2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES PERIODICOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

ORALIA SOCORRO PEÑA GARCIA

MEXICO, D. F. 1986

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

P R E S E N T A C I O N

En este trabajo se pretende sistematizar mínimamente la información respecto al estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes reales y periódicos.

El caso general de este tipo de ecuaciones se encuentra representado por la llamada ecuación de Hill, la cual se originó en las investigaciones realizadas por G.W. Hill en 1886 acerca de las variaciones ocurridas en la órbita lunar producidas por la atracción gravitacional del sol.

Las ecuaciones de Hill aparecen con cierta frecuencia en áreas de la física y la ingeniería actuales, en los campos de la mecánica, la astronomía, circuitos eléctricos, conductividad eléctrica en metales y en la teoría del ciclotrón; también en problemas como el de la vibración de una membrana elíptica (problema original de Mathieu) la difracción de la luz alrededor de un cilindro elíptico, las rotaciones moleculares en un cristal, etc.

Para los propósitos de este trabajo nos limitaremos a presentar la información necesaria más adecuada para el análisis de las principales características y propiedades de este tipo de ecuaciones, en particular la periodicidad y la simetría en las soluciones de las mismas.

En el capítulo I se plantean las generalidades de la teoría de las ecuaciones diferenciales, incluyendo la solución general de la ecuación de primer orden. En el capítulo II se estudian las ecuaciones-diferenciales de segundo orden con coeficientes variables, tanto la solución general como la teoría de Sturm-Liouville y los teoremas - de oscilación y comparación de soluciones.

En el capítulo III se consideran las ecuaciones diferenciales auto-adjuntas, se caracterizan sus propiedades y se incluye un análisis-de la matriz-solución resultante desde el punto de vista de las matrices de Pauli.

Finalmente, el capítulo IV se dedica al estudio de las ecuaciones - diferenciales lineales de segundo orden y con coeficientes reales y priódicos, se definen las características de la ecuación de Hill, y se establecen las condiciones bajo las cuales esta ecuación tiene - soluciones periódicas (Teorema de Floquet), se analiza la simetría-en las ecuaciones de Hill y su matriz solución asociada en el caso-de periodicidad en el potencial asociado a la ecuación.

Se incluye un apéndice donde el anális de la matriz solución obtenida en el capitulo III es complementado de acuerdo a los posibles valores de las raíces características obtenidas.

I GENERALIDADES DE LA TEORIA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1.1 CONCEPTOS BASICOS

Una ecuación diferencial es una relación de igualdad que involucra una función desconocida (variable dependiente) y una o más de sus derivadas.

Cuando la función considerada depende de una sola variable independiente, entonces la relación se conoce como una ecuación diferencial ordinaria, la cual se escribe generalmente como:

$$F(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (1.1)$$

Donde x es la variable independiente, y la variable dependiente, y en general

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} \qquad \text{con} \quad y^{(0)} \equiv y(x)$$

Cuando la función depende de dos o más variables independientes, entonces la relación se conoce como una ecuación diferencial parcial, sin embargo en este trabajo únicamente se consideran ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma dada en la ecuación (1.1)

El orden de una ecuación diferencial es aquel que corresponde a la máxima derivada involucrada en ella, de tal manera que en la ecuación (1.1) se tiene una ecuación diferencial de orden n.

Si se tiene el caso, como normalmente ocurre, que únicamente aparezcan potencias enteras en la función desconocida y en sus derivadas, entonces la potencia del término correspondiente a la máxima derivada se conoce como el grado de la ecuación diferencial.

La ecuación (1.1) se dice homogénea cuando todo término diferente de cero de ella, involucra a la función desconocida y/o a sus derivadas, en caso contrario es decir un término que es función de x pero es también independiente de $y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}$

se tendrá una ecuación no homogénea, la cual generalmente se escribe con el término independiente al lado derecho.

Otra característica muy importante de clasificación desde el punto de vista de la solución de una ecuación diferencial está dada por el llamado criterio de linealidad que definiremos a continuación y que formalizaremos en el capítulo siguiente:

Si en la ecuación (1.1) la dependencia de F sobre $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ es lineal, entonces la ecuación resultante se conoce como la ecuación diferencial lineal de orden n, la cual se representa generalmente como:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x)\, y^{(j)}(x) = g(x) \qquad \cdots\cdots\cdots (1.2)$$

o bien:

$$a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = g(x)$$

donde las $a_j(x)$ son coeficientes variables específicos y $g(x)$ es el término no homogéneo de la ecuación (1.1)

Si comparamos las ecuaciones (1.1) y (1.2) podemos observar que para las ecuaciones lineales es necesario que F, la cual se considera una función de las variables $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$; tenga una representación multivariada en series de potencias conteniendo únicamente los términos de primer grado en cada una de las variables.

Las ecuaciones diferenciales que no pueden expresarse como la ecuación (1.2) son por definición ecuaciones no lineales.

Si todo término de una ecuación homogénea se anula cuando $y(x) = 0$ entonces una solución de la ecuación es la solución trivial $y(x) \equiv 0$; dos soluciones que difieren entre sí por una solución trivial se dice que son idénticas, el problema radica entonces en encontrar soluciones-no triviales.

Debido a que geométricamente una ecuación diferencial ordinaria como la ecuación (1.1) es simplemente una relación entre la posición y, - la pendiente y', la curvatura y'',..., de una curva a través de un - punto x, entónces puede haber muchas curvas solución que satisfagan- una ecuación dada.

Sin embargo algunas veces puede encontrarse alguna fórmula lógica de la cual puede darse un conjunto infinito de curvas integrales (es decir, de curvas solución) asignando valorës diferentes a un conjunto- de constantes cuyo número es el mismo que el orden de la ecuación diferencial.

Veamos un ejemplo :

La ecuación diferencial no lineal de segundo orden *

$$(y'')^2 - xy'' + y' = 0$$

Admite como solución cualquier función de la forma:

$$y(x) = c_1 x^2 - 4c_1 x + c_2 \,, \quad \text{con } c_1 \text{ y } c_2 \text{ ctes. arbitrarias}$$

Nótese que y es una función no únicamente de x sino también de c_1 y c_2 y que la dependencia de x con y, c_1, c_2 es contínua; estas curvas solución constituyen una familia de parábolas con dos parámetros.

* en la Sección 2.1 se encuentra la solución general de una ecuación - diferencial y lineal de segundo orden

Dicha solución es una solución integral (o una integral general) de la ecuación diferencial. Mientras que una solución particular (o una integral particular) se elige de la solución general dando un conjunto definido de valores a las constantes arbitrarias C_1, C_2.

En algunos casos existen soluciones singulares o integrales singulares las cuales no pueden obtenerse asignando valores específicos a las constantes en la solución general. Por ejemplo en el caso de la ecuación (*) se tiene también la integral singular $y(x) = x^3/12$; aunque ésta no defina a una parábola.

En este trabajo no consideramos el estudio de las soluciones integrales, el cual ya ha sido atacado por varios autores.[12][17]

Un problema que surge a partir de la ecuación general es precisamente que es demasiado general, ya que incluye regularmente un número infinito de integrales aún cuando casi siempre se requiera una sola integral o un número finito de ellas.

Por lo que podemos expresar la ecuación (1.1) de la siguiente forma:

$$y^{(n)}(x) = g(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \quad \ldots (1.3)$$

Esta ecuación muestra cuán rápidamente cambia la n-ésima derivada de y (o sea $y^{(n)}(x)$), y además nos indica que se conoce $y^{(n)}$ cuando -- $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ están dadas; y únicamente en este caso.

Resulta evidente entonces que si se va a determinar una sola curva integral, deben añadirse estas derivadas de orden superior (o bien la información suplementaria equivalente) a la ecuación diferencial.

En un caso general pueden darse n ecuaciones lineales que involucran - la función y sus derivadas evaluadas en un solo punto, entonces la ecuación diferencial junto con estas condiciones iniciales constituyen un -

sistema denominado problema de valores iniciales.

Consideremos por ejemplo la ecuación diferencial de orden dos con coeficientes constantes dada por:

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

cuya solución general es: $y(x) = +c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$

Si deseamos encontrar la curva integral que pasa por el origen y que tiene pendiente unitaria ahí, entonces las condiciones iniciales son: $y(0)=0$; $y'(0)=1$ y la solución única de la ecuación diferencial anterior será: $y(x) = (e^{x} - e^{-3x})/4$

En situaciones en las cuales x es una variable espacial que se extiende entre dos fronteras, por ejemplo, entre $x = x_1$ y $x = x_2$ surge un problema de valores a la frontera. La información adicional y necesaria para asociar valores específicos a las constantes arbitrarias en la solución general está dada como condiciones a la frontera, con el ejemplo anterior la curva integral para la ecuación diferencial que pasa a través del origen y del punto (1,1) tiene como condiciones a la frontera $y(0) = 0$. $y(1) = 1$ de modo que la curva integral particular está dada por la solución: $y(x) = (e^{x} - e^{-3x})/(e - e^{-3})$.

Como en el caso de las ecuaciones diferenciales ya mencionado, tanto las condiciones iniciales, como las condiciones a la frontera se denominan homogéneas (no-homogéneas) si el lado derecho de sus respectivas ecuaciones es cero (distinto de cero)

Cuando se tiene una ecuación diferencial homogénea la cual incluye un parámetro simultáneamente con condiciones a la frontera homogéneas (es decir cuando y se anula en x_1 y en x_2), se tiene además una subclase del —

problema de valores a la frontera conocida como el problema de eigen - valores (también llamado de valores propios).

Consideremos por ejemplo la ecuación siguiente:

$$y'' + \lambda^2 y = 0$$

deseamos encontrar una solución válida en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ y que se anule en los puntos extremos.

La solución general de la ecuación es:

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen}(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x) \quad \ldots\ldots (*)$$

para que $y(o) = 0$ es claro que $C_2 = 0$

debido a que también $y(1) = 0$ es obvio que $c_1 \operatorname{sen}(\lambda) = 0$

Una solución de esta ecuación es $C_1 = 0$ pero esto nos daría la solución trivial de y. De mayor importancia es el hecho de que existe un conjunto discreto e infinito numerable de números λ_n los cuales reducirán la ecuación (*) a una identidad, estos números son los llamados eigen valores y están dados en este caso por la ecuación:

$$\lambda_n = n\pi \qquad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Donde el subíndice de λ se emplea para enfatizar su dependencia respecto al valor del entero n. Por lo que se concluye que únicamente cuando el parámetro que aparece en la ecuación original toma valores muy especiales, es posible alcanzar una solución no trivial.

La solución específica para cualquier λ_n adecuado , se llama una eigen función o eigen solución, la cual en este caso está dada por :

$$\lambda_n(x) = c_1 \operatorname{sen}(\lambda_n x) \quad \text{con} \quad \lambda_n = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

más adelante se analizará nuevamente este tipo de problemas.

(*) como ya dijimos la solución general de una ecuación de este tipo se encuentra en la sección 2.1.

1.2 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

En la mayoría de los problemas surgidos del intento de construir un modelo que describa alguna situación física se requiere una sola solución a una ecuación diferencial que sstisfaga condiciones iniciales o condiciones a la frontera específicas.

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden dada por:

$$(1+x)y' - 2y = -6$$ sujeta a una de las tres condiciones iniciales siguientes: (i) $y(-1)=0$; (ii) $y(0)=3$; (iii) $y(-1)=3$

Puesto que la solución general de la ecuación diferencial es: (*)

$$y(x) = C(1+x)^2 - 3x(x+2) \quad \text{con } C \text{ una constante}$$

Observemos inmediatamente que el problema (i) no tiene solución; el problema (ii) tiene únicamente una solución y finalmente el problema (iii) tiene un número infinito de soluciones dado por la integral general.

Este comportamiento diverso hace imperativo conocer cuándo un problema de valores iniciales dado, tiene al menos una solución (es decir existe la solución), y cuando tiene exactamente una solución (es decir, cuando la solución es única).

Estos dos problemas, el de la existencia y el de la unicidad de las soluciones han preocupado a los matemáticos desde hace mucho tiempo, en éste trabajo nos limitamos a enunciar los resultados más importantes y algunas referencias bibliográficas fundamentales para su estudio.

Aunque los teoremas pueden generalizarse a sistemas de ecuaciones o ecuaciones de orden superior, la idea general puede ilustrarse adecuadamente al considerar el problema simple de valores iniciales lineal y de primer orden, definido como:

$$y'(x) = g(x,y) \quad \text{con la condición} \quad y(x_0) = y_0 \quad \ldots.(1.4)$$

* en la sección 1.4 se obtiene la solución general de este tipo de ecuación.

El teorema de existencia

Si g (x, y) es contínua en todos los puntos del rectángulo cerrado $R = \{(x,y) \mid |x-x_0| \leq A \ ; |y-y_0| \leq B \}$ y es; por lo tanto, acotada, es decir: $|g(x,y)| \leq M$ en todo R donde A, B y M son constantes positivas.

Entonces el problema de valores iniciales (1.4) tiene al menos una solución válida en un intervalo al menos tan grande como:

$|x - x_0| \leq \Gamma$ donde la constante positiva Γ es la más pequeña entre A y B/M

Una vez establecida la existencia de la solución, el problema se reduce a determinar las condiciones bajo las cuales existe una solución única, la respuesta a este problema la ofrece el teorema siguiente:

Teorema de unicidad Si g (x, y) y la derivada parcial $\partial g/\partial y$ son ambas contínuas en el rectángulo cerrado $R = \{(x,y) \mid |x-x_0| \leq A, |y-y_0| \leq B\}$ y por lo tanto acotado, es decir $|g(x,y)| \leq M$ y $|\partial g/\partial y| \leq N$ en R siendo A, B, M y N constantes positivas, entonces el problema de valores iniciales (1.4) tiene una solución única válida en el intervalo $|x-x_0| \leq \Gamma$ donde la constante positiva Γ es la más pequeña entre A y (B/M).

En esencia, para la existencia de soluciones los teoremas requieren únicamente la continuidad de g (como una función de x y y) mientras que la unicidad requiere también la continuidad de la $\partial g/\partial y$

ésta es una condición de Lipschitz(*)

Consideremos por ejemplo la ecuación:

$$y'(x) = (y-a)^{1/2} \quad \text{con} \quad y(x_1) = a$$

En este caso la función $g = (y-a)^{1/2}$ es contínua para todo y, sin embargo la $\partial g/\partial y$ no existe en $y = a$, de modo que las soluciones existen, pero no necesariamente son únicas, de hecho dos soluciones que pasan a través del punto (x_1, a) son:

$$y(x) = a \quad y \quad y(x) = a + \frac{1}{4}(x-x_1)^2$$

1.3 SISTEMAS DE ECUACIONES

Cuando algunas funciones (consideradas aquí como variables dependientes) dependen de una sola variable independiente además de ser ellas mismas interdependientes, se obtiene lo que se llama un sistema simultáneo de ecuaciones diferenciales.

La mayoría de los conceptos básicos y muchos de los términos subsecuentes pueden extenderse para aplicarse a tales sistemas haciendo ciertas consideraciones adicionales.

Este tipo de extensión es relevante desde el punto de vista físico para, por ejemplo, estudiar problemas de la mecánica celeste en los cuales, la coordenada que aparece naturalmente es el tiempo, y donde el sistema de algunos o de muchos cuerpos están sujetos a la misma ley física (Segunda Ley de Newton). Dichos cuerpos interactúan entre sí a través de sus atracciones gravitacionales recíprocas.

* una función f(t) satisface una condición de Lipschitz de orden p en el punto $t = t_0$ si $|f(t) - f(t_0)| < k|t - t_0|^p$; donde k es cualquier constante, para toda t en alguna vecindad de t_0 y $p > 0$.[13]

Un ejemplo físico aún más elemental pero no menos importante está dado por las ecuaciones que describen el movimiento tridimensional de una sola partícula de masa m, el cual obedece la segunda ley de Newton del movimiento:

$$m x'' = X \quad ; \quad m y'' = Y \quad ; \quad m z'' = Z \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

donde x, y, z son funciones del tiempo t y son las coordenadas cartesianas de la partícula sujeta a las componentes de la fuerza X, Y, Z las cuales son funciones del tiempo t, de la posición x, y, z y de la velocidad x', y', z'. Utilizando la transformación:

$$t \to x \qquad x \to y_1 \qquad y \to y_2 \qquad z \to y_3$$

$$x' \to y_4 \qquad y' \to y_5 \qquad z' \to y_6$$

la ecuación (*) del movimiento tridimensional se reduce a un sistema de seis ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y simultáneas de primer orden, dado por

$$y_1' = y_4$$

$$y_2' = y_5$$

$$y_3' = y_6$$

$$y_4' = m^{-1} X (x, y_1, \ldots, y_6)$$

$$y_5' = m^{-1} Y (x, y_1, \ldots, y_6)$$

$$y_6' = m^{-1} Z (x, y_1, \ldots, y_6)$$

Cuando cada una de las variables dependientes $(y_1, y_2, \ldots, y_c)$ aparecen en cada ecuación, entonces ninguna de ellas puede resolverse independientemente de las otras, en este caso, se dice que el sistema es simultáneo y acoplado.

Los sistemas de ecuaciones también aparecen en la descripción paramétrica o implícita de una curva, en vez de considerar a y como una función de la coordenada cartesiana x puede ser adecuado pensar que tanto x como y son funciones de otra variable z. (digamos la longitud de ârco a lo-largo de la curva). En este caso la ecuación de primer orden simple:"

$y' = g(x, y)$ será equivalente al sistema de ecuaciones simultáneo:

$$\frac{dx}{dz} = h(x,y)$$

$$\frac{dy}{dz} = K(x,y)$$

donde $$\frac{K(x,y)}{h(x,y)} = g(x,y)$$

Los siguientes ejemplos son típicos del sistema general de n-ecuaciones-diferenciales ordinarias de primer orden dadas por

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad \ldots\ldots\ldots (1.5) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

Obsérvese que el número de ecuaciones coincide con el número de variables dependientes (si hubiera un número mayor o menor de ecuaciones que de variables dependientes, entonces el sistema se denomina sobreespecificado o subespecificado, respectivamente).

El sistema de ecuaciones (1.5) incluye un caso especial el llamado sistema independiente o no acoplado de ecuaciones, el cual ocurre cuando la función $f_j = f_j(x, y_j)$ el cual resulta ser mucho más sencillo de resolver aunque menos interesante desde el punto físico.

El problema de valores iniciales para el sistema (1.5) consiste en el propio sistema de ecuaciones y en las condiciones iniciales:

$$y_1(x_1) = a_1 \;\; ; \;\; y_2(x_1) = a_2 \; ; \; \ldots\ldots \; ; \; y_n(x_1) = a_n \quad \ldots\ldots \quad (1.6)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es un conjunto de constantes, en consecuencia, cada función en el sistema nos define una condición inicial.

Los teoremas de existencia y unicidad para el problema de valores iniciales son simples extensiones de los conceptos mencionados anteriormente. La continuidad de las funciones más la satisfacción de una condición de Lipschitz garantiza tanto la existencia como la unicidad (existe un único conjunto de funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que satisface tanto el sistema de ecuaciones como las condiciones iniciales), como ya se dijo, esto ocurre en el mismo tipo de intervalo.[5]

El problema de valores iniciales para el sistema de ecuaciones de primer orden dado en (1.5) es también equivalente al problema de valores iniciales para la ecuación general de orden n dadas en la ecuación (1.3). Esto lo podemos ver si establecemos las siguientes definiciones:

$$y_1 = y \quad ; \quad y_2 = y' \; ; \; \ldots\ldots \; ; \quad y_n = y^{(n-1)}$$

Entonces el sistema equivalente a (1.3) es:

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$\vdots$$
$$y_{(n-1)}' = y_n$$
$$y_n' = G(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

El cual es obviamente de la forma dada en el sistema (1.5).

Recordemos que bajo condiciones adecuadas el problema de valores iniciales"para el sistema de n ecuaciones de primer orden tiene una solución-única, la equivalencia anterior nos muestra que el problema de valores - iniciales para una sola ecuación de orden n admite una solución única - bajo las mismas condiciones.

La ecuación diferencial está dada entonces por (1.3) y las condiciones - iniciales se obtienen de (1.6) y de las definiciones anteriores y así obtenemos:

$$y(x_1) = a_1 \;;\quad y'(x_1) = a_2 \;; \ldots \;; y^{(n-1)}(x_1) = a_n$$

Debe recordarse que las condiciones iniciales anteriores especifican a - la función y sus primeras (n-1) derivadas en $x = x_1$ mientras que la ecuación (1.3) y sus derivadas sucesivas nos dan por sustitución las derivadas de orden n y superiores de la función $y(x)$ en $x = x_1$

En consecuencia, bajo restricciones de continuidad adecuadas la función y tiene una expansión única en serie de Taylor alrededor de $x = x_1$ y este desarrollo es único pues la única condición para que esto ocurra es la sola existencia de las derivadas de todos los órdenes en $x = x_1$

1.4 ECUACIONES LINEALES ORDINARIAS CON COEFICIENTES VARIABLES

Empezaremos el estudio de las ecuaciones diferenciales analizando las más simples de todas ellas; las ecuaciones lineales. Debido a su simplicidad es posible comprender la teoría sistemática que nos permita entender al menos los aspectos cualitativos de cualquier ecuación diferencial aún cuando en ciertos casos del análisis no sea posible construir la ecuación general.

Gran parte del análisis clínico puede verse como un desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables; de hecho la terminología y las ideas básicas que ocurren naturalmente en las ecuaciones lineales son llevadas también al análisis de ecuaciones no lineales en la medida de que esto sea posible. La idea general de este trabajo es analizar en particular una ecuación lineal diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes periódicos, sin embargo empezaremos considerando las de primer orden con coeficientes, en principio, variables.

EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Empezaremos el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden analizando el principio de superposición.

El hecho de que la solución general de algunos tipos importantes de ecuaciones diferenciales lineales pueda escribirse explicitamente es debido en gran parte a este principio.

El principio de superposición enunciado brevemente establece que la solución de las ecuaciones diferenciales lineales comparten una propiedad de grupo que consiste en que ellas pueden sumarse linealmente entre sí y que el elemento resultante es también un elemento del grupo de soluciones de la ecuación planteada.

Supongamos que $y=\mu(x)$; $y=v(x)$ son dos soluciones distintas de la ecuación diferencial lineal ordinaria no homogénea general de orden n, dada en (1.2), entonces:

$$\left.\begin{array}{l} a_0(x)\mu(x)+a_1(x)\mu'(x)+\cdots+a_{n-1}(x)\mu^{(n-1)}(x) = g(x) \\ a_0(x)v(x)+a_1(x)v'(x)+\cdots+a_{n-1}(x)v^{(n-1)}(x) = g(x) \end{array}\right\} \cdots\cdots (1.7)$$

Podemos verificar por sustitución directa que la suma ponderada de μ y v, por ejemplo $W(x)=(\alpha+\beta)^{-1}[\alpha\mu(x)+\beta v(x)]$ donde α y β son constantes y diferentes de cero, satisface la misma ecuación para W (x) es decir,

$$a_0(x)W(x)+a_1(x)W'(x)+\cdots+a_{n-1}(x)W^{(n-1)}(x)+a_n(x)W^{(n)}(x)=g(x) \quad (1.8)$$

Inversamente si $y=\mu(x)$ y $y=v(x)$ son soluciones que satisfacen la ecuación (1.2) con $g=g_1$ y $g=g_2$ respectivamente, entonces $(\mu+v)$ satisface la misma ecuación con $g=g_1+g_2$.

Tenemos también que cualesquiera de dos soluciones de una ecuación lineal homogénea pueden multiplicarse por constantes arbitrarias y después sumarse y el resultado es también una solución.

En consecuencia se pueden superponer soluciones elementales para construir soluciones más complejas.

Podemos decir que el principio de superposición es el eslabón más fuerte que une a todas las ecuaciones diferenciales lineales y es una poderosa herramienta de análisis, aunque su aplicación sea excepcionalmente posible en el caso de ecuaciones no lineales.

LA SOLUCION GENERAL

La ecuación diferencial lineal ordinaria no homogénea de primer orden está dada en general por:

$$a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=g(x) \cdots\cdots (1.9)$$

donde a_1 y a_0 son coeficientes variables de x y $g(x)$ es el término no homogéneo de la ecuación.

Consideremos primero el caso homogéneo conocido como <u>ecuación reducida</u>:

$$a_1(x)\, z'(x) + a_0(x)\, z(x) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (1.10)$$

Podemos escribir la ecuación anterior en la forma

$$\frac{z'(x)}{z(x)} = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} \quad \forall x \cdot\!\!\text{ } z(x)\neq 0 \text{ y } a_1(x)\neq 0$$

usando ahora el hecho de que

$\int^{x} I(\xi)\, d(\xi)$ denota cualquier función cuya derivada es I (x), podemos expresar la solución de (1.10) como:

$$z(x) = D\, e^{-b(x)} = D \exp\left[-\int^{x} \frac{a_0(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right] \cdots\cdots (1.11)$$

donde D es una constante de integración arbitraria.

Las ecuaciones lineales siempre admiten soluciones de tipo exponencial; debido a que (1.11) es una solución que involucra una sola constante arbitraria y es la solución general de la ecuación reducida se conoce también como solución complementaria de la ecuación no homogénea, el punto importante aquí es que se requiere sólo una función, la exponencial, para describir cualquier solución de la ecuación diferencial homogénea lineal de primer orden.

El factor $e^{-b(x)}$ de la ecuación (1.11) tiene otra interpretación que permite utilizarla para generar una solución de la ecuación no homogénea. De hecho su recíproco $e^{b(x)}$, conocido como un factor integrante tiene una estructura tal que cuando la ecuación homogénea se multiplica por él se obtiene una cantidad exactamente integrable.

Debido a que las singularidades potenciales donde $a_1(x)=0$ han sido excluidas en este análisis, podemos dividir la ecuación (1.10) entre a_1,-

multiplicamos lugo (1.10) por el factor integrante y obtenemos:

$$e^{b(x)}\left[z'(x)+b'(x)\,z(x)\right]=\left[e^{b(x)}z(x)\right]'=0$$

la cual es por supuesto integrable y nuevamente nos conduce a la ecuación (1.11) que es la solución de la ecuación homogénea.

La solución general de la ecuación no homogénea la obtendremos aplicando este procedimiento a la ecuación (1.9), suponemos nuevamente que $a_1(x)\neq 0$ y dividimos la ecuación entre $a_1(x)$ multiplicando por el factor integrante, de esta manera obtenemos:

$$\left[e^{b(x)}y(x)\right]'=e^{b(x)}\,g(x)/a_1(x)$$

integrando con respecto a x obtenemos :

$$e^{b(x)}\,y(x)=\int^{x}\left[e^{b(\xi)}g(\xi)/a_1(\xi)\right]d\xi+C$$

donde C es una constante arbitraria.

De modo que la solución general (1.9) puede escribirse en términos de integrales, se dice también que el problema ha sido reducido a cuadraturas y la solución general de la ecuación (1.9) no homogénea es entonces:

$$y(x)=C\,e^{-b(x)}+\int^{x}\frac{g(\xi)\,e^{b(\xi)-b(x)}}{a_1(\xi)}\,d(\xi) \qquad \ldots\ldots (1.12)$$

donde $b(x)=\int^{x}\left[a_0(\xi)/a_1(\xi)\right]d\xi$

Esta solución es válida sobre cualquier intervalo en el cual $a_1(x)\neq 0$ debido a que cualquier par de valores permitidos de la función $b(x)$ difieren entre sí solo por una constante $(\ln D)$, cualquiera de las elecciones permitidas para $b(x)$ en el segundo término de la derecha de la ecuación (1.12) será posible puesto que D se cancela. En el primer tér mino la suma de $\ln D$ y algún valor permitido de $b(x)$ únicamente - cambia a C, en consecuencia solo aparece una constante arbitraria en la ecuación (1.12) y cualquier solución de la ecuación no homogénea (1.9)- puede encontrarse a partir de esta ecuación.

La solución dada en (1.12) se explica diciendo que la solución general de cualquier ecuación diferencial lineal de primer orden es la suma de la solución general de la ecuación reducida (solución complementaria) y cualquier solución particular de la ecuación no homogénea (conocida también - como integral particular).

Esto enfatiza el hecho de como una solución $z(x)$ (solución complementaria) se utilice para construir otra (solución general).

Veamos ahora como resolvemos un problema con valores iniciales para una - ecuación diferencial lineal de primer orden, en el cual la solución toma- un valor inicial $y(x_1)=y_1$ en este caso las integrantes que aparecen en la ecuación (1.12) se convierten en integrales definidas y el resultado — que se obtiene es:

$$y(x) = y_1 e^{-c(x)} + \int_{x_1}^{x} \frac{g(\xi)}{a_1(\xi)} e^{c(\xi)-c(x)} d\xi \quad \cdots (1.13)$$

$$\text{donde:} \quad c(\xi) = \int_{x_1}^{\xi} \frac{a_0(\eta)}{a_1(\eta)} d\eta$$

La solución a un problema con valores iniciales existe y es única sobre — cualquier intervalo para el cual $a_0(x)/a_1(x)$ y $g(x)$ son funciones contínuas en dicho intervalo. Esto significa que las posibles singularidades de la función solución (es decir los puntos en los cuales ésta tiende a infinito o no existe) están asociadas con (o pueden encontrarse a partir de) las singularidades de los coeficientes y la función del término no homogéneo.

2.1 SOLUCION DE LA ECUACION GENERAL

La ecuacion diferencial lineal de orden n con coeficientes varia-- bles se define como:

$$a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = G(x) \quad \ldots\ldots(2.1)$$

Donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y G son todas funciones contínuas de x dentro -- del intervalo real $[a,b]$*; como en el caso de las ecuaciones linea les de primer orden suponemos que $a_n(x) \neq 0 \;\forall\; x \in [a,b]$ así que podemos dividir entre a_n obteniendo

$$b_0(x)y(x) + b_1(x)y'(x) + \cdots + y^{(n)}(x) = g(x) \quad \ldots\ldots(2.2)$$

donde $b_i(x) = \dfrac{a_i(x)}{a_n(x)}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ y $g(x) = \dfrac{G(x)}{a_n(x)}$ $\forall\, x \in [a,b]$.

Definimos ahora el operador diferencial $\mathcal{L}$ como :

$$\mathcal{L} \equiv b_0(x) + b_1(x)\frac{d}{dx} + \cdots + \frac{d^{(n)}}{dx} \quad \ldots\ldots(2.3)$$

entonces (3.2) se puede expresar como:

$$\mathcal{L}(y) = g(x) \quad \ldots\ldots(2.4)$$

Cuando en particular $g(x) \equiv 0$ sobre $[a,b]$ entonces (2.4) se conoce- como la ecuación diferencial lineal general homogénea, se segundo or den, si en cambio existe alguna $x_0 \in [a,b]$ tal que $g(x_0) \neq 0$ en- tonces $\mathcal{L}(y) = g(x)$ se denomina ecuación homogénea.

A la función $\mathcal{L}$ la interpretaremos como un operador que actúa sobre funciones ϕ las cuales poseen n-derivados en (a,b).

* estrictamente hablando el intervalo de definición es abierto sólo - al considerar un problema de valores iniciales, en el caso de tener un problema con valores a la frontera el intervalo es cuestión es - cerrado;[1] sin embargo, en este trabajo se precisará la naturaleza- del intervalo sólo si la situación así lo requiere.

Desde esta perspectiva el operador $\mathcal{L}$ actúa sobre ϕ y la transforma en una función $\mathcal{L}(\phi)$ definida sobre (a,b) y cuya regla de correspondencia es:

$$\mathcal{L}(\phi) = b_0(x)\phi(x) + b_1(x)\frac{d\phi}{dx} + \cdots + b_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}\phi}{dx^{n-1}} + \frac{d^n\phi}{dx^n}$$

En consecuencia, toda solución de (2.4) es en realidad una función ϕ definida sobre (a,b) con n derivadas en dicho intervalo y que, obviamente satisface la ecuación $\mathcal{L}(\phi) = g(x)$.

El operador diferencial $\mathcal{L}$ es un operador lineal, esto lo demostraremos en seguida.

Supongamos que las funciones y_1 y y_2 son soluciones de (2.2) entonces:

$$b_0(x)y_1(x) + b_1(x)y_1'(x) + \cdots + y_1^n(x) = g(x)$$

$$b_0(x)y_2(x) + b_1(x)y_2'(x) + \cdots + y_2^n(x) = g(x)$$

de donde, dados α, β números reales, ocurre que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)] &= b_0(x)[\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)] + \\ &\quad + b_1(x)\cdot\frac{d}{dx}[\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)] + \cdots \\ &\quad + \frac{d^n}{dx^n}[\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)] \\ &= \alpha[b_0(x)y_1(x) + b_1(x)y_1'(x) + \cdots + y_1^n(x)] + \\ &\quad + \beta[b_0(x)y_2(x) + b_1(x)y_2'(x) + \cdots + y_2^n(x)]\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\mathcal{L}[\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)] = \alpha\mathcal{L}[y_1(x)] + \beta\mathcal{L}\cdot[y_2(x)] \quad \ldots (2.5$$

Sin embargo en este trabajo nos limitaremos al estudio de las ecuaciones lineales con coeficientes variables de segundo orden, nuestro siguiente paso será entonces construir la solución general de dichas ecuaciones.

La forma general de una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden con coeficientes variables la podemos obtener como un caso particular de (2.2):

$$b_0(x)y(x)+b_1(x)y'(x)+y''(x)=g(x) \qquad \text{. . . . . (2.6)}$$

donde b_0 , b_1 y g son todas funciones contínuas de x en un intervalo $a \leq x \leq b$ (el cual puede ser abierto si 2.6 expresa un problema con valores iniciales $y(x_0)=x_1$, $y'(x_0)=x_2$ con x_1 y x_2 números reales arbitrarios y $a < x_0 < b$;

En este caso el operador diferencial $\mathcal{L}$ definido anteriormente se reduce a

$$\mathcal{L} \equiv b_0(x)+b_1(x)\frac{d}{dx}+\frac{d^2}{dx^2} \qquad \text{. . . . . (2.7)}$$

de modo que podemos expresar (2.6) como:

$$\mathcal{L}[y]=g(x) \qquad \text{. . . . . (2.8)}$$

y nuevamente si $g(x)$ es nula decimos que la ecuación diferencial - es homogénea (o reducida), en caso contrario se llama simplemente no-homogénea.

Como la ecuación (2.6) es lineal entonces se cumple el principio de-superposición ya mencionado y en consecuencia la estructura de la solución general es de la forma:

$$y(x)=A_1 Z_1(x)+A_2 Z_2(x)+y_1(x) \qquad \text{. . . . . (2.9)}$$

donde $Z_1(x)$ y $Z_2(x)$ son soluciones no-triviales de la ecuación - reducida (es decir homogénea), A_1 y A_2 son constantes cuyo valor depende de las condiciones a la frontera (o iniciales) específicas del problema; finalmente $y_1(x)$, una integral particular, es cualquier so lución de la ecuación no-homogénea.

Construiremos ahora la solución general de (2.8) encontrando primero $z_1(x)$ y $z_2(x)$, las soluciones de la ecuación reducida.

Solución de la Ecuación Homogénea

Supongamos que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son soluciones de (2.6) en $a \leq x \leq b$, con $g(x)=0$, entonces tendremos los siguientes resultados:

(a) El operador $\mathcal{L}$ es lineal

Es decir que dados los reales α y β :

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha \mathcal{L}[f_1(x)] + \beta \mathcal{L}[f_2(x)] \quad \ldots\ldots (2.10)$$

(b) Definición de Wronskiano* de f_1 y f_2 :

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x) \quad (2.11)$$

Teorema 1. Sean f_1, f_2 soluciones de (2.6) con $g(x)=0$ para $a \leq x \leq b$, si f_1, f_2 son linealmente dependientes entonces $W(f_1, f_2) = 0$

Demostración:

Como f_1 y f_2 son linealmente dependientes en $a \leq x \leq b$ existen dos números α_1 y α_2 (que no son ambos cero) tales que: $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \equiv 0$, para $a \leq x \leq b$, derivando esta identidad obtenemos $\alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2 f_2'(x) \equiv 0$, o sea el siguiente sistema de 2 ecuaciones lineales homogéneas para α_1 y α_2 :

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$$
$$\alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2 f_2'(x) = 0$$

* llamado así en honor al matemático polaco H. Wronsky (1775-1853).

puesto que no ambas α_1 y α_2 son cero el sistema anterior tiene solución no trivial para cualquier valor de x y por lo tanto el determinante del sistema, que es el wronskiano $W(f_1, f_2)$, es igual a cero en cada punto del intervalo $a \leq x \leq b$**.

Análogamente se puede demostrar que si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son ambas soluciones de la ecuación homogénea $\mathcal{L}[y]=0$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, entonces $W(f_1,f_2)\neq 0$ en todos los puntos de dicho intervalo, siempre y cuando f_1 y f_2 sean soluciones linealmente independientes.(8)

<u>Teorema 2</u>. Sean f_1 y f_2 soluciones de la ecuación (2.6) con $g_0(x)=0$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ y sea $x_0 \in [a,b]$, entonces:

$$W(f_1,f_2)(x) = W(f_1,f_2)(x_0)\, \exp.\left\{-\int_{x_0}^{x} b_1(\xi)\, d\xi\right\} \quad \ldots\ldots (2.12)$$

Demostración: Por definición $W(f_1,f_2)= f_1 f_2' - f_2 f_1'$, de donde $W'(f_1,f_2) = f_1 f_2'' + f_1' f_2' - f_2 f_1'' - f_1' f_2' = f_1 f_2'' - f_2 f_1''$. Y por hipótesis $\mathcal{L}(f_1) = 0$, $\mathcal{L}(f_2)=0$, es decir: $b_0(x) f_1(x)+b_1(x)f_1'(x)+f_1''(x)=0$ y $b_0(x) f_2(x)+b_1(x)f_2'(x)+f_2''(x)=0$ respectivamente, de donde obtenemos: $f_1''(x) = -b_1(x)f_1'(x)-b_0(x)f_1(x)$, $f_2''(x) = -b_1(x)f_2'(x)-b_0(x)f_2(x)$, sustituyendo esto adecuadamente en la expresión para $W'(f_1,f_2)$ obtendremos: $W'(f_1,f_2)=-b_1(x)[f_1 f_2' - f_2 f_1'] = -b_1(x)\, W(f_1,f_2)$, es decir llegamos a la ecuación diferencial lineal de primer orden: $W' + b_1(x)\, W = 0$ cuya solución, como ya vimos en la sección 1.4, está dada por la ecuación (1.11): $W(f_1,f_2)(x) = D\, \exp.\left\{-\int_{x_0}^{x} b_1(\xi)\, d\xi\right\}$.

Si ahora evaluamos este resultado en el punto $x=x_0$: $W_0 = W(f_1,f_2)(x_0)=D$ por lo tanto la solución general será de la forma buscada.

Una consecuencia de este teorema es que como la función exponencial es siempre positiva entonces dependiendo del valor de W_0, el wronskiano asociado a la ecuación homogénea (2.6) es siempre positivo, siempre negativo o siempre cero.

** Si adicionalmente se pide en el teorema que al menos una de las funciones (digamos $f_1(x)$) no se anule en el segmento $a\leq x \leq b$ entonces se puede demostrar el teorema en el otro sentido.

(c) Superposición de soluciones

Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (2.6) con $q(x)=0$ entonces la solución más general es de la forma:

$$y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.13)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Si la solución está además sujeta a las condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = y'_0$$

entonces tendremos el siguiente sistema de 2 ecuaciones lineales

$$c_1 f_1(x_0) + c_2 f_2(x_0) = y_0$$
$$c_1 f'_1(x_0) + c_2 f'_2(x_0) = y'_0$$

cuya solución por el método de Cramer es:[9]

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & f_2(x_0) \\ y'_0 & f'_2(x_0) \end{vmatrix}}{\Delta} \quad y \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} f_1(x_0) & y_0 \\ f'_1(x_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{con} \quad \Delta = \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f'_1(x_0) & f'_2(x_0) \end{vmatrix}$$

es decir: $$c_1 = \frac{W(y,f_2)(x_0)}{W(f_1,f_2)(x_0)} \quad ; \quad c_2 = \frac{W(f_1,y)(x_0)}{W(f_1,f_2)(x_0)}$$

por lo tanto la solución general de la ecuación de segundo orden homogénea es:

$$y(x) = \frac{W(y,f_2)(x_0)}{W(f_1,f_2)(x_0)} f_1(x) + \frac{W(f_1,y)(x_0)}{W(f_1,f_2)(x_0)} f_2(x) \quad . \quad . \quad . \quad (2.14)$$

<u>Solución de la ecuación no-homogénea</u>

Nuestro problema es ahora encontrar la solución de la ecuación (2.6) en el caso general cuando $q(x)\neq 0$.

Supongamos inicialmente que $\psi_p(x)$ es una solución particular de la ecuación (2.8): $\mathcal{L}(y) = q(x)$, sea ψ cualquier otra solución de ella, entonces por ser $\mathcal{L}$ un operador diferencial obtendremos que:

$$\mathcal{L}(\psi - \psi_p) = \mathcal{L}(\psi) - \mathcal{L}(\psi_p) = g(x) - g(x) = 0$$

Esto significa que $(\psi - \psi_p)$ es también una solución de la ecuación homogénea $\mathcal{L}(y) = 0$, pero como ya vimos cualquier solución de la homogénea se puede expresar como una combinación lineal de 2 soluciones f_1 y f_2 de la homogénea que sean linealmente independientes.

De modo que existen c_1 y c_2 constantes arbitrarias tales que:

$$\psi - \psi_p = c_1 f_1 + c_2 f_2$$

de donde, si ψ_p es una solución particular de la ecuación $\mathcal{L}(y) = g(x)$ entonces cualquier otra solución ψ de esta ecuación es de la forma:

$$\psi = \psi_p + c_1 f_1 + c_2 f_2 \qquad \text{. . . . . (2.15)}$$

De modo que la solución general de la ecuación no-homogénea se obtiene encontrando primero una solución particular ψ_p de (2.8), la ecuación no-homogénea. Una técnica especialmente efectiva para encontrar esta solución particular fue desarrollada por Lagrange, describiremos brevemente los resultados obtenidos al aplicar esta técnica.

El método de variación de parámetros.

Queremos encontrar ψ_p como una combinación lineal específica dada por:

$$\psi_p = \alpha(x) f_1(x) + \beta(x) f_2(x) \qquad \text{. . . . . (2.16)}$$

donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $\mathcal{L}(y) = 0$, y α, β son funciones de x en base a las cuales determinaremos la expresión definitiva de $\psi_p(x)$.

Imponemos ahora la condición:

$$\alpha'(x) f_1(x) + \beta'(x) f_2(x) = 0 \qquad \text{. . . . . (2.17)}$$

entonces ψ_p' tiene exactamente la misma forma que tendría si $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ fueran constantes, es decir que entonces:

$$\psi_p'(x) = \alpha(x) f_1'(x) + \beta(x) f_2'(x) \quad \ldots\ldots (2.18)$$

diferenciando otra vez obtenemos:

$$\psi_p''(x) = \alpha(x) f_1''(x) + \alpha'(x) f_1'(x) + \beta(x) f_2''(x) + \beta'(x) f_2'(x) \quad \ldots\ldots (2.19)$$

sustituyendo (2.16), (2.18) y (2.19) en la ecuación (2.6) obtenemos: *

$$b_0(\alpha f_1 + \beta f_2) + b_1(\alpha f_1' + \beta f_2') + \alpha f_1'' + \alpha' f_1' + \beta f_2'' + \beta' f_2' = g$$

asociando adecuadamente obtenemos:

$$\alpha(b_0 f_1 + b_1 f_1' + f_1'') + \beta(b_0 f_2 + b_1 f_2' + f_2'') + \alpha' f_1' + \beta' f_2' = g$$

Como por hipótesis f_1 y f_2 son soluciones de la ecuación homogénea - entonces $\mathcal{L}(f_1)=0$, $\mathcal{L}(f_2)=0$ y por lo tanto los primeros dos términos- encerrados entre corchetes son cero. Así que, además de (2.17), $\alpha'(x)$ y $\beta'(x)$ deben satisfacer también la ecuación:

$$\alpha'(x) f_1'(x) + \beta'(x) f_2'(x) = g(x) \quad \ldots\ldots (2.20)$$

tenemos entonces el siguiente sistema de dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \alpha'(x) f_1(x) + \beta'(x) f_2(x) &= 0 \\ \alpha'(x) f_1'(x) + \beta'(x) f_2'(x) &= g(x) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2.21$$

como $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son soluciones linealmente independientes entonces su wronskiano, $\Delta = W(f_1, f_2)$, es diferente de cero y en consecuencia la- solución del sistema (2.21) por el método de Cramer es:

$$\alpha'(x) = -g(x) f_2(x)/\Delta \quad ; \quad \beta'(x) = g(x) f_1(x)/\Delta \quad \ldots\ldots (2.2$$

* Suprimimos enseguida la obvia dependencia de x en todas las funciones involucradas por razones de claridad y espacio.

integrando estas expresiones obtenemos:

$$\alpha(x) = -\int^{x} \frac{g(\xi) f_2(\xi) d\xi}{W(f_1,f_2)(\xi)} \quad ; \quad \beta(x) = \int^{x} \frac{g(\xi) f_1(\xi) d\xi}{W(f_1,f_2)(\xi)} \quad \ldots\ldots (2.23)$$

Por lo tanto la solución particular de $\mathcal{L}(y)=g(x)$ se obtiene sustituyendo (2.23) en (2.15); podemos simplificar la expresión final de ψ_p definiendo $W_k(\xi)$ como el determinante que se obtiene a partir del wronskiano $W(f_1,f_2)$ sustituyendo en éste la k-ésima columna (f_k, f_k') por la columna (0,1) es decir:

$$W_1(\xi) = \begin{vmatrix} 0 & f_2 \\ 1 & f_2' \end{vmatrix} = -f_2 \quad ; \quad W_2(\xi) = \begin{vmatrix} f_1 & 0 \\ f_1' & 1 \end{vmatrix} = f_1$$

Utilizando estas expresiones la solución particular ψ_p dada por:

$$\psi_p = f_1(x)\left[-\int^{x} \frac{g(\xi) f_2(\xi) d\xi}{W(f_1,f_2)(\xi)}\right] + f_2(x)\left[\int^{x} \frac{g(\xi) f_1(\xi) d\xi}{W(f_1,f_2)(\xi)}\right]$$

se transforma en:

$$\psi_p = \sum_{k=1}^{2} f_k(x) \int^{x} \frac{g(\xi) W_k(\xi) d\xi}{W(f_1,f_2)(\xi)} \quad \ldots\ldots (2.24)$$

En base a este resultado concluimos que si $g(x)$ es contínua en $[a,b]$ y si f_1, f_2 forman una base para las soluciones de la ecuación homogénea $\mathcal{L}(y)=0$ entonces toda solución ψ de la ecuación no-homogénea $\mathcal{L}(y)=g(x)$ es de la forma dada en (2.15):

$$\psi = \psi_p + c_1 f_1 + c_2 f_2$$

donde ψ_p es una solución particular de $\mathcal{L}(y)=g(x)$ dada por (2.24), f_1 y f_2 son soluciones linealmente independientes de $\mathcal{L}(y)=0$ y c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

2.2 EL PROBLEMA DE EIGENVALORES

Nuestro interés es la solución de la ecuación diferencial definida en (2.4):

$$\mathcal{L}(y) = g(x)$$

donde $\mathcal{L}$ es un operador diferencial lineal de segundo orden y con -- coeficientes variables definido en (2.3) que actúa sobre la función - desconocida $y(x)$ y g es el término no-homogéneo.

Utilizaremos ahora la teoría espectral para analizar las propiedades- del operador $\mathcal{L}$ en términos de sus eigenvalores y sus eigenfuncio nes, de esta forma cualquiera de una amplia gama de funciones solución pueden representarse por una expansión en serie de dichas eigenfuncio- nes.

La solución de un problema de eigenvalores para un operador dado $\mathcal{L}$ - no es de modo alguno única, sin embargo resulta ser especialmente útil expander soluciones de ecuaciones diferenciales en una serie de eigen- funciones del sistema Sturm-Liouville el cual consiste de la ecuación:

$$[p(x)y'(x)]' + [q(x)\lambda r(x)]y(x) = 0 \quad \text{en } a \leq x \leq b \qquad (2.25)$$

y de las condiciones a la frontera de diversos tipos que se imponen en los puntos $x=a$, $x=b$.

Es importante observar las múltiples condiciones necesarias para defi nir un problema Sturm-Liouville: un operador diferencial lineal auto- adjunto* (los coeficientes p y q), una función de ponderación $r(x)$, - un parámetro λ, un intervalo de definición y condiciones a la frontera homogéneas.

Los problemas Sturm-Liouville son importantes, no sólo por su contri- bución a la solución de la ecuación (2.4) sino porque aparecen muy --

* los cuales se definen en el siguiente capítulo.

frecuentemente en aplicaciones directas, especialmente en problemas de vibración unidimensionales típicos tanto de la mecánica clásica como de la mecánica cuántica (en los cuales las eigenfunciones son los modos normales de oscilación), también surgen los problemas tipo Sturm-Liouville como reducciones de las importantes ecuaciones diferenciales parciales de la física-matemática al emplear el método de separación de variables, en este caso el parámetro λ está relacionado con la constante de separación.(16)

Las soluciones no-triviales de la ecuación (2.25) que satisfacen las condiciones a la frontera se denominan eigenfunciones y las denotaremos como $y_n(x)$ estas eigenfunciones (o funciones propias) son únicas sólo hasta una constante multiplicativa C_n y existen únicamente cuando λ toma ciertos valores especiales llamados eigenvalores (o valores propios).

El conjunto completo de eigenvalores constituye el llamado espectro del operador $\mathcal{L}$.

Cuando n es un entero (que es el caso usual cuando a y b son finitos) los eigenvalores forman un conjunto infinito numerable y decimos que tenemos un espectro discreto. Si en cambio todos los valores de λ en algún intervalo real son eigenvalores (como ocurre cuando (b-a) es infinito) entonces decimos que tenemos un espectro contínuo.

Existen, sin embargo, situaciones más complicadas en las cuales el espectro puede tener tanto partes contínuas como discretas, esto ocurre típicamente en el caso de la ecuación de Schrödinger en el campo de la mecánica cuántica.

Las soluciones de ecuaciones diferenciales que son de interés general son aquellas que son contínuas a trozos, es decir aquellas que son con tínuas en $a \leq x \leq b$, excepto por la posible existencia de discontinuidades dentro del intervalo $a < x < b$ .Podemos expander cualquiera de dichas funciones en una serie de eigenfunciones cuando ésta forma un conjunto orto normal, para ver lo anterior daremos algunas definiciones.

Sean $g(x)$ y $h(x)$ dos funciones, entonces el producto escalar (también conocido como producto interno) de estas funciones relativo a la función de ponderación $w(x)$ se define como:

$$\langle g, h \rangle \equiv \int_a^b w(x) g(x) h(x) dx \quad \ldots \ldots \ldots (2.26)$$

En particular $\langle g, g \rangle$ se llama la norma de la función $g(x)$ y se denota como N (g), si ocurre que N(g)=1 decimos que g es una función normalizada relativa a la función de ponderación W(X).

Cualquier función $g(x)$ cuya norma es acotada se dice que es una función cuadrada integrable relativa a W(X).

Dos funciones cuyo producto escalar se anula se dice que son ortogonales sobre el intervalo.

Con esta terminología un conjunto ortonormal (es decir ortogonal y normalizado) de eigenfunciones $y_n(x)$ es aquel que satisface las relaciones de ortogonalidad :

$$\int_a^b w(x) y_m(x) y_n(x) dx = \delta_{mn} \quad \ldots \ldots \ldots (2.27)$$

donde δ_{mn} , conocida como la función delta de Kronecker, es 1 si m=n y es 0 en caso contrario.

Si $\phi(x)$ es cualquier función contínua a trozos sobre $a \leq x \leq b$ y si $y_n(x)$ denota un conjunto ortonormal de eigenfunciones con espectro discreto entonces, si podemos expresar $\phi(x)$ como una expansión de las eigenfunciones $y_n(x)$ dicha expansión será de la forma:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \quad \ldots \ldots \ldots (2.28)$$

y en este caso podemos encontrar los coeficientes c_n directamente — del producto escalar de $\phi(x)$ y $y_m(x)$ utilizando (2.27) y comprobando previamente que la serie anterior converge uniformemente de modo que puedan intercambiarse el orden de integración y de sumatoria:

$$c_m = \langle \phi, y_m \rangle = \int_a^b w(x)\,\phi(x)\,y_m(x)\,dx \qquad \text{.......(2.29)}$$

Cuando toda función contínua a trozos puede expresarse como en la ecuación (2.28) entonces decimos que la base de eigenfunciones es <u>completa</u>.

Finalmente en el caso de que el espectro sea contínuo entonces la serie definida en (2.28) se sustituye por una integral.

2.3 LA TEORIA DE STURM-LIOUVILLE

Consideremos un sistema regular de Sturm-Liouville, ecuación (2.25), en el cual p, p' y r son todas funciones reales y continuas con $p(x)$ y $r(x)$ funciones positivas en el intervalo finito $a \leq x \leq b$. Nos interesa en principio ver qué condiciones a la frontera satisfacen las eigenfunciones ortogonales.

Supongamos que λ y μ son dos eigenvalores distintos de (2.25) asociados con las eigenfunciones $u(x), v(x)$ respectivamente. Entonces:

$$(pu')' + (q+\lambda r)u = 0 \qquad y \qquad (pv')' + (q+\mu r)v = 0$$

de donde multiplicando en cruz obtenemos:

$$v(pu')' + quv + \lambda ruv = 0$$
$$u(pv')' + quv + \mu ruv = 0$$

y restando ambas ecuaciones:

$$(\lambda-\mu)ruv = u(pv')' - v(pu')'$$

integrando esta ecuación sobre el intervalo $a \leq x \leq b$ obtendremos:

$$(\lambda-\mu)\int_a^b r(x)u(x)v(x)\,dx = p(x)\Big[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)\Big]\Big|_a^b$$

donde el lado derecho se obtiene integrando por partes.

De esta manera encontramos que:

$$(\lambda-\mu)\int_a^b r(x)u(x)v(x)\,dx = p(b)w(b) - p(a)w(a) \qquad \ldots(2.30)$$

donde W (x) es el Wronskiano de U y V definido en la ecuación (2.11).

La ecuación (2.30) nos indica que las eigenfunciones que corresponden a eigenvalores distintos son ortogonales siempre y cuando las condiciones a la frontera sean tales que nulifiquen el lado derecho de (2.30); esto último puede ocurrir de diferentes maneras:

1. En un sistema Sturm-Liouville regular donde $p(a) \neq 0$ se tendrá en general que $W(a) = W(b) = 0$, esto como una consecuencia de las condiciones a la frontera dadas por:

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \; ; \; \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \quad \ldots \quad (2.31)$$

donde al menos uno de α y β y uno de γ y δ son diferentes de cero.

2. En un sistema Sturm-Liouville regular periódico se tiene que $p(a) = p(b)$ y las condiciones a la frontera son:

$$y(a) = y(b) \; ; \; y'(a) = y'(b) \quad \ldots \ldots \quad (2.32)$$

de estas condiciones obtenemos que $W(a) = W(b)$ y esto último asegura la ortogonalidad de las eigenfunciones.

3. En un sistema Sturm-Liouville singular los problemas admiten eigenfunciones ortogonales bajo las siguientes condiciones a la frontera:

$$\left.\begin{array}{lll} (i) & W(a) = 0 \quad y \quad p(b) = 0 \\ (ii) & W(b) = 0 \quad y \quad p(a) = 0 \\ (iii) & p(a) = p(b) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2.33)$$

donde en (i) y (ii) resulta conveniente pedir que se cumplan la primera o la segunda relación, respectivamente, de (2.31), puesto que la ortogonalidad es independiente de las condiciones a la frontera cuando ambos puntos extremos son singularidades, como se muestra en (iii).

Por otra parte se encuentra que la ecuación real y autoadjunta de Sturm-Liouville (la cual veremos más adelante), con una función de ponderación $r(x)$ constante en signo, admite únicamente eigenvalores reales bajo cualquiera de las condiciones a la frontera anteriormente enunciadas.(18)

Si calculamos el producto escalar de la eigenfunción $u(x)$ y de $\mathcal{L}u$ respecto a la función de ponderación $r(x)$ encontraremos una expresión muy útil para su eigenvalor λ asociado a dicha eigenfunción.

Entonces:

$$\langle u, \mathcal{L}u \rangle = \int_a^b r(x)u(x)\mathcal{L}u(x)dx = \lambda\int_a^b r(x)u(x)\, r(x)u(x)dx = \lambda\langle u, ru \rangle$$

donde $\mathcal{L}u = \lambda r u$ pues u es una eigenfunción.

Lo anterior demuestra que:

$$\lambda = \langle u, \mathcal{L}u \rangle \big/ \langle u, ru \rangle \qquad \ldots\ldots (2.34)$$

Cualquier operador para el cual $\langle u, \mathcal{L}u \rangle$ es positivo cuando $r(x)$ es positivo se dice que es <u>positivo definido</u>.

Esta última expresión implica que los operadores autoadjuntos positivos definidos tienen eigenvalores positivos.

2.4 TEOREMAS DE OSCILACION Y COMPARACION

El análisis de las gráficas de las soluciones de la ecuación (2.6) requiere de la aplicación de los llamados Teoremas de oscilación y comparación. Empezaremos su estudio planteando el teorema de separación de Sturm el cual considera las posiciones relativas de las soluciones.

<u>Teorema</u> 3. (Comparación de Soluciones)

Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea:

$$b_0(x)y(x)+b_1(x)y'(x)+y''(x)=0 \quad \cdots (2.6)$$

y sean $x_1, x_2 \in D_{f_1}\,[D_{f_2}]$ para los cuales $f_1(x_1)=f_1(x_2)=0\ [f_2(x_1)=f_2(x_2)=0]$ entonces existe $x \in D_{f_1}\,[D_{f_2}]$ tal que $x_1<x<x_2$ y $f_1(x)=0\ [f_2(x)=0]$.

Demostración. Consideremos primero la gráfica de las funciones solución de acuerdo al teorema; tendremos que:

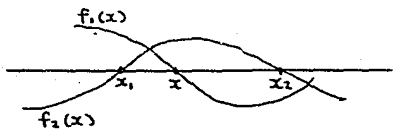

Figura 2.1

La demostración es como sigue: supongamos que $f_2(x)$ se anula en $x=x_i$ entonces $W(f_1,f_2)(x_i)\neq 0$ puesto que f_1 y f_2 se consideran linealmente independientes (sección 2.1), de modo que:

$$0\neq W(f_1,f_2)(x_i)=f_1(x_i)f_2'(x_i)-f_1'(x_i)f_2(x_i)=f_1(x_i)f_2'(x_i)$$

de donde $f_1(x_i)\neq 0$ y $f_2'(x_i)\neq 0$.

Si ahora suponemos que x_1 y x_2 son ceros sucesivos de f_2 obtenemos:

$$f_1(x_1)\neq 0 \qquad f_2'(x_1)\neq 0$$
$$f_1(x_2)\neq 0 \qquad f_2'(x_2)\neq 0$$

Además, puesto que el Wronskiano tiene la propiedad de conservar su — signo (Teorema 2 sección 2.1) entonces :

$$\text{signo}\,|f_1(x_1),\, f_2'(x_1)| = \text{signo}\,|f_1(x_2)\, f_2'(x_2)| = \text{signo}\,|W(x_0)| \qquad (2.35)$$

Como x_1, x_2 son ceros sucesivos, $f_2(x_1) = 0 = f_2(x_2)$ entonces la forma de la curva en la región $x_1 \leq x \leq x_2$ podrá ser de cualquiera de los 2 tipos siguientes

Figura 2.2

De donde en ambos casos ocurre que:

$$\text{signo}\,|f_2'(x_1)| = -\,\text{signo}\,|f_2'(x_2)|$$

así que, tomando en cuenta (2.35), algo similar debe cumplirse para f_1:

$$\text{signo}\,|f_1(x_1)| = -\,\text{signo}\,|f_1(x_2)|$$

esto implica que si $f_1(x_1) > 0$ entonces $f_1(x_2) < 0$ y viceversa, por lo tanto existe alguna x, $x_1 < x < x_2$, tal que $f_1(x) = 0$; como suponemos que x_1 y x_2 son arbitrarios, el teorema queda demostrado en general.

Antes de considerar el teorema de comparación escribiremos convenientemente la ecuación general (2.6):

$$b_0(x)\,y(x) + b_1(x)\,y'(x) + y''(x) = 0 \qquad \ldots\ldots (2.6)$$

si definimos $y(x) = u(x)\,v(x)$ se tendrá que:

$$y' = uv' + u'v \quad ; \quad y'' = uv'' + 2u'v' + u''v$$

sustituyendo estos resultados en (2.6) y rearreglando términos: obtenemos la siguiente ecuación para V:

$$(u'' + b_1 u' + b_0 u)\,v + (2u' + b_1 u)\,v' + u\,v'' = 0 \qquad \ldots (2.36)$$

Supongamos que no conocemos una solución particular de (2.6), pero - que podemos elegir una función U que satisfaga la ecuación:

$$2U' + b_1 U = 0 \qquad \ldots\ldots\ (2.37)$$

obtenemos de la solución general de esta ecuación (sección 1.5) que:

$$U(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_x b_1(x)\,dx\right\} \qquad \ldots\ldots\ (\ .\ )$$

de donde:

$$U'(x) = -\frac{1}{2}b_1(x)U(x)\ ;\ U''(x) = -\frac{1}{2}b_1'(x)U(x) + \frac{1}{4}b_1^2(x)U(x)$$

sustituyendo estos resultados y (2.37) en (2.36) obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} &V''(x) + G(x)V(x) = 0 \\ \text{donde}\quad &G(x) = b_0(x) - \frac{1}{4}b_1(x) - \frac{1}{2}b_1'(x) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ (2.39)$$

La ecuación (2.39), que no incluye término en V, se dice que está en - <u>forma normal</u>, expresada de esta manera una ecuación diferencial permi- te el análisis de las propiedades de su respectiva solución.

Los siguientes teoremas analizan gráficamente la solución considerando el signo de $V''(x)$ para determinar la forma de la curva que aquella — describe.

<u>Teorema 4</u>. Si $G(x)<0$ en el intervalo $a \le x \le b$, entonces cualquier- solución $U(x)$ (tal que $U(x) \not\equiv 0$) de la ecuación $y'' + G(x)y = 0$, no tiene más de un cero en $a \le x \le b$.

Demostración. Supongamos que para el punto $x_0 \in [a,b]$, $U(x_0) = 0$, como $U(x) \not\equiv 0$ se tendrá que $U'(x_0) \neq 0$. Si en particular $U'(x_0)>0$ existirá un intervalo a la derecha de x_0 en el cual $U(x)>0$ y como -- por hipótesis $U'' + GU = 0$ se tendrá que: $U''(x) = -G(x)\,U(x)$ - es positiva para $x > x_0$ pues $G(x)<0$, pero si $U''(x)>0$ para $x>x_0$ entonces $U'(x)$ es creciente a la derecha de x_0 . Por lo tanto $U(x)$ no tiene ceros a la derecha de x_0 , similarmente se encuentra que —

tampoco tendrá ceros a la izquierda.

Esto se concluye también cuando partimos de que $U'(x_0)<0$.

De modo que entonces afirmamos que si $U(x)$ tiene un cero en $[a,b]$ entonces sólo tendrá ese cero, o bien que no tendrá cero alguno ahí.

Enseguida veremos el teorema de comparación que, como su nombre indica, se refiere a las condiciones bajo las cuales una solución difiere de otra considerando la magnitud de la función $G(x)$.

Nuestro propósito es entonces comparar las dos ecuaciones siguientes:

$$y''+h_1(x)y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (2.40)$$

$$z''+h_2(x)z = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (2.41)$$

<u>Teorema 5</u> (o de comparación)

Consideremos las ecs (2.40) y (2.41) con $h_1(x)<h_2(x)$ para $x>x_0$. Sea y la función solución de (2.40) sujeta a las condiciones iniciales: $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y_0'$, tal que $y(x)>0$ para algún intervalo a la derecha de x_0 . Sea $z(x)$ la función solución de (2.41) sujeta a las condiciones iniciales $z(x_0)=y_0$ y $z'(x_0)=y_0'$ Entonces $y(x)>z(x)$ para $x>x_0$ siempre y cuando $z(x)>0$.

Demostración. de (2.40) y (2.41) obtenemos que:

$$z\,y''+h_1(x)yz = 0$$

$$y\,z''+h_2(x)yz = 0$$

restando ambas ecuaciones obtenemos:

$$y''z-yz''=\left[h_2(x)-h_1(x)\right]yz$$

pero por definición

$$W(y,z)(x)=(yz'-y'z)(x)$$

de donde:

$$W'(y,z)(x)=(yz''-y''z)(x)=\left[h_2(x)-h_1(x)\right]yz$$

por tanto: $$W(y,z)(x) = \int_{x_0}^{x} (h_2 - h_1) y z \, dx > 0 \qquad \ldots\ldots (2.42)$$

donde el lado derecho es positivo pues y y z lo son y, por hipótesis, $h_1 < h_2$ para $x > x_0$;

pero por otro lado: $$(y/z)' = \frac{y'z - yz'}{z^2} = \frac{1}{z^2} W(y,z)$$

y por (2.42) tendremos entonces que $(y/z)' > 0$, de donde concluímos que (y/z) es una función creciente para $x > x_0$, y en particular:

$$(y/z)(x_0) = (y_0/y_0) = 1 \quad \text{si} \quad y_0 \neq 0 \; ; \; \text{ó bien} \quad (y/z)(x_0) \longrightarrow 1 \quad \text{si} \quad y_0 = 0.$$

Por lo tanto $(y/z) > 1$ si $x > x_0$, o equivalentemente $y(x) > z(x)$ si $x > x_0$.

Se deduce de este teorema de comparación que si los valores de $y(x_0)$ y de $y'(x_0)$ son tales que $y(x) < 0$ para un intervalo a la derecha de x_0, entonces la conclusión es que $y(x) < z(x)$ siempre y cuando $z(x) < 0$ ahí.

Las dos situaciones se engloban si afirmamos que $|y(x)| > |z(x)|$ para $x > x_0$ en tanto que $z(x) \neq 0$.

<u>Teorema 6</u>. Un valor finito ξ no puede ser un punto límite para los ceros de una solución $U(x)$ de (2.39) a menos que $U(x) \equiv 0$.

Demostración. Supongamos que $\xi = \lim x_n$ con $U(x_n) = 0$ como $U(x)$ es solución de (2.39) entonces U es una función contínua y tendremos $U(\xi) = 0$; pero por definición:

$$U'(\xi) = \lim_{x_n \to \xi} \left[\frac{U(x_n) - U(\xi)}{x_n - \xi} \right] = 0$$

de donde $U(\xi) = U'(\xi) = 0$ y por lo tanto $U(x) \equiv 0$.

<u>Teorema 7</u>. Sean x_0 y x_1 ceros consecutivos de una solución de la

ecuación (2.40) y sean m y M tal que $0<q(x)<M$ para $a \le x \le b$.
entonces:

$$\left(\pi/\sqrt{M}\right) < (x_1 - x_0) < \left(\pi/\sqrt{m}\right) \quad \text{.......} (2.43)$$

Demostración. Consideremos el siguiente par de ecuaciones ya definido en las ecuaciones (2.40) y (2.41):

$$y'' + h_1(x)\, y = 0 \qquad \text{con} \quad h_1(x) < M.$$
$$z'' + h_2(x)\, z = 0$$

de acuerdo a las hipótesis del teorema de comparación (Teorema 5) sabemos que: $h_1(x) < h_2(x)$ para $x \geq x_0$ y $y(x)>0$ para algún intervalo a la derecha de x_0 ; entonces podemos hacer $h_2(x)=M$ y el teorema sigue cumpliéndose, de manera que (2.41) se convierte en:

$$z'' + M z = 0$$

donde Z (x) es una función sujeta, de acuerdo a las hipótesis del teorema, a las condiciones iniciales:

$$z(x_0) = 0 = y_0$$
$$z'(x_0) = y_0'$$

así que podemos hacer:

$$z(x) = \left(y_0'/\sqrt{M}\right) \operatorname{sen}\left[(x-x_0)\sqrt{M}\right]$$

la cual satisface dichas condiciones iniciales.

El siguiente paso es encontrar los ceros de z , observamos que si $\alpha = \left[(x-x_0)\sqrt{M}\right] = n\pi$, con n= 0, 1, 2, ...; tendremos $z(\alpha) = 0$, así que los ceros de z serán:

$$z_0 = x_0$$
$$z_1 = x_0 + \pi/\sqrt{M}$$
$$z_2 = x_0 + 2\pi/\sqrt{M}$$
$$\vdots$$
$$z_n = x_0 + n\pi/\sqrt{M}$$

Pero por el teorema 3 sabemos que los ceros de soluciones linealmente independientes (como efectivamente lo son y y z, de acuerdo a (2.42)) se alternan, entonces como z_0 y z_1 son ceros de z y x_1 es un cero de y concluímos q° x_1 estará a la derecha de $z_1 = x_0 + \pi/\sqrt{M}$, o sea que:

$$x_1 > x_0 + \pi/\sqrt{M} \qquad \text{o bien} \qquad \left(\pi/\sqrt{M}\right) < x_1 - x_0$$

Procediendo de una manera similar partimos ahora de la solución para (2.40):

$$y(x) = \left(y'_0/\sqrt{m}\right) \operatorname{sen}\left[(x - x_0)\sqrt{m}\right] \quad \cdots\cdots (*)$$

los ceros de y los obtenemos directamente :

$$y_0 = x_0$$
$$y_1 = x_0 + \pi/\sqrt{m}$$
$$y_2 = x_0 + 2\pi/\sqrt{m}$$
$$\vdots$$
$$y_n = x_0 + n\pi/\sqrt{m}$$

Como ahora y_0 y y_1 son ceros de y ; x_1 es un cero de z ; $y > z$ para $x > x_0$ y los ceros de y y z se alternan por ser estas funciones linealmente independientes llegamos a que x_1 es menor que y_1, o sea que:

$$x_1 < x_0 + \pi/\sqrt{m} \qquad \text{es decir} \qquad x_1 - x_0 < \pi/\sqrt{m} \quad (**)$$

combinando las ecuaciones (*) y (**) llegamos a la desigualdad buscada.

Finalmente observemos que de (*) obtenemos que para un punto x arbitrario a la derecha de x_0 se cumple que:

$$\frac{1}{\pi}(x-x_0)\sqrt{M} \geqslant n \qquad \text{para algún entero } n$$

y también en el otro sentido obtendremos:

$$(x-x_0)\sqrt{m} \leq n$$

Por lo tanto el número n de ceros que hay en el intervalo $[x_0, x]$ satisface la ecuación:

$$\left(\frac{x-x_0}{\pi}\right)\sqrt{m} \leq n \leq \left(\frac{x-x_0}{\pi}\right)\sqrt{M} \quad \cdots\cdots (2.44)$$

Los teoremas aquí analizados muestran muchas de las propiedades de las soluciones para las ecuaciones diferenciales de segundo orden, aunque no siempre sea posible obtenerlas explícitamente.

En el siguiente capítulo analizaremos las propiedades de la forma autoadjunta y la solución general de este tipo de ecuaciones diferenciales.

III ECUACIONES DIFERENCIALES AUTO-ADJUNTAS

3.1 Propiedades de la forma auto-adjunta

Presentaremos el operador auto-adjunto $\mathcal{L}^*$ asociado con el operador $\mathcal{L}$ para el caso de la ecuación diferencial general de segundo orden definida en (2.7).

Consideremos entonces el operador diferencial $\mathcal{L}$ ya definido: . . . . . . (2.7)

$$\mathcal{L} \equiv b_0(x) + b_1(x)\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$$

Ahora sean U y V funciones de X completamente arbitrarias, excepto — por ser completamente diferenciables, de manera que existan $\mathcal{L}[u]$ y $\overset{*}{\mathcal{L}}[v]$ (ésta última expresión la definiremos precisamente al final del procedimiento que describiremos enseguida), entonces: . . . . . . (3.1)

$$v\,\mathcal{L}[u] = v\left\{b_0(x)u(x) + b_1(x)u'(x) + u''(x)\right\}$$

si ahora integramos por partes el tercero de los 3 términos a la derecha dos veces, el segundo una vez y el primero cero veces, siempre sobre el intervalo $[a,b]$, obtendremos:

$$\int_a^b v\,\mathcal{L}[u]\,dx = \int_a^b v b_0 u\,dx + \int_a^b v\, b_1 u'\,dx + \int_a^b v u''\,dx$$

$$= \int_a^b v\, b_0 u\,dx + \left\{ v b_1 u\Big|_a^b - \int_a^b v b_1' u\,dx - \right.$$

$$\left. - \int_a^b v' b_1 u\,dx \right\} + \left\{ (vu' - v'u)\Big|_a^b + \int_a^b v'' u\,dx \right\}$$

o sea que: . . . (3.2)

$$\int_a^b v\,\mathcal{L}[u]\,dx = (vu' - v'u)\Big|_a^b + v b_1 u\Big|_a^b + \int_a^b u\left[(b_0 - b_1')v - b_1 v' + v''\right]dx$$

Podemos definir enseguida el llamado <u>operador formalmente adjunto</u> $\mathcal{L}^*$ como aquel que satisface la condición: . . . . (3.3)

$$\int_a^b v\,\mathcal{L}[u]\,dx = \{\quad\}\Big|_a^b + \int_a^b u\,\mathcal{L}^*[v]\,dx$$

en consecuencia: . . . . (3.4)

$$\mathcal{L}^* \equiv (b_0 - b_1') - b_1\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$$

y por lo tanto: . . (3.5)

$$\int_a^b v\,\mathcal{L}[u]\,dx = (vu' - v'u)\Big|_a^b + v b_1 u\Big|_a^b + \int_a^b u\,\mathcal{L}^*[v]\,dx$$

y definimos la <u>ecuación formalmente adjunta</u> de $\mathcal{L}[u] = 0$ como: . . . . (3.6)

$$\mathcal{L}^*[v] = 0$$

Si en particular ocurre que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ entonces decimos que $\mathcal{L}$ es un <u>operador formalmente autoadjunto</u>.

En el caso particular de nuestro operador diferencial de segundo orden, la condición para que $\mathcal{L}$ sea formalmente autoadjunto se obtiene igualando las ecuaciones (2.7) y (3.5), de esta manera obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} b_0 = b_0 - b_1' \\ b_1 = -b_1 \end{array}\right\} \quad . . . . (3.7)$$

la única solución para este sistema de ecuaciones es que $b_1(x) \equiv 0$ para $a \leq x \leq b$, de donde: . . . . (3.8)

$$\mathcal{L} = b_0(x) + \frac{d^2}{dx^2}$$

Entonces llamando q a b_o , decimos que una ecuación diferencial lineal de segundo orden (2.6) es una ecuación autoadjunta si podemos expresarla como: . . . . . (3.9)

$$q(x)u(x) + u''(x) = f(x)$$

en lo que resta de este capítulo estudiaremos ecuaciones de este tipo.

3.2 La Identidad de Lagrange y el Espacio fase

Consideremos ahora la ecuación (3.5), podemos expresarla como:

$$\int_a^b \{ v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[v] \} dx = (vu' - v'u)\Big|_a^b + vb_1 u \Big|_a^b \quad \ldots \quad (3.10)$$

si ahora suponemos que $\mathcal{L}$ es un operador autoadjunto entonces $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ ello implica que $b_1(x) \equiv 0$ y la ecuación (3.10) se reduce a:

$$\int_a^b \{ v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}\,[v] \} dx = W(v,u)\Big|_a^b$$

o bien:

$$\int_a^b \{ u\mathcal{L}[v] - v\mathcal{L}[u] \} dx = -W(u,v)\Big|_a^b \quad \ldots \quad (3.11)$$

esta ecuación es la llamada identidad de Lagrange.

De hecho, todo operador formal diferencial, lineal de segundo orden con coeficientes reales es autoadjunto y, por lo tanto , Hermitiano pues en este caso $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$.[6]

El Espacio Fase

Consideremos ahora la ecuación diferencial lineal, de segundo orden y autoadjunta ya definida en (3.9):

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}[u] &= \lambda u \\ \text{donde:} \quad \mathcal{L}[u] &= qu + u'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3.9')$$

siendo U una función de cualquier variable Z que puede ser, en general, compleja.

Para analizar las soluciones de la ecuación dada en (3.9) supondremos que podemos descomponerla en un par de ecuaciones diferenciales homogéneas lineales de primer orden acopladas mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi_1 & \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi_1 & \psi_1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (3.12)$$

donde $\varphi' = \varphi_1$ (y también $\psi' = \psi_1$) son soluciones linealmente independientes de (3.9), al establecer (3.12) obtenemos que:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha_{22} = 0 \\ \alpha_{12} &= 1 \\ \alpha_{21} &= \lambda - q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3.13)$$

La ecuación (3.12) expresada sintéticamente sería: . . . . (3.14)

$$\frac{d}{dt} Z = M Z$$

donde M es la matriz de los coeficientes α_{ij} dados por (3.13) y Z es la matriz de las soluciones φ y ψ cuyo determinante es el Wronskiano de éstas,

Si proponemos como condición inicial para el sistema definido en (3.14) que: . . . . (3.15)

$$Z(t_0) = 1$$

entonces la solución a (3.14) es:

$$Z(t) = \exp.\left\{\int_{t_0}^{t} M(\sigma)\, d\sigma\right\} Z(t_0)$$

pero como M, la matriz-coeficiente siempre es constante entonces tendremos que . . . . . (3.16)

$$Z(t) = \exp\left\{M(t-t_0)\right\} Z(t_0)$$

Definimos el espacio fase (ò plano fase) de un sistema como aquel donde se analiza gráficamente el comportamiento que tienen las soluciones en el plano de las coordenadas de cada vector independiente.

Consideremos la matriz solución M de la ecuación (3.14) sujeta a la condición inicial (3.15), M es una matriz de dimensión 2x2 en general se tendrá que:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha_{11}+\alpha_{22})\cdot \mathbb{I} + \frac{1}{2}(\alpha_{12}+\alpha_{21})\cdot i + \frac{1}{2}(\alpha_{12}-\alpha_{21})\cdot j + \frac{1}{2}(\alpha_{11}-\alpha_{22})\cdot k \quad \ldots (3.17)$$

donde:

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \ldots (3.18)$$

las matrices i, j, k se conocen como <u>matrices de Pauli</u> *, de modo que su estudio resulta necesario para analizar las propiedades de la matriz solución M en el espacio—fase.

3.3 Propiedades de las matrices de Pauli

Las matrices $\mathbb{I}$, i, j, k definidas en (3.18) forman una base para las matrices de dimensión 2x2 ya que cualquiera de éstas puede expresarse como una combinación lineal de aquellas; y además ninguna matriz de Pauli puede expresarse como una combinación lineal de las restantes. Esta última propiedad de independencia se debe al hecho de que las matrices de Pauli anticonmutan y entonces una no se puede escribir como múltiplo de la otra.[13]

La anticonmutatividad de las matrices de Pauli se puede observar, en particular, para el producto (i)·(j):

$$(i)\cdot(j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -k$$

* pues constituyen una variante de los operadores de espín de Pauli que consiste

Análogamente:

$$(j)\cdot(i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = k$$

En general los productos de las matrices $\mathbb{I}$, i, j, k entre sí aparecen en la siguiente tabla:

	$\mathbb{I}$	i	j	k
$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$	i	j	k
i	i	$\mathbb{I}$	−k	−j
j	j	k	−$\mathbb{I}$	−i
k	k	j	i	$\mathbb{I}$

TABLA 1

Como $\{\mathbb{I}, i, j, k\}$ es una base para las matrices de dimensión 2x2 entonces sean A, B matrices 2x2 arbitrarias, entonces podemos expresar:

$$\left.\begin{aligned} A &= a_0\mathbb{I} + a_1 i + a_2 j + a_3 k \\ B &= b_0\mathbb{I} + b_1 i + b_2 j + b_3 k \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3.19)$$

y el producto lo obtenemos empleando los resultados de la tabla 1: . . (3.20)

$$A\cdot B = (a_0b_0 + a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3)\cdot\mathbb{I} + (a_0b_1 + a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2)\cdot i + $$
$$+ (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)\cdot j + (a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)\cdot k$$

La ecuación (3.20) define el llamado <u>producto cuaterniónico</u> que se obtiene multiplicando matrices previamente expresadas como una combinación lineal. Este concepto resulta de gran utilidad en la representación vectorial de matrices en términos de las matrices de Pauli.

Sean A y B <u>vectores</u>, los cuales se definen representándolos como una combinación lineal de las matrices de Pauli, es decir:

específicamente en multiplicar S_y, que es la componente en el eje y del operador S del momento angular del espín, por el complejo i para obtener $(\hbar/2)j$.

$$\left.\begin{aligned} A &= a_1 i + a_2 j + a_3 k \\ B &= b_1 i + b_2 j + b_3 k \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.21)$$

entonces definimos el producto interno de A y B como:

$$(A, B) = a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.22)$$

y definimos, el producto vectorial de A y B como:

$$A \times B = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & -a_2 & a_3 \\ b_1 & -b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.23)$$

Combinando las ecs. (3.20), (3.22) y (3.23) obtenemos que:

$$A \cdot B = (A, B) \cdot \mathbb{I} + (A \times B) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.24)$$

De (3.22) definimos la norma de un vector A como:

$$\|A\|^2 = (A, A) = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.25)$$

Combinando (3.22), (3.23) y (3.25) encontramos que:

$$\|A\|^2 \cdot \|B\|^2 = (A, B)^2 - (A \times B, A \times B) \quad \ldots\ldots \quad (3.26)$$

Si en particular ocurre que $\|A\| \cdot \|B\| = 1$ entonces la ecuación (3.26) puede interpretarse como la identidad trigonométrica dada por

$$1 = \cosh^2 \theta - \operatorname{senh}^2 \theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.27)$$

dividiendo (3,26) entre $\|A\|^2 \cdot \|B\|^2$ y utilizando (3.27) encontramos que:

$$\cosh^2 \theta = \frac{(A, B)^2}{\|A\|^2 \cdot \|B\|^2} \quad ; \quad \operatorname{senh}^2 \theta = \frac{(A \times B, A \times B)}{\|A\|^2 \cdot \|B\|^2}$$

de donde:

$$\cosh \theta = \frac{(A, B)}{\|A\| \cdot \|B\|} \quad ; \quad \operatorname{senh} \theta = \frac{\|A \times B\|}{\|A\| \cdot \|B\|} \quad \ldots \quad (3.28)$$

y por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} (A, B) &= \|A\| \cdot \|B\| \cosh \theta \\ (A \times B) &= C \cdot \{\|A\| \cdot \|B\|\} \operatorname{senh} \theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.29)$$

donde j es la matriz definida en (3.18) y $\hbar = h/2\pi$, con h siendo la llamada constante de Planck. Los operadores de espín de Pauli son de gran importancia en el campo de la física conocido como mecánica cuántica.[7]

donde la matriz $C = c_1 i + c_2 j + c_3 k$ y $(C, C) = \mathbb{I}$, de modo que - $C^2 = \mathbb{I}$. Podemos ahora establecer los siguientes teoremas.

<u>Teorema 3.1</u> Sea A una matriz 2×2; y tal que puede expresarse como combinación lineal de matrices de Pauli, es decir:

$$A = c_0 \cdot \mathbb{I} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.30)$$

donde $C = c_1 i + c_2 j + c_3 k$, entonces $A^2 = \mathbb{I}$ si se cumple una de las dos condiciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{llll} (a) & c_0 = \pm \mathbb{I} & y & C \equiv \underset{\circ}{O} \\ (b) & c_0 \equiv O & y & \|C\| = \mathbb{I} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.31)$$

Demostración.

Encontramos directamente de (3.30) que:

$$A^2 = (c_0 \cdot \mathbb{I} + C)^2 = c_0^2 \cdot \mathbb{I} + C \cdot C + 2\, c_0 \cdot C$$

utilizando (3.24) obtenemos:

$$A^2 = c_0^2 \cdot \mathbb{I} + (C, C) \cdot \mathbb{I} + C \times C + 2\, c_0 \cdot C$$

o sea que:

$$A^2 = [c_0^2 + (C, C)] \cdot \mathbb{I} + 2\, c_0 \cdot C$$

pues $C \times C = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ c_1 & -c_2 & c_3 \\ c_1 & -c_2 & c_3 \end{bmatrix} = O$, por tener 2 renglones iguales

así que $A^2 = \mathbb{I}$ si $\begin{cases} c_0 = \pm \cdot \mathbb{I} & y \quad C = O \\ \text{o bien} & \\ c_0 = O & y \quad \|C\| = (C, C) = \mathbb{I}. \end{cases}$

<u>Teorema 3.2</u> (Teorema de Euler)

(i) Si A es una matriz expresada como una combinación lineal de matrices de Pauli tal que $A^2 = \mathbb{I}$, es decir, tal que se cumple una de las condiciones dadas en (3.31), entonces:

$$\exp\{\theta A\} = \mathbb{I}\cdot\cosh\theta + A\,\mathrm{sen\,h}\,\theta \quad . \quad . \quad . \quad (3.3$$

(ii) Si C es una matriz tal que $C = a_0\cdot\mathbb{I} + \theta A$, donde $\|A\| = 1$

entonces:

$$e^{C} = \mathbb{I}\cdot e^{a_0}\cdot\cosh\theta + A\,e^{a_0}\,\mathrm{sen\,h}\,\theta \quad . \quad . \quad . \quad (3.3$$

Demostración:

(i) por definición $e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k}/k! = 1 + x + x^{2}/2! + \cdots\cdots$

entonces

$$e^{\theta A} = \mathbb{I} + \theta A + \frac{\theta^{2}A^{2}}{2!} + \frac{\theta^{3}A^{3}}{3!} + \frac{\theta^{4}A^{4}}{4!} + \cdots\cdots$$

$$= \mathbb{I}\cdot\left(1 + \frac{\theta^{2}A^{2}}{2!} + \frac{\theta^{4}A^{4}}{4!} + \cdots\right) + \left(\theta A + \frac{\theta^{3}A^{3}}{3!} + \frac{\theta^{5}A^{5}}{5!} + \cdots\right)$$

pero como $A^{2} = \mathbb{I}$ entonces $A^{2n} = \mathbb{I}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

así que:

$$e^{\theta A} = \mathbb{I}\cdot\left(1 + \frac{\theta^{2}}{2!} + \frac{\theta^{4}}{4!} + \cdots\right) + A\left(\theta + \frac{\theta^{3}}{3!} + \frac{\theta^{5}}{5!} + \cdots\right)$$

por lo tanto $e^{\theta A} = \mathbb{I}\cdot\cos h\,\theta + A\,\mathrm{sen\,h}\,\theta$

(ii) como $C = a_0\cdot\mathbb{I} + \theta A$

entonces $e^{C} = e^{a_0\cdot\mathbb{I} + \theta A} = e^{a_0\cdot\mathbb{I}}\cdot e^{\theta A} = e^{a_0\cdot\mathbb{I}}\cdot(\mathbb{I}\cdot\cosh\theta + A\,\mathrm{senh}\,\theta)$

por tanto $e^{C} = \mathbb{I}\cdot e^{a_0\cdot\mathbb{I}}\cdot\cosh\theta + A\,e^{a_0\cdot\mathbb{I}}\cdot\mathrm{sen\,h}\,\theta$.

Con los dos teoremas anteriores podemos definir una matriz H como una exponencial cuyo argumento sea precisamente otra matriz, las expresiones (3.32) y (3.33) nos indican como evaluar entonces H.

Una consecuencia inmediata de los teoremas anteriores es que ahora podremos multiplicar entre sí este tipo de matrices.

Sean A y B dos matrices que pueden expresarse como una combinación lineal de matrices de Pauli, es decir que:

$$A = a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad ; \quad B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

y sean $H_1 = e^{\alpha A}$ y $H_2 = e^{\beta B}$, entonces por (3.32)

$$H_1 \cdot H_2 = e^{\alpha A} \cdot e^{\beta B} = (\mathbb{I} \cdot \cosh\alpha + A\ \mathrm{senh}\,\alpha) \cdot (\mathbb{I} \cdot \cosh\beta + B\ \mathrm{senh}\,\beta) =$$

$$= \mathbb{I} \cdot [(A \cdot B\ \mathrm{senh}\,\alpha \cdot \mathrm{senh}\,\beta) + (\cosh\alpha \cdot \cosh\beta)] +$$

$$+ A\ \mathrm{senh}\,\alpha \cdot \cosh\beta + B\ \cosh\alpha \cdot \mathrm{senh}\,\beta$$

sustituimos $(A \cdot B)$ utilizando (3.24) y obtenemos :

$$H_1 \cdot \overset{\circ}{H_2} = \mathbb{I} \cdot \{[(A,B) \cdot \mathbb{I} + A \times B]\ \mathrm{senh}\,\alpha \cdot \mathrm{senh}\,\beta + \cosh\alpha \cdot \cosh\beta\} +$$

$$+ A\ \mathrm{senh}\,\alpha \cdot \cosh\beta + B\ \cosh\alpha \cdot \mathrm{senh}\,\beta$$

por lo tanto

$$H_1 \cdot H_2 = \mathbb{I} \cdot \{(\mathrm{senh}\,\alpha \cdot \mathrm{senh}\,\beta) \cdot (A,B) + \cosh\alpha \cdot \cosh\beta\} + \quad \text{. . . . (3.34}$$

$$+ A\ \mathrm{senh}\,\alpha \cdot \cosh\beta + B\ \cosh\alpha \cdot \mathrm{senh}\,\beta + (A \times B)\ \mathrm{senh}\,\alpha \cdot \mathrm{senh}\,\beta$$

Algunos casos particulares ocurren cuando los argumentos de las fun-- ciones hiperbólicas son complejos dados por :

$$z_1 = i\pi/2 \quad ; \quad z_2 = 3i\pi/2$$

entonces :

$$\mathrm{senh}\,(z_1) = \tfrac{1}{2}(e^{z_1} - e^{-z_1}) = \tfrac{1}{2}(i - (-i)) = i$$

$$\mathrm{senh}\,(z_2) = \tfrac{1}{2}(e^{z_2} - e^{-z_2}) = \tfrac{1}{2}(-i - i) = -i$$

$$\cosh\,(z_1) = \tfrac{1}{2}(e^{z_1} + e^{-z_1}) = \tfrac{1}{2}(i - i) = 0$$

$$\cosh\,(z_2) = \tfrac{1}{2}(e^{z_2} + e^{-z_2}) = \tfrac{1}{2}(-i + i) = 0$$

Para estos argumentos Tendremos que:

si $\alpha = \beta = z_1$, $\quad H_1 \cdot H_2 = e^{z_1 A} \cdot e^{z_1 B} = \mathrm{II}\{(i)(i)(A,B)\} + (A\times B)(i\cdot i)$

$$= -\mathrm{II}\cdot\{(A,B) + (A\times B)\}$$

si $\alpha = \beta = z_2$, $\quad H_1 \cdot H_2 = e^{z_2 A} \cdot e^{z_2 B} = \mathrm{II}\{(-i)(-i)(A,B)\} + (A\times B)(-i)^2$

$$= -\mathrm{II}\{(A,B) + A\times B\}$$

si $\alpha = z_1$, $\beta = z_2$; $\quad H_1 \cdot H_2 = e^{z_1 A} \cdot e^{z_2 B} = \mathrm{II}\{(i)(-i)\cdot(A,B)\} + (A\times B)(i)(-i)$

$$= \mathrm{II}\cdot\{(A,B) + (A\times B)\}$$

si $\alpha = z_2$, $\beta = z_1$; $\quad H_1 \cdot H_2 = e^{z_2 A} \cdot e^{z_1 B} = \mathrm{II}\cdot\{(i)(-i)\cdot(A,B)\} + (A\times B)(-i)(i)$

$$= \mathrm{II}\cdot\{(A,B) + (A\times B)\}$$

Podemos sintetizar los resultados anteriores de la siguiente manera:

$$e^{z_i A} \cdot e^{z_j B} = \begin{cases} -\mathrm{II}\cdot\left[(A,B) + (A\times B)\right] & \text{si } i = j \\ \mathrm{II}\cdot\left[(A,B) + (A\times B)\right] & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \ldots(335)$$

donde los subíndices i, j son 1 ó 2.

Considerando ahora que, de acuerdo a la hipótesis del teorema de Euler, los vectores A y B tienen norma unitaria entonces, utilizando las ecuaciones (3.29),

$$e^{z_i A}\cdot e^{z_j B}=\left\{\begin{array}{l} -\mathrm{II}\cdot(\cosh\gamma + C\,\mathrm{senh}\,\gamma)\ \text{si}\ i=j \\ \\ \mathrm{II}\cdot(\cosh\gamma + C\,\mathrm{senh}\,\gamma)\ \text{si}\ i\neq j \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (3.36)$$

donde γ se define en (3.27) y cumple con las ecuaciones (3.28).

Otra propiedad interesante de este tipo de matrices es:

$$(A\times B,\ C) = (a_3 b_2 - a_2 b_3)\cdot c_1 - (a_3 b_1 - a_1 b_3)\cdot c_2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\cdot c_3$$

que puede expresarse de dos formas:

(a) como el producto interno de dos vectores

$$\left[(a_3 b_2 - a_2 b_3) \quad (a_1 b_3 - a_3 b_1) \quad (a_2 b_1 - a_1 b_2)\right]\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad . \ . \ . \ (3.37)$$

(b) como el determinante de la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -a_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3.38)$$

Finalizamos esta sección con una definición importante.

<u>Matriz Unimodular</u>. Se dice que A es una matriz unimodular si $\det A = \pm 1$.

En particular las matrices II, i, j, k definidas en (3.18) son todas matrices unimodulares.

Utilizando esta definición y el teorema de Euler concluimos que si A es una matriz unimodular entonces A cumple también con el teorema de Euler.

Esta propiedad la utilizaremos más adelante.

3.4 Análisis de la Matriz Solución

Consideremos la ecuación (3.14):

$$\frac{d}{dt} Z = M Z$$

Donde M es la matriz de los coeficientes α_{ij} representada en (3.17) - como una combinación lineal de las matrices $\mathbb{I}$, i, j, k definidas en (3.18).

Estas posibilidades de M nos conducen a los diferentes casos canónicos de su representación, los cuales analizaremos en esta sección

Caso A . Consideramos que $\mathbb{I}$ es la matriz de coeficientes, entonces la ecuación (3.14) queda:

$$\frac{d}{dt} Z = \theta\mathbb{I} \cdot Z \qquad \text{donde} \qquad \theta\mathbb{I} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \ldots (3.39)$$

Las propiedades ya conocidas de la matriz $\theta\mathbb{I}$, considerada como una - matriz de transformación son: (o)

(i) TRAZA $\theta\mathbb{I} = 2$

(ii) $\det \theta\mathbb{I} = 1$

(iii) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

De modo que entonces $\quad \theta\mathbb{I} = [x_1 \quad x_2]$ con $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Por lo tanto la matriz de transformación $\theta\mathbb{I}$ tiene la propiedad de - dejar invariante al plano bidimensional.

Encontraremos la solución explícita de (3.39) utilizando (3.16):

$$Z(t) = \exp.\left\{ \theta\mathbb{I}(t-t_0)\right\} Z(t_0)$$

aplicando la condición inicial (3.15):

$$1 = Z(t_0) = \exp\left\{\theta\mathbb{I}(0)\right\} Z(t_0) = Z(t_0)$$

así que haciendo $t_0 = 0$ se cumple (3.15) y la solución queda como:

$$Z(t) = \mathbb{I} \cdot \exp(t\,\theta\mathbb{I}) \quad \ldots \ldots (3.40)$$

Para evaluar Z (t) recurrimos al teorema de Euler, ecuación (3.32), entonces:

$$Z(t) = \mathbb{I}\cdot(\cosh \theta t + \operatorname{senh} \theta t) = \mathbb{I}\cdot e^{\theta t}$$

o sea:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} e^{\theta t} & 0 \\ 0 & e^{\theta t} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \quad (3.41)$$

Donde los vectores:

$$X_1 = \begin{bmatrix} e^{\theta t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\theta t} \end{bmatrix} \quad \dots\dots \quad (3.42)$$

son linealmente independientes y, de acuerdo a la ecuación (3.12):

$$\begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \varphi_1(t) \end{bmatrix} = e^{\theta t}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \psi_1(t) \end{bmatrix} = e^{\theta t}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.43)$$

La matriz de transformación $M = \theta\mathbb{I}$ es tal que deja invariante al plano bidimensional φ vs φ_1 [11], entonces al graficar los respectivos elementos en el espacio fase de la matriz solución, se tendrán dos rectas con pendiente $R_1 = \frac{\varphi(t_0)}{\varphi_1(t_0)}$ y $R_2 = \frac{\psi(t_0)}{\psi_1(t_0)}$; que pasan por el origen.

Caso B . En este caso supondremos que $M = \theta\, i$, siendo i la matriz de Pauli definida en (3.18), entonces la ecuación diferencial (3.14) se convierte en:

$$\frac{d}{dt} Z = \theta\, i\, Z \quad \dots\dots \quad (3.44)$$

si aplicamos la ecuación (3.16) encontramos la solución de (3.43):

$$Z(t) = \exp\{\theta i (t - t_0)\}\, Z(t_0)$$

si la condición inicial es $Z(t_0=0) = \mathbb{I}$ entonces obtenemos:

$$Z(t) = \mathbb{I}\, e^{i\theta t}$$

aplicando ahora el teorema de Euler, ecuación (3.32), y considerando que, de acuerdo a la tabla 1:

$$i^n = \begin{cases} \mathbb{I} & \text{si } n \text{ es par} \\ i & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

entonces desarrollando la exponencial la solución queda:

$$Z(t) = \mathbb{I}\cdot\left[1+\frac{(\theta t)^2}{2!}+\frac{(\theta t)^4}{4!}+\cdots\right] + i\cdot\left[\theta t+\frac{(\theta t)^3}{3!}+\frac{(\theta t)^5}{5!}+\cdots\right]$$

así que:

$$Z(t) = \mathbb{I}\cdot\cosh\theta t + i\,\operatorname{senh}\theta t$$

de donde:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} \cosh\theta t & \operatorname{senh}\theta t \\ \operatorname{senh}\theta t & \cosh\theta t \end{bmatrix}$$

considerando ahora la ecuación (3.12) simultáneamente con la condición inicial (3.15) tenemos:

$$\begin{bmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi_1(t) & \psi_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\theta t & \operatorname{senh}\theta t \\ \operatorname{senh}\theta t & \cosh\theta t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(t_0) & \psi(t_0) \\ \varphi_1(t_0) & \psi_1(t_0) \end{bmatrix}$$

resolviendo esta ecuación matricial obtenemos:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0)\cosh\theta t + \varphi_1(t_0)\operatorname{senh}\theta t$$
$$\varphi_1(t) = \varphi(t_0)\operatorname{senh}\theta t + \varphi_1(t_0)\cosh\theta t$$
$$\psi(t) = \psi(t_0)\cosh\theta t + \psi_1(t_0)\operatorname{senh}\theta t$$
$$\psi_1(t) = \psi(t_0)\operatorname{senh}\theta t + \psi_1(t_0)\cosh\theta t$$

resolviendo este sistema para las primeras 2 ecuaciones encontramos:

$$\varphi^2(t) - \varphi_1^2(t) = \varphi^2(t_0) - \varphi_1^2(t_0)\left[\cosh^2\theta t - \operatorname{senh}^2\theta t\right]$$

por lo tanto :

$$\varphi^2(t) - \varphi_1^2(t) = R^2 \qquad \text{donde} \quad R^2 = |\varphi^2(t_0) - \varphi_1^2(t_0)|$$

análogamente:

$$\psi^2(t) - \psi_1^2(t) = Q^2 \qquad \text{donde} \quad Q^2 = |\psi^2(t_0) - \psi_1^2(t_0)| \tag{3.45}$$

Cualquiera de los sistemas (3.4) definen las ecuaciones paramétricas de una hipérbola en el plano, lo cual se verifica al graficar los respectivos elementos de la matriz solución en el espacio fase, y variando las condiciones iniciales se obtiene una familia de curvas que definen un campo vectorial de estructura hiperbólica, el cual tiene a las rectas $y = x$ y $y = -x$, como asíntotas.

<u>Caso C</u>. Consideramos ahora que $M = \theta j$, donde j es la matriz de Pauli definida en (3.18) se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} Z = \theta j Z \qquad \text{con} \qquad Z(t_0 = 0) = \mathbb{I} \quad \ldots \tag{3.46}$$

cuya solución es: $Z(t) = e^{\theta j t} \cdot Z(T_0) = \mathbb{I} \cdot e^{\theta j t}$

por definición: $$e^{\pm\theta j t} = \left[\mathbb{I} \pm j\theta t + j^2\frac{(\theta t)^2}{2!} \pm j^3\frac{(\theta t)^3}{3!} + \cdots \right] \quad \ldots \tag{3.47}$$

pero consultando la tabla 1 encontramos que

n	1	2	3	4	5	6	7
j^n	j	$-\mathbb{I}$	$-j$	$\mathbb{I}$	j	$-\mathbb{I}$	$-j$

sustituyendo estos resultados la matriz solución se convierte en:

$$Z(t) = \mathbb{I}\left[\mathbb{I} - \frac{(\theta t)^2}{2!} + \frac{(\theta t)^4}{4!} - \cdots\right] + j\left[\theta t - \frac{(\theta t)^3}{3!} + \frac{(\theta t)^5}{5!} - \cdots\right]$$

de donde:[4]

$$Z(t) = \mathbb{I}\cos\theta t + j\,\mathrm{sen}\,\theta t = \begin{bmatrix} \cos\theta t & \mathrm{sen}\,\theta t \\ -\mathrm{sen}\,\theta t & \cos\theta t \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (3.4E)$$

obsérvese que no es posible aplicar aquí el teorema de Euler a la función $e^{\theta j t}$ pues $\|j\| \neq \mathbb{I}$.

Expresando este sistema de ecuaciones en términos de $\varphi(t), \varphi_1(t)$ y de $\psi(t), \psi_1(t)$; encontramos las ecuaciones paramétricas de un circulo con centro en el origen. Es decir que:

$$\begin{bmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi_1(t) & \psi_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta t & \mathrm{sen}\,\theta t \\ -\mathrm{sen}\,\theta t & \cos\theta t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(t_0) & \psi(t_0) \\ \varphi_1(t_0) & \psi_1(t_0) \end{bmatrix}.$$

de donde:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0)\cos\theta t + \varphi_1(t_0)\,\mathrm{sen}\,\theta t$$
$$\varphi_1(t) = -\varphi(t_0)\,\mathrm{sen}\,\theta t + \varphi_1(t_0)\cos\theta t$$
$$\psi(t) = \psi(t_0)\cos\theta t + \psi_1(t_0)\,\mathrm{sen}\,\theta t$$
$$\psi_1(t) = -\psi(t_0)\,\mathrm{sen}\,\theta t + \psi_1(t_0)\cos\theta t$$

resolviendo las 2 primeras ecuaciones para $\varphi(t)$ y $\varphi_1(t)$ encontramos que:

$$\varphi^2(t) + \varphi_1^2(t) = \left[\varphi^2(t_0) - \varphi_1^2(t_0)\right](\mathrm{sen}^2\theta t + \cos^2\theta t)$$

por lo tanto:

$$\varphi^2(t) + \varphi_1^2(t) = R_1^2 \qquad \text{donde} \qquad R_1^2 = \varphi^2(t_0) - \varphi_1^2(t_0)$$

análogamente:

$$\psi^2(t) + \psi_1^2(t) = R_2^2 \qquad \text{donde} \qquad R_2^2 = \psi^2(t_0) - \psi_1^2(t_0)$$

Por lo tanto la matriz solución define un espacio fase formado por — circulos concéntricos con radios que varían como funciones de las condiciones iniciales.

Caso D . En este último caso supondremos que $M = \theta k$, siendo k la matriz de Pauli definida en (3.18), procediendo como anteriormente - lo hicimos nuestra ecuación diferencial es: . . . . (3.49)

$$\frac{d}{dt} Z = \theta k \, Z(t_0)$$

cuya solución es:

$$Z(t) = \mathbb{I} \cdot e^{\theta k t}$$

como $\|k\| = 1$ podemos aplicar el teorema de Euler, ecuación (3.33), y obtenemos que:

$$Z(t) = \mathbb{I} \cdot \cosh \theta t + k \operatorname{sen} h \, \theta t$$

es decir:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} \cosh \theta t + \operatorname{senh} \theta t & 0 \\ 0 & \cosh \theta t - \operatorname{senh} \theta t \end{bmatrix}$$

de donde

$$Z(t) = \begin{bmatrix} e^{\theta t} & 0 \\ 0 & e^{-\theta t} \end{bmatrix} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (3.50)$$

Se tiene entonces la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi_1(t) & \psi_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\theta t} & 0 \\ 0 & e^{-\theta t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(t_0) & \psi(t_0) \\ \varphi_1(t_0) & \psi_1(t_0) \end{bmatrix}$$

igualando elementos:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0)\, e^{\theta t} \qquad \psi(t) = \psi(t_0)\, e^{\theta t}$$
$$\varphi_1(t) = \varphi_1(t_0)\, e^{-\theta t} \qquad \psi_1(t) = \psi_1(t_0)\, e^{-\theta t}$$

resolviendo ambos sistemas de ecuaciones obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$\varphi^2(t)\cdot\varphi_1^2(t) = R_1^2 \qquad \text{donde} \qquad R_1^2 = \varphi^2(t_0)\cdot\varphi_1^2(t_0)$$

$$\psi^2(t)\cdot\psi_1^2(t) = R_2^2 \qquad \text{donde} \qquad R_2^2 = \psi^2(t_0)\cdot\psi_1^2(t_0)$$

Estas ecuaciones son del tipo $X^2 \cdot Y^2 = C^2$, y definen un campo vectorial hiperbólico que tiene a los ejes del plano como asíntotas.

En los 4 casos expuestos la matriz de coeficientes M es constante - y podemos reducirla a su forma normal encontrando sus correspondientes raíces características.[3]

En consecuencia podemos determinar completamente el comportamiento - de las trayectorias descritas por las funciones de la matriz solución especialmente en las vecindades de los puntos críticos cercanos al - origen.

Si consideramos las propiedades de la matriz M , por ejemplo que - es hermitiana, podemos realizar un análisis más detallado de los 4 casos anteriormente descritos, en el Apéndice se incluye este breve análisis complementario.

IV. ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES PERIODICOS

4.1 Introducción Histórica

La mayoría de las funciones utilizadas en las matemáticas técnicas y/o aplicadas se han originado como resultado de la investigación de problemas prácticos, por ejemplo las llamadas funciones de Mathieu fueron introducidas por su creador el Físico francés E. Mathieu en 1868 al estudiar el movimiento vibracional de una membrana de forma elíptica.

Este fenómeno ocurre también en 1886 cuando el Físico G.W. Hill, radicado en Washington, E.U. investigó el movimiento del perigeo lunar como una función de los movimientos medios del sol y de la luna. En sus estudios Hill utilizó una forma generalizada de la ecuación de Mathieu, y tuvo la necesidad de utilizar en su análisis, por vez primera, determinantes infinitos. [15]

En 1883 el Matemático francés G. Floquet publicó un tratado general de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos, de las cuales las ecuaciones originales de Mathieu y de Hill constituyen casos particulares. [2]

Sin embargo, actualmente el término "ecuación de Hill se considera una abreviación que comprende a la clase general de ecuaciones diferenciales se segundo orden, lineales, homogéneas y con coeficientes reales y periódicos, pues cualquier ecuación de este tipo puede reducirse a una ecuación de Hill. [14]

Este capítulo pretende ser una introducción al estudio formal de este tipo de ecuaciones diferenciales.

Empezaremos demostrando el teorema fundamental de Floquet, estudiaremos luego los valores característicos y el discriminante de estas ecua ciones y finalmente desarrollaremos la ecuación de Hill en el caso de un potencial periódico para determinar la forma general de su solución.

4. 2 La Ecuación de Hill

Consideremos la ecuación autoadjunta homogénea definida en el capítulo III (ecuación 3.9):

$$u'' + q(x)u = f(x) \quad \text{con } f(x)=0 \quad \ldots \quad (4.1)$$

si en particular $q(x)=\lambda - r(x)$, λ constante, (4.1) se conoce como la ecuación de Hill. Si la función $q(x)$ real, de variable real o compleja; está definida para todos los valores de x y es, además una función contínua a trozos en todo intervalo finito y periódico con un periodo mínimo π (como se mencionó en la sección 2.2), es decir que:

$$q(x+\pi) = q(x) \quad \ldots \ldots \quad (4.2)$$

de este modo lo anterior implica que, si p es un número con $0<p<\pi$, entonces existe al menos un intervalo real I tal que $q(x+p) \neq q(x)$ para toda $x \in I$.

Cuando $q(x)$ satisface las propiedades anteriores entonces (4.1) tiene dos soluciones contimuamente diferenciables $u_1(x)$ y $u_2(x)$ las cuales están unívocamente determinadas por las condiciones:

$$u_1(0)=1 \;, \; u_1'(0)=0 \;, \; u_2(0)=0 \;, \; u_2'(0)=1 \quad \ldots \quad (4.3)$$

Estas soluciones u_1, u_2 se conocen como las <u>soluciones normalizadas</u> de (4.1) (14)

El teorema de Floquet caracteriza las soluciones de la ecuación característica asociada a la ecuación (4.1); resulta importante entonces establecer primero los conceptos de ecuación característica y exponentes caracteristicos de dicha ecuación.

La expresión general de la ecuación característica asociada a (4.1) es el polinomio en S que resulta de resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-S & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-S \end{vmatrix} = 0$$

así que la ecuación característica asociada a (4.1), y por lo tanto la asociada en particular a la ecuación de Hill, está dada por:[12]

$$S^2 - AS + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.4)$$

donde $A = a_{11} + a_{22}$, es una constante que depende de valores específicos de las soluciones normalizadas U_1, U_2 de la manera siguiente:

Sabemos que, en particular para el punto $(x+\pi)$:

$$U_1(x+\pi) = a_{11}U_1(x) + a_{12}U_2(x)$$

$$U_2(x+\pi) = a_{21}U_1(x) + a_{22}U_2(x)$$

donde a_{ij} es una constante, entonces tendremos que:

$$U_2'(x+\pi) = a_{21}U_1'(x) + a_{22}U_2'(x)$$

en particular para $x=0$, y empleando las condiciones (4.3), llegamos a que:

$$A = U_1(\pi) + U_2'(\pi)$$

por lo tanto la <u>ecuación característica</u> (4.4) se convierte en:

$$S^2 - \left[U_1(\pi) + U_2'(\pi)\right]S + 1 = 0 \quad \ldots\ldots (4.5)$$

El factor $U_1(\pi) + U_2'(\pi)$ se llama <u>discriminante</u> de la ecuación de Hill (4.1), sus propiedades analíticas permiten, a su vez, caracterizar muchas de las propiedades interesantes de las ecuaciones de Hill. Asímismo el exponente característico es un número α que satisface las ecuaciones:

$$S_1 = e^{i\alpha\pi} \quad ; \quad S_2 = e^{-i\alpha\pi} \quad \ldots\ldots (4.6)$$

donde s_1 y s_2 son las raíces de la ecuación característica (4.5).

Algunas propiedades inmediatas de α son:

$$(i) \quad A = 2 \cos \alpha\pi$$

$$(ii) \quad 1 = s_1 \cdot s_2$$

Podemos ahora pasar a analizar el fundamental teorema establecido por Floquet en 1879.

4.3 El Teorema de Floquet

Sean s_1, s_2 las raíces de la ecuación característica (4.5): (a) - Si $s_1 \neq s_2$, en ese caso la ecuación de Hill definida en (4.1) tiene dos soluciones linealmente independientes dadas por:

$$w_1(x) = s_1 \rho_1(x) \quad ; \quad w_2(x) = s_2 \rho_2(x)$$

donde $\rho_1(x)$ y $\rho_2(x)$ son funciones periódicas de x con período π.

(b) Si $s_1 = s_2$ entonces la ecuación de Hill (4.1) tiene al menos una solución $p(x)$ periódica, con período π (si $s_1 = s_2 = 1$) o bien con período 2π (si $s_1 = s_2 = -1$) tal que cualquier otra solución independiente de (4.1), digamos una función U, es tal que:

$$U(x+\pi) = s_1 U(x) + \tau\, p(x), \quad \tau \text{ constante.}$$

Demostración.

Sea $w(x)$ una solución de (4.1) entonces por (4.2) resulta que $w(x+\pi)$ es también una solución de (4.1), y en particular $U_1(x+\pi)$ y $U_2(x+\pi)$ son también soluciones de (4.1). Debido a que $U_1(x)$ y $U_2(x)$ forman una base para todo el conjunto de soluciones de (4.1) podremos expresar a $U_1(x+\pi)$ y $U_2(x+\pi)$ como combinaciones lineales de U_1 y de U_2, procediendo como se hizo para obtener $A = U_1(\pi) + U_2'(\pi)$, obtenemos:

$$u_1(x+\pi) = u_1(\pi)\,u_1(x) + u_1'(\pi)\,u_2(x)$$
$$u_2(x+\pi) = u_2(\pi)\,u_1(x) + u_2'(\pi)\,u_2(x) \quad \ldots\ldots (4.7)$$

sea ahora $\omega(x) \not\equiv 0$ una solución arbitraria de (4.1) tal que: —

$\omega(x+\pi) = p\,\omega(x)$, con P una constante . . . . (4.8) entonces — existen c_1, c_2 constantes, tales que $\omega(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ de donde

$$\omega(x+\pi) = \rho\,\omega(x) = \rho c_1 u_1(x) + \rho c_2 u_2(x)$$
$$\omega'(x+\pi) = \rho\,\omega'(x) = \rho c_1 u_1'(x) + \rho c_2 u_2'(x)$$

es decir que:

$$\omega(\pi) = \rho c_1 u_1(\pi) + \rho c_2 u_2(\pi) = \rho c_1$$
$$\omega'(\pi) = \rho c_1 u_1'(\pi) + \rho c_2 u_2'(\pi) = \rho c_2$$

asociando términos obtenemos:

$$[u_1(\pi) - \rho]\,c_1 + u_2(\pi)\,c_2 = 0 \quad \ldots\ldots (4.9)$$
$$u_1'(\pi)\,c_1 + [u_2'(\pi) - \rho]\,c_2 = 0$$

por lo tanto c_1, c_2 deben satisfacer el sistema de ecuaciones lineales anterior.

Análogamente si se satisface el sistema (4.9) entonces la función satisface la condición (4.8)

Tenemos entonces que la condición necesaria y suficiente para que el — sistema (4.9) tenga la solución dada por los valores c_1 y c_2 no nulos es que:

$$\begin{vmatrix} u_1(\pi) - \rho & u_2(\pi) \\ u_1'(\pi) & u_2'(\pi) - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (4.10)$$

pero recordando que $W(u_1, u_2)(x) = u_1(x)\,u_2'(x) - u_2(x)\,u_1'(x) = 1, \forall x$ entonces el determinante anterior se convierte en la ecuación característica expresada como un determinante.

En consecuencia si $\rho = s_1$ es una raíz de (4.10) podemos encontrar —

c_1, c_2 tales que $w = c_1 v_1 + c_2 v_2 \not\equiv 0$, y tal que satisfaga además la ecuación (4.8), es obvio que si (4.8) se datisface entonces podemos escribir

$$w = w(x) = s_1 p_1(x) = w_1(x)$$

donde $s_1 = \exp(i\alpha\pi)$, $p_1(x)$ es una función periódica de x - con período π.

Supongamos ahora que (4.10) tiene una segunda solución $\rho = s_2 \neq s_1$, podemos entonces utilizar s_2 para construir una solución $v = w_2(x) \not\equiv 0$ de la ecuación característica (4.5) de manera que

$$w_2(x+\pi) = \rho_2 w_2(x)$$

Las funciones solución w_1, w_2 deben ser linealmente independientes,- esto lo demostraremos por reducción al absurdo.

Supongamos que las soluciones w_1, w_2 son linealmente dependientes, - entonces existen λ_1, λ_2 (no ambas igual a cero) tales que:

$$\lambda_1 w_1(x) + \lambda_2 w_2(x) \equiv 0$$

pero entonces, utilizando (4.8), tendríamos que:

$$\lambda_1 w_1(x+\pi) + \lambda_2 w_2(x+\pi) = \lambda_1 \rho_1 w_1(x) + \lambda_2 \rho_2 w_2(x) \equiv 0$$

como ni $\lambda_1 w_1$ ni $\lambda_2 w_2$ son idénticamente cero entonces estas ecuaciones son compatibles entre sí solo si $\rho_1 = \rho_2$, pero estamos suponiendo precisamente que $\rho_1 \neq \rho_2$, esto demuestra que la suposición de dependencia lineal nos lleva a un absurdo y, por lo tanto w_1 y w_2 son - linealmente independientes.

Esto demuestra el teorema de Floquet en el caso (a).

Si ahora suponemos que $s_1 = s_2$ podemos entonces construir una solución $w_1^*(x)$ de la ecuación (4.1) tal que:

$$w_1^*(x+\pi) = s_1 w_1^*(x)$$

y como $s_1 = s_2$ y $s_1 \cdot s_2 = 1$, entonces $s_1 = \pm 1$, de donde ω_1^* resulta ser una función periódica con período π ó 2π.

Cuando $s_1 \cdot s_2 = 1$ vemos que: $|s_1| = |s_2| = 1$, o bien una de los dos valores $|s_1|$ ó $|s_2|$ es mayor que 1. En el primer caso se dice que hay - estabilidad en las soluciones de (4.1) pues éstas serán acotadas, en el segundo caso se tiene inestabilidad en las soluciones pues dejan- de ser funciones acotadas.

Ahora examinaremos la segunda solución.

Supongamos inicialmente que $\omega_2(\pi) \neq 0$, esto equivale a decir que $p(x)$ y $u_2(x)$ son independientes. Como $u_2(x+\pi)$ es también una solución se sigue que:

$$u_2(x+\pi) = c_1 u_2(x) + c_2 p(x).$$

Pata determinar ahora c_1 y c_2 consideramos que:

$$u_2(\pi) = c_1 u_2(0) + c_2 p(0)$$
$$u_2'(\pi) = c_1 u_2'(0) + c_2 p'(0)$$

así que, luego de resolver para c_1 y c_2 obtenemos que:

$$u_2(x+\pi) = \frac{[p(0)u_2'(\pi) - p'(0)u_2(\pi)]}{p(0)} \cdot u_2(x) + \frac{u_2(\pi)}{p(0)} \cdot p(x)$$

Pero

$$\frac{p'(0)}{p(0)} = \frac{p'(\pi)}{p(\pi)}$$

asi que

$$\frac{p(0)u_2'(\pi) - p'(0)u_2(\pi)}{p(0)} = \frac{p(\pi)u_2'(\pi) - p'(\pi)u_2(\pi)}{p(\pi)}$$

$$= \frac{p(0)u_2'(0) - p'(0)u_2(0)}{p(\pi)}$$

$$= \frac{p(0)}{p(\pi)} = \frac{1}{s_1} = s_1$$

Donde utilizamos el hecho de que $W(p,u_2)(\pi) = p(\pi)\,u_2'(\pi) - p'(\pi)\,u_2(\pi)$

Finalmente

$$u_2(x+\pi) = S_1\, u_2(x) + \frac{u_2(\pi)}{p(0)}\, p(x)$$

Cuando $u_2(\pi) = 0$ y partiendo de la ecuación:

$$u_1(\pi)\cdot u_2'(\pi) - u_2(\pi)\cdot u_1'(\pi) = 1$$

llegamos a que:

$$u_2'(\pi) = 1/u_1(\pi)$$

Pero como el discriminante:

$$A = u_1(\pi) + u_2'(\pi) = u_1(\pi) + 1/u_1(\pi) = \pm 2$$

De donde si $S_1 = 1$ entonces $u_1(\pi) = 1$ y si $S_1 = -1$ entonces $u_1(\pi) = -1$

En el primer caso ambas u_1 y u_2 y por ende todas las soluciones tendrán un período π. En el último caso todas las soluciones tendrán un período 2π.

Esto completa la demostración del teorema.

Como una consecuencia del teorema de Floquet podemos ver el siguiente resultado.

<u>Criterio de Estabilidad</u>. Las soluciones de (4.1) son estables si y solo si el discriminante asociado es real y si ocurre una de las siguientes alternativas:

(a) $|u_1(\pi) + u_2'(\pi)| < 2$

(b) $u_1(\pi) + u_2'(\pi) = \pm 2$ y además $u_2(\pi) = u_1'(\pi) = 0$

Esto puede concluirse si consideramos que cuando $S_1 \neq S_2$ entonces la estabilidad equivale a pedir que $\alpha \neq 0$, α siendo un número real, y esto equivale a su vez a pedir que: $u_1(\pi) + u_2'(\pi)$ sea también real y en valor absoluto menor que 2. Si $S_1 = S_2$ entonces la estabilidad equivale a pedir que: $u_1(\pi) + u_2'(\pi) = \pm 2$, y también que:

$$u_2(\pi) = u_1'(\pi) = 0$$

El análisis y la clasificación de las soluciones se simplifica en el caso simétrico en el cual $q(x)=\lambda-r(x)=q(-x)$ Magnus-Winkler (1979) hacen un detallado estudio al respecto, Hochstadt (1971) también analiza las propiedades analíticas del discriminante .

4.4 La Ecuación de Hill con Coeficientes Pares

Como ya se mencionó, la ecuación de Hill se define como:

$$U'' - [\lambda - r(x)]\cdot U = 0 \tag{4.11}$$

donde λ es una constante (por ejemplo al utilizar las coordenadas elíptico-cilíndricas para expresar la ecuación reducida de onda mediante el método de separación de variables λ se define como la constante de separación (10)), además tendremos que la condición de periodicidad es: $r(x+\pi) = r(x)$, y supondremos que la función $r(x)$ es integrable sobre $(0,\pi)$ con:

$$\int_0^{\pi} r(x)\,dx = 0$$

finalmente impondremos una condición de simetría a $r(x)$ de modo que:

Con la restricción de simetría es posible hacer algunas consideraciones generales.

Si $U(x)$ satisface la ecuación (4.11) también lo hará $U(-x)$, entonces $U(x)+U(-x)$ es una función par y $U(x)-U(-x)$ es non. De donde si λ es un cero de $U_1(\pi)+U_2'(\pi)-2$, y si $U(x)$ tiene período π entonces podemos encontrar una solución periódica que sea puramente par o puramente non.

Supongamos que $U_1(x)$, la cual en este caso es par tiene también período π . Entonces:

$$U_1(x+\pi) = U_1(x)$$

$$U_1'(x+\pi) = U_1'(x)$$

y $u_1'(x)$ es non.

Haciendo $x=-\pi/2$ tendremos que:

$$u_1(\pi/2) = u_1(-\pi/2)$$
$$u_1'(\pi/2) = u_1'(-\pi/2) = -u_1'(\pi/2)$$

y entonces necesariamente $u_1'(\pi/2)=0$

Podemos también hacer ver que si $u_1'(\frac{\pi}{2})=0$, entonces $u_1(x)$ tiene período π.

Es claro que:

$$u_1(x+\pi) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$
$$u_1'(x+\pi) = c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x)$$

Para determinar c_1 y c_2 haremos $x=-\pi/2$ entonces

$$u_1(\pi/2) = c_1 u_1(\pi/2) - c_2 u_2(\pi/2)$$
$$u_1'(\pi/2) = -c_1 u_1'(\pi/2) + c_2 u_2'(\pi/2)$$

Si $u_1'(\pi/2)=0$ entonces $u_2'(\pi/2)\neq 0$ de otra manera u_1, u_2 serían linealmente dependientes. Entonces de la segunda ecuación obtenemos que $c_2=0$ debido a que $u_1(\frac{\pi}{2})\neq 0$ la primera ecuación demuestra que $c_1=1$ y que $u_1(x+\pi) = u_1(x)$ de modo que u_1 tiene período π.

Lo anterior nos lleva a establecer la siguiente propiedad

Si $f(x)$ es par en (4.11) entonces existe una solución periódica no trivial que es:

(i) par y de período π si y sólo si $u_1'(\pi/2)=0$

(ii) non y de período π si y sólo si $u_2(\pi/2)=0$

(iii) par y de período 2π si y sólo si $u_1(\pi/2)=0$

(iv) non y de período 2π si y sólo si $u_2'(\pi/2)=0$

El primero de estos casos ya fue probado anteriormente, y el resto se prueba de una manera similar.

4.5 PERIODICIDAD EN EL POTENCIAL DE LA MATRIZ SOLUCION

Consideremos nuevamente la ecuación diferencial (3.14):

$$\frac{d}{dt} Z = M Z \tag{3.14}$$

Si ahora reemplazamos la variable t por $t+\pi$ y observando que:

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow \frac{d}{d(t+\pi)}$$

Encontramos que:

$$\frac{d}{dt} Z(t+\pi) = M(t+\pi) Z(t+\pi)$$

pero M es precisamente una función real ó compleja con las mismas pro - piedades de la función $q(x)$ ya definida en la sección (4.2) es decir $M(t+\pi)=M(t)$ entonces:

$$\frac{d}{dt} Z(t+\pi) = M(t) Z(t+\pi) \tag{4.12}$$

Este resultado significa que la función

$$\psi(t) = Z(t+\pi) \tag{4.13}$$

constituye también una solución de (3.14) y, por lo tanto, puede diferir de cualquier otra únicamente en la selección de las condiciones iniciales apropiadas.

Consideremos entonces la ecuación (3.14) con la función Z sujeta a la - condición:

$$Z \cdot Z^{-1} = \mathbb{I}$$

entonces derivando con respecto a t obtenemos :

$$Z \cdot \frac{d}{dt} Z^{-1} + \frac{dZ}{dt} \cdot Z^{-1} = 0 \tag{4.14}$$

entonces

$$\frac{d}{dt} Z^{-1} = -\frac{dZ}{dt} \cdot \frac{Z^{-1}}{Z} = -MZ \cdot \frac{Z^{-1}}{Z} = -M Z^{-1}$$

Consideremos también el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}\Psi = M\Psi \tag{4.15}$$

Construimos ahora el producto de la inversa de una solución Z de (3.14) con Ψ y derivamos obteniendo:

$$\frac{d}{dt}(Z^{-1}\cdot\Psi) = Z^{-1}\cdot\frac{d}{dt}\Psi + \frac{d}{dt}Z^{-1}\cdot\Psi$$

Sustituyendo aquí (4.14) y (4.15) obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Z^{-1}\cdot\Psi) &= Z^{-1}\cdot M\Psi - MZ^{-1}\cdot\Psi \\ &= M(Z^{-1}\cdot\Psi - Z^{-1}\cdot\Psi) = 0\end{aligned} \tag{4.16}$$

e integrando con respecto a t vemos que

$$Z^{-1}\cdot\Psi = K \tag{4.17}$$

donde K es una constante

Suponiendo ahora que $Z(0)=\mathbb{I}$ tendremos que: $\Psi(0) = K$

y por lo tanto:

$$\Psi = Z\cdot K \tag{4.18}$$

Ahora bien, puesto que la matriz solución Z está formada por vectores - columna linealmente independientes (sección 3.4), entonces al multiplicarla por la matriz K formada por puras constantes, obtendremos nuevamente una matriz Ψ formada también por columnas linealmente independientes. Utilizando (4.13) podemos entonces expresar (4.18) como:

$$Z(t+\pi) = Z(t)\cdot K \tag{4.19}$$

Entonces: $Z(\pi) = Z(0)\cdot K$

y, de acuerdo con la condición inicial $Z(0) = \mathbb{I}$ obtenemos aplicando nuevamente (4.19): $Z(\pi) = \mathbb{I}\cdot K$

por lo tanto:

$$Z(\pi) = K \tag{4.20}$$

Análogamente: $$Z(2\pi) = Z(\pi)\cdot K = K^2$$

$$Z(3\pi) = Z(2\pi)\cdot K = K^3 \qquad (4.21)$$

por lo tanto :

En general, tendremos entonces que:

$$Z(n\pi) = K^n \qquad (4.22)$$

La ecuación (4.12) nos permite obtener la solución para todos los valores de t en términos de un intervalo elemental de longitud S.

Restringiendo S tal que $S \leq t$ y definiendo de modo que entonces (4.12) se convierte en:

$$Z(t) = Z(s)\, K^n \qquad (4.23)$$

Desde esta perspectiva el comportamiento global de la función Z parece depender básicamente de las propiedades de la matriz K de coeficientes constantes, en particular de si K es una matriz unimodular (sección 3.3).

En consecuencia, si los eigenvalores de la matriz K no son raíces complejas de la unidad, entonces la función solución Z no será periódica, aún en el caso de que la función M sea periódica.

Así como un potencial periódico puede tener soluciones periódicas, dependiendo de los eigenvalores de la matriz K; de la misma manera es posible imponer condiciones a la frontera que sean periódicas independientemente de si el potencial es o no periódico.

A P E N D I C E

Consideremos la ecuación diferencial definida en (3.14)

$$\frac{d}{dt} Z = M Z$$

Tomando en cuenta c/u de los 4 casos analizados en la sección 3.4 se - deduce que la matriz de coeficientes M es hermitiana pues todas las matrices II, i, j, k son simétricas. En consecuencia existe una matriz- unitaria U tal que U* M U es una matriz diagonal cuyos elementos son precisamente las raíces características de M, es decir que:

$$U^{*} M U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

donde U* es la matriz transpuesta de la conjugada de U.[11] Por ser U - unitaria entonces $U^{*} = U^{-1}$ y entonces definimos:

$$U^{-1} M U = \Delta \qquad \text{con} \qquad \Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots \text{(A.1)}$$

Si ahora diagonalizamos la ecuación diferencial (3.14) obtenemos:

$$U^{-1} \cdot \frac{d}{dt} Z \cdot U = U^{-1} \cdot M \cdot Z \cdot U$$

de donde $\frac{d}{dt} (U^{-1} \cdot Z \cdot U) = U^{-1} M U U^{-1} Z U$ pues $U \cdot U^{-1} = I$

o equivalentemente :

$$\frac{d}{dt} W = \Delta W \qquad \text{con} \qquad W = U^{-1} Z U \quad \cdots\cdots \text{(A.2}$$

donde W es una matriz diagonal siempre y cuando Z sea hermitiana.

Para la matriz de coeficientes Δ definida en (A.1) tendremos básicamente 2 posibilidades:

(1) cuando los coeficientes son reales, y podremos tener obviamente - que $\lambda_1 = \lambda_2$ o bien que $\lambda_1 \neq \lambda_2$

(2) cuando los coeficientes son complejos, en particular analizaremos el caso en que $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$.

Analizaremos enseguida algunos casos particulares de interés.

Primer caso. Las dos raíces son reales, pero ambas positivas ó negativas. Expresaremos entonces la ecuación (A.2) como:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix}$$

entonces tendremos las dos siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt} w_1 &= \lambda_1 w_1 \quad \text{cuya solución es} \quad w_1(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \\ \frac{d}{dt} w_2 &= \lambda_2 w_2 \quad \text{cuya solución es} \quad w_2(t) = \beta e^{\lambda_2 t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (A.3)$$

supongamos primero que ambas raíces son positivas, con α, β constantes arbitrarias diferentes de cero, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} (w_2/w_1) = (\alpha/\beta) \lim_{t\to\infty} \exp.[(\lambda_2 - \lambda_1)t] = 0 \qquad \text{si} \quad \lambda_2 < \lambda_1$$

por lo tanto $(w_2/w_1) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para $\lambda_1 > \lambda_2$, y las curvas convergentes al origen de acuerdo al valor de (α/β), el punto crítico se considera entonces como un nodo estable.

Análogamente supongamos ahora que ambas raíces son positivas con $\lambda_2 > \lambda_1$ entonces $(w_2/w_1) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, este comportamiento asintótico aumenta aunque la gráfica de las trayectorias es, en general, el mismo.

En particular para $\lambda_1 = \lambda_2$ todas las trayectorias pasan por el origen lo cual corresponde al caso A previamente analizado.

Segundo caso. Tenemos ahora que las raíces son reales y de signo opuesto, de manera que las soluciones de A.2 serán:

$$w_1 = \alpha e^{-\lambda t} \qquad\qquad w_2 = \beta e^{\mu t}$$

donde $\lambda, \mu > 0$ y $\alpha, \beta \neq 0$.

Este es el mismo caso que el analizado en D en el cual, al utilizar la matriz K de Pauli encontramos que $w_1 = e^{\theta t}$, $w_2 = e^{-\theta t}$, la única diferencia es que ahora el valor absoluto del primer eigen valor puede ser diferente del segundo, dependiendo de los valores específicos de $\alpha, \beta, \lambda, \mu$.

De tal forma que en este caso, como en D, las trayectorias definirán un campo vectorial hiperbólico que tendrá como asíntotas a los ejes del plano.

Tercer caso. Ahora supondremos que las raíces λ_1, λ_2 son complejas, entonces la ecuación (3.52) será:

$$\frac{dw_1}{dt} = \lambda_1 w_1 \qquad \frac{d\bar{w}_1}{dt} = \bar{\lambda}_1 \bar{w}_1$$

y análogamente:

$$\frac{d}{dt} w_2 = \lambda_2 w_2 \qquad \frac{d\bar{w}_2}{dt} = \bar{\lambda}_2 \bar{w}_2$$

donde el suprarayado indica el conjugado de los complejos correspondientes

Ahora bien, como la suma de un complejo y su conjugado es dos veces su parte real y, análogamente, la resta es dos veces su parte real, entonces podemos hacer la siguiente transformación real de coordenadas:

$$u \longrightarrow \frac{1}{2}(w_i + \bar{w}_i) \quad ; \qquad v \longrightarrow \frac{1}{2i}(w_i - \bar{w}_i) \ ; \ i = 1, 2.$$

Supongamos ahora que $\lambda = -\mu + i\theta$, con μ, θ números reales positivos, entonces la solución general estará dada por:

$$w_1 = \gamma e^{\lambda t} = \alpha e^{(-\mu + i\theta)t + i\beta} \qquad \text{con } \alpha, \beta \text{ reales}$$

Análogamente obtendremos una expresión similar para w_2

Tendremos entonces una combinación de dos movimientos: el primero atractor (repulsor) lineal y el segundo rotacional, dando como resultado una especie de espiral en las trayectorias de las soluciones con un foco estable (inestable) como punto crítico de las mismas.

<u>Cuarto caso</u>. Ahora tendremos que las raíces características tienen la parte real igual a cero, esto implica que $\lambda = i\theta$ y, en consecuencia desaparece el movimiento atractor (repulsor) lineal puesto que ahora el radio es constante con $r = \alpha$.

El caso se reduce entonces al analizado ya en la sección 3.4 para la matric j de Pauli, la gráfica de la solución general W_1 serán círculos concéntricos con centro en el origen.

B I B L I O G R A F I A

0. BIRKHOFF-ROTTA — Ordinary Differential Equations
Wiley NEW YORK (1969)

1. BRAND L. — Differential and Difference Equations
WILEY NEW YORK (1966)

2. CAMPBELL — Theorie Génerale de l' Equation
de Mathieu
MASSON & CIE EDITEURS París (1955)

3. CHAPA V. S. V. — Ecuaciones diferenciales desde un
punto de vista Weyl-titchmarsh
tesis de maestría

4. CHURCHILL R. V. — Complex Variables and Applications
MC GRAW-HILL BOOK CO. INT. STUDENT
EDITION TOKYO (1960)

5. CODDINGTON-LEVINSON — Theory of Ordinary Differential
Equations
MC. GRAW HILL NEW YORK (1955)

6. DENNERY KRZYWICKI — Mathematics for Physícists
HARPER & ROW NEW YORK (1967)

7. DICKE-WITTKE — Introduction to Quantum
Mechanics
ADDISON-WESLEY PUB.CO.
READING (1973)

8. ELSGOLTZ L. — Ecuaciones Diferenciales y Câlculo Variacional
MIR MOSCU (1977)

9. GOLOVINA L. I. — Algebra Lineal y algunas de sus Aplicaciones
MIR MOSCU (1974)

10. HOCHSTADT H. — The Functions of Mathematical Physics
WILEY INTERSCIENCE (1971)

11. HOHN F. E. — Algebra de Matrices
TRILLAS MEXICO (1970)

12. INCE E.L. — Ordinary Differential Equations
DOVER NEW YORK (1944)

13. JEFFREYS & JEFFREYS — Methods of Mathematical Physics
CAMBRIDGE UNIV. PRESS
LONDON (1956)

14. MAGNUS-WINKLER — Hill's Equations
DOVER NEW YORK (1979)

15. MC LACHLAN — Theory and Applications of Mathieu Function
OXFORD UNIV. PRESS (1947)

16. MORSE-FESHBACH — Methods of Theoretical Physics Parts I, II MC GRAW HILL NEW YORK (1953)

17. MURPHY G. M. — Ordinary Differential Equations and their solutions D. VAN NOSTRAND NEW JERSEY (1960)

18. TITCHMARSH E.C. — Eigenfunctions Expansions Parts I (1962) II (1958) OXFORD UNIV. PRESS