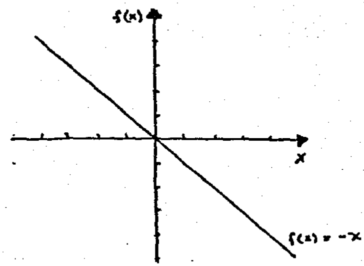
Resultados:

a)



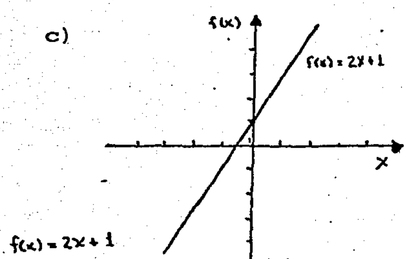
Razón de cambio $\frac{5}{3}$

b)



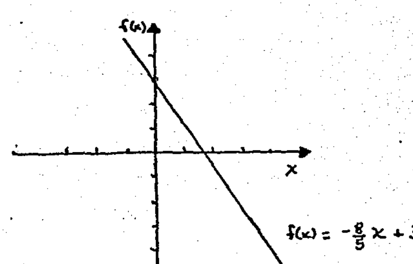
Razón de cambio -1

c)



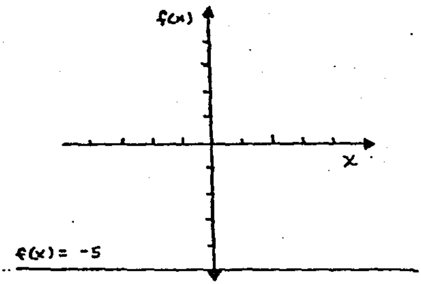
Razón de cambio 2

d)



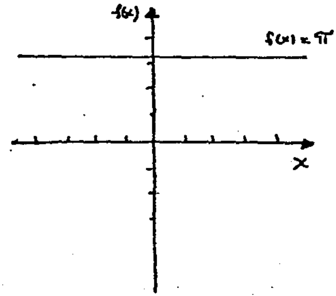
Razón de cambio $-\frac{8}{5}$

e)



Razón de cambio 0

f)



Razón de cambio π

Las gráficas de las funciones resultaron ser rectas en diferentes posiciones, pero como recordarás, en tu curso de Analítica estudiaste el significado de estas posiciones.

¿Recuerdas lo que es una pendiente de una recta?

¡Calcula las pendientes de las rectas anteriores!

Las pendientes (m) de estas rectas son:

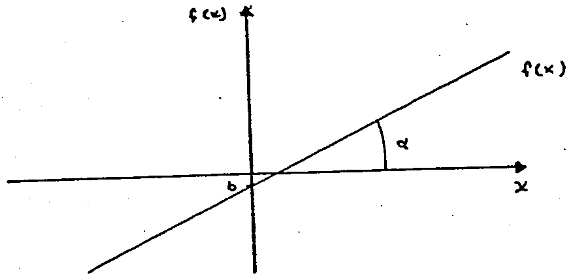
Rectas	Pendientes
$f(x) = \frac{5}{3}x$	$m = \frac{5}{3}$
$f(x) = -x$	$m = -1$
$f(x) = 2x + 1$	$m = 2$
$f(x) = -\frac{8}{5}x + 3$	$m = -\frac{8}{5}$
$f(x) = -5$	$m = 0$
$f(x) = \pi$	$m = 0$

Observa que las pendientes son iguales a las razo - nes de cambio.

Entonces se puede decir que la razón de cambio de una función lineal es igual a la pendiente de la recta que represente.

Pero graficamente sabemos que:

Si $f(x) = ax + b$ cualquier función lineal, su gráfica podría ser.



donde la recta determina un ángulo de inclinación α con el eje de las abscisas, y la pendiente se define como la tangente del ángulo α, esto es:

$$m = \tan \alpha$$

Entonces ¿Qué significa gráficamente la razón de cambio?

Ficha No. 3

1) Calcula la razón de cambio para las siguientes funciones lineales

$f(x) = -5x + 4$

$f(x) = -7x - 3$

$f(x) = \frac{5}{3}x$

$f(x) = -2\pi x$

$f(x) = 7$

$f(x) = -\frac{5}{4}$

2) Representa graficamente las funciones anteriores.

3) Encuentra el ángulo de inclinación de las rectas que determinan las funciones anteriores.

4) ¿Qué significa gráficamente la razón de cambio en funciones lineales?

RAZON DE CAMBIO EN FUNCIONES NO LINEALES

Una función no lineal se puede decir que es una función cuya variable tiene exponente distinto de uno, es decir es toda función que no sea de la forma $f(x) = ax + b$.

Ejemplos de funciones no lineales.

1) $f(x) = 2x^2 + 5$

2) $g(x) = -\frac{3}{5}x^3$

3) $f(t) = t^2 + \frac{1}{4}$

4) $h(x) = -x^5 + 2x^3 - \frac{3}{5}x + \sqrt[3]{2}$

5) $g(h) = \dfrac{h^{1/5} - 2h^5}{h^2}$

6) $h(t) = \dfrac{t^{-3} - 1}{t - \frac{5}{2}}$

Analicemos ahora el siguiente problema en donde interviene unafuncion no lineal.

Problema.

Supongamos que mandamos un cohete a la luna y que h es la altura avanzada por el cohete y t el tiempo que transcurre para alcanzar esta altura; además que la función que determina este movimiento está dada por $h(t) = 3t^2$.

Con esta información se desea calcular la razón de cambio, que en este caso se llamará Velocidad Media, en los-intervalos de tiempo $[0,2]$ y $[3,5]$.

Para $[0,2]$ tenemos:

$t_1 = 0 \qquad h(t_1) = 3\,(0)^2 = 0$

$t_2 = 2 \qquad h(t_2) = 3(2)^2 = 12$

Aplicando la fórmula de razón de cambio obtenemos:

$$\frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{12}{2} = 6$$

donde el cociente anterior significa el cambio de posición - del cohete entre el tiempo tomado en hacer ese cambio de posi ción; por lo que así hemos calculado la razón de cambio o velocidad media en este intervalo de tiempo.

De la misma manera encontremos la velocidad media en $[3,5]$

$t_1 = 3 \qquad h(t_1) = 3(3)^2 = 27$

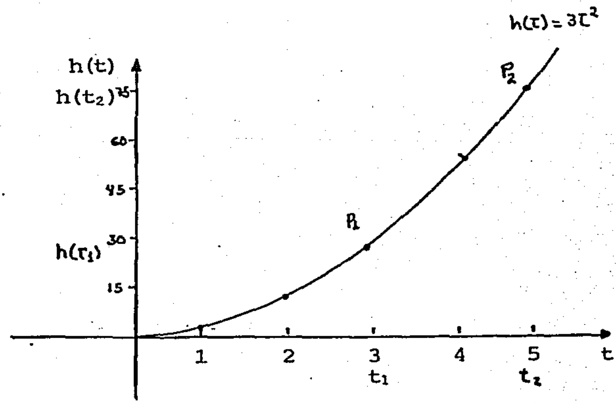
$t_2 = 5 \qquad h(t_2) = 3(5)^2 = 75$

de donde la velocidad media $(V \cdot M) = \frac{75 - 27}{5 - 3} = \frac{48}{2} = 24$

Como te habrás dado cuenta, del ejemplo anterior, el cociente obtenido no es el coeficiente de la variable t en la función dada y cambia de acuerdo al intervalo.

Veamos ahora que nos representa este cociente geometricamente, para lo cual graficaremos primeramente nuestra función y observaremos el $[3,5]$.

t	h(t)
0	0
1	3
2	12
3	27
4	48
5	75



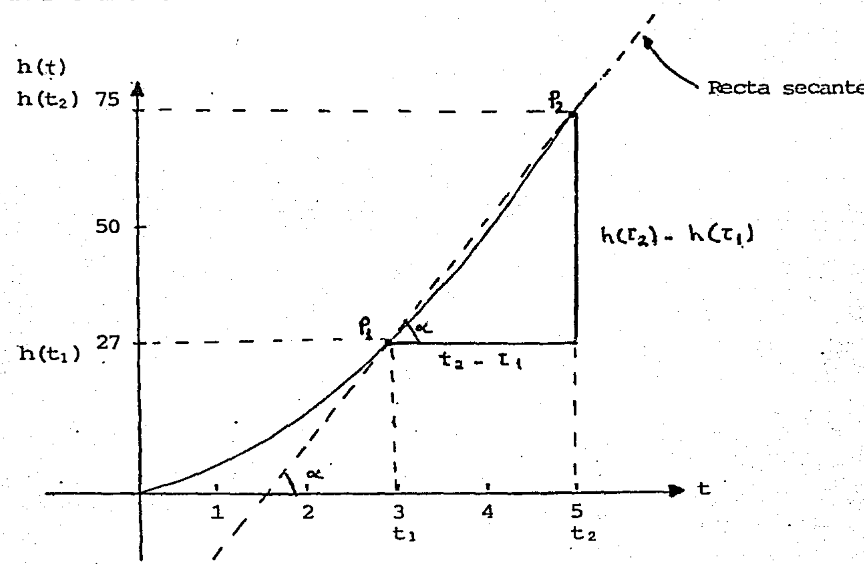
NOTA: Como t representa tiempo no le podemos asignar valores negativos, por lo que la gráfica que nos interesa se define sólo en el primer cuadrante.

Si en la gráfica anterior trazamos una recta que pase por P_1 y P_2, la pendiente de esta recta quedará determinada (como ya recordamos) por el cociente:

$$\frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1}$$

que es precisamente la razón de cambio o velocidad media.

Graficamente tenemos:



RECTA SECANTE

A cualquier recta que pasa por dos puntos P_1 y P_2 de la gráfica determinada por cualquier función no lineal - le llamaremos <u>recta secante</u>.

Así de todo lo anterior podemos obtener como conclusión que:

"La razón de Cambio ó Velocidad media de una función es igual a la pendiente de la recta secante que pasa por - los puntos P_1 y P_2 que determina la función."

Ficha No. 4

1. Considera la siguiente función $f(x) = x^2$, que determina el movimiento de un cuerpo, donde x es el tiempo y $f(x)$ la distancia.

   a) Construye su gráfica.

   b) Calcula las velocidades medias en los intervalos - [2,5] , [2,4] , [2, 3.5] , [2,3] , [2,2.5] , [2,2.4] [2,2.3] , [2, 2.2] , [2, 2.1]

c) En tu gráfica a) dibuja las rectas que determine cada intervalo de b).

d) Qué significado tiene gráficamente la Velocidad Media.

e) Qué significa para tí la Velocidad Media en cada uno de los intervalos.

f) Según los resultados de b), como interpretas la Velocidad del cuerpo.

C O N C L U S I O N E S

1. La razón de cambio para funciones lineales es la misma en cualquier intervalo, esto es si:

$$f(x) = ax + b$$

la razón de cambio en cualquier $[x_1, x_2]$ es a. Y si ésta función determina algún tipo de movimiento, entonces se dice que su Velocidad Media es constante.

Además la razón de cambio se interpreta como la pendiente de la recta que determina la función.

2. La razón de cambio para funciones no lineales en cada intervalo es distinta, donde éste intervalo puede ser lo suficientemente grande o lo suficientemente pequeño. La razón de cambio geométricamente se interpreta como la pendiente de la recta secante a la curva que determina la función y que pasa por los puntos que determinan las imágenes de la función en los extremos del intervalo.

3. La razón de cambio se puede interpretar como un promedio de las distintas posiciones que pueden tomar los puntos en una gráfica.

APROXIMACIONES SUCECIVAS

I N T R O D U C C I O N

En la sección anterior se estudió la razón de Cambio o Velocidad Media, la cual se puede observar y calcular en cual quier intervalo; es de nuestro interés ahora, el estudiar lo que significa la razón de cambio a medida que el intervalo se hace más pequeño hasta poder llegar a encontrar la razón de - cambio en un instante; si el problema en cuestión determina - movimiento, esto se puede interpretar como la velocidad que - llevaría el móvil en cualquier instante de tiempo.

Lo anterior podría ser una interpretación de lo que sig nifica la Derivada de una función, esto es, que podríamos de - cir que: "La derivada de una función significa calcular la ra zón de cambio en un instante ó valor de x cualquiera" o "la de rivada de una función significa calcular la velocidad instantá nea en un tiempo x cualquiera".

APROXIMACIONES SUCESIVAS

Para calcular la derivada de una función utilizaremos el método llamado Aproximaciones Sucesivas, este método que consiste en acercarse poco a poco a un resultado, se utiliza en distintos problemas, y las técnicas son de acuerdo al concepto de estudio.

Veamos ahora como calcular la Derivada de una función por el Método de Aproximaciones Sucesivas.

Recordando los resultados del ejercicio 1 de la ficha No. 4 de la sección anterior donde $f(x) = x^2$, se obtuvieron las siguientes Velocidades Medias (Vm).

$Vm\ [2,5] = 7$

$Vm\ [2,4.5] = 6.5$

$Vm\ [2,4] = 6$

$Vm\ [2,3.5]\ 5.5$

$Vm\ [2,3] = 5$

$Vm\ [2,2.5] = 4.5$

$Vm\ [2,2.4] = 4.4$

Observando los intervalos: el primero es de $[2,5]$ y el último de $[2,2.4]$, esto es que cada vez lo fuímos - - haciendo más pequeño, acercándonos a 2.

Sigamos acercándonos más a 2 y calculemos las correspondientes velocidades medias:

Vm $[2,2.4]$ = $\underline{4.4}$

Vm $[2,2.3]$ = $\underline{4.2}$

Vm $[2,2.2]$ = $\underline{4.2}$

Vm $[2,2.1]$ = $\underline{4.1}$

Gráficamente tenemos:

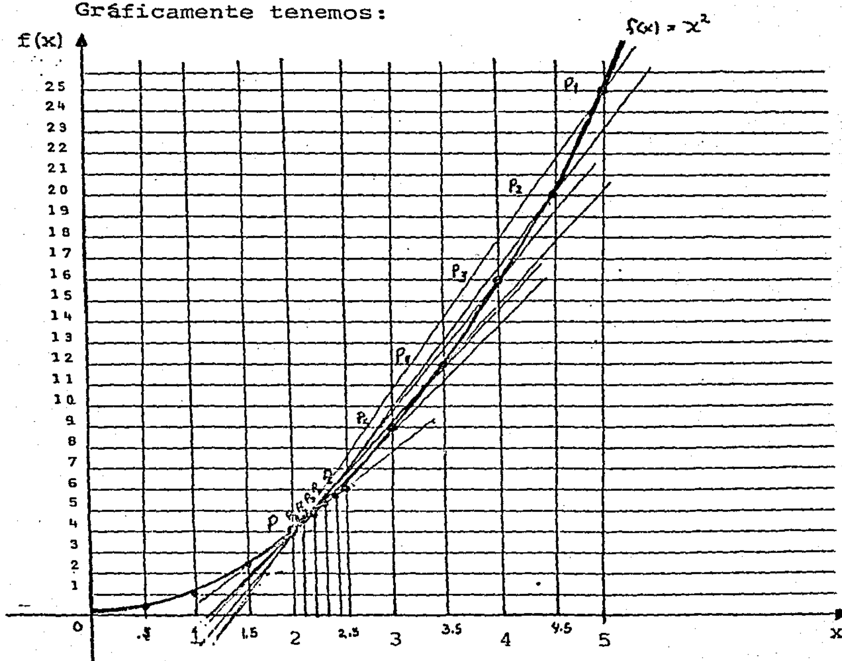


Fig 1

De esta gráfica observamos que al hacer más pequeño el intervalo, las rectas secantes cambian de posición por - lo que las pendientes son distintas pero se van acercando - cada vez a un número.

¿Cuál es?

Para obtenerlo, observa las tablas anteriores don - de obtuviste las velocidades medias.

Entonces de las tablas y la gráfica obtenemos las - conclusiones siguientes.

1°) Las rectas secantes cambian de posición.

2°) Los puntos sobre la gráfica se van acercando a P cada vez que los intervalos se acercan - más a 2.

3°) Las Velocidades Medias para cada intervalo se van acercando a 4.

4°) Al cambiar las rectas secantes y al acercarse al punto P, de coordenadas (2,4) se puede decir que en el intervalo [2,2] tendríamos una recta tangente al punto P.

5°) Entonces 4 sería la pendiente de la recta tangente en el punto P.

Se llama <u>Recta Tangente</u> a una recta que sólo toca en un punto a la gráfica determinada por la función f(x).

Vamos a observar ahora que pasa si nos acercamos al punto P de coordenadas (2,4) pero haciendo el intervalo que se acerque a 2 por la izquierda, esto es calculemos las Velocidades Medias de los siguientes intervalos.

Vm [0,2] = 2

Vm [1,2] = 3

Vm [1.5,2] = 3.5

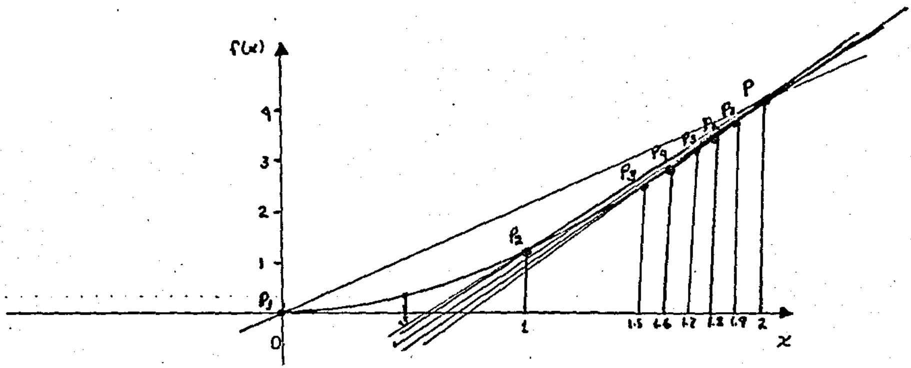
Vm [1.6,2] = 3.6

Vm [1.7,2] = 3.7

Vm [1.8,2] = 3.8

Vm [1.9,2] = 3.9

Graficamente tenemos:



De la gráfica y de la tabla podemos decir de la misma manera que lo hicimos en el ejercicio anterior, que las Velocidades Medias se van acercando a un número. ¿Cuáles?.

Por lo que las conclusiones que podemos obtener de aquí serían las mismas que obtuvimos al acercarnos al -- punto P por la derecha, por lo que podemos decir:

Que al acercarnos tanto por la derecha como por la izquierda al punto P de coordenadas (2,4), nos vamos acercando do a una Velocidad Media por un número que es 4; las Velocidades Medias se interpretan como las pendientes de las rectas secantes a la curva y la pendiente de la recta tangente a la curva en P, se interpreta como la Velocidad instantánea o Derivada de la función en $x = 2$"

Por lo tanto se tiene que la velocidad instantánea o Derivada de la función en $x = 2$ es 4.

Taller No.1

Objetivo del Taller.- Que el alumno visualice que el límite de las pendientes de las rectas secantes es igual a la pendiente de la recta Tangente.

Material.- Papel cascarón, cartulina o madera de agujeros, alambre grueso, estambre y plumones.

INSTRUCCIONES

1. Con el estambre forma un plano carteciano numerando ambos ejes con tu plumón.

2. Grafíca la función $f(x) = x^2$ y determina los puntos P_1 , $P_2 \ldots . P_{10}$.

3. Coloca tu clavo en el punto (2,4) y fija tu alambre al clavo.

4. Coloca tu alambre de manera tal que formes la secante $\overline{PP_1}$ (como en la figura I).

5. Has girar el alambre en el sentido de las manecillas del reloj; este giro lo harás de tal manera que te detendras en cada punto que te encuentres a tu paso.

¿Qué pasa cuando los puntos donde te vas parando se acercan a P a lo largo de la gráfica de la función?

Del taller anterior podemos concluir lo siguiente:

A medida que nos acercamos más a P a través de puntos - de la gráfica, va a llegar un momento en que la línea - secante coincide con la línea tangente en P.

De acuerdo a lo visto anteriormente podemos decir - que las pendientes de las secantes se aproximan o tienen co mo límite a la pendiente de la tangente en P cuando nos -- aproximamos mucho a P.

Por lo que todo lo anterior llamado el método de - aproximaciones sucesivas nos permite calcular la pendiente- de la recta tangente a cualquier curva en cualquier punto P; en donde si la función representa movimiento esta pendiente se puede interpretar como la Velocidad Instantánea del móvil en cualquier instante de tiempo.

Ejercicio.

La caída libre en un cuerpo está determinada por la función:

$$h(t) = \frac{g}{2}t^2 \qquad \text{con} \qquad g = 9.81 \text{ m/seg.}^2$$

Con esta información.

a) Construye la gráfica de la función.

b) Calcula la Velocidad Media en el intervalo $[1,3]$

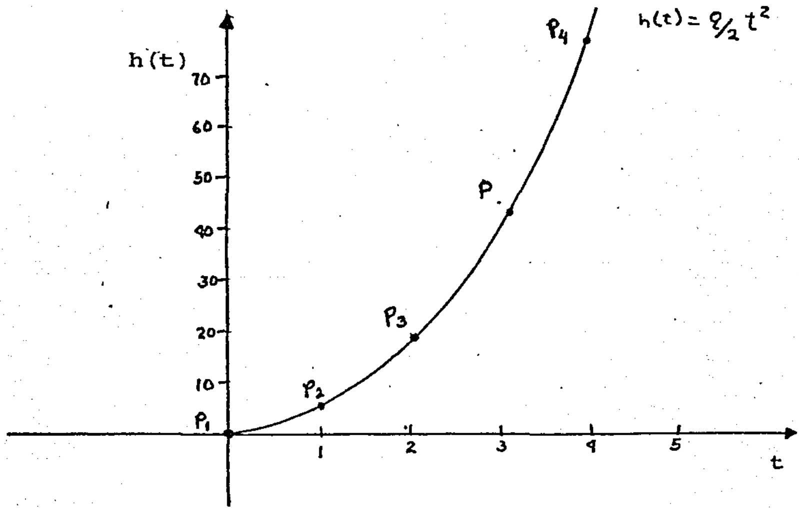
c) Usando el Método de aproximaciones sucesivas (por la derecha y por la izquierda). Calcula la velocidad instantánea (derivada de la función) del móvil al tiempo t = 3.

Respuestas

a) Tabulando tenemos

t	h(t)	
0	$h(0) = \frac{9.81}{2} \cdot 0^2 = 0$	P_1 (0,0)
1	$h(1) = \frac{9.81}{2} \cdot 1^2 = 4.905$	P_2 (1,4.905)
2	$h(2) = \frac{9.81}{2} \cdot 2^2 = 19.62$	P_3 (2,19.62)
3	$h(3) = \frac{9.81}{2} \cdot 3^2 = 44.145$	P (3,44.145)
4	$h(4) = \frac{9.81}{2} \cdot 4^2 = 78.48$	P_4 (4,78.48)

y gráficamente tenemos :



b) La Vm [1,3] $= \dfrac{44.145 - 4.905}{3 - 1} = \dfrac{39.24}{2} = \boxed{19.62}$

c) Por la derecha:

Vm [3,4] $= \dfrac{78.48 - 44.145}{4 . 3} = 34.335$

Vm [3,3.5] $= \dfrac{60.08625 - 44.145}{3.5 - 3} = 31.8825$

Vm [3,3.4] $= \dfrac{56.7018 - 44.145}{3.4 - 3} = 31.392$

Vm [3,3.3] $= \dfrac{53.41545 - 44.145}{3.3 - 3} = 30.9015$

Vm [3,3.2] $= \dfrac{50.2272 - 44.145}{3.2 - 3} = 30.411$

Vm [3,3.1] $= \dfrac{47.13705 - 44.145}{3.1 - 3} = 29.9205$

Observa que la diferencia entre cualquier par de números es de .4905.

Por la izquierda:

Vm [1,3] = 19.62

Vm [2,3] = 24.525

Vm [2.5,3] = 26.9775

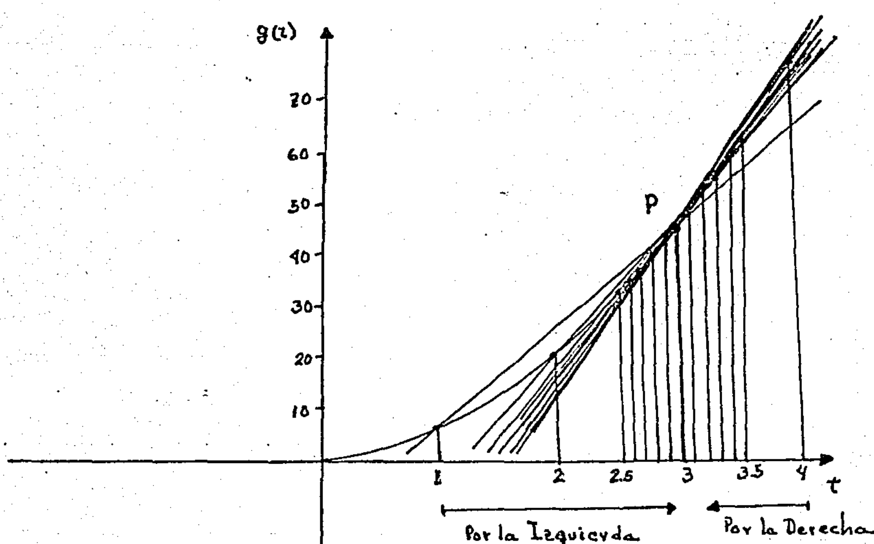
Vm [2.6,3] = 27.468

Vm [2.7,3] = 27.9585

Vm [2.8,3] = 28.449

Vm [2.9,3] = 28.9395

Observa que la diferencia entre cualquier par de es tos resultados es también .4905



De lo anterior obtenemos que las Pendientes de las rectas secantes tienen como límite (se acercan mucho) al número 29.43 que representará la pendiente de la recta tangente a la curva en (3,44.145).

$\therefore$ la Velocidad Instantánea es 29.43 m/seg. O bien que la Derivada de la función $h(t) = \frac{g}{2}t^2$ con $g = 9.81$ m/seg^2 en $t = 3$ es 29.43 m/seg.

Ficha No. 1.

1. En qué consiste el Método de Aproximaciones sucesivas para el cálculo de la derivada de una función.

2. Qué significa gráficamente la Velocidad Instantánea.

3. Que representa la Razón de Cabio en un intervalo de $[x_1 , x_1]$.

4. Qué representa el límite de las secantes a una curva que pasen todas por el punto P cuando se acercan a P.

5. Cómo definirías la Derivada de una función.

6. En las siguientes funciones:

$f(x) = 2x^2$

$f(x) = -5x^2$

$f(x) = \frac{3}{4}x^2$

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$

$f(x) = -x^2 + 2$

$f(x) = x^3$

a) Construye su gráfica.

b) Calcula la Razón de Cabio (en cualquier intervalo que desees)

c) Calcula la derivada de cada una de las funciones para $x = 4$.

Utilizando el Método de aproximaciones sucesivas por la derecha o por la izquierda.

C O N C L U S I O N E S

1. Calcular la Razón de cambio en un valor x, significa calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica que determina la función en el punto de coordenadas (x,f(x)).

2. El límite de las pendientes de las secantes que pasan por P de la gráfica de una función, es la pendiente de la recta tangente en P a la gráfica.

3. A la razón de Cambio en un valor x o a la velocidad instantánea en x de una función, se le llama Derivada de la función en x.

4. Por todo lo anterior entenderemos que la Derivada de una función en un punto p(x,f(x)) se entiende como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto P.

METODO DE LOS CUATRO PASOS

I N T R O D U C C I O N

En la sección anterior estudiamos el cálculo de la Derivada por el Método de aproximaciones sucesivas en donde eran conocidas las coordenadas de los puntos por donde pasan las secantes.

Ahora estudiaremos un Método algebraíco llamado comunmente el método de los 4 pasos. Este método nos ayuda a encontrar la pendiente de una recta secante dados dos puntos cualesquiera utilizando el concepto de incremento de una función; y posteriormente con este resultado calcular la pendiente de la recta tangente o derivada de la función.

Empezaremos por definir el símbolo Δ (delta mayúscula) que significará: Incremento.

Veamos que es el incremento mediante el siguiente ejemplo:

Si la estatura de María es de 1.30 mts y el año pasado era de 1.25 mts, nosotros podemos afirmar que María creció 5 cm, a esta cantidad es a la que le llamaremos incremento y se obtiene restando los datos conocidos como sigue: $1.30 - 1.25 = .5$

$$\therefore \ \Delta E = .5$$

Ficha No. 2

Algunas de las medidas de María el año pasado eran:

Peso P = 38 kg   Talla t = 28   Calzado C = 23

Este año sus medidas son:

Peso P = 50 kg   Talla T = 32   Calzado C = 24

a) Calcula el incrementeo en el peso o sea ΔP.

b) Calcula el incremento en la talla o sea ΔT.

C) Calcula el incremento en el Calzado o sea ΔC.

Entonces el incremento en una función lo entenderemos como sigue:

Sea $f(x) = 2x^2 + 1$ y queremos encontrar el incremento de la función de $x = 1$ a $x = 3$.

En el eje de las abscisas el incremento es - - - $3 - 1 = 2$.

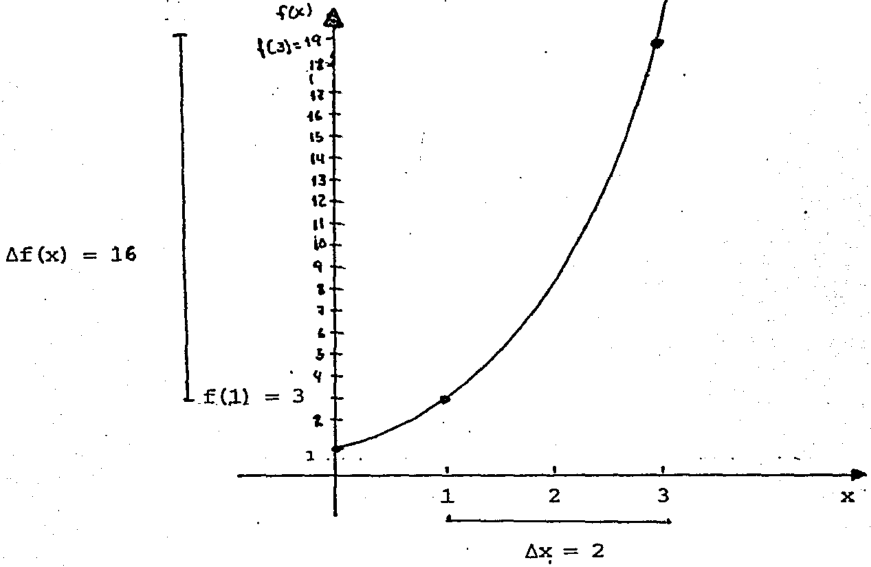
$$\therefore \quad \Delta x = 2$$

En el eje de las ordenadas el incremento es:

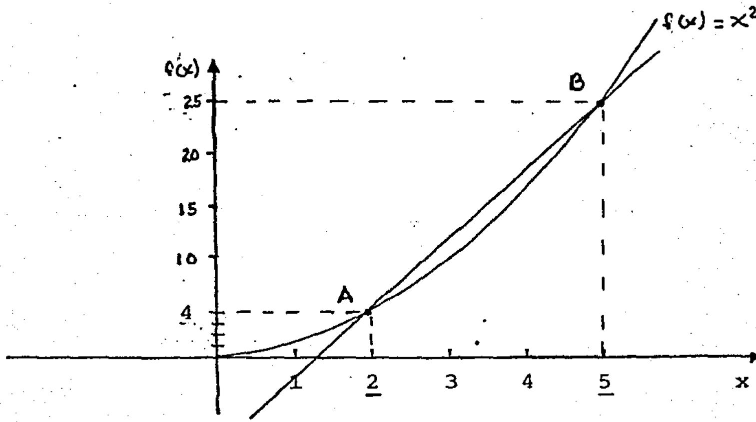
$$f(3) - f(1) = 2(3)^2 + 1 - (2(1)^2 + 1) = 19 - 3 = 16$$

$$\therefore \quad \Delta f(x) = 16$$

Gráficamente tenemos:



Ahora regresemos a la función $f(x) = x^2$ para calcular su derivada por el método de los 4 pasos; para esto primero construyamos su gráfica, localicemos los puntos A(2 , 4) y B(5 , 25) y tracemos la secante que pasa por A y B.



La pendiente de la secante $\overline{AB}$ esta dada por:

$$m = \frac{25 - 4}{5 - 2} = \boxed{\frac{21}{3}} = 7$$

Ahora calculando el incremento de las abscisas y - las ordenadas tenemos:

Abscisas:

$$5 - 2 = 3$$

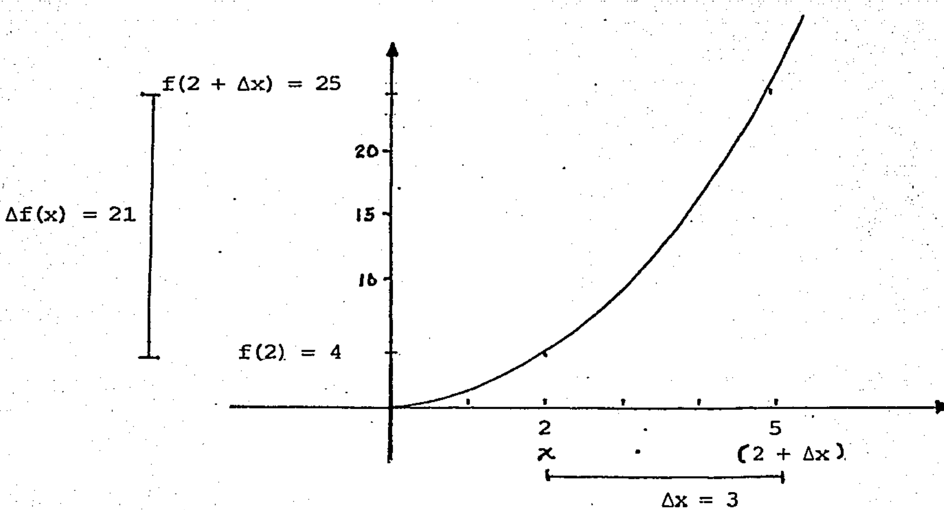
$$\therefore \quad \Delta x = 3$$

Ordenadas:

$$25 - 4 = 21$$

$$\therefore \ \Delta f(x)$$

Gráficamente:



Observa que: 25 se puede expresar como 4 + 21 y 5 se puede expresar como 2 + 3.

Por lo que podemos escribir que:

si $x = 2$ y $\Delta x = 3$ entonces $x + \Delta x = 5$.

y $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = (2 + 3)^2 = 5^2 = 25$

Además que:

Si $f(x) = 4$ y $\Delta f(x) = 21$, entonces $f(x) + \Delta f(x) = 25$

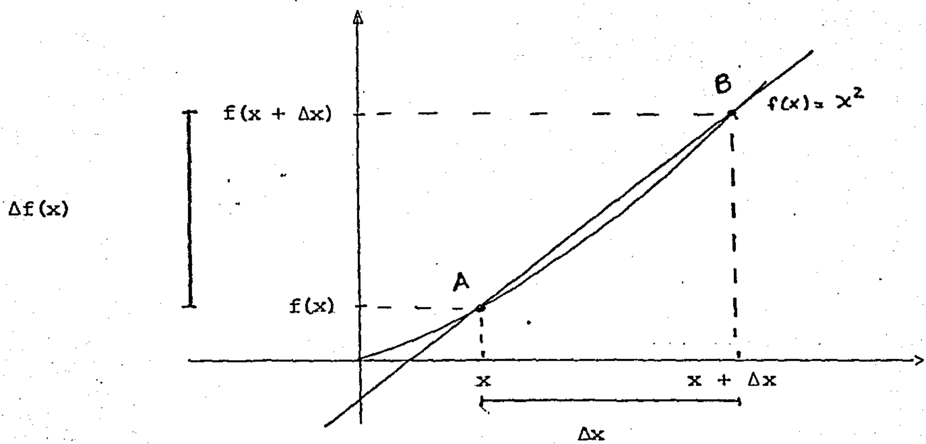
Ahora bien, en el cálculo de la pendiente obtenemos que - $m = \frac{21}{3} = 7$ pero $21 = \Delta f(x)$ y $3 = \Delta x$.

$\therefore$ Podemos decir que $m = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

La idea anterior la generalizaremos para dos puntos cualesquiera de la función $f(x) = x^2$; esto es tomemos - -

$A(x, f(x))$ y $B(x + \Delta x,\ f(x + \Delta x))$

Gráficamente sería:



Ahora se trata de encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B y la pendiente de la recta tangente en A.

Para calcular la Pendiente de la recta secante $\overline{AB}$ tenemos que:

1°) Si las coordenadas de los puntos son

$A(x, f(x))$ y $B(x + \Delta x\ ,\ f(x + \Delta x))$ tene - mos que calcular $f(x)$ y $f(x + \Delta x)$

$\therefore\ f(x) = x^2$ y $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$

2°) Substituyendo en la fórmula para calcular la - pendiente, tenemos que:

$$m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

3°) Desarrollando algebráicamente la expresión an- terior.

$$\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} = \frac{\Delta \cancel{x}\ (2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x + \Delta x$$

Por lo que la velocidad media o pendiente de la se- cante o razón de cambio cuando $f(x) = x^2$ está dada por -- $2x + \Delta x$. Y con esta fórmula podemos encontrar las pendien - tes de las secantes para cualesquiera dos puntos de la grá - fica determinada por $f(x) = x^2$.

Verifiquemos que la fórmula anterior nos da los valores encontrados en cada uno de los ejemplos anteriores - (Consulta la ficha No. 4 de la Página 61).

Vm $[x, x + \Delta x]$	Δx	$2x + \Delta x$
$[2,5]$	3	$2(2) + 3 = 7$
$[2,4]$	2	$2(2) + 2 = 6$
$[2,3.5]$	1.5	$2(2) + 1.5 = 5.5$
$[2,3]$	1	$2(2) + 1 = 5$
$[2,2.5]$	.5	$2(2) + .5 = 4.5$
$[2,2.4]$	.4	$2(2) + .4 = 4.4$
$[2,2.3]$	.3	$2(2) + .3 = 4.3$
$[2,2.2]$	.2	$2(2) + .2 = 4.2$
$[2,2.1]$	.1	$2(2) + .1 = 4.1$

Como te habrás dado cuenta estos valores coinciden- con los encontrados anteriormente y al hacer más pequeño el intervalo, Δx se hace más pequeño.

¿A qué número tiende Δx?

Como se observa de la Tabla anterior, el Δx se acerca cada vez a cero lo que se simboliza como $\Delta x \to 0$ que se leé: <u>Δx tiende a cero</u>.

4°) Pero nuestro objetivo también es calcular la Derivada de la función $f(x) = x^2$ en cualquier punto $A(x, f(x))$ de esta función, para esto recordemos que las rectas secantes al aproximarse a A se convierten en una recta tangente a la curva en A, entonces las pendientes de las rectas secantes van aproximandose a la pendiente de la recta tangente.

Pero en este caso la pendiente de las rectas secantes están dadas por:

$$m = 2x + \Delta x$$

donde x es un valor cualquiera de las abscisas ó Δx determina la amplitud del intervalo.

Y si quisieramos calcular la pendiente de la recta tangente en A, basta con hacer tender Δx a cero, puesto que lo que se calcularía sería la Velocidad Instantánea o razón de cambio instantánea en un valor de x y no en un intervalo.

Entonces, la velocidad instantánea o Razón de cambio instantánea o Derivada de la función $f(x) = x^2$ en cualquier punto x, es $2x$ ya que la fórmula $2x + \Delta x$ al calcular la velocidad instantánea desaparece Δx, esto se puede simbolizar como

$$f'(x) = 2x$$

NOTA: $f'(x)$ se leé como "f prima de x" o derivada de x y también se puede simbolizar como:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Así si queremos calcular la Velocidad instantánea en el valor $x = 2$ para $f(x) = x^2$, tendremos:

$$f'(2) = 2(2) = \underline{4}$$

Taller No. 2.

Objetivos: -Que el alumno visualice que significa que Δx tienda a cero.

-Que el alumno calcule algebráicamente la derivada de la función $f(x) = x^2$.

-Que el alumno visualice gráficamente - lo que realiza algebráicamente al calcular la derivada de la función - - - $f(x) = x^2$.

Material: -Papel milimétrico, una mica, pluma atómica y papel.

Instrucciones:

1. Grafíca la función $f(x) = x^2$ en tu papel milimétrico.

2. Localiza los intervalos $[2,5]$, $[2,4]$, - - $[2,3.5]$, $[2,3]$, $[2,2.5]$, $[2,2.4]$, - - $[2,2.3]$, $[2,2.2]$, $[2,2.1]$.

3. Coloca la mica sobre tu gráfica y con tu pluma atómica traza el Δx en el intervalo $[2,5]$. Y escribe su medida

4. Debajo del incremento realiza lo mismo para $[2,4]$.

5. Sigue este procedimiento hasta llegar al $[2,2.1]$.

   A medida que nos acercamos a 2 qué sucede con Δx?.

6. Calcula $f(2)$, $f(5)$, $f(4)$, $f(3)$, $f(3.5)$, $f(2.5)$ $f(2.4)$, $f(2.3)$, $f(2.2)$, $f(2.1)$ y localizados sobre tu mica en el eje correspondientes (ordenadas)

7. Ahora calcula $f(x + \Delta x)$ en el $[2,5]$

   ¡Ya sabes que $x = 2$ y $\Delta x = 3$!

   $\therefore\ f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = (2 + 3)^2 = ?$

8. Ahora calcula $f(x + \Delta x)$ en el $[2,4]$

   ¿Cuál es el valor de x y el de Δx ?

   ¿Entonces cuanto es $f(x + \Delta x)$?.

9. Realiza lo mismo para los intervalos $[2, 3.5]$ $[2, 3]$, $[2, 2.5]$ . . . . $[2, 2.1]$.

10. Calcula algebráicamente $f(x + \Delta x)$, para cual quier x.

11. Calcula la Vm en los intervalos $[2, 5]$, $[2, 4]$ $[2, 3.5]$ $[2, 3]$ $[2, 2.5]$ ... $[2, 2.1]$.

12. Coloca tu mica sobre tu gráfica y traza las rectas secantes que quedan determinadas por los intervalos anteriores.

13. Ahora calcula la Vm algebráicamente en el intervalo $[x, x + \Delta x]$.

14. En tu mica observa como cambian las pendientes de las secantes cuando $\Delta x \to 0$.

15. Cuándo Δx es cero, ¿de qué recta estás calculando la pendiente? ¡gráficala sobre tu mica!

16. Cuál es la Derivada de $f(x) = x^2$ cuando $x = 2$.

17. Calcula la Derivada de $f(x) = x^2$ para

$x = 3$

$x = 4$

$x = 5$

y grafícalas sobre tu mica.

Todo lo realizado anteriormente es a lo que llamaremos el método de los cuatro pasos (como podrás observar así lo propusimos en la nota anterior). Resumiendo podemos decir que los cuatro pasos a seguir para el cálculo de la Derivada de una función son:

1°) Calcular $f(x)$ y $f(x + \Delta x)$

2°) Sustituir los valores obtenidos en 1°) en la fórmula para calcular la pendiente

$$m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

3°) Desarrollar algebráicamente.

4°) Hacer tender Δx a cero.

Problema:

Encontrar la derivada ($f'(x)$) de la función - - $f(x) = x^4$, por el método de los cuatro pasos y calcular- $f'(5)$.

Respuestas:

Aplicando el método tenemos:

1er. paso) $f(x) = x^4$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^4$$

2do. paso) $m = \dfrac{(x + \Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}$

3er. paso) $\dfrac{(x + \Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = \dfrac{(\cancel{x^4} + 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4) - \cancel{x^4}}{\Delta x}$

$$= \frac{4x^3\Delta x}{\Delta x} + \frac{6x^2\Delta x^2}{\Delta x} + \frac{4x\Delta x^3}{\Delta x} + \frac{\Delta x^4}{\Delta x}$$

$$= 4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

4to. paso) Si $\Delta x \to 0$

$$4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x\Delta x^2 + \Delta x^3 = 4x^3 + 6x^2(0) + 4x(0)^2 + (0)^3$$

$$= 4x^3$$

$$\therefore \quad f'(x) = 4x^3$$

$$y \quad f'(5) = 4(5)^3 = \underline{500}$$

Ficha No. 3

1. Explica en qué consiste el Método de los cuatro pasos.

2. Qué significa que $\Delta x \to 0$

3. Qué significa calcular $f(x + \Delta x)$

4. Calcula $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones, utilizando el Método de los cuatro pasos:

   a) $f(x) = x^3$

   b) $f(x) = x^5$

   c) $f(x) = x^6$

5. Observa los siguientes resultados y completa:

Si $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$

Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) =$ _____

Si $f(x) = x^4$, entonces $f'(x) = 4x^3$

Si $f(x) = x^5$, entonces $f'(x) =$ _____

Si $f(x) = x^6$, entonces $f'(x) =$ _____

6. ¿Cuál será la derivada de $f(x) = x^n$, si n puede - ser $1,2,3,4,5,6,7,8,9 \ldots\ldots \infty$?.

<u>Cálculo de la Derivada de funciones lineales y no lineales por el Método de los cuatro pasos</u>.

Problema 1.- Calcular $f'(x)$ si $f(x) = \frac{x+2}{3}$

Respuestas:

1) $f(x) = \frac{x+2}{3}$

$f(x+\Delta x) = \frac{(x+\Delta x)+2}{3}$

2) $m = \dfrac{\dfrac{(x + \Delta x) + 2}{3} - \dfrac{x + 2}{3}}{\Delta x}$

3) $\dfrac{\dfrac{\cancel{x} + \Delta x + \cancel{2} - \cancel{x} - \cancel{2}}{3}}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{\Delta x}{3}}{\Delta x} = \dfrac{\cancel{\Delta}x}{3\cancel{\Delta}x} = 3$

4) Si $\Delta x \to 0$

$f'(3) = 3$

Problema 2.

Calcular $f'(x)$ Si $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$

Respuestas:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$

$f(x + \Delta x) = \dfrac{(x + \Delta x)^3}{3}$

2) $m = \dfrac{\dfrac{(x + \Delta x)^3}{3} - \dfrac{x^3}{3}}{\Delta x}$

3) $$\frac{\dfrac{\cancel{x^3} + 3x\Delta x^2 + 3x^2\Delta x + \Delta x^3}{3} - \dfrac{x^3}{3}}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\cancel{x^3} + 3x\Delta x^2 + 3x^2\Delta x + \Delta x^3 - \cancel{x^3}}{3}}{\Delta x}$$

$$= \frac{3x\Delta x^2 + 3x^2\Delta x + \Delta x^3}{3\Delta x} = \frac{3x\Delta x^2}{3\Delta x} + \frac{3x^2\Delta x}{3\Delta x} + \frac{\Delta x^3}{3\Delta x}$$

$$= x\Delta x + x^2 + \frac{\Delta x^2}{3}$$

4) Si $\Delta x \to 0$

$$x\Delta x + x^2 + \frac{\Delta x^2}{3} = x(0) + x^2 + \frac{0^2}{3} = x^2$$

$\therefore \quad f'(x) = x^2$

Problema 3.

Encontrar $f'(x)$ si $f(x) = 2x^2 + 5$

Respuestas:

1) $f(x) = 2x^2 + 5$

$f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^2 + 5$

2) $m = \dfrac{2(x + \Delta x)^2 + 5 - (2x^2 + 5)}{\Delta x}$

3) $\dfrac{2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 5 - 2x^2 - 5}{\Delta x} = \dfrac{2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 + 5 - 2x^2 - 5}{\Delta x}$

$= \dfrac{4x\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x} = \dfrac{4x\Delta x}{\Delta x} + \dfrac{2\Delta x^2}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x$

4) Si $\Delta x \to 0$, entonces

$4x + 2\Delta x = 4x + 2(0) = 4x$

$\therefore \quad f'(x) = 4x$

Problema 4:

Encontrar $f'(x)$ si $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Respuesta:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x)^2 + 2$

2) $m = \dfrac{(x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x)^2 + 2 - (x^3 - 3x^2 + 2)}{\Delta x}$

3) $\dfrac{\cancel{x^3} + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - \cancel{3x^2} - 6x\Delta x - \Delta x^2 + \cancel{2} - \cancel{x^3} + \cancel{3x^2} - \cancel{2}}{\Delta x}$

$= \dfrac{3x^2\Delta x}{\Delta x} + \dfrac{3x\Delta x^2}{\Delta x} + \dfrac{\Delta x^3}{\Delta x} = \dfrac{6x\Delta x}{\Delta x} - \dfrac{\Delta x^2}{\Delta x}$

$= 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 - 6x - \Delta x$

4) Si $\Delta x = 0$, entonces.

$3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 - 6x - \Delta x = 3x^2 + 3x(0) + 0^2 - 6x - 0$

$= 3x^2 - 6x$

$\therefore \; f'(x) = 3x^2 - 6x$

Ficha No. 3.

1. Encuentra $f'(x)$ de las siguientes funciones por el mé todo de los cuatro pasos.

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

2) $f(x) = 3x^3 - 7$

3) $f(x) = -2x^4 + 5x$

4) $f(x) = \frac{3}{2}x^4 + 1$

5) $f(x) = -x + 2$

6) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

2. Calcula la Velocidad instantánea en el valor $x = 5$ - para la función $f(x) = 2x^3$. Utilizando el Método de aproximaciones sucesivas y utilizando el método de los cuatro pasos.

C O N C L U S I O N E S

De esta sección podemos obtener las siguientes conclusiones:

1. La derivada de cualquier función lineal es igual al coeficiente de la variable; esto es si $f(x) = ax + b$, entonces $f'(x) = \underline{a}$.

2. La derivada de una función no lineal es distinta de acuerdo a la función y el método de los cuatro pasos es una forma de obtenerla, pero como observamos en esta sección, varias funciones que tengan una forma similar como la obtuvimos para funciones de la forma: $f(x) = x^n$ donde $n = 1,2,3..n$ se obtiene que $f'(x)=nx^{n-1}$, este resultados puede ser demostrado rigurosamente pero no es nuestro objetivo.

De la misma forma que lo hicimos para la funciones anteriores, podemos encontrar reglas para derivar distintas funciones no lineales las cuales se tendrían también que demostrar.

APLICACIONES DE LA DERIVADA

APLICACIONES DE LA DERIVADA

El estudio de las matemáticas se hace con el objetivo de aplicar estos conceptos a problemas reales, lo cual en muchas ocasiones se dificulta pero creo que no es imposible.

En esta sección veremos una aplicación de la Derivada de una función a un problema.

Problema:

Cada sección transversal de una cisterna de agua es un triángulo isósceles de base 4 mts. y de altura 6 mts. La cisterna tiene 12 mts. de largo. El agua entra en la cisterna a razón de 16 m^3 por minuto:

a) Encuentra la profundidad h del agua, t minutos después de que la llave del agua es abierta. ¿Cuánto tiempo se necesita para llenar el tanque?

b) Encuentra la velocidad media de la profundidad del agua en cada uno de los siguientes intervalos de tiempo: [0,1], [1,2], [2,3], [3,4], [4,5], [5,6], [6,7], [7,8], [8,9].

c) Encuentra la velocidad instantánea de la profundidad del agua en $t = 4$ y $t = 9$.

Antes de pasar a resolver el problema anterior llevaremos a cabo el siguiente taller:

Objetivo del taller.- Que el alumno visualice los elementos que intervienen en el problema y que los simbolice.

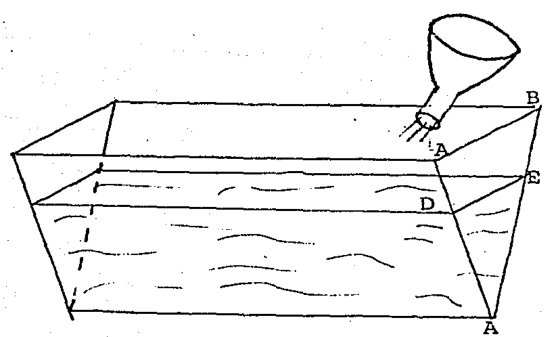
Material necesario.- Mica gruesa ó plástico grueso o material transparente sólido, pegamento, plumón, cinta métrica, regla, compás y agua.

Instrucciones:

1. Traza en tu material transparente 2 triángulos isós - celes de 10 cm de base y 15 cm de altura cada uno (dejar pestañas).

2. Traza en tu mismo material dos rectángulos de 20 cm - de largo y ancho igual a uno de los lados del triángulo isósceles (dejar pestañas).

3. Pega tus cuatro figuras por las pestañas para que formes una cisterna del siguiente tipo:



4. Vierte el agua dentro de tu cisterna a través del embudo que se te proporcionará (durante 3 segundos) y apoya ésta en forma adecuada para que se encuentre nivelada. Se desea encontrar la profundidad del agua en cada segundo a partir de que tú empezaste a vertir el líquido en la cisterna por lo que la profundidad del agua depende del tiempo; por lo que en el primer segundo la profundidad será x_1 en el 2º segundo x_2 y así sucesivamente.

Como también nos interesa calcular las velocidades medias y la instantánea necesitamos para ésto conocer la función; ahora bien ¿qué datos conocimos?.

Supongamos que el agua la viertes a razón de 10 cm^3 cada segundo, entonces en t segundos la cantidad de agua que entra a ésta razón será igual al volumen del líquido que hay en la cisterna; por lo que necesitaremos calcular el volumen de dicho líquido en tu cisterna en $t = 3$ para lo cual:

5. Mide con tu cinta métrica lo siguiente:

La altura h del triángulo DEC (la altura que se forma con el agua que vertiste).

¿Qué relación hay entre el triángulo de la cara - lateral de la cisterna y el triángulo que se forma con el agua?.

¿Cómo son los lados de los dos triángulos?

Como los triángulos son semejantes (¿recuerdas?) - sus lados homólogos son proporcionales.

Por lo que podemos concluir:

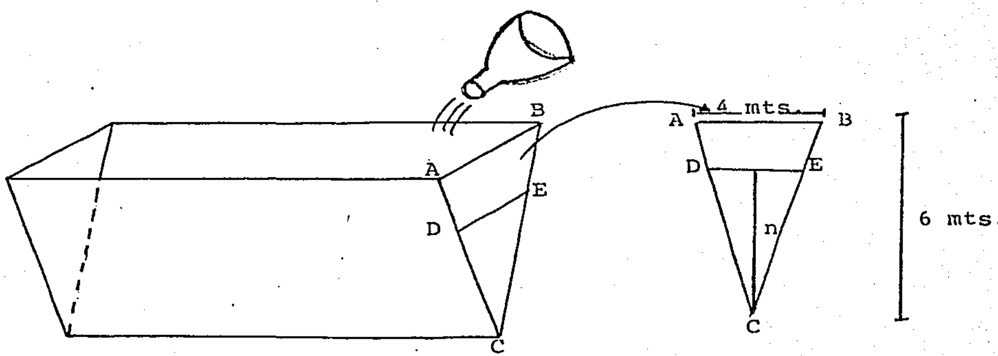
$$\frac{DE}{10} = \frac{h}{15} \quad \therefore \quad \overline{DE} = \frac{10h}{15}$$

6. Sustituye el valor de h que encontraste en la - fórmula anterior para saber cuánto mide el lado $\overline{DE}$ del triángulo de agua.

7. Calcula el volumen del líquido en la cisterna multiplicando el área anterior por el largo de la cisterna.

8. Verifica que ese volumen es igual a 30 cm^3.

Regresando a nuestro problema inicial tenemos:



Como: $\hat{A} = \hat{D}$ por ser correspondientes.

$\hat{B} = \hat{E}$ por ser correspondientes.

$\hat{C} = \hat{C}$ por identidad.

Entonces sabemos que los triángulos son semejan - tes, ¿recuerdas el criterio AAA de semejanza?.

$\therefore$ D A B C $\sim \Delta$ D E C

De lo anterior se tiene que sus lados homólogos - son proporcionales esto es:

$$\frac{\overline{DE}}{4} = \frac{h}{6} \qquad \therefore \quad \overline{DE} = \frac{4h}{6}$$

Por lo que el área del Δ DEC es igual a:

$$A_{\Delta\ DEC} = \frac{\overline{DE} \cdot h}{2} = \frac{\frac{4h}{6} \cdot h}{2} = \frac{\frac{4h^2}{6}}{2} = \frac{4h^2}{12} = \frac{1}{3}h^2$$

Por lo que el volumen del agua estará dado por:

Volúmen del líquido = ($^{A}\ \Delta$ DEC   largo de la cisterna) .

$$= \frac{1}{3}h^2 \cdot 12 = 4h^2$$

Como el agua entra a razón de 16 m^3 por minuto, tenemos que después de t minutos

$$16t = 4h^2$$

$$\frac{16t}{4} = h^2 \qquad h = \sqrt{4t}$$

$$4t = h^2 \qquad h = 2\sqrt{t}$$

Como h es la altura del triángulo, t los minutos y h depende de t podemos decir que la función que determina la profundidad del agua es $h(t) = 2\sqrt{t}$ que es la función que se deseaba encontrar. Si queremos conocer en cuánto tiempo se llena de agua la cisterna, o sea en qué minuto la altura h es igual a 6 ; basta con igualar el valor de la función obtenida con 6 y despejar a t.

$$h(t) = 2\sqrt{t}$$

$$2\sqrt{t} = 6$$

$$\sqrt{t} = \frac{6}{2}$$

$$(\sqrt{t})^2 = (3)^2$$

$$t = 9$$

lo que quiere decir que después de 9 minutos la cisterna se llena.

Ficha No. 5.

Calcula las respuestas de los incisos b y c de éste problema.

I N T E G R A L

BOSQUEJO HISTORICO

El encontrar áreas fué uno de los problemas más importantes en la antigüedad. En los antiguos tiempos de Babilonia, se creía que las áreas de las figuras planas dependían de sus perímetros, Sin embargo los métodos adecuados y correctos para encontrar las áreas de rectángulos y triángulos no fueron conocidas antes del año 2200 A.C.

Tales de Mileto y Pitágoras ya habían puesto los fundamentos de la Geometría y la Aritmética cuando en la escuela de Atenas surge entre otros problemas el de encontrar la cuadratura del círculo, o intento de encontrar un cuadrado, cuya área fuera igual a la de un círculo dado.

Hipócrates descubrió, al intentar resolver el problema, que podían dibujarse dos figuras en forma de lunas (Fig. 1), cuya suma de sus áreas fuera igual a el área del triángulo inscrito en la semicircunferencia.

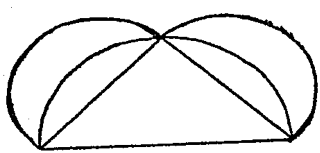


FIG. 1.

Así Hipócrates dió con este subproducto del problema principal el primer ejemplo de una solución de cuadraturas.

Hipócrates* hizo progresos notables principalmente en las propiedades del círculo, descubrió la fórmula πr^2 del área del círculo en función del radio, aunque no dá el valor numérico de π.

Se piensa que llegó a estas conclusiones considerando el círculo como límite de polígonos regulares, ya sea inscritos o circunscritos; siendo éste el primer ejemplo del método exaustivo.

En la obra matemática que Demócrito realizó y de la cual Arquímides (en su libro El Método), nos dice: "Demócrito fué el primer matemático que estableció correctamente la fórmula de volúmen de un cono o una pirámide"; Demócrito consideró estos sólidos como si estuvieran formados de innumerables capas paralelas. (Fig. 2).

* No el gran Físico.

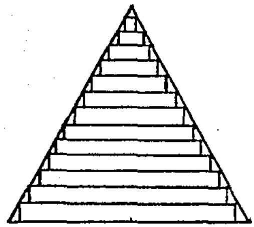


FIGURA 2.

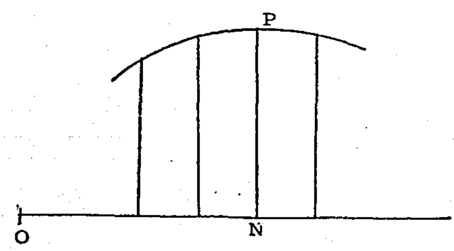
Ninguna aproximación tosca y rápida satisfiso a Demócrito. La noción de límites se hallaba en sus inicios, pero no se sabe hasta que punto Demócrito intuyó alguna solución.

El método exhaustivo usado sirvió vagamente a Demócrito para encontrar el volumen del cono y a Hipócrates para encontrar el área del círculo, este método fué totalmente explicado por Eudoxo.

El método exhaustivo aproximó un grado más la probabilidad de descifrar el misterio de los números irracionales, el cual había confundido a Pitágoras.

Después de los grandes descubrimientos de Eudoxo, aparece Arquímides de Somos (287-212 A.C.); Arquímides - fué el que inventó el Cálculo Integral; su primer éxito - fué el calcular el área de la parábola, (curva descubierta por Menecmo en un intento de duplicar el cubo).

Posteriormente Descartes dió un nuevo significado al método de Arquímides sobre el cálculo del área de una curva, utilizando una abscisa ON y una ordenada NP:



Posteriormente viene Pascal que se dedicó entre - otras muchas al estudio de la cicloide, descubriendo sus- principales propiedades, para esto hizo uso de un nuevo - instrumento: "el método de los indivisibles" inventado - por el italiano Cavalieri quien hizo progresar el cálculo integral.

La obra de Pascal se puede considerar como el segundo capítulo del cálculo integral. Posteriormente aparecen Newton y Leibinitz.

Newton en el siglo XVII descubrió el cálculo diferencial e integral que denominó método de fluxiones, formalizando así la integración; pero este descubrimiento lo guardó para él y después de algunos años, Leibinitz anunció que él había descubierto este nuevo método, surgiendo una pelea entre los seguidores de Newton y Leibinitz y entre ellos mismos.

El símbolo que se usa hasta la fecha "$\int$" para sugerir el proceso real de suma fué inventado por Leibinitz.

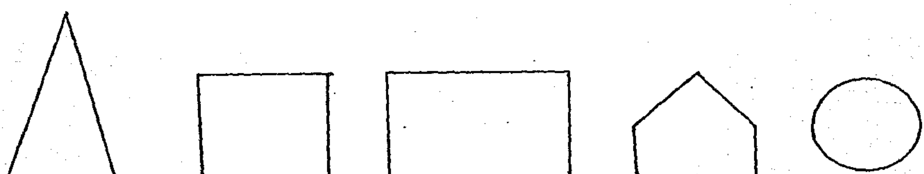
CALCULO DE AREAS

I N T R O D U C C I O N.

Como vimos en el capítulo anterior, el método de aproximaciones consiste en acercarse poco a poco a un resultado por diversas técnicas, en este capítulo nuestro objetivo será acercarnos poco a poco a el área de figuras no necesariamente regulares.

Recordemos por ejemplo:

1) Como encontrar el área de las siguientes figuras.

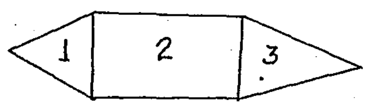


(1) (2) (3) (4) (5)

(6) (7) (8)

Parece que en las 5 primeras no existe problema, puesto que en primària nos enseñaron las fórmulas para encontrar estas áreas y basta con recordarlas y aplicarlas para encontrar el área correspondiente.

En el caso (8) sería deseable hacer lo siguiente



Partir la figura en 3 figuras ya conocidas, calcular el área de cada una de ellas, sumarlas y tendríamos el área de la figura (8).

Taller No. 1

Objetivo: Que el alumno forme diversas figuras y calcule el área de ellas.

Material: Una tabla de 20 cm x 20 cm. Regla, pluma atómica, 121 clavos de 2 pulgadas. y una liga.

Instrucciones:

1) Cuadricula tu tabla con cuadrados de 2 cm x 2 cm.

2) En cada vértice de los cuadrados que se te forman coloca un clavo, (Coloca todos los clavos, inclusive en los extremos).

3) Coloca tu liga sobre la tabla con clavos, estirándola como quieras y sujetándola con los clavos que deseas.

a) Dibuja en tu cuaderno la figura formada con la liga.

b) ¿Cómo podrías encontrar el área de ésta figura?.

c) ¿Cuántos cuadrados de 1 cm x 1 cm, completos quedan dentro de la figura formada con la liga?.

d) Cuántos cuadrados incompletos quedan dentro de la figura (¿qué forma tienen estos cuadrados incompletos?).

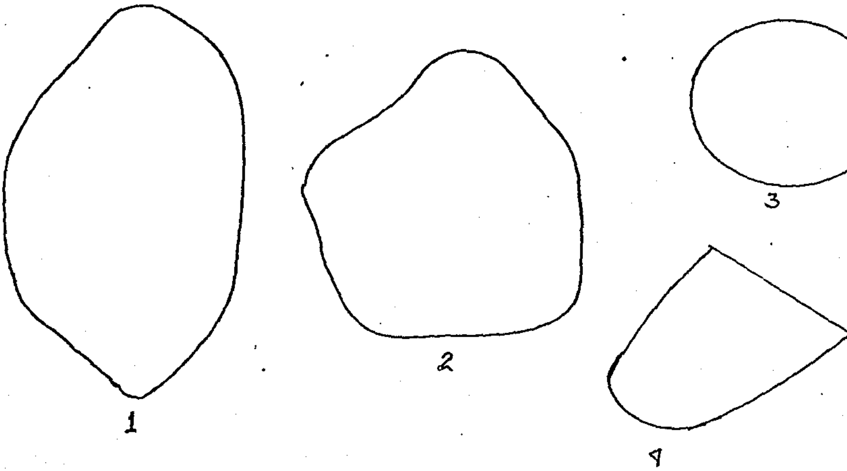
e) Cuál es el área de tu figura.

3) Con tu liga forma otra figura y determina el área de esta nueva figura.

4) ¿Podrías inducir una regla para calcular el área de cualquier figura formada por la liga?.

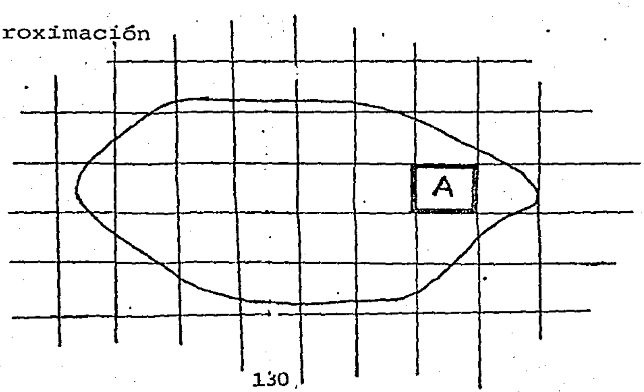
APROXIMACIONES SUCESIVAS PARA EL CALCULO DE AREAS

Ahora calcularemos el área de una figura plana, como las que a continuación se muestran; que no necesariamente están formadas por líneas rectas.



Para esto usaremos el artificio de comparar su área con el área de una figura fija. Usualmente por su sencillez se compara con un cuadrado al que se le llama unidad de área y se observa cuántas veces cabe este cuadrado en la figura, intentemos calcular el área de la (Fig. 1), comparándola con una unidad de área.

1a. Aproximación



Observando la figura (1) tenemos que en ella caben 13 cuadrados A completos y 35 cuadrados que contienen la figura, por lo que podemos afirmar que:

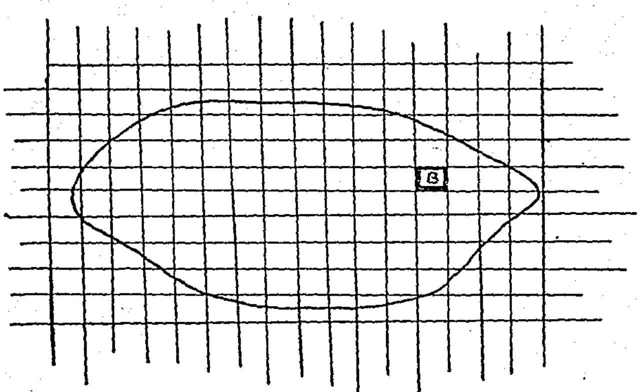
$$\text{Area } (1) \geq 13 \text{ veces área A}$$

y

$$\text{Area } (1) \leq 35 \text{ veces área A}$$

Si quisieramos aproximarnos más a el área de la (Fig.1), nuestro cuadrado de comparación debería ser más pequeño , esto es.

2a. Aproximación.



Observando la figura tenemos que en la (Fig. 1) - caben 72 cuadrados β exactamente y 112 cuadrados que - contienen a la figura, por lo que decimos:

$$\text{Area } (1) \geq 72 \text{ area } B$$

$$\text{Area } (1) \leq 112 \text{ área } B$$

y así sucesivamente nos podemos aproximar al área real de la figura.

Ficha No. 1

1. Con cuadrados de área A y B aproximarse a las áreas de las figuras (2), (3) y (4).

2. Aproximate al área de la figura (4) construyendo pentágonos.

3. Aproximate al área de la figura (3) construyendo triángulos.

CONCLUSIONES

El área de cualquier figura plana:

a) Si es regular (que su contorno esté determinado por líneas rectas), se puede calcular construyendo dentro de ella figuras ya conocidas, calcular su área y sumarlas.

b) Si no es regular (su contorno está determinado por curvas), se puede aproximar a su área construyendo una unidad de comparación y contando cuántas veces cabe ésta en la figura; además esta aproximación se puede hacer tan fina como se desee.

E L   N U M E R O π

APROXIMACIONES AL NUMERO π

(AREA DEL CIRCULO DE RADIO 1)

Sabemos que para calcular el área de un círculo, se usa la fórmula πr^2 donde r es el radio del círculo, pero no sabemos como se obtuvo π.

Supongamos que construímos un círculo de radio 1; entonces su área por la fórmula que conocemos será: $A = \pi(1)^2 = \pi$. Aquí trataremos de **dar** un método para aproximarnos al valor de π; aproximándonos al área del círculo de radio 1, por medio de una sucesión de áreas pero ahora determinadas por polígonos regulares y no por cuadrados, donde el primer polígono tendrá 4 lados, el segundo 8, el tercero 16, etc.

Primera aproximación: consideremos el polígono de 4 lados (cuadrado) donde su área esta dada por $A_c = \ell^2$, ℓ es el lado del cuadrado.

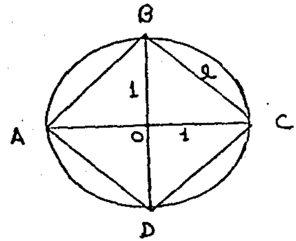


Fig. 1

Sean A B C y D los vértices del cuadrado; para calcular su área es necesario conocer cuanto mide uno de sus lados (ℓ).

Observa que el triángulo B O C es un triángulo rectángulo, donde los catetos $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ miden 1 respectivamente, aplicando el teorema de Pitágoras encontramos que la hipotenusa $\overline{BC} = \ell$, está dada por:

$$\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \ell = \sqrt{2}$$

debido a lo cual, el área del cuadrado A B C D es igual a:

$$A_c = (\sqrt{2})^2 = 2$$

por lo que podemos decir que:

$$\text{Area del círculo} > A_c$$

o sea: $\quad \text{Area del círculo} > 2$

<u>Segunda Aproximación</u>.

Al trazar la mediatriz de cada uno de los lados del cuadrado (de la Fig. 1), se obtienen sobre la circunferencia los puntos E,F,G y H, que junto con los vértices ABCD del cuadrado, forman un polígono regular de 8 lados (octágono), y si calculamos el área de este polígono, tendremos una aproximación mejor que la anterior al área del círculo.

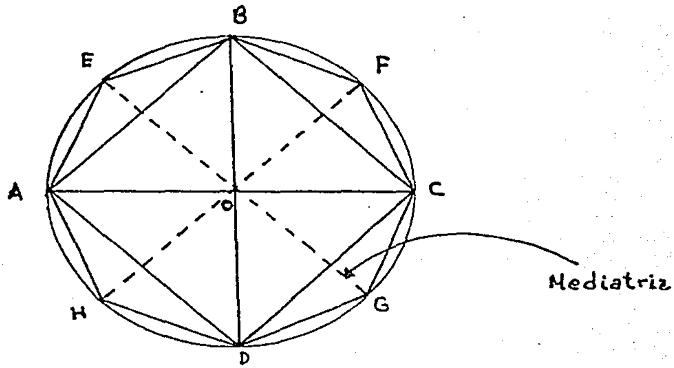


Fig. 2

Recordando que el área de un polígono regular de n lados está dada por:

$$A_p = \frac{p(a)}{2}$$

donde P = Perímetro del polígono

y a = Apotéma del polígono, (recta perpendicular a uno de los lados del polígono y que pasa por O)

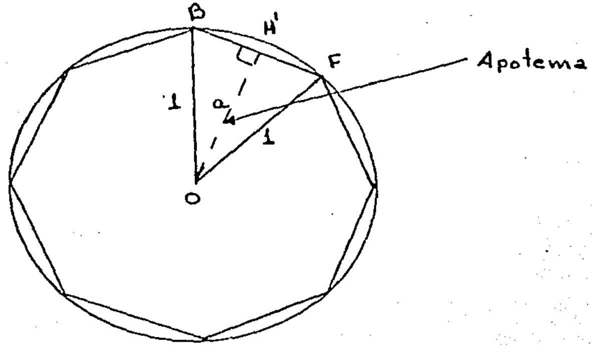


Fig. 3

Entonces para calcular el área del polígono (A_p), necesitamos saber cuanto mide la apotema y cuanto el perí metro (recuerda que el perímetro está dado por $P = \eta \ell$ donde ℓ es la medida de uno de - los lados y η el número de lados del polígono).

Observando la Figura 3, tenemos que la apotema - $a = M'O$ coincide con la bisectriz del ángulo $B\hat{O}F$ y la mediatriz del lado $\overline{BF}$.

Como sabemos que $\hat{BOC} = 90°$, entonces $\hat{BOF} = 45°$ y $M'\hat{O}F = 22°30'$.

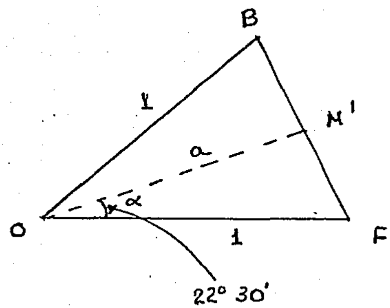


Fig 9

Como el Δ OM'F es rectángulo, podemos aplicar - las funciones trigonómetricas (¿las recuerdas?), para encontrar cuánto mide la apotema a y cuánto mide el lado - $\overline{BF}$ del polígono recordemos que:

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

De la figura 4 tenemos:

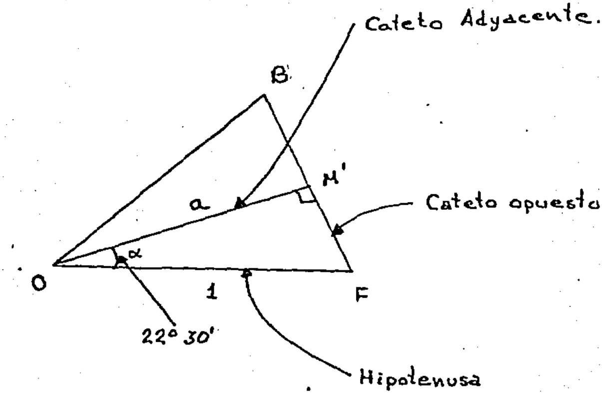


Fig 5.

Substituyendo valores:

$$\cos 22°30' = \frac{a}{1} = a$$

Consultando en las tablas trigonómetricas el valor de Cos 22°30', tenemos:

$$\cos 22°30' = .3827$$

$\therefore \quad a = .3827$ que es el valor de la apotema.

Para calcular el lado $\overline{BF}$, calculamos ahora la función seno de 22°30'.

Recuerda que: $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$

Por lo que: $\text{sen}\ 22°20' = \dfrac{M'F}{1} = M'F$

Consultando tablas tenemos:

Seno 22°30' = .3827

$\therefore$ M'F = .3827

pero M'F es la mitad del lado $\overline{BF}$ del polígono:

$\therefore$ $\overline{BF}$ = 2(.3827) = .7654

Entonces el perímetro del octágono es:

p = 8(.3827) = 6.1232

y el área será:

$$A_p = \frac{(6.1232)(.9239)}{2} = 2.828612$$

Entonces tendremos que:

Area del Círculo > Area del Octágono

Area del Círculo > 2.8286

Tercera Aproximación:

De igual manera que lo hicimos para obtener el octágono, hacemos ahora mediatrices a cada uno de los lados del octágono para obtener los puntos I,J,K,L,M,N,Ñ,P y formar un polígono regular de 16 lados cuya área se acercará más al área del círculo.

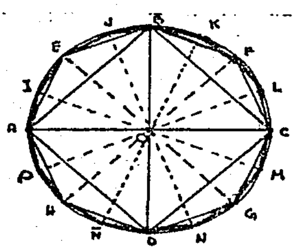


Fig.6

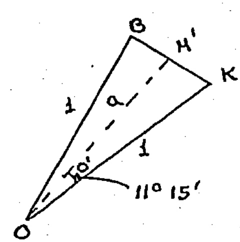


Fig 7

Para calcular cuanto mide uno de los lados del Polígono, consideremos el triángulo B O K en la figura (7).

Donde $\overline{BO} = 1$, $\overline{KO} = 1$ y $B\hat{O}K = 22°30'$. Tracemos el apotema a, que es la bisectriz del ángulo BOK y mediatriz del segmento $\overline{BK}$ por lo que que M'O'K' = 11°15'; y ya que - el ΔM'OK es rectángulo podemos afirmar que:

$$\text{Cos}\quad 11°15' = \frac{a}{1} = a$$

sustituyendo el valor de cos 11°15' obtenemos que:

$$.9808 = a$$

Ahora calculando el sen 11°15' tenemos que:

$$\text{Sen}\ 11°15' = \frac{\overline{M'K}}{1} = \overline{M'K}$$

$$\therefore\quad .1951 = \overline{M'K}$$

y debido a que el segmento $\overline{BK}$ es dos veces el segmento $\overline{M'K}$ obtenemos que:

$$\ell = \overline{BK} = 2(.1951) = .3902$$

por lo que el perímetro del polígono de 16 lados es igual a:

$$P = 16 \cdot \ell = 16(.3902) = 6.2432$$

y el área igual a:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(6.2432)(.9808)}{2} = 3.0616652$$

y por lo tanto podemos decir que:

Area del círculo > área del polígono de 16 lados

esto es:

Area del círculo > 3.0616652

Que es más cercana al área del círculo.

<u>Cuarta aproximación</u>: Si repetimos el procedimiento de la segunda y tercera aproximación y dividimos cada lado del polígono en 2 por medio de la mediatriz, obtendremos un polígono de 32 lados; vamos a dibujar el triángulo que -

dará origen a la medida de uno de sus lados.

El triángulo lo vamos a dibujar a escala para que se puedan observar los datos.

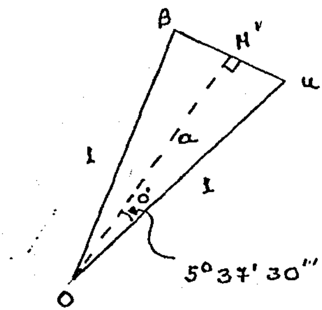


Fig. 8

Sea a el apotema, donde a, es la bisectriz del ángulo BOU y la mediatriz del segmento $\overline{BU}$

$$\therefore\ M'O'U = 5°37'30"$$

Repitiendo el procedimiento de las dos aproxima - ciones anteriores tenemos que:

$$\text{Cos } 5°37'30" = \frac{a}{1} = a$$

$$\therefore \quad .9952 = 1$$

como $\text{sen } 5°37'30" = \frac{\overline{M'U}}{1} = \overline{M'U} \;.\; 0978$

y como $BU = \overline{2M'U}$ entonces

$$\overline{BU} = 2(.0978) = 0.1956$$

$$\therefore \quad P = 32(.1956) = 6.2598$$

y $\quad A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(6.2598)(.9952)}{2} = 3.1145779$

Por lo tanto tenemos que:

Area del círculo > área del polígono de 32 lados esto es:

Area del círculo > 3.11457779

que se acerca aún más al área real del círculo.

Si repitieramos el procedimiento para obtener el área del polígono de 64 lados que se forma al trazar las mediatrices del polígono de 32 lados tendríamos que:

$$a = \cos 2°48' = .9988$$

$$\therefore \quad a = .9988$$

y $\quad \ell = 2(\text{se } 2°48') = 2(0.488) = .976$

$$\therefore \quad \ell = .0876$$

Entones el área es:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(6.2464)(.9988)}{2} = 3.1194521$$

y para el área del polígono de 128 lados tendríamos:

$$a = \text{Cos } 1°24' = .9997$$

$$\ell = 2(\text{Sen } 1°24') = 2(.0245) = .0490$$

$$\therefore \quad P = 128(.0490) = 6.2720$$

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(6.2720)(.9997)}{2} = 3.1350592$$

Taller No.1

El objetivo de éste taller, es que el alumno verifique visualmente que, a medida que el número de lados de los polígonos (regulares) aumente, el área de éstos se aproxima al área del círculo.

Material requerido.- Papel lustre de cuatro colores, papel cascarón o cartulina para formar una base, plumones, tijeras, compás, escuadras y pegamento.

I N S T R U C C I O N E S

1. Con ayuda de tu compás, traza en el papel lustre, un - círculo de radio uno (emplea la escala que desees).

2. Recortalo y pegalo en tú base.

3. En cada uno de los papeles lustres restantes traza el - cuadrado, el octágono y el polígono de 16 lados, que estén inscritos en la circunferencia de radio 1.

4. Recorta los tres polígonos.

5. Sobre el círculo que ya pegaste en tu base, pega el polígono de 16 lados, encima el polígono de 8 y finalmente el cuadrado.

6. ¿Qué puedes observar?

Exactamente, las áreas de los polígonos se aproximan a el área del círculo, observemos ahora las áreas obtenidas:

$A_1 = 2$	A_1 (Area del Cuadrado)
$A_2 = 2.828612$	A_2 (Area del Octágono)
$A_3 = 3.0616652$	A_3 (Area del Polígono de 16 lados)
$A_4 = 3.1145779$	A_4 (Area del Polígono de 32 lados)
$A_5 = 3.1194521$	A_5 (Area del Polígono de 64 lados)
$A_6 = 3.1350592$	A_6 (Area del Polígono de 128 lados)

Como podrás ver los valòres se aproximan al valor de $\pi = 3.1416...$ y esos valores no pasan a $3.1416...$ sino que cada vez se aproximan más y más a $3.1416...$ es por eso que decimos que el límite de esas áreas es $3.1416 ,,, = \pi$.

C O N C L U S I O N E S

El cálculo de áreas de diversas figuras por aproximaciones susecivas nos lleva, en el caso de que las figuras no sean figuras formadas por líneas rectas, a aproximarnos cada vez más al área real de la figura a través - de hacer más "fina" o más "pequeña" la unidad de comparación.

Pero esto nos dá la idea de que entonces al hacer más fina o más pequeña la unidad, tenemos que hacer una -- gran cantidad de cálculos los cuales nos llevarían al área real, pero que en el momento no vemos cual sea esa área; - para el cálculo del número π , se decía que el "límite de las áreas nos hiba a dar el valor de π.

¿Pero entonces cómo obtener ese límite?.

En la siguiente sección se desarrollarán técnicas algebraícas que nos permitan llegar al límite y así poder calcular realmente el área deseada, a esta área le llamaremos Integral.

SUMAS ABREVIADAS

Σ

(NOTACION SIGMA)

I N T R O D U C C I O N

Antes de iniciar la sección de Integral es necesario familiarizarnos con las herramientas que necesitaremos para el cálculo de áreas.

Esta herramienta es precisamente la notación sigma que nos representa sumas abreviadas, y en esta sección, estudiaremos la forma en que se desarrollan diferentes tipos de sumas, y como se obtienen sus resultados.

Estos resultados serán de gran ayuda para poder calcular el área de diversas figuras determinadas por funciones.

SUMA DE LOS N NUMEROS NATURALES

Dice la historia, que un día un profesor de primmaria quizo hacer trabajar a sus alumnos para él poder descansar un momento y les dejó encontrar el resultado de la siguiente suma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \ldots + 20 + \ldots + 100 = \_\_\_\_$$

¿Cuál es el resultado?

Este resultado lo encontró Gauss* rapidamente aplicando a esta sucesión una fórmula que él inventó en ese momento.

* Matemático, físico y astrónomo (1777 - 1855).

Trataremos de inducir esa fórmula.

Observa las siguientes sumas:

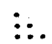
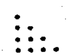
Suma de N Números Naturales			Números Triangulares	
n = 1	1 = 1			base = 1 punto
n = 2	2 + 1 = 3			base = 2 puntos
n = 3	1 + 2 + 3 = 6	Ahora observa los siguien - tes triángu - los.		base = 3 puntos
n = 4	1 + 2 + 3 + 4 = 10			base = 4 puntos
n = 5	1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15			base = 5 puntos

TABLA NO. 1

Taller No. 1

Objetivo: Que el alumno iduzca la fórmula para encontrar la suma de <u>n</u> números naturales utilizando los números triángulares.

Material: La Tabla con clavos del Taller No. 1, de la página 128, un cordel, una regla y una hoja de cuadros

Instrucciones:

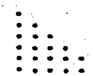
1. En tu hoja cuadriculada realiza las siguientes sumas y al lado dibuja el triángulo correspondiente (como se hizo en la Tabla 1).

$$1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

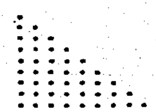
$$\vdots$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$



$$\vdots$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$$



a) ¿Qué relación encuentras entre las sucesiones de la izquierda y los números triángulares de la derecha?.

b) ¿Se podría afirmar que encontrar la suma de la sucesión de la izquierda es lo mismo que encontrar el número de puntos de su correspondiente triángulo a la izquierda?.

2. Ahora, para mostrar que es cierta la afirmación de b).

a) Encuentra el resultado de la siguiente sucesión :

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 =$ ____________________

b) En tu tabla con clavos y con tu cordel localiza el triángulo que le corresponde.

c) ¿Cuántos clavos tiene este triángulo?

d) Entonces el resultado de a) coincide con el numero de clavos de b), por lo que la pregunta ahora será :

¿Cómo encontrar el número de clavos del triángulo?

i) ¿Cómo encontrarías el número total de clavos de tu cuadrado?

Entonces, si $n = 11$, $n^2 = 121$, el total de clavos de la tabla.

ii) Pero, nuestro objetivo es el número de clavos del triángulo.

¿En términos de n, cómo puedes encontrar este número?.

e) Si $n = 5$, el número de puntos del cuadrado serían $n^2 = 25$.

¿Cuál es la suma de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 =$ ______?

¿Cuánto te dá $\frac{n^2}{2}$, cuánto te dá $\frac{n}{2}$?

¿Con éstos dos valores como obtienes 15?

f) Entonces ¿Cuál es la fórmula para encontrar el número de puntos (la suma de n números naturales) que forman un triángulo con n puntos de base?.

Del taller anterior podemos inducir que la fórmula para encontrar la suma de los n números naturales está dada por:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

de donde algebráicamente se tiene que:

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \boxed{\frac{n(n + 1)}{2}}$$

Por lo que podemos decir que la suma $\underline{S}$ de los n números naturales esta dada por:

$$\boxed{S = \frac{n(n + 1)}{2}}$$

Entonces para obtener el resultado de la suma que le dejaron a Gauss

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 100 =$$

lo único que se hace es suponer que $n = 100$ y aplicar la fórmula anterior:

$$S = \frac{100(100 + 1)}{2} = \frac{10100}{2} = \boxed{5050}$$

$$\therefore \quad 1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ldots + 100 = 5050$$

Ficha No. 1

1. Utilizando la fórmula correspondiente calcula las siguientes sumas:

   a) $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots 25 =$

   b) $(1 + 2 + 3 + 4 \ldots .30) - (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 15) =$

   c) $(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots 1000) - (1 + 2 + \ldots + 10) =$

<u>Notación Sigma</u>:

Vamos ahora a introducir una forma de escribir sumas de la forma:

$$1 + 2 + 3 + 4 \ldots . + n$$

Para esto usaremos el símbolo Σ (sigma) que quiere decir suma, entonces para interpretar la suma: $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ en notación sigma se escribe $\sum_{n=1}^{5} n$ que significa la suma de los números naturales desde uno hasta 5.

Así también si queremos expresar la suma de los números naturales desde 1 hasta 17 lo escribimos como : $\sum_{n=1}^{17} n$, y desarrollando tendríamos:

$$\sum_{n=1}^{17} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 17$$

Ahora bien si queremos calcular la suma total tendríamos:

$$\sum_{n=1}^{17} n = \frac{17(17 + 1)}{2} = 153$$

En general podemos decir que :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Ejemplos:

- Vamos ahora a expresar diferentes sumas usando la notación sigma:

1) $1 + 2 + 3 + \ldots 45 = \sum_{n=1}^{45} n$

2) $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \sum_{n=5}^{10} n$

3) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 20 = \sum_{i=1}^{20} i$

4) $4 + 5 + 6 \ldots + 50 = \sum_{j=4}^{50} j$

5) $11 + 12 + \ldots + 36 + \sum_{k=11}^{36} k$

- Encontremos ahora los resultados de las sumas anteriores.

1) $\sum_{n=1}^{54} n = \dfrac{54(54 + 1)}{2} = \dfrac{(54)(55)}{2} = 1485$

2) Como sabemos:

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) - (1 + 2 + 3 + 4)$$

Por lo que:

$$\sum_{n=5}^{10} n = \sum_{n=1}^{10} n - \sum_{n=1}^{4} n = \frac{(10(10+1)}{2} - \frac{4(4+1)}{2} = \frac{110}{2} + \frac{20}{2} = 55 + 10 = \underline{65}$$

3) $$\sum_{i=1}^{20} i = \frac{20(20+1)}{2} = \underline{210}$$

4) $$\sum_{j=4}^{50} j = \sum_{j=1}^{50} j - \sum_{j=1}^{3} =$$

$$= \frac{50(50+1)}{2} + \frac{3(3+1)}{2}$$

$$= 1275 + 6$$

$$= \underline{1281}$$

5) $$\sum_{k=11}^{36} k = \sum_{k=1}^{36} k - \sum_{k=11}^{10} k$$

$$= \frac{36(36+1)}{2} - \frac{10(10+1)}{2}$$

$$= 666 - 55$$

$$= \underline{611}$$

Ficha No. 2

---

1. Desarrolla las siguientes sumas y calcula su resultado:

1) $\sum_{n=1}^{60} n =$

2) $\sum_{k=11}^{50} k =$

3) $\sum_{w=2}^{30} w =$

4) $\sum_{i=5}^{9} i =$

5) $\sum_{j=3}^{15} j =$

2.- Resuelve utilizando la notación sigma el siguiente problema:

Cuánto se gana en una rifa de 1000 boletos en donde cada boleto cuesta en pesos, el número del boleto (los boletos están numerados del 1 al 1000).

SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS N NUMEROS NATURALES

Vamos ahora a obtener la suma de la siguiente sucesión :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 =$$

¿Cuál es el resultado?

Observa que ahora estamos elevando al cuadrado cada uno de los números naturales y después los sumamos, este proceso es "latoso" por lo que también sería deseable encontrar una fórmula que nos diera el resultado sin necesidad de hacer todos estos cálculos.

Taller No. 2.

Objetivo: Que el alumno induzca (por tanteos) la fórmula para encontrar la suma de los cuadrados de los n números naturales.

Material: 55 cubos del material que desees.

Indicaciones :

1.- Calcula el resultado de las siguientes sumas :

$$1^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$1^2 + 2^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

2. Con tus cubos construye las siguientes pirámides.

1) Pirámide de base 1 x 1 (cubo)

2) Pirámide de base 2 x 2 (cubo)

3) Pirámide de base 3 x 3 (cubos)

4) Pirámide de base 4 x 4 (cubos)

5) Pirámide de base 5 x 5 (cubos)

¿Qué observas con respecto al número de cubos de cada pirámide y los resultados de las series del inciso 1?.

3. Como observaste el número de cubos de una pirámide de base n coincide con la suma de los cuadrados de n números naturales, entonces ahora, ¡intenta encontrar una fórmula para encontrar el número de elemntos de una pirámide de base n!

4. La fórmula a la que pretendemos llegar es a:

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

¿Cómo la justificarías?.

Del taller anterior obtuvimos, que la fórmula para encontrar la suma de los cuadrados de los n números naturales a la que llamaremos S^2, es:

$$S^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

y algebráicamente tenemos que:

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{(n^2 + n)(2n + 1)}{6} = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

$$\therefore \quad \boxed{S^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}}$$

Fórmula para encontrar la suma de los cuadrados de los n números naturales.

Entonces la suma de:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + 10^2 =$$

Aplicando la fórmula anterior sería:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 = \frac{(10)(10+1)(2(10)+1)}{6}$$

$$= \frac{(110)(21)}{6}$$

$$= \frac{2310}{6}$$

$$= \underline{375}$$

Ejemplo:

Calcular la suma de la siguiente sucesión utilizando la fórmula correspondiente:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 54^2 = \frac{(54)(55)(2(54)+1)}{6}$$

$$= \frac{(54)(55)(108+1)}{6}$$

$$= 5395$$

Ahora cabe la pregunta: ¿Cómo podríamos escribir $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots. 54^2$ en notación sigma?

¿Ya se te ocurrió?, claro es:

$$\sum_{n=1}^{54} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots. + 54^2$$

y en general la suma de los cuadrados de n números naturales estará dada por:

$$\sum_{K=1}^{n} K^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots. n^2$$

Ejemplos:

Escribir en notación sigma las siguientes sumas:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots.100^2 = \sum_{y=1}^{100} y^2$$

$$5^2 + 6^2 + 7^2 + \ldots.10^2 = \sum_{n=1}^{10} n^2 - \sum_{n=1}^{4} n^2$$

$$20^2 + 21^2 + 22^2 + 23^2 \ldots.+ 50^2 = \sum_{k=1}^{50} k^2 - \sum_{k=1}^{19} K^2$$

Ficha No. 3

1. Obtener los resultados de los ejercicios anteriores.

2. Desarrollar las siguientes sumas abreviadas y obtener su resultado.

a) $\sum_{k=3}^{7} k^2 =$

b) $\sum_{i=2}^{1000} i^2 =$

c) $\sum_{n=1}^{20} n^2 - \sum_{n=1}^{10} n =$

d) $\sum_{n=30}^{50} n - \sum_{n=15}^{25} n^2 =$

3. Obtén el resultado de la siguiente suma y escríbelo en notación sigma.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ...10^3 =$

4. Indaga la fórmula para obtener la suma de los cubos de los n números naturales.

5. ¿Se te ocurre cómo mostrar esta fórmula?.

C O N C L U S I O N E S

La fórmulas mostradas en esta sección:

a) Para sumar n números naturales

$$S = \frac{n(n + 1)}{2}$$

b) Para sumar los n^2 números naturales.

$$S^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

c) Para sumar los n^3 números naturales

$$S^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

Pueden ser demostradas algebráicamente, nuestro objetivo en esta sección es sólo obtener estos resultados para poderlos aplicar en la siguiente sección, por eso no se hizo énfasis en su demostración algebráica, sin embargo a continuación se propone la demostración algebráica para cada una de las fórmulas anteriores para quienes estén interesados en saber de donde se obtienen algebráicamente.

Consideremos la igualdad al menos cierta para los números naturales.

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Vamos a reemplazar n por n - 1, después por n - 2, n - 3, n - 4, etc. hasta llegar a 1; de esta manera obtenemos:

$$
\begin{array}{lclclll}
 & & \text{1a.Columna} & & \text{2a.Columna} & \text{3a.Columna} & \text{4a.Columna} \\
(n+1)^2 & = & (n+1)^2 & = & n^2 & +\ 2n & +\ 1 \\
(n-1+1)^2 & = & n^2 & = & \boxed{(n-1)^2} & +\ 2(n-1) & +\ 1 \\
(n-2+1)^2 & = & \boxed{(n-1)^2} & = & (n-2)^2 & +\ 2(n-2) & +\ 1 \\
(n-3+1)^2 & = & (n-2)^2 & = & (n-3)^2 & +\ 2(n-3) & +\ 1 \\
(n-4+1)^2 & = & (n-3)^2 & = & \boxed{(n-4)^2} & +\ 2(n-4) & +\ 1 \\
(n-5+1)^2 & = & \boxed{(n-4)^2} & = & (n-5)^2 & +\ 2(n-5) & +\ 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
(n-(n-1)+1)^2 & = & (1+1)^2 & = & 1^2 & +\ 2.1 & +\ 1
\end{array}
$$

Recuerda que si tiene el siguiente caso:

$$2x + y = y + 4$$

por estar la y en ambos miembros de la igualdad se puede anular.

Ahora si sumamos los términos de las columnas uno y dos, por lo anterior, podremos ver que los términos punteados, se eliminan, al igual que los que estén encerrados en rectángulo y en elipce, por lo que en la primera columna sólo nos quedaría $(n + 1)^2$ y en la segunda quedaría $(1)^2 = 1$. Sumando en otro renglón la tercera columna tenemos: $2(1 + 2 + \ldots + (n-5) + (n-4) + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n)$.

Sea $S = 1 + 2 + \ldots\ldots + n$ entonces la tercera columna es igual a $2S$.

Sumando la cuarta columna tenemos

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1}_{n \text{ veces}}$$

por lo que es igual a n; entonces tenemos que:

$$(n + 1)^2 = 1 + 2S + n$$

$$(n + 1)^2 = 2S + (n + 1)$$

$$(n + 1)^2 - (n + 1) = 2S$$

$$n^2 + 2n + 1 - n - 1 = 2S$$

$$n^2 + n = 2S$$

$$n(n + 1) = 2S \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\therefore \quad S = \frac{n(n + 1)}{2}$$

que es la fórmula que obtuviste. (en el caso de la suma de los n números naturales.

Si queremos obtener ahora la fórmula para $S^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ trabajaremos con la igualdad (válida, al menos para todos los números naturales):

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

donde reemplazaremos n por $(n-1)$ por $(n-2)$, $(n-3)$, $(n-4)$ hasta 1 y seguiremos el procedimiento semejante al anterior.

Observa:		Columna 1		Columna 2	Columna 3	Columna 4	Columna 5
$(n+1)^3$	$=$	$(n+1)^3$	$=$	n^3	$+ 3n^2$	$3n$	$+ 1$
$(n-1+1)^3$	$=$	n^3	$=$	$(n-1)^3$	$+ 3(n-1)^2$	$+ 3(n-1)$	$+ 1$
$(n-2+1)^3$	$=$	$(n-1)^3$	$=$	$(n-2)^3$	$+ 3(n-2)^2$	$+ 3(n-2)$	$+ 1$
$(n-3+1)^3$	$=$	$(n-2)^3$	$=$	$(n-3)^3$	$+ 3(n-3)^2$	$+ 3(n-3)$	$+ 1$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(n-(n-1)+1)^3$	$=$	$(1+1)^3$	$=$	1^3	$+ 3.1^2$	$+ 3.1$	$+ 1$

Recuerda que:

$$(n+1)^3 = 1 + 3S^{(2)} + 3S + n$$

donde el símbolo: $S^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$

$$\text{y} \qquad S = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$$

desarrollando:

$$(n + 1)^3 - n - 1 = 3S^2 + 3S$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = 3S^2 + 3S$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n = 3S^2 + 3S \quad \ldots \quad (1)^1$$

Como $S = \dfrac{n(n + 1)}{2}$ sustituímos en $(1)^1$

$$n^3 + 3n^2 + 2n = 3S^2 + 3\left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} = 3S^2$$

$$2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n = 6S^2$$

$$2n^3 + 3n^2 + n = 6S^2$$

$$n(n + 1)(2n + 1) = 6S^2$$

$$\therefore \quad S^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

que es la fórmula inducida para S^2.

De la misma forma podríamos demostrar la fórmula para S^3. ¡Intenta hacerlo!

PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA NOTACION SIGMA

Existen algunas propiedades importantes de las sumas abreviadas que nos serán útiles en la siguiente sec -- ción, induciremos estos propiedades con el desarrollo de la siguientes fichas.

Ficha No. 4

1. Desarrolla las siguientes sumas y calcula su resultado:

Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{5} 2k = 2(1) + 2(2) + 2(3) + 2(4) + 2(5)$$

$$= 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

$$= 2(\frac{5(6)}{2})$$

$$= 2(15)$$

$$= 30$$

a) $\sum_{k=1}^{4} 4k =$

b) $\sum_{k=1}^{5} 9k =$

¿Qué puedes inducir de los ejercicios anteriores?.

2. Desarrolla:

$\sum_{k=1}^{15} 2k^2 =$

De esta ficha podemos concluir la primera propiedad. que dice:

$$\sum_{k=1}^{n} ak = a \sum_{k=1}^{n} k$$

o sea que:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} ak = a \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}$$

Desarrollaremos el ejercicio b aplicando este resultado:

$$\sum_{k=1}^{5} 4k = 4\left(\frac{5(5+1)}{2}\right)$$

$$= 4(15)$$

$$= 60$$, que resulta más sencillo.

Por lo tanto, también podemos concluir que:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} ak^2 = a \sum_{k=1}^{n} k^2}$$

y que:

$$\sum_{k=1}^{n} ak^2 = a\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

y lo mismo para:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} ak^3 = a \sum_{k=1}^{n} k^3 = a\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]}$$

Ficha No. 5

Desarrolla las siguientes sumas.

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ (1 + 2 + 3 + 4)$$

$$= \frac{1}{2}\ (\frac{4(5)}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\ (10)$$

$$= \underline{5}$$

1) $\sum_{n=1}^{5} \frac{n}{5} =$

2) $\sum_{n=1}^{3} \frac{2n}{7} =$

3) $\sum_{n=1}^{8} \frac{3n}{8} =$

-¿Qué puedes concluir de los ejercicios anteriores?.

4) Desarrolla.

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{3n^2}{5} =$$

De esta ficha podemos concluir que:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{an}{b} = \sum_{n=1}^{k} \cdot \frac{a}{b} n$$

$$\therefore \boxed{\sum_{n=1}^{k} \frac{a}{b} n = \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{k} n}$$

Lo mismo tendremos para.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{k} \frac{a}{b} n^2 = \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{k} n^2}$$

y para:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{k} \frac{a}{b} n^3 = \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{k} n^3}$$

Ficha No.6

Desarrolla las siguientes sumas:

Ejemplo:

$$\sum_{j=1}^{4} (j + \frac{3j}{2}) = \left[1 + \frac{3(1)}{2}\right] + \left[2 + \frac{3(2)}{2}\right] +$$

$$+ \left[3 + \frac{3(3)}{2}\right] + \left[4 + \frac{3(4)}{2}\right]$$

$$= 1 + \frac{3}{2}(1) + 2 + \frac{3}{2}(2) +$$

$$+ 3 + \frac{3}{2}(3) + 4 + \frac{3}{2}(4)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \frac{3}{2}(1 + 2 + 3 + 4)$$

$$= \frac{4(5)}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{4(5)}{2}\right)$$

$$= 10 + \frac{3}{2}(10)$$

$$= \underline{25}$$

1) $\sum_{j=1}^{3} (j + \frac{j}{4}) =$

2) $\sum_{j=1}^{5} (2j + \frac{5j}{3}) =$

3) $\sum_{j=1}^{4} (5j + \frac{3}{2}j) =$

¿Qué puedes concluir?.

4) $\sum_{j=1}^{5} (5j^2 + \frac{3}{2} j^3) =$

De esta ficha se puede concluir que:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} (aj + bj) = a \sum_{j=1}^{n} J + b \sum_{j=1}^{n} j}$$

y en general que:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} aj^k + bj^\ell = a \sum_{j=1}^{n} j^k + b \sum_{j=1}^{n} j^\ell}$$

Ficha No.7

Desarrolla las siguientes sumas:

Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{4} 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = \underline{20}$$

1) $\sum_{k=1}^{4} 6 =$

2) $\sum_{k=1}^{10} 0 =$

¿Qué concluyes?.

Ficha No.8

- Resume las fórmulas obtenidas en las fichas anterio - res (4,5,6 y 7)

- Encuentra el valor de las siguientes sumas:

$$\sum_{p=1}^{6} (10 - P)$$

$$\sum_{n=1}^{10} 5n^3 =$$

$$\sum_{k=1}^{7} (k^2 + 1)$$

$$\sum_{b=0}^{4} (b + b^2) =$$

$$\sum_{k=1}^{5} \left(n + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{6} \left(\frac{k}{2} + \frac{k^2}{4} + \frac{3}{2}k^2\right)$$

AREAS BAJO CURVAS DETERMINADAS POR UNA FUNCION

CALCULO DE AREAS BAJO CURVAS DETERMINADAS POR FUNCIONES

Con la herramienta estudiada en la sección anterior, nos será posible determinar el área de figuras que no necesariamente estén formadas por rectas, pero hubicadas en un plano cartesiano y determinadas por una función.

AREAS BAJO FUNCIONES LINEALES

Comencemos por calcular áreas de figuras determinadas por funciones lineales como por ejemplo:

1) $f(x) = 3x$

2) $f(x) = 3$

3) $f(x) = 3x + 1$

en un intervalo determinado, como por ejemplo en el intervalo $[0,1]$.

Caso 1.

Sea $f(x) = 3x$, su gráfica es la siguiente:

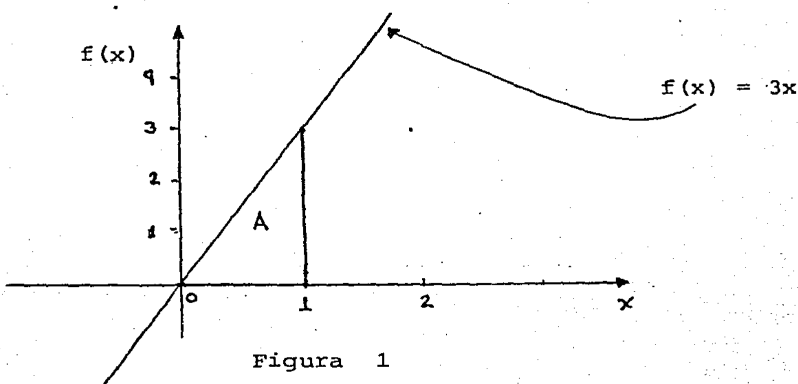


Figura 1

y como observarás en el intervalo $[0,1]$, y debajo de la función y sobre el eje x se determina la región A, cuya forma es un triángulo, por lo que en este caso particular, encontrar el área bajo la función en el intervalo $[0,1]$, significa encontrar el área del triángulo A, cuya base mide una unidad y cuya altura mide 3 unidades; aplicando la fórmula para el cálculo de áreas de triángulos tenemos:

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$A = \frac{1(3)}{2} = 1.5 \text{ unidades cuadradas.}$$

Caso 2.

Sea $f(x) = 3$; para graficar, recordemos que es una recta paralela al eje "x" que intersepta al eje "y" en 3 o sea:

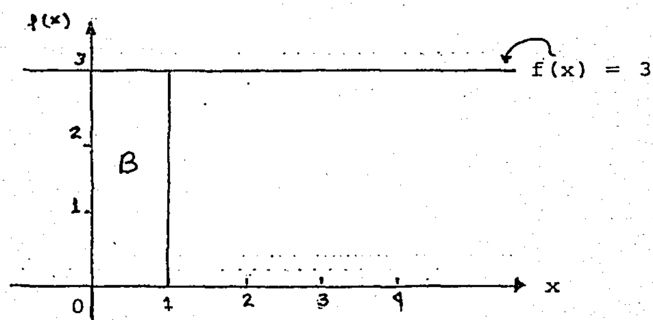


Figura 2

En este caso particular, el encontrar el área en el intervalo $[0,1]$, significa encontrar el área del rectángulo B cuya base mide una unidad y cuya altura mide 3 unidades; aplicando la fórmula para encontrar el área de un rectángulo.

$$B = b \times h$$

tenemos que el área del rectángulo es:

$$B = 1 \times 3 = 3 \quad \text{unidades cuadradas.}$$

Caso 3.

Sean $f(x) = 3x + 1$; para graficar observemos que la pendiente de la recta es 3 y su ordenada al origen 1; por lo que tenemos:

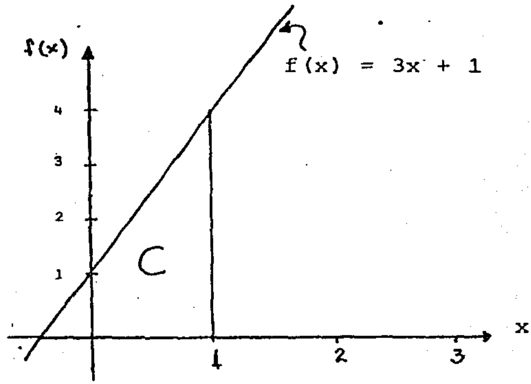


Figura 3

En este caso particular, el encontrar el área en el intervalo $[0,1]$ significa encontrar el área del trapecio C. Sabemos que la fórmula para el área del trapecio es $C = \frac{(B + b)h}{2}$ donde:

B = Base mayor que mide 4 unidades

b = Base menor que mide 1 unidad

h = Altura que mide 1 unidad

$$\therefore \; C = \frac{(4 + 1)1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$ unidades cuadradas.

Ficha NO. 1

- Calcula el área en el intervalo $[0,1]$ bajo las siguientes funciones:

1) $f(x) = x$

2) $f(x) = 2x + 1$

3) $f(x) = -x$

4) $f(x) = 5x - 1$

5) $f(x) = -2x - 3$

C O N C L U S I O N E S

En el caso de tener funciones lineales, no existe ningún problema para determinar el área que se determina en cualquier intervalo (no necesariamente $[0,1]$), ya que se obtienen figuras formadas por rectas y cuya área la podemos encontrar formando en ella figuras elementales como: triángulos, rectángulos, cuadrados o trapecios.

El problema se presentará en el caso de funciones no lineales, que como ya sabemos nos representarán curvas en el plano cartesiano.

AREAS BAJO FUNCIONES NO LINEALES

Calculemos el área bajo la función no lineal $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$.

Tabulemos para construir su gráfica.

X	f(x)
0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
2	4

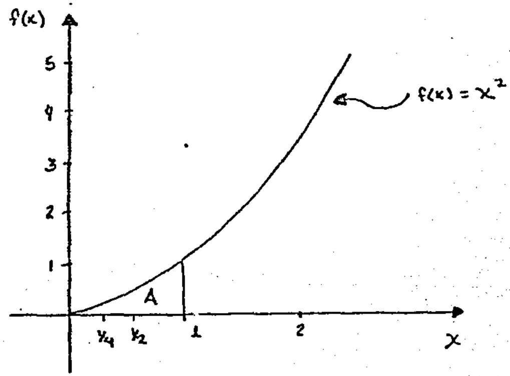


Figura 4

Para calcular el área bajo esta curva (parábola) en el intervalo $[0,1]$, tendremos que recurrir al método de aproximaciones sucesivas, puesto que en forma directa, figuras elementales cuya área conozcamos ya no es posible en este caso.

Para calcular esta área realizaremos las siguientes aproximaciones:

Primera aproximación.

1. Divide el intervalo [0,1] en tres partes iguales y dibuja los rectángulos que se forman por debajo de la curva (contenidos en la región A que se forma en la Figura 4).

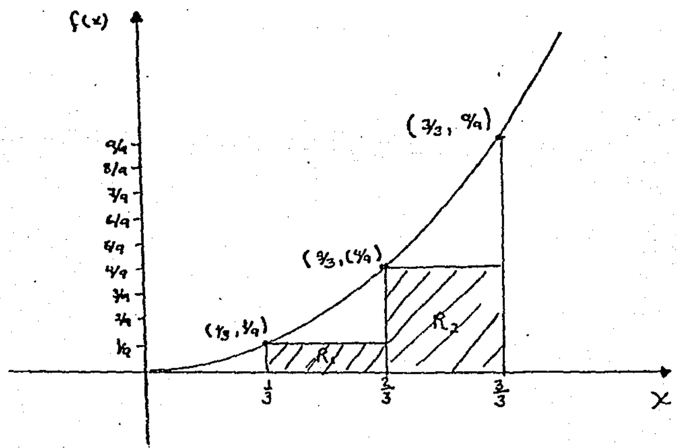


Figura 5

2. Calculando el área de los rectángulos R_1 y R_2, tendremos la primera aproximación al área deseada, para esto calcularemos las bases, y las alturas de los rectángulos como se hace en el siguiente cuadro:

Rectángulo	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3})^2$	$A(R_1) = \frac{1}{3}(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}\frac{(1)^2}{3^2} = \frac{1}{3^3}\ 1^2$
R_2	$\frac{1}{3}$	$(\frac{2}{3})^2$	$A(R_2) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{3}\frac{(2)^2}{3^2} = \frac{1}{3^3}\ 2^2$

Observa que las alturas de los rectángulos están determinados por la función.

3. Sumemos el área de R_1 y R_2 para obtener el área de la región sombreada de la figura 5, que llamaremos Area Inferior y la denotaremos por $\underline{A}_3$ (3 por haber hecho 3 divisiones en el dominio de la función).

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{3^3}(1)^2 + \frac{1}{3^3}(2)^2$$

$$= \frac{1}{3^3}\left[1^2 + 2^2\right]$$

Como podrás observar este resultado se puede proponer en notación Σ como:

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{3^3} k^2 = \frac{1}{3^3}(5) = \frac{5}{27} = .185185$$

$$\therefore \quad A_3 = .185185$$

De lo anterior podríamos decir, entonces que:

$A_3 = \sum_{k=1}^{2} A(R_k)$ = al área de las sumas de los rectángulos R_1 y R_2.

4. Como A es el área que se desea encontrar.

Entonces: $A \geq \underline{A}_3 = .185185$

$$\therefore \quad A \geq .185185$$

Segunda Aproximación.-

1. Ahora vamos a dividir el intervalo $[0,1]$ en 6 partes iguales; dibuja los rectángulos que se forman por debajo de la curva.

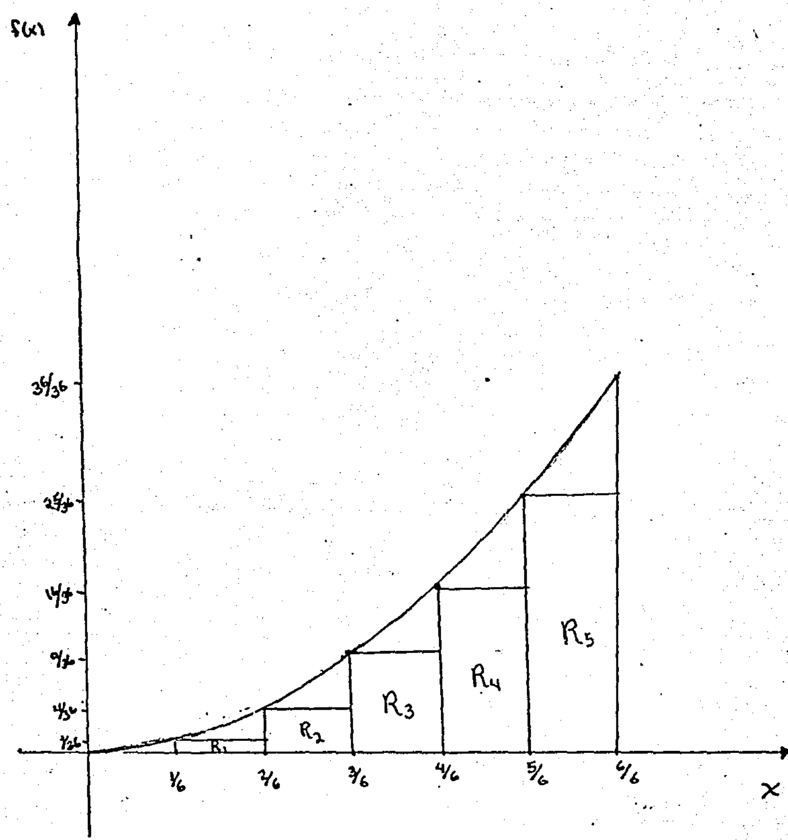


Figura 6

2. Calculemos el área de $R_1, R_2, \ldots R_5$ para lo cual llenemos el siguiente cuadro:

Rectángulo	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{6}$	$(\frac{1}{6})^2$	$A(R_1) = \frac{1}{6}(\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1^2}{6^2} = \frac{1}{6^3}(1)^2$
R_2	$\frac{1}{6}$	$(\frac{2}{6})^2$	$A(R_2) = \frac{1}{6}(\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{6}\,\frac{2^2}{6^2} = \frac{1}{6^3}(2)^2$
R_3	$\frac{1}{6}$	$(\frac{3}{6})^2$	$A(R_3) = \frac{1}{6}(\frac{3}{6})^2 = \frac{1}{6}\,\frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{6^3}(3)^2$
R_4	$\frac{1}{6}$	$(\frac{4}{6})^2$	$A(R_4) = \frac{1}{6}(\frac{4}{6})^2 = \frac{1}{6}\,\frac{4^2}{6^2} = \frac{1}{6^3}(4)^2$
R_5	$\frac{1}{6}$	$(\frac{5}{6})^2$	$A(R_5) = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^2 = \frac{1}{6}\,\frac{5^2}{6^2} = \frac{1}{6^3}(5)^2$

3. Calcularemos $\underline{A_6} = \sum_{k=1}^{5} aR_K$, para obtener el área de la región sombreada de la figura 6.

$$\underline{A_6} = \sum_{k=1}^{5} a(R_k) = \frac{1}{6^3}(1)^2 + \frac{1}{6^3}(2)^2 + \frac{1}{6^3}(3)^2 + \frac{1}{6^3}(4)^2 + \frac{1}{6^3}(5)^2 =$$

$$= \frac{1}{6^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\right] \ldots \quad (*)$$

Aplicando la fórmula de la sección anterior para encontrar la suma de los n cuadrados.

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \frac{5(6)(11)}{6} = 55$$

por lo que sustituyendo en (*) tenemos que:

$$\underline{A}_6 = \frac{1}{6^3}(55) = \frac{1}{216}(55) = .2546296$$

$$\therefore \quad A \geq \underline{A}_6 \geq \underline{A}_3$$

Donde $\underline{A}_3$ es igual a el área inferior de la primera Aproximación con 2 subdivisiones.

$\underline{A}_6$ es igual al área inferior de la segunda Aproximación con seis subdivisiones.

A Area total de la región.

<u>Tercera Aproximación</u>.-

Ahora dividamos al intervalo $[0,1]$ en 12 partes iguales; dibuja los rectángulos que se forman por debajo de la curva.

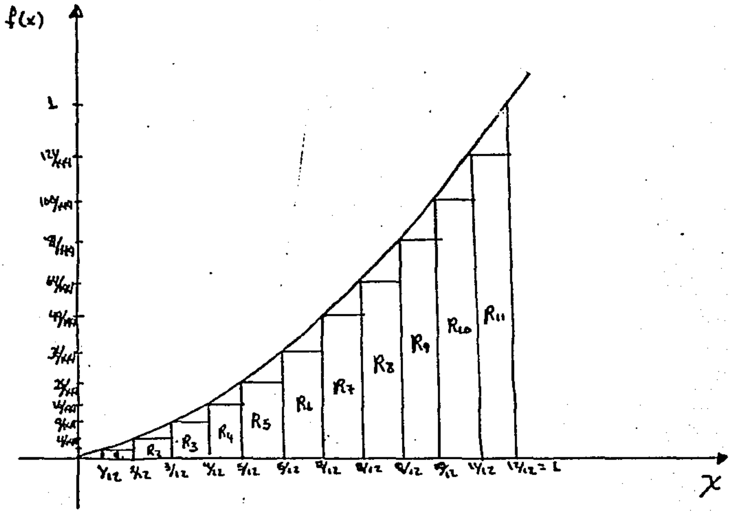


Figura 7

2. Calcularemos el área de R_1, R_2, R_3, ... R_{11}

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{12}$	$(\frac{1}{12})^2$	$A(R_1) = \frac{1}{12}(\frac{1}{12})^2 = \frac{1}{12}\frac{1^2}{(12)^2} = \frac{1}{(12)^3}(1)^2$
R_2	$\frac{1}{12}$	$(\frac{2}{12})$	$A(R_2) = \frac{1}{12}(\frac{1}{12})^2 = \frac{1}{12}\frac{2^2}{(12)^2} = \frac{1}{(12)^3}(2)^2$
R_3	$\frac{1}{12}$	$(\frac{3}{12})^2$	$A(R_3) = \frac{1}{12}(\frac{3}{12})^2 = \frac{1}{12}\frac{3^2}{(12)^2} = \frac{1}{(12)^3}(3)^2$
⋮	⋮	⋮	⋮
R_{11}	$\frac{1}{12}$	$(\frac{11}{12})^2$	$A(R_{11}) = \frac{1}{12}(\frac{11}{12})_2 = \frac{1}{12}\frac{(11)^2}{(12)^2} = \frac{1}{(12)^3}(11)^2$

3. Calculemos $\underline{A}_{12} = \sum_{k=1}^{11} a(R_k)$ para obtener el área de la región sombreada de la figura 7.

$$\underline{A}_{12} = \sum_{k=1}^{11} a(R_k) = \frac{1}{(12)^3}(1)^2 + \frac{1}{(12)^3}(3)^2 + \frac{1}{(12)^3}(4)^2 +$$

$$\ldots + \frac{1}{(12)^3}(11)^2 = \frac{1}{(12)^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots 11^2\right] \cancel{(11)}$$

$$\text{Como} \quad \sum_{k=1}^{11} k^2 = \frac{11(11 + 1)(2 \cdot 11 + 1)}{6} = \frac{11(12)(23)}{6} = 506$$

sustituyendo este valor en (~~11~~) tenemos que:

$$\underline{A}_{12} = \frac{1}{(12)^3} = (506) = \frac{1}{1728}(506) = .292824$$

4. $\therefore$

$$A \geq \underline{A}_{12} \geq \underline{A}_6 \geq \underline{A}_3$$

Taller No. 2.-

Objetivo: Que el alumno conpruebe visualmente que a medida que se divide en mayor número de partes el intervalo, nos vamos acercando o aproximando más a él área real de A.

Material: Papel lustre de 4 colores, papel cascarón o cartulina para formar una base, tijeras, pegamento, - plumones, escuadras.

Instrucciones:

1. En tú base dibuja la parábola $f(x) = x^2$

2. Recorta del papel lustre la región A bajo la curva en el intervalo $[0,1]$ y pega la región A en tú base.

3. Recorta en papel lustre de otro color los 11 rectángulos formados en la tercera aproximación y pegalos sobre la región A.

4. Recorta en papel lustre de otro color diferente, los 5

rectángulos formados en la segunda aproxmación y pegalos encima de los anteriores.

5. Recorta en papel lustre de otro color diferente los 2 rectángulos formados en la primera aproximación y pegalos sobre los anteriores.

¿Qué puedes observar?.

Como has observado del taller anterior, a medida que realizamos más subdisiones del dominio de la función, el área inferior se aproxima al área A.

$\underline{A}_1 = .148148$

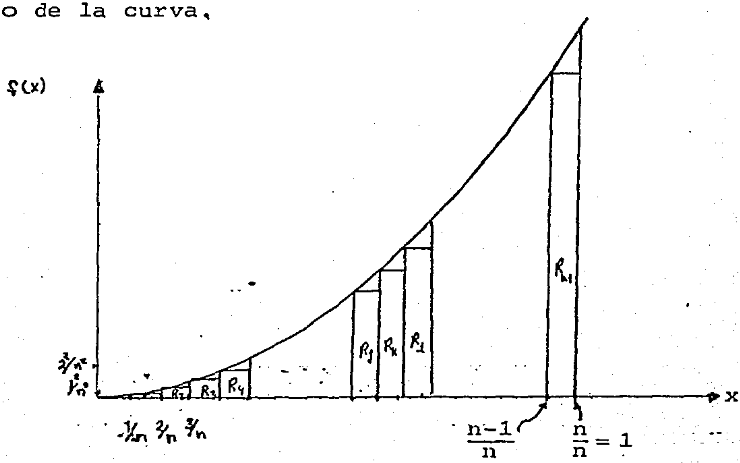
$\underline{A}_2 = .2546296$

$\underline{A}_3 = .292824$

Tabla 1

Cuarta Aproximación y última.

1. Ahora dividamos el intervalo $[0, 1]$ en $n > 12$ partes iguales; dibuja los rectángulos que se forman debajo de la curva.



2. Calcularemos el área de R_1, R_2, R_3, ... $R_{(n-1)}$ para lo cual llenaremos el siguiente cuadro.

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{n}$	$(\frac{1}{n})^2$	$a(R_1) = \frac{1}{n}\ (\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n}\ \frac{1^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}(1)^2$
R_2	$\frac{1}{n}$	$(\frac{2}{n})^2$	$\frac{1}{n}\ (\frac{2}{n})^2 = \frac{1}{n}\ \frac{1^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}(2)^2$
R_3	$\frac{1}{n}$	$(\frac{3}{n})^2$	$\frac{1}{n}\ (\frac{3}{n})^2 = \frac{1}{n}\ \frac{1^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}(3)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
R_{n-1}	$\frac{1}{n}$	$(\frac{n-1}{n})^2$	$a(R_{n-1}) = \frac{1}{n}\ (\frac{n-1}{n})^2 = \frac{1}{n}\ (\frac{n-1}{n^2}) = \frac{1}{n^3}(n-1)^2 =$

3. Calcularemos $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} a(R_k)$ para obtener el área de la región sombreada de la figura 8.

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} a(R_k) = \frac{1}{n^3}\ (1)^2 + \frac{1}{n^3}(2)^2 + \frac{1}{n^3}(3)^2 + \frac{1}{n^3}(4)^2 + \ldots \frac{1}{n^3}(n-1)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (n-1)^2\right] \ldots (\$)$$

Como $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)\left[(n-1)+1\right]\left[2(n-1)+1\right]}{6} = \frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6} =$

$$= \frac{(n-1)\ (n)\ (2n-1)}{6}$$

Sustituyendo éste resultado en ($) tenemos que;

$$A_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)(n)\ (2n-1)}{6} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)\ (2n-1)}{n^3}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 1(\frac{n}{n} - \frac{1}{n})\ (\frac{2n}{n} - \frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (1 - \frac{1}{n})\ (2 - \frac{1}{n})\ ....\ (\cdot)$$

4. $\therefore\ A \geq A_n \geq A_{12} \geq A_6 \geq A_3$

La fórmula (·) representará el área inferior en el intervalo $[0,1]$ bajo la función $f(x) = x^2$, para - cualquier n subdivisiones del intervalo; entonces, si- sustituímos n = 3, n = 6 y n = 12, obtendremos los resultados de las 3 aproximaciones hechas anteriormente, esto es:

Si n = 3, $\underline{A}_3 = \frac{1}{6} \quad (1 - \frac{1}{3})(2 - \frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{6} \quad (\frac{2}{3})(\frac{5}{3}) \qquad = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{3} \cdot \frac{5}{3}$$

$\frac{5}{27} = \underline{.185185}$ (1a. aproximación)

Si n = 6, $\underline{A}_6 = \frac{1}{6} \quad (1 - \frac{1}{6}) \; (2 - \frac{1}{6}) =$

$\frac{1}{6} \quad (\frac{5}{6} \quad \frac{11}{6}) \; \frac{55}{216} = .254629$ (2a. aproximación)

Si n = 12 $\underline{A}_{12} = \frac{1}{6} \quad (1 - \frac{1}{12}) \; (2 - \frac{1}{12}) =$

$= \frac{1}{6} \quad (\frac{11}{12})(\frac{23}{12}) \quad = \frac{1}{6} \; (\frac{253}{144}) \; = (\frac{253}{864}) = .292824$ (3a. aproximación).

Ficha No. 2

Con el resultado de la fórmula (·) calcula las aproximaciones al área bajo la función $f(x) = x^2$, en el intervalo $[0,1]$ para las siguientes subdivisiones:

$n = 15$, $n = 17$, $n = 20$ y $n = 50$ y con los resultados obtenidos llena el siguiente cuadro.

Particiones n	Aproximaciones al Area A_n
$n = 3$	.185185
$n = 6$	.254629
$n = 12$	
$n = 15$	
$n = 17$	
$n = 20$	
$n = 5$	
$\vdots$	
$n = \infty$	?

De la ficha anterior puedes observar que a n - le podemos dar diferentes valores (como 1,000; 1,000,000- ó 10^{20}; etc.) y entre mas grande sea este valor más nos - hacercamos al área deseada, entonces para esto decimos -- que n tiende a infinito y lo escribimos como: $n \to \infty$.

Ahora bien, analizando la fórmula (1) con la cual obtenemos el área para cualquier partición, veamos que sucede cuando la partición es suficientemente grande, esto es cuando $n \to \infty$. Para esto es necesario primero observar que pasa con la fracción 1/n que interviene en este fórmula, veamos el siguiente cuadro.

Valores de n	1/n
1	1
2	1/2
3	1/3
4	1/4
⋮	⋮
100	1/100
⋮	⋮
1000	1/1000
⋮	⋮

Exactamente, cuando $n \to \infty$ observamos que $\frac{1}{n}$ es cada vez más pequeño, casi cero, esto es $\frac{1}{n} \to 0$; esto lo decimos como sigue: "Cuando $n \to \infty$ la sucesión $\{ \frac{1}{n} \} \to \infty$" "y el límite de la sucesión $\{ \frac{1}{n} \}$ cuando $n \to \infty$ es cero". Ahora en la fórmula (1) hagamos tender $n \to \infty$, esto será el límite de n , lo cuál nos dará el área real de la curva, esto se escribe como:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\right] \; *$$

$$= \frac{1}{6}(1 - 0)(2 - 0) \left[\text{por que } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\right]$$

$$= .333\ldots. \text{ Area } A$$

*El desarrollo formal de este límite es el siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left[\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right] \left[\lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{6}(1 - 0)(2 - 0)$$

$$= \frac{1}{6}(1)(2)$$

$$= .333$$

Pero este desarrollo está sujeto a una serie de resultados importantes sobre el concepto de límite de sucesiones, el cual no es nuestro objetivo en este curso.

Por lo tanto, podemos decir que:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a(R_k) = A$$

donde $\sum_{k=1}^{n-1} a(R_k)$ es la suma de las áreas de los rectángulos, para n subdivisiones del dominio de la función.

También introduciremos la notación:

$$\int_0^1 f(x) = A \quad .$$

Donde el símbolo $\int_0^1 f(x)$ significa el área bajo la curva f(x) en el intervalo $[0,1]$.

En este caso particular $f(x) = x^2$

$$\therefore \int_0^1 x^2 = .333$$

NOTA: El símbolo $\int$ para integral fué introducido por Leibnitz en 1675, esta S alragada en esta notación, representa la suma de las áreas de todos los posibles rectángulos cuando la partición es infinita.

Ahora nos aproximaremos al área bajo la función - $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$, también con 4 aproximaciones pero ahora construyendo rectángulos superiores; y a la suma de ésta le llamaremos Area Superior y la denotaremos por $\overline{A}_n$.

Primera Aproximación

Construyamos la gráfica de la función $f(x) = x^2$, dividamos el intervalo $[0,1]$ en tres partes iguales y construyamos los rectángulos que se formen por arriba de la grafica.

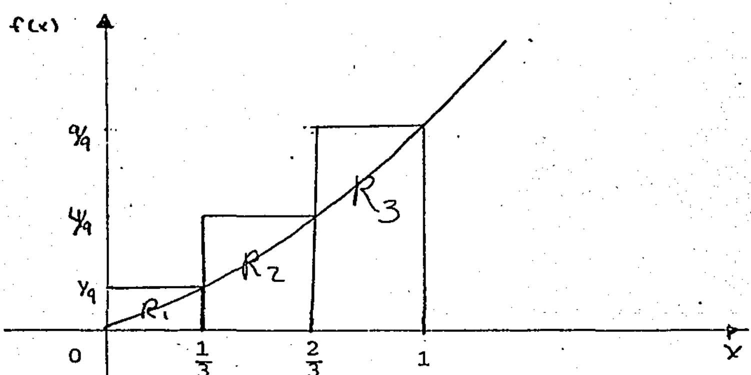


Figura 5

Calculemos el área de cada uno de estos rectángulos:

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3})^2$	$A_{R_1} = \frac{1}{3}(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}(\frac{1^2}{3^2}) = \frac{1}{3^3}\ 1^2$
R_2	$\frac{1}{3}$	$(\frac{2}{3})^2$	$A_{R_2} = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{3}(\frac{2^2}{3^2}) = \frac{1}{3^3}\ 2^2$
R_3	$\frac{1}{3}$	$(\frac{3}{3})^2$	$A_{R_3} = \frac{1}{3}(\frac{3}{3})^2 = \frac{1}{3}(\frac{3^2}{3^2}) = \frac{1}{3^3}\ 3^2$

Sumemos el área de R_1, R_2 y R_3 para obtener el área de la región sombreada de la figura 5 que llamaremos área superior y la denotaremos por $\overline{A}_3$.

$$\overline{A}_3 = \sum_{k=1}^{3} AR_k = \frac{1}{3^3}(1^2) + \frac{1}{3^3}(2^2) + \frac{1}{3^3}(3^2)$$

$$= \frac{1}{3^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2\right]$$

$$= \frac{1}{3^3}\left[14\right] = \frac{14}{27} = .518518...$$

$$\therefore\ \overline{A}_3 = .5185..$$

Ficha No. 3

Realiza las otras 3 aproximaciones $\overline{A}_6$, $\overline{A}_{12}$ y $\overline{A}_n$ análogas a las hechas en las áreas inferiores $\underline{A}_6$, $\underline{A}_{12}$ y $\underline{A}_n$.

Taller No. 2

Objetivo: Es que el alumno verifique visualmente que a medida que se hacen más subdivisiones en el intervalo $[0,1]$, el área superior se aproxima a el área -- Real de la Región.

Material: El mismo del No. 2

Instrucciones:

1. En tu base dibuja la parábola $f(x) = x^2$,

2. Recorta en papel lustre de otro color los 6 rectángulos de la 2a. aproximación y pegálos en tu base.

3. Recorta en papel lustre de otro color los 6 rectángulos de la 2a. aproximación y pegálos encima de los anteriores.

4. Recorta en papel lustre de otro color diferente los 12 rectángulos de la 3a. aproximación y pegálos encima de los anteriores.

5. Recorta en el papel lustre restante, la región bajo la curva $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$ y pegálo sobre los rectángulos del paso 4.

6. ¿Qué observas?

Exactamente, a medida que realizamos más subdivisiones en el intervalo $[0,1]$, el área superior se aproxima a el área de la región narnaja de la figura 4, por lo que podemos afirmar que:

1) $\overline{A}_n \geq A \geq \underline{A}_n$

y

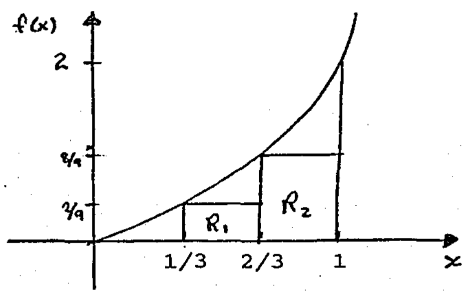
2) $\lim\limits_{n \to \infty} \underline{A}_n = \lim\limits_{n \to \infty} \overline{A}_n = A = \int_0^1 f(x)\, dx$

En donde en este caso $f(x) = x^2$

Ahora calcularemos el área bajo la función $f(x) = 2x^2$ en el intervalo $[0,1]$ empleando las 4 aproximaciones vistas anteriormente.

Primera Aproximación:

Grafiquemos la función $f(x) = 2x^2$, dividamos el intervalo $[0,1]$ en 3 partes iguales y construyamos los rectángulos inferiores.



Calculemos el área de cada uno de los rectángulos:

	Base	Altura	Area
R_1	1/3	$2(\frac{1}{3})^2$	$A_R = \frac{1}{3}(2\ (\frac{1}{3})^2) = \frac{1}{3}(2(\frac{1^2}{3^2})) =$
			$2.\frac{1}{3^3}\ 1^2$

$R_2 \qquad \frac{1}{3} \qquad 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad A_{R_2} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = \frac{1}{3}\left(2\left(\frac{2^2}{3^3}\right)\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^2$

Ahora sumemos las áreas de los rectángulos para obtener el área inferior $\underline{A}_3$

$$\underline{A}_3 = 2 \cdot \frac{1}{3^3} \cdot 1^2 + 2 \frac{1}{3^3} \cdot 2^2$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3^3}(1^2 + 2^2) \right]$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3^3} (5) \right]$$

$$= 2 \left[\frac{5}{27} \right]$$

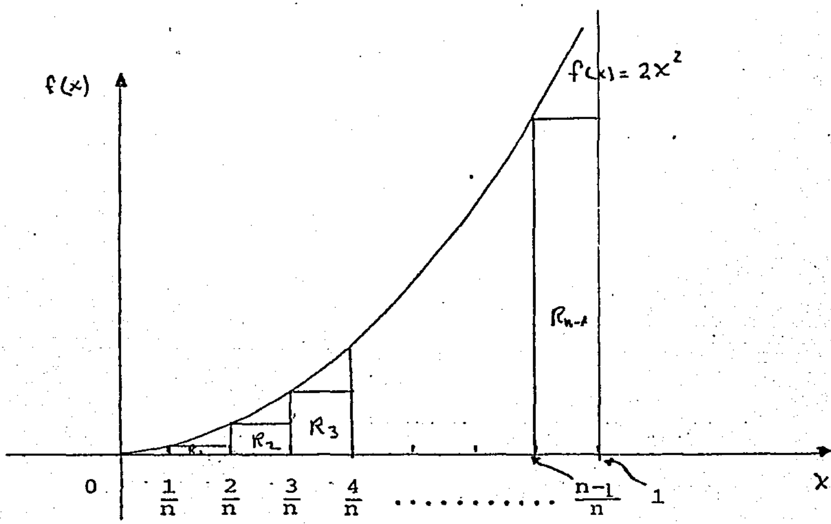
$$= 2 (.185185\ldots)$$

Ficha No. 4

Calcula la segunda aproximación $\underline{A}_6$ y tercera aproximación $\underline{A}_{12}$ en $[0,1]$ de la función $f(x) = 2x^2$.

Cuarta Aproximación.

Ahora dividiremos el intervalo $[0,1]$ en n - partes iguales y construiremos los rectángulos inferiores que se forman bajo la función $f(x) = 2x^2$.



Calculemos el área de cada uno de los rectángulos que se forman:

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{n}$	$2(\frac{1}{n})^2$	$A_{R_1} = (\frac{1}{n})\,2(\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n}\cdot 2(\frac{1^2}{n^2}) = 2\cdot\frac{1}{n^3}\cdot 1^2$
R_2	$\frac{1}{2}$	$2(\frac{2}{n})^2$	$A_{R_2} = (\frac{1}{n})\,2(\frac{2}{n})^2 = \frac{1}{n}\cdot 2(\frac{2^2}{n^2}) = 2\cdot\frac{1}{n^3}\cdot 2^2$
R_3	$\frac{1}{n}$	$2(\frac{3}{n})^2$	$A_{R_2} = (\frac{1}{n})\,2(\frac{3}{n})^2 = \frac{1}{n}\cdot 2(\frac{3^2}{n^2}) = 2\cdot\frac{1}{n^3}\cdot 3^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
R_{n-1}	$\frac{1}{n}$	$2(\frac{n-1}{n})$	$A_{R_{n-1}} = (\frac{1}{n})\,2(\frac{n-1}{n})^2 = \frac{1}{n}\cdot 2(\frac{n-1}{n^2}) = 2\cdot\frac{1}{n^3}\cdot(n-1)^2$

Ahora sumemos estas áreas para calcular el área total de todos los rectángulos $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} aR_K$

$$\sum_{k=i}^{n-1} aR_k = 2\cdot\frac{1}{n^3}\cdot 1^2 + 2\cdot\frac{1}{n^3}\cdot 2^3 + 2\cdot\frac{1}{n^3}\cdot 3^2 + \ldots + 2\cdot\frac{1}{n^3}(n-1)^2$$

$$= (2)\left(\frac{1}{n^3}\right)(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2)$$

$$= 2\left(\frac{1}{n^3}\right)\left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

Donde como recordarás, esta fórmula nos es útil para cualquier n particiones del dominio de la función; y además recordando también que si $n \to \infty$, entonces $\{\frac{1}{n}\} \to 0$ tendremos que el área A bajo $f(x) = 2x^2$ en $[0, 1]$ esta dada por:

$$\int_0^1 2x^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} aR_k = A$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} aR_k = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{6}\left(1 - \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n}}\right)\left(2 - \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n}}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{6}\right)(1)(2)$$

$$= 2\left(\frac{2}{6}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= 2(.333\ldots)$$

$$= .666\ldots$$

$$\therefore \int_0^1 2x^2 = .666\ldots$$

Ficha No.5

1. Calcular el área bajo la curva en el intervalo $[0,1]$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2$

b) $f(x) = 4x^2$

c) $f(x) = 5x^2$

2. ¿Qué relación hay entre el área bajo la curva de - $f(x) = x^2$ y $f(x) = 2x^2$?.

3. ¿Qué relación hay entre el área bajo la curva de - - $f(x) = x^2$ y $f(x) = 3x^2$?

4. ¿Qué relación hay entre el área bajo la curva de - - $f(x) = x^2$ y $f(x) = 4x^2$?

Como te habrás dado cuenta en la ficha anterior, el el área bajo la curva de $2x^2$ es el doble de x^2, la de $3x^2$ es el triple de x^2 y así sucesivamente por lo que - podemos concluir que: si $f(x) = cx^2$ $(c = 1,2,3,\ldots n\ldots)$ entonces:

$$\int_0^1 cx^2 = c \int_0^1 x^2 \qquad c = \text{constante}$$

C O N C L U S I O N E S

El cálculo del área bajo una función $f(x) = ax^2$ en el intervalo $[0, 1]$, se puede realizar por el método de aproximaciones sucesivas; que consiste en hacer particiones del intervalo, cada vez más finas, hasta casi hacer infinito el número de éstas.

Estas particiones determinan rectángulos cuyas bases miden $\frac{1}{n}$ y su altura está determinada por la función.

Algebráicamente podemos llegar a encontrar una fórmula que nos permita calcular el área bajo la función para cualquier partición n del intervalo y el área real la encontraremos haciendo $n \to \infty$ y sabiendo que en este caso la sucesión $\{\frac{1}{n}\} \to 0$.

Pero ¿qué pasa si cambiamos de intervalo o de función? nos seguirá sirviendo el método de aproximaciones sucesivas?.

CALCULO DEL AREA BAJO UNA FUNCION EN $[a,b]$

En esta sección trataremos de encontrar el área bajo una curva $f(x)$ en cualquier intervalo $[a,b]$ utilizando también el método de aproximaciones suvesivas.

Para esto empecemos por analizar la función $f(x) = x^2$, calculando el área bajo esta función en el intervalo $[1,2]$.

Graficando tenemos:

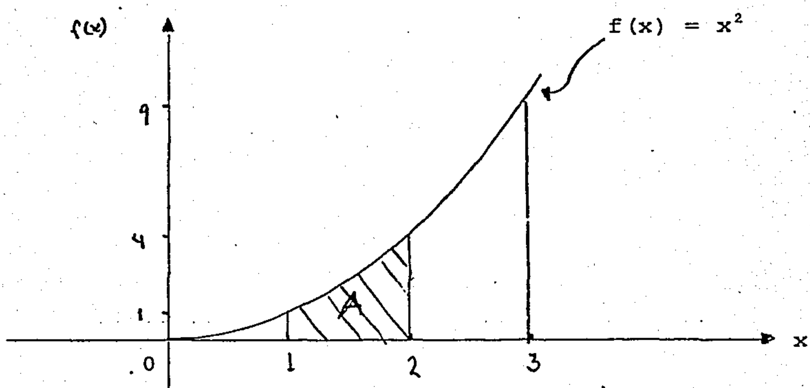


Figura 9

Primera Aproximación.

1. Dividir el intervalo $[1,2]$ en tres partes iguales y dibujar los rectángulos que se forman por debajo de la curva (¿Cuántos son?) contenidos en la región sombreada A de la figura 9.

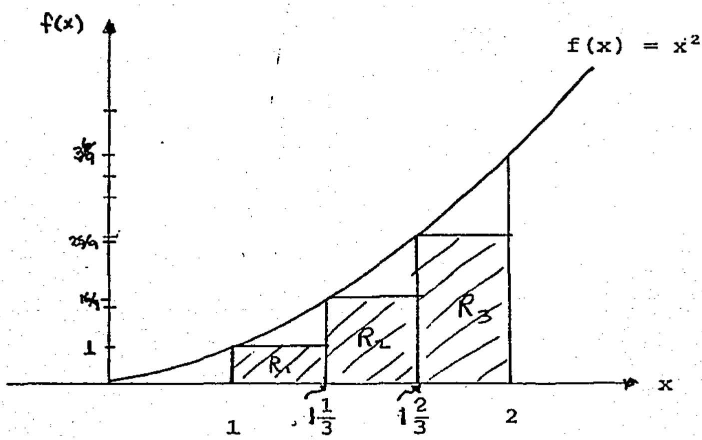


Figura 10

2. Debemos calcular el área de R_1, R_2 y R_3 para lo cual calcularemos las bases y las alturas de los rectángulos llenando el siguiente cuadro:

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{3}$	1^2	$\frac{1}{3} \cdot 1^2$
R_2	$\frac{1}{3}$	$(1 + \frac{1}{3})^2$	$\frac{1}{3} \cdot (1 + \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3^3}(3 + 1)^2$
R_3	$\frac{1}{3}$	$(1 + \frac{2}{3})^2$	$\frac{1}{3}(1 + \frac{2}{3})^2 = \frac{1}{3^3}(3 + 2)^2$

3. Sumemos al área de R_1, R_2 y R_3 para obtener el área de la región sombreada de la figura 10.

$$\underline{A}_3 = \sum_{k=1}^{3} aR_k = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3^3} (3 + 1)^2 + \frac{1}{3^3} (3 + 2)^2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} \left[(3 + 1)^2 + (3 + 2)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} \left[16 + 25 \right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} (41) = \frac{1}{3} + \frac{41}{27} = 1.8518515$$

donde $\sum_{k=1}^{3} aR_k$ es igual a la suma de las áreas de los rectángulos R_1, R_2 y R_3.

4. Sea A el área que se desea encontrar, entonces:

   $A \geq A_3 = 1.8518515$

Segunda Aproximación.

1. Dividamos el intervalo $[1,2]$ en seis partes iguales; dibujemos los rectángulos que se forman por debajo de la curva.

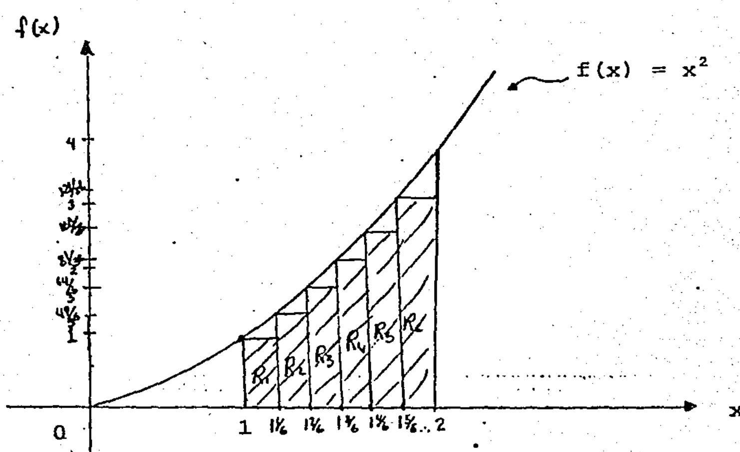


Figura 11

2. Calculemos el área de $R_1, R_2, \ldots, R_6$ como se muestra en el siguiente cuadro:

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{6}$	1^2	$\frac{1}{6} \cdot 1^2$
R_2	$\frac{1}{6}$	$(1 + \frac{1}{6})^2$	$\frac{1}{6} \frac{(6+1)^2}{6^2} = \frac{1}{6^3} (6+1)^2$
R_3	$\frac{1}{6}$	$(1 + \frac{2}{6})^2$	$\frac{1}{6} \frac{(6+2)^2}{6^2} = \frac{1}{6^3} (6+2)^2$
R_4	$\frac{1}{6}$	$(1 + \frac{3}{6})^2$	$\frac{1}{6} \frac{(6+3)^2}{6^2} = \frac{1}{6^3} (6+3)^2$
R_5	$\frac{1}{6}$	$(1 + \frac{4}{6})^2$	$\frac{1}{6} \frac{(6+4)^2}{6^2} = \frac{1}{6^3} (6+4)^2$
R_6	$\frac{1}{6}$	$(1 + \frac{5}{6})^2$	$\frac{1}{6} \frac{(6+5)^2}{6^2} = \frac{1}{6^3} (6+5)^2$

3. Calculemos $\underline{A}_6 = \sum_{k=1}^{6} aR_k$ para obtener el área de la región sombreada de la figura 11.

$$\underline{A}_6 = \sum_{k=1}^{6} aR_k = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6^3}(6+1)^2 + \frac{1}{6^3}(6+2)^2 + \ldots + \frac{1}{6^3}(6+5)^2$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6^3}\left[(6+1)^2 + (6+2)^2 + \ldots + (6+5)^2\right]$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6^3}\left[7^2 + 8^2 + \ldots + 11^2\right]$$

Como $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

y $\sum_{k=7}^{11} k^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2 - \sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{(11)(12)(23)}{6} - \frac{\cancel{6}(7)(13)}{\cancel{6}}$

$$= \frac{3036}{6} - 91$$

$$= 506 - 91$$

$$= 415$$

tenemos que:

$$\underline{A}_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{216}(415) = \frac{1}{6} + \frac{415}{216} = \frac{36 + 415}{216} = \frac{451}{216} + 2.0879629$$

4. Entonces $A \geq \underline{A}_6 = 2{,}0879629 \geq \underline{A}_3$

donde $\underline{A}_6$ es igual al área inferior de la segunda aproximación con sus subdivisiones.

$\underline{A}_3$ es igual a el área inferior de la primrera aproximación con tres subdivisiones.

A es el área total de la región.

Tercera Aproximación.

1. Ahora dividamos el intervalo $[1,2]$ en 12 partes iguales; dibujando los rectángulos que se forman por debajo de la curva.

¡ Construyela!

2. Calculemos el área de R_1, R_2, R_3, ..., R_{12}

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{12}$	1^2	$\frac{1}{12} \cdot 1^2$
R_2	$\frac{1}{12}$	$(1 + \frac{1}{12})^2$	$\frac{1}{12} \cdot \frac{(12+1)^2}{(12)^2} = \frac{1}{(12)^3}(12+1)^2$
R_3	$\frac{1}{12}$	$(1 + \frac{2}{12})^2$	$\frac{1}{12} \cdot \frac{(12+2)^2}{(12)^2} = \frac{1}{(12)^3}(12+2)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
R_{12}	$\frac{1}{12}$	$(1 + \frac{11}{12})^2$	$\frac{1}{12} \cdot \frac{(12+11)^2}{(12)^2} = \frac{1}{12^3}(12+11)^2$

3. Calculemos $\underline{A}_{12} = \sum_{k=1}^{12} aR_k$ para obtener el área de la región sombreada de la figura que construiste.

$$\underline{A}_{12} = \sum_{k=1}^{12} aR_k = \frac{1}{12} \cdot 1^2 + \frac{1}{(12)^3}(12+1)^2 + \frac{1}{(12)^3}(12+2)^2 + \ldots + \frac{1}{(12)^3}(12+11$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{(12)^3}\left[(12+1)^2 + (12+2)^2 + \ldots + (12+11)^2\right]$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{(12)^3} \left[(13)^2 + (14)^2 + \dots + (23)^2 \right]$$

Como $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

y

$$\sum_{k=13}^{23} k^2 = \sum_{k=1}^{23} k^2 - \sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{(23)(24)(47)}{6} - \frac{(12)(13)(25)}{6}$$

$$= \frac{25944}{6} - \frac{3900}{6} = \frac{22044}{6} = 3674$$

Entonces:

$$\underline{A}_{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{(12)^3} \left[3674 \right]$$

$$\underline{A}_{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{1728} \left[3674 \right] = \frac{1}{12} + \frac{3674}{1728} = \frac{144 + 3674}{1728} = \frac{3818}{1728} = 2.2094907$$

4. Entonces $A \geq \underline{A}_{12} \geq \underline{A}_6 \geq \underline{A}_3$

Cuarta Aproximación.

1. Ahora dividamos el intervalo $[1,2]$ en n partes iguales; dibujando los rectángulos que se forman debajo de la cruva.

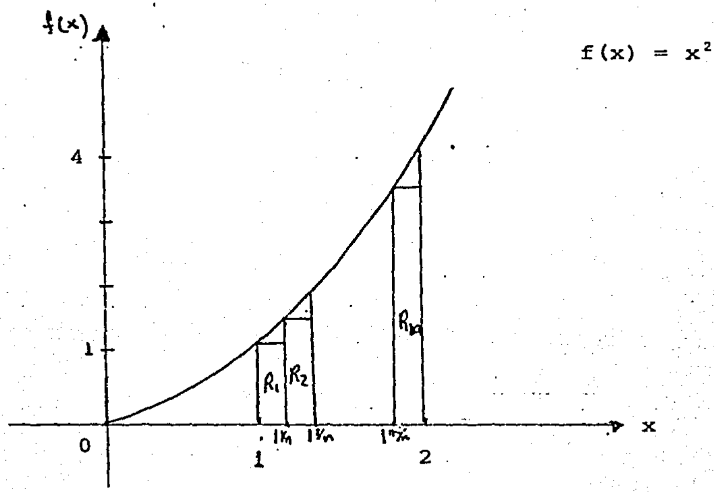


Figura 13

2. Calculemos el área de R_1, R_2, R_3, ...R_n como se muestra en el siguiente cuadro:

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{n}$	1^2	$\frac{1}{n} \cdot 1$
R_2	$\frac{1}{n}$	$(1 + \frac{1}{n})^2 = (\frac{n+1}{n})^2$	$\frac{1}{n}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}(n+1)^2$
R_3	$\frac{1}{n}$	$(1 + \frac{2}{n})^2 = (\frac{n+2}{n})^2$	$\frac{1}{n}\frac{(n+2)^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}(n+2)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
R_n	$\frac{1}{n}$	$(1 + \frac{n}{n})^2 = (\frac{n+n}{n})^2$	$\frac{1}{n}\frac{(n+n)^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}(n+n)^2$

3. Calculemos $\underline{A}_n = \sum_{k=1}^{n} aR_k$ para obtener el área de la región sombreada en la figura 13.

$$\underline{A}_n = \sum_{k=1}^{n} aR_k = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}(n+1)^2 + \frac{1}{n^2}(n+2)^2 + \ldots + \frac{1}{n^3}(n+n)^2$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\left[\underbrace{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (n+n)^2}_{\sum_{k=1}^{n} (n+k)^2}\right] \; \ldots\ldots *$$

Aplicando las propiedades de las sumas abreviadas vistas anteriormente tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} (n+k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (n^2 + 2nk + k^2) = \sum_{k=1}^{n} n^2 + \sum_{k=1}^{n} 2nk + \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= n^3 + 2n \sum_{k=1}^{n} k + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= n^3 + 2n \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \ldots\ldots *_1$$

Sustituyendo $*_1$ en $*$ tenemos:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \left[n^3 + 2n \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \left[n^3 + n^2 (n+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{n^3}{n^3} + \frac{\cancel{n^2}(n+1)}{n \cancel{n^2}} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= \frac{1}{n} + 1 + \frac{n+1}{n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= \frac{1}{n} + 1 + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \left[\frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} \right]$$

$$= 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{6} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \right] \quad \ldots\ldots **$$

4. Si tomamos n suficientemente grande ($n \to \infty$) tendremos que $A \geq A_{\underline{n}} \geq A_{12} \geq A_{671}$ A_3 y sabiendo que si $n \to \infty$ entonces $\{\frac{1}{n}\} \to 0$ en ** tendremos:

$$2 + \frac{1}{6}\left[(1)(2)\right] = 2 + \frac{2}{6} = \frac{7}{6} = \frac{7}{3} = 2.33$$

$\therefore$ el área bajo la curva en $[1,2]$ es $A = 2.533$

Ficha No. 1

Realiza las tres primeras aproximaciones para encontrar una aproximación al área de $f(x) = x^2$ pero ahora en el intervalo $[2,3]$.

Habiendo realizado tu ficha anterior pasaremos ahora a efectuar la cuarta y última aproximación.

1. Dividamos el intervalo $[2,3]$ en n partes iguales y dibujemos los rectángulos inscritos que se forman.

¡Constrúyelos!

2. Calculemos el área de $R_1, \ldots\ldots, R_n$ para lo cual llenamos nuestro cuadro:

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{n}$	2^2	$\frac{1}{n} \cdot 4 = \frac{4}{n}$
R_2	$\frac{1}{n}$	$(2 + \frac{2}{n})^2 = (\frac{2n+1}{n})^2$	$\frac{1}{n} \cdot (\frac{2n+1}{n^2})^2 = \frac{1}{n^3}(2n+1)^2$
R_3	$\frac{1}{n}$	$(2 + \frac{2}{n})^2 = (\frac{2n+2}{n})^2$	$\frac{1}{n} \cdot \frac{(2n+2)^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}(2n+2)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots \qquad \vdots$
R_n	$\frac{1}{n}$	$(2 + \frac{n}{n})^2 = (\frac{2n+n}{n})^2$	$\frac{1}{n} \quad (\frac{2n+n}{n^2}) = \frac{1}{n^3}(2n+n)^2$

3. Calculemos $\underline{A}_n = \sum_{k=1}^{n} aR_k$ para obtener el área de la región sombreada de la figura 14.

$$\underline{A}_n = \sum_{k=1}^{n} aR_k = \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}(2n+1)^2 + \ldots + \frac{1}{n^3}(2n+n)^2$$

$$= \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}\left[\underbrace{(2n+1)^2 + \ldots\ldots + (2n+n)^2}_{\sum_{k=1}^{n}(2n+k)^2}\right] \cdots\cdots **$$

Aplicando nuevamente las propiedades de sumas abreviadas tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n}(2n+k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4n^2 + 4nk + k^2) = \sum_{k=1}^{n} 4n^2 + \sum_{k=1}^{n} 4nk + \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= 4n^3 + 4n\sum_{k=1}^{n} k + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot$$

$$= 4n^3 + \cancel{4}\, n \cdot \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad .....*_1$$

Sustituyendo $*^1$ en $*$ tenemos:

$$\underline{A_n} = \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}\left[4n^3 + 2n^2(n+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{4}{n} + \frac{4n^3}{n^3} + \frac{2\cancel{n}^2(n+1)}{n^3 n} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= \frac{4}{n} + 4 + \frac{2(n+1)}{n} + \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{(2n+1)}{n}$$

$$= \frac{4}{n} + 4 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}(1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

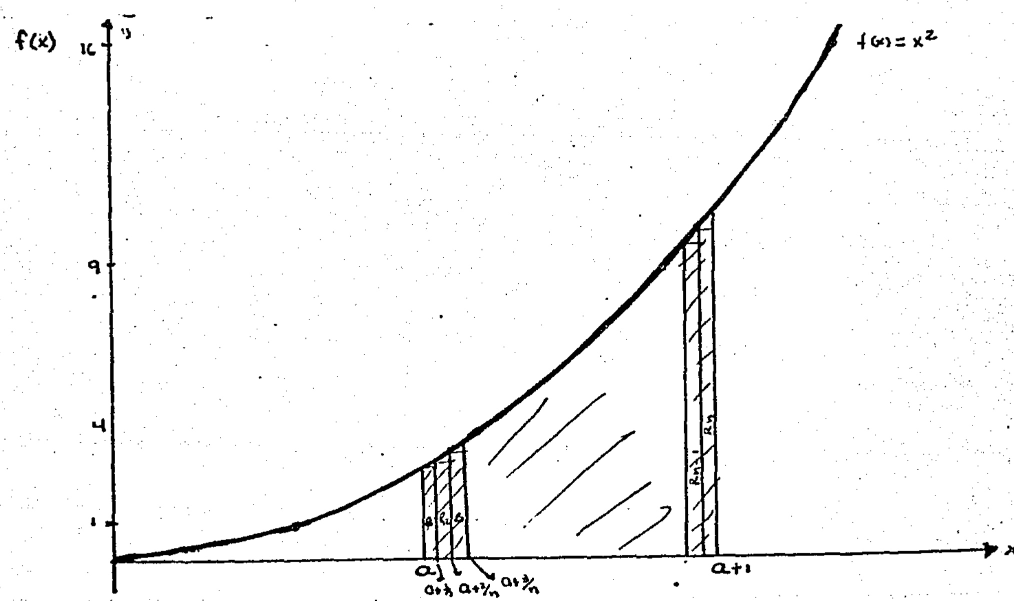
4. Si tomamos n suficientemente grande ($n \to \infty$ ent. $\{\frac{1}{n}\} \to 0$) obtenemos:

$$\underline{A_n} = 4 + 2 + \frac{1}{6}(1)(2) = 4 + 2 + \frac{1}{3} = 6\frac{1}{3} = 6{,}333$$

$$\therefore \quad A = 6.333$$

Hasta aquí hemos trabajados en los intervalos [1,2] y [2,3], veamos ahora que sucede en el intervalo [a,a + 1]; y para esto trabajaremos únicamente con la cuarta aproxima -- ción.

1. Considera un intervalo arbitrario en la gráfica de $f(x) = x^2$ al que expresaremos como [a,a + 1] en donde la distan - cia entre a y a + 1 es la unidad; divide este intervalo en n partes iguales y traza los rectángulos inscritos a la grá fica.



2. Calculemos el área de $R_1, R_2, \ldots\ldots, R_n$ llenando nuestro cuadro respectivo.

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{n}$	a^2	$\frac{1}{n}a^2 = \frac{a^2}{n^2}$
R_2	$\frac{1}{n}$	$(a + \frac{1}{n})^2 = (\frac{na+1}{n})^2$	$\frac{1}{n}\,\underline{(na+1)^2} = \frac{1}{n^3}\ (na+1)^2$
R_3	$\frac{1}{n}$	$(a + \frac{2}{n})^2 = (\frac{na+1}{n})^2$	$\frac{1}{n}\,\frac{(na+2)^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\ (na+2)^2$
.	.	. .	. .
.	.	. .	. .
.	.	. .	. .
R_n	$\frac{1}{n}$	$(a + \frac{n-1}{n})^2 = (\frac{na+n-1}{n})^2$	$\frac{1}{n}\,\frac{(na+n-1)^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}(na+n-1)^2$

3. Calculemos $\underline{A_n} = \sum_{k=1}^{n} aRk$ para obtener el área de la región sombreada de la figura.

$$\underline{A_n} = \sum_{k=1}^{n} aRk = \frac{a^2}{n^2} + \frac{1}{n^3}(na+1)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n^3}(na+n-1)^2$$

$$= \frac{a^2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\Big[\underbrace{(na+1)^2 + (na+2)^2 + \ldots\ldots + (na+n-1)^2}_{\sum_{k=1}^{n}(na+k)^2}\Big].$$

Nuevamente calculemos cuanto vale $\sum_{k=1}^{n-1} (na + k)^2$ aplicando las propiedades de sumas abreviadas.

$$\sum_{k=1}^{n-1} (na + k)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (n^2a^2 + 2nak + k^2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} n^2a^2 + 2na \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 =$$

$$= n^3a^2 + \cancel{2}\, an \frac{n(n-1)}{\cancel{2}} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \quad \ldots\ldots *_1$$

Sustituyendo $*_1$ en $*$ obtenemos:

$$\underline{A_n} = \sum_{k=1}^{n} aR_k = \frac{a^2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\left[n^3a^2 + an^2(n-1) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right]$$

$$= \frac{a^2}{n^2} + \frac{\cancel{n^3}a^2}{\cancel{n^3}} + \frac{an^2(n-1)}{n^3} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} =$$

$$= \frac{a^2}{n^2} + a^2 + \frac{a(n-1)}{n} + \frac{1}{6}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(2n-1)}{n} =$$

$$= \frac{a^2}{n^2} + a^2 + a\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}(1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{n^2} + a^2 + a\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

4. Tomando n suficientemente grande ($n \to \infty$; $\{\frac{1}{n}\} \to 0$) obtenemos:

$$a^2 + a + \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad A = a^2 + a + \frac{1}{3}$$

Vamos ahora a aplicar ésta fórmula a los intervalos $[1,2]$ y $[2,3]$ para verificar que nos da los mismos resultados obtenidos anteriormente.

Tomando $[1,2]$ donde la $\underline{\underline{a}}$ toma el valor de 1, por lo que el área de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1,2]$ será - igual a:

$$a^2 + a + \frac{1}{3} = 1^2 + 1 + \frac{1}{3} = 1 + 1 + \frac{1}{3} = 2x\,\frac{1}{3} = 2.33$$

lo cual coincide con el valor encontrado usando las cuatro - aproximaciones.

Ahora veamos cual es el valor del área en el intervalo $[2,3]$, donde $a = 2$, por lo que:

$$a^2 + a + \frac{1}{3} = 2^2 + 2 + \frac{1}{3} = 4 + 2 + \frac{1}{3} = 6\,\frac{1}{6} = 6.333$$

el cual coincide nuevamente con el calculado anteriormente - empleando aproximaciones.

Ficha # 2

Calcula el área bajo la curva $f(x) = x^2$ en los siguientes intervalos:

a) $[3,4]$ b) $[4,5]$ c) $[5,6]$ d) $[6,7]$ e) $[7,8]$

C O N C L U S I O N E S

La fórmula para calcular el área en un intervalo cualesquiera, siempre y cuando se cumpla la condición de que la distancia entre sus extremos sea igual a la unidad es $a^2 + a + \frac{1}{3}$. (recuerda que la función es $f(x) = x^2$).

Por lo que podemos decir que $\int_a^{a+1} x^2 = a^2 + a + \frac{1}{3}$

Pero que pasaría si tomamos un intervalo $[a,b]$ cualesquiera, por ejemplo $[2,4]$, $[1,4]$, etc. esto lo veremos en el cálculo del área bajo f(x) en $[a,b]$.

Analicemos nuestra función $f(x) = x^2$ y calculemos el área bajo la curva por el método de aproximaciones pero tomando ahora el $[2,4]$.

Primera Aproximación

1. Dividamos el intervalo $[2,4]$ en tres partes iguales, dibujamos los rectángulos inscritos e indiquemos donde se localizan tales divisiones en el eje de las "x". (dominio - de la función).

Dividamos cada unidad en el eje de las "x" en tercios.

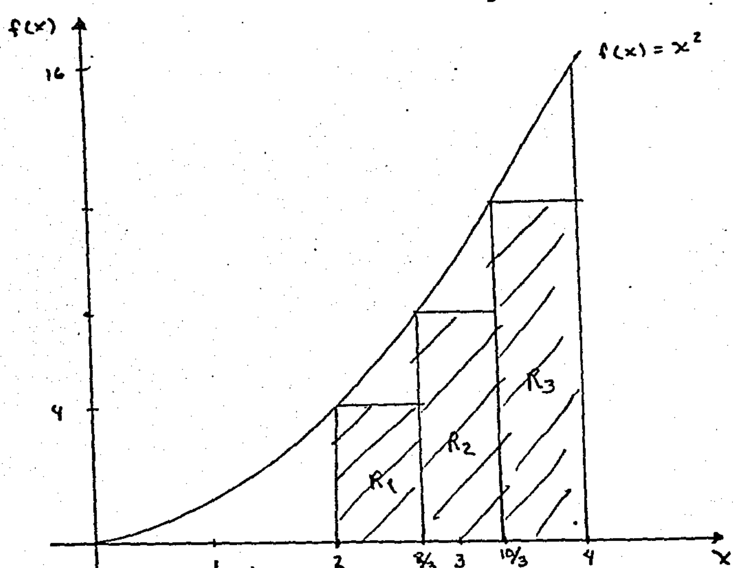


FIG. I

¿Donde se encuentran localizadas la primera y la segunda división?.

Exactamente, en $\frac{8}{3}$ y $\frac{10}{3}$ respectivamente; ahora la pregunta que nos surge es: ¿Cómo podemos obtener $\frac{8}{3}$ y $\frac{10}{3}$ a partir de datos conocidos?.

Buano sabemos que el intervalo lo dividimos en tres partes iguales y que los extremos del intervalo son 2 y 4.

Recordemos como trabajamos en el intervalo $[a, a+1]$; para obtener la 1a, 2a, 3a etc., divisiones, seguimos la regla: $a + \frac{1}{n}$, $a + \frac{2}{n}$, $a + \frac{8}{n}$ etc., respectivamente y sabíamos que la distancia entre los extremos era $a + 1 - a = 1$'

¿Cuál será la distancia entre los extremos del intervalo $[2,4]$? muy bien $4 - 2 = 2$.

por lo que la 1a y 2a división las podemos expresar como sigue:

$$\underline{1a}: 2 + \frac{1}{3}(2) = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\underline{2a}: \underset{*}{\overset{\uparrow}{2}} + \underset{**}{\overset{\uparrow}{\frac{2}{3}}}\underset{***}{\overset{\uparrow}{(2)}} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

donde: * Es el número o primer extremo del intervalo.

** Una fracción cuyo denominador va aumentando de uno en uno; y su denominador indica el número de partes en que dividamos la unidad.

*** Es la diferencia entre los extremos del intervalo.

Ahora bien ¿como expresarías la fórmula para encontrar la 1a, 2a, 3a etc. divisiones en el intervalo $[a,b]$ por ejemplo - cuando se ha dividido en 6 partes?

$$a + \frac{k}{6}(b - a) \quad \text{desde} \quad k = 1,2,...$$

¿Cómo expresarías las divisiones en el intervalo $[a,b]$ que se ha dividio en 12 partes?

$$a + \frac{k}{12}(b - a) \text{ desde } k = 1 ....$$

Generalicemos la fórmula anterior cuando el intervalo $[a,b]$ se divide en n partes iguales como:

$$a + \frac{k}{n}(b - a) \text{ desde } k = 1 .....$$

2. Calculemos el área de los tres rectángulos formados. - Observa que las bases ahora valen $\frac{2}{3}$ cada una o sea $\frac{b - a}{n}$.

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{2}{3}$	2^2	$\frac{2}{3} \cdot 2^2 = \frac{8}{3}$
R_2	$\frac{2}{3}$	$(2 + \frac{1}{3} \cdot 2)^2 = (\frac{6 + 2}{3})^2$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{(6 + 2)^2}{3^2} = \frac{2}{3^3} (6 + 2)^2$
R_3	$\frac{2}{3}$	$(2 + \frac{2}{3} \cdot 2)^2 = (\frac{6 + 4}{3})^2$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{(6 + 4)^2}{3^2} = \frac{2}{3^2} (6 + 4)^2$

3. Calculemos $\underline{A}_3 = \sum_{k=1}^{3} aRk$ para obtener el área de la región sombreada de la figura # 1

$$\underline{A}_3 = \sum_{k=1}^{3} aRk = \frac{8}{3} + \frac{2}{3^3} (6 + 2)^2 + \frac{2}{3^3} (6 + 4)^2 =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{2}{3^3} \left[8^2 + 10^2 \right] =$$

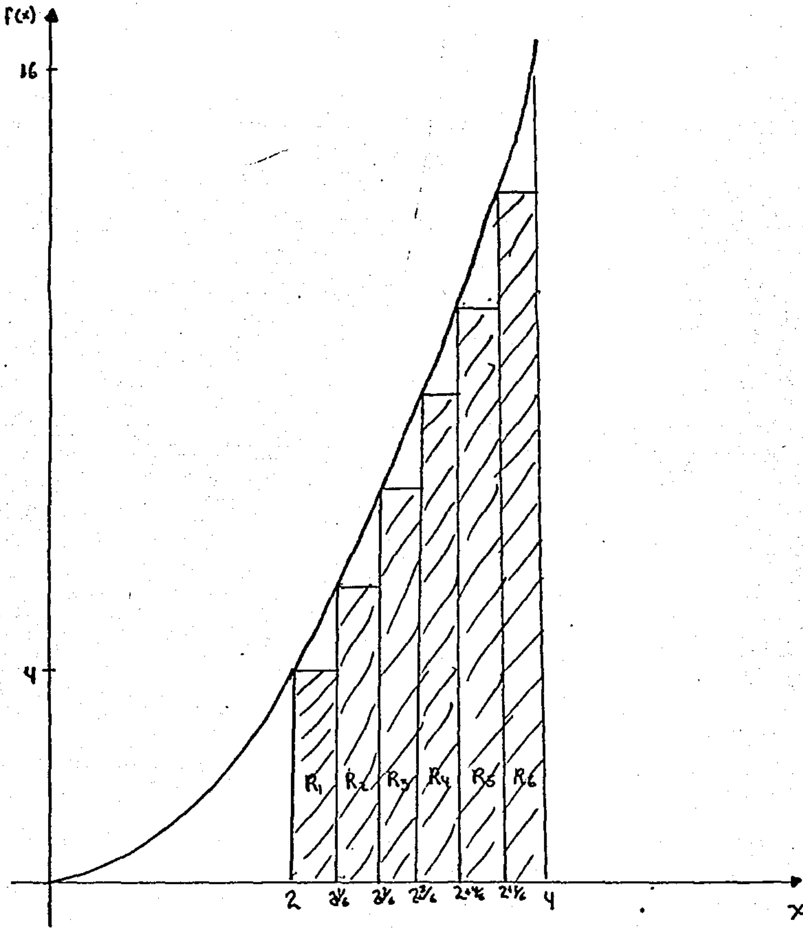
$$= \frac{8}{3} + \frac{2}{27} \left[164 \right]$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{328}{27} = 14.8148148$$

4. Por lo que $A \geqslant A_3 = 14.8148$

Segunda Aproximación.

Dividamos el Intervalo [2,4] en sus partes iguales; dibujemos los rectángulos inscritos que se forman por debajo de la curva.



2. Calculemos las áreas de $R_1, R_2, \ldots, R_6$

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{b-a}{6} = \frac{2}{6}$	2^2	$\frac{2}{6} \cdot 2^2 = \frac{8}{6}$
R_2	$\frac{2}{6}$	$(2 + \frac{1}{6} \cdot 2)^2 = (\frac{12+2}{6})^2$	$\frac{2}{6}\frac{(12+2)^2}{6^2} = \frac{2}{6^3}\ (12+2)^2$
R_3	$\frac{2}{6}$	$(2 + \frac{2}{6} \cdot 2)^2 = (\frac{12+6}{6})^2$	$\frac{2}{6}\frac{(12+4)^2}{6^2} = \frac{2}{6^3}\ (12+4)^2$
R_4	$\frac{2}{6}$	$(2 + \frac{3}{6} \cdot 2)^2 = (\frac{12+6}{6})^2$	$\frac{2}{6}\frac{(12+6)^2}{6^2} = \frac{2}{6^3}\ (12+6)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
R_6	$\frac{2}{6}$	$(2 + \frac{5}{6} \cdot 2)^2 = (\frac{12+10}{6})^2$	$\frac{2}{6}\frac{(12+10)^2}{6^2} = \frac{2}{6^3}\ (12+10)^2$

3. Calculemos $\underline{A}_6 = \sum_{k=1}^{6}$ para encontrar una aproximación al área de la región sombreada de la figura .

$$\underline{A}_6 = \sum_{k=1}^{6} = \frac{8}{6} + \frac{2}{6^3}(12+2)^2 + \frac{2}{6^3}(12+4)^2 + \frac{2}{6^3}(12+6)^2 + \dots + \frac{2}{6^3}(12+10)^2$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{2}{6^3}\left[(12+2)^2 + (12+4)^2 + (12+6)^2 + \dots + (12+10)^2\right]$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{2}{6^3}\left[(14)^2 + (16)^2 + (18)^2 + \dots + (22)^2\right]$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{2}{6^3}\left[(2.7)^2 + (2.8)^2 + (2.9)^2 + \dots + (2.11)^2\right]$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{2}{6^3}\left[2^2.7^2 + 2^2.8^2 + 2^2.9^2 + \dots + 2^2(11)^2\right]$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{2}{6^3}\left[2^2\underbrace{(7^2 + 8^2 + 9^2 + \dots + 11)^2}_{\sum_{k=1}^{11} k^2}\right] \quad \dots *$$

Calculemos $\sum_{k=1}^{11} k^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2 - \sum_{k=1}^{6} k^2$

$$= \frac{11(12)(23)}{6} - \frac{\cancel{6}(7)(12)}{\cancel{6}}$$

$$= \frac{3036}{6} - 91 = 506 - 91 = 415 \quad \dots *_1$$

Sustituyendo $*_1$ en $*$ tenemos:

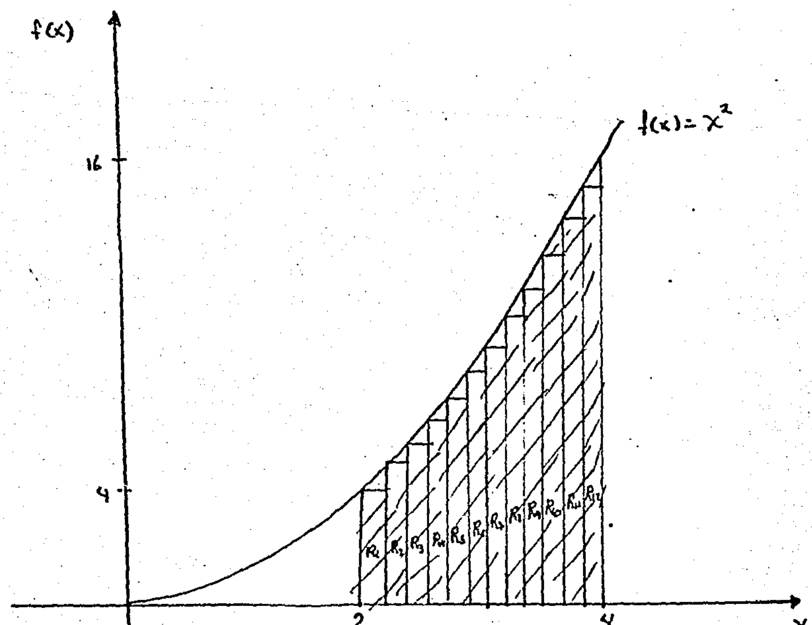
$$\underline{A}_6 = \frac{8}{6} + \frac{2}{6^3}\left[4(415)\right]$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{2}{216}(1660) = \frac{8}{6} + 15.370 = 16.703 = \underline{A}_6$$

4. Por lo que: $A \geq \underline{A}_6 \geq \underline{A}_3$

<u>Tercera Aproximación</u>

1. Dividamos el intervalo $\left[2,4\right]$ en doce partes iguales y dibujemos los rectángulos inscritos indicando el valor de cada una de las subdivisiones.



2. Calculemos el área de los doce rectángulos.

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{b-a}{12} = \frac{2}{12}$	2^2	$\frac{2}{12} \cdot 2^2 = \frac{2}{12} \cdot 4 = \frac{8}{12}$
R_2	$\frac{2}{12}$	$(2 + \frac{2}{12} \cdot 2)^2 = (\frac{24+2}{12})^2$	$\frac{2}{11} \cdot \frac{(24+2)^2}{(12)^2} = \frac{2}{12^3} \; (24+2)^2$
R_3	$\frac{2}{12}$	$(2 + \frac{2}{12} \cdot 2)^2 = (\frac{24+4}{12})^2$	$\frac{2}{12} \frac{(24+4)^2}{(12)^2} = \frac{2}{(12)^3} = \; (24+4)^2$
.	.	. .	
.	.	. .	
.	.	. .	
R_{12}	$\frac{2}{12}$	$(2 + \frac{11}{12} \cdot 2)^2 = (\frac{24+22}{(12)^2})^2$	$\frac{2}{12} \; \frac{(24+22)^2}{(12)^2} = \frac{2}{(12)^3} \; (23+22)^2$

3. Encontremos ahoras $\underline{A}_{12} = \sum_{k=1}^{12} aRk$

$$\underline{A}_{12} = \sum_{k=1}^{12} aRk = \frac{8}{12} + \frac{2}{(12)^3} \; (24+2)^2 + \frac{2}{(12)^3} \; (24+4)^2 + \ldots + \frac{2}{(12)^3} (24+22)^2 =$$

$$= \frac{8}{12} + \frac{2}{(12)^3} \left[(24+2)^2 + (24+4)^2 + \ldots + (24+22)^2 \right]$$

$$= \frac{8}{12} + \frac{2}{(12)^3} \left[(26)^2 + (28)^2 + \ldots + (46)^2 \right]$$

$$= \frac{8}{12} + \frac{2}{(12)^3} \left[(2.13)^2 + (2.14)^2 + \ldots + (2.23)^2 \right]$$

$$= \frac{8}{12} + \frac{2}{(12)^3} \left[2^2 \cdot (13)^2 + 2^2 \cdot (14)^2 + \ldots + 2^2 (23)^2 \right] =$$

$$= \frac{8}{12} + \frac{2}{(12)^3} \left[\underbrace{(13)^2 + (14)^2 + \ldots + (23)^2}_{\sum_{k=13}^{23} k^2} \right] \quad . \ . \ . \ . \ *$$

Pero sabemos que $\sum_{k=13}^{23} k^2 = \sum_{k=1}^{23} k^2 - \sum_{k=1}^{12} k^2$

$$= \frac{(23)(24)(47)}{6} - \frac{(12)(13)(25)}{6}$$

$$= 4324 - 650 = 3674 \quad .....*_1$$

Sustituyendo $*_1$ en $*$ obtenemos:

$$\underline{A}_{12} = \frac{8}{12} + \frac{2}{(12)^3} \left[4(3674) \right]$$

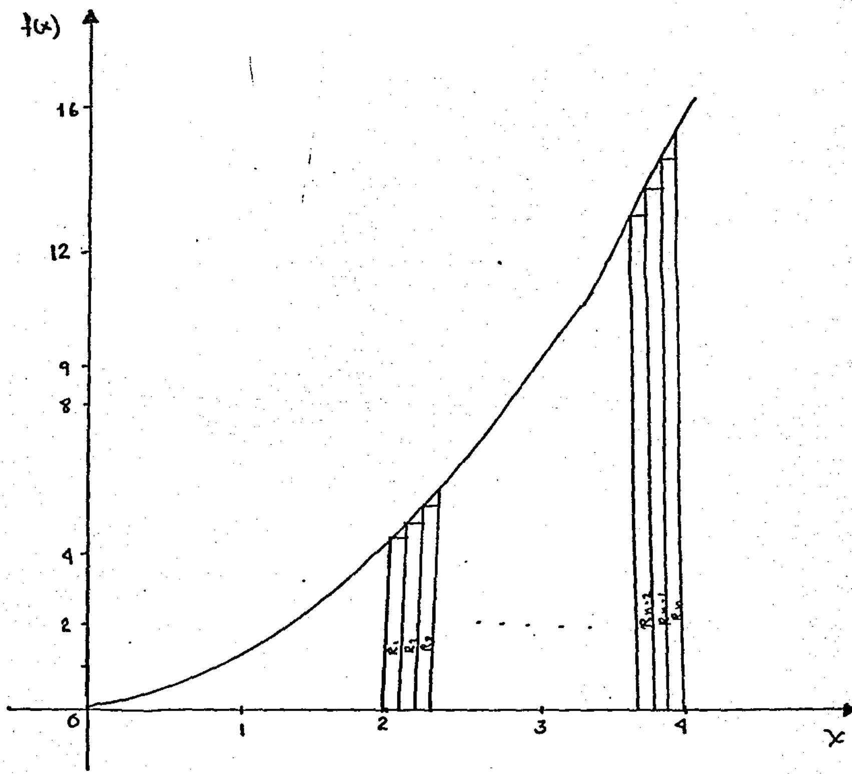
$$= \frac{8}{12} + \frac{2}{1728} (14696)$$

$$= \frac{8}{12} + 17.00925926 = 17.675925 = \underline{A}_{12}$$

4. De donde $A \geqslant \underline{A}_{12} \geqslant \underline{A}_6 \geqslant \underline{A}_3$

Cuarta Aproximación.

1. Dividamos el intervalo $[2,4]$ en n partes iguales, dibujando los rectángulos inscritos indicando la localización de algunas de las subdivisiones.



2. Calculemos el área de los rectángulos $R_1 \ldots\ldots R_n$.

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$	2^2	$\frac{2}{n} \cdot 2^2 = \frac{8}{n}$
R_2	$\frac{2}{n}$	$(2 + \frac{1}{n} \cdot 2)^2 = (\frac{2n+2}{n})^2$	$\frac{2}{n} \cdot \frac{(2n+2)^2}{n^2} = \frac{2}{n^3}(2n+2)^2$
R_3	$\frac{2}{n}$	$(2 + \frac{2}{n} \cdot 2)^2 = (\frac{2n+4}{n})^2$	$\frac{2}{n} \frac{(2n+4)^2}{n^2} = \frac{2}{n^3} (2n+4)^2$
.	.	. .	. .
.	.	. .	. .
.	.	. .	. .
R_n	$\frac{2}{n}$	$(2 + \frac{n-1}{n} \cdot 2)^2 = (\frac{2n+2(n-1)}{n})^2$	$\frac{2}{n}(\frac{2n+2(n-1)}{n^2})^2 = \frac{2}{n^3}(2n+2(n-1))^2$

3. Obtengamos $A_n = \sum_{k=1}^{n} aRk$.

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} aRk = \frac{8}{n} + \frac{2}{n^3}(2n+2)^2 + \frac{2}{n^3}(2n+4)^2 + \ldots + \frac{2}{n^3}(2n+2(n-1))^2$$

$$= \frac{8}{n} + \frac{2}{n^2} \left[(2n+2)^2 + (2n+4)^2 + \ldots + (2n+2(n-1))^2 \right] = \ldots *$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (2n+2k)^2 = 4 \sum_{k=1}^{n-1} (n+k)^2 \ldots$$

Aplicando las propiedades de sumas abreviadas obtengamos:

$$4\sum_{k=1}^{n-1}(n+k)^2 = 4\sum_{k=1}^{n-1}(n^2+2nk+k^2) = 4\left(\sum_{k=1}^{n-1} n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2nk + \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)$$

$$=4\left((n-1)n^2 + \frac{2n.n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right) =$$

$$= 8n^2(n-1) + \frac{2n(n-1)(2n-1)}{3} \quad .....*_1$$

Sustituyendo $*_1$ en $*$ tenemos:

$$\underline{A_n} = \frac{8}{n} + \frac{2}{n^3}\left[8n^2(n-1) + \frac{2n(n-1)(2n-1)}{3}\right]$$

$$= \frac{8}{n} + \frac{16n^2(n-1)}{n^3} + \frac{4n(n-1)(2n-1)}{3n^3}$$

$$= \frac{8}{n} + \frac{16(n-1)}{n} + \frac{4}{3}\,\frac{n}{n}\,\frac{(n-1)}{n}\,\frac{(2n-1)}{n} =$$

$$= \frac{8}{n} + 16\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{4}{3}(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \quad ....**$$

4. Como ya sabemos que tomando n suficientemente grande $\{\frac{1}{n}\}$ tiende a ser cero por lo que el área real bajo la curva será $\lim_{n\to\infty} \underline{A_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{n} + 16\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{n}\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]$

$$= 16 + \frac{8}{n} = 18.6666$$

$$\therefore A = 18.666$$

4. De lo Anterior concluimos que:

$$A \geq \underline{A_n} \geq A_{12} \geq A_6 \geq A_3$$

Ficha # 1

Encuentra una aproximación al área bajo la curva $f(x) = x^2$ en $[1,4]$ (realiza las tres primeras aproximaciones).

Después de haber ejecutado la ficha anterior, encontremos la cuarta aproximación, para esto dividamos el intervalo en n partes iguales para encontrar el área real.

Cuarta Aproximación.

1. Dividamos el intervalo $[1,4]$ en n partes iguales dibujando los rectángulos inscritos; indicando cual es la distancia entre los extremos del intervalo $[1,4]$ e indicando la localización de algunos puntos.

2. Calculemos el área de cada uno de los rectángulos:

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$	1^2	$\frac{3}{n} \cdot 1^2 = \frac{3}{n}$
R_2	$\frac{3}{n}$	$(1 + \frac{1}{n} \cdot 3)^2 = (\frac{n+3}{n})^2$	$\frac{3}{n} \cdot \frac{(n+3)^2}{n^2} = \frac{3}{n^3}(n+3)^2$
R_3	$\frac{3}{n}$	$(1 + \frac{2}{n} \cdot 3) = (\frac{n+6}{n})^2$	$\frac{3}{n} \quad (\frac{n+6}{n^2})^2 = \frac{3}{n^3}(n+6)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$
R_n	$\frac{3}{n}$	$(1 + \frac{n-1}{n} \cdot 3)^2 = (\frac{n+3(n-1)}{n})^2$	$\frac{3}{n} \quad (n+3)(n-1))^2 = \frac{3}{n^3}(n+3)(n-1))^2$

3. Calculemos $\underline{A_n} = \sum_{k=1}^{n} aRk$

$$\underline{A_n} = \sum_{k=1}^{n} aRk = \frac{3}{n} + \frac{3}{n^3}(n+3)^2 + \frac{3}{n^3}(n+6)^2 + \ldots + \frac{3}{n^3}(n+3)(n-1))^2$$

$$= \frac{3}{n} + \frac{3}{n^3}\Big[\underbrace{(n+3)^2 + (n+6)^2 + \ldots + (n+3(n-1))^2}_{\sum_{k=1}^{n-1}(n+3k)^2}\Big] \ldots *$$

de donde $\sum_{k=1}^{n-1}(n+3k)^2 = \sum_{k=1}^{n-1}(n^2 + 6nk + 9k^2) = \sum_{k=1}^{n-1} n^2 + 6n\sum_{k=1}^{n-1} k + 9\sum_{k=1}^{n-1} k^2 =$

$$= n^2(n-1) + 6n \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{9n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$= n^2(n-1) + 3n^2(n-1) + \frac{3n(n-1)(2n-1)}{2} \ldots *_1$$

Sustituyendo $*_1$ en $*$ tenemos:

$$\underline{A_n} = \frac{3}{n} + \frac{3}{n^3}\left[n^2(n-1) + 3n^2(n-1) + \frac{3n(n-1)(2n-1)}{2} \right]$$

$$= \frac{3}{n} + \frac{3n^2(n-1)}{n^3} + \frac{9n^2(n-1)}{n^3} + \frac{9n(n-1)(2n-1)}{2n^3}$$

$$= \frac{3}{n} + \frac{3(n-1)}{n} + \frac{9(n-1)}{n} + \frac{9}{2}\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n}$$

$$= \frac{3}{n} + 3\left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right) + 9\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}(1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

4. Tomando n suficientemente grande sabemos que $\{\frac{1}{n}\}$ tiende a cero por lo que $\lim_{n\to\infty} \underline{A_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{n} + 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\right)$

$$= 3 + 9 + 9 = 21 = \text{Area real}$$

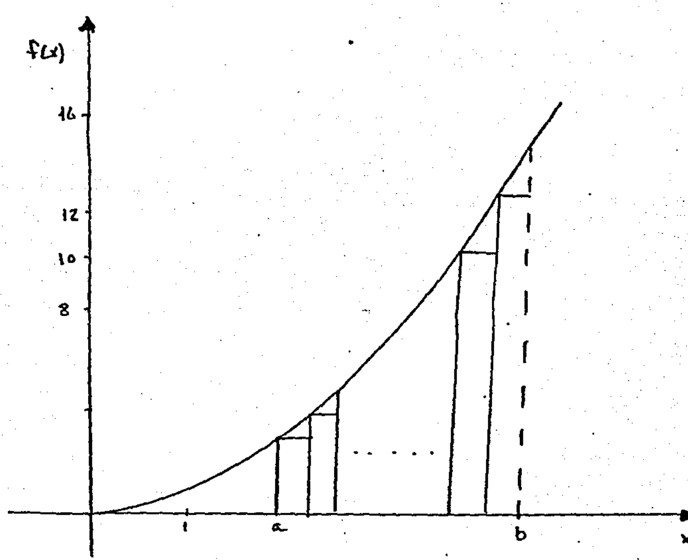
4. Por lo que $A \geq \underline{A_n} \geq A_{12} \geq A_6 \geq A_3$

Hasta aquí hemos trabajado con intervalos particulares cuya distancia entre sus extremos puede ser cualquier número real; pasemos ahora a encontrar el área bajo la curva $f(x) = x^2$ para cualquier intervalo $[a,b]$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq b$ para para lo cual encontraremos la cuarta aproximación.

Cuarta Aproximación.

1. Tomemos un intervalo cualesquiera en el eje de las x cuyo extremo izquierdo será a y el derecho será b, dividimos en n partes iguales y localizamos algunas de estas partes.

¿Cuál será la distancia entre los extremos del intervalo?



2. Calculemos las áreas de los n rectángulos inscritos:

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{b-a}{n}$	a_2	$\frac{b-n}{n} \cdot a^2$
R_1	$\frac{b-a}{n}$	$a+\frac{1}{n}(b-a)^2) = (\frac{na+(b.a)}{n})^2$	$\frac{b-a}{n}\ \underline{(na+(b-a))^2} = \frac{b-a}{n^3}(na+(b-a))^2$
R_3	$\frac{b-a}{n}$	$(a+\frac{2}{n}(b-a))^2 = (\frac{na+2(b-a)}{n})^2$	$\frac{b-a}{n}\frac{(na+2(b-a))^2}{n^2} = \frac{b-a}{n^3}\ (na+2(b-a))^2$
.	.	. .	. . . .
.	.	. .	. . . .
.	.	. .	. . . .
R_n	$\frac{b-a}{n}$	$(a+\frac{(n-a)}{n}(b-a))^2 = (\frac{na+(n-1)(b-a)}{n})^2$	$\frac{b-a}{n}(\frac{na+(n-1)(b-a))^2}{n^2} = \frac{b-a}{n^3}(na+(n-1)$ $(b-a))^2$

3. Calculemos $\underline{A_n} = \sum_{k=1}^{n} aRk$

$$\underline{A_n} = \sum_{k=1}^{n} aRk = \frac{a^2(b-a)}{n} + \frac{b-a}{n}(na+(b-a))^2 + \frac{b-a}{n^3}(na+2(b-a))^2 + \ldots + \frac{b-a}{n^3}(na+(n-1)(b-a))^2$$

$$*\ldots = \frac{a^2(b-a)}{n} + \frac{b-a}{n}\left[\underbrace{(na+(b-a))^2 + (na+2(b-a))^2 + \ldots + (na+(n-1)(b-a))}_{\sum_{k=1}^{n-1}(na+k(b-a))^2}\right]$$

De donde $\sum_{k=1}^{n=1} (na + k(b-a))^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (n^2a^2 + 2ank(b - a) + k^2(b - a)^2)$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} n^2a^2 + 2an(b - a) \sum_{k=1}^{n-1} k + (b - a)^2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= n^2a^2(n - 1) + 2an(b - a) \cdot \frac{n(n - 1)}{2} + (b - a)^2 \cdot \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6}$$

$$= n^2a^2(n - 1) + an^2(b - a)(n - 1) + (b - a)^2 \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6} \quad \ldots *_1$$

Sustituyendo $*_1$ en $*$ se tiene:

$$\underline{A_n} = \sum_{k=1}^{n} aRk = \frac{a^2(b - a)}{n} + \frac{b - a}{n^3} \left[n^2a^2(n-1) + an^2(b-a)(n-1) + (b-a)^2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right]$$

$$= \frac{a^2(b-a)}{n} + \frac{(b-a)a^2n^2(n-1)}{n^3} + \frac{an^2(b-a)^2(n-1)}{n^3} + \frac{(b-a)^3 n(n-1)(2n-1)}{6n^3} =$$

$$= \frac{a^2(b-a)}{n} + a^2(b-a)(1 - \frac{1}{n}) + a(b-a)^2(1 - \frac{1}{n}) + \frac{(b-a)^3}{6}(1)(2 - \frac{1}{n}) \ldots\ldots **$$

4. Haciendo n suficientemente grande (o sea $n \to \infty$ ent. $\{\frac{1}{n}\} \to 0$) para conocer el área bajo la curca $f(x) = x^2$ en el intervalo $[a, b]$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \underline{A_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^2(b-a)}{n} + a^2(b-a)(1-\frac{1}{n}) + a(b-a)^2(1-\frac{1}{n}) + \frac{(b-a)^3}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) \right] =$$

$$= a^2(b-a) + a\ (b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = A \ ...II$$

4. De lo anterior se concluye que:

$$A \geqslant \underline{A_n} \geqslant A_{12} \geqslant A_6 \geqslant A_3$$

Verifiquemos ahora que la fórmula (II) se cumple para los intervalos $[2,4]$ y $[1,4]$ que trabajamos anteriormente con cuatro aproximaciones.

En el intervalo $[2,4]$ $a = 2$ y $b = 4$ por lo que se tiene:

$$A = a^2(b-a) + a\ (b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3}$$

$$= 2^2\ (4-2) + 2(4-2)^2 + \frac{(4-2)^3}{3}$$

$$= 4(2) + 2(2)^2 + \frac{2^3}{3}$$

$$= 18 + 8 + \frac{8}{3} = 16 + \frac{8}{3} = \frac{56}{3} = 18.666$$

la cual coincide con el área encontrada anteriormente. Veamos ahora que valor toma el área en el intervalo $[1,4]$ donde $a = 1$ y $b = 4$

$$A = a^2(b - a) + a\ (b - a)^2 + \frac{(b - a)^3}{3}$$

$$= 1(4 - 1) + 1\ (4 - 1)^2 + \frac{(4 - 1)^3}{3} = 1(3) + 1(3)^2 + \frac{3^3}{3}$$

$$= 3 + 9 + 9 = 21$$

donde este valor coincide nuevamente con el área calculada mediante las cuatro aproximaciones efectuado anteriormente.

Ficha # 2

Calcula el área bajo la curva $f(x) = x^2$ en los siguientes intervalos:

a) $[0,7]$ b) $[1,\frac{7}{3}]$ c) $[4,\frac{23}{3}]$ d) $[-1,3]$ e) $[\frac{1}{2},4]$

empleando la fórmula II.

Si ahora mediante pasos algebráicos desarrollamos (II) para reducirla lo más que se pueda obtenemos:

$$A = a^2(b - a) + a(b - a)^2 + \frac{(b - a)^3}{3} \ldots. \quad (II)$$

$$= a^2b - a^3 + a(b^2 - 2ab + a^2) + \frac{(b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3)}{3}$$

$$= a^2b - a^3 + ab^2 - 2a^2b + a^3 + \frac{b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3}{3}$$

$$= \frac{3\cancel{a^2b} - 3\cancel{a^3} + 3\cancel{ab^2} - 6\cancel{a^2b} + 3\cancel{a^3} + b^3 - 3\cancel{b^2a} + 3\cancel{ba^2} - a^3}{6}$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

por lo que si $f(x) = x^2$ tendremos que:

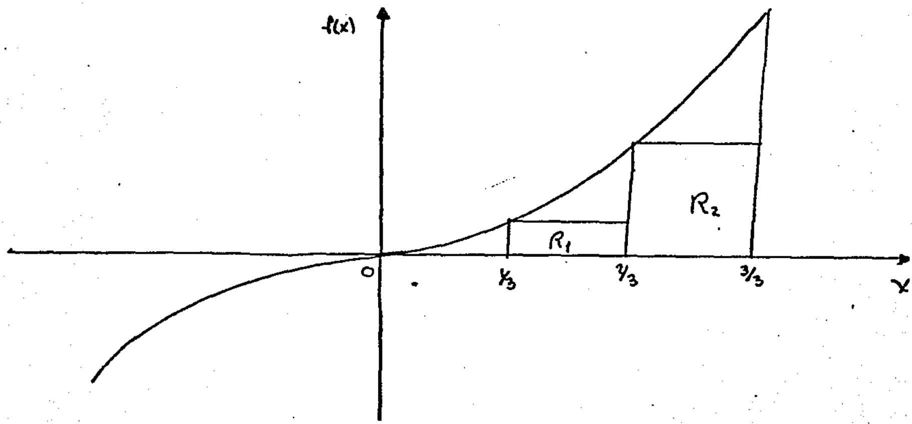
$$\int_a^b x^2 = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Veamos ahora que sucede si combinamos la función - - $f(x) = x^3$.

Nuevamente calculemos el área bajo la curva en el intervalo $[0,1]$; para lo cual efectuaremos las cuatro aproximaciones.

Primera Aproximación.

1. Devidamos el intervalo $[0,1]$ en tres partes iguales; dibujemos la curva y los rectángulos inscritos a ella.



2. Encontremos el área de R_1 y R_2

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3})^3 = \frac{1^3}{3^3}$	$\frac{1}{3}\,(\frac{1}{3^3})^3 = \frac{1}{3^4} \cdot 1^3$
R_2	$\frac{1}{3}$	$(\frac{2}{3})^3 = \frac{2^3}{3^3}$	$\frac{1}{3}\,\frac{2^3}{3^3} = \frac{1}{3^4} \cdot 2^3$

3. Calculando $\underline{A}_3 \sum_{k=1}^{2} aRk$ se tiene

$$\underline{A}_3 = \sum_{k=1}^{2} aRk = \frac{1}{3^4} \cdot 1^3 + \frac{1}{3^4} \cdot 2^3$$

$$= \frac{1}{3^4} \left[1^3 + 2^3 \right] = \frac{1}{81} \left[1 + 8 \right] = \frac{9}{81} = \frac{1}{9} = .111$$

4. Por lo que $A \geq \underline{A}_3 = .1111$

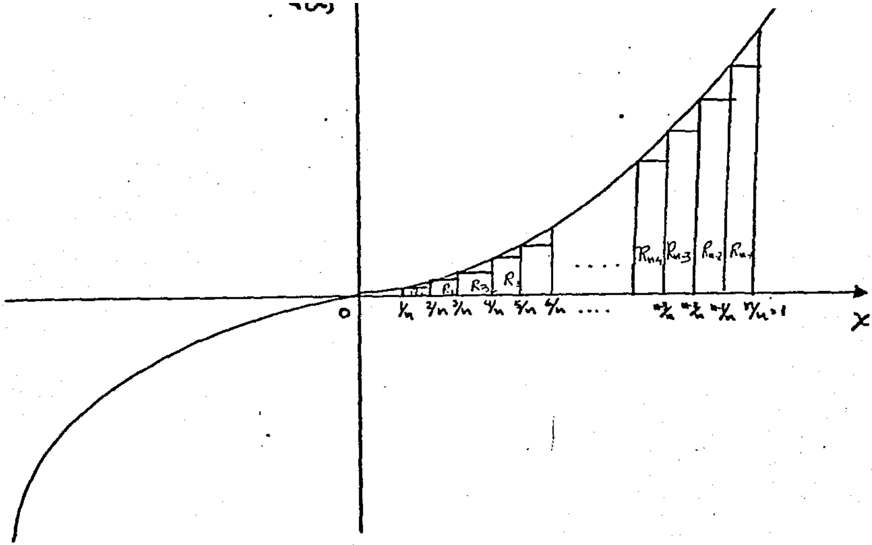
Ficha # 3

Realiza la segunda y tercera aproximación; para ello ayudate usando la fórmula $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Pasemos ahora a efectuar la cuarta aproximación .

Cuarta Aproximación.

1. Dividamos el intervalo $[0,1]$ en n partes iguales y dibujemos los rectángulos inscritos bajo la curva.



2. Calculemos al área de los rectángulos formados.

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{n}$	$(\frac{1}{n})^3 = \frac{1^3}{n^3}$	$\frac{1}{n} \cdot \frac{1^3}{n^3} = \frac{1}{n^4} \cdot 1^3$
R_2	$\frac{1}{n}$	$(\frac{2}{n})^3 = \frac{2^3}{n^3}$	$\frac{1}{n} \cdot \frac{2^3}{n^3} = \frac{1}{n^4} \cdot 2^3$
R_3	$\frac{1}{n}$	$(\frac{3}{n})^3 = \frac{3^3}{n^3}$	$\frac{1}{n} \cdot \frac{3^3}{n^3} = \frac{1}{n^4} \cdot 3^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$
R_{n-1}	$\frac{1}{n}$	$(\frac{n-1}{n})^3 = \frac{(n-1)^3}{n^3}$	$\frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)^3}{n^3} = \frac{1}{n^4} \cdot (n-1)^3$

3. Calculando $\underline{A}_n$ se tiene

$$\underline{A}_n = \sum_{k=1}^{n-1} aRk = \frac{1}{n^4} \cdot 1^3 + \frac{1}{n^4} \cdot 2^3 + \frac{1}{n^4} \cdot 3^3 + \ldots + \frac{1}{n^4} (n-1)^2$$

$$= \frac{1}{n^4} \underbrace{\left[1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 \right]}_{\sum_{k=1}^{n-1} k^3} \quad \ldots\ldots *$$

de donde $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2 (n)^2}{4} = \frac{n^2 (n-1)^2}{4}$ .....**

Sustituyendo ** en * se tiene:

$$\underline{A}n = \frac{1}{n^4} \left(\frac{n^2 (n-1)^2}{4} \right) = \frac{n^2 (n-1)^2}{4n^4} = \frac{(n-1)^2}{4n^2} = \frac{n^2 - 2n + 1}{4n^2} =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

4. de donde $A \geq \underline{A}_n \geq \underline{A}_{12} \geq \underline{A}_6 > \underline{A}_3$

Haciendo n suficientemente grande sabemos $\frac{1}{n} \to 0$ por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{A}_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right] = \frac{1}{4} = .2500 = A$$

Ficha # 3

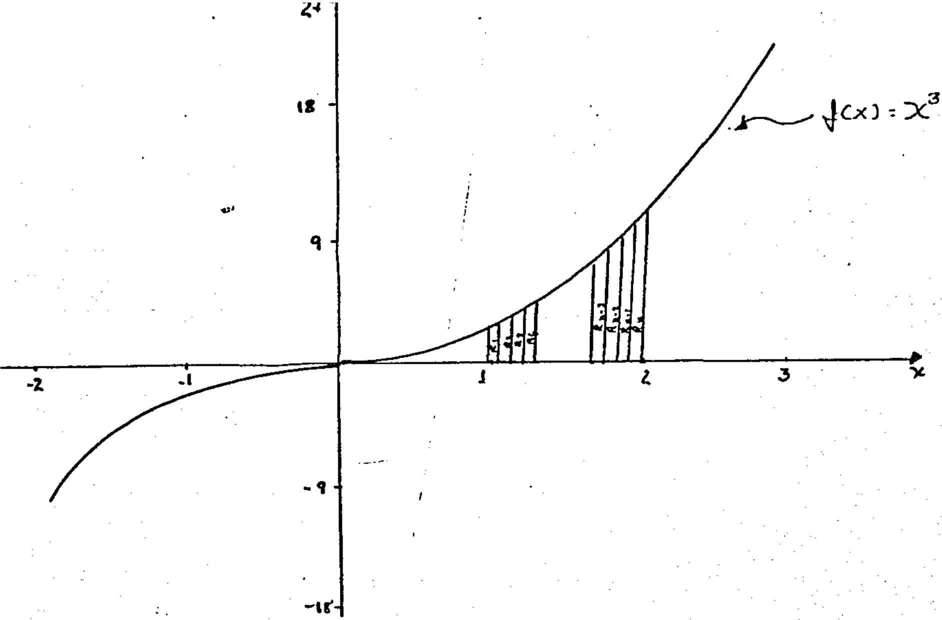
Calcular el área bajo la curva $f(x) = x^3$ en el intervalo $[1,2]$ para las tres primeras aproximaciones.

Enseguida pasaremos a calcular el área bajo la curva de $f(x) = x^3$ pero ahora para la cuarta aproximación.

Cuarta Aproximación.

1. Dividamos el intervalo $[1,2]$ en n partes iguales, dibuja los rectángulos inscritos y localiza algunos de los puntos de las subdivisiones anteriores.

   ¿Cuántos rectángulos se forman?



2. Calculemos el área de los rectángulos formados:

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{n}$	1^3	$\frac{1}{n} \cdot 1^3$
R_2	$\frac{1}{n}$	$(1 + \frac{1}{n})^3 = (\frac{n+1}{n})^3$	$\frac{1}{n}\ \frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{1}{n^4}(n+1)^3$
R_3	$\frac{1}{n}$	$(1 + \frac{2}{n})^3 = (\frac{n+2}{n})^3$	$\frac{1}{n}\ \frac{(n+2)^3}{n^3} = \frac{1}{n^4}(n+2)^3$
.	.	. .	. .
.	.	. .	. .
.	.	. .	. .
R_n	$\frac{1}{n}$	$(1 + \frac{n-1}{n})^3 = (\frac{n+(n-1)}{n})^3$	$\frac{1}{n} \cdot \frac{(n+(n-1))^3}{n^3} = \frac{1}{n^4}(n+(n-1))^2$

3. Obtengamos $\underline{A_n}$

$$\underline{A_n} = \sum_{k=1}^{n} aRk = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}(n+1)^3 + \frac{1}{n^4}(n+2)^3 + \ldots + \frac{1}{n^4}(n+(n-1))^3$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}\Big[\underbrace{(n+1)^3 + (n+2)^3 + \ldots + (n+(n-1))^3}_{\sum_{k=1}^{n-1}(n+k)^3}\Big] \ldots *$$

donde $\sum_{k=1}^{n-1}(n+k)^3 = \sum_{k=1}^{n-1}(n^3 + 3n^2k + 3nk^2 + k^3)$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} n^3 + 3n^2 \sum_{k=1}^{n-1} k + 3n \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sum_{k=1}^{n-1} k^3$$

$$= n^3(n-1) + 3n^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \cancel{3}n \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{\underset{2}{\cancel{6}}} + \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

$$= n^3(n-1) + \frac{3n^3(n-1)}{2} + \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{2} + \frac{n^2(n-1)^2}{4} \ldots *$$

Sustituyendo $*_1$ en $*$ se tiene:

$$\underline{A_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}\Big[n^3(n-1) + \frac{3n^3(n-1)}{2} + \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{2} + n^2(n-1)^2\Big]$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{n^3(n-1)}{n^4} + \frac{3n^3(n-1)}{2n^4} + \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{2n^4} + \frac{n^2(n-1)^2}{4n^4}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{(n-1)}{n} + \frac{3(n-1)}{2n} + \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} + \frac{(n-1)^2}{4n^2}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{(n-1)}{n} + \frac{3}{2}\frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{2}\frac{(n-1)}{n}\frac{(2n-1)}{n} + \frac{1}{4}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) + \frac{1}{4}(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})$$

4. Por lo que: $A \geq \underline{A_n} \geq A_{12} \geq \underline{A_6} \geq A_3$ pero sabemos que haciendo n suficientemente grande entonces $\{\frac{1}{n}\} \to 0$

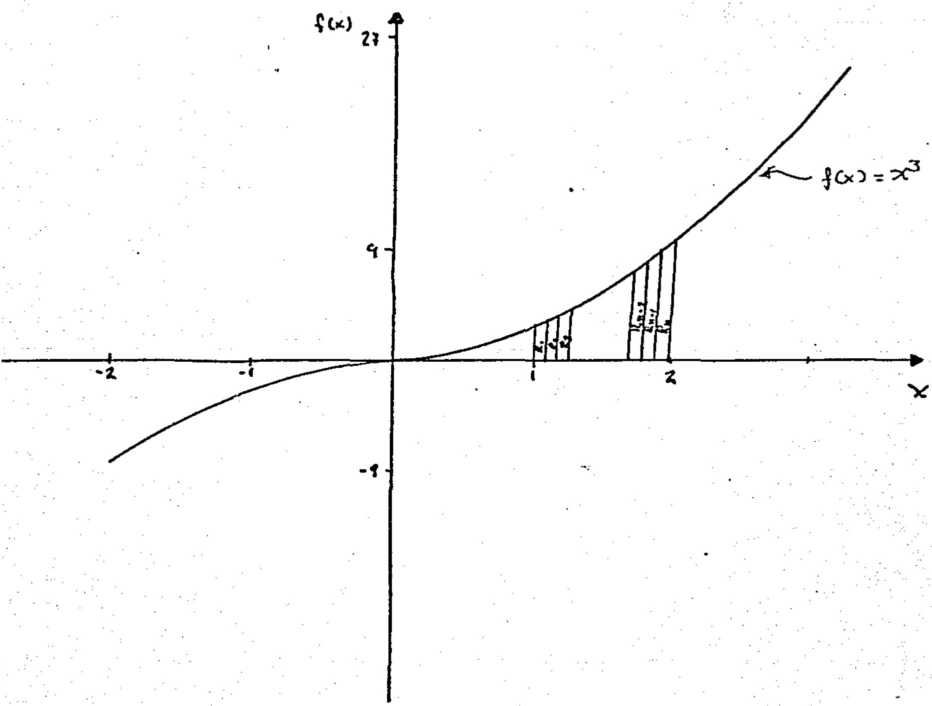
$$\therefore \lim_{n\to\infty} \underline{A_n} = \lim_{n\to o} \left[\frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) + \frac{1}{4}(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}) \right]$$

$$= 1 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{4} = 2 + \frac{7}{4} = \frac{15}{4} = 3.75 = A$$

Hasta ahora hemos trabajado con $f(x) = x^3$ y los intervalos $[0,1]$ y $[1,2]$ cuya distancia entre sus extremos es 1; vamos a generalizar lo anterior para cualquier intervalo que cumpla con la condición de que la distancia entre sus extremos sea igual a 1 esto es $[a, a+1]$; donde para ésto sólo trabajaremos con la cuarta aproximación.

Cuarta Aproxinación.

1. Divide el intervalo $[a, a+1]$; en n partes iguales y dibuja los rectángulos inscritos localizando algunos de los puntos de las subdivisiones.



2. Calculemos el área de los rectángulos inscritos con los datos correspondientes a los n rectángulos.

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{1}{n}$	a^3	$\frac{a^3}{n} = \frac{1}{n} a^3$
R_2	$\frac{1}{n}$	$(a + \frac{1}{n})^3 = (\frac{na + 1}{n})^3$	$\frac{1}{n} \cdot \frac{(na + 1)^3}{n^3} = \frac{1}{n^4}(na + 1)^3$
R_3	$\frac{1}{n}$	$(a + \frac{2}{n})^3 = (\frac{na + 2}{n})^3$	$\frac{1}{n} \cdot \frac{(na + 2)^3}{n^3} = \frac{1}{n^4}(na + 2)^3$
.	.	. .	. .
.	.	. .	. .
.	.	. .	. .
R_n	$\frac{1}{n}$	$(a + \frac{n-1}{n})^3 = (\frac{na + (n-1)}{n})^3$	$\frac{1}{n} \cdot (\frac{na+(n-1)^3}{n^3}) = \frac{1}{4^4}(na+(n-1))^3$

3. Obtengamos $\underline{A_n}$

$$\underline{A_n} = \sum_{k=1}^{n} aRk = \frac{a^3}{n} + \frac{1}{n^4}(na + 1)^3 + \frac{1}{n^4}(na + 2)^3 + \ldots + \frac{1}{n^4}(na + (n-1))^3$$

$$\underline{A_n} = \frac{a^3}{n} + \frac{1}{n^4}\Big[\underbrace{(na + 1)^3 + (na + 2)^3 + \ldots + (na + (n - 1))^3}_{\sum_{k=1}^{n-1} (na + k)^3}\Big] \ldots *$$

donde $\sum_{k=1}^{n-1} (na + k)^3 = \sum_{k=1}^{n-1} (n^3a^3 + 3n^2a^2k + 3nak^2 + k^3)$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} n^3a^3 + 3a^2n^2 \sum_{k=1}^{n-1} K + 3an \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k^3$$

$$= a^3n^3(n-1) + 3a^2n^2 \frac{n(n-1)}{2} + 3an \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n^2(n-1)^2}{4} \ldots$$

$$= a^3n^3(n-1) + \frac{3}{2} a^2n^3(n-1) + 3an^2 \frac{(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n^2(n-1)}{4} \ldots *_1$$

Sustituyendo $*_1$ en $*$ se tiene:

$$\underline{An} = \frac{a^3}{n} + \frac{1}{n^4}\left[a^3n^3(n-1) + \frac{3}{2} a^2n^3(n-1) + 3a \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n^2(n-1)}{4} \right]$$

$$= \frac{a^3}{n} + \frac{a^3n^3(n-1)}{n^4} + \frac{3}{2} \frac{a^2n^3(n-1)}{n^4} + \cancel{3}an^2 \frac{(n-1)(2n-1)}{\underset{2}{\cancel{6}}n^4} + \frac{n^2(n-1)^2}{\cancel{4}n^4}$$

$$= \frac{a^3}{n} + \frac{a^3(n-1)}{n} + \frac{3}{2} \frac{a^2(n-1)}{n} + \frac{a(n-1)(2n-1)}{2n^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{a^3}{n} + a^3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{3}{2} a^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{a}{2} \left(\frac{1n-1}{n}\right) \left(\frac{2n-1}{n}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{a^3}{n} + a^3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{3}{2} a^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

4. Por lo que se tiene $A \geq \underline{A_n} \geq \underline{A_{12}} \geq \underline{A_6} \geq \underline{A_3}$ nuevamente haciendo n infinitamente grande sabemos que $\frac{1}{n}$ tiende a cero o sea:

$$\lim \underline{A_n} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{a^3}{n} + a^3 (1 - \frac{1}{n}) + \frac{3}{2} a^2 (1 - \frac{1}{n}) + \frac{a}{2} (1 - \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{4}(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) \right]$$

$$= a^3 + \frac{3}{2} a^2 + a + \frac{1}{4} = \boxed{a^3 + \frac{3}{2} a^2 + a + \frac{1}{4}}$$

Aplicando este resultado a los intervalos $[0,1]$ y $[1,2]$ se tiene:

$$[0,1], \; a = 0, \; \therefore \; a^3 + \frac{3}{2}a^2 + a + \frac{1}{4} = (0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2 + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = A$$

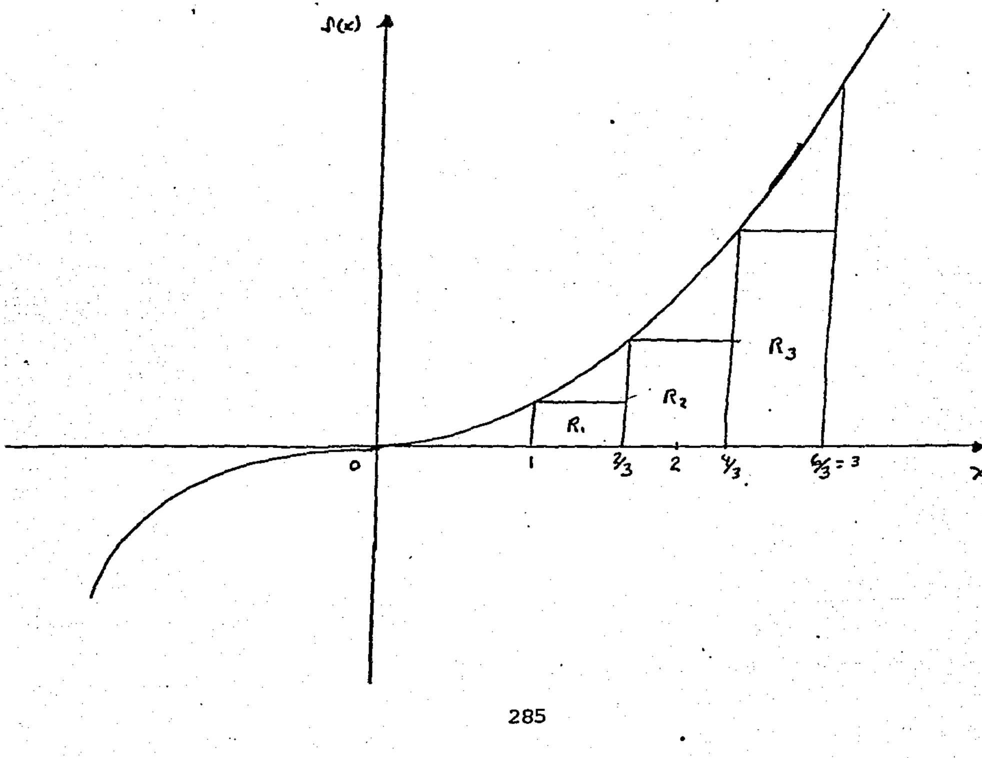
$$[1,2], \; a = 1 \; \therefore \; a^3 + \frac{3}{2}a^2 + a + \frac{1}{4} = (1)^3 + \frac{3}{2}(1)^2 + 1 + \frac{1}{4} = 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3.75 = A$$

donde los valores de A respectivamente coinciden con los resultados encontrados anteriormente por el método de aproximaciones.

Pasemos ahora a encontrar el área bajo la curva de $f(x) = x^3$ cuando la distancia del intervalo es diferente de la unidad, así por ejemplo trabajemos con el $[1,3]$ haciendo las cuatro aproximaciones acostumbradas.

Primera Aproximación.

1. Divide el $[1,3]$ en tres partes iguales, debujando los - rectángulos inscritos.



2. Calculemos el área de cada uno de los rectángulos formados:

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$	1^3	$\frac{2}{3} \cdot 1^3 = \frac{2}{3}$
R_2	$\frac{2}{3}$	$(1 + \frac{2}{3} \cdot 1)^3$	$\frac{2}{3} (\frac{3 + 2}{3})^3 = \frac{2}{3^4} \ (3 + 2)^3$
R_3	$\frac{2}{3}$	$(1 + \frac{2}{3} \cdot 2)^3$	$\frac{2}{3} (\frac{3 + 4}{3^3}) = \frac{2}{3^4} \ (3 + 4)^3$

3. Sumemos las áreas de R_1, R_2, R_3 para obtener $\underline{A_3}$

$$A_3 = \frac{2}{3} \cdot 1^3 + \frac{2}{3^4}(3 + 2)^3 + \frac{2}{3^4}(3 + 3)^3$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3^4} \left[5^3 + 7^3 \right]$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{81} \left[125 + 343 \right]$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{81} \left[468 \right] = \frac{2}{3} + \frac{936}{81} = \frac{18 + 936}{81} = \frac{954}{81} = 11.77$$

4. Por lo que $A \geq \underline{A_3}$

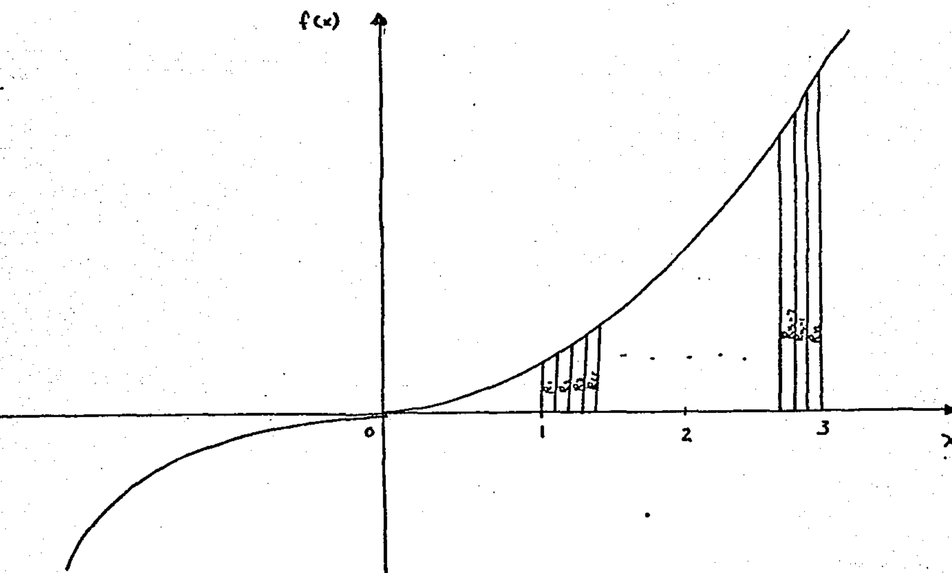
Ficha # 4

Encuentra una aproximación a el área bajo la curva de $f(x) = x^3$ en $[1,3]$ utilizando para ello la segunda y tercera aproximación.

Después de que hayas realizado la ficha anterior pasemos a efectuar la cuarta aproximación en $[1,3]$ para $f(x) = x^3$.

Cuarta Aproximación.

1. Divide el $[1,3]$ en n partes iguales, dibuja los rectángulos inscritos y señala algunas subdivisiones.



2. Encontremos las áreas de $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$ donde:

	Base		
R_1	$\frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$	1^3	$\frac{2}{n} \cdot \frac{1^3}{n} = \frac{2}{n}$
R_2	$\frac{2}{n}$	$(1 + \frac{1}{n} \cdot 2)^3 = (\frac{n+2}{n})^3$	$\frac{2}{n} \cdot \frac{(n+2)^3}{n^3} = \frac{2}{n^4} \cdot (n+2)^3$
R_3	$\frac{2}{n}$	$(1 + \frac{2}{n} \cdot 2)^3 = (\frac{n+4}{n})^3$	$\frac{2}{n} \cdot \frac{(n+4)^3}{3^3} = \frac{2}{n^4}(n+4)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$
R_n	$\frac{2}{n}$	$(1 + \frac{n-1}{n} \cdot 2)^3 = (\frac{n+2(n-1)}{n})^3$	$\frac{2}{n} \cdot \frac{(n+2\ (n-1))^2}{n^3}\ \frac{2}{n^4}(n+2\ (n-1))^3$

3. Sumando las áreas de $R_1, R_2, \ldots, R_n$ se tiene:

$$\underline{An} = \sum_{k=1}^{n} aRk = \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4}(n+2)^3 + \frac{2}{n^4}(n+4)^3 + \ldots + \frac{2}{n^4}(n+2)(n-1))^3$$

$$= \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4}\Big[\underbrace{(n+2)^3 + (n+4)^3 + \ldots + (n+2(n-1))^3}_{\sum_{k=1}^{n-1} (n+2k)^3}\Big] \ldots *$$

donde $\sum_{k=1}^{n-1} (n+2k)^3 = \sum_{k=1}^{n-1} (n^3 + 6n^2k + 12nk^2 + 8k^3)$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} n^3 + 6n^2 \sum_{k=1}^{n-1} k + 12n \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 8 \sum_{k=1}^{n-1} k^3$$

$$= n^3(n-1) + \cancel{6}\, n^2 \cdot \frac{n(n-1)}{\cancel{2}} + \cancel{12}\, nn \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{\cancel{6}} + \frac{8n^2(n-1)^2}{4}$$

$$= n^3(n-1) + 3n^3(n-1) + 2n^2(n-1)(2n-1) + 2n^2(n-1)^2 \ldots *_1$$

Sustituyendo $*_1$ en $*$ se tiene:

$$\underline{A}_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4}\left[n^3(n-1) + 3n^3(n-1) + 2n^2(n-1)(2n-1) + 2n^2(n-1)^2 \right]$$

$$\underline{A}_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4}\, n^3(n-1) + \frac{6n^3(n-1)}{n^4} + \frac{4n^2(n-1)(2n-1)}{n^4} + \frac{4n^2(n-1)^2}{n^4}$$

$$= \frac{2}{n} + 2\frac{(n-1)}{n} + \frac{6(n-1)}{n} + \frac{4(n-1)(2n-1)}{n^2} + \frac{4(n^2-2n+1)}{n^2}$$

$$= \frac{2}{n} + 2\left(1-\frac{1}{n}\right) + 6\left(1-\frac{1}{n}\right) + 4\,\frac{(n-1)}{n}\frac{(2n-1)}{n} + 4\left(\frac{n^2}{n^2} - \frac{2n}{2^2} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n} + 2\left(1-\frac{1}{n}\right) + 6\left(1-\frac{1}{n}\right) + 4\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) + 4\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

4. $\therefore$ $A \geq \underline{A}_n \geq \underline{A}_{12}\ \underline{A}_5 \geq A_3$

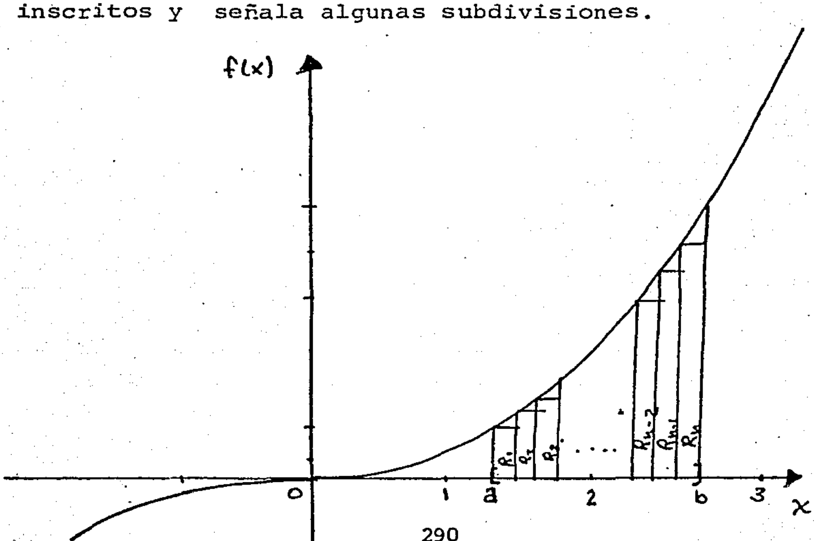
Haciendo n suficientemente grande tenemos que $\frac{1}{n} \to 0$ por lo que: $\lim_{n\to\infty} \underline{A_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2}{n} + 2(1-\frac{1}{n}) + 6\,(1-\frac{1}{n}) + 4\,(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})\right.$

$$\left. + 4\,(1-\frac{2}{n}) + \frac{1}{n^2})\right]$$

$$= 2 + 6 + 8 + 4 = 20$$

Pasemos aho ra a encontrar el área bajo la curva $f(x) = x^3$ tomando un intervalo $[a,b]$ cualesquiera donde $a \neq b$ y $a, b \in \mathbb{R}$ para lo cual ya únicamente trabajaremos con la cuarta aproximación:

1. Elige en el eje x un intervalo culquiera $[a,b]$ y divídelo en n partes iguales, dibuja algunos rectángulos inscritos y señala algunas subdivisiones.



2. Obtengamos las áreas de $R_1, R_2, \ldots, R_n$

	Base	Altura	Area
R_1	$\frac{b-a}{n}$	a^3	$\frac{b-a}{n} \cdot a^3$
R_2	$\frac{b-a}{n}$	$(a+\frac{1}{n}(b-a))^3 = (\frac{na+(b-a)}{n}$	$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{(na+(b-a)}{n^3} = \frac{b-a}{n^4}(na+(b-a))^3$
R_3	$\frac{b-a}{n}$	$(a+\frac{2}{n}(b-a))^3 = (\frac{na+2(b-a)}{n})^3$	$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{(na+2(b-a))^3}{n^3} = \frac{b-a}{n^4}(na+2(b-a))^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots \qquad \vdots$
R_n	$\frac{b-a}{n}$	$(a+\frac{(n-1)}{n}(b-a))^3 = (\frac{na+(n-1)(b-a)}{}^3_)$	$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{(na+(na+(n-1)(b-a)}{n^3} = \frac{b-a}{n^4}(na+(n-b)(b-a))^3$

de donde:

$$\underline{A_n} = \sum_{k=1}^{n} aR_k = \frac{a^3(b-a)}{n} + \frac{b-a}{n^4}(na+(b-a))^3 + \frac{b-a}{n^4}(na+(b-a))^3 + \frac{b-a}{n^4}(na+2(b-a))^3 + \ldots + \frac{b-a}{n^4}(na+(n-1)(b-a))^3$$

$$= \frac{a^3(b-a)}{n} + \frac{b-a}{n^4}\left[\underbrace{(na+(b-a))^3 + (na+2(b-a))^3 + \ldots + (na+(n-1)(b-a))^3}_{\sum_{k=1}^{n-1}(na+k(b-a))^3}\right] \ldots *$$

donde: $\sum_{k=1}^{n-1} (na + k(b-a))^3 =$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[n^3a^3 + 3n^2a^2(b-a)k + 3an(b-a)^2k^2 + (b-a)^3k^3\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} n^3a^3 + 3n^2a^2(b-a)\sum_{k=1}^{n-1} k + 3an(b-a)^2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + (b-a)^3\sum_{k=1}^{n-1} k^3$$

$$= a^3n^3(n-1) + 3a^2n^2(b-a)\cdot\frac{n(n-1)}{2} + \cancel{3}^{1}an(b-a)^2\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{\cancel{6}_{2}}$$

$$+ (b-a)^3\cdot\frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

$$*_1 \ldots = a^3n^3(n-1) + \frac{3}{2}a^2(b-a)n^3(n-1) + \frac{1}{2}a(b-a)^2n^2(n-1)(2n-1) + \frac{(b-a)^3}{4}n^2(n-1)^2$$

Sustituyendo $*_1$ en $*$ se tiene:

$$\underline{A_n} = \frac{a^3(b-a)}{n} + \frac{b-a}{n^4}\Big[a^3n^3(n-1) + \frac{3}{2}a^2(b-a)n^3(n-1) + \frac{1}{2}a(b-a)^2n^2(n-1)(2n-1) + \frac{(b-a)^3}{4}$$

$$n^2(n-1)^2\Big]$$

$$= \frac{a^3(b-a)}{n} + \frac{a^3(b-a)n^3(n-1)}{n^4} + \frac{3}{2}\,\frac{a^2(b-a)^2n^3(n-1)}{n^4} + \frac{1}{2}\,\frac{a(b-a)^3n^2(n-1)(2n-1)}{n^4} +$$

$$\frac{(b-a)^4}{4}\,\frac{n^2(n-1)^2}{n^4}$$

$$= \frac{a^3(b-a)}{n} + a^3(b-a)\frac{(n-1)}{n} + \frac{3}{2}a^2(b-a)^2\frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{2}a(b-a)^3\frac{(n-1)}{n}\frac{(2n-1)}{n} + \frac{(b-a)^4}{4}\Big(\frac{n^2}{n^2} -$$

$$\frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\Big)$$

$$= \frac{a^3(b-a)}{n} + a^3(b-a)\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{2}a^2(b-a)^2\left(n-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}a(b-a)^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^4}{4}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

4. $\therefore \quad A \geq \underline{A_n} \geq \underline{A_{12}} \geq \underline{A_6} \geq \underline{A_3}$

Haciendo n suficientemente grande sabemos que $\frac{1}{n} \to 0$ por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{An} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^3(b-a)}{n} + a^3(b-a)\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{2}a^2(b-a)^2\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}a(b-a)^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)}{4} \left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= a^3(b-a) + \frac{3}{2}a^2(b-a)^2 + \frac{2}{2}a(b-a)^3 + \frac{1}{4}(b-a)^4$$

$$\boxed{A = a^3(b-a) + \frac{3}{2}a^2(b-a)^2 + a(b-a)^3 + \frac{1}{4}(b-a)^4} \; \ldots, **$$

Aplicando éste resultado al $[1,3]$ donde $a = 1$ y $b = 3$ se tiene:

$$a^3(b-a) + \frac{3}{2}a^2(b-a)^2 + a(b-a)^3 + \frac{1}{4}(b-a)^4$$

$$= 1^3(3-1) + \frac{3}{2}(1)^2 + 1(3-1)^3 + \frac{1}{4}(3-1)^4$$

$$= 1(2) + \frac{3}{2}(2)^2 + (2)^3 + \frac{1}{4}(2)^4$$

$$= 2 + \frac{3}{2}(4) + 8 + \frac{1}{4}(16) = 2 + 6 + 8 + 4 = 20$$

donde este valor coincide con el resultado encontrado por medio de aproximaciones.

Desarrollando ** lo más que se pueda para lo cual sustituiremos los siguientes resultados:

$$(b - a)^2 = b^2 - 2b + b^2$$

$$(b - a)^3 = b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3$$

$$(b - a)^4 = b^4 - 4b^3a + 6b^2a^2 - 4ba^3 + a^4$$

$$\therefore \; A = a^3(b - a) + \frac{3}{2}a^2(b - a)^2 + a\,(b - a)^3 + \frac{1}{4}(b - a)^4$$

$$= a^3b - a^4 + \frac{3}{2}a^2(b^2 - 2ab + a^2) + a(b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3) + \frac{1}{4}(b^4 - 4b^3a + 6b^2a^2 - 4ba^3 + a^4$$

$$= \frac{4a^3b - 4a^4 + 6(a^2(b^2 - 2ab + a^2) + 4a(b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3) + (b^4 - 4b^3a + 6b^2a^2 - 4ba^3 + a^4)}{4}$$

$$= \frac{4a^3b = 4a^4 + 6a^2b - 12a^3b + 6a^4 + 4ab^3 - 12a^2b^2 + 12a^3b - 4a^4 + b^4 - 4b^3a + 6b^2a^2 - 4ba^3 + a^4}{4}$$

$$= \frac{b^4 - a^4}{4} = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

por lo que podemos afirmar que:

$$A = \int_a^b x^3 = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

donde el símbolo $\int x^3$ significaría, precisamente, el área bajo la curva x^3 entre $x = a$, $x = b$ y el eje horizontal x.

Ficha # 5

Calcula empleando lo anterior, el área bajo la curva $f(x) = x^3$ en los siguientesintervalos:

a) $[a,4]$ b) $[0,3]$ c) $[\frac{1}{2},5]$ d) $[-1,2]$ e) $[-\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$

De todo lo anterior se desprende que para calcular - el área bajo la curva en $[a,b]$ de $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^3$ basta con encontrar:

1) $$\int_a^b x^{\overset{\downarrow}{2}} = \frac{b^{\overset{\downarrow\downarrow}{3}}}{3} - \frac{a^{\overset{\downarrow\downarrow}{3}}}{3}$$

donde $a \neq b$ y $a, b \in \mathbb{R}$

2) $$\int_a^b x^{\overset{\downarrow}{3}} = \frac{b^{\overset{\downarrow\downarrow}{4}}}{4} - \frac{a^{\overset{\downarrow\downarrow}{4}}}{a^4}$$

Si comparamos los exponentes de x ($\downarrow$) y los exponentes de los resultados en (1) y (2). ¿Qué relación hay entre ambos?.

Si comparamos los exponentes de los resultados ($\downarrow\downarrow$) con respecto a los denominadores de los mismos en (1) y (2). ¿Cómo son éstos?.

En base a estas dos observaciones podemos afirmar - con la misma idea inductiva usada en las fórmulas de las cuartas aproximaciones anteriores que:

$$\int_a^b x^4 = \frac{b^5}{5} - \frac{a^5}{5}$$

$$\int_a^b x^5 = \frac{b^6}{6} - \frac{a^6}{6}$$

$$\vdots$$

$$\int_a^b x^n = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Sin embargo las fórmulas anteriores se pueden obtener y comprobar por el método antes usado.

Otra forma de expresar lo anterior sera:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b$$

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4} = \frac{x^4}{4} \Big|_a^b$$

$$\int_a^b x^4 dx = \frac{b^5}{5} - \frac{a^5}{5} = \frac{x^5}{5} \Big|_b^a$$

$$\overset{\uparrow}{*}$$

$$\vdots$$

$$\int_b^a x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b$$

NOTA: el símbolo dx usado en la columna * representa a las- bases de los rectángulos, al igual como lo supuso Leibnitz.

Ficha No. 6

1. Calcula las siguientes integrales

a) $\int_2^5 x^4$ b) $\int_1^b x^2$ c) $\int_0^3 x^5$

2. Explica con tus propias palabras que entiendes por la "integral de una función".

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

Comparemos algunos de los resultados encontrados en en el tema de la Derivada con los del tema de la Integral, - para ver que relación existe entre ambos.

Recordemos los resultados de las derivada de las si guientes funciones:

FUNCIONES	DERIVADA
a) $G_1(x) = \frac{x^3}{3}$	$f_1(x) = G_1'(x) = x^2$
b) $G_2(x) = \frac{x^4}{4}$	$f_2(x) = G_2'(x) = x^3$
c) $G_3(x) = \frac{x^5}{5}$	$f_3(x) = G_3'(x) = x^4$

también sabemos que:

$$\int_a^b x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b \qquad \int_a^b x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_a^b \qquad \int_a^b x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_a^b$$

Si sustituímos los valores que aparecen en cada integral adecuadamente, usando para esto los datos de la tabla I tenemos:

$$\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = G_1(x)\Big|_a^b \quad \therefore \int_a^b f_1(x)dx = G_1(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_a^b = G_2(x)\Big|_a^b \quad \therefore \int_a^b f_2(x)dx = G_2(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b f_3(x)dx = \int_a^b x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_a^b = G_3(x)\Big|_a^b \quad \therefore \int_a^b f_3(x)dx = G_3(x)\Big|_a^b$$

donde G_1, G_2 y G_3 son funciones cuyas derivadas son iguales a $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ respectivamente.

A G_1, G_2 y G_3 etc., se les llama antiderivadas de $f(x)$. Fué Barrow preceptor de Newton quién observó primeramente ésta relación; y éste descubrimiento hecho en el siglo XVII, fue de mucha importancia, ya que redujo el problema de encontrar áreas bajo curvas a un problema de antiderivación.

Así si nosotros nos preguntamos cuál será el área bajo la curva $f(x) = 3$ en $[a,b]$ es decir cuál será $\int_a^b 3dx$ es equivalente a preguntarnos ¿cuáles son las funciones cu -

yas derivadas son iguales a 3?, Para dar respuesta a lo anterior recordemos que tipo de funciones tienen por derivada 3. Recuerda que la derivada de una función lineal es el coeficiente de la variable, entonces si consideramos las siguientes funciones lineales.

$$G(x) = 3x + 1$$

$$G(x) = 3x + 2$$

$$\vdots$$

$$G(x) = 3x + c$$

Obtenemos que en todos los casos la derivada es 3, por lo que podemos decir que:

$$\int_a^b 3dx = (3x + c)\Big|_a^b$$

y en general

$$\int_a^b kdx = (kx + c)\Big|_b^b$$

Como hemos podido observar el problema de encontrar áreas se reduce bastante.

De lo anterior podemos enunciar el Teorema Fundamental del cálculo de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

donde f(x) es la derivada de la función F(x).

Ficha No. 1

Utilizando el Teorema Fundamental del cálculo, encuentra las siguientes integrales.

a) $\int_a^b 2dx =$

b) $\int_a^b 5dx =$

c) $\int_a^b \frac{x^3}{3} dx =$

d) $\int_a^b \frac{x^6}{6} dx =$

C O N C L U S I O N E S

El cálculo de la integral por aproximaciones, nos es útil para calcular el área por debajo de cualquier función - f(x) (lineal o no lineal), en cualquier intervalo [a,b]; - las primeras 3 aproximaciones propuestas son para que se in - duzca el comportamiento de las áreas de los rectángulos con particiones n = 3,6 y 12 y generalizar este comportamiento para n particiones cualesquiera y con la fórmula obtenida para n cualesquiera, hacer $n \to \infty$ para obtener el área deseada.

En los casos tratados en este capítulo sólo utilizamos la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ en donde observamos que $\lim_{n\to\infty} \{\frac{1}{n}\} = 0$ y - con este resultado podemos encontrar las áreas deseadas.

Al findal del capítulo podemos concluir con el Teorema Fundamental del cálculo el cual nos muestra lo sencillo - que puede ser calcular una integral.

Nos quedarían muchas preguntas por formular, entre otras: ¿qué pasa si en la fórmula no encontramos la sucesión $\frac{1}{n}$?, ¿qué significa realmente el límite de una sucesión?, ¿existirán funciones que no tengan integral?.

Todas estas preguntas tienen sus respuestas, las cuales quedan abiertas para un estudio superior del cálculo.

A P L I C A C I O N E S

A P L I C A C I O N E S

Vamos a mencionar algunas de las aplicaciones del método antes visto "Aproximaciones Sucesivas".

Una primera aplicación del método será para encontrar volúmenes y volúmenes de sólidos de revolución. Cabe aquí preguntarnos ¿qué son los volúmenes de sólidos de revolución?; donde, para podernosla contestar realizaremos el siguiente taller:

Taller # 1

Objetivo del taller.- Que el alumno visualice como se forma un sólido de revolución e identifique los elementos necesarios para formarlo.

Material Requerido.- 2 popotes o palitos, cartoncillo, papel lustre, escuadras, 2 trozos de alambre o hilo transparente, tijeras, pegamento.

Pasos a Seguir.

1. Con tus popotes o palitos o material equivalente forma un plano cartesiano.

2. En tu cartoncillo pega el papel lustre y dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4 y 6 cm respectiva - mente.

3. Recorta la figura anterior.

4. Pega en la orilla de la hipotenusa y en la orilla del cateto que mide 6 cm el alambre.

5. Coloca el triángulo sobre tu eje de tal forma que el cateto que mide 4 cm descanse sobre el eje de las "x", amarra con tu hilo el triángulo sujetándolo por el origen y por el eje de la "x".

6. Gira tu triángulo <u>una</u> vuelta o revolución completa, ¿qué sólido se forma?.

Exactamente se te forma un cono, el cual es un sólido que se obtuvo al girar el triángulo (una región) una vuleta o revolución; por lo que a éste sólido formado le llamaremos sólido de revolución.

Definamos ahora en forma más general que es un sólido de revolución.

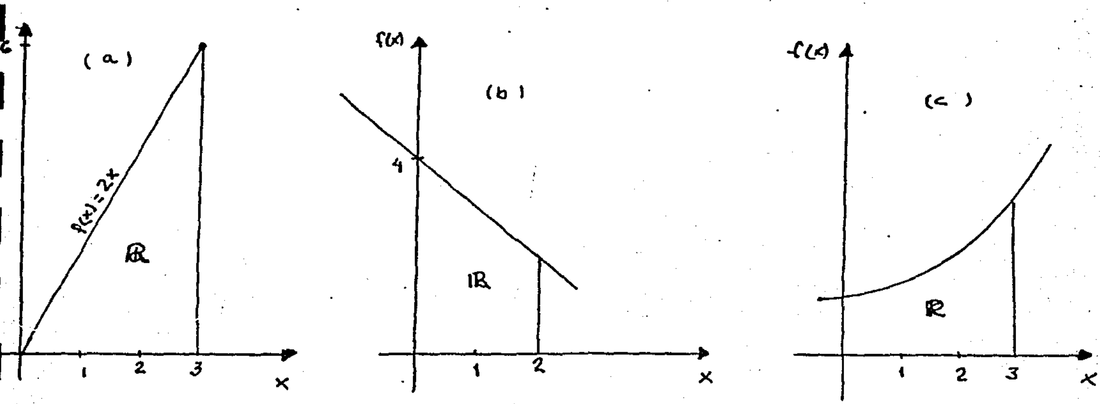
Suponemos que $\mathbb{R}$ es una región en el plano cartesiano definida de la siguiente forma:

1. Sea $[0,h]$ un intervalo en el eje de las x con $h \in \mathbb{R}^+$

2. Sea $f(x)$ una función tal que para toda $x \in [0,h]$ $f(x)$ existe y es positiva.

Entonces $\mathbb{R}$ es la región del plano acotada por el eje "x" por el eje "y", por la gráfica de la función $f(x)$ y la línea horizontal $x = h$.

Observando las regiones que se dan a continuación vemos que la región (a) es la misma que trabajamos en el taller anterior.



El sólido de revolución se forma girando alrededor del eje "x", la región ℝ una sola vez o bien una revolución completa.

Nuestro propósito ahora será encontrar el volúmen del sólido de revolución encontrado en el taller # 1; donde para entender mejor la solución resolveremos el siguiente taller.

Taller # 2

Objetivo del taller.- Identificar como a medida que aumenta el número de cilindros inscritos en el cono la suma de los volúmenes de los cilindoros se aproxima al volúmen del cono.

Material Requerido.- Frasco transparente, plumón y agua, 7 cilindros y un cono que se te proporcionarán en clase.

Instrucciones:

a)

1. Llena de agua el cono que se te dió.

2. Vierte el agua del cono en tu frasco y señala con tu plumón el nivel de ésta.

3. Deja tu frasco vacío.

4. Introduce los cilindros (1) y (2) dentro del cono. ¿se encuentran los cilindros inscritos al cono?

5. Saca tus cilindros llenálos de agua, vierte ahora el agua en tu frasco y marca el nivel de ésta. ¿Cómo es la suma de los volúmenes de los cilindors (1) y (2), con respecto al volúmen del cono?

6. Introduce los cinlindros 3,4,5,6 y 7 dentro del cono. ¿Se encuentran los cilindros inscritos al cono?

7. Saca tus cilindros llenalos de agua y vierte ésta en tu frasco marcando su nivel.

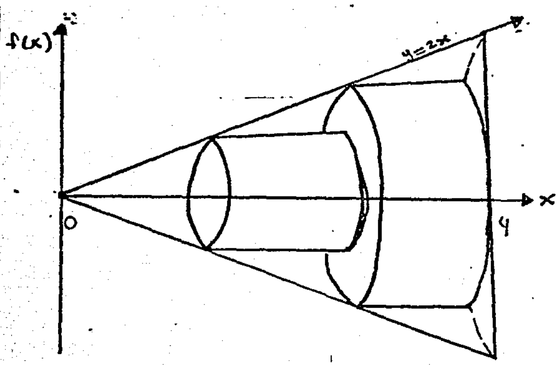
¿Cómo es la suma de los volúmenes de los cilindros 3, -4....,7 con respecto al volúmen de cono?.

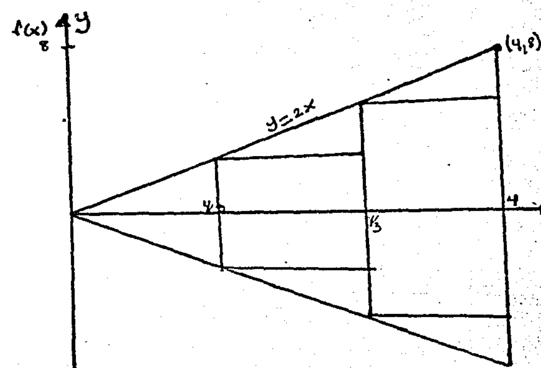
Sí nosotros aumentaramos el número de cilindros inscritos al cono, ¿cómo sería el volúmen de éste con respecto a la suma de los volúmenes de los cilindros?

b) Encontremos nuestras 4 aproximaciones acostumbradas

Primera Aproximación.

1. Dividamos nuestro intervalo $[0,4]$ en tres partes iguales





2. Calculando el volúmen de los cilindros formados se tiene:

	Subdivisiones.	Radio de la base	Area de la base	Altura del Cilindro	Volúmen
C_1	$\frac{4}{3}$	$2\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{8}{3}$	$\pi\left(\frac{8}{3}\right)^2$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4\pi}{3^3} \cdot 8^2 \cdot 1^2$
C_2	$\frac{8}{3}$	$2\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}$	$\pi\left(\frac{16}{3}\right)^2$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4\pi}{3^3} \cdot 8^2 \cdot 2^2$

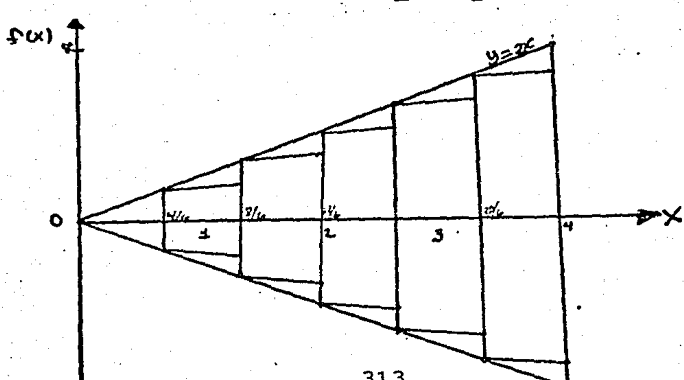
3. Sumando los volúmenes se tiene:

$$\underline{V_3} = \frac{4 \cdot 8^2}{3^3}\,\pi\left[1^2 + 2^2\right] = \frac{256}{27}\,\pi(5) = \frac{1280}{27}\,\pi = 47.407\pi$$

4. $V > \underline{V_3}$

Segunda Aproximación.

1. Dividamos el intervalo $[0,4]$ en 6 partes iguales.



2. Calculemos el volúmen de los cilindros formados.

	Subdivisiones	Radio de la Base	Area de la Base	Altura C	Volúmen
C_1	$\frac{4}{6}$	$2(\frac{4}{6}) = \frac{8}{6}$	$\pi \cdot \frac{8^2}{6^2}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4 \cdot 8^2}{6^3}\ \pi \cdot 1^2$
C_2	$\frac{8}{6}$	$2(\frac{8}{6}) = \frac{16}{6}$	$\pi \cdot \frac{8^2 \cdot 2^2}{6^2}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{6^3} \cdot 8^2\ \pi \cdot 2^2$
C_3	$\frac{12}{6}$	$2(\frac{12}{6}) = \frac{24}{6}$	$\pi \cdot \frac{8^2 \cdot 3^2}{6^2}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{6^3} \cdot 8^2\ \pi \cdot 3^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_5	$\frac{20}{6}$	$2(\frac{20}{6}) = \frac{40}{6}$	$\pi \cdot \frac{8^2 \cdot 5^2}{6^2}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{6^3}\ 8^2\ \pi \cdot 5^2$

3. Sumando los volúmenes de C_1, C_2....., C_5 se tiene:

$$\underline{V}_6 = \frac{4 \cdot 8^2}{6^3}\ \pi \left[\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 5^2}_{\sum_{k=1}^{5} k^2 = \frac{5(6)(11)}{6} = 55} \right] = \frac{256}{216}\,\pi(55) = \frac{14080}{216}\ \pi$$

$$= 65.18\ \pi$$

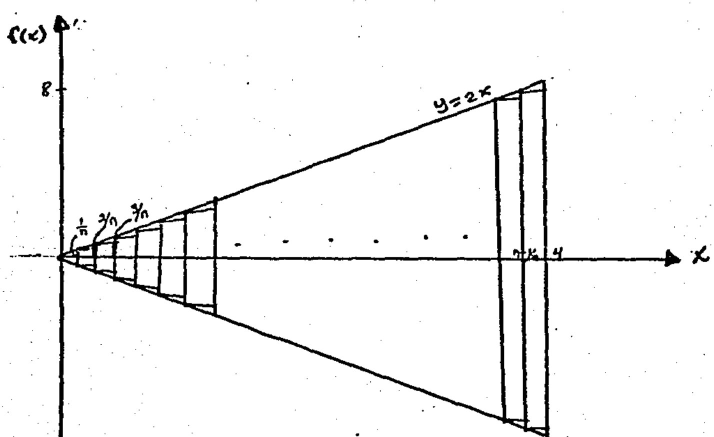
4. Por lo que: $\underline{V} > \underline{V}_6 > \underline{V}_3$

Ficha # 1

Realiza la Tercera Aproximación.

Cuarta Aproximación.

1. Dividamos el intervalo $[0,4]$ en n partes iguales.



2. Econtremos el volúmen de los cilindros formados.

	Subdivisiones	Radio de la Base	Area de la Base	Altura Cilindro	Volúmen
C_1	$\frac{4}{n}$	$2(\frac{4}{n}) = \frac{8}{n}$	$\pi \frac{(8)^2}{n^2}$	$\frac{4}{n}$	$\frac{4\pi \cdot 8^2}{n^3} \cdot 1^2$
C_2	$\frac{8}{n}$	$2(\frac{8}{n}) = \frac{16}{n}$	$\pi \frac{(16)^2}{n^2}$	$\frac{4}{n}$	$\frac{4\pi 8^2}{n^3} \cdot 2^2$
C_3	$\frac{12}{n}$	$2(\frac{12}{n}) = \frac{24}{n}$	$\pi \frac{(24)^2}{n^2}$	$\frac{4}{n}$	$\frac{4\pi 8^2}{n^3} \cdot 3^2$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
C_{n-1}	$\frac{(n-1)4}{n}$	$2(\frac{(n-1)4}{n}) = \frac{8(n-1)}{n}$	$\frac{\pi \cdot 2^2 (n-1)^2}{n^2}$	$\frac{4}{n}$	$\frac{4\pi \cdot 8^2}{n^3} \cdot (n-1)^2$

3. Sumando los volúmenes de C_1, C_2, ..., C_n se tiene:

$$\underline{V_n} = \frac{4\pi 8^2}{n^3}\left[\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}\right] = \frac{4\pi 8^2}{n^3}\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right] =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$\frac{4 \cdot 8^2 \pi}{6} \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \frac{(2n-1)}{n} = \frac{2(64)}{3} \pi (1)(1 - \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n})$$

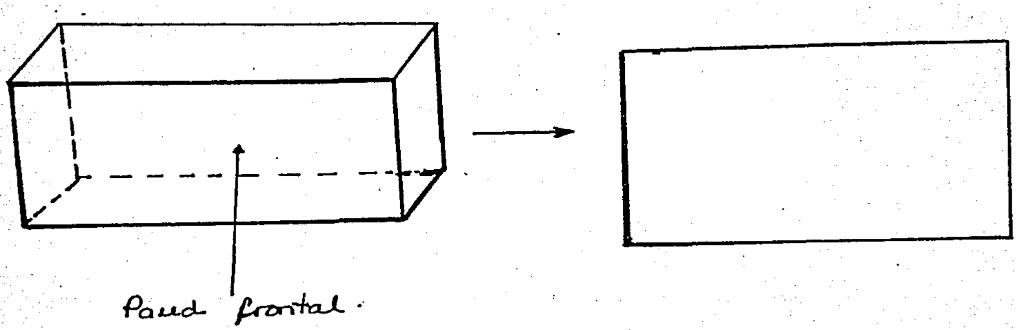
4. De donde $V > \underline{V_n} > V_{12} > V_5 > V_3$

tomando $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{V_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{2(64)}{3} \pi(1) \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\right]$

$$= \frac{128}{3}\pi(2) = \frac{256}{3}\pi = 85.333\,\pi = V$$

Segunda Aplicación.

Supongamos que tenemos un tanque rectángular lleno de agua como se muestra en la figura. Se desea encontrar la presión P del agua sobre la pared frontal del tanque.



Para resolver el problema anterior es necesario entender una ley de Hidrostática; donde para entender ésta llevaremos a cabo el siguiente taller:

Taller # 3

Objetivo del Taller.- Que el alumno visualice el efecto de la presión de agua sobre una superficie plana horizontal e identificará los elementos necesarios para calcularla, así mismo identificará que puntos en la superficie plana se encuentran a igual presión y que puntos a diferente, siempre y cuando la superficie plana esté en forma vertical.

Material Requerido.- Un recipiente rectángular, un trozo de madera (delgada) en forma rectángular, regla o cinta metálica, clavos chicos, plumones de varios colores y agua.

Instrucciones.

1. En el trozo de madera clava los clavos en forma vertical uno tras otro numerándolos 1,2,3,... etc.

2. Llena tu recipiente de agua.

3. Introduce la tabla en forma horizontal en el recipiente y sumérgela.

a) ¿El agua que se encuentra sobre ella ejerce presión sobre la tabla?.

b) ¿La presión es la misma en todos los puntos de la tabla, en particular donde se encuentran los clavos?.

Ciertamente, el agua si ejerce presión sobre la tabla y la presión es la misma para todos los puntos; donde la presión del agua sobre la tabla será igual al peso de la columna de agua que descansa sobre la superficie, es decir de una columna de agua que tiene esta superficie como base y cuya altura es igual a la profundidad de sumersión de dicha superficie; como se trata de agua, su peso específico es igual a uno; por lo que el peso de la columna en cuestión será igual a su volúmen o lo que es lo mismo el área de la superficie plana multiplicada por la profundidad a la cual esta sumergida.

Si ha quedado entendido lo anterior pasemos a la siguiente instrucción.

4. Calcula el área de la tabla y mide la profundidad de sumersión.

5. Multiplica los valores obtenidos para encontrar el volúmen de la columna de agua sobre la tabla o sea la presión.

6. Ahora sumerge la tabla en forma vertical dentro del agua.

¿Todos los clavos están sujetos a la misma presión?.

Precisamente, tu respuesta debió ser negativa, y la razón del porqué no todos los puntos están sujetos a la misma presión es debido a que no todos los puntos están a igual profundidad.

7. Mide a qué profundidad se encuentra el clavo 1.

¿Hay más puntos que se encuentren a ésta misma profundidad?.

¿Cómo se encuentran localizados éstos otros puntos con respecto al clavo 1?.

8. Pinta con tu plumón 10 ó 15 de éstos puntos.

9. Mide a que profundidad se encuentra el clavo 2.

¿Hay más puntos que se encuentren a ésta misma profundidad?.

¿Cómo se encuentran localizados éstos otros puntos con respecto al clavo 2?.

10. Pinta con plumón de otro color 10 ó 15 puntos de éstos.

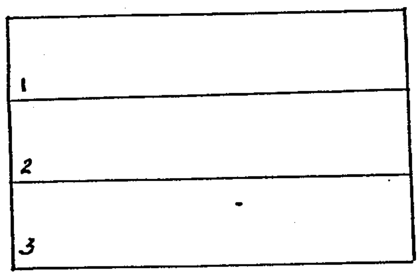
11. Repite el procedimiento anterior para los clavos 3,4,5 etc.

Como has podido observar; los puntos o clavos que se encuentran dentro de una misma franjita están a la misma profundidad de sumersión por lo que la presión sobre ésta franja si suponemos que se puede girar, estará dada por el volúmen de la columna de agua que se encuentra sobre ella; o sea el producto de la superficie de la franja por la profundidad de sumersión. Haciendo ésto para todas las franjas de la tabla y sumamos todas éstas presiones obtendremos la presión que se desea encontrar. Es importante hacer notar que mientras menor sea el área de cada franja mayor será nuestra aproximación a la presión.

Regresando a nuestro problema de inicio resolveremos éste utilizando las 4 aproximaciones acostumbradas.

Primera Aproximación.

1. Dividamos la pared en 3 partes iguales; dibujemos las franjas y localicemos la profundidad de sumersión de la 1a, 2a y 3a franja.



2. Encontremos el volúmen de cada una de las franjas F_1, F_2, F_3.

	Ancho de c/u Franjas	Base	Area de la Franja	Profundidad de Sumersión	Volúmen de la franja
F_1	$\frac{12}{3}$	15	$\frac{12}{3} \cdot 15 = 60$	$1 \cdot \frac{12}{3} =$	$\frac{12}{\cancel{3}} \cdot 60.1$ 20
F_2	$\frac{12}{3}$	15	$\frac{12}{3} \cdot 15 = 60$	$2 \cdot \frac{12}{3} =$	$\frac{12}{3} \cdot 60.2$
F_3	$\frac{12}{3}$	15	$\frac{12}{3} \cdot 15 = 60$	$3 \cdot \frac{12}{3} =$	$\frac{12}{3} \cdot 60.3$

3. Obtengamos P_3

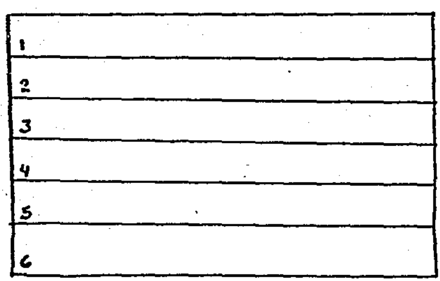
$$\underline{P}_3 = \sum_{k=1}^{3} Pk = (12)(20)(1) + (12)(20)(2) + (12)(20)(3)$$

$$= (12)(20)(1 + 2 + 3) = 240\ (6) = 1440$$

4. Donde $P \leq \underline{P}_3$

Segunda aproximación.

1. Dividamos la pared en 6 partes iguales; dibujemos los franjas y localicemos la profundidad de sumersión de las mismas.



2.- Encontremos el volumen de $F_1, F_2 ... F_6$

	Ancho de la Franja	Base	Area de la Franja	Profundidad Sumersión	Volúmen de la Franja = P
F_1	$\frac{12}{6}$	15	$2 \cdot 15 = 13$	$1 \cdot \frac{12}{6}$	$\frac{12}{6} \cdot 30.1 = 60.1$
F_2	$\frac{12}{6}$	15	$2 \cdot 15 = 30$	$2 \cdot \frac{12}{6}$	$\frac{12}{6} \cdot 30.2 = 60.2$
F_3	$\frac{12}{6}$	15	$2 \cdot 15 = 30$	$3 \cdot \frac{12}{6}$	$\frac{12}{6} \cdot 30.3 = 60.3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
F_6	$\frac{12}{16}$	15	$2 \cdot 15 = 30$	$6 \cdot \frac{12}{6}$	$\frac{12}{6} \cdot 30.6 = 60.6$

3. Obteiendo el valor de $\underline{P}_6$ se tiene:

$$\underline{P}_6 = \sum_{k=1}^{6} Pk = 60.1 + 60.2 + 60.3 + ... + 60.6$$

$$= 60(1 + 2 + 3 + ... + 6) = 60(21) = 1260)$$

4. De donde:

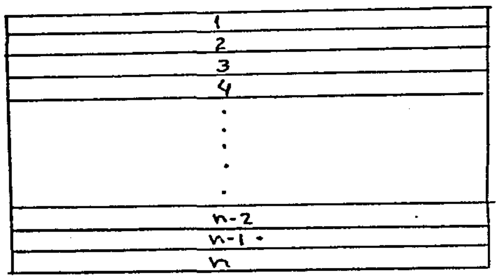
$$P \leq \underline{P}_6 \leq \underline{P}_3$$

Ficha # 2

Efectúa la tercera aproximación empleando los cuatro pasos acostumbrados.

Cuarta Aproximación.

1. Dividamos la pared en n partes iguales; dibujemos algunas franjas y localicemos la profundidad de sumersión de algunas de ellas.



2. Encontremos el volúmen de F_1, F_2, ..., F_n

	Ancho de C/Franja	Base	Area de C/Franja	Profundidad de Sumersión	Volúmen = P
F_1	$\frac{12}{n}$	15	$\frac{12\cdot 15}{n} = \frac{180}{n}$	$1 \cdot \frac{12}{n}$	$\frac{180}{n} \cdot \frac{12}{n} \cdot 1 = \frac{2160}{n^2} \cdot 1$
F_2	$\frac{12}{n}$	15	$\frac{12\cdot 15}{n} = \frac{180}{n}$	$2 \cdot \frac{12}{n}$	$\frac{180}{n} \cdot \frac{12}{n} \cdot 2 = \frac{2160}{n^2} \cdot 2$
F_3	$\frac{12}{n}$	15	$\frac{12\cdot 15}{n} = \frac{180}{n}$	$3 \cdot \frac{12}{n}$	$\frac{180}{n} \cdot \frac{12}{n} \cdot 3 = \frac{2160}{n^2} \cdot 3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
F_n	$\frac{12}{n}$	15	$\frac{12\cdot 15}{n} = \frac{180}{n}$	$n \cdot \frac{12}{n}$	$\frac{180}{n} \cdot \frac{12}{n} \cdot n = \frac{2160}{n^2} \cdot n$

3. Obtengamos $\underline{P_n}$

$$\underline{P_n} = \sum_{k=1}^{n} Pk = \frac{2160}{n^2} \cdot 1 + \frac{2160}{n^2} \cdot 2 + \frac{2160}{n^2} \cdot 3 + \ldots + \frac{2160}{n^2} \cdot n$$

$$= \frac{2160}{n^2} (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \underline{P_n} = \frac{2160}{n^2} \left[\frac{n\ (n = 1)}{2}\right] = 1080\ \frac{n}{n}\ \frac{(n+1)}{n} = 1080\ (1 + \frac{1}{n})$$

4. Por lo que: $\underline{P_n} \leq P_{12} \leq P_6 \leq P_3$

Calculando el límite de $\underline{P_n}$ cuando $n \to \infty$, o sea cuando el número de franjas es mucho muy grande, hace que el área de cada franja sea mucho muy pequeña por lo que se obtiene la presión deseada sobre la pared frontal.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \underline{P_n} = \lim_{n\to\infty} \left[1080\ (1 + \frac{1}{n})\right] = 1080$$

Ficha # 3

Mide tu recipiente y calcula las presiones del agua sobre dos de las paredes, la pared frontal y al pared lateral empleando para ello las 4 aproximaciones.

Otras Aplicaciones.

El método de aproximaciones estudiado aquí sirve también para resolver varios tipos de problemas como:

a) El de calcular el trayecto de una partícula con un movimiento no uniforme en un intervalo dado $[T_1, T_2]$ de tiempo.

Si el movimiento en un intervalo o velocidad fuera uniforme para encontrar el trayecto o distancia se emplearía la fórmula $d = u \cdot t$. Sin embargo si la velocidad no es uniforme, d ividimos el tiempo en intervalos muy pequeños de tiempo donde la velocidad la podemos considerar casi uniforme, calculando así la distancia en ese subintervalo por lo que la suma de todas esas distancias así calculadas nos dará la distanciadeseada.

b) El de calcular el trabajo realizado el bombear un líquido desde un recipiente.

Donde el trabajo T será igual a: $T = F \cdot a$ donde F es la fuerza que actúa sobre una partícula y d la distancia que recorre ésta; la distamcia que recorre una partícula "x" para llegar al borde del recipiente no es la misma para todas las partículas; sino que depende de la profundidad de sumersión de la partícula; por lo que se tendrá que dividir el recipiente en n capas, donde supondremos que las partículas de cada capa están casi a la misma profundidad de sumersión, por lo que la fuerza para desplazarlas será la misma; de esta forma se encontraron los trabajos realizados en cada capa cuya suma nos dará el trabajo pedido.

c) De modo completamente análogo se puede calcular la carga Q que se transfiere por la sección transversal de un conductor de corriente I(t) durante el tiempo $[t_1, t_2]$ lo cual quedaría expresado como $Q = \int_{T_1}^{T_2} I(t)\, dt$.

B I B L I O G R A F I A

1.- López Mateos, Manuel.- Funciones Reales, A.N.U.I.E.S. 1973.

2.- Rangel, Luz María.- Funciones y Relaciones. A.N.U.I.E.S. 1975.

3.- Sestier, Andrés.- Funciones y Relaciones, C.E.C.S.A. 1976.

4.- Zubieta Russi, Francisco.- La Moderna Enseñanza Dinámica de las Matemáticas. Ed. Trillas 1972.

5.- Richard E. Johnson.- I'red L. Kiokemeister. Cálculo con Geometría Analítica. C.E.C.S.A. 1984.

6.- Del Grande Duff.- Introducción al Cálculo Elemental. Harla - 1978.

7.- Estrada Medina, Juan.- Aproximaciones Sucesivas. C.C.H. Plantel Sur.

8.- Proyecto Alfa.- Parábola. C.C.H. Plantel Sur, U.N.A.M. 1983.

9.- W.W. Sawyer.- ¿De qué Trata el Cálculo? Comunicaciones Interna No. 5, 1977. Facultad de Ciencias. U.N.A.M.

10.- Frank Ayres, Jr.- Cálculo Diferencial e Integral. Mc. Graw-Hill.

11.- Bosch Guerra y Hernández Oteyza.- Cálculo Diferencial e Integral. Publicaciones Culturales. 1981.

12.- Morris, Kleine.- Matemáticas en el Mundo Moderno, Selecciones de Scientific American, Edit. Blume.