

24.
35



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

*Modelos Matemáticos para el
manejo de Pesquerías.*

T E S I S

Que para obtener el
Título de Licenciado
en: Matemáticas
P R E S E N T A

GERMAN RAMIREZ RESENDIZ

FACULTAD DE CIENCIAS
U. N. A. M.

México, 1986



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E :

INTRODUCCION	1
Notas	7
I MODELOS MATEMATICOS SIMPLES	
1. Introducción	10
2. Modelos de una sola especie	13
3. Modelos de una sola especie dependientes de la densidad	21
4. Modelos con más de una especie	29
Notas	38
II MODELO BIOECONOMICO PARA UNA PESQUERIA DE ACCESO ABIERTO	
1. Introducción	39
2. La ecuación en diferencias	42
3. Rendimiento	44
4. Rentabilidad en una pesquería de acceso abierto	48
5. Estados de equilibrio bioeconómico	52
6. Tiempo característico de recuperación	58
Notas	65
III MODELO DE BEVERTON Y HOLT	
1. Introducción	71
2. Captura	73
3. Captura en biomasa. Rendimiento	74
4. Primera generalización del modelo de Beverton y Holt	81

5. Segunda generalización 87

6. El caso general del modelo de Beverton
y Holt 92

Notas 98

BIBLIOGRAFIA 104

INTRODUCCION

En nuestro país, como en otros en desarrollo, muchas pesquerías están en embrión y la gran mayoría de pescadores viven en un nivel de subsistencia, o en el estrato social de menores ingresos. Esto debiera bastar para justificar la necesidad de analizar adecuadamente las posibilidades disponibles para mejorar la condición socioeconómica de estos, así como buscar maximizar su aportación al sector productivo del país.

En los últimos tiempos se ha manejado, por diversas fuentes oficiales, que es de vital importancia para el país el lograr desarrollar, ordenar y diversificar las pesquerías que actualmente se realizan, con el fin de obtener más recursos pesqueros. Junto con lo anterior, frecuentemente se plantean como objetivos la generación de empleos, el aumento de suministro de alimentos pesqueros para la población nacional y para la obtención de divisas mediante la exportación del excedente.

Para ocuparse de lo anterior se recurre, generalmente, a la utilización de modelos que tienen la finalidad de determinar la magnitud de la actividad pesquera que se tiene que desarrollar para lograr ciertos objetivos. Por desgracia, en casi todos los casos, no se consideran otros factores que, como el social, se encuentran -

inmersos en la problemática.

Una de las obligaciones del Estado es la de examinar las posibles medidas que se pueden tomar para desarrollar y mejorar las pesquerías. Sin embargo, en muchas ocasiones éstas medidas son tomadas de una manera precipitada, lo cual desemboca en muchas ocasiones en fracasos espantosos [1].

Es utópico pensar que la tecnocracia actual pueda, por sí sola, resolver el problema recurriendo únicamente a modelos bioeconómicos que justifiquen "científicamente" la explotación de cierto recurso, sin considerar el trasfondo social.

Pese a lo anterior, en el presente trabajo desarrollaremos dos de los modelos clásicos que son utilizados en la Biología Pesquera para estudiar a las pesquerías de una especie aislada. Sin embargo, mencionaremos posibles alternativas, tanto desde en punto de vista de la modelación en sí, como desde el punto de vista socioeconómico. Trataremos, ahora, de introducir al lector en algunos de los conceptos básicos de las pesquerías, para dar una idea más o menos clara de la problemática a tratar.

En el caso de una pesquería de una sola especie, con un sólo tipo de artes de pesca, la relación existente entre "en rendimiento sostenible" y el "esfuerzo pesquero" es quizá la más importante. La CAPTURA ó RENDIMIENTO SOSTENIDO es la cantidad de pescado, expresada en unidades -

de biomasa, que -teóricamente- puede ser capturado de un ciclo de pesca a otro sin que se produzca ningún tipo de cambio en la intensidad de pesca. Por otra parte, el ESFUERZO PESQUERO se entiende en base a la magnitud de la actividad que se realiza, sin embargo, es medido generalmente en base a su efectividad más que por su número, es decir, en función de sus repercusiones en la población ficticia [2].

Ahora bien, en una pesquería, no se puede hablar como en otras actividades económicas, de la existencia de una relación de producción básica entre el rendimiento (captura) e insumos (esfuerzo), debido a que la pesca involucra otro factor muy importante: el crecimiento de la población. Es decir, si bien el esfuerzo de pesca es el único insumo proporcionado por el hombre, está en realidad combinado con la dinámica de la población de peces, para "producir" [3] la captura. Aún más, como el recurso reacciona ante las variaciones del esfuerzo pesquero, esto complica la relación captura-esfuerzo. Por lo anterior, es necesario tener en cuenta algunos conceptos biológicos para poder comprender la relación anterior.

Uno de los conceptos biológicos básicos es el de "CRECIMIENTO" natural, tanto de la población en sí, como de cada uno de los organismos (crecimiento individual). El crecimiento natural neto (lo llamaremos simplemente crecimiento) puede definirse como el RECLUTAMIENTO (nue--

vos organismos que se incorporan a la población) más el crecimiento individual de los peces que ya están en la población, menos la mortalidad. Otros conceptos biológicos importantes se introdujeran a medida que se desarrollen los modelos.

Cabe, ahora, diferenciar entre dos conceptos básicos en el estudio de las pesquerías, como son el de ORDENACION y el de DESARROLLO. La ordenación pesquera es la búsqueda de ciertos objetivos mediante el control directo ó indirecto del esfuerzo pesquero o de algunas de sus componentes. Por ejemplo, determinando el uso obligatorio de una luz de malla mínima, o mediante la instauración de cuotas o licencias, etc.. Por otro lado, el desarrollo pesquero es la expansión del esfuerzo pesquero a través de ciertos programas o mejoras con el fin de lograr ciertas metas. Este desarrollo puede obtenerse, por ejemplo, mediante el mejoramiento de la tecnología o la comercialización que se aplica después o durante la cosecha.

Debido a que la ordenación pesquera tiene una característica reguladora y en general coercitiva, se piensa que la ordenación es necesaria únicamente cuando el recurso está siendo sobreexplotado, mientras que si es subexplotado se hace necesario el desarrollo de la pesquería. Sin embargo, es mejor evitar llegar a la sobreexplotación del recurso, mediante la ordenación de la pesquería a medida que esta se desarrolla. Por desgracia, en países como el -

nuestro, es virtualmente imposible poner en ejecución ciertas normas, debido principalmente a que no se cuenta con verdaderas alternativas para los pescadores, aunado a la falta de movilidad de estos [4].

A pesar de lo anterior, es prioritario lograr una buena ordenación en las pesquerías sobreexplotadas. Así, el objetivo principal de la ordenación y el desarrollo en las subexplotadas es el de lograr el índice "óptimo" [5] de explotación del recurso.

Si el objetivo es la producción máxima de pescado, entonces el índice óptimo de explotación se define por el MAXIMO RENDIMIENTO SOSTENIBLE (MRS), es decir, el máximo rendimiento que puede obtenerse de una manera continua. Si las capturas están por debajo del MRS, a causa de un esfuerzo pesquero insuficiente, entonces se dice que la población está "biológicamente subexplotada" [6] y por lo tanto se hace necesario su desarrollo. Por el contrario, si las capturas están por encima del MRS, tendremos una "sobreexplotación biológica", por lo que es necesaria su ordenación.

Ahora bien, si el objetivo de la ordenación es el obtener el máximo beneficio económico derivado de la actividad pesquera sobre el recurso, el índice óptimo de explotación se define como el RENDIMIENTO ECONOMICO MAXIMO (REM), éste es el máximo excedente de los ingresos con respecto a los gastos debidos a la pesca del recurso.

Finalmente, cuando se tienen en cuenta determina-

das consideraciones de tipo social, como por ejemplo, empleo, mejor distribución de ingresos, etc., se define el índice óptimo de explotación con un tercer concepto (que por cierto es difícilmente cuantificable y muy variable), el RENDIMIENTO SOCIAL MAXIMO (RSM). Se trata del nivel de captura y esfuerzo correspondiente, que permite la mejor solución posible a los problemas sociales derivados de la actividad pesquera y referidos a un marco y objetivos específicos, así como en diversas alternativas.

Podemos considerar que el RSM es una modificación del REM que toma en cuenta no sólo la eficiencia, sino -- también otras consideraciones de tipo social. La introducción de variables de este tipo, pueden llevarnos a modificar la estrategia y las normas de la ordenación o el desarrollo, en otras palabras, pudiera darse el caso de tener que enfrentar la necesidad de sobreexplotar el recurso -- (con el riesgo de colapsar la pesquería), para poder salvar un costo social mayor.

El presente trabajo tiene como propósito, dar una visión acerca de la utilidad que puede tener el uso de las matemáticas en la construcción de modelos matemáticos que nos permitan -en parte- entender la problemática que se encuentra en el análisis de una pesquería. Cada uno de los capítulos está precedido de una pequeña introducción al capítulo, y al final se dan algunas notas, con el objeto de darle una mejor continuidad al trabajo.

NOTAS

[1] Existen diversos ejemplos de tales medidas erróneas. Un ejemplo de éstas, es la tomada con la pesquería de Anchoveta en el Perú. La pesquería, después del fenómeno del "Niño" en 1965, logró tal éxito, que provocó que la inversión en la pesquería se elevará de tal manera, que en 1970 se logró capturar 12.3 millones de toneladas métricas de éste recurso. Sin embargo, para fines de junio de 1973 -al cierre de la temporada de pesca- sólo se habían cosechado 4.5 millones de toneladas métricas. Una medida de la magnitud de la inversión la da la afirmación de Idyll (1973) que dice: "... La flota anchovetera del Perú es tan grande que en un día podría pescar el equivalente a las capturas anuales de los Estados Unidos".

En nuestro país, es frecuente observar problemas de ese tipo, es común encontrar instalaciones de la Secretaria de Pesca -subutilizadas, o garantes de recursos oportunos, o que respondan sólo a los caprichos del jefe en turno.

[2] En el desarrollo de los modelos, se explicará detenidamente la relación existente entre la mortalidad por pesca y el esfuerzo pesquero.

[3] En el estudio de las pesquerías, es muy común hablar de producción del recurso, cuando en realidad se debe de decir explotación del recurso, y reservar el término "producción" para otras actividades como la acuicultura.

[4] En Mazatlán, Sinaloa, se tiene el siguiente ejemplo de lo anteriormente dicho: El problema del "CHANGUERISMO" (pesca y --

venta ilegal) del camarón se trata de resolver por medios coercitivos, y sin embargo, tales campañas no dan resultado debido en gran parte a que un gran número de personas, que se dedican a esta actividad, no tienen otra fuente de ingresos y no existen -en el lugar donde residen- de otras fuentes alternativas de empleo.

[5] Es importante señalar que dicho "óptimo" de explotación del recurso, depende de objetivos muy particulares que se propongan, y a la vez, estos responden -casi siempre- a la clase en el poder.

[6] Es claro que no se debe afirmar que el MRS es un concepto puramente biológico, ya que si bien el modelo considera como base al crecimiento natural máximo de la población, el máximo rendimiento sostenible es un concepto económico que no considera factores económicos como: costo de pesca, valor presente, comercialización, etc..

CAPITULO PRIMERO

MODELOS MATEMATICOS SIMPLES

1. INTRODUCCION

Antes de poder desarrollar algunos modelos bio--
económicos, que nos permitan explicarnos el porqué la con
veniencia de seguir cierta política para lograr la ordena
ción de una pesquería, necesitamos determinar la dinámica
del recurso para, a partir de ella, estudiar el posible -
rendimiento económico de tal actividad; así se tiene la -
necesidad de estimar -con la mayor precisión posible- el
futuro de las poblaciones explotables; esto es, hacer una
evaluación del potencial pesquero. Sin embargo, la gran -
variedad de factores que influyen en el comportamiento de
las poblaciones marinas - contaminación, alimento, espa--
cio, etc.- hacen de lo anterior una tarea difícil.

Por otro lado, tampoco es posible construir mode
los matemáticos, basados en postulados biológicos, que -
consideren todas las condiciones que se presentan en la -
naturaleza, pues tales modelos involucran tal cantidad de
parámetros (cada uno de ellos representando un problema
en la estimación de su valor) que quedan relegados a un
plano meramente teórico, sin posibilidad alguna de obte--
ner información de ellos.

Para poder estudiar el crecimiento o declinación del tamaño de una población o recurso pesquero, se tiene que empezar por postular hipótesis simples sobre el fenómeno en estudio y por considerar sólo unos cuantos factores a la vez, de forma tal que sea posible construir un modelo matemático que nos sea útil para examinar los posibles cambios del recurso en caso de que dichas hipótesis se cumplieran. Estas simplificaciones permitirían dar, posteriormente, otras aproximaciones acerca de la población en estudio.

Por ejemplo, cuando se estudia una pesquería poco adelantada -como lo puede ser una artesanal o una donde no se han desarrollado mecanismos eficientes de explotación- generalmente lo que se precisa es una medida grosera del potencial y, un modelo relativamente simple serviría de una base para estudios posteriores; por el contrario, en una pesquería desarrollada será menester lograr estimaciones muy exactas para garantizar una regulación adecuada desde el punto de vista bioeconómico.

En la biología pesquera se utilizan varios modelos sencillos, que pueden ser planteados desde dos puntos de vista: por un lado, el determinista, en donde se supone que el tamaño de la población puede predecirse mediante una o varias ecuaciones, ya sean éstas de variables continuas o discretas; por otro lado, el enfoque probabilista, en donde el interés es conocer el valor esperado y

la varianza del tamaño de la población a un determinado tiempo.

En este capítulo, se darán ejemplos de este tipo de modelos (algunos de los cuales serán utilizados posteriormente), desde un punto de vista puramente biológico; es decir que, por lo pronto, no se considerará en ellos el aspecto económico. Primero se presentará el modelo exponencial desde tres puntos de vista: determinista discreto, determinista continuo y probabilista. Luego, se discutirán otros modelos que son muy usados, como son; el logístico (continuo y discreto) y los sistemas de varias especies (por ejemplo, el modelo de Lotka y Volterra).

Por último, cabe mencionar que las descripciones matemáticas de los fenómenos biológicos pueden tener dos propósitos completamente distintos, uno práctico y otro teórico. Las descripciones matemáticas que son aplicables a toda una clase de fenómenos son llamadas "modelos". Por otro lado, las representaciones matemáticas que son aplicables a una situación específica, son llamadas "simulaciones"; por ejemplo: el logístico es un modelo que se supone "aplicable" en todas las poblaciones que satisfacen sus hipótesis; por el contrario, una simulación del crecimiento de una población de peneidos en el Huizache-caimano sólo tiene validez para esa y sólo esa población.

2. MODELOS DE UNA SOLA ESPECIE

Supongamos que tenemos aislada una sola especie, que satisface las siguientes condiciones: (1)

- a) Cualquier individuo de la población, independientemente de su edad o del tamaño de la población, tiene la misma probabilidad de vivir
- b) Todos los individuos de la población tienen la misma capacidad de procrear.

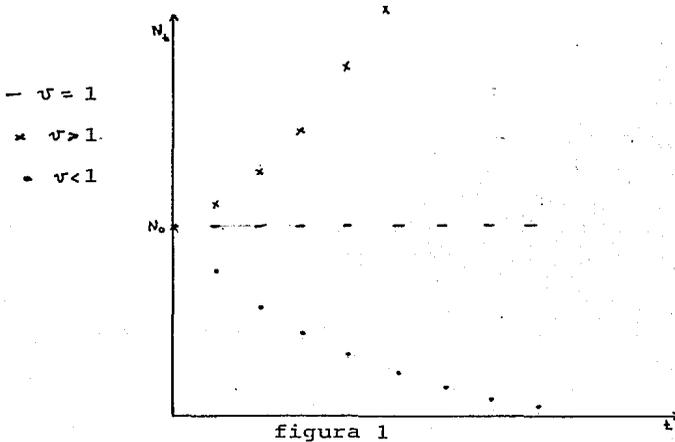
Si además suponemos que la densidad (o el número de individuos) de la población al tiempo t puede ser representada por una variable N_t , que los cambios de esta variable pueden ser descritos por ecuaciones determinadas y, por último, que t es una variable discreta, entonces, podemos plantear el siguiente modelo para el tamaño de la población al tiempo $t+1$:

$$N_{t+1} = r N_t \quad 1.1$$

(donde a r se le llama, en algunos textos, tasa neta de crecimiento). Si la constante r es mayor que 1, entonces la población crece, si es menor que 1, decrece y, si es igual a 1, la población permanece constante e igual a la población inicial N_0 . La solución de la ecuación 1.1 se obtiene recursivamente, y viene dada por:

$$N_t = r^t N_0$$

cuya gráfica se muestra en la figura siguiente:



Si, bajo las hipótesis anteriores, se supone ahora que t es continua, se obtiene que la tasa de instantánea de crecimiento por individuo es constante, es decir - que:

$$\frac{1}{N_t} \frac{dN_t}{dt} = r$$

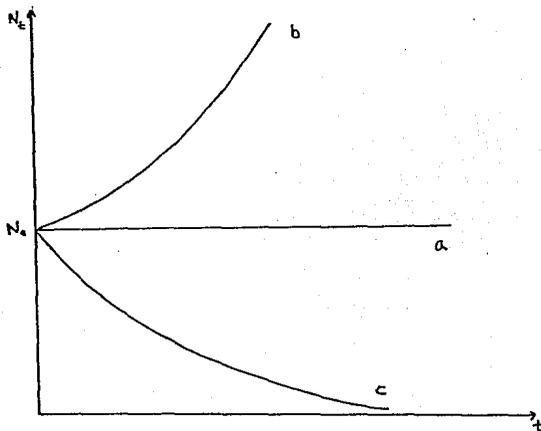
1.2

donde r es la diferencia entre las tasas instantáneas de nacimiento y muerte por individuo (λ y μ respectivamente). La solución de la ecuación 1.2 con la condición inicial $N(0) = N_0$ es:

$$N_t = N_0 e^{rt}$$

1.3

y su gráfica es:



- a) $r = 0$
 b) $r > 0$
 c) $r < 0$

figura 2

en tanto que la relación entre r y v es: $r = \ln v$. El modelo anterior se aplica de diversas maneras en la Biología Pesquera como se verá más adelante.

Ahora bien, las poblaciones naturales frecuentemente exhiben pequeñas o grandes fluctuaciones sin causa aparente. Así pues, podríamos suponer que las fluctuaciones en el tamaño de la población se deben a efectos aleatorios. Con el fin de ejemplificar lo anterior desarrollaremos el equivalente estocástico del modelo de Malthus.

Sea $P_j(t)$ la probabilidad de que $N(t) = j$, es decir:

$$P_j(t) = P[N(t) = j]$$

Supongamos que durante un intervalo corto de tiempo, $(t, t+h)$,

la probabilidad de un nacimiento es $N(t)\lambda h + o(h)$ y la probabilidad de una muerte es $N(t)\mu h + o(h)$, donde $o(h)$ es una cantidad tal que $\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/h = 0$ (λ y μ conservan sus interpretaciones como las tasas instantaneas de nacimiento y muerte respectivamente). Es decir, la probabilidad de un nacimiento en una población de tamaño i en un lapso de duración h será $\lambda i h$ más términos de orden menor a h . Por analogía la probabilidad de que suceda una muerte será $\mu i h$. Se puede suponer, además, que la probabilidad de que ocurra más de un nacimiento en h unidades de tiempo puede desdenarse con lo que, el tamaño de la población al tiempo t sería necesariamente $i-1$, i ó $i+1$ de donde, si $P_i(t+h)$ denota la probabilidad de que la población sea de tamaño i al tiempo $t+h$, tendremos:

$$P_i(t+h) = P_i(t)\lambda(i-1)h + P_i(t)[1 - i\lambda h - i\mu h] + \mu(i+1)P_{i+1}(t) + o(h) \quad 1.4$$

de aquí obtenemos que

$$\frac{P_i(t+h) - P_i(t)}{h} = -i(\lambda + \mu)P_i(t) + \lambda(i-1)P_{i-1}(t) + \mu(i+1)P_{i+1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

y si suponemos que se tienen condiciones de suavidad suficientes sobre $P_i(t)$, haciendo tender h hacia cero, tendremos;

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -i(\lambda + \mu)P_i(t) + \lambda(i-1)P_{i-1}(t) + \mu(i+1)P_{i+1}(t)$$

1.5

A este tipo de ecuaciones se les llama PROCESO LINEAL DE NACIMIENTO Y MUERTE (ver nota 2). Aquí lo que nece

sitamos encontrar es una expresión para el valor esperado de la población al tiempo t , si se le denota por $M(i|t)$ de la definición de valor esperado, se tiene que;

$$M(i|t) = \sum_{j=1}^{\infty} j P_j(t)$$

y suponiendo que la ecuación anterior es derivable término a término, obtenemos:

$$\frac{dM(i|t)}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{dP_j(t)}{dt}$$

sustituyendo en esta ecuación P_j en lugar de $P_j(t)$ (por simplicidad) y la expresión 1.5 se tiene;

$$\begin{aligned} \frac{dM(i|t)}{dt} &= \sum_{j=1}^{\infty} \{ -j^2(\lambda + \mu)P_j + \lambda j(j-1) + \mu j(j+1)P_{j+1} \} \\ &= \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-j^2P_j + j^2P_{j-1} - jP_{j-1}) - \mu \sum_{j=1}^{\infty} (j^2P_j - j^2P_{j+1} - jP_{j+1}) \end{aligned}$$

recorriendo subíndices y reagrupando términos tendremos;

$$\begin{aligned} \frac{dM(i|t)}{dt} &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} P_k \{ -k^2 + (k+1)^2 - (k+1) \} - \mu \sum_{k=1}^{\infty} P_k \{ k^2 - (k-1)^2 - (k-1) \} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k P_k - \mu \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = (\lambda - \mu) M(i|t) \end{aligned} \quad 1.6$$

ecuación que, comparada con 1.2 indica que el tamaño de la población $N(t)$ en el modelo determinista es precisamente el valor $M(i|t)$ en el modelo estocástico (lo cual era de esperarse).

Si la población inicial es $N(0) = N_0$, entonces tenemos $M(i|0) = N_0$, y la solución de 1.6 es

$$M(i|t) = N_0 e^{(\lambda - \mu)t} \quad 1.7$$

De aquí que, cuando $t \rightarrow \infty$, el tamaño esperado de la población sea:

$$\begin{aligned} M(i|\infty) &= N_0 && \text{si } \lambda = \mu \\ &= +\infty && \text{si } \lambda > \mu \\ &= 0 && \text{si } \lambda < \mu \end{aligned}$$

A pesar de que 1.3 y 1.7 son la misma ecuación, no se debe concluir directamente que el modelo determinado establecido por 1.3 sea un buen sustituto del estocástico. Esto se debe a que es posible que la varianza $\text{var}(i|t)$ sea muy grande. Para estimarla, recordemos que esta medida de dispersión es el segundo momento con respecto a la media y que sólo difiere en una constante del segundo momento con respecto al origen, que se define y denota como sigue:

$$M_2(i|t) = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 P_j(t)$$

de donde (suponiendo que la función es suficientemente suave):

$$\frac{dM_2(i|t)}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \frac{dP_j(t)}{dt}$$

y por 1.5,

$$\begin{aligned} \frac{dM_2(i|t)}{dt} &= \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-j^3 P_j + j^3 P_{j-1} - j^2 P_{j-1}) - \mu \sum_{j=1}^{\infty} (j^3 P_j - j^3 P_{j+1} - j^2 P_{j+1}) \\ &= 2(\lambda - \mu) \sum_{j=1}^{\infty} j^2 P_j + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} k P_k \end{aligned}$$

por lo tanto, utilizando 1.7:

$$\frac{dM_2(i/t)}{dt} + 2(\mu - \lambda)M_2(i/t) = (\lambda + \mu)N_0 e^{(\lambda - \mu)t}$$

de donde, multiplicando por el factor integrante $e^{2(\mu - \lambda)t}$

$$\frac{dM_2(i/t)}{dt} e^{2(\mu - \lambda)t} + 2(\mu - \lambda)e^{2(\mu - \lambda)t} M_2(i/t) = (\lambda + \mu)N_0 e^{(\mu - \lambda)t}$$

e integrando obtenemos:

$$e^{2(\mu - \lambda)t} M_2(i/t) = \frac{\lambda + \mu}{\mu - \lambda} N_0 e^{(\mu - \lambda)t} + C_1$$

como $M_2(i/t) = \text{var}(i/t) + \mu^2$ tenemos que

$$e^{2(\mu - \lambda)t} (\text{var}(i/t) + \mu^2) = \frac{\lambda + \mu}{\mu - \lambda} N_0 e^{(\mu - \lambda)t} + C_1$$

por lo tanto

$$\text{var}(i/t) = \frac{\lambda + \mu}{\mu - \lambda} N_0 e^{(\lambda - \mu)t} + C_1 e^{2(\lambda - \mu)t} - \mu^2$$

utilizando que $\text{var}(i/0) = 0$ por lo tanto

$$C_1 = -\frac{\lambda + \mu}{\mu - \lambda} N_0 + \mu^2$$

de donde

$$\text{var}(i/t) = \frac{\lambda + \mu}{\mu - \lambda} N_0 e^{(\lambda - \mu)t} - \frac{\lambda + \mu}{\mu - \lambda} N_0 e^{2(\lambda - \mu)t} + \mu^2 (e^{2(\lambda - \mu)t} - 1)$$

y, por consiguiente:

$$\text{var}(i/t) = \frac{\lambda + \mu}{\mu - \lambda} N_0 e^{(\lambda - \mu)t} (1 - e^{(\lambda - \mu)t}) + \mu^2 (e^{2(\lambda - \mu)t} - 1)$$

En la expresión anterior podemos observar que la varianza depende de t , λ y μ . Si la diferencia $\lambda - \mu$ es positiva y constante, entonces $\text{var}(i/t)$ es una función que depende solamente de t . Para t grande los términos que dominan son los que involucran a $e^{2(\lambda - \mu)t}$ y los

coeficientes de ambos son positivos, por lo que la varianza crece, es decir que las predicciones son más imprecisas.

Pese a que los modelos estocásticos son más realistas que los deterministas, estos últimos son mucho más utilizados, lo cual necesita de una justificación. En la versión estocástica del modelo, fué necesario suponer que se daban ciertas condiciones de suavidad para poder determinar las funciones M_1 y M_2 . En general, suponer esto -- resulta, en la práctica, tanto como suponer la no aleatoriedad de las variables. Es decir, para los fenómenos biológicos, son tales las posibles alteraciones del medio que suponer una cierta suavidad en las distribuciones de probabilidad que puede contener el modelo es equivalente a considerar que las variables pueden ser deterministas.

3. MODELOS DE UNA SOLA ESPECIE DEPENDIENTES DE LA DENSIDAD

Hay otros modelos deterministas un poco más reales - aunque aún siguen siendo muy ideales -, donde se supone que el crecimiento de la población es inhibido por la escasez de recursos, por ejemplo; de espacio, de alimento, etc.. Es decir, en los que se considera que para satisfacer la demanda de recursos de la población el medio resulta insuficiente; esto es, que se plantea la existencia de un nivel de saturación del medio o un tamaño máximo para la población.

En términos más generales, podemos partir de la hipótesis siguiente: "la tasa de crecimiento por individuo es una función que depende del tamaño de la población", o en símbolos;

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = f(N) \quad (N = N(t))$$

1.8

Bajo las consideraciones hechas líneas arriba, - la función $f(N)$ debe ser tal que para N grande -dado que el medio es hostil- dN/dt será negativa; es decir que a una mayor población corresponderá un mayor efecto inhibitor del medio en el crecimiento. Una tal $f(N)$ podría ser (por sencillez) una función lineal decreciente, i.e.:

$$f(N) = r - sN \quad (r, s > 0)$$

de donde, al sustituir en 1.8, tendríamos la ecuación di-

ferencial;

$$\frac{dN}{dt} = N(r - sN)$$

1.9

que es mejor conocida como la ecuación logística. En 1.9 - el término rN es llamado la tasa potencial de crecimiento de la población, es decir, es la razón con la cual la población podría crecer si los recursos fueran ilimitados y los individuos no fueran afectados de ninguna manera por la densidad (r es la misma que en la ecuación 1.2). Si suponemos que la tasa de crecimiento es el producto de la tasa potencial y la proporción de vacantes en el medio con respecto al tamaño máximo sostenible que puede alcanzar la población (llamando K a la población máxima que soporta el sistema), tendremos;

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad 1.10$$

(observemos que 1.9 y 1.10 son equivalentes si $s = r/K$) la solución de 1.10 es:

$$N(t) = \frac{K}{1 + c e^{-rt}} \quad 1.11$$

donde

$$c = (K - N_0)/N_0 \quad \text{si } N(0) = N_0$$

otra forma común de escribir 1.11 es

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{-r(t-t_0)}} \quad \text{con} \quad t_0 = -\frac{1}{r} \ln[(K - N_0)/N_0]$$

Analizando la solución de 1.10, podemos ver que -

si $N_0 > 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$, es decir que $N = K$ es un punto de equilibrio estable. La figura 3 nos muestra las soluciones de la ecuación logística, para distintas condiciones iniciales.

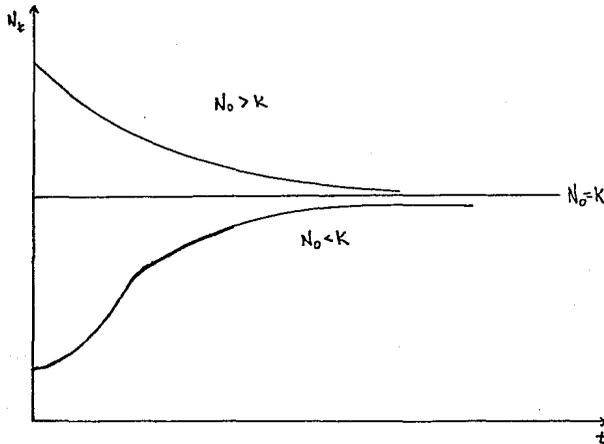


figura 3

El modelo anterior se puede aplicar cuando la variable t es continua. En especies con pocas crías por año (o por estación), cuyos miembros viven por varias temporadas de cría y que en cualquier época pueden procrear o morir. Bajo estas consideraciones, se da una notable continuidad en $N(t)$. Sin embargo, para la mayoría de las especies cuyos miembros se reproducen solamente una vez en su ciclo de vida y mueren antes de que sus descendientes se desarrollen (es decir, que cada generación muere an--

tes de traslaparse con la siguiente), el crecimiento de la población es marcadamente discontinuo. Es estos casos, una ecuación diferencial como la anterior resulta ser inadecuada para modelar el crecimiento de la población y se hace necesario un planteamiento discreto como el que a continuación se discute.

Las ecuaciones en diferencias de primer orden;

$$X_{t+1} = f(X_t)$$

han sido estudiadas en numerosos artículos (ver nota 4), mencionaremos dos casos de ecuaciones de este tipo (que serán utilizadas posteriormente) que se han empleado en el estudio de poblaciones cuyo crecimiento depende de la densidad. Las ecuaciones son:

$$X_{t+1} = a X_t (1 - X_t) \tag{1.13}$$

$$X_{t+1} = X_t e^{r[1-X_t]} \tag{1.14}$$

que se pueden obtener a partir de las siguientes consideraciones: recordemos que el crecimiento exponencial de una población es representado por la ecuación en diferencias 1.1. Considerando la competencia por el medio dentro de la población, hagamos que el exponente r ($v = e^r$) anteriormente constante, una función lineal decreciente de la variable N , es decir, sustituyamos $r - sN_t$ en lu-

gar de r .

El modelo resultante será;

$$N_{t+1} = N_t e^{r - sN_t} \quad 1.15$$

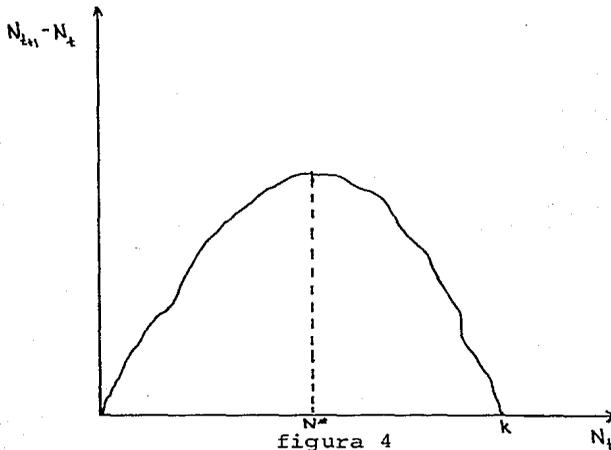
si hacemos $X_t = N_t/k$ y $s = r/k$ obtenemos la expresión dada en 1.14 y observamos que si $0 < N_t \leq k$, entonces la variable X_t tiene por dominio $(0, 1]$.

Las propiedades de esta ecuación han sido estudiadas en (5) y se ha demostrado que el comportamiento de este modelo está determinado por la magnitud de r y que, para ciertos valores críticos de r , se observan cambios abruptos en dicho comportamiento.

El modelo 1.13 se puede deducir por el siguiente camino; si consideramos que el medio es limitado, se puede postular que existe un valor N^* tal que se cumplen - las siguientes condiciones:

- a) Si el tamaño de la población es menor a N^* , el medio es apropiado y, por lo tanto, a mayor número de individuos en la población, habrá un mayor número de descendientes.
- b) Si el tamaño de la población es mayor a N^* , la influencia del medio será más sensible y, por lo tanto, a mayor número de individuos en la población, el número de descendientes será menor.
- c) Existe un tamaño de la población k , para -

el cual el medio impide que la población crezca (ver la siguiente figura).



La función más sencilla que nos puede representar esta situación es:

$$N_{t+1} - N_t = v N_t (1 - N_t/k) \quad 1.16$$

donde la diferencia $N_{t+1} - N_t$ es, desde luego, el incremento de la población, y v es la tasa de crecimiento.

La ecuación 1.16 puede reescribirse como:

$$N_{t+1} = (1+v)N_t - \frac{v}{k} N_t^2$$

y si $X_t = \frac{v}{(1+v)k} N_t$ y $a = 1+v$

entonces:

$$X_{t+1} = a X_t (1 - X_t) \quad 1.13$$

Como por definición $N_t \leq K$, entonces $N_t \in [0, K]$ y, por lo tanto, X_t está definida en un intervalo contenido en el intervalo $[0, 1]$.

Entre los modelos 1.13 y 1.14 existe un gran parecido y se debe a que, si asumimos que r es pequeña, entonces 1.15 puede ser aproximado por

$$N_{t+1} = N_t (1 + r - sN_t) \quad 1.17$$

y notemos que si tuviéramos la libertad de cambiar arbitrariamente las unidades y por lo tanto el valor numérico de r , entonces - haciendo estas unidades suficientemente pequeñas - se podría lograr que 1.15 y 1.17 fueran tan cercanas como se quisiera. Ahora bien, la duración de dicha unidad de tiempo solamente puede cambiarse cuando el modelo de variable discreta es usado para aproximar procesos de tipo continuo pero, cuando el proceso es discontinuo, las unidades de tiempo están determinadas por el proceso mismo y no se puede aproximar el término $\exp(r - sN_t)$ mediante su serie de Taylor (cuyos dos primeros términos son precisamente, $1 + (r - sN_t)$).

En los modelos anteriores, se pueden observar - oscilaciones o completa inestabilidad, casos que pueden suceder en el crecimiento de una población; también se ob

serva que, para valores pequeños del parámetro r , ocurre una aproximación monótona del tamaño de la población hacia el equilibrio. En contraste con estos modelos, como se ve en la figura 3, en el continuo cualquier solución se aproxima monótonamente al equilibrio para $N_0 > 0$.

4. MODELOS CON MAS DE UNA ESPECIE

Hasta aquí hemos considerado únicamente la competencia intraespecífica. Sin embargo, en condiciones naturales las poblaciones tienen relaciones interespecíficas, es decir, están sujetas a diversas relaciones con otras especies, por lo que modelos más generales deben de considerar estas interacciones.

Las posibles interacciones entre un par de especies pueden ser clasificadas como sigue:

- a) Competencia (-, -). Cada especie tiene un efecto inhibitor en el crecimiento de otra especie.
- b) Comensalismo (+, +). Cada especie tiene un efecto positivo en el crecimiento de la otra.
- c) Depredación (+, -). Una especie, el depredador, tiene un efecto inhibitor en el crecimiento de la otra, la presa; la presa tiene un efecto acelerador en el crecimiento del depredador.

Cabe mencionar que otras posibles interacciones (como por ejemplo; parasitismo, simbiosis, etc.) pueden -- ser incluidas como casos particulares de alguna de las definidas por los incisos.

El ejemplo más utilizado de este tipo de interacciones es en siguiente: llamemos $N_1(t)$ o simplemente N_1 al tamaño de la población de presas, que en ausencia de depre

dadadores crece de acuerdo al modelo dado en la ecuación 1.2 (denotemos a la tasa de crecimiento r_1); sea N_2 el tamaño de la población de depredadores y supongamos que ésta decrece exponencialmente en ausencia de presas (r_2 denotará la tasa de decrecimiento) y, por último, supongamos que la interacción de los organismos esta dada en proporción al número de encuentros entre presas y depredadores, es decir, al producto $N_1 N_2$; bajo estas consideraciones, el modelo determinista continuo estará dado por el sistema:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(r_1 - aN_2) \quad ; \quad \frac{dN_2}{dt} = N_2(-r_2 + bN_1) \quad 1.18$$

(ver nota 6).

El modelo anterior puede generalizarse y plantearse en términos de funciones que describan las interacciones entre cualquier número de especies. En el caso de m especies, la dinámica del sistema estaría dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= f_1(N_1, N_2, \dots, N_m) \\ &\vdots \\ \frac{dN_m}{dt} &= f_m(N_1, N_2, \dots, N_m) \end{aligned} \quad 1.19$$

Así, el modelo dado en 1.18 se daría de la siguiente

manera:

$$N_1'(t) = f_1(N_1, N_2)$$

$$N_2'(t) = f_2(N_1, N_2)$$

donde;

$$f_1(N_1, N_2) = r_1 N_1 (1 - N_1/k) - a N_1 N_2$$

$$f_2(N_1, N_2) = r_2 N_2 (1 - N_2/aN_1)$$

1.20

donde las hipótesis que subyacen son:

- 1) En ausencia de los depredadores, la presa se comporta de acuerdo al modelo logístico.
- 2) La dinámica del depredador puede ser descrita por el modelo logístico donde la capacidad de carga es proporcional al tamaño de la población de presas (la constante α depende de la eficiencia de conversión o aprovechamiento de la energía o material de una especie a la otra).

Al hacer el estudio cualitativo de este sistema, tenemos que los puntos de equilibrio son: $(0,0)$, $(0, N_2^*)$, $(N_1^*, 0)$ y (N_1^*, N_2^*) donde;

$$N_1^* = r_1 k / (r_1 + \alpha a k) \quad \text{y} \quad N_2^* = \alpha r_1 k / (r_1 + \alpha a k) \quad 1.21$$

El punto interesante es donde no hay valores triviales; en general, si $N_1^*, N_2^*, \dots, N_m^*$ son los valores donde el sistema 1.19 se anula, tendremos varios puntos de equilibrio no triviales según el número de raíces que tuvieren las funciones f_i .

Para estudiar la estabilidad del sistema alrededor de una solución (N_1^*, \dots, N_m^*) escribamos a $N_i(t)$ en la forma:

$$N_i(t) = N_i^* + Z_i(t) \quad i=1, \dots, m \quad 1.22$$

donde $Z_i(t)$ mide una pequeña perturbación del equilibrio de la i -ésima población. Por otro lado, al expandir alre-

dor del punto de equilibrio en serie de Taylor (y descartando los términos de segundo grado o más) las ecuaciones 1.19 toman la forma:

$$Z_i'(t) = \sum_{j=1}^m a_{ij} Z_j(t) \quad i=1, \dots, m \quad 1.23$$

que describen la dinámica de las poblaciones en una vecindad del punto de equilibrio. Por comodidad, usaremos la notación matricial, por lo que 1.23 se puede escribir como:

$$Z'(t) = A Z(t) \quad 1.24$$

donde $Z(t)$ es la $m \times 1$ matriz columna de las $Z_i(t)$, $A=(a_{ij})$ es la $m \times m$ "matriz comunidad", y las componentes a_{ij} describen el efecto de la especie j sobre la especie i en una vecindad del equilibrio. De 1.23 se sigue que:

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial N_j} \right|_{(N_1^*, N_2^*, \dots, N_m^*)} \quad 1.25$$

Para el sistema 1.23 la solución puede describirse como:

$$Z_i(t) = \sum_{j=1}^m c_{ij} e^{\lambda_j t} \quad i=1, \dots, m \quad 1.26$$

donde c_{ij} son constantes que dependen de los valores iniciales de las perturbaciones de la población y las m constantes λ_j (que caracterizan la dinámica temporal del sistema) son los llamados eigenvalores o valores propios de la matriz A . De la definición de los valores propios tenemos que:

$$\lambda z_i(t) = \sum_{j=1}^m a_{ij} z_j(t) \quad 1.27$$

o, en forma matricial:

$$[A - \lambda I] z(t) = 0 \quad 1.28$$

donde I es la matriz identidad $m \times m$

La expresión 1.28 posee una solución no trivial - si y sólo si el determinante se anula, es decir cuando y sólo cuando:

$$\det |A - \lambda I| = 0 \quad 1.29$$

que es una ecuación polinomial en λ de grado m con raíces complejas - $\lambda = x + iy$ - que son, precisamente, - los valores propios de A ; la parte real (x), al ser - sustituida en 1.26 produce crecimiento o decrecimiento exponencial, en tanto que la parte imaginaria (y) genera - oscilaciones senoidales divergentes, amortiguadas o neutras que caracterizan diferentes tipos de equilibrios según se muestra en la figura 5.

Si cualquiera de los eigenvalores tiene parte real positiva, el factor exponencial será creciente con respecto al tiempo y consecuentemente el punto de equilibrio será - inestable. Si todos los eigenvalores λ tienen parte real negativa, la perturbación desaparecerá con el tiempo y el - caso especial en que uno o más valores propios sean imaginarios puros y el resto tengan parte real negativa se tendrá una estabilidad neutral. Matemáticamente podemos resumir lo

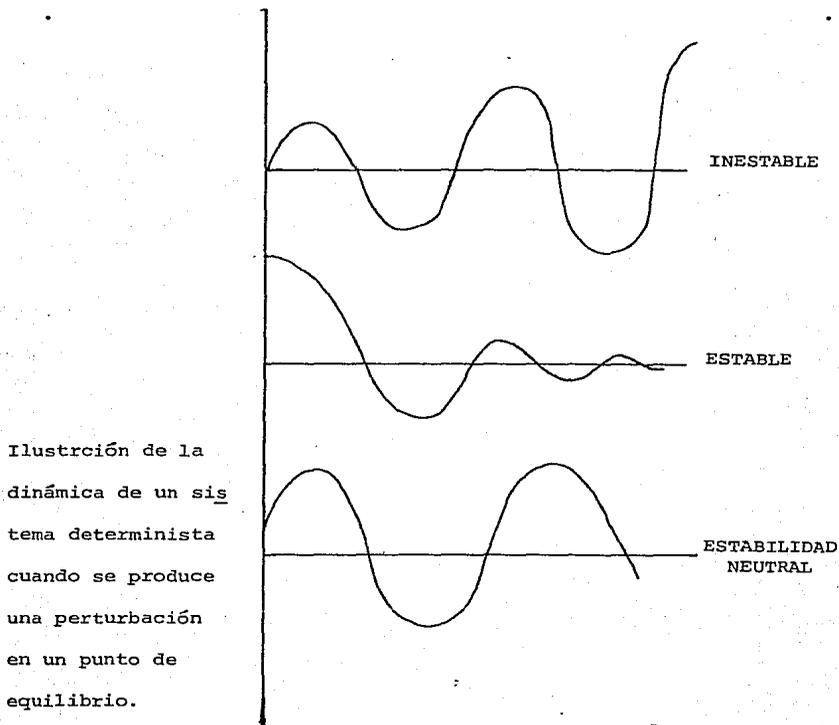


figura 5

anterior de la siguiente manera: si denotamos por;

$$-\lambda = \max_{i=1, \dots, m} \{ \text{Real}(\lambda_i) \}$$

el criterio de estabilidad está dado por; $\lambda > 0$

(ver la figura siguiente).

Los eigenvalores $\lambda = \lambda + i\mu$ de la matriz A se representan por puntos (x, y) en el plano complejo. En la parte sombreada están los puntos para los cuales tenemos estabilidad.

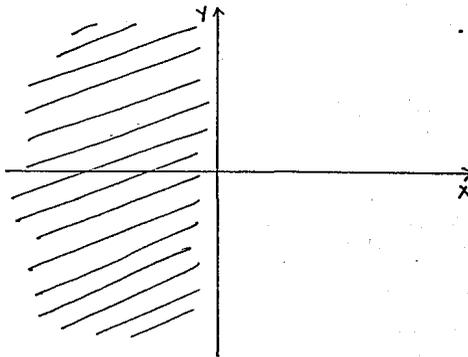


figura 6

Por ejemplo, en el caso particular del sistema de las ecuaciones 1.20 tendríamos que:

$$a_{11} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial N_1} \right|_{(N_1^*, N_2^*)} = r_1 \left(1 - \frac{2N_2^*}{r_1} \right) - \alpha N_2^* = \frac{-r_1^2}{r_1 + \alpha \alpha k}$$

$$a_{12} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial N_2} \right|_{(N_1^*, N_2^*)} = -\alpha N_1^* = \frac{-r_1 \alpha k}{r_1 + \alpha \alpha k}$$

$$a_{21} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial N_1} \right|_{(N_1^*, N_2^*)} = r_2^2 N_2^{*2} / \alpha N_1^{*2} = \alpha r^2$$

$$a_{22} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial N_2} \right|_{(N_1^*, N_2^*)} = r_2 \left(1 - 2N_2^* / \alpha N_1^* \right) = -r^2$$

$$\det |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

de donde, para cualquier raíz λ , se tiene que:

$$\text{Real}(\lambda) = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$$

y al sustituir los valores particulares de a_{11} y a_{22} para este caso tendríamos que:

$$\text{Real}(\lambda) = \left[\frac{-r_1^2}{r_1 + d_{ak}} - r_2 \right] / 2$$

por lo que el punto de equilibrio (N_1^*, N_2^*) sería un punto de equilibrio estable.

En general es bastante engorroso hacer todos los cálculos para determinar la estabilidad de un punto, por lo que surge la siguiente pregunta; ¿Se puede decir algo acerca de la estabilidad de los puntos, conociendo solamente los signos de los elementos de la matriz A ?.

La respuesta la da el siguiente teorema publicado en (7).

TEOREMA: Las condiciones necesarias y suficientes para que una matriz A ($m \times m$), con elementos a_{ij} , sea cualitativamente estable (i.e., que todos sus eigenvalores tengan parte real negativa) son:

- i) $a_{ii} \leq 0 \quad \forall i$
- ii) $\exists i \in \{1, 2, \dots, m\} \dots a_{ii} \neq 0$
- iii) $a_{ij} a_{ji} \leq 0 \quad \forall i \neq j$
- iv) Para cualquier sucesión de 3 o más índices i, j, k, \dots, q, r (con $i \neq j \neq k \neq \dots \neq q \neq r$) el producto $a_{ij} a_{jk} \dots a_{qr} a_{ri} = 0$
- v) $\det |A| \neq 0$

De acuerdo con este teorema, se puede concluir que, en efecto, existe una íntima asociación entre la es-

estructura de los signos de la matriz A y la naturaleza -
cualitativa de las interacciones biológicas. Recordemos -
que, se había dicho, - los coeficientes a_{ij} representan
la interacción de la especie j sobre la especie i , si
este elemento tiene signo $+$, $-$ ó el valor 0 , entonces se
dice que la interacción es positiva, negativa o neutral,
es decir, el tamaño de la población i crece, decrece o -
no es afectada por la presencia de la especie j .

NOTAS

- [1] Bajo ciertas consideraciones, los postulados pueden cambiarse, por ejemplo: en lugar de (b) — donde de hecho se está suponiendo que la reproducción es asexual— se puede aceptar la reproducción bisexual, si se considera únicamente la población de hembras y se postula además que:
- c) nunca hay escasez de machos y
 - d) la proporción entre hembras y machos permanece constante al transcurrir el tiempo.
- [2] Véase, por ejemplo, Keyfitz Nathan, Introduction to the Mathematics of Population, 1977, New York, Addison Wesley.
- [3] Ludwig D., Stochastic Population Theories, Lecture Notes in Bio-mathematics, vol. 3, 1974, Springer-Verlag.
- [4] Falconi M. y J. Pulido, Complejidad en Sistemas Dinámicos, Seminario Ex-Mor, Vínculos Matemáticos No. 1, 1985, Depto. de Matemáticas, Fac. de Ciencias, U.N.A.M.
- [5] Podemos recomendar leer: Pielou, E.C., An Introduction to Mathematical Ecology, Wiley Interscience, New York, 1969.
- [6] A este tipo de modelos se les acostumbra llamar de Lotka-Volterra, para ver una presentación elemental se puede consultar por ejemplo: Betz, Burcham, Ewing. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones, México, Harla.
- [7] Quirk y Ruppert (1985), Qualitative Economics and Stability of Equilibrium, Rev. Econ. Studies, 32, 311-326.

CAPITULO SEGUNDO

MODELO BIOECONOMICO PARA UNA PESQUERIA DE ACCESO ABIERTO

1. INTRODUCCION

Las pesquerías de libre acceso o acceso abierto, son aquéllas que se desarrollan sobre un recurso que es considerado como un bien común, es decir, sobre un recurso pesquero que está generalmente abierto a la explotación comercial de cualquier persona (entrada irrestricta). Por ejemplo, en nuestro país, las pesquerías de especies no concesionadas como la mojarra, el botete, la lisa, etc. [1].

Para estos recursos, cuando en la pesquería aumenta el índice de explotación [2], se observa en primer término un aumento de las capturas totales y en la captura por unidad de esfuerzo, luego el índice de incremento baja y la captura por unidad de esfuerzo pasa por un punto máximo (llamado máximo rendimiento sostenible MRS). A partir de este punto, si la explotación se incrementa, la captura por unidad de esfuerzo empieza a declinar.

En condiciones naturales de libre acceso, estos recursos tienden a ser sobreexplotados, debido a que se presentan problemas como el siguiente: Para cada pescador es obvio que si, individualmente redujera su esfuerzo pesquero para conservar el recurso, en lugar de lograr un incremento en el stock, haría que la captura de los demás pescadores se incrementara, con lo cual lo único que habría

logrado es salirse del negocio. Y como cada pescador tiende a tener el mismo razonamiento, la explotación del recurso - es siempre creciente.

Tal situación también se da a escala internacional con los recursos de hábitos migratorios como el atún y se traduce en la dificultad para establecer tratados internacionales justos. Cabe mencionar que muchas veces, estos tratados se dan bajo presiones económicas de los países desarrollados sobre los tercermundistas, que llevan a acuerdos que son a todas luces lesivos para las economías de estos últimos [3].

Con el paso del tiempo, los recursos de libre acceso tienden a generar la necesidad de que se establezcan -- controles sobre el ingreso a la pesquería so pena de extinción y de que sean aplicados por alguna dependencia pública que observe que se cumplan ciertas disposiciones sobre el recurso en cuestión. Tales disposiciones pueden ser de -- varios tipos; por ejemplo, la limitación en el número de -- pescadores o de licencias, reglamentación de artes, o bien -- reducir el atractivo de la pesca mediante impuestos o con -- la división del recurso mediante la implantación de cuotas.

En este capítulo se tratará de desarrollar un modelo bioeconómico que permita determinar el MRS para el caso de una pesquería de acceso abierto; en él se verá la necesidad de limitar la explotación si se pretende mantener la -- producción a cierto nivel.

Se estudiarán las nociones fundamentales partiendo del ejemplo simple de una pesquería aislada, compuesta por una sola especie, explotada por un solo grupo de pescadores que utilizan el mismo tipo de artes.

Cabe decir que, desde esta perspectiva, no lograremos traducir cabalmente la gran variedad de situaciones que se presentan en la realidad, sin embargo, creemos que nos permitirá una adecuada comprensión de los problemas que se presentan en la ordenación de una pesquería. Los conceptos y modelos tratados, pueden ser llamados "los clásicos" que, desde luego, no quiere decir que sean la regla a seguir en cualquier caso, recordemos que; la naturaleza es más rica en situaciones que cualquier modelo matemático.

2. LA ECUACION EN DIFERENCIAS

Consideremos una población que cumple con las hipótesis del modelo 1.12, es decir que su dinámica puede describirse por la ecuación;

$$X(t+1) = f(X_t)$$

Entonces los cambios en el recurso de un tiempo t al tiempo $t+1$ se pueden representar por una ecuación en diferencias del tipo:

$$X_{t+1} - X_t = F(X_t) \quad 2.1$$

La función F puede incluir factores que afecten el crecimiento del recurso como la capacidad de carga del medio. El modelo más usado que incluye este factor es el modelo logístico de crecimiento:

$$F(X_t) = r X_t (1 - X_t/k) \quad 2.2a$$

ya visto en el capítulo primero, donde r y k son constantes positivas, r es llamada la tasa intrínseca de crecimiento y k la capacidad de carga del medio (por analogía con el modelo continuo). La función logística es una función simétrica con raíces en $X_t=0$ y $X_t=k$ y con un máximo en $X_t=k/2$ como podemos observar en la figura 7.

El comportamiento cualitativo de la solución de 2.2a fue discutido ya anteriormente. Aunque hay otro tipo de F , alternativas al modelo logístico (véase por ejem

plo, el de la nota 4), no discutiremos más sobre las ecuaciones en diferencias, sino que daremos un vistazo al aspecto de rendimiento.

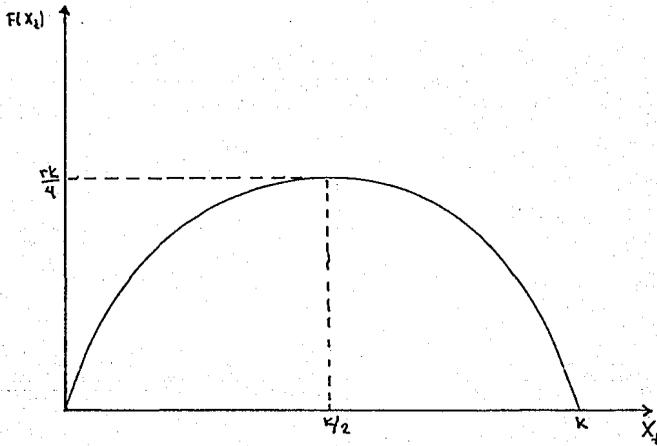


figura 7

3. RENDIMIENTO

Si la especie es explotada por el hombre, el modelo 2.1 requiere de modificaciones para que describa dicha explotación. Si abordamos el problema, desde el punto de vista económico, considerándolo como un sistema donde a un conjunto de entradas le corresponde un conjunto de salidas, se plantea el problema de encontrar una función (llamada en economía FUNCION DE PRODUCCION) que nos permita calcular el máximo nivel de salidas para un paquete dado de entradas.

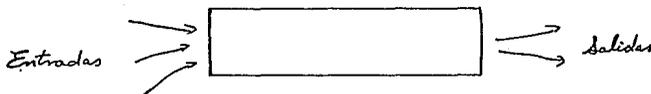


figura 8

En particular, en la pesquería comercial de una especie, la salida se llama CAPTURA, PRODUCCION ó RENDIMIENTO y se denota generalmente por Y_t (por su nombre en inglés). El conjunto de entradas utilizadas para capturar al recurso se supone que es una variable que es cuantificable y es llamada ESFUERZO y se denota por E_t .

Podemos construir entonces modelos donde, por ejemplo, la captura esté en función del stock y del esfuerzo aplicado al tiempo t . Por lo que, si H denota la función de producción de la pesquería, entonces:

$$Y_t = H(E_t, X_t) \quad 2.3$$

Si suponemos que se utiliza una combinación particular de los factores de producción (E_t, X_t) y que ésta permanece constante, la razón Y_t/E_t (cantidad de producto por unidad de esfuerzo) se denomina en economía PRODUCTO MEDIO, y la derivada parcial $\partial Y_t / \partial E_t$, PRODUCTO MARGINAL del factor E_t en la combinación (E_t, X_t). Este último mide la proporción en que aumenta la producción cuando el factor E_t es incrementado, permaneciendo constantes los demás factores. Los productos medio y marginal de los demás factores se definen análogamente.

En el caso de la ecuación 2.3, las derivadas parciales de $H(\cdot)$ -esto es, los productos marginales- se suponen positivas. Si la captura por unidad de esfuerzo es proporcional al stock del recurso obtenemos la función de producción:

$$Y_t = q E_t X_t \quad 2.3a$$

En la cual la constante q recibe el nombre de COEFICIENTE DE CAPTURABILIDAD.

Ahora bien, si se considera la explotación comercial de la pesquería, la ecuación 2.1 devendría en:

$$X_{t+1} - X_t = F(X_t) - H(E_t, X_t) \quad 2.4$$

Esto es, si restamos la captura del cambio natural

de la biomasa, se determina el cambio neto en el stock del recurso. Para obtener un mejor aprovechamiento es importante encontrar los regímenes de máximo rendimiento sostenible, es decir, encontrar los puntos de equilibrio para la ecuación 2.4. Para lograrlo se necesita que el stock permanezca igual del tiempo t al tiempo $t+1$, es decir que $X_{t+1} = X_t$; sustituyendo y despejando en 2.4 obtenemos:

$$H(E_t, X_t) = F(X_t) \quad 2.5$$

Por ejemplo, para el modelo logístico de crecimiento y para la función de producción 2.3a se obtiene el modelo;

$$qEX = rX(1 - X/k) \quad 2.5a$$

que es llamado; MODELO DE GORDON SHAEFER.

Si resolvemos 2.5a para X en función de E , obtenemos:

$$X = k(1 - qE/r)$$

y multiplicando por qE y sustituyendo en la ecuación 2.3a:

$$Y(E) = qEK(1 - qE/r) \quad 2.5c$$

Si, por simplicidad en esta expresión, hacemos $q=1$, podemos graficar 2.5c, y se obtiene la figura 9, donde podemos apreciar que las raíces están en $E=0$ y $E=r$, con rendimiento máximo en $E=r/2$. Y podemos ver también que, si el esfuerzo es llevado a un punto cercano a r , la pes

quería se puede colapsar e, incluso, puede ocurrir que el recurso se extinga. Por último, en la misma figura puede verse que \hat{y} puede obtenerse o bien de un esfuerzo \hat{E}_1 y de un stock \hat{X}_1 , o de un esfuerzo \hat{E}_2 y un stock \hat{X}_2 ; - donde $\hat{E}_2 > \hat{E}_1$ y $\hat{X}_1 > \hat{X}_2$ (ver nota 5).

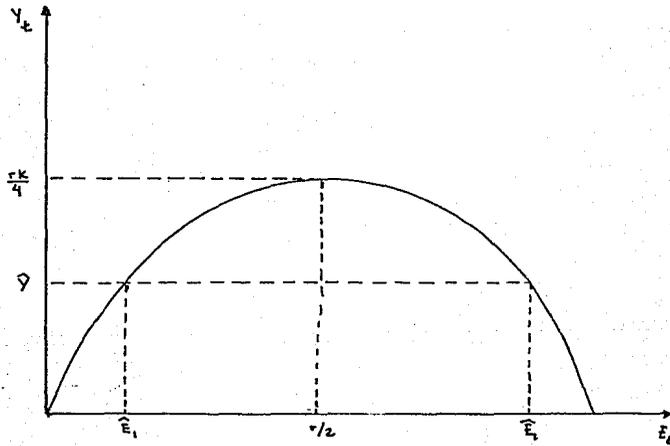


figura 9

4. RENTABILIDAD EN UNA PESQUERIA DE ACCESO ABIERTO

Bajo ciertas condiciones, en una pesquería de -- acceso abierto (como ya se dijo) el esfuerzo pesquero pudiera alcanzar un nivel tan alto que las ganancias obtenidas de la explotación del recurso llegaran a cero [6].

En efecto, supongamos que el costo por unidad de esfuerzo pesquero permanece constante (y denotémoslo por la letra c). Si E_t unidades de esfuerzo son aplicadas al stock del recurso en un tiempo t , entonces el costo total en el tiempo t está dado por:

$$C_t = c E_t \quad 2.6$$

Si consideráramos además que el precio $p(t)$ por unidad de biomasa que obtiene el pescador después de la venta del producto es p (también constante), la remuneración total (los ingresos) será igual a:

$$R_t = p Y(E_t) \quad 2.7$$

En particular, para el modelo de Gordon-Shaefer con $q=1$ se tiene:

$$R_t = p Y(E_t) = p K E_t (1 - E_t/r) \quad 2.7a$$

que, cualitativamente es igual a la curva de captura-esfuerzo de la figura 9: solamente hay una diferencia de escala.

Con lo anterior, es posible definir la RENTA para

esta pesquería como la diferencia entre ingresos y costos:

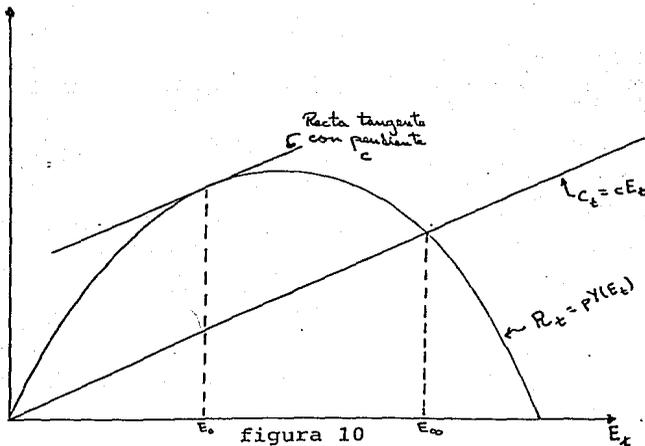
$$G_t = R_t - C_t = PY(E_t) - cE_t \quad 2.8$$

La ganancia mínima para los pescadores se da cuando la renta se disipa, es decir, cuando $G_t = 0$, o sea cuando --

$R_t = C_t$, o equivalentemente:

$$Y(E_t)/E_t = c/p \quad 2.9$$

En otras palabras, la ganancia mínima ocurre cuando la captura por unidad de esfuerzo es igual a la razón costo/precio. Esta situación se representa en la siguiente figura:



En ésta figura, la curva de costos es el segmento de recta que parte del origen con pendiente c y la pará-

bola es $R = R(E_t)$. El punto de intersección de ambas curvas da los valores donde la ganancia es cero, ya que ahí los costos son iguales a los ingresos; la abscisa en ese punto está denotada por E_∞ .

Se tiene entonces que, en este tipo de pesquerías, si se aplica un excesivo esfuerzo (próximo o igual a E_∞), se hace una inversión excesiva de capital con bajo rendimiento.

Nótese que, en el modelo de Gordon-Shaefer, cuando $Y_t = q E_t X_t$ y $C_t = c E_t$ entonces:

$$C_t = c Y_t / (q X_t) \quad 2.6a$$

lo que da una función de costo lineal en Y_t cuyo cero puede encontrarse a partir de:

$$G_t = R_t - C_t = 0$$

de donde

$$p Y_t - \frac{c Y_t}{q X_t} = 0$$

de donde, si $Y_t \neq 0$ se obtiene que $X_\infty = \frac{c}{p q}$

que es el stock que corresponde a un esfuerzo E_∞ .

Obviamente, lo importante desde el punto de vista puramente capitalista, es el lograr maximizar las ganancias, esto es, encontrar el esfuerzo E_t tal que:

$$\max G_t = p Y(E_t) - c E_t \quad 2.10$$

Este es un problema típico de máximos y mínimos -

cuya solución se encuentra cuando dG/dt se anula. Al resolver la ecuación $G' = 0$ se obtiene:

$$pY'(E_t) = c$$

2.11

Recordemos que $Y'(E_t)$ es la derivada de la curva de captura-esfuerzo y $pY'(E_t)$ es el ingreso marginal, así mismo c es el costo marginal. Es decir, cuando el ingreso y el costo marginal son iguales se obtiene la llamada RENTA ECONOMICA MAXIMA.

Esta situación se muestra también en la figura 10, donde el nivel de esfuerzo con máxima renta económica sostenible es denotada por E_0 y está determinada por la recta tangente a la curva con pendiente c .

Por otro lado, el costo por unidad de producción o COSTO MEDIO se define como el cociente del costo total entre la producción correspondiente:

$$C(X_t) = C_t / Y_t$$

2.12

de manera que, en el caso de la ecuación 2.6a, tendríamos:

$$C_t = cY_t / qX_t = C(X_t)Y_t$$

2.12a

de donde $C(X_t) = c/qX_t$ y se tiene que el costo promedio sólo depende del stock.

5. ESTADOS DE EQUILIBRIO BIOECONOMICO

Introduciremos ahora otro concepto; el VALOR ACTUAL, presente o descontado -que es sumamente importante desde el punto de vista económico- para el modelo anteriormente descrito.

Si sabemos que un capital de A pesos es disponible o exigible dentro de T años, y se conocen la tasa de interés social y la frecuencia de capitalización, es posible entonces calcular el capital que debe invertirse en el momento presente para que al cabo de T años se haya convertido en A pesos. Este capital se denomina valor actual de A pesos disponibles dentro de T años.

Si el interés se capitaliza al 100 δ %, entonces pesos será el valor actual de S pesos disponibles dentro de T años si se verifica que:

$$S(1+\delta)^T = A$$

es decir;

$$S = A/(1+\delta)^T$$

Un pago de contado G_t realizado al tiempo t en el futuro, puede ser expresado como un valor actual igual a:

$$p^t G_t$$

donde $p = 1/(1+\delta)$. p es llamado el FACTOR DE DESCUENTO.

El valor actual de un flujo de valores en un intervalo $[0, \tau]$ puede ser calculado mediante la serie:

$$G = G_0 + \frac{G_1}{1+r\delta} + \frac{G_2}{(1+r\delta)^2} + \dots + \frac{G_\tau}{(1+r\delta)^\tau} = \sum_{t=0}^{\tau} p^t G_t \quad 2.13$$

Volvamos ahora a la discusión sobre la rentabilidad de una pesquería, la ecuación 2.8:

$$G_t = R_t - C_t$$

puede reescribirse utilizando 2.12 como

$$G_t = pY_t - c(X_t)Y_t = [p - c(X_t)]Y_t \quad 2.14$$

y, por 2.13, el valor actual de todas las futuras ganancias será;

$$G = \sum_{t=0}^{\infty} p^t [p - c(X_t)]Y_t \quad 2.15$$

Un problema típico de control será el maximizar el valor actual de las ganancias netas, donde la ecuación que describe el cambio en el stock del recurso según 2.4 es:

$$X_{t+1} = X_t + F(X_t) - Y_t$$

(ver nota 7)

Una respuesta al problema de dar con dicho máximo puede encontrarse por medio de una extensión del método de los multiplicadores de Lagrange según se ve enseguida: Para la función 2.15, sujeta a la condición 2.4, la expresión la grangiana toma la forma:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t [(P - C(X_t)) Y_t + \rho \lambda_{t+1} (X_t + F(X_t) - Y_t - X_{t+1})] \quad 2.16$$

donde λ_{t+1} es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción que define X_{t+1} . Este multiplicador indica el valor de una unidad adicional del stock pesquero al tiempo $t+1$; el producto $\rho^{t+1} \lambda_{t+1}$ puede ser interpretado como el valor presente de una unidad adicional del stock en el momento $t+1$.

Las condiciones necesarias para que se dé un máximo son que las derivadas parciales de L sean, en conjunto, iguales a cero, de donde:

$$\frac{\partial L}{\partial Y_t} = \rho^t \{ [P - C(X_t)] - \rho \lambda_{t+1} \} = 0 \quad 2.17$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_t} = -\rho^t C'(X_t) Y_t + \rho^{t+1} \lambda_{t+1} [1 + F'(X_t)] - \rho^t \lambda_t = 0 \quad 2.18$$

(aquí el último término es el que se obtiene al derivar con respecto a X_t , el $t-1$ sumando de L) y;

$$X_{t+1} = X_t + F(X_t) - Y_t$$

y como $\rho^t \neq 0$ al despejar p en 2.17 tenemos:

$$P = C(X_t) + \rho \lambda_{t+1} \quad 2.19$$

y, de 2.18,

$$\lambda_t = -C'(X_t) Y_t + \rho \lambda_{t+1} [1 + F'(X_t)] \quad 2.20$$

Ahora bien, en cualquier sistema dinámico un estado de equilibrio se define como aquel en que las variables dentro del sistema no cambian al transcurrir el tiempo; en

este caso, tendremos un estado tal cuando y sólo cuando

$$X_t = X, \quad Y_t = Y \quad \text{y} \quad \lambda_t = \lambda$$

valores que, al ser sustituidos en 2.19, 2.20 y 2.4, caracterizan los equilibrios del sistema que ocupa nuestra atención y dan las ecuaciones:

$$P = C(X) + \rho \lambda \quad 2.21$$

$$\lambda(1 - \rho[1 - F'(X)]) = -C'(X)Y \quad 2.22$$

$$Y = F(X) \quad 2.23$$

respectivamente. De donde, al sustituir el primer miembro de 2.22 por la expresión equivalente (ver nota 8)

$$\lambda \rho [s - F'(X)]$$

obtenemos

$$Y = - \frac{\lambda \rho [s - F'(X)]}{C'(X)} \quad 2.24$$

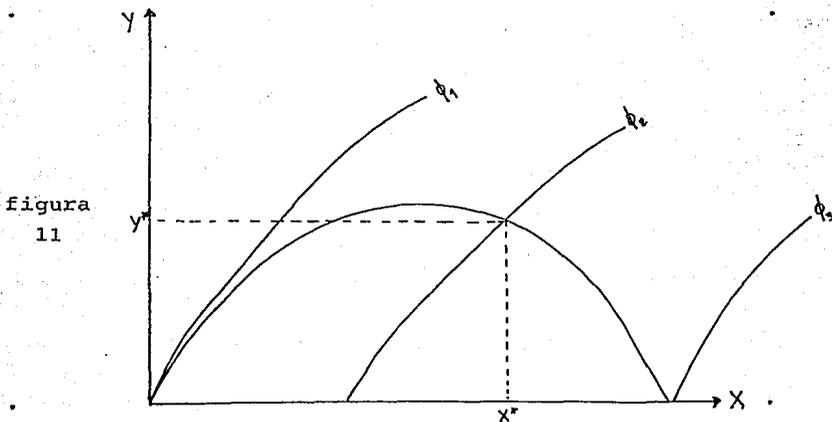
y sustituyendo el valor de $\rho \lambda$ que se obtiene de 2.21 tenemos:

$$Y = \frac{(F'(X) - s)(P - C(X))}{C'(X)} = \phi(X) \quad 2.25$$

$\phi(X)$ y la función de crecimiento natural (que coincide con el rendimiento según 2.5) forman un sistema simple de dos ecuaciones con dos incógnitas, por lo que la solución del problema está en el punto de intersección de ambas curvas ($Y = F(X)$ y $Y = \phi(X)$).

Haremos el análisis anterior para el modelo de - Gordon-Shaefer: Sea $B(x) = -c'(x)$, $B(x)$ es decreciente (y , por consiguiente, $1/B(x)$ es creciente) $(P-c(x))$ es creciente, así como $-(F'(x) - \delta)$, por lo que al ser ϕ un producto de tres funciones crecientes esta función resulta ser creciente. Las posibles situaciones que se pueden presentar son las siguientes (ver figura 11):

i) Que $\phi(0) = 0$, es decir que el punto de intersección sea el origen, y que ϕ sea mayor que $F(x)$. Este caso se presenta si la tasa de crecimiento de la población $F'(x)$ es relativamente baja en comparación con la tasa de descuento δ , y el costo de explotación del recurso es menor que el precio del mercado, lo cual implicaría que la pesquería es rentable desde el punto de vista meramente económico y que el rendimiento óptimo se logra extinguiendo el recurso.



ii) Cuando $\phi(x)$ y $F(x)$ se intersectan en (x^*, y^*) ; en este caso el stock óptimo real excede al máximo rendimiento sostenible.

iii) La intersección ocurre a la derecha de K ; aquí el costo de captura es alto en relación al precio del mercado por lo que no es costeable la explotación del recurso (en la nota 9 se calcula el estado de equilibrio para el modelo de Gordon-Shaefer).

6. TIEMPO CARACTERISTICO DE RECUPERACION

Ahora bien, si el stock inicial X_0 no es igual al stock óptimo X^* , ¿Cuál debería de ser la estrategia de explotación para lograr alcanzar dicho valor de equilibrio óptimo?

Anteriormente vimos que sin pesca la población - tiende a alcanzar un estado de equilibrio (por ejemplo; - para el modelo logístico es $X = K$) donde el crecimiento - y la mortalidad natural llegan a compensarse. Por otro lado, vemos también que si la población era afectada por - pesca (con una cosecha tal que no llevara al recurso a - la extinción), entonces tendería a un estado de equilibrio X^* menor que la capacidad de carga K . Y al buscar - el máximo rendimiento sostenible, se intenta determinar - la tasa intrínseca de crecimiento de la población para cosechar a la tasa que mantenga a la población en el máximo de la curva.

Para ilustrar las ideas consideremos por ejemplo el tan traído modelo logístico, y supongamos que el rendimiento por unidad de tiempo es proporcional a X y al esfuerzo, que consideraremos constante; tendremos entonces que la dinámica de la población estará dada por:

$$\frac{dX}{dt} = rX(1 - X/K) - EX$$

2.26

en este caso la población de equilibrio es;

$$X^*(E) = K(1 - E/\epsilon) \quad 2.27$$

el rendimiento como una función de E es:

$$Y(E) = EK(1 - E/\epsilon) \quad 2.28$$

y el máximo rendimiento sostenible (MRS) se alcanza para

X^* de donde $Y_{MRS} = \frac{rK}{4}$ y $X^* = K/2$. Continuando con este análisis preguntemos: ¿Qué pasaría con la población, si se le sacara del valor de equilibrio $X^*(E)$ dado por la ecuación 2.27? Una respuesta podría darse de la observación de que como $0 < dx/dt$ si $x < X^*$ y $dx/dt < 0$ si $x > X^*$, entonces la población tendería a retornar a X^* .

La figura 12, ilustra distintas estrategias de captura. La curva parabólica es la tasa de crecimiento en función de X , las curvas a , b y c ilustran las tasas de mortalidad por captura bajo estrategias de: esfuerzo constante, rendimiento constante y una estrategia de rendimiento modificado respectivamente.

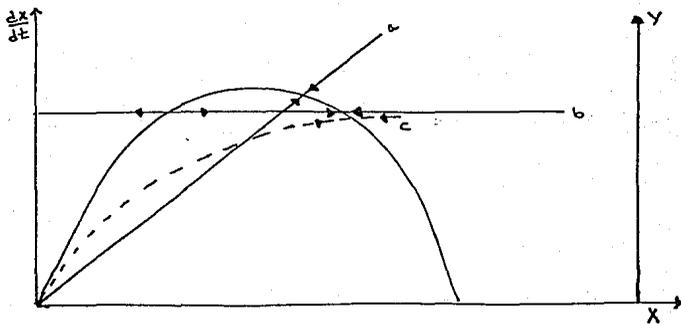


fig. 12

Se puede intentar hacer un análisis más cuantitativo acerca del tiempo en que retorna la población al punto de equilibrio utilizando el llamado TIEMPO CARACTERÍSTICO DE RETORNO (T_R), que es una medida del tiempo que le toma al sistema recobrase de una pequeña perturbación en un punto de equilibrio estable. Consideremos la figura siguiente:

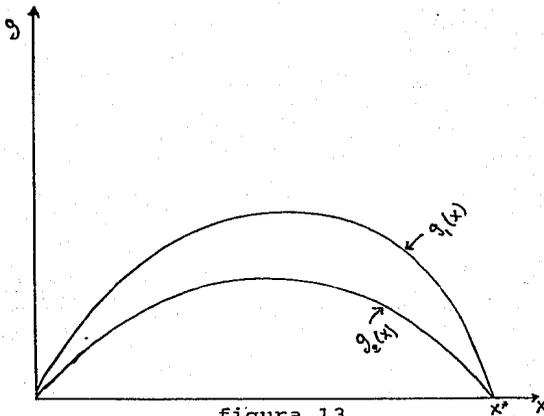


figura 13

Se puede ver que si damos una pequeña perturbación en el punto de equilibrio estable x^* , la curva --punteada tardara más en recuperarse que la otra curva, ya que cerca de x^* la pendiente de g_1 es mayor en términos absolutos que la de g_2 ($|g_1'(x^*)| > |g_2'(x^*)|$). Si se define al tiempo característico de recuperación T_R como:

$$T_R = 1 / |g'(x^*)|$$

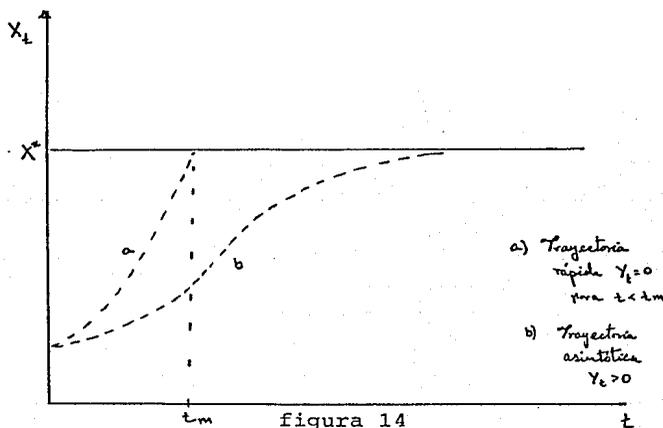
2.29

se tendrá que si $g'(x)$ es grande, T_R será pequeño y por el contrario; si $g'(x)$ es pequeña, T_R será grande.

Hacer este análisis es importante debido a que es muy factible que las hipótesis sobre las que se basan la mayoría de los modelos convencionales no se cumplan, dado que en estos se supone que los parámetros biológicos y medio ambientales son constantes. Sin embargo, la aleatoriedad del medio puede tener efectos importantes en la dinámica de las poblaciones animales. Además es casi imposible lograr cosechar con un rendimiento permanentemente igual a Y_{HRS} .

Antes de continuar con la discusión del tiempo característico de retorno, haremos un paréntesis para plantear otra pregunta muy ligada a la anterior. ¿Cuál será la trayectoria óptima para que la población se aproxime a X^* ?.

Una forma de lograr llegar al punto de equilibrio sería explotar el recurso con un rendimiento Y menor a Y^* de manera tal que se tendría una trayectoria de aproximación asintótica (ver figura 14). Otra manera sería dejar de explotar el recurso un tiempo t_m ($Y_t = 0$ para $-t \leq t_m$) y a partir de que se alcanza X^* , explotar de acuerdo a Y^* , obsérvese que tal trayectoria de aproximación es más rápida.



En resumen, si el stock X_0 no coincide con X^* , hay al menos dos formas de alcanzar a éste, a saber:

- i) Por medio de la trayectoria más rápida
- ii) A través de una trayectoria asintótica

A las estrategias dadas por i) se les puede llamar de todo o nada, es decir:

Si	$X_0 < X^*$	entonces	$Y_t = 0$
si	$X_0 > X^*$	entonces	$Y_t = Y_{máx.}$
si	$X_0 = X^*$	entonces	$Y_t = Y^*$

esto es, si el stock inicial excede al stock óptimo uno -- puede pescar lo más posible ($Y_{máx.}$) hasta que el stock -- llegue a X^* . Si el stock es menor al stock óptimo, se pue de imponer una veda ($Y_t = 0$) hasta que la población de mane- ra natural alcance el tamaño X^* . Y en el último caso (que

el el ideal) uno puede cosechar una cantidad $Y^* = F(x^*)$ indefinidamente.

Desde otra perspectiva, es importante el conocer o estimar el tiempo que se tarda la población en recuperarse para poder elegir si es mejor (desde el punto de vista socioeconómico) el decidirse por la trayectoria más rápida ó por una trayectoria asintótica, ya que no debe de ser tomado tan a la ligera el implantar vedas a un recurso, sobre todo si de éste dependen muchas personas.

El tiempo característico de retorno (ecuación 2.29) nos da una medida del tiempo típico que le toma al sistema recobrase de una pequeña perturbación. Para la ecuación logística sin cosecha, $T_R = 1/r$ (lo denotaremos por $T_R(0)$).

En el caso de un esfuerzo constante e igual a E tendremos que para el modelo dado por 2.26, el punto de equilibrio estable es: $\lambda = k - kE/r$, por lo tanto;

$$T_R(E) = 1/(r-E)$$

o

$$T_R(E) / T_R(0) = \left(1 - \frac{E}{r}\right)^{-1} \quad 2.30$$

Cuando E crece, la población tarda más en recuperarse de pequeñas perturbaciones. Por ejemplo, el tiempo de recuperación en el MRS es dos veces mayor que para la población en condiciones naturales, y T_R es creciente y no acotado conforme E tiende hacia el valor r.

Ahora bien, recordemos que el rendimiento esta -

dado en función del esfuerzo por:

$$Y(E) = EK(1 - E/r)$$

entonces podemos representar a T_R como función de Y ya que de ésta última expresión tenemos:

$$E = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4Y/(rK)}}{2/r}$$

y como $Y_{MRS} = rY/4$ obtenemos:

$$E = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - r^2 Y/Y_{MRS}}}{2}$$

por lo tanto

$$T_R(Y)/T_R(0) = 1/(1 - E/r) = 1/(1 - Y/Y_{MRS})^{1/2}$$

es decir

$$T_R(Y) = T_R(0) [1 - Y/Y_{MRS}]^{-1/2} \quad 2.31$$

Donde, podemos observar que, si consideramos a $T_R(Y)$ como una variable que depende de Y , tendremos que $T_R(Y) = T_R(0)$ bajo condiciones naturales, es decir si $Y = 0$. Y, en contraste con 2.30, la ecuación 2.31 T_R tiende a infinito cuando Y se acerca al rendimiento máximo sostenible.

NOTAS AL CAPITULO SEGUNDO

[1] En México, ejemplos de especies concesionadas son; abulón, ostión, almeja, totoaba y langosta.

[2] El índice de explotación aumenta de varias maneras; por ejemplo, por el uso de artes de pesca más eficientes, por el aumento en el número de embarcaciones o pescadores, por el incremento en el tiempo efectivo de pesca, etc..

[3] A partir de que se decretó en la ONU como mar patrimonial el comprendido dentro de las doscientas millas náuticas; la mayoría de los países han tenido que adaptarse a un nuevo marco jurídico lo que, según la FAO, tendría en el futuro tres consecuencias fundamentales:

- i) A corto plazo, las nuevas condiciones -basadas en criterios geográficos- llevarán consigo transferencias de producción de las, otrora, potencias pesqueras internacionales a las pesquerías nacionales.
- ii) A mediano plazo, la disipación de los beneficios económicos que recibían los países subdesarrollados -producto de la desigual competencia que prevaecía en la situación anterior- se reducirá y
- iii) Se dará un descanso a las pesquerías de gran altura - pues el nuevo ordenamiento permitirá la adopción de regímenes de explotación mejor adaptados a los intereses nacionales concretos.

Sin embargo, es evidentemente una utopía es creer que un decreto basta para cambiar las relaciones internacionales entre los -

países subdesarrollados y las potencias. Cabe mencionar, por ejemplo, que las dos más grandes potencial del orbe (URSS y EEUU) no respetan la anterior disposición, así como el hecho de que aún y con otras disposiciones tendientes a "ayudar" al tercer mundo, dichas potencias, son las que más se benefician de la producción de materias primas en el tercer mundo.

[4] Otra posible expresión para la función $F(X_t)$ que ha sido muy estudiada es:

$$F(X_t) = r X_t (\ln K - \ln X_t) \quad 2.2b$$

donde las constantes r y K tienen el mismo significado que en 2.2a

[5] Para el modelo de declinación logarítmica (2.2b) la expresión 2.5 con la función de producción 2.3a tomaría la forma:

$$q E_t X_t = r X_t (\ln K - \ln X_t) \quad 2.5b1$$

de donde

$$E_t = \frac{r}{q} \ln (K/X_t)$$

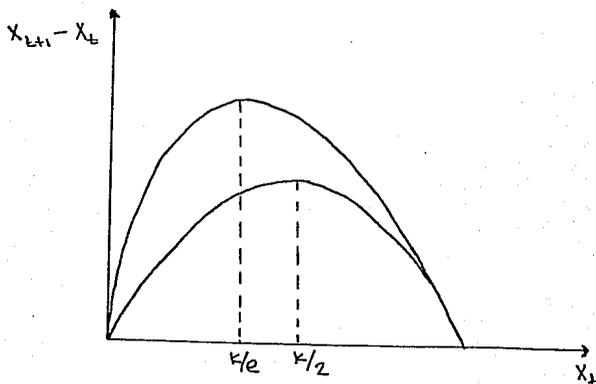
y resolviendo para X_t en función de E_t obtenemos

$$X_t = K e^{-q E_t / r}$$

al multiplicar por $q E_t$ y sustituir en 2.5b tenemos;

$$Y = q K E e^{-q E_t / r} \quad 2.5b2$$

la siguiente figura muestra las gráficas para los modelos logístico y logarítmico (las gráficas se hicieron con los valores: $r=1.5$ y $k=450$)



Podemos ver además que ambas curvas tienden a cero con la misma rapidez, ya que

$$\lim_{X \rightarrow k} \frac{r X_t (\ln k - \ln X_t)}{r X_t (1 - X_t/k)} = 1$$

Al encontrar el máximo de 2.5b2, es decir; $Y' = 0$ obtenemos:

$$rk e^{-qE/r} - \frac{q}{r} (qkE) e^{-qE/r} = 0$$

de donde $\frac{q}{r} E = 1$ por lo que el esfuerzo óptimo es: $E = r/q$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores vemos que el nivel óptimo de la población es;

$$X_{MRS} = k e^{-q/r \cdot r/q} = k/e \quad ; \quad Y_{MRS} = q E_{MRS} X_{MRS} = \frac{kr}{e}$$

La siguiente tabla muestra los valores para cada uno de los modelos.

MODELO	ECUACION DE CREC.	X_{MRS}	Y_{MRS}	E_{MRS}
GORDON-SHAEFER	$rX(1 - X/k)$	$k/2$	$rk/2$	$r/2q$
GOMPERTZ-FOX	$rX(\ln k - \ln X)$	k/e	kr/e	r/q

[6] Como ya se dijo anteriormente, si el esfuerzo es aumentado de manera desproporcionada, los costos se elevarían a tal grado que — a pesar de tener un gran volumen de captura— no habría ganancias.

[7] Si consideramos que el tiempo es una variable continua, la dinámica del sistema podría darse, en sustitución de 2.4, por;

$$\dot{X} = F(x) - Y(x)$$

con la condición; $X(0) = X_0$.

Si utilizamos que la rentabilidad de la pesquería, según 2.14 esta dada por

$$G_k = [P - c(x)]Y(x)$$

sustituyendo el valor de $Y(x)$ tendríamos que

$$G_k = [P - c(x)][F(x) - \dot{X}]$$

por lo tanto el valor presente de las ganancias netas vendrá dado por la expresión:

$$J(x) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} (P - c(x))(F(x) - \dot{X}) dt$$

Y si llamamos $\phi(t, x, \dot{x})$ a la funcional dentro de la integral, el problema de determinar el máximo de J es un problema clásico del cálculo de variaciones:

$$J(x) = \int_0^{\infty} \phi(t, x, \dot{x}) dt$$

La ecuación de Euler $\phi_x = \frac{d}{dt} \phi_{\dot{x}}$ es una condición necesaria para que X sea una extremal de la funcional J . Por lo

que, para hallar la curva que maximice el valor presente de las ganancias netas, junto con la condición de equilibrio:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad , \quad X(0) = X_0$$

tendríamos;

$$\phi_x = \frac{\partial}{\partial x} [e^{-\delta t} (P - C(x)) (F(x) - \dot{x})] = e^{-\delta t} \{ P F'(x) - C(x) F'(x) - C'(x) F(x) + C(x) \dot{x} \}$$

$$\phi_{\dot{x}} = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}} = e^{-\delta t} \{ C(x) - P \}$$

$$\frac{d\phi_{\dot{x}}}{dt} = -\delta e^{-\delta t} \{ C(x) - P \} + e^{-\delta t} \{ C'(x) \dot{x} \}$$

por lo tanto, de la condición de Euler, tenemos;

$$e^{-\delta t} \{ P F'(x) - C(x) F'(x) - C'(x) F(x) + C'(x) \dot{x} \} = -\delta e^{-\delta t} \{ (C(x) - P) + C'(x) \dot{x} \}$$

simplificando y utilizando que $\dot{x} = 0$ obtenemos:

$$[P - C(x)] F'(x) - C'(x) F(x) = -\delta [C(x) - P]$$

i.e.

$$\delta = F'(x) - \frac{C'(x) F(x)}{P - C(x)}$$

2.26

De 2.25 y utilizando la condición $\dot{Y} = F(x)$ obtenemos esta misma expresión.

[8] En efecto, como $\rho = 1/(1+\delta)$, entonces:

$$\lambda (1 - \rho [1 + F'(x)]) = \{ \lambda - \lambda \rho [1 + F'(x)] \} \rho = \left[\frac{\lambda}{\rho} - \lambda - \lambda F'(x) \right] \rho = \rho [\lambda + \lambda \delta - \lambda - \lambda F'(x)] = \lambda \rho [\delta - F'(x)]$$

[9] Para el modelo de Gordon-Shaefer, podemos calcular el estado de equilibrio del sistema (X^*, Y^*) que estaría dado por las ecuaciones:

$$C(X^*) = c/\alpha X^*$$

$$Y^* = rX^* (1 - X^*/k)$$

y de acuerdo a 2.25, dado que $F'(X) = r - \frac{2r}{k}X$ y $C'(X) = -\frac{c}{\alpha}X^{-2}$ tendríamos;

$$\delta = r - \frac{2r}{k}X - \frac{-\frac{c}{\alpha X^2} (rX - \frac{rX^2}{k})}{p - c/\alpha X}$$

de donde se obtiene;

$$2r\alpha\beta X^2 - kc\delta - [cr + k\alpha\beta(r-\delta)]X = 0$$

por lo tanto

$$X^* = \frac{[cr + k\alpha\beta(r-\delta)] + \sqrt{[cr + k\alpha\beta(r-\delta)]^2 + 4[Zr\alpha\beta(kc\delta)]}}{4r\alpha\beta}$$

o equivalentemente

$$X^* = \frac{k}{\alpha} \left[\left(\frac{c}{\alpha\beta k} + 1 - \frac{\delta}{r} \right) + \sqrt{\left[\frac{c}{\alpha\beta k} + 1 - \frac{\delta}{r} \right]^2 + \frac{8c\delta}{\alpha\beta rk}} \right]$$

En conclusión, si podemos estimar los parámetros bioeconómicos*;

- r -tasa de crecimiento intrínseca o neta
- k -capacidad de carga del medio
- q -coeficiente de capturabilidad
- c -costo por unidad de esfuerzo pesquero
- p -precio por unidad de producto
- δ -tasa de descuento

entonces podemos estimar el stock óptimo X^* y también la captura

y el esfuerzo óptimo de acuerdo a: $Y^* = F(X^*)$ y $E^* = Y^*/\alpha X^*$.

* Obviamente sólo en caso de que se cumplan las condiciones del modelo que se esté utilizando.

CAPITULO TERCERO

MODELO DE BEVERTON Y HOLT

1. INTRODUCCION

Desarrollaremos, ahora, otro de los modelos clásicos en el estudio del rendimiento -en biomasa- de una pesquería. Primeramente desarrollaremos el modelo bajo la premisa de que los parámetros poblacionales (estructura por edades, mortalidad por pesca y natural, etc.) permanecen constantes. Para una población así, es mejor hacer el estudio del rendimiento de una sola clase de edad durante toda su vida, para determinar el rendimiento, durante un año, -de todas las clases de edad presentes en la pesquería. Cabe hacer mención aquí, que para desarrollar el modelo utilizaremos un modelo de crecimiento que se presenta en la nota 1.

Posteriormente se harán algunas modificaciones al modelo anterior, con el propósito de generalizarlo. La primera generalización será considerar que la población está compuesta por varias clases de edad, con distintas mortalidades naturales y con una misma mortalidad por pesca.

La segunda generalización será el considerar a la mortalidad no como una constante sino como una función del tiempo, y por último, considerar a las mortalidades por pesca como funciones del tiempo y distintas para cada clase de edad.

Cabe aclarar, sin embargo, que dada la dificultad práctica de estimar los distintos parámetros involucrados en las -- generalizaciones, así como el de aplicar para cada clase - de edad el esfuerzo óptimo obtenido, dichas generalizaciones son -por lo menos actualmente- meramente teóricas.

2. CAPTURA

Consideremos un recurso aislado que está siendo explotado y donde no hay reproducción, y sea R en número de reclutas de edad t_r que ingresan anualmente al sistema (supongamos por el momento que R y t_r son constantes); si, durante el período anterior a la edad de primera captura (t_c), el recurso decrece sólo por la mortalidad natural, es decir de acuerdo al modelo dado por la ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = -mN, \quad N(t_r) = R$$

3.1



donde N es el número de individuos de la cohorte que estamos estudiando (a la variable N la usaremos en este capítulo para denotar a toda la población, lo que es consistente con lo anterior bajo la premisa de que no hay reproducción), entonces;

$$N(t) = R e^{-m(t-t_r)} \quad t_r \leq t \leq t_c$$

3.2

Si, después de la edad de primera captura, el recurso está sujeto tanto a una tasa de mortalidad por pesca (u) como a la tasa de mortalidad natural (m), la población decrecerá conforme a la ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = -(m+u)N \quad ; \quad N(t_c) = R' = R e^{-m(t_c-t_r)}$$

3.3

de donde

$$N(t) = R' e^{-(m+u)(t-t_c)} \quad t_c \leq t \leq t_\lambda$$

donde t_λ es la esperanza de vida del pez.

Lo anterior quiere decir que la captura al tiempo t es;

$$C(t) = u N(t) \quad 3.4$$

y, por lo tanto, la captura en número de esta cohorte estará dado por;

$$C = \int_{t_c}^{t_\lambda} C(t) dt = u \int_{t_c}^{t_\lambda} R' e^{-z(t-t_c)} dt \quad 3.5$$

donde $z = u + m$ y, por consiguiente:

$$C = \frac{uR'}{z} [1 - e^{-z(t_\lambda - t_c)}] \quad 3.6$$

y, en caso de que t_λ fuera muy grande con respecto a t_c (llamaremos λ a la diferencia $t_\lambda - t_c$), de 3.6 tenemos que;

$$C \approx \frac{uR'}{z}$$

3. CAPTURA EN BIOMASA. RENDIMIENTO

Si queremos calcular la captura en biomasa, tendremos, en lugar de la expresión 3.4, la ecuación:

$$C(t) = u N(t) W(t) \quad 3.7$$

donde $W(t)$ nos representa el peso del organismo a la edad t y el producto NW representa la biomasa existente al tiempo t . Por lo tanto, la captura total de esa cohorte en peso (o rendimiento en peso) será:

$$Y = u \int_{t_c}^{t_\lambda} R' W_t e^{-z(t-t_c)} dt \quad 3.8$$

Como podemos apreciar, la integral anterior es la suma de las capturas promedio anuales de todos los peces de una sola cohorte, durante todos los años en que ésta contribuye a la pesquería. Y si el reclutamiento es constante el rendimiento anual de toda la población será invariable año con año.

El modelo de Beverton y Holt (ver nota 1) considera para $W(t)$ la expresión;

$$W(t) = a L(t)^b \quad 3.9$$

también llamada relación alométrica. Cabe hacer la aclaración de que para la mayoría de los peces, el valor del parámetro b es aproximadamente 3 por lo que, si consideramos el modelo de crecimiento en longitud de Bertalanffy, tendremos que como (nota 2);

$$L(t) = L_\infty (1 - e^{-k(t-t_0)}) \quad 3.10$$

entonces:

$$W(t) = W_\infty (1 - e^{-k(t-t_0)})^3 \quad 3.11$$

donde $W_\infty = a L_\infty^3$. Al desarrollar 3.11 obtenemos:

$$W(t) = W_0 \left(1 - 3e^{-k(t-t_0)} + 3e^{-2k(t-t_0)} - e^{-3k(t-t_0)} \right).$$

que, al sustituirse en 3.8 e integrarse da:

$$Y = uR'W_0 \left\{ \frac{1-e^{-Z\lambda}}{Z} - \frac{3e^{-k\lambda}(1-e^{-(Z+k)\lambda})}{Z+k} + \frac{3e^{-2k\lambda}(1-e^{-(Z+2k)\lambda})}{Z+2k} - \frac{e^{-3k\lambda}(1-e^{-(Z+3k)\lambda})}{Z+3k} \right\} \quad 3.12$$

donde $\lambda = t_c - t_0$, y nuevamente en caso de que λ sea grande se tiene:

$$Y \approx uR'W_0 \left(\frac{1}{Z} - \frac{3e^{-k\lambda}}{Z+k} + \frac{3e^{-2k\lambda}}{Z+2k} - \frac{e^{-3k\lambda}}{Z+3k} \right)$$

El caso más general, se tiene si en lugar de suponer el valor de 3 para b , sustituimos la expresión 3.9 en 3.8, es decir;

$$Y = u \int_{t_c}^{t_\lambda} R' a L_t^b e^{-z(t-t_c)} dt \quad 3.13$$

que daría;

$$Y = u \int_{t_c}^{t_\lambda} R' a W_0 [1 - e^{-k(t-t_0)}]^b e^{-z(t-t_c)} dt \quad 3.14$$

como

$$N_t = R e^{-m(t_c - t_r)} e^{-z(t-t_c)} \quad 3.15$$

y además $t - t_c = (t - t_0) - (t_c - t_0)$ obtenemos que 3.15 es equivalente a:

$$N_t = R e^{-m(t_r - t_0)} e^{u(t_c - t_0)} e^{-z(t-t_0)}$$

Y

$$W_t = W_0 [1 - e^{-k(t-t_0)}]^b$$

si llamamos a $y = e^{-k(t-t_0)}$, entonces cuando;

$$\begin{aligned}
 & t = t_r, \quad y = e^{-R(t_r - t_0)} = e \\
 \text{y} \quad & t = t_c, \quad y = e^{-R(t_c - t_0)} = c
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

(obsérvese que $0 < c \leq 1$), por lo tanto

$$N_t = R e^{m(t_r - t_0)} c^{-4/k} y^{z/k} \quad \text{y} \quad W_t = W_\infty (1 - y)^b$$

la diferencial $dy = -ky dt$, por lo que $dt = -\frac{dy}{ky}$ 3.17
sustituyendo 3.16 y 3.17 en 3.14 obtenemos

$$Y = - \int_c^e u R e^{m(t_r - t_0)} W_\infty c^{-4/k} y^{z/k} (1 - y)^b \left(\frac{1}{ky} \right) dy$$

y si denotamos por:

$$g = 4/k, \quad h = m/k, \quad l = R W_\infty e^{m(t_r - t_0)}$$

llegamos por fin a que 3.13 es igual a

$$Y = lg c^{-g} \int_c^e y^{h+g-1} (1-y)^b dy \tag{3.18}$$

A la función: $B_x(p, q) = \int_0^x y^{p-1} (1-y)^{q-1} dy$ se le conoce como la función BETA INCOMPLETA, si $0 < x < 1$. Y, si $x = 1$, se le llama Beta completa. Por lo tanto de 3.18 - tenemos que:

$$Y = lg c^{-g} [B_c(h+g, b+1) - B_e(h+g, b+1)] \tag{3.19}$$

si analizamos el significado de esta última expresión, podemos ver que l no depende del régimen de pesca, por lo tanto, lo podemos considerar constante al estudiar el efecto sobre el rendimiento de distintos regímenes de pesca.

Por otra parte podemos ver que:

$$c = e^{-k(t_c - t_0)} = 1 - \frac{L_{\infty}(1 - e^{-k(t_c - t_0)})}{L_{\infty}} = 1 - \frac{L t_c}{L_{\infty}}$$

es decir, C es la proporción que le falta al pez por crecer cuando empieza a ser capturado. Finalmente, la segunda parte de la ecuación 3.19 solamente contiene los parámetros: m, u, k, b y c

En otras palabras, a pesar de la aparente complejidad de 3.19, el rendimiento puede determinarse (para los organismos que cumplan con las hipótesis implícitas en los modelos anteriormente citados) mediante el conocimiento de:

- i) La proporción de desarrollo logrado por el pez a la edad de primera captura.
- ii) Las magnitudes relacionadas con la mortalidad del pez (por pesca y natural)
- iii) La constante de Brody (k) que mide qué tan pronunciado es el crecimiento del pez.
- iv) Las constantes biométricas que relacionan la longitud y el peso. (ver nota 3)

Podemos apreciar que si las ecuaciones 3.9 y 3.10 toman otras formas alternativas, como por ejemplo, funciones exponenciales o lineales, se obtendrán diversas ecuaciones para estimar el rendimiento. Más adelante, se hace mención de algunas modificaciones a este modelo.

Por otro lado, podemos observar que en la expresión 3.12, $Y(t)$ depende del esfuerzo pesquero medido indi

rectamente por u y la edad de primera captura (denotada por t_c) que pueden funcionar como variables de control - para determinar estrategias de explotación óptimas. De manera tal que -para este modelo- podamos encontrar valores para u y t_c tales que Y se maximice.

Si consideramos el caso en que la población está compuesta por varias clases de edad (supongamos que existen n clases de edad, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$), y cada una de ellas está sujeta al comportamiento anterior, es decir, -tienen las mismas tasas de mortalidad (natural y por pesca), entonces; el rendimiento en biomasa al tiempo t está dado por:

$$Y_t = \sum_{i=1}^n u X_i(t) W_i(t) \quad 3.20$$

donde $X_i(t)$ es el tamaño de la población de la clase i al tiempo t y W_i es el peso correspondiente. Si el recurso es explotado todo el año, el rendimiento anual será:

$$Y = \int_0^1 \sum_{i=1}^n u X_i(t) W_i(t) dt \quad 3.21$$

Podemos apreciar que la ecuación 3.21 es igual a 3.8, dado que, como se había supuesto anteriormente, el reclutamiento anual es constante y, en el tiempo que dura la pesca, se captura la proporción correspondiente de cada una de las clases de edad. La demostración de la ecuación 3.21 a partir de 3.8 es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 & u \int_{t_c}^{t_\lambda} R' W_t e^{-2(t-t_c)} dt = \int_{t_c}^{t_\lambda} u N(t) W(t) dt = \int_{t_c}^{t_c+1} u N(t) W(t) dt + \dots \\
 & + \dots + \int_{t_c+n-1}^{t_c+n} u N(t) W(t) dt + \int_{t_c+n}^{t_\lambda} u N(t) W(t) dt = *
 \end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable:

$$\begin{aligned}
 * & = \int_0^1 u N(t+t_c) W(t+t_c) dt + \int_0^1 u N(t+t_c+1) W(t+t_c+1) dt + \dots \\
 & + \dots + \int_0^1 u N(t+(n-1)t_c) W(t+(n-1)t_c) dt + \int_0^1 u N(t+nt_c) W(t+nt_c) dt
 \end{aligned}$$

Ahora bien, si se recuerda que el tamaño de la i -ésima clase de edad viene dado por $X_i(t) = N(t+it_c)$ tenemos que;

$$\int_{t_c}^{t_\lambda} u W(t) N(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 u W_i(t) X_i(t) dt$$

con lo que se demuestra lo que se quería.

El modelo hasta aquí planteado, exige condiciones que en la realidad no se presentan, ya que las tasas de mortalidad natural y por pesca no permanecen constantes en el curso de la existencia de una población; así, como la presencia de cambios en el reclutamiento debidos al cambio en las condiciones del medio, etc.. Por esto, conviene discutir ahora algunas generalizaciones del modelo de Beverton y Holt.

4. PRIMERA GENERALIZACION DEL MODELO DE BEVERTON Y HOLT

Supondremos ahora que no todas las clases de edad tienen la misma tasa de mortalidad natural que, como en el caso anterior, sólo se captura a partir de cierta edad con la tasa de mortalidad por pesca igual para cada una de las clases explotadas- que, por último, anualmente la temporada de pesca se da durante el intervalo de tiempo $(0, \tilde{t}]$ -- donde $0 < \tilde{t} \leq 1$.

Por comodidad tomemos como unidad de tiempo el período comprendido entre el inicio de una temporada de pesca y la siguiente. A esta unidad llamémosla año; para simplificar el manejo de subíndices, supondremos además que las clases de edad son anuales.

Cabe aclarar que; un caso más general sería contemplado si las clases de edad no fueran iguales al tiempo entre una temporada de pesca y otra, situación que se presenta en la realidad para muchas especies, ya que es común que en un año existan k clases de edad, por lo que si la esperanza de vida del organismo es n años entonces se tendrían kn clases de edad. Sin embargo, el análisis en este caso sería similar al que se va a presentar enseguida, la diferencia sustancial se encuentra en el manejo de los subíndices, lo cual se vuelve muy engorroso y no aporta diferencias teóricas. Por lo anterior, sólo vale la pena tratar en caso anunciado.

De las hipótesis señaladas tendremos que: Para cada una de las n clases de edad hay una tasa de mortalidad natural α_i , $i=1,2,\dots,n$ respectivamente, y para las primeras r clases ésta es la única causa de muerte ya que están protegidas de la pesca (en otras palabras, la edad $r+1$ es la edad de primera captura). Consideremos entonces que para las primeras r clases, su dinámica esta dada por;

$$\begin{aligned}\dot{X}_1(t) &= -\alpha_1 X_1(t) \\ \dot{X}_2(t) &= -\alpha_2 X_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{X}_r(t) &= -\alpha_r X_r(t)\end{aligned}$$

3.22a

Por otro lado, para $i=r+1, r+2, \dots, n$, $t \in (0, \bar{T}]$ tiene una tasa de mortalidad por pesca igual a u , por lo tanto, podemos escribir:

$$\begin{aligned}\dot{X}_{r+1}(t) &= -(\alpha_{r+1} + u) X_{r+1}(t) \\ &\vdots \\ \dot{X}_n(t) &= -(\alpha_n + u) X_n(t)\end{aligned}$$

3.22b

y, finalmente, a partir de \bar{T} la tasa de mortalidad por pesca es igual a cero y, por lo tanto:

$$\dot{X}_i(t) = -\alpha_i X_i(t) \quad i=1, \dots, n \quad \text{si } t \in [\bar{T}, 1]$$

3.23

Ahora, sea $T = 1 - \bar{T}$, de 2.23 se tiene que

$$X_i(1) = X_i(\bar{T}) e^{-\alpha_i(1-\bar{T})}$$

 $i \leq n-2$

3.24

De la hipótesis de que cada clase de edad es anual y que la composición por edades anualmente es constante, - tendremos que se cumple la condición:

$$X_i(1) = X_{i+1}(0) \quad 3.25$$

por lo tanto, de 3.24 y 3.25 obtenemos:

$$X_{i+1}(0) = X_i(\tilde{x}) e^{-\alpha_i T} \quad \text{si } i \leq n-2$$

para $i=n-1$ tenemos

$$X_n(0) = X_{n-1}(1) + X_n(1)$$

por lo tanto

$$X_n(0) = X_{n-1}(\tilde{x}) e^{-\alpha_{n-1} T} + X_n(\tilde{x}) e^{-\alpha_n T}$$

Denotemos por $\bar{X}(t)$ al vector; $\bar{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$

Con lo que la condición de equilibrio puede establecerse mediante la ecuación vectorial:

$$\bar{X}(1) = \bar{X}(0) \quad 3.26$$

donde, además,

$$X_{i+1}(0) = a_i X_i(\tilde{x}) \quad i \leq n-2$$

$$X_n(0) = a_{n-1} X_{n-1}(\tilde{x}) + a_n X_n(\tilde{x}) \quad 3.27$$

con $a_i = e^{-\alpha_i T}$

Si suponemos que el reclutamiento viene dado por - la relación de Beverton y Holt (ver nota 4):

$$X_i(t) = \frac{\beta \langle z, \bar{X}(t-T) \rangle}{\gamma + \langle z, \bar{X}(t-T) \rangle} \quad 3.28$$

que es adecuada para especies donde se da un límite del reclutamiento debido al alimento o al espacio disponible, o bien a que los depredadores aumentan su actividad inmediatamente ejerciendo una acción que compensa el exceso de reclutas.

Entonces, el problema de maximizar 3.21 se convierte en encontrar el valor del parámetro u tal que:

$$J(u) = \int_0^{\bar{t}} \sum_{i=r+1}^n u X_i(t) W_i(t) dt \quad 3.29$$

sea máximo (observe que J es el rendimiento en una temporada), sujeto a las condiciones 3.26, 3.27 y 3.28. Donde $\bar{X} = (X_i)$ es la solución de las ecuaciones 3.22.

Para determinar tal valor, supongamos primero que $r \leq n-2$, entonces, resolviendo las ecuaciones dadas en 3.22 tenemos:

$$\begin{aligned} X_2(0) &= X_1(0) e^{-\alpha_1} \\ X_3(0) &= e^{-\alpha_2 \bar{t}} e^{-\alpha_2 \bar{t}} X_2(0) = e^{-\alpha_2} X_2(0) = X_1(0) e^{-\alpha_1} e^{-\alpha_2} \\ &\vdots \\ X_{r+1}(0) &= X_1(0) e^{-\alpha_1} e^{-\alpha_2} \dots e^{-\alpha_r} \end{aligned}$$

es decir

$$X_{i+1}(0) = X_1(0) \prod_{j=1}^i e^{-\alpha_j} \quad i \leq r \quad 3.30a$$

Para $r < i \leq n-2$ tendremos:

$$\begin{aligned} X_{r+2}(0) &= e^{-(\alpha_{r+1} + u) \bar{t}} a_{r+1} X_{r+1}(0) \\ &= e^{-\alpha_{r+1}(1-\bar{t})} e^{-(\alpha_{r+1} + u) \bar{t}} X_{r+1}(0) \\ &= [X_{r+1}(0) e^{-\alpha_{r+1}}] e^{-u \bar{t}} = * \end{aligned}$$

y por 3.30a
$$* = X_1(t) e^{-u\tilde{t}} \prod_{j=1}^{r-1} e^{-\alpha_j}$$

$$X_{n-r+1}(0) = e^{-\alpha_1} e^{-\alpha_2} \dots e^{-\alpha_{r-1} - u\tilde{t}} e^{-\alpha_{r+2} - u\tilde{t}} \dots e^{-\alpha_{r+2} - u\tilde{t}} X_1(0)$$

$$= X_1(0) e^{-(n-r-3)u\tilde{t}} \prod_{j=1}^{n-2} e^{-\alpha_j}$$

es decir

$$X_{i+1}(0) = X_i(0) e^{-(i-r-1)u\tilde{t}} \prod_{j=1}^{i-1} e^{-\alpha_j} \quad (r < i \leq n-2) \quad 3.30b$$

Por último para

$$X_n(0) = a_{n-1} X_{n-1}(\tilde{t}) + a_n X_n(\tilde{t})$$

de donde

$$X_n(0) = e^{-\alpha_{n-1}(1-\tilde{t})} e^{-(\alpha_{n-1}+u)\tilde{t}} X_{n-1}(0) + e^{-\alpha_n(1-\tilde{t})} e^{-(\alpha_n+u)\tilde{t}} X_n(0)$$

despejando $X_n(0)$ obtenemos

$$X_n(0) = \frac{e^{-\alpha_{n-1} - u\tilde{t}}}{1 - e^{-\alpha_n - u\tilde{t}}} X_{n-1}(0)$$

por lo tanto, usando 3.30b

$$X_n(0) = \frac{e^{-\alpha_{n-1} - u\tilde{t}}}{1 - e^{-\alpha_n - u\tilde{t}}} X_1(0) e^{-(n-r-3)u\tilde{t}} \prod_{j=1}^{n-2} e^{-\alpha_j}$$

$$X_n(0) = \frac{X_1(0) e^{-(n-r-2)u\tilde{t}}}{1 - e^{-\alpha_n - u\tilde{t}}} \prod_{j=1}^{n-1} e^{-\alpha_j}$$

3.3 c

Ahora bien, de 3.26 tenemos que

$$X_i(0) = X_i(1) = \frac{\beta \langle \bar{z}, \bar{x}(\tilde{t}) \rangle}{\gamma + \langle \bar{z}, \bar{x}(\tilde{t}) \rangle}$$

y como $\langle \bar{z}, \bar{x}(\tilde{t}) \rangle = \sum_{i=1}^n G_i X_i(\tilde{t})$ y

5. SEGUNDA GENERALIZACION

Un caso más general sería el considerar que el parámetro u es una función continua por pedazos, que toma valores en el intervalo $[0, b]$, y además tal que $u(t)$ es la misma para todas las clases de edad a partir de la edad de primera captura. La dinámica del sistema estará dada entonces por:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= -\alpha_1 X_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{X}_r(t) &= -\alpha_r X_r(t) \\ \dot{X}_{r+1}(t) &= -(\alpha_{r+1} + u(t)) X_{r+1}(t) \\ &\vdots \\ \dot{X}_n(t) &= -(\alpha_n + u(t)) X_n(t) \end{aligned} \quad 3.35$$

donde $u(t) = 0$ si $\tilde{t} < t \leq 1$

: Entonces la funcional J toma la forma:

$$J(u(t)) = \int_0^{\tilde{t}} u(t) \sum_{i=r+1}^n w_i(t) X_i(t) dt \quad 3.36$$

sujeta a la relación de stock-reclutamiento de Beverton y - Holt:

$$X_i(0) = \frac{\beta \langle z, \bar{x}(\tilde{t}) \rangle}{\gamma + \langle z, \bar{x}(\tilde{t}) \rangle} \quad 3.37$$

y también a las condiciones de equilibrio;

$$X_{i+1}(0) = X_i(\tilde{t}) e^{-\alpha_i T} \quad (i \leq n-2)$$

$$X_i(\bar{t}) = X_i(0) e^{-\alpha_i \bar{t}} \quad i \leq r$$

$$X_j(\bar{t}) = X_j(0) e^{-(\alpha_j + u) \bar{t}} \quad j \geq r+1$$

es decir, si llamamos $\phi(u)$ a la expresión

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^n c_i e^{-\alpha_i \bar{t}} \prod_{j=1}^i e^{-\alpha_j} + \sum_{i=r+1}^{n-1} c_i e^{-\alpha_i T} e^{-(i-r-1)u \bar{t}} \prod_{j=1}^i e^{-\alpha_j} +$$

$$+ \frac{c_n e^{-\alpha_n T} e^{-(n-r-2)u \bar{t}}}{1 - e^{-\alpha_n - u \bar{t}}} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} e^{-\alpha_j} \quad 3.33$$

entonces

$$\langle \bar{z}, \bar{x}(\bar{t}) \rangle = \phi(u) X_1(0)$$

por lo tanto, la ecuación 3.32 se convierte en

$$X_1(0) = \frac{\beta \phi(u) X_1(0)}{\delta + \phi(u) X_1(0)}$$

y como $X_1(0) \neq 0$ entonces $\delta + \phi(u) X_1(0) = \beta \phi(u)$

es decir,
$$X_1(0) = \frac{\beta \phi(u) - \delta}{\phi(u)}$$

3.34

Si sustituimos 3.34 en 3.29 encontramos una expresión para J sujeta a las condiciones dadas por 3.26, 3.27 y 3.28 en términos de funciones de u , de modo que el máximo puede ser encontrado por técnicas del cálculo diferencial, por lo que el problema desde el punto de vista meramente teórico está resuelto.

5. SEGUNDA GENERALIZACION

Un caso más general sería el considerar que el parámetro u es una función continua por pedazos, que toma valores en el intervalo $[0, b]$, y además tal que $u(t)$ es la misma para todas las clases de edad a partir de la edad de primera captura. La dinámica del sistema estará dada entonces por:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= -\alpha_1 X_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{X}_r(t) &= -\alpha_r X_r(t) \\ \dot{X}_{r+1}(t) &= -(\alpha_{r+1} + u(t)) X_{r+1}(t) \\ &\vdots \\ \dot{X}_n(t) &= -(\alpha_n + u(t)) X_n(t) \end{aligned} \quad 3.35$$

donde $u(t) = 0$ si $\bar{x} < t \leq 1$

Entonces la funcional J toma la forma:

$$J(u(t)) = \int_0^{\bar{x}} u(t) \sum_{i=r+1}^n w_i(t) X_i(t) dt \quad 3.36$$

sujeta a la relación de stock-reclutamiento de Beverton y Holt:

$$X_1(0) = \frac{\beta \langle z, \bar{x}(\bar{x}) \rangle}{\gamma + \langle z, \bar{x}(\bar{x}) \rangle} \quad 3.37$$

y también a las condiciones de equilibrio;

$$X_{i+1}(0) = X_i(\bar{x}) e^{-\alpha_i T} \quad (i \leq n-2)$$

$$X_n(0) = X_{n-1}(\bar{t}) e^{-\alpha_{n-1}T} + X_n(\bar{t}) e^{-\alpha_n T} \quad 3.38$$

si definimos al vector $P(x(\bar{t}))$ como:

$$\bar{P}(\bar{x}) = \left(\frac{\beta < \bar{c}, \bar{x} >}{\gamma + < \bar{c}, \bar{x} >} , X_1(\bar{t}) e^{-\alpha_1 T}, \dots, X_{n-1}(\bar{t}) e^{-\alpha_{n-1} T} + X_n(\bar{t}) e^{-\alpha_n T} \right)$$

la condición de equilibrio estaría dada, en notación vectorial por:

$$\bar{X}(0) = \bar{X}(1) = \bar{P}(X(\bar{t})) \quad 3.39$$

Para escribir éste problema como uno de los estudiados en la teoría del control óptimo, denotemos a las ecuaciones de la dinámica del sistema por el vector $n+1$ dimensional:

$$\dot{\bar{X}}(t) = \bar{F}(t, X(t), u(t))$$

donde las primeras n componentes están dadas por las ecuaciones de 3.35, y la $n+1$ componente por la condición:

$$\dot{X}_{n+1} = -u(t) \sum_{r=1}^n W_r(t) X_r(t) \quad 3.40$$

Si denotamos a las condiciones iniciales por:

$$\bar{X}(0) = \bar{X}^0$$

$$X_1(0) = X_1^0$$

$$\vdots$$

$$X_n(0) = X_n^0$$

$$X_{n+1}(0) = 0 \quad 3.41$$

y por:

$$\phi_1(0, \bar{x}, \bar{x}(0), \bar{x}(\bar{T})) = \lambda_{n+1}(\bar{T}) - \int_0^{\bar{T}} u(t) \sum_{i=1}^n w_i(t) x_i(t) dt \quad 3.42$$

a la funcional que debe de ser minimizada, se tiene que - las condiciones 3.37 a 3.39 devienen en las condiciones - de frontera:

$$\phi_2(0, \bar{x}, \bar{x}(0), \bar{x}(\bar{T})) = X_1^0 - \frac{\theta \sum_{i=1}^n c_i x_i(\bar{T})}{\delta + \sum_{i=1}^n c_i x_i(\bar{T})} = 0$$

$$\phi_3(0, \bar{x}, \bar{x}(0), \bar{x}(\bar{T})) = X_2^0 - X_1(\bar{T}) e^{-\alpha_1 T} = 0$$

⋮

$$\phi_{n+1}(0, \bar{x}, \bar{x}(0), \bar{x}(\bar{T})) = X_n^0 - X_n(\bar{T}) e^{-\alpha_n T} - X_{n-1}(\bar{T}) e^{-\alpha_{n-1} T} = 0$$

$$\phi_{n+2}(0, \bar{x}, \bar{x}(0), \bar{x}(\bar{T})) = X_{n+1}(0) = 0$$

El Hamiltoniano de éste sistema es (ver nota 5)

$$H(t, \bar{x}, u) = u \sum_{i=1}^n (w_i(t) - \lambda_i) x_i(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i x_i \quad 3.44$$

es decir, en notación vectorial:

$$H(t, \bar{x}, u) = \langle \bar{\lambda}(t), F(t, \bar{x}, u) \rangle \quad 3.45$$

(donde $\bar{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $\lambda_{n+1} = -1$)

Por el principio del mínimo de Pontryaguin (ver nota 6), si $(\bar{x}^*(t), u^*(t))$ es una solución óptima de 3.42, - necesariamente debe satisfacerse que $\forall u \in [0, b]$;

$$H(t, \bar{x}^*(t), u) \leq H(t, \bar{x}^*(t), u^*(t)) \quad 3.46$$

de donde, al sustituir 3.45, llegamos a la desigualdad:

$$u \sum_{i=r+1}^n (w_i - \lambda_i) \dot{\lambda}_i^* - \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \dot{\lambda}_i^* \leq u^* \sum_{i=r+1}^n (w_i - \lambda_i) \dot{\lambda}_i^* - \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \dot{\lambda}_i^* \quad 3.47$$

donde $\lambda_i = \lambda_i(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= \alpha_i \lambda_i & i \leq r \\ \dot{\lambda}_j &= (\alpha_j + u(t)) \lambda_j - u(t) w_j & j \geq r+1 \end{aligned} \quad 3.48$$

y las condiciones de frontera

$$\lambda_i(\bar{x}) = \frac{\delta \beta c_i}{(\delta + \langle \bar{x}, \bar{x}(\bar{x}) \rangle)} \lambda_i(0) + \bar{E}^{-\alpha_i T} \lambda_{i+r}(0) \quad 3.49$$

Ahora bien, la desigualdad 3.46 es equivalente a:

$$u \sum_{i=r+1}^n (w_i - \lambda_i) \dot{\lambda}_i^* \leq u^* \sum_{i=r+1}^n (w_i - \lambda_i) \dot{\lambda}_i^* \quad 3.50$$

o bien;

$$u \frac{\partial H}{\partial u} \leq u^* \frac{\partial H}{\partial u} \quad 3.51$$

de donde, si $\frac{\partial H}{\partial u} > 0$, tenemos que $u^* = b$

y, si $\frac{\partial H}{\partial u} < 0$, entonces $u^* = 0$.

Así pues, dados r y b , el problema es encontrar $u_r(\cdot)$ que minimiza ϕ_1 y, consecuentemente, produce el rendimiento máximo sostenible. Si se encuentra r (para cada $r=1, \dots, n$) tal que maximiza el rendimiento, estaremos encontrando cuál es la elección del tamaño de malla óptimo. La estrategia para encontrar el control óptimo consiste en encontrar u , a partir de la desigualdad 3.51, y con este conocimiento resolver el sistema 3.35 para encontrar $\bar{x}(t)$ en función de u , con lo que a su vez podemos

encontrar $\lambda(t)$ del sistema 3.48. Si todo lo anterior fuese posible, se tendría para la u dada a; $\bar{\lambda}(t)$ y $\lambda(t)$, con lo que el control u sería actualizado nuevamente utilizando_ 3.51.

Desgraciadamente, $\partial H/\partial u$ puede anularse muchas veces entre $(0, \tilde{t}]$ e incluso en subintervalos $(0, \tilde{t}]$, con lo cual el proceso descrito anteriormente no sería realizable.

6. EL CASO GENERAL DEL MODELO DE BEVERTON Y HOLT

El caso más general sería plantear el problema con la hipótesis de que a cada clase de edad le corresponde o - está sujeta a mortalidades de pesca distintas, y que éstas son, a su vez, funciones que dependen del tiempo. Es decir, que postularemos que la dinámica para cada clase de edad - esta dada por:

$$\dot{X}_i(t) = -(\alpha_i + u_i(t))X_i \quad ; \quad i \leq n \quad 3.53$$

donde $u_i \in [0, b_i]$, notemos que $u_i = 0$ para $0 \leq i \leq r$.

Todas las demás condiciones quedan establecidas de la misma manera que en el inciso anterior, entonces la ecuación 3.44 se transforma en:

$$H(t, \bar{x}, \bar{u}) = \sum_{i=1}^n [(w_i(t) - \lambda_i)u_i X_i - \alpha_i \lambda_i X_i] \quad 3.54$$

donde λ_i satisface la ecuación diferencial

$$\dot{\lambda}_i = -(\alpha_i + u_i)\lambda_i + w_i(t)u_i \quad 3.55$$

y las condiciones de frontera dadas por 3.43.

La desigualdad de Pontryagin 3.50 se traduce entonces en:

$$\sum_{i=1}^n \{ [w_i - \lambda_i] u_i X_i^* - \alpha_i \lambda_i X_i^* \} \leq \sum_{i=1}^n \{ [w_i - \lambda_i] u_i X_i^* - \alpha_i \lambda_i X_i^* \} \quad 3.56$$

Para analizar 3.56 hagamos lo siguiente; si para cualquier

i , tomamos $u_i = b_i$ y $u_j = 0$ para toda $j \neq i$ entonces de 3.56 obtenemos

$$(w_i - \lambda_i) b_i x_i^* \leq (w_i - \lambda_i) u^* x_i^*$$

si $(w_i - \lambda_i) x_i^* > 0$, entonces es necesario que $u^* = b_i$, en caso contrario $u^* = 0$. Entonces para conocer u es suficiente ver el signo de $\frac{\partial H}{\partial u_i} = H_{u_i}$.

Utilizando 3.54 podemos ver que

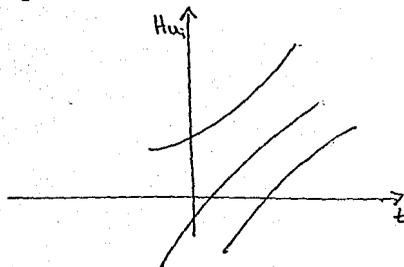
$$H_{u_i} = w_i x_i - \lambda_i x_i$$

de donde al aplicar 3.55 obtenemos que

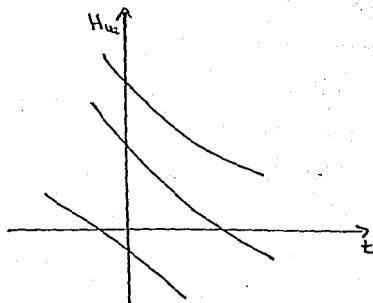
$$\dot{H}_{u_i} = x_i \dot{w}_i - \alpha_i w_i x_i = w_i x_i \left(\frac{\dot{w}_i}{w_i} - \alpha_i \right) \quad 3.57$$

como $w_i x_i > 0$ y $\frac{\dot{w}_i}{w_i}$ es decreciente en el caso de que cumpla con la ecuación de crecimiento en peso dada por Von Bertalanffy, entonces \dot{H}_{u_i} se anula a lo más una vez, cuando $\dot{w}_i/w_i = \alpha_i$, además $\dot{w}_i/w_i - \alpha_i$ solo puede cambiar de signo de positivo a negativo, de donde se infiere que

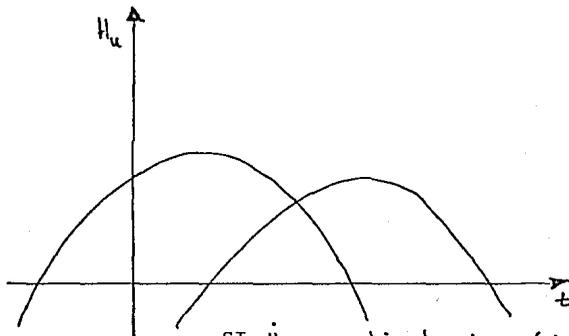
H_{u_i} es cualitativamente de alguno de los siguientes tipos:



SI $\dot{H}_{u_i} > 0$



SI $\dot{H}_{u_i} < 0$



SI H_{u_i} cambia de signo (+, -)

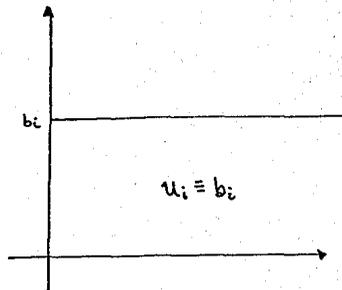
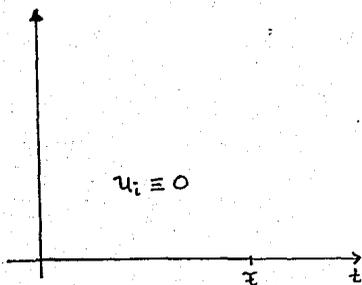
De lo anterior podemos resumir que la estructura de los controles extremales cumple con el siguiente lema:

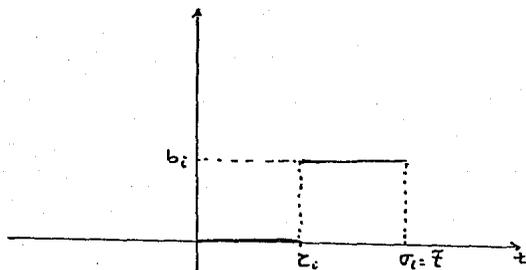
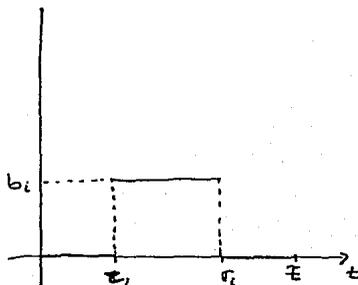
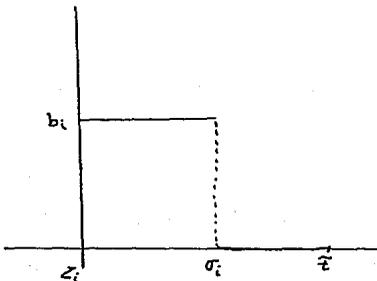
Si $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ es un control extremal, entonces existen τ_i, σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), tales que -

$$0 \leq \tau_i \leq \sigma_i \leq \bar{t} \quad \text{y:} \quad u_i(t) = b \quad \forall t \in [\tau_i, \sigma_i]$$

$$u_i(t) = 0 \quad \forall t \in [\tau_i, \sigma_i]^c \quad i=1, \dots, n$$

Graficamente se tendría lo siguiente:





Desarrollaremos ahora un método para encontrar las soluciones óptimas $u_i^*(t)$ y $\lambda_i^*(t)$ del problema.

Integrando el sistema dado por las ecuaciones 3.53 y tomando $u_i(t)$ como en el lema, encontramos que

$$\lambda_i(\tilde{t}) = \lambda_i(0) e^{-\alpha_i \tilde{t} - b_i (\sigma_i - z_i)} \quad 3.58$$

de donde aplicando las condiciones iniciales tenemos:

$$\lambda_{i+1}(0) = \prod_{j=1}^i e^{-\alpha_j - b_j (\sigma_j - z_j)} \lambda_1(0) \quad i=1, \dots, n-2$$

$$\lambda_n(0) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} e^{-\alpha_j - b_j (\sigma_j - z_j)}}{1 - e^{-\alpha_n - b_n (\sigma_n - z_n)}} \lambda_1(0)$$

$$X_i(0) = \frac{\beta \phi(u) - \delta}{\phi(u)} \quad 3.59$$

donde

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{\alpha_i T} \prod_{j=1}^i e^{-\alpha_j - b_j(\sigma_j - z_j)} + c_n e^{\alpha_n T} \frac{\prod_{j=1}^n e^{-\alpha_j - b_j(\sigma_j - z_j)}}{1 - e^{-\alpha_n - b_n(\sigma_n - z_n)}}$$

analogamente, integrando la ecuación 3.55 obtenemos

$$\lambda_i(\tilde{t}) = e^{\alpha_i \tilde{t} + b_i(\sigma_i - z_i)} \left(\lambda_i(0) - b_i \int_{z_i}^{\sigma_i} w_i(t) e^{-\alpha_i t - b_i(t - z_i)} dt \right)$$

sustituyendo estos valores de las λ 's en la ecuación - que nos da las condiciones de frontera

$$\lambda_i(\tilde{t}) = \frac{\delta \beta c_i}{(\delta + \langle \bar{c}, \bar{x}(\tilde{t}) \rangle)^2} \lambda_i(0) + e^{-\alpha_i \tilde{t}} \lambda_{i+1}(0)$$

obtenemos un sistema de ecuaciones lineales para $\lambda_i(0)$, de donde se puede encontrar $\bar{X}(0)$ y $\bar{\lambda}(0)$ a partir de las ecuaciones 3.59 y el sistema mencionado. Con estos valores se puede resolver 3.53 y 3.55 para obtener $\bar{x}(\cdot)$ y $\bar{\lambda}(\cdot)$; un nuevo control u se puede obtener entonces utilizando - 3.56. Con esto queda descrito un proceso iterativa con el que se puede intentar obtener la solución óptima del problema. Debemos notar que por 3.59 $\bar{X}_i(0)$ determina el signo de $X_i(\cdot)$ para toda i , y a su vez estas determinan si $X_i(\cdot)$ es positiva o negativa, por lo que es necesario que $X_1(0) > 0$ para que $X_i(0) > 0 \forall i$. Como $\phi(u) > 0$, $X_1(0)$ será positivo si

$$\phi(u) > \frac{\delta}{\beta}$$

De 3.60 es claro que ϕ alcanza su máximo en $u=0$. Por

lo tanto, para el problema que nos ocupa, será necesario que

Por último, para finalizar, me gustaría mencionar una cuestión de gran importancia. Si bien es cierto que es casi imposible determinar una estrategia de explotación óptima que sea ejecutable en la realidad, debido a muchos factores, como pueden ser por un lado los inherentes al modelo propiamente dicho, ya que hay una gran dificultad en estimar los parámetros involucrados en el modelo, así como por otro lado, la dificultad de aplicar a cada una de las clases de edad el esfuerzo adecuado para producir la mortalidad sugerida por el modelo (en la práctica, esto implicaría la necesidad de tener separadas las cohortes o de desarrollar artes selectivas por clase de edad).

Sin embargo, el modelo puede ser usado para comparar sus predicciones sobre la evolución del recurso, con su desarrollo real, y en base a esto llegar a una mejor comprensión de la pesquería en estudio. Por otro lado, siempre queda la alternativa de implementar una simulación del problema en una computadora, con el fin de tener una idea de las posibles alternativas respecto a esta situación.

NOTAS AL CAPITULO TERCERO

[1] Para el análisis de poblaciones, conviene expresar el crecimiento de los peces en forma de una expresión matemática. El requisito básico es obtener una expresión que dé el tamaño (ya sea en longitud o en peso) del organismo a una edad determinada cualquiera.

El modelo más usado en el crecimiento de peces es el de L.-V. Bertalanffy. El considera a un organismo análogo a un sistema químico en reacción, obedeciendo a leyes de acción de masas y a los procesos fisiológicos que determinan la masa corporal de un organismo.

Existen distintos caminos para deducir el modelo, utilizaremos aquí las siguientes hipótesis (ver por ejemplo; Pulido J. (1984));

H1. El aumento en peso por unidad de tiempo se debe al ritmo de anabolismo y al de catabolismo, es favorable al aumento el primero y desfavorable el segundo.

H2. El ritmo de anabolismo puede ser de tres tipos;

a) Proporcional a la superficie.

b) Proporcional al peso.

c) Proporcional a una cantidad intermedia al peso y a la superficie.

H3. El ritmo de catabolismo es proporcional al peso.

De la hipótesis H1 obtenemos que:

$$\frac{dW}{dt} = \text{Ritmo de anabolismo} - \text{Ritmo de catabolismo}$$

o, en términos de energía, si denotamos por A a la energía obtenida (anabolismo) y por C la que se desperdicia (catabolismo), podríamos -

representar la expresión anterior por: $\frac{dW}{dt} = A - C$

Si suponemos, además, que las relaciones entre las variables; W (peso),

S (superficie) y L (longitud) son potenciales, es decir:

$$W = a_1 L^{b_1} ; \quad S = a_2 L^{b_2} ; \quad W = a_3 S^{b_3}$$

entonces, la expresión (*) puede ser reescrita como:

$$\frac{dW}{dt} = \eta W^m - KW^n \quad (**)$$

sujeta a la condición inicial $W(0) = W_0$. Esta ecuación diferencial es de las llamadas de Bernoulli, cuya solución para $n=1$ es:

$$W = \left\{ \eta/k \left[\eta/k - W_0^{1-m} \right] e^{-(1-m)kt} \right\}^{\frac{1}{1-m}}$$

En el caso en que $n=1$ y $m=2/3$ la expresión anterior puede reducirse a otra del tipo:

$$\frac{dL}{dt} = K(L_\infty - L) \quad (***)$$

donde L_∞ es el tamaño máximo que puede alcanzar el organismo, y K es una constante que está relacionada con las constantes metabólicas del modelo (**). Si se resuelve (***) con la condición $L(0) = L_0$, se obtiene el modelo de L.V. Bertalanffy:

$$L(t) = L_\infty - (L_\infty - L_0) e^{-Kt} \quad (***)$$

[2] Otra expresión usada es la que se obtiene al resolver la ecuación (***) con la condición inicial $L(t_0) = 0$, obteniéndose:

$$L(t) = L_\infty (1 - e^{-K(t-t_0)})$$

A la constante t_0 se le llama la "edad teórica a la que el organismo tiene longitud cero". Es evidente que ésta última definición no tiene un significado biológico claro, sin embargo, para el manejo del modelo la última expresión es más útil.

[3] En la práctica, es muy difícil calcular el valor de R , por lo que se acostumbra trabajar con una nueva variable Y/R que es comunmente llamada RENDIMIENTO POR RECLUTA (lo que es equivalente a considerar a R como 1. De cualquier manera, la pareja (u, t_c) que maximiza a Y/R , maximizará a Y y en ambos casos el análisis se hace fijando una de las variables (u ó t_c) y calculando la restante.

[4] La notación $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$, significa el PRODUCTO INTERNO de dos vectores, es decir; si $\bar{a} = (a_i)$ y $\bar{b} = (b_i)$

entonces $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

[5] Las ecuaciones de Euler:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

para una funcional del tipo:

$$J(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_1}^{x_2} F(t, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dt \quad (a)$$

tienen la forma; $F_{y_k} - \frac{d}{dt} F_{y_k'} = 0$ ($k=1, \dots, n$). En el caso en que el determinante:

$$\begin{vmatrix} F_{y_1 y_1'} & F_{y_1 y_2'} & \dots & F_{y_1 y_n'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{y_n y_1'} & F_{y_n y_2'} & \dots & F_{y_n y_n'} \end{vmatrix} \neq 0$$

se puede escribir como:

$$F_{y_k'} = \lambda_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (b)$$

De las ecuaciones (b) se puede expresar a y_k' en términos de $t, y_1, y_2,$

$\dots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ como: $y_k' = \varphi(t, y_1, y_2, \dots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

La función H de las variables; $t, y_1, y_2, \dots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ definida mediante la igualdad:

$$H = \left[-F(t, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') + \sum_{i=1}^n y_i' F_{y_i'}(t, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') \right] \Big|_{y_i' = \varphi_i}$$

se denomina HAMILTONIANO DE LA FUNCIONAL (a). El hamiltoniano satisfice las relaciones:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = \frac{d}{dt} y_i \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{d\lambda_i}{dt} \quad \text{para} \quad i=1, \dots, n \quad (c)$$

Se dice que las ecuaciones (c) son el sistema canónico ó - hamiltoniano de las ecuaciones de Euler; las variables $y_1, y_2, \dots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ llevan el nombre de VARIABLES CANONICAS.

Para la funcional de nuestro interés, 3.42, tenemos que sí;

$$X_{n+1}(t) = \int_0^t F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n') dt$$

donde: $F(\cdot) = -u(t) \sum_{i=r+1}^n w_i x_i$, $F_{x_i'} = \lambda_i$, $x_i' = \varphi_i$
 $(x_i' = -\alpha_i x_i \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq r \quad \text{y} \quad x_i' = -(\alpha_i - u) x_i \quad \text{para} \quad i \geq r+1)$

entonces:

$$H = \left[-F + \sum_{i=1}^n x_i' F_{x_i'} \right] \Big|_{x_i' = \varphi_i}$$

toma la forma:

$$H = \left[u(t) \sum_{i=r+1}^n w_i x_i + \sum_{i=1}^n x_i' \lambda_i \right] \Big|_{x_i' = \varphi_i}$$

reagrupando términos y simplificando, obtenemos:

$$H = \left[u(t) \sum_{i=1}^n w_i x_i + \sum_{i=r+1}^n -(\alpha_i + u) x_i \lambda_i + \sum_{i=1}^r -\alpha_i x_i \lambda_i \right]$$

$$H = u(t) \sum_{i=r+1}^n (w_i(t) - \lambda_i) x_i(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i x_i$$

que es lo que se afirmaba.

[6] Enunciaremos aquí, sin demostración, dicho principio.

Si estudiamos un sistema que se rige por la ecuación

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t))$$

donde

a) el tiempo, t , varía en $[0, 1]$;

b) la FUNCIÓN DE CONTROL, $u(t)$, es una función de $[0, 1]$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (Ω compacto), continua a trozos;

c) se supone que f es una función de $(t, \xi, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \Omega$ a \mathbb{R}^n que satisface lo siguiente. Existe un conjunto finito $\{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ de puntos de $[0, 1]$ con $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$

y una familia de funciones f_1, f_2, \dots, f_k con cada f_i definida en $[t_{i-1}, t_i] \times \mathbb{R}^n \times \Omega$ con valores en \mathbb{R}^n tal que las primeras y segundas respecto de ξ son continuas en $[t_{i-1}, t_i] \times \mathbb{R}^n \times \Omega$ respecto de (t, ξ, v) . La función f coincide con f_i en $(t_{i-1}, t_i) \times \mathbb{R}^n \times \Omega$ y con f_j , o bien con f_{i+1} , en $\{t_j\} \times \mathbb{R}^n \times \Omega$;

d) el VECTOR DE ESTADO, $x(t)$, es una función de $[0, 1]$ a \mathbb{R}^n , continua en $[0, 1]$ y con derivada continua a trozos en $[0, 1] - \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$.

El conjunto Ω se denomina CONJUNTO DE RESTRICCIONES del control, y la familia \mathcal{U} de todas las funciones de $[0, 1]$ a Ω continuas a trozos se denomina FAMILIA DE CONTROLES ADMISIBLES. Para $u \in \mathcal{U}$, designaremos por $\mathcal{C}(u)$ el abierto de $(0, 1)$ que resulta quitándole los puntos de discontinuidad de u y los de $f(t, \xi, v)$ con respecto a t . Si, además, suponemos que existe $M > 0$ tal que;

$$|f(t, \xi, v)| \leq M(1 + |\xi|) \quad \text{para todo } (t, \xi, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \Omega$$

se puede asegurar que existe solución única $x(t)$ continua y con una -

derivada continua a trozos en $[0, 1]$ del problema;

$$(P) \quad \begin{cases} \dot{x}(t; u) = f(t, x(t; u), u(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

La función $x(t; u)$ se denomina TRAYECTORIA CORRESPONDIENTE AL CONTROL u . Si H denota al Hamiltoniano, el PRINCIPIO DEL MAXIMO DE PONTRYAGIN se puede enunciar del siguiente modo:

Si u^* es un control óptimo, existe una función $\lambda(t)$ de $[0, 1]$ a \mathbb{R}^n continua en $[0, 1]$ y con derivada continua a trozos en $C(u^*)$ y no idénticamente nula tal que:

$$H(t, x(t; u^*), u^*(t), \lambda(t)) \geq H(t, x(t; u^*), v, \lambda(t))$$

para cada $t \in C(u^*)$ y cada $v \in \Omega$.

$$\dot{\lambda}(t) = -\nabla H(t, x(t; u^*), u^*(t), \lambda(t))$$

para cada $t \in C(u^*)$.

En otras palabras, las condiciones de optimización impuestas implican para la trayectoria óptima $x^*(t)$, si existe, que ha de haber un vector $\eta(T^*)$ tal que $(x^*(T^*), \eta(T^*))$ es el máximo de todos los números $(x^*(T^*), \eta(T^*))$ obtenidos al hacer a X recorrer todas las trayectorias posibles bajo la acción de los diferentes controles.

BIBLIOGRAFIA

Beddington J.R., R.M. May. 1977. *Harvesting Natural Populations in a Randomly Fluctuating Environment*. Science, Vol. 197, pp. 463-465.

Bertalanffy L.V., 1957. *Quantitative laws in metabolism and growth*. The Quaterly Review of Biology, Vol. 32, N° 3.

Beverton R.J.M., S.J. Holt, 1957. *On the dynamics of exploited fish populations*. Fish. Invest. Minist. Agric. Fish Food. G.B. (19):533pp.

Clark C.W., 1976. *Mathematical Bioeconomics: The optimal management of renewable resources*. Wiley, New York.

Conrad Jon M., 1982. *Lectures on Bioeconomics and the management of renewable resources*. Lecture Notes of Autumn Course of Mathematical Ecology, Roma, Italia.

Falconi M., J. Pulido, 1985. *Complejidad en sistemas dinámicos*. Seminario Ex-Mor, vínculos matemáticos N°1, Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, U.N.A.M.

Fleming W., R. Rischel. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer Verlag, New York.

Fomin S.V., I.M. Gelfand, 1963. *Calculus of variations*. Prentice-Hall New Jersey, U.S.A.

Fox W.W. Jr., *An exponential surplus-yield model for optimizing exploited fish populations*. Bureau of Commercial Fisheries, Miami, Flo. Contribution N° 123.

Gulland J.A., 1971. *Manual de métodos para la evaluación de las poblaciones de peces*. Editorial Acribia por la FAO, Zaragoza, España.

Guzmán Miguel de, 1975. *Ecuaciones diferenciales ordinarias, Teoría de estabilidad y control*. Ed. Alhambra, España.

- Hernandez L.O., 1981. *Procesos estocásticos: Introducción a la teoría de colas*. 2º Coloquio del C.I.E.A., I.P.N., México.
- Idyll C.P., *La crisis de la anchoveta peruana*. Ed. Blume, Madrid, 1973
- Keyfitz N., 1977, *Introduction to the mathematics of population*, - Addison Wesley, New York.
- Krasnov M.L., G.I. Makarenko, A.I. Kiselev. *Cálculo Variacional*. Ed. MIR, Moscú, 1976.
- Ludwig D., *Stochastic population Theories*. Lecture notes in Biomathematics, Vol. 3, Springer Verlag. New York.
- May R.M., 1975. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*. Princeton Univ. Press. Princeton New Jersey.
- Maynard Smith., *Models in Ecology*. Cambridge University Press, London, 1973.
- Panayotou, T., 1983. *Ordenación para las pesquerías en pequeña escala Aspectos económicos y sociales*. FAO, Doc. Tec. Pesca (228).
- Pielou, E.C. 1969. *An introduction to Mathematical Ecology*. Wiley Interscience, New York.
- Pulido, J. et al. 1984. *Modelo de crecimiento; Para organismos que -- guardan proporciones alométricas*. Rev. Ciencias del Mar, Nº 6, pp.31-36., Sinaloa, México.
- Quirk y Ruppert. 1965. *Qualitative economics and stability of equilibrium*. Rev. Econ. Studies 32, pp. 311-326.
- Ricker WE., 1975. *Computation and interpretation of Biological statistics of Fish Populations*. Bull. Fish. Res. Board Canada, Nº 191.
- Rudin W., 1977. *Principios de análisis matemático*. Mc Graw Hill, México, 278 pp.

Shaefer, M.B. 1957. *A study of the dynamics of the fishery for yellowfin tuna in the Eastern Tropical Pacific Ocean.* Bull. Inter-Am. Trop. Tuna. Comm, (2)(6): 247-285

Troadec, J.P. 1983. *Introducción a la ordenación pesquera: su importancia, dificultades y métodos principales.* FAO, Doc. Téc. PESCA (224).