2 ej.
24

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FILTROS Y ULTRAFILTROS EN ESPACIOS PRE-UNIFORMES

TESIS QUE, PARA OBTENER EL TITULO DE MATEMATICO, PRESENTA:

CELIA XOCHIQUETZAL MENDOZA GOMEZ

MEXICO, D.F. 1986

CONTENIDO

NOTACION

La notación que se utilizará en este escrito es la siguiente:

Para familias de conjuntos: letras script mayúsculas. Por ejemplo, para uniformidades: $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, ... ; para direcciones, filtros y ultrafiltros: $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, ... ; para filtros de vecindades de x: $\mathcal{N}_x$; para bases: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, etc.

Para subconjuntos de espacios topológicos: letras latinas mayúsculas (excepto la letra F, que se utilizará para funciones). Por ejemplo, para espacios, las últimas letras del alfabeto latino: X, Y, Z; para subconjuntos de espacios, las primeras letras: A, B, ..., y las letras intermedias: L, M, N, etc.

Para elementos de espacios: letras latinas minúsculas, excepto las letras f, g y h, que se utilizarán para denotar funciones. Por ejemplo: x, y, z.

Para cubiertas: letras griegas minúsculas. Por ejemplo: α, β, γ, δ.

Para funciones: las letras F, f, g, h, v, ρ, υ, ν, etc.

Para los números: reales, $\mathbb{R}$; naturales, $\mathbb{N}$; enteros, $\mathbb{Z}$; racionales, $\mathbb{Q}$; irracionales, $\mathbb{I}$.

INTRODUCCION

El principal objetivo de esta tesis es mostrar la utilidad de los filtros y ultrafiltros como herramientas básicas en la resolución de algunos problemas relacionados con espacios pre-uniformes (semi-uniformes y uniformes).

El concepto de filtro (sugerido en 1937 por H. Cartan) generaliza al concepto de sucesión y, por lo tanto, los problemas que pueden resolverse por medio de sucesiones en, por ejemplo, espacios métricos, pueden generalizarse a clases más ricas de espacios, como la de los espacios uniformes (éstos proporcionan una útil generalización de los espacios métricos).

La teoría de espacios uniformes fue creada en 1936 por A. Weil ("Sur les espaces à structure uniform et sur la topologie générale", Paris, 1937).

La mayoría de los resultados encontrados por Weil son todavía utilizados; sin embargo, la axiomatización original no era conveniente, y por lo tanto, se modificó al poco tiempo.

En la actualidad, hay dos formas de tratar a los espacios uniformes: Por medio de conectores y por medio de cubiertas.

Aunque las dos formas son básicamente equivalentes y en teoría es fácil pasar de una forma a la otra, en la práctica, debido a sus diferentes notaciones, no es conveniente emplear ambas formas en un mismo escrito.

Para esta tesis, se eligió estudiar a los espacios uniformes por medio de cubiertas, porque en la mayor parte de la literatura matemática (libros y artículos) se estudian por medio de conectores.

La tesis se ha dividido en cuatro capítulos.

El primero tiene el propósito de facilitar la lectura de los restantes. Consta de las definiciones usadas en el resto de la tesis, con excepción de algunas definiciones propias de un primer curso de topología, como las de espacios topológicos, métricas, etc., y aparecen además algunas observaciones, ejemplos e ilustraciones que explican algunos conceptos.

La segunda parte de la tesis contiene el estudio de las principales herramientas utilizadas: Los filtros y los ultrafiltros.

En algunos de estos resultados, se incluyen aplicaciones. Sin embargo, no es sino hasta los capítulos III y IV donde aparece la mayoría de las aplicaciones.

Un problema muy importante radica en "completar" un espacio sin modificar su estructura básica. Dado cualquier espacio uniforme no completo, se pretende "agregarle" puntos para extenderlo a uno completo, también uniforme.

En esencia, esto es posible, y de hecho hay varias formas de hacerlo, aunque el proceso de "agregar puntos" no es tan fácil como podría esperarse. En primer lugar, los puntos agregados deben guardar estrecha relación con el espacio original. En segundo lugar, debe extenderse la uniformidad al nuevo espacio.

Otro problema teórico básico es encontrar condiciones bajo las cuales se puede encontrar una extensión continua de una función dada, lo cual no siempre tiene solución.

En el capítulo III, se plantea una solución a este problema. También en este capítulo se estudian el teorema de completación de espacios uniformes y sus aplicaciones.

En el cuarto y último capítulo de la tesis, se estudian las cubiertas normales y las bases de Wallman junto con sus aplicaciones.

Uno de los problemas que se analizan es muy importante; se trata de la "compactificación":

Dado un espacio uniforme, se requiere construir un espacio compacto que tenga un subespacio homeomórfico al espacio original.

Finalmente, se dan algunas conclusiones que incluyen un resumen de los resultados más importantes de este trabajo.

CAPITULO I
GENERALIDADES

Para facilidad del lector, se comenzará con las definiciones que se utilizarán, dando, en algunas de ellas, ejemplos, ilustraciones, observaciones o resultados.

1. ESTRELLAS Y CUBIERTAS.

Sea X un conjunto arbitrario, A, B subconjuntos de X, y α, β subcolecciones de 2^X.

1. Una *cubierta* α de X es una colección de subconjuntos de X, cuya unión es X.

   Por ejemplo, sea X un espacio pseudo-métrico. Una cubierta de X es la colección de "bolas" de radio $\varepsilon > 0$ y centro en algún punto x de X (Ver figura 1).

2. La *estrella* de B con respecto a α, es la unión de los elementos de α que intersectan a B (Ver figura 2).

En símbolos:

$$St(B,\alpha) = \cup\{A\in\alpha \mid A\cap B\neq\emptyset\}$$

Si $B = \{x\}$, se acostumbra escribir $St(x,\alpha)$ en lugar de $St(\{x\},\alpha)$.

3. El *asterisco* de α es el conjunto de las estrellas de A con respecto a α, con A en α.

En símbolos:

$$\alpha^{*} = \{St(A,\alpha) \mid A\in\alpha\}.$$

4. El *conector* de α es la unión de conjuntos de la forma A cruz A, con A en α.

En símbolos:

$$E(\alpha) = \cup\{A\times A \mid A\in\alpha\}.$$

5. La *restricción* de α a B es el conjunto de elementos de la forma B intersección A, con A en α (Ver figura 3).

En símbolos:

$$\alpha|B = \{A \cap B \mid A \in \alpha\}.$$

6. Las cubiertas pueden ser ordenadas por *refinamientos*.

Existen varias clases de ellos:

i) α *refina* a β (en símbolos $\alpha < \beta$), si para toda A en α, existe B en β, tal que A está contenida en B (Ver figura 4).

ii) α *refina débilmente* a β (en símbolos: $\alpha <_W \beta$) si para toda $x \in X$, se tiene que $St(x,\alpha) \subset St(x,\beta)$ (Ver figura 5).

iii) α *refina regularmente* a β (en símbolos: $\alpha <_R \beta$), si cada par de puntos en la unión de dos elementos intersectantes de α, pertenecen a un mismo elemento de β (Ver figura 6).

7. i) La *cuña* de las cubiertas α y β (en símbolos: $\alpha\wedge\beta$) es la cubierta de X, que consiste de todas las intersecciones de un elemento de α y un elemento de β (Ver figura 7).

ii) Se puede extender esta definición a una colección finita de cubiertas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$:

$$\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\ldots\wedge\alpha_n = \{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n \mid A_1\in\alpha_1, \ldots, A_n\in\alpha_n\}.$$

iii) Si $\mathcal{U}$ es una familia arbitraria de cubiertas se define:

$$\wedge\mathcal{U} = \{\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\ldots\wedge\alpha_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n\in\mathcal{U}, \; n = 1, 2, \ldots\}.$$

8. Sean $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ colecciones de cubiertas de X.

i) $\mathcal{U}_1$ *refina* (*refina débilmente*) a $\mathcal{U}_2$ si para toda α en $\mathcal{U}_1$, existe β en $\mathcal{U}_2$ tal que β refina (refina débilmente) a α.

En símbolos: $\mathcal{U}_1<\mathcal{U}_2$ $(\mathcal{U}_1<_w\mathcal{U}_2)$.

ii) $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son *equivalentes* si $\mathcal{U}_1$ refina a $\mathcal{U}_2$ y $\mathcal{U}_2$ refina a $\mathcal{U}_1$ (en símbolos: $\mathcal{U}_1\sim\mathcal{U}_2$); y son *débilmente equivalentes* si los refinamientos son débiles (en símbolos: $\mathcal{U}_1\sim_w\mathcal{U}_2$).

9. La *cubierta baricéntrica* asociada a α, o α-*delta*, es el conjunto de las estrellas de x, con respecto a α, en donde x está en X. En símbolos: $\alpha^{\Delta}=\{St(x,\alpha)\,|\,x\in X\}$.

OBSERVACIONES.

I. 1. Obviamente, si $\mathcal{U}_1\subset\mathcal{U}_2$, entonces, $\mathcal{U}_1<\mathcal{U}_2$.

I. 2. De las definiciones anteriores, se pueden demostrar fácilmente las siguientes relaciones:

Sean α, β, γ, δ, cubiertas de X, A, $B \subset X$ y $x \in X$, entonces:

a) Si $A \subset B$ y $\alpha <_W \beta$, entonces, $St(A,\alpha) \subset St(B,\beta)$.

b) $St(A \cap B,\alpha) \subset St(A,\alpha) \cap St(B,\alpha)$.

c) $St(A \cup B,\alpha) = St(A,\alpha) \cup St(B,\alpha)$.

d) $St(A,\alpha \wedge \beta) \subset St(A,\alpha) \cap St(A,\beta)$.

e) $St(x,\alpha \wedge \beta) = St(x,\alpha) \cap St(x,\beta)$.

f) Si $\alpha < \beta$ y $\gamma < \delta$, entonces $\alpha \wedge \gamma < \beta \wedge \delta$.

g) Si $\alpha < \beta$ entonces, $\alpha <_W \beta$, $\alpha^* < \beta^*$ y $\alpha^\Delta < \beta^\Delta$.

Por lo tanto, $(\alpha \wedge \beta)^* < \alpha^* \wedge \beta^*$ y $(\alpha \wedge \beta)^\Delta < \alpha^\Delta \wedge \beta^\Delta$.

h) Se tienen las siguientes implicaciones:

$\alpha^\Delta < \beta \Rightarrow \alpha <_R \beta \Rightarrow \alpha <_W \beta \Rightarrow \alpha^\Delta < \beta^\Delta$.

i) Si $\gamma <_R \beta <_R \alpha$, entonces $\gamma^\Delta <_R \alpha$.

j) Si $\gamma <_W \beta <_R \alpha$, entonces $\gamma <_R \alpha$

(o si $\gamma <_R \beta <_W \alpha$, entonces $\gamma <_R \alpha$).

k) Si $B \subset A$, entonces $St(B, \alpha | A) = St(B, \alpha) \cap A$.

l) Se tiene que: $\alpha < \alpha^{\Delta} < \alpha^* < \alpha^{\Delta\Delta}$.

2. AXIOMAS DE SEPARACION.

Sea X un espacio topológico.

10. X es un espacio T_0 si para cada par de puntos distintos x_1, x_2 en X, existe un conjunto abierto que contiene exactamente a uno de estos puntos.

11. X es un espacio T_1 si para cada par de puntos distintos x_1, x_2 en X, existe un conjunto abierto $U \subset X$, tal que x_1 pertenece a U y x_2 no pertenece a U (Ver figura 8).

12. X es un espacio T_2 o de *Hausdorff*, si para cada par de puntos distintos x_1, $x_2 \in X$, existen conjuntos abiertos U_1, U_2, tales que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$, con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (Ver figura 9).

13. X es un espacio *regular* si para cada $x \in X$ y cada conjunto cerrado $F \subset X$, tal que x no pertenece a F, existen conjuntos abiertos U_1, U_2 tales que $x \in U_1$, $F \subset U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (Ver figura 10).

14. X es un espacio *completamente regular* si para cada $x \in X$ y cada conjunto cerrado $F \subset X$, tal que $x \notin F$, existe una función continua $f: X \to I$ (con $I = [0,1]$), tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, para $y \in F$ (Ver figura 11).

15. X es un espacio *normal* si para cada par de subconjuntos cerrados disjuntos $A, B \subset X$, existen conjuntos abiertos U, V, tales que $A \subset U$, $B \subset V$, y $U \cap V = \emptyset$ (Ver figura 12).

16. X es un espacio *completamente normal* si dados dos conjuntos separados A, B en X, existen abiertos ajenos U, V tales que

$A \subset U$ y $B \subset V$.

17. X es un espacio T_3 si X es T_1 y regular.

18. X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ o *Tychonoff* si X es T_1 y completamente regular.

19. X es un espacio T_4 si X es T_1 y normal.

20. X es un espacio T_5 si X es T_1 y completamente normal.

21. X es un espacio R_0 si cada abierto arbitrario en X es unión de subconjuntos cerrados de X.

22. X es un espacio R_1 si cada par de puntos con cerraduras distintas tienen vecindades ajenas.

23. X es un espacio $\mathcal{R}_2$ si X es regular.

24. X es un espacio $\mathcal{R}_{2\frac{1}{2}}$ si X es completamente regular.

25. X es un espacio $\mathcal{R}_3$ si X es R_0 y normal.

OBSERVACION.

I. 3. Se tienen las siguientes relaciones entre los espacios R_i y T_i:

$$
\begin{array}{ccc}
T_4 & \Rightarrow & R_3 \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
T_{3\frac{1}{2}} & \Rightarrow & R_{2\frac{1}{2}} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
T_3 & \Rightarrow & R_2 \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
T_2 & \Rightarrow & R_1 \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
T_1 & \Rightarrow & R_0 \\
\Downarrow & & \\
T_0 & &
\end{array}
$$

En general:

$T_i \Leftrightarrow R_{i-1}$ y T_0, con $i = 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4.$

3. ESPACIOS COMPACTOS Y COMPACTIFICACIONES.

Sea X un espacio topológico, y $A \in 2^X$.

26. A es *compacto* si toda cubierta abierta de A tiene una subcubierta finita.

27. Una *compactificación* de un espacio arbitrario X es una pareja (h,Y), en donde Y es un espacio compacto y h un homeomorfismo de X sobre un subespacio denso en Y.

28. Un espacio X es *numerablemente compacto* si toda cubierta abierta numerable de X tiene subcubierta numerable.

29. Un espacio X es de *Lindelöf* si toda cubieta abierta de X tiene subcubieta numerable.

30. Un espacio X es *localmente compacto* si cada punto de X tiene una vecindad compacta.

31. Un subconjunto A de un espacio X es *totalmente disconexo* si todas las componentes de A se reducen a un punto.

32. Un subconjunto A de un espacio X es un *dominio abierto* si A es igual al interior de su cerradura (i.e. $A = \operatorname{int} A^{-}$).

OBSERVACIONES.

Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X.

1. 4. Teorema.

Si X es compacto y A es cerrado, entonces A es compacto.

1. 5. Teorema.

Todo subconjunto finito de X es compacto.

1. 6. Teorema.

Toda unión finita de compactos es compacta.

1. 7. Un espacio X es compacto si y sólo si X es numerablemente compacto y de Lindelöf.

EJEMPLOS.

I. 8. Sea (X,τ) un espacio no compacto y p un punto no contenido en X. Sea τ^* la topología en $X^* = X \cup \{p\}$ obtenida uniendo τ a la familia de todos los subconjuntos $C \subset X^*$ tales que $p \in C$ y $X^* - C$ es un subconjunto compacto y cerrado de X. Entonces, (i, X^*) es una compactificación de X, en donde i es la inclusión de X en X^*.

Esta es la llamada *compactificación unipuntual* de X.

I. 9. Sea γ una familia de funciones $\{f_\mu \mid \mu \in M;\ f_\mu : X \to X_\mu\}$ definidas en un espacio fijo X. La *función evaluatoria* de γ es la función $f: X \to \prod_{\mu \in M} X_\mu$ definida como $(f(x))(\mu) = f_\mu(x)$.

Ahora, sea $H = \{h_\mu \mid \mu \in M\}$ la familia de funciones continuas de X en el intervalo cerrado $I = [0,1]$.

La función evaluatoria h de H es un homeomorfismo de X en un subespacio de $I^{\mu} = \prod_{\mu \in M} I_{\mu}$, en donde $I_{\mu} = I$ para toda $\mu \in M$, si y sólo si X es un espacio de Tychonoff.

La compactificación *Stone-Čech* de X es la pareja $(h, B(X))$, en donde h es el homeomorfismo mencionado y $B(X) = h(X)^{-}$.

4. PRE-UNIFORMIDADES.

Sea $\mathcal{U}$ una colección de cubiertas del conjunto X.

33. i) $\mathcal{U}$ es una *pre-uniformidad* (*w-pre-uniformidad*) en X, si dados α, β en $\mathcal{U}$, existe γ, también en $\mathcal{U}$, tal que γ refina (refina débilmente) a la cuña de α y β (Ver figura 13).

ii) Un *espacio* (*w-*)*pre-uniforme* es una pareja $(X,\mathcal{U})$ que consiste de un conjunto X y una (w-)pre-uniformidad $\mathcal{U}$ en X.

iii) La *topología* (*w-*)*pre-uniforme* (en símbolos $\tau_{\mathcal{U}}$) es la topología inducida por la (w-)pre-uniformidad $\mathcal{U}$ en X, y consiste de todos los conjuntos L de X tales que para toda x en L, existe α_x

en $\mathcal{U}$ con la propiedad de que la estrella de x con respecto a α_x está contenida en L.

iv) Una (w-)pre-uniformidad $\mathcal{U}$ en X es *abierta* si cada $\alpha\in\mathcal{U}$ está contenida en $\tau_{\mathcal{U}}$, es decir, si $\cup\{\alpha|\alpha\in\mathcal{U}\}$ es una base de $\tau_{\mathcal{U}}$.

v) Una (w-)pre-uniformidad $\mathcal{U}$ en un espacio topológico (X,τ) es *compatible* si $\tau_{\mathcal{U}}= \tau$.

vi) Una (w-)pre-uniformidad es *(w-)admisible* si es equivalente (débilmente equivalente) a una (w-)pre-uniformidad abierta.

34\. i) $\mathcal{U}$ es una *semi-uniformidad* en X si $\mathcal{U}$ es una pre-uniformidad en X, y si, además, para toda $\alpha\in\mathcal{U}$, existe $\beta\in\mathcal{U}$ tal que, para toda $B\in\beta$, existen $A_B\in\alpha$ y $\gamma_B\in\mathcal{U}$ tales que $St(B,\gamma_B)\subset A_B$.

ii) Un *espacio semi-uniforme* es una pareja $(X,\mathcal{U})$ que consiste de un conjunto X y una semi-uniformidad $\mathcal{U}$ en X.

35. i) $\mathcal{U}$ es una *R-uniformidad* en X si $\mathcal{U}$ es una w-pre-uniformidad en X, y para toda α en $\mathcal{U}$, existe β en $\mathcal{U}$ tal que β refina regularmente a α.

ii) Un *espacio R-uniforme* es una pareja $(X,\mathcal{U})$ que consiste de un conjunto X y una R-uniformidad $\mathcal{U}$ en X.

36, i) $\mathcal{U}$ es una *uniformidad* en X si $\mathcal{U}$ es una pre-uniformidad en X y para toda α en $\mathcal{U}$, existe β en $\mathcal{U}$ tal que β^* refina a α.

ii) Un *espacio uniforme* es una pareja $(X,\mathcal{U})$ que consiste de un conjunto X y una uniformidad $\mathcal{U}$ en X.

OBSERVACIONES.

I. 10. a) A cada subconjunto A de un espacio (w-) pre-uniforme $(X,\mathcal{U})$ se le puede asignar una (w-)pre-uniformidad de la manera obvia: restringiendo cada cubierta de $\mathcal{U}$ a A.

Esta (w-)pre-uniformidad de A se denota por $\mathcal{U}|A$.

b) Si $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son (débilmente) equivalentes y $\mathcal{U}_1$ es una (w-)pre-uniformidad en X, entonces $\mathcal{U}_2$ también es una (w-)pre-uniformidad en X.

c) Sea $\mathcal{U}^+ = \{\beta \mid \beta$ es cubierta de X y $\alpha<\beta$ para alguna $\alpha\in \mathcal{U}\}$,

para $\mathcal{U}$ colección de cubiertas.

Entonces $\mathcal{U}^+$ es equivalente a $\mathcal{U}$.

d) Si $A\subset X$ y $\mathcal{U}$ es una (w-)pre-uniformidad en X, se le pueden asignar a A las topologías $(\tau_{\mathcal{U}})|A$ y $\tau_{\mathcal{U}|A}$.

En general, se tiene $(\tau_{\mathcal{U}})|A \subset \tau_{\mathcal{U}|A}$.

Si $\mathcal{U}$ es una w-pre-uniformidad w-admisible, entonces $(\tau_{\mathcal{U}})|A \supset \tau_{\mathcal{U}|A}$ y, por lo tanto, $(\tau_{\mathcal{U}})|A = \tau_{\mathcal{U}|A}$.

e) Si $\mathcal{U}$ es una colección de cubiertas de X, entonces $\wedge\mathcal{U}$ es una pre-uniformidad en X.

Si $\mathcal{V}$ es una pre-uniformidad en X tal que $\mathcal{U}<\mathcal{V}$ entonces $\wedge\mathcal{U}<\mathcal{V}$.

f) Si $\mathcal{U}_1 <_w \mathcal{U}_2$, entonces $\tau_{\mathcal{U}_1} \subset \tau_{\mathcal{U}_2}$.

I. 11. a) Si $\mathcal{U}_1 \sim \mathcal{U}_2$ y $\mathcal{U}_1$ es semi-uniformidad, entonces, $\mathcal{U}_2$ también lo es.

b) Toda semi-uniformidad en X es admisible (Véase II. 27.).

c) Un espacio topológico (X,τ) es regular si y sólo si existe una semi-uniformidad en X compatible con τ (Veáse II. 23.).

I. 12. a) Si $\mathcal{U}_1 \sim_w \mathcal{U}_2$ y $\mathcal{U}_1$ es una R-uniformidad en X, entonces, $\mathcal{U}_2$ también lo es.

b) Toda R-uniformidad es w-admisible.

I. 13. a) Toda uniformidad en X es una semi-uniformidad y una R-uniformidad (y obviamente una pre-uniformidad).

b) Una pre-uniformidad $\mathcal{U}$ en X es uniformidad si para cada $\alpha \in \mathcal{U}$, existe $\beta \in \mathcal{U}$ tal que $\beta^{\Delta} < \alpha$.

c) Si $\mathcal{U}_1$ es equivalente a $\mathcal{U}_2$ y $\mathcal{U}_1$ es uniformidad en X, entonces $\mathcal{U}_2$ es uniformidad en X.

1.14. Dos pre-uniformidades débilmente equivalentes en un conjunto X inducen la misma topología de X.

1.15. Dos uniformidades compatibles en un espacio compacto regular X son equivalentes.

5. FILTROS.

Sean X un conjunto y $G \subset 2^X$.

37. i) Una familia $\mathcal{D}$ no vacía de elementos no vacíos de G es una *G-dirección* o *G-base de filtro* si dados D_1, D_2 en $\mathcal{D}$, existe D_3 en $\mathcal{D}$ tal que $D_3 \subset D_1 \cap D_2$ (Ver figura 14).

ii) Una *dirección* o *base de filtro* en X es una 2^X-dirección o 2^X-base de filtro.

38. Para cada $H \subset 2^X$, se define al *superset* de H (en símbolos H^+), como la familia de subconjuntos de X que contienen a un elemento de H (Ver figura 15).

39. i) Una $\mathcal{G}$-dirección $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{G}$-*filtro* si dados F en $\mathcal{F}$ y G en $\mathcal{G}$, con F contenido en G, se tiene que G pertenece a $\mathcal{F}$.

Equivalentemente, si $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+ \cap \mathcal{G}$

ii) A un 2^X-filtro se le llama simplemente *filtro*.

iii) El $\mathcal{G}$-*filtro generado* por una $\mathcal{G}$-dirección $\mathcal{D}$ es $\mathcal{G} \cap \mathcal{D}^+$ (Ver figura 16).

40. i) Un $\mathcal{G}$-filtro $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{G}$-*ultrafiltro* si $\mathcal{F}$ no está contenido propiamente en ningún otro $\mathcal{G}$-filtro.

ii) Un *ultrafiltro* es un 2^X-ultrafiltro.

41. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un espacio (w-)pre-uniforme $(X,\mathcal{U})$ y $\alpha \in \mathcal{U}$. Entonces, se definen:

i) La *estrella-asterisco* de F con respecto a α (en símbolos: $St^*(F,\alpha)$), como:

$St^*(F,\alpha) = \cup\{A\in\alpha \mid A\cap F\neq\emptyset, \forall F\in F\}$.

ii) El *filtro asociado* de F o *F-prima* (en símbolos: F'), como:

$F' = \{St(F,\alpha) \mid F\in F, \alpha\in U\}$.

iii) El *filtro redondo asociado* de F o *F-erre* (en símbolos: F^r), como:

$F^r = \{St^*(F,\alpha) \mid \alpha\in U, F\cap\alpha\neq\emptyset\}^+$.

42. Un filtro F es *U-Cauchy* (o *de Cauchy* en (X,U)), si para toda $\alpha\in U$, $F\cap\alpha\neq\emptyset$.

43. Un filtro F es *U-fuertemente de Cauchy* (o *fuertemente de Cauchy* en (X,U)), si F' es U-Cauchy.

44. Un $\mathcal{U}$-filtro de Cauchy es *mínimo* si no contiene propiamente a ningún $\mathcal{U}$-filtro de Cauchy.

45. Un $\mathcal{U}$-filtro $\mathcal{F}$ es *redondo* si $\mathcal{F} = \mathcal{F}^r$.

46. Dos filtros de Cauchy $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ en $(X,\mathcal{U})$, son *equivalentes* (en símbolos: $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$), si $\mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_2'$.

47. El *filtro de vecindades de* x (en símbolos: N_x) está definido como:
$N_x = \{A \in X | x \in \text{int } A\}$.

48. Sea X un espacio topológico, y sea $\mathcal{D}$ una dirección.

i) Un punto $x \in X$ es *punto de adherencia* de $\mathcal{D}$ (en símbolos; $\mathcal{D} \mapsto x$) si toda vecindad de x intersecta a todo elemento de $\mathcal{D}$.

Equivalentemente, $\mathcal{D} \leftrightarrow x$ si $x \in D^{-}$ para toda D en $\mathcal{D}$.

Se denota por $A_{\mathcal{D}}$ al conjunto de puntos de adherencia de la dirección $\mathcal{D}$.

ii) Un punto $x \in X$ es *punto de convergencia* de $\mathcal{D}$ (en símbolos: $\mathcal{D} \to x$) si toda vecindad de x contiene un elemento de $\mathcal{D}$.

Equivalentemente, $\mathcal{D} \to x$ si el filtro de vecindades de x está contenido en el filtro $\mathcal{D}^{+}$.

Se denota por $C_{\mathcal{D}}$ al conjunto de puntos de convergencia de la dirección $\mathcal{D}$.

49. i) Una *cubierta* de $(X,\mathcal{U})$ es de *Cauchy* (o *cubierta $\mathcal{U}$-Cauchy*), si todo $\mathcal{U}$-filtro de Cauchy intersecta a la cubierta.

ii) Se denota por $\mathcal{U}^c$ a la colección de $\mathcal{U}$-cubiertas de Cauchy.

50. Una pre-uniformidad $\mathcal{U}$ está *saturada* si toda cubierta $\mathcal{U}$-Cauchy es un miembro de $\mathcal{U}$.

OBSERVACIONES,

I. 16. Sea X un conjunto, $\mathcal{G}\subset 2^X$ una familia cerrada bajo intersecciones finitas y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{G}$-ultrafiltro.

Si $L_1, L_2, \ldots L_n \in \mathcal{G}$ son tales que $\bigcup_{i=1}^{n} L_i \in \mathcal{F}$, entonces $L_i \in \mathcal{F}$ para alguna $i = 1, 2, \ldots, n$.

I. 17. Sea X un conjunto, $\mathcal{G}\subset 2^X$, y $\mathcal{D}$ una $\mathcal{G}$-dirección.

Entonces, existe un $\mathcal{G}$-ultrafiltro $\mathcal{D}^*$ tal que $\mathcal{D}\subset\mathcal{D}^*$.

1.18. Sea X un espacio topológico y sean $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ direcciones con $\mathcal{D}_1^+ \subset \mathcal{D}_2^+$.

Entonces $\mathcal{D}_2 \to x$ implica $\mathcal{D}_1 \mapsto x$.

También, si $\mathcal{D}_1 \to x$, se tiene $\mathcal{D}_2 \to x$ y $\mathcal{D}_1 \mapsto x$.

6. UNIMORFISMOS.

Sean $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{V})$ dos espacios w-pre-uniformes.

51. Una función $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ es *uniformemente continua* si para toda β en $\mathcal{V}$, existe α en $\mathcal{U}$ tal que el conjunto de las $f(A)$, con A en α, refina a β.

52. i) Una biyección $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ es un *unimorfismo* si f y f^{-1} son uniformemente continuas.

ii) Los espacios $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{V})$ son *unimórficos* si existe un unimorfismo entre ellos.

53. Una función $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ entre dos espacios w-pre-uniformes es un *encaje unimórfico* si f es un unimorfismo de $(X,\mathcal{U})$ sobre un subespacio denso de $(Y,\mathcal{V})$.

OBSERVACIONES.

I. 19. Sean X, Y conjuntos y $f: X \to Y$ una función arbitraria.

Si $B \subset Y$ y α, β son cubiertas de Y, entonces:

i) $St(f^{-1}(B), f^{-1}(\alpha)) \subset f^{-1}(St(B,\alpha))$.

Si además f es suprayectiva, entonces, $St(f^{-1}(B), f^{-1}(\alpha)) = f^{-1}(St(B,\alpha))$.

ii) $(f^{-1}(\alpha))^* < f^{-1}(\alpha^*)$.

Si además f es suprayectiva, entonces, $(f^{-1}(\alpha))^* = f^{-1}(\alpha^*)$.

iii) Si $\alpha < \beta$ (respectivamente, $\alpha <_W \beta$, $\alpha <_R \beta$) entonces $f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\beta)$ (respectivamente, $f^{-1}(\alpha) <_W f^{-1}(\beta)$, $f^{-1}(\alpha) <_R f^{-1}(\beta)$).

iv) Si $\alpha^* < \beta$ entonces $[f^{-1}(\alpha)]^* < f^{-1}(\beta)$.

I. 20. Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son pre-uniformidades en el mismo conjunto X, entonces la función identidad $\mathrm{Id}:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ es uniformemente continua si y sólo si $\mathcal{V}<\mathcal{U}$.

Por tanto, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son equivalentes si y sólo si $\mathrm{Id}:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ es un unimorfismo.

Es claro que, en particular, $\mathrm{Id}:(X,\mathcal{U})\to(X,\mathcal{U})$ es un unimorfismo.

I. 21. Si $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ y $g:(Y,\mathcal{V})\to(Z,\mathcal{W})$ son uniformemente continuas, entonces, $g\circ f$ es uniformemente continua.

I. 22. Toda función constante es uniformemente continua.

7. ESPACIOS TOTALMENTE ACOTADOS

54. Un subconjunto A de un espacio w-pre-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es *totalmente acotado* si para cada $\alpha\in\mathcal{U}$, existe $L\subset\alpha$ finito tal que $A\subset\cup L$.

8. PRODUCTOS.

Sea $H = \{(X_j, U_j) | j \in J\}$ una familia de espacios pre uniformes.

55. Sea $G = \{g_j | j \in J\}$, en donde cada g_j es una función $g_j : Z \to X_j$ y Z es un conjunto fijo.

Entonces, la *pre-uniformidad de Z inducida por G* es el conjunto:

$U(G) = \wedge\{g_j^{-1}(\alpha) | \alpha \in U_j,\ j \in J\}$.

56. Sea $g_j : Z \to X$ la proyección para cada $j \in J$, con $Z = \prod_{j \in J} X_j$.

Se define la *pre-uniformidad producto* en Z como $U(G)$, con $G = \{g_j | j \in J\}$.

OBSERVACIONES.

I. 23. $\mathcal{U}(G)$ es la pre-uniformidad más chica para Z, con la propiedad de que $g_j:(Z,\mathcal{U}(G))\to(X_j,\mathcal{U}_j)$ es uniformemente continua para cada $j\in J$.

Es decir, si $\mathcal{U}$ es una pre-uniformidad en Z, y $g_j:(Z,\mathcal{U})\to(X_j,\mathcal{U}_j)$ es uniformemente continua para cada $j\in J$, entonces $\mathcal{U}(G)<\mathcal{U}$, y, por tanto, la identidad $Id:(Z,\mathcal{U})\to(Z,\mathcal{U}(G))$ es uniformemente continua.

Entonces, si $\mathcal{U}_j'$ es equivalente a $\mathcal{U}_j$ para cada j en J, se tiene que $\mathcal{U}(G')$ y $\mathcal{U}(G)$ son también equivalentes, en donde $\mathcal{U}(G')=\wedge\{g_j^{-1}(\alpha)\mid\alpha\in\mathcal{U}_j',\ j\in J\}$.

9. NULOS Y COCEROS.

Sea L un subconjunto de un espacio topológico X.

57. L es *nulo* en X si existe una función continua $f: X \to [0,1]$ tal que $L = f^{-1}(0)$ (Ver figura 17).

58. L es *cocero* en X si el complemento de L es nulo en X (Ver figura 18).

59. Sea α una familia (cubierta) de subconjuntos del espacio X.

i) α es una *familia (cubierta) cocero* en X si cada $A \in \alpha$ es un conjunto cocero.

ii) α es *fuertemente cocero*, si para toda $\beta \subset \alpha$, la unión de los elementos de β, es cocero.

iii) α es una *familia (cubierta) nula*, si cada A en α es un conjunto nulo (Ver figura 19).

60. i) Para cada espacio (X,τ), la *P-topología* de X (en símbolos: τ_p), es la topología de X que tiene a la colección de subconjuntos nulos como base.

ii) Un subconjunto A de X es *P-abierto* (respectivamente *P-cerrado*), si A es abierto (respectivamente cerrado) en (X,τ_p).

iii) (X,τ) es un *P-espacio* si $\tau = \tau_p$.

61. i) α es una familia *discreta* (respectivamente, *localmente finita*) si cada $x \in X$ tiene una vecindad V_x que intersecta a

lo más a un elemento (a un número finito de elementos) de α.

ii) α es una familia *σ-discreta* (respectivamente, *σ-localmente finita*) si $\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, donde cada α_n es discreta (respectivamente, localmente finita).

iii) α es *punto-finita* si para toda x en X, el conjunto $\{A \in \alpha \mid x \in A\}$ es finito.

62. α es *estrella numerable* si para toda A en α, el conjunto $\{L \in \alpha \mid L \cap A \neq \Phi\}$ es numerable.

63. i) Un conjunto es G_δ si es intersección numerable de abiertos.

ii) Un conjunto es F_σ si es unión numerable de cerrados.

64. Un espacio topológico (X,τ) es *paracompacto* si es regular y toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto y localmente finito.

OBSERVACIONES.

I. 24. i) Un conjunto es G_δ si y sólo si su complemento es F_σ.

ii) La unión de un abierto y un G_δ es un G_δ.
Análogamente, la intersección de un cerrado y un F_σ es un F_σ.

Más generalmente, toda unión finita de G_δ's es G_δ y toda intersección finita de F_σ's es F_σ.

I. 25. i) Todo conjunto nulo es cerrado y G_δ.

ii) Todo cerrado G_δ en un espacio normal es nulo.

iii) En un espacio completamente regular, todo G_δ es unión de conjuntos nulos, es decir, todo G_δ es P-abierto.

I. 26. Un espacio pseudo-métrico es paracompacto y completamente regular.

I. 27. Si (X,τ) es completamente regular, entonces $\tau\subset\tau_p$ y A es unión de conjuntos G_δ si y sólo si $A \in\tau_p$.

I. 28. (X,τ) es un P-espacio si y sólo si X es completamente regular y cada G_δ es abierto.

I. 29. Si (X,τ) es completamente regular, τ_p es la topología más pequeña que contiene a τ y convierte a X en un P-espacio.

I. 30. Sea $\{U_j \mid j \in J\}$ una familia localmente finita de conjuntos coceros en un espacio X y para cada $j \in J$, sea H_j un nulo en X contenido en U_j.

Entonces, $H = \bigcup_{j \in J} H_j$ es un nulo en X y $U = \bigcup_{j \in J} U_j$ es un cocero en X.

10. ESPACIOS COMPLETOS Y COMPLETACIONES.

65. a) Un espacio pre-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es *completo* si todo $\mathcal{U}$-filtro de Cauchy converge en X.

b) Un espacio pre-uniforme $(Y,\mathcal{V})$ es una *completación* del espacio pre-uniforme $(X,\mathcal{U})$ si existe un encaje unimórfico de $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$.

66. Un espacio topológico X es *topológicamente completo*, si X es homeomorfo a un espacio completo. Equivalentemente, si tiene una uniformidad compatible y completa.

OBSERVACION.

1.31. La propiedad de completez topológica es invariante bajo productos topológicos (Véase III. 10.).

II. EXTENSIONES.

67. Sea X un espacio topológico arbitrario. Una *extensión* (Y,g) de X es un espacio Y y un homeomorfismo g de X en Y tal que la ímágen g(X) es densa en Y.

68. Las extensiones pueden ordenarse parcialmente: $(Y,g) \leq (Z,h)$ si existe una función contínua $m: Y \to Z$ tal que $mg = h$.

69. Una pre-uniformidad U es *extendible* (o *extensora*) si todo U-filtro de vecindades es redondo.

70. Una pre-uniformídad U es *llena* si todo U-filtro de Cauchy contíene un U-filtro redondo de Cauchy.

EJEMPLOS.

Es claro que una pre-uniformidad llena no es necesariamente extendible, ni una pre-uniformidad extendible es necesariamente llena.

Por ejemplo:

1.32. Sea X cualquier espacio con más de dos conjuntos abiertos, y sea $\mathcal{U}$ la colección de todas las cubiertas abiertas de X que contienen a X como miembro.

El único filtro redondo de Cauchy es el filtro con el único miembro X.

Entonces, todo filtro de vecindades contiene un filtro redondo de Cauchy.

Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es llena.

Pero, existe un filtro de vecindades que no es redondo.

Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es llena pero no extendible.

En [Ha], ejemplo 3, pág. 12, se da un ejemplo de una pre-uniformidad extendible que no es llena.

12. CUBIERTAS NORMALES Y BASES DE WALLMAN.

72. i) Una *sucesión* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de cubiertas abiertas de un espacio X es *normal* si $\alpha_{n+1} \overset{*}{<} \alpha_n$, para toda $n = 1, 2, 3, \ldots$

ii) Una *cubierta* α es *normal* si pertenece a una sucesión normal de cubiertas.

73. Sea X un espacio topológico. Una sucesión normal de cubiertas de X es *completa*, si la uniformidad $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ es completa.

74. Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ una sucesión de cubiertas abiertas de un espacio topológico X. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ es *omega-delta* (en símbolos: $\omega\Delta$) si cada sucesión $x_1, x_2, \ldots$ en X, con $x_n \in St(x,\alpha_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in X$, se acumula en algún punto de X.

75. Sea X un conjunto y $\mathcal{G}\subset 2^X$.

i) La familia *complementaria* de $\mathcal{G}$ (en símbolos: $C(\mathcal{G})$), es el conjunto de las L, tales que $X-L\in\mathcal{G}$.

ii) $\mathcal{G}$ es *anular* si dados G_1, G_2 en $\mathcal{G}$, se tiene $G_1\cap G_2\in\mathcal{G}$ y $G_1\cup G_2\in\mathcal{G}$.

iii) $\mathcal{G}$ es *regular* si para toda G en $\mathcal{G}$ y para toda x en G, existe H en $C(\mathcal{G})$ tal que $x\in H$ y $H\subset G$.

iv) $\mathcal{G}$ es *normal* si dados H_1 y H_2 en $C(\mathcal{G})$, con $H_1\cap H_2 = \emptyset$, existen G_1 y G_2 en $\mathcal{G}$ tales que $G_1\cap G_2 = \emptyset$ y tales que $H_1\subset G_1$ y $H_2\subset G_2$.

76. Una base $\mathcal{B}$ de un espacio no vacío X es una *base de Wallman* de X si $\mathcal{B}$ es anular y regular.

77. Una cubierta abierta α de un espacio X es *delta-normal* (en símbolos: δ-normal) si α tiene un refinamiento cocero y estrella numerable.

78. Sea X un conjunto y $G \subset 2^X$.

Sea $C(G) = \{A \mid X - A \in G\}$.

i) Si $G_1, G_2 \subset 2^X$, entonces, $G_1 << G_2$ si cada pareja de elementos ajenos de G_1 está contenida en una pareja de elementos ajenos de G_2.

ii) Dos bases de Wallman B_1, B_2 en un espacio X son *equivalentes* si $C(B_1) << C(B_2)$ y $C(B_2) << C(B_1)$.

CAPITULO II

FILTROS Y ULTRAFILTROS

En este capítulo se estudiarán las principales herramientas utilizadas en esta tesis: Los filtros y los ultrafiltros.

Se comenzará este capítulo con algunos resultados sobre adherencia y convergencia de direcciones.

Sea X un espacio topológico.

II. 1. Sean $A \subset X$ y $p \in X$. Entonces, son equivalentes las siguientes propiedades:

a) $p \in A^{-}$

b) Existe una 2^{A}-dirección $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D} \to p$.

c) Existe una 2^{A}-dirección $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D} \mapsto p$.

Demostración.

a)$\Rightarrow$b) Si $p \in A^{-}$, sea $\mathcal{D} = \{D \cap A \mid D$ es vecindad de $p\}$. Como $\mathcal{D}$ es no vacía, y cada miembro de $\mathcal{D}$ es no vacío, y obviamente la intersección de dos miembros de $\mathcal{D}$ está en $\mathcal{D}$, entonces $\mathcal{D}$ es una 2^{A}-dirección.

Como además, cada vecindad de p contiene a algún miembro de $\mathcal{D}$, entonces $\mathcal{D} \to p$.

b)$\Rightarrow$c) Si $\mathcal{D} \to p$, entonces $p \in D^{-}$ para toda $D \in \mathcal{D}$, porque si $p \notin D^{-}$ para alguna $D \in \mathcal{D}$, entonces p tendría una vecindad V, tal que $V \cap D = \emptyset$. Pero como $\mathcal{D} \to p$, existiría $D' \in \mathcal{D}$ tal que $D' \subset V$.

Por lo tanto, $D' \cap D = \emptyset$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, $\mathcal{D} \mapsto p$.

c)$\Rightarrow$a) Si $\mathcal{D} \mapsto p$ con una 2^{A}-dirección $\mathcal{D}$, entonces $p \in D^{-}$ para toda $D \in \mathcal{D}$.

Como $D \subset A$ para toda $D \in \mathcal{D}$, entonces $p \in A^{-}$.

II. 2. Dos direcciones $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ tales que $\mathcal{D}_1^+ = \mathcal{D}_2^+$ tienen los mismos puntos de adherencia y convergencia.

Por tanto, para cada dirección $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}^+$ tienen los mismos puntos de adherencia y convergencia.

Demostración.

Por definición, $\mathcal{D}_1 \to p$ si y sólo si $N_p \subset \mathcal{D}_1^+$. Pero, por hipótesis, $\mathcal{D}_1^+ = \mathcal{D}_2^+$. Por lo que $N_p \subset \mathcal{D}_2^+$. Entonces, $\mathcal{D}_2 \to p$. Análogamente, si $\mathcal{D}_2 \to p$, entonces $\mathcal{D}_1 \to p$. Por consiguiente, $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ tienen los mismos puntos de convergencia.

Ahora, si $p \notin A_{\mathcal{D}_1}$, $p \notin D^-$ para alguna $D \in \mathcal{D}_1$. Entonces existe $D' \in \mathcal{D}_2$ tal que $D' \subset D$ (pues $\mathcal{D}_1^+ = \mathcal{D}_2^+$). Por lo tanto, $p \notin D'^-$ y $p \notin A_{\mathcal{D}_2}$. De donde, $A_{\mathcal{D}_2} \subset A_{\mathcal{D}_1}$. Análogamente, se prueba que $A_{\mathcal{D}_1} \subset A_{\mathcal{D}_2}$. Consecuentemente, $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ tienen los mismos puntos de adherencia.

Por último, como $\mathcal{D}^{++} = \mathcal{D}^{+}$, entonces $\mathcal{D}^{+}$ y $\mathcal{D}$ tienen los mismos puntos de adherencia y convergencia.

II. 3. Sea $\mathcal{N}$ un ultrafiltro. Entonces $A_{\mathcal{N}} = C_{\mathcal{N}}$.

Demostración.

Sean $p \in A_{\mathcal{N}}$ y $\mathcal{N}' = \{N \cap H / N \in \mathcal{N}, H \in \mathcal{N}_p\}^{+}$. Como $\mathcal{N}'$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, y la intersección de dos de ellos vuelve a estar en $\mathcal{N}'$, entonces $\mathcal{N}'$ es una dirección.

Además, como se está tomando el superset, $\mathcal{N}'$ es un filtro.

Cada vecindad de p está en $\mathcal{N}'$, de manera que $\mathcal{N}' \to p$. Es claro, además que $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$; pero, como $\mathcal{N}$ es un ultrafiltro, se tiene $\mathcal{N} = \mathcal{N}'$, y, por tanto, $\mathcal{N} \to p$.

11. 4. *Teorema.*

X es de Hausdorff si y sólo si toda dirección converge a lo más a un punto.

Demostración.

Si X no es de Hausdorff, existen dos puntos p, q tales que cada vecindad de p intersecta a cada vecindad de q.
Sea $\mathcal{D} = \{L \cap M \mid L \in N_p,\ M \in N_q\}$. Entonces cada miembro de $\mathcal{D}$ es no vacío. Se deduce fácilmente que $\mathcal{D}$ es una dirección. $\mathcal{D}$ converge a p y q, porque cada vecindad de p (y de q) está en la familia $\mathcal{D}$. Por consiguiente, $\mathcal{D}$ es una dirección que converge a más de un punto.

Recíprocamente, si una dirección $\mathcal{D}$ converge a dos puntos distintos, no puede haber vecindades ajenas de éstos (ya que la intersección de dos elementos en la dirección es no vacía). Por tanto, X no es de Hausdorff.

II. 5. *Proposición.*

Son equivalentes:

i) X es compacto.

ii) Para toda dirección $\mathcal{D}$, $A_{\mathcal{D}} \neq \emptyset$.

iii) Para todo ultrafiltro $\mathcal{D}$, $C_{\mathcal{D}} \neq \emptyset$.

Demostración.

i) => ii) Sea $\mathcal{D}$ una dirección. Si $A_{\mathcal{D}} = \emptyset$, se tiene $\cap\{D^{-} \mid D\in\mathcal{D}\} = \emptyset$. De donde, $\{X-D^{-} \mid D\in\mathcal{D}\}$ es una cubierta abierta de X. Pero, por hipótesis, X es compacto. Entonces existen $D_1, D_2, \ldots, D_k \in \mathcal{D}$ tales que $X = (X-D_1^{-})\cup(X-D_2^{-})\cup\ldots\cup(X-D_k^{-})$. Por lo tanto, por De Morgan, $D_1^{-}\cap D_2^{-}\cap\ldots\cap D_k^{-} = \emptyset$. De donde, $D_1\cap D_2\cap\ldots\cap D_k = \emptyset$, una contradicción.

ii)=> iii) Por definición, un ultrafiltro es una dirección, y en toda dirección $\mathcal{D}$, $A_{\mathcal{D}} \neq \emptyset$, por hipótesis. Por la observación II. 3, $A_{\mathcal{D}} = C_{\mathcal{D}}$. Entonces, $C_{\mathcal{D}} \neq \emptyset$.

iii) => i) Sea X no compacto. Sea $\{V_i \mid i\in I\}$ una cubierta abierta sin subcubierta finita.

Ahora, definiendo $D_J = X - \cup\{V_i \mid i \in J\}$ para cada $J \subset I$, sea $\mathcal{D} = \{D_J \mid J \subset I$, finito$\}$.

Como, por De Morgan, $D_J \cap D_{J'} = D_{J \cup J'}$, claramente los D_J forman una dirección $\mathcal{D}$. La dirección $\mathcal{D}$ está contenida en un ultrafiltro $\mathcal{D}_0$. Por hipótesis, $\mathcal{D}_0$ converge. Entonces $\mathcal{D}_0 \to p$ para cierta $p \in X$. Como las V_i cubren a X, $p \in V_i$ para alguna $i \in I$. Por otro lado, $X - V_i = D_{\{i\}}$ está en $\mathcal{D}_0$, pues $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_0$. Como $\mathcal{D}_0 \to p$, también V_i está en $\mathcal{D}_0$. Esto es una contradicción, porque $V_i \in \mathcal{D}_0$, y $X - V_i \in \mathcal{D}_0$ implica que $\mathcal{D}_0$ no es una dirección. Por consiguiente, si cada ultrafiltro converge, entonces X es compacto.

A continuación, se estudiarán los principales resultados relativos a filtros y ultrafiltros.

Nota. En donde no se especifique, $(X,\mathcal{U})$ denotará un espacio w- pre-uniforme.

II. 6. *Lema.*

Sean $\mathcal{F}_1$ un filtro redondo y $\mathcal{F}_2$ un filtro de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$.

Entonces, o $\mathcal{F}_1$ está contenido en $\mathcal{F}_2$ ó $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ tienen miembros ajenos.

Demostración.

Si $\mathcal{F}_1$ no está contenido en $\mathcal{F}_2$, existe un miembro F_1 de $\mathcal{F}_1$ que no está en $\mathcal{F}_2$. Como por hipótesis, $\mathcal{F}_1$ es redondo, existe α en $\mathcal{U}$ tal que $St^*(F_1,\alpha)\subset F_1$. Además, como $\mathcal{F}_2$ es de Cauchy, existe L_2 en la intersección de $\mathcal{F}_2$ y α. Entonces, para alguna L_1 en $\mathcal{F}_1$ se tiene $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, porque en caso contrario, $L_2 \subset St^*(F_1,\alpha) \subset F_1$, y $F_1 \in \mathcal{F}_2$, que no es posible.

II. 7. *Corolario.*

Todo filtro redondo de Cauchy $\mathcal{F}$ es mínimo en $(X,\mathcal{U})$.

Demostración.

Sea $\mathcal{F}$ redondo de Cauchy. Si $\mathcal{F}$ no es mínimo, existe un filtro de Cauchy $\mathcal{F}_0$ contenido propiamente en $\mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_0$ no tienen miembros ajenos, y, por el lema anterior (II. 6), $\mathcal{F}$ está contenido en $\mathcal{F}_0$, lo que es una contradicción. Por consiguiente, $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy mínimo.

II. 8. *Lema.*

Si $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$-Cauchy, entonces $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}^r\subset\mathcal{F}$.

Demostración.

Sea $St(F,\alpha)$, con $F \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathcal{U}$.

Se tiene entonces que $St(F,\alpha) \in \mathcal{F}'$. Es claro que $St^*(\mathcal{F},\alpha) \subset St(F,\alpha)$.

Por lo tanto, de la definición de $\mathcal{F}^r$, se tiene que $St(F,\alpha) \in \mathcal{F}^r$.

De donde, $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}^r$.

Ahora, sea $St^*(\mathcal{F},\alpha) \in \mathcal{F}^r$, y sea $F \in \mathcal{F} \cap \alpha$.

Entonces, $F \subset St^*(\mathcal{F},\alpha)$ y $St^*(\mathcal{F},\alpha) \in \mathcal{F}$.

Por consiguiente, se tiene que $\mathcal{F}^r \subset \mathcal{F}$.

II. 9. *Corolario.*

Si $\mathcal{F}$ es de Cauchy y $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, entonces $\mathcal{F}$ es redondo.

Demostración.

Por el lema anterior (resultado II. 8.), se tiene que $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}^r \subset \mathcal{F}$.

Por hipótesis, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Por tanto, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^r$.

Entonces, por definición, $\mathcal{F}$ es redondo.

II. 10. *Lema.*

Si $\mathcal{F}$ es fuertemente de Cauchy, entonces $\mathcal{F}'$ es de Cauchy y está contenido en cada filtro de Cauchy contenido en $\mathcal{F}$.

Demostración.

Como $\mathcal{F}$ es fuertemente de Cauchy, entonces, por definición, $\mathcal{F}'$ es de Cauchy.

Sea $\mathcal{F}_0$ un filtro de Cauchy contenido en $\mathcal{F}$.

Sea $St(F,\alpha) \in \mathcal{F}'$, con $F \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathcal{U}$.

Como $\mathcal{F}_0$ es de Cauchy, existe $F_0 \in \mathcal{F}_0 \cap \alpha$.

Como $F_0 \cap F \neq \emptyset$ (pues $\mathcal{F}$ es filtro) y $F_0 \in \alpha$, se tiene $F_0 \subset St(F,\alpha)$. Por lo tanto, $St(F,\alpha) \in F_0$ y $\mathcal{F}' \subset F_0$.

Por consiguiente, $\mathcal{F}'$ está contenido en cada filtro de Cauchy contenido en $\mathcal{F}$.

II. 11. *Corolario.*

Todo filtro fuertemente de Cauchy F contiene un único filtro mínimo de Cauchy, a saber, $\mathcal{F}'$.

II. 12. *Lema.*

Todo filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en un espacio semiuniforme $(X,\mathcal{U})$ es fuertemente de Cauchy.

Demostración.

Sea α en $\mathcal{U}$. Por la condición de semi-uniformidad, existe β en $\mathcal{U}$, tal que para toda B en β, existen A_B en α y γ_B en $\mathcal{U}$ tales que $St(B,\gamma_B)\subset A_B$.

Como $\mathcal{F}$ es de Cauchy, existe B en $\mathcal{F}\cap\beta$.

Entonces $A_B \in \alpha\cap\mathcal{F}'$. Por lo tanto, $\mathcal{F}'$ es de Cauchy.

Finalmente, por definición, $\mathcal{F}$ es fuertemente de Cauchy.

II. 13. a) En la familia de filtros de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$, la relación "$\sim$" es de equivalencia (Ver def. 46).

b) Si $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ y $\mathcal{F}_1$ es fuertemente de Cauchy, también $\mathcal{F}_2$ es fuertemente de Cauchy.

c) Si $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ son fuertemente de Cauchy, entonces son equivalentes:

i) $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$.

ii) $\mathcal{F}_1' \subset \mathcal{F}_2'$.

iii) $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ es de Cauchy.

Demostración.

a) Si $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$, se tiene $\mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_2'$; entonces, $\mathcal{F}_2' = \mathcal{F}_1'$, y por lo tanto, $\mathcal{F}_2 \sim \mathcal{F}_1$.

Como $\mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_1'$, entonces $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_1$.

Si $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ y $\mathcal{F}_2 \sim \mathcal{F}_3$, entonces $\mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_2'$ y $\mathcal{F}_2' = \mathcal{F}_3'$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_3'$. De donde, $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_3$.

b) Si $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ y $\mathcal{F}_1$ es fuertemente de Cauchy, entonces $\mathcal{F}_1'$ es de Cauchy (por definición), y $\mathcal{F}_2'$ es de Cauchy (porque $\mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_2'$). Por lo tanto, $\mathcal{F}_2$ es fuertemente de Cauchy.

c) i)=>ii) Por definición, $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ si y sólo si $\mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_2'$. Por lo tanto, si $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$, entonces, $\mathcal{F}_1' \subset \mathcal{F}_2'$.

ii)=>iii) Si $\mathcal{F}_1' \subset \mathcal{F}_2'$ entonces $\mathcal{F}_1' \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Por lo tanto, como $\mathcal{F}_1'$ es de Cauchy, entonces $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ es de Cauchy.

iii) => i) Sea $F_1 \in \mathcal{F}_1$ y $\alpha \in \mathcal{U}$. Como por hipótesis $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ es de Cauchy, existe $F_2 \in (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \cap \alpha$. Como $\mathcal{F}_1$ es filtro, entonces $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F_2 \subset St(F_1,\alpha)$ y $St(F_1,\alpha) \in \mathcal{F}_2$, de manera que $\mathcal{F}_1' \subset \mathcal{F}_2$. Por lo tanto, por el lema II. 10., $\mathcal{F}_2' \subset \mathcal{F}_1'$. De la misma forma se prueba que $\mathcal{F}_1' \subset \mathcal{F}_2'$. Por consiguiente, $\mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_2'$.

II. 14. *Corolario.*

Un filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en un espacio semi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es redondo sí y sólo si $\mathcal{F}$ es mínimo.

Demostración.

Por el resultado II. 7., todo filtro redondo de Cauchy es mínimo.
Recíprocamente, sea $\mathcal{F}$ un filtro mínimo de Cauchy en un espacio semi-uniforme.
Entonces, por el lema II. 12., $\mathcal{F}$ es fuertemente de Cauchy. Por el resultado II. 10., el único filtro mínimo de Cauchy contenido en un filtro fuertemente de Cauchy $\mathcal{F}$ es $\mathcal{F}'$.
Por hipótesis, $\mathcal{F}$ es mínimo, y, por lo tanto, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. De donde, por el corolario II. 9., $\mathcal{F}$ es redondo.

II. 15. *Corolario.*

Todo filtro F de Cauchy en un espacio semi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ contiene un filtro redondo de Cauchy.

Demostración.

Por el resultado II. 12., F es fuertemente de Cauchy.

Entonces, por el corolario II. 11., F contiene un único filtro mínimo de Cauchy, que es F'.

Por el corolario anterior (II. 14.), un filtro mínimo de Cauchy en un espacio semi-uniforme es redondo.

Por lo tanto, $\bar{F}$ contiene un filtro redondo de Cauchy.

II. 16. *Proposición.*

Sea $\mathcal{F}$ un filtro redondo de Cauchy en el espacio pre-uniforme y admisible $(X,\mathcal{U})$.
Si x en X es un punto de adherencia de $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ converge a x.
Por lo tanto, $\mathcal{F}$ converge a x si y sólo si x es punto de adherencia de $\mathcal{F}$.

Demostración.

Sea V cualquier vecindad de x, en donde $x \in A_{\mathcal{F}}$.
Sea α en $\mathcal{U}$ tal que $St(x,\alpha) \subset V$, y sea M en la intersección de α y $\mathcal{F}$.
Como $\mathcal{F}$ es redondo, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^r$, y por lo tanto, existe β en $\mathcal{U}$ tal que $St^*(\mathcal{F},\beta) \subset M$.
Sea y un elemento cualquiera del conjunto de puntos de adherencia de $\mathcal{F}$.
Si y no pertenece a $St^*(\mathcal{F},\beta)$, existen B en β y L en $\mathcal{F}$, tales que y está en B, y la intersección de B y L es vacía.
Como $\mathcal{U}$ es admisible, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{U}$ es abierta.

Por lo tanto, y no pertenece a L^-, lo que es una contradicción con el hecho de que y sea un punto de adherencia de $\mathcal{F}$.

Por lo tanto, $A_{\mathcal{F}}$ está contenido en $St^*(\mathcal{F},\beta)$.

En particular, como x es un punto de adherencia de $\mathcal{F}$, x está en $St^*(\mathcal{F},\beta)$, que a su vez está contenido en M.

Entonces, $M \subset St(x,\alpha) \subset V$.

Por lo tanto, $V \in \mathcal{F}$.

En consecuencia, si x es punto de adherencia de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ converge a x.

Y como obviamente, si x es punto de convergencia de $\mathcal{F}$, también x es punto de adherencia de $\mathcal{F}$, entonces, x es punto de adherencia de $\mathcal{F}$ si y sólo si $\mathcal{F}$ converge a x.

II. 17. *Teorema.*

Sea $\mathcal{U}$ una pre-uniformidad admisible en X y sea $\mathcal{F}$ un filtro que converge a un punto x en X.
Entonces $\mathcal{F}$ es de Cauchy y el filtro de vecindades de x es un filtro mínimo de Cauchy contenido en $\mathcal{F}$.

Demostración.

Como $\mathcal{U}$ es admisible, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{U}$ es abierta, ya que dos pre-uniformidades equivalentes tienen los mismos filtros de Cauchy.
Sea α en $\mathcal{U}$ y sea A en α tal que x está en A.
Como $\mathcal{F}$ converge a x y A es abierto, A pertenece a $\mathcal{F}$.
Por lo tanto, la intersección de $\mathcal{F}$ y α es no vacía.
Entonces, por la definición, $\mathcal{F}$ es de Cauchy.
Obviamente, N_x converge a x, por lo que N_x es de Cauchy.

II. 18. *Corolario.*

Sea $\mathcal{U}$ una semi-uniformidad compatible en el espacio X y sea $\mathcal{F}$ un filtro que converge a un punto x en X.
Entonces $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{U}$-filtro de Cauchy, y el filtro mínimo de Cauchy $\mathcal{F}'$ coincide con N_x.

Demostración.

Toda semi-uniformidad es una pre-uniformidad admisible, por la observación I. 11. b).
Por el teorema anterior (II. 17.), $\mathcal{F}$ es de Cauchy, y N_x es un filtro mínimo de Cauchy contenido en $\mathcal{F}$.
Por el resultado II. 12., $\mathcal{F}$ es fuertemente de Cauchy, y, por lo tanto, por el corolario II. 11., $\mathcal{F}'$ es el único filtro mínimo de Cauchy contenido en $\mathcal{F}$.
Por consiguiente, N_x coincide con $\mathcal{F}'$.

II. 19. *Proposición.*

a) Si $\mathcal{U}$ es una w-pre-uniformidad w-admisible en X, entonces $B^{-}\subset St(B,\gamma)$ para cualquier subconjunto B de X y para cualquier $\gamma\in\mathcal{U}$.

b) Sean $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ dos filtros de Cauchy equivalentes en el espacio w-pre-uniforme y w-admisible $(X,\mathcal{U})$.

Entonces, $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ tienen los mismos puntos de adherencia.

Es decir, $\cap\{F_1^{-}|F_1\in\mathcal{F}_1\} = \cap\{F_2^{-}|F_2\in\mathcal{F}_2\}$.

Demostración.

a) Como $\mathcal{U}$ es w-admisible en X, existe $\mathcal{U}'$, w-pre-uniformidad abierta, tal que $\mathcal{U}'<_w \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}<_w \mathcal{U}'$.

Entonces existe $\gamma'\in\mathcal{U}'$ tal que $\gamma'<_w\gamma$.

Obviamente, $St(B,\gamma')\subset St(B,\gamma)$.

Ahora, si se supone que γ' es abierta, y se toma $x\in B^{-}$, entonces existe $L\in\gamma$ tal que

$x \in L \in \gamma'$ (porque γ es cubierta).

De donde, $B \cap L \neq \emptyset$.

Por lo tanto, $L \subset St(B,\gamma')$ y $B^{-} \subset St(B,\gamma') \subset St(B,\gamma)$.

b) Sea x en X tal que x no pertenece a F_2^{-} para alguna F_2 en $\mathcal{F}_2$.

Sea α en $\mathcal{U}$ tal que $St(x,\alpha) \cap F_2 = \emptyset$.

Como $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$, existen F_1 en $\mathcal{F}_1$ y β en $\mathcal{U}$ tales que $St(F_1,\beta) \subset St(F_2,\alpha)$.

Como $\mathcal{U}$ es w-admisible, se tiene $F_1^{-} \subset St(F_1,\beta)$.

Por lo tanto, si $x \in F_1^{-}$, entonces $x \in St(F_2,\alpha)$ y $St(x,\alpha) \cap F_2 \neq \emptyset$, que es una contradicción.

Por consiguiente, $x \notin F_1^{-}$, con lo que:

$$\cap\{F_1^{-} \mid F_1 \in \mathcal{F}_1\} \subset \cap\{F_2^{-} \mid F_2 \in \mathcal{F}_2\}$$

Análogamente, se prueba que:

$$\cap\{F_2^{-} \mid F_2 \in \mathcal{F}_2\} \subset \cap\{F_1^{-} \mid F_1 \in \mathcal{F}_1\}$$

Por lo que, $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ tienen los mismos puntos de adherencia.

A continuación, se darán algunos ejemplos de pre-uniformidades y sus topologías inducidas.

II. 20, a) Sea $\mathcal{U}_1=\{\{X\}\}$.

Entonces $\mathcal{U}_1$ es una uniformidad en X y su topología inducida $\tau_{\mathcal{U}_1}$ es la topología indiscreta de X.

b) Sea $\mathcal{U}_2$ el conjunto de todas las cubiertas de X.

Entonces $\mathcal{U}_2$ es una uniformidad y $\tau_{\mathcal{U}_2}$ es la topología discreta de X.

De hecho, $\mathcal{U}_2 \sim \{\gamma_X\}$, en donde $\gamma_X = \{\{x\} \mid x \in X\}$.

c) Sea (X,τ) un espacio R_0.

Sea $\mathcal{U}_3$ el conjunto de cubiertas abiertas finitas de X.

Entonces $\mathcal{U}_3$ es una pre-uniformidad abierta de X y $\tau_{\mathcal{U}_3} = \tau$.

II. 21 a) Sea (X,τ) un espacio topológico regular y $\mathcal{U}_4$ la familia de cubiertas abiertas de X. Entonces $\mathcal{U}_4$ es una semi-uniformidad.

Demostración.

Obviamente, $\mathcal{U}_4$ es una pre-uniformidad.

Sea $\alpha\in\mathcal{U}$ una cubierta abierta.

Para toda $x\in X$, sea $A_x\in\alpha$ tal que $x\in A_x$.

Como X es regular, existe B_x abierto tal que $x\in B_x\subset \bar{B}_x\subset A_x$.

Ahora, sea $\beta = \{B_x | x\in X\}$.

Para cada $B_x\in\beta$, sea $\gamma_{B_x} = \{A_x, X-\bar{B}_x\}$.

Entonces $St(B_x,\gamma_{B_x}) = A_x\subset A_x$.

Entonces $\mathcal{U}_4$ es una semi-uniformidad.

b) Si $\mathcal{U}_5$ es una semi-uniformidad, su topología inducida $\tau_{\mathcal{U}_5}$ es regular.

Demostración.

Sea $x\in U\in\tau_{\mathcal{U}_5}$.

Por definición, existe $\alpha\in\mathcal{U}_5$ tal que $St(x,\alpha) \subset U$.

Sea β en $\mathcal{U}_5$ como en la propiedad de semi-uniformidad. Entonces $\beta^0=\{\text{int } B \mid B\in\beta\}$ también es cubierta, y por lo tanto, existe $B\in\beta$ tal que $x\in B^0$.

Sean A en α y γ_B en $\mathcal{U}_5$ tales que $St(B,\gamma_B) \subset A \subset St(x,\alpha)$.

Como $\mathcal{U}_5$ es admisible, $B^- \subset St(B,\gamma_B)$, por el resultado II. 19. a).

Por lo tanto, $x\in B^0 \subset B^- \subset St(B,\gamma_B) \subset A \subset St(x,\alpha) \subset U$.

II, 22. La familia $\mathcal{U}_6$ de cubiertas abiertas finitas de un espacio X que sea normal y R_0 es una uniformidad compatible en X.

Demostración.

Para $\alpha\in \mathcal{U}_6$, sean U_1, U_2, ..., U_n los elementos de α, y sea J el conjunto $\{1,\ldots,n\}$.

Entonces existen cerrados $H_1, H_2, \ldots, H_n$, tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ y $H_i \; U_i$ para toda i en J (utilizando el lema del encogimiento[1]).

Para cada $A \subset J$, sea $C(A) = (\cap\{U_j \mid j \in A\}) \cap (\cap \{X - H_j \mid j \in J - A\})$.

Sea $\beta = \{C(A) \mid A \subset J\}$.

Obviamente, $\beta \in \mathcal{U}_6$.

Ahora, dado $p \in X$, sea i tal que $p \in H_i$.

Si $p \in C(B)$, $B \subset J$, necesariamente $i \in B$, porque si $i \in J - B$, se tendría que $C(B) \subset X - H_i$, lo que contradice el hecho de que $p \in C(B) \cap H_i$.

Por lo tanto, $C(B) \subset U_i$ y $St(p, \beta) \subset U_i$.

II. 23. (*Observación I. 11. c)*).

Un espacio topológico (X, τ) es regular si y sólo si existe una semi-uniformidad en X compatible con τ.

(1) *Ver, por ejemplo,* [Du], Cap. VII, Teorema 6.1, pag.81

Demostración.

Si X es regular, la familia $\mathcal{U}$ de todas las cubiertas abiertas de X es una semi-uniformidad en X (Por el resultado II. 21. a)).
Además, es claro que $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$.
Recíprocamente, si $\mathcal{V}$ es una semi-uniformidad en X compatible con τ, τ es regular por el resultado II. 21. b).

II. 24. *Proposición.*

Todo espacio completamente regular X tiene una uniformidad compatible formada por cubiertas finitas.
Recíprocamente, si un espacio X tiene una R-uniformidad compatible, entonces X es completamente regular.

Demostración.

Sea (X,α) un espacio completamente regular. Sea $I = [0,1]$.

Como la familia de cubiertas abiertas finitas en un espacio normal y R_0 X es una uniformidad compatible en X (II. 22.), entonces, la familia $\mathcal{U}_I$ de cubiertas abiertas finitas de I es una uniformidad compatible en I.

Sea $\alpha\in\mathcal{U}_I$ y $f:X\to I$ una función continua arbitraria.

Si se define $\alpha_f = \{f^{-1}(A)\,|\,A\in\alpha\}$, entonces el conjunto $\mathcal{U} = \wedge\{\alpha_f\,|\,\alpha\in\mathcal{U}_I,\ f:X\to I$ continua$\}$ es una uniformidad en X (por el resultado I. 19.).

Es obvio que $\tau_{\mathcal{U}}\subset\tau$.

Ahora, sea $x\in V\in\tau$. Por ser X completamente regular, existe $f:X\to I$ continua tal que $f(x) = 0$ y $X-V\subset f^{-1}(1)$.

Sea $\alpha = \{[0,1), (0,1]\}$.

Obviamente α es una cubierta de I y $\alpha \epsilon \mathcal{U}_I$.

Es claro que $St(x,\alpha_f) = f^{-1}([0,1)) \subset V$.

Por lo tanto, $V \epsilon \tau_{\mathcal{U}}$.

Con lo que $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{U}$ una R-uniformidad compatible en X.

Sea $p \in \mathcal{V} \in \tau = \tau_{\mathcal{U}}$.

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \epsilon \mathcal{U}$ tales que $St(p,\alpha_1) \subset V$ y tales que $\alpha_{n+1} <_R \alpha_n$ para cada $n = 1, 2, \ldots$

Ahora, existe una pseudo-métrica ρ en X (*véase* [Ho], construcción, pág. 243) que satisface las siguientes propiedades:

i) La identidad $i:(X,\tau) \to (X,\tau_\rho)$ es continua (i.e., $\tau_\rho \subset \tau$)

ii) $St(x,\alpha_{n+1})^- \subset St(x,\alpha_n)$ para toda x en X y para cada $n = 1, 2, \ldots$

iii) Si $\beta_n = \{B^{\rho}_{2^{-n}}(x) \mid x \in X\}$, donde

$B_{\varepsilon}^{\rho}(x) = \{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$

$n = 1, 2, \ldots$

Entonces $\beta_{n+1} < \alpha_n < \beta_{n-1}$ para toda

$n = 1, 2, \ldots$

iv) Para toda x en X, $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\alpha_n) =$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\alpha_n)^{-} = \{y \in X \mid \rho(x,y) = 0\}.$

Por tanto, si se define

$f(x) = 4 \min \{\frac{1}{4}, \rho(p,x)\}$,

es claro que f es una función continua de X en I y $f(p) = 0$.

Como $B^{\rho}_{1/4}(p) \subset St(p,\alpha_1) \subset V$, se tiene que

$X - V \subset f^{-1}(1)$.

Por lo tanto X es completamente regular.

II. 25. *Lema.*

i) Sea X un conjunto.

Si para cada $x \in X$ existe una dirección $\mathcal{D}_x$ formada por subconjuntos de X que contienen a x, entonces:

$$\tau = \{V \in 2^X \mid \forall\ x \in V, \exists\ D \in \mathcal{D}_x \ni D \subset V\}$$

es una topología de X.

ii) Si, además, se cumple la condición siguiente:

(*) Si $D \in \mathcal{D}_x$, existe $D' \in \mathcal{D}_x$ tal que, para cada $y \in D'$ existe $D'' \in \mathcal{D}_y$ tal que $D'' \subset D$.

Entonces, para cada $A \subset X$, el interior de A (A^o o int(A)) está dado por:

$$A^o = \mathrm{int}(A) = \{x \in A \mid \exists\ D \in \mathcal{D}_x \ni D \subset A\}.$$

Demostración.

i) Es inmediata.

ii) Sea $A \subset X$, y sea $B = \{x \in A \mid \exists\, D \in \mathcal{D}_x \ni D \subset A\}$.

Es claro que $A^0 \subset B \subset A$.

Ahora, sea $x \in B$.

Por lo tanto, existe $D \in \mathcal{D}_x$ tal que $D \subset A$.

Por la condición (*) de la hipótesis, existe $D' \in \mathcal{D}_x$ tal que para cada $y \in D'$ se puede encontrar $D'' \in \mathcal{D}_y$ con la propiedad $D'' \subset D$.

Esto implica que $D' \subset B$.

Por lo tanto, $B \in \tau$ y $B \subset A^0$, es decir, $B = A^0$.

II, 26. *Teorema.*

Sea $\mathcal{U}$ una w-pre-uniformidad w-admisible en un conjunto X, y sea $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$.
Si $A \subset X$, entonces:

$$\mathrm{int}_{\tau}(A) = \{x \in A \mid \exists\ \alpha \in \mathcal{U} \ni St(x,\alpha) \subset A\}.$$

Demostración.

Basta probar que para cada $x \in X$, la dirección $\mathcal{D}_x = \{St(x,\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{U}\}$ cumple la condición (*) en II. 25.
Como $\mathcal{U}$ es w-admisible, existe una w-pre-uniformidad abierta $\mathcal{U}'$, tal que $\mathcal{U}' \sim_w \mathcal{U}$.
Sean $\beta \in \mathcal{U}'$, $\gamma \in \mathcal{U}$ tales que $\gamma <_w \beta <_w \alpha$ y sea $D' = St(x,\gamma)$.
Si $y \in D'$, entonces $y \in St(x,\gamma) \subset St(x,\beta) \subset St(x,\alpha)$.
Como $St(x,\beta) \in \tau$, existe $\delta \in \mathcal{U}$ tal que $St(y,\delta) \subset St(x,\beta)$.
Por tanto, $St(y,\delta) \subset St(x,\beta) \subset St(x,\alpha)$ y (*) se cumple.

II. 27. (*Observación I. 11. b)*).

Toda semi-uniformidad en X es admisible.

Demostración.

Sea $\mathcal{U}$ una semi-uniformidad en X.

Sea $\mathcal{D}_x = \{St(x,\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{U}\}$ con $x \in X$.

Sea $D = St(x;\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{U}$ y sea $\beta \in \mathcal{U}$ como en la condición de semi-uniformidad.

Si $D' = St(x,\beta)$ y $y \in D'$, existe $B \in \beta$ tal que $\{x,y\} \subset B$.

Sean $\gamma \in \mathcal{U}$ y $A \in \alpha$ tales que $St(B,\gamma) \subset A$.

Entonces, si $D_y = St(y,\gamma)$, se tiene que $St(y,\gamma) \subset St(B,\gamma) \subset A \subset D$.

Entonces, por el lema II. 25., $A^0 = \{x \in A \mid \exists\, \alpha \in \mathcal{U} \ni St(x,\alpha) \subset A\}$ para cada $A \subset X$.

Para cada $\alpha \in \mathcal{U}$, sea $\alpha^0 = \{A^0 \mid A \in \alpha\}$.

Dada cualquier $\alpha \in \mathcal{U}$, el elemento $\beta \in \mathcal{U}$ cuya existencia está garantizada por la condición de semi-uniformidad, satisface la propiedad $\beta < \alpha^0$.

Entonces, $\mathcal{U}^0 = \{\alpha^0 \mid \alpha \in \mathcal{U}\}$ es una semi-uniformidad abierta equivalente a $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es admisible.

II. 28. (*Observación I. 12. b)*).

Toda R-uniformidad en X es w-admisible.

Demostración.

Sea $\mathcal{U}$ una R-uniformidad en X.

Sea $\mathcal{D}_x = \{St(x,\alpha) |\ \alpha \in \mathcal{U}\}$, $x \in X$.

Sea $D = St(x,\alpha)$, en donde $x \in X$ y $\alpha \in \mathcal{U}$.

Sea β como en la condición de R-uniformidad.

Si $D' = St(x,\beta)$ y $y \in D'$, la condición de R-uniformidad implica que $St(y,\beta) \subset D$.

Por lo tanto, por el lema II. 25., $A^0 = \{x \in A |\ \exists\ \alpha \in \mathcal{U} \ni St(x,\alpha) \subset A\}$, para cada $A \subset X$.

Ahora, sea $\mathcal{U}_1 = \{\alpha^{\Delta 0} | \alpha \in \mathcal{U}\}$.

Basta probar entonces que $\mathcal{U}_1 <_w \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} <_w \mathcal{U}_1$.

Dada $\alpha \in \mathcal{U}$, sea $\beta \in \mathcal{U}$ tal que $\beta <_R \alpha$.

Sea $y \in St(x, \beta^{\Delta 0})$, con x en X. Existe entonces $St(z,\beta) \in \beta^{\Delta}$, tal que $x, y \in St(z,\beta)^0$.

Sean B_1, $B_2 \in \beta$ tales que $\{x,z\} \subset B_1$ y $\{y,z\} \subset B_2$.

Por tanto, existe $A\in\alpha$ tal que $\{x,y\}\subset A$ y $y\in St(x,\alpha)$.

De donde $\beta^{\Delta a}<_{W}\alpha$.

Recíprocamente, sea $x\in X$ y $y\in St(x,\beta)$.

Como $\beta<_{R}\alpha$ es inmediato que $St(x,\beta)\subset St(x,\alpha)$.

Además $St(y,\beta)\subset St(x,\alpha)$, ya que si $z\in St(y,\beta)$, existen entonces B_1, $B_2\in\beta$ tales que $\{x,y\}\subset B_1$ y $\{y,z\}\subset B_2$.

La condición $\beta<_{R}\alpha$ implica la existencia de un elemento $A\in\alpha$ tal que $\{x,z\}\subset A$.

Por tanto, $z\in St(x,\alpha)$.

Entonces $St(y,\beta)\subset St(x,\alpha)$, de manera que $y\in St(x,\alpha)^{a}$.

Como es obvio que $x\in St(x,\alpha)^{a}$, entonces $y\in St(x,\alpha^{\Delta a})$, es decir, $\beta<_{W}\alpha^{\Delta a}$.

II. 29. Si $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ es uniformemente continua, entonces $f:(X,\tau_{\mathcal{U}})\to(Y,\tau_{\mathcal{V}})$ es continua.

Demostración.

Sea $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ uniformemente continua.

Sea $V\in\tau_{\mathcal{V}}$, y $p\in f^{-1}(V)$; entonces $f(p)\in V\in\tau_{\mathcal{V}}$.

Por definición de $\tau_{\mathcal{V}}$, existe $\beta\in\mathcal{V}$ tal que $St(f(p),\beta)\subset V$.

Como f es uniformemente continua, existe $\alpha\in\mathcal{U}$ tal que $\{f(L)\mid L\in\alpha\}<\beta$.

Por lo tanto, $f(St(p,\alpha))\subset St(f(p),\beta)\subset V$.

Entonces $St(p,\alpha)\subset f^{-1}(V)$.

Por consiguiente, $f^{-1}(V)\in\tau_{\mathcal{U}}$ y $f:(X,\tau_{\mathcal{U}})\to(Y,\tau_{\mathcal{V}})$ es continua.

II. 30. Si $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ es uniformemente continua y $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$, entonces $\mathcal{F}_1 = \{f(F)\mid F\in\mathcal{F}\}^+$ es un filtro de Cauchy en $(Y,\mathcal{V})$.

Demostración.

Sea $\beta\in\mathcal{V}$. Como f es uniformemente continua, existe $\alpha\in\mathcal{U}$ tal que $\{f(L)\mid L\in\alpha\}<\beta$. Como $\mathcal{F}$ es de Cauchy, existe $L\in\mathcal{F}\cap\alpha$. Entonces $f(L)\subset B$ para cierta $B\in\beta$. Por consiguiente $B\in\mathcal{F}_1$ y $B\in\beta$, por lo que $B\in\mathcal{F}_1\cap\beta$, con $\beta\in\mathcal{V}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_1$ es de Cauchy.

II. 31. *Proposición.*

En un espacio w-pre-uniforme $(X,\mathcal{U})$, las siguientes propiedades son equivalentes:

i) $(X,\mathcal{U})$ es totalmente acotado.

ii) Todo ultrafiltro en X es $\mathcal{U}$-Cauchy

iii) Todo filtro en X está contenido en un $\mathcal{U}$-filtro de Cauchy.

Demostración.

i)=>ii) Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro en X y sea $\alpha\in\mathcal{U}$. Como, por hipótesis, $(X,\mathcal{U})$ es totalmente acotado, existe $\mathcal{L}\subset\alpha$ finito, tal que $X\subset\cup\mathcal{L}$.
Por lo tanto existe $L\in\mathcal{L}$ tal que $L\in\mathcal{F}$ (por I. 16.).
Entonces $L\in\alpha\cap\mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$-Cauchy.

ii)=>iii) Como todo filtro es una dirección, entonces, por la observación I. 17., todo filtro está contenido en un ultrafiltro $\mathcal{F}^*$.

Por hipótesis, todo ultrafiltro es $\mathcal{U}$-Cauchy.

Por lo tanto, todo filtro está contenido en un $\mathcal{U}$-ultrafiltro de Cauchy. Pero todo ultrafiltro es un filtro, por lo que todo filtro está contenido en un $\mathcal{U}$-filtro de Cauchy.

iii)=>i) Supóngase que todo filtro en X está contenido en un $\mathcal{U}$-filtro de Cauchy y sea $\alpha \in \mathcal{U}$. Si no existe $L \subset \alpha$ finito tal que $X = \cup L$, la familia $F = \{X - \cup L \mid L \subset \alpha \text{ finito}\}^{+}$ es un filtro.

Entonces, por hipótesis, existe F_0, $\mathcal{U}$-Cauchy, tal que $F \subset F_0$.

Por lo tanto, existe $L \in F_0 \cap \alpha$, lo que es una contradicción, porque $X - L \in F \subset F_0$.

II. 32. *Teorema.*

Sea A un subespacio denso de un espacio semi-uniforme $(X,\mathcal{U})$.
Entonces A es totalmente acotado sí y sólo si X lo es.

Demostración.

Supóngase que A es totalmente acotado. Sea $\alpha\in\mathcal{U}$ y sea $\beta\in\mathcal{U}$ como en la condición de semi-uniformidad. Como A es totalmente acotado, existen B_1, B_2, ..., $B_n\in\beta$ tales que $A\subset B_1\cup\ldots\cup B_n$.
La densidad de A implica que $X = \bar{B}_1\cup\ldots\cup\bar{B}_n$.
Sean $A_1, \ldots, A_n\in\alpha$ y $\gamma_1,\ldots,\gamma_n\in\mathcal{U}$, tales que $St(B_i,\gamma_i)\subset A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Por ser $\mathcal{U}$ admisible, $\bar{B}_i\subset St(B_i,\gamma_i)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ (por el resultado II. 19. a)).
Por lo tanto, $X = A_1\cup\ldots\cup A_n$, con lo que X es totalmente acotado.

Recíprocamente, es claro que todo subespacio de un espacio totalmente acotado es también totalmente acotado.

II. 33. *Proposición.*

Si cada $\mathcal{U}_j$ es semi-uniformidad, entonces, $\mathcal{U}(G)$ también es semi-uniformidad (Ver definición 55.).

Demostración.

Supóngase que cada $(X_j, \mathcal{U}_j)$ es un espacio semi-uniforme.

Consérvese la notación de la definición 55.

Sea $= g_{j_1}^{-1}(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge g_{j_n}^{-1}(\alpha_n) \in \mathcal{U}(G)$.

Como cada $\mathcal{U}_j$ es semi-uniformidad, entonces, existe $\beta_i \in \mathcal{U}_{j_i}$ tal que para toda B en β_i, existen $\gamma_B \in \mathcal{U}_{j_i}$ y $A_B \in \alpha_{j_i}$ con la propiedad $St(B, \gamma_B) \subset A_B$.

Sea $\beta = g_{j_1}^{-1}(\beta_1)\wedge \dots \wedge g_{j_n}^{-1}(\beta_n)$ y sea $B\in \beta$.

Entonces $B = g_{j_1}^{-1}(B_1)\cap \dots \cap g_{j_n}^{-1}(B_n)$, en donde $B_i\in\beta_i$.

Por tanto, si $\gamma_B = g_{j_1}^{-1}(\gamma_{B_1})\wedge \dots \wedge g_{j_n}^{-1}(\gamma_{B_n})$

y $A_B = g_{j_1}^{-1}(A_{B_1})\cap \dots \cap g_{j_n}^{-1}(A_{B_n})$,

se tiene $St(B,\gamma_B)\subset A_B$.

En efecto, sea $C\in\gamma_B$ tal que $C\cap B \neq \emptyset$.

Existen entonces $C_i\in\gamma_{B_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

tales que $C = g_{j_1}^{-1}(C_1)\cap \dots \cap g_{j_n}^{-1}(C_n)$.

Por tanto, $B\cap C = g_{j_1}^{-1}(B_1 \cap C_1)\cap \dots \cap g_{j_n}^{-1}(B_n\cap C_n)$.

Como $B\cap C \neq \emptyset$, cada $B_i\cap C_i \neq \emptyset$.

De donde, $C_i\subset St(B_i,\gamma_{B_i})\subset A_{B_i}$, con lo que

$St(B,\gamma_B)\subset A_B$.

Por consiguiente, $\mathcal{U}(G)$ es semi-uniformidad.

En forma análoga pueden probarse los dos resultados siguientes:

II. 34. Si cada $\mathcal{U}_j$ es uniformidad, entonces $\mathcal{U}(G)$ es uniformidad.

II. 35. Si cada $\mathcal{U}_j$ es totalmente acotada, entonces $\mathcal{U}(G)$ es totalmente acotada.

II. 36. *Proposición.*

Si cada $\mathcal{U}_j$ es admisible, entonces $\mathcal{U}(G)$ es admisible.

En este caso, la topología $\tau_{U(G)}$, inducida por $U(G)$ es la mínima topología τ de Z tal que $g_j:(Z,\tau)\to(X_j,\tau_{U_j})$ es continua para cada $j\in J$.

Demostración.

Si cada U_j es admisible, entonces por I. 23., se puede suponer, sin pérdida de generalidad que cada U_j es abierta.

Como cada $g_j:(Z,\tau_{U(G)})\to(X_j,\tau_{U_j})$ es continua (por los resultados II. 29 y I. 23), y para cada $\alpha\in U_j$, se tiene $\alpha\subset\tau_{U_j}$, entonces $g_j^{-1}(\alpha)\subset\tau_{U(G)}$, así que:

$g_{j_1}^{-1}(\alpha_1)\wedge g_{j_2}^{-1}(\alpha_2)\wedge\ldots\wedge g_{j_n}^{-1}(\alpha_n)\subset\tau_{U(G)}$ para cualesquiera $j_1, j_2, \ldots, j_n\in J$ y $\alpha_i\in U_{j_i}$.

Por lo tanto, $U(G)$ es abierta.

Ahora, sea τ como en el enunciado.

Entonces, como $\cup\{\alpha | \alpha\in\mathcal{U}_j\}$ es base de $\tau_{\mathcal{U}_j}$, se tiene que $\cup\{g_j^{-1}(\alpha) | \alpha\in \mathcal{U}_j,\ j\in J\}$ es sub-base de τ.

Pero esta familia es también sub-base de $\tau_{\mathcal{U}(G)}$ y, por consiguiente, $\tau = \tau_{\mathcal{U}(G)}$.

II. 37. *Observación.*

La familia de subconjuntos nulos de un espacio X es cerrada bajo uniones finitas e intersecciones numerables.

Demostración.

Si $H_1, H_2, \ldots, H_n$ son subconjuntos nulos de X, existe, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, una función continua $f_i: X \to [0,1]$ tal que $f_i^{-1}(0) = H_i$.

Sea $f: X \to [0,1]$ tal que $f(x) = \min\{f_i(x) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Es claro que f es continua y $f^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$.

Sea ahora $H_1, H_2, \ldots,$ una sucesión de nulos en X.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n: X \to [0,1]$, continua, tal que $H_n = f_n^{-1}(0)$ y sea $f: X \to [0, 1]$ tal que

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n(x)$.

Es claro que f es continua y $f(x) = 0$ si y sólo si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$.

Por lo tanto, $f^{-1}(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ es nulo en X.

Fácilmente se demuestra la siguiente proposición:

II. 38. *Proposición*

Si (X,τ) es un espacio topológico R_0 y si $\mathcal{U}$ es la pre-uniformidad (compatible) que consta de todas las cubiertas abiertas de X, entonces, $(X,\mathcal{U})$ es completo.

II. 39. *Proposición.*

Sea A un subespacio de un espacio pre-uniforme, admisible y completo $(X,\mathcal{U})$. Si A es cerrado, entonces $(A,\mathcal{U}|A)$ es completo.
Recíprocamente, si $(A,\mathcal{U}|A)$ es completo y X es de Hausdorff, entonces A es cerrado.

Demostración.

Se probará únicamente la primera parte.
Si F_1 es un filtro de Cauchy en $(A, \mathcal{U}|A)$, entonces $F = F_1^+$ es un filtro de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$, ya que si $\alpha\in\mathcal{U}$, existe $L\in\alpha$ tal que $L\cap A\in F_1$.
Por lo tanto, $L\in\alpha\cap F$ y F es de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$.

Por ser X completo, existe $x\in X$ tal que $F\to x$.

Si A es cerrado, entonces $x\in A$, porque F_1 converge a x también.
Por lo tanto, $(A,\mathcal{U}|A)$ es completo.

II. 40. *Teorema.*

Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio pre-uniforme y admisible. Si $(X,\mathcal{U})$ es compacto, entonces $(X,\mathcal{U})$ es totalmente acotado y todo $\mathcal{U}$-filtro redondo de Cauchy converge.

Recíprocamente, si $(X,\mathcal{U})$ es completo y totalmente acotado, entonces $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es compacto.

Por tanto, un espacio semi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es completo y totalmente acotado si y sólo si $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es compacto.

Demostración.

Sea $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ un espacio compacto.
Por el resultado II. 5., X es compacto si y sólo si todo ultrafiltro converge al menos a un punto de X.
Entonces, por el resultado II. 17., todo ultrafiltro en X es $\mathcal{U}$-Cauchy.
Por otro resultado (II. 31.), todo ultrafiltro en X es $\mathcal{U}$-Cauchy si y sólo si $(X,\mathcal{U})$ es

es totalmente acotado.

Por lo tanto, $(X,\mathcal{U})$ es totalmente acotado.

Sea ahora $\mathcal{F}$ un $\mathcal{U}$-filtro redondo de Cauchy.

Por ser $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ compacto, II. 5. implica que, existe un punto $x \in A_{\mathcal{F}}$, y por el resultado II. 16., $\mathcal{F} \to x$.

Por lo tanto, $(X,\mathcal{U})$ es completo.

Recíprocamente, sea $(X,\mathcal{U})$ completo y totalmente acotado.

Como $(X,\mathcal{U})$ es totalmente acotado, por el resultado II. 31., todo ultrafiltro en X es $\mathcal{U}$-Cauchy.

Entonces, como $(X,\mathcal{U})$ es completo, todo ultrafiltro en X converge.

Por lo tanto, usando nuevamente II.5 se deduce que $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es compacto.

II.41. *Ejemplos.*

La noción de filtro de Cauchy generaliza el concepto de sucesión de Cauchy para espacios pseudo-métricos.

1. Sea (X,d) un espacio pseudo-métrico.

   a) Para cada $\varepsilon>0$, sea $\alpha_\varepsilon = \{B_\varepsilon{}^d(x) \mid x\in X\}$. Sea $\mathcal{U}_d = \{\alpha_\varepsilon \mid \varepsilon>0\}$.

   Entonces, $\mathcal{U}_d$ es una uniformidad en X.

   b) Dada $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión de puntos de X, sea $\mathcal{F} = \{S_n \mid n\in N\}^+$, con $S_n = \{y\in X \mid y = x_m$ para alguna $m\geq n\}$. Entonces $\mathcal{F}$ es un filtro.

   c) $\{x_n\}_{n\in N}$ es sucesión de Cauchy en (X,d) si y sólo si $\mathcal{F}$ es filtro de Cauchy en $(X,\mathcal{U}_d)$.

d) Para todo filtro de Cauchy $\mathcal{F}_1$ en $(X, \mathcal{U}_d)$, existe una d-sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in N}$, tal que si $\mathcal{F} = \{S_n | n\in N\}^+$, se tiene $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}_1$.

Demostración.

a) Primero, $\mathcal{U}_d$ es una pre-uniformidad, porque $\alpha_\delta < (\alpha_{\varepsilon_1} \wedge \alpha_{\varepsilon_2})$, si $\delta = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
Además, $\alpha_\delta{}^* < \alpha_\varepsilon$ si $\delta = \varepsilon/3$, porque, $St(B_{\varepsilon/3}{}^d(x), \alpha_{\varepsilon/3}) \subset B_\varepsilon{}^d(x)$.
Por lo tanto, $\mathcal{U}_d$ es una uniformidad.

b) Dados S_{n_1}, S_{n_2}, se puede suponer, sin pérdida de generalidad que $S_{n_1} \subset S_{n_2}$ (es decir, $n_1 \geq n_2$). De donde, $S_{n_1} \subset (S_{n_1} \cap S_{n_2})$ y, por lo tanto, $\{S_n | n\in N\}$ es base de filtro.
Por consiguiente, $\{S_n | n\in N\}^+$ es un filtro.

c) Si $\{x_n |_{n\in N}\}$ es sucesión de Cauchy en (X, d), para toda $\varepsilon > 0$, existe N tal que si

$n, m \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Entonces, $S_N \subset B_\varepsilon(x_N) \in \mathcal{F}$.

Por lo tanto, para toda $\varepsilon > 0$, $\alpha_\varepsilon \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\mathcal{F}$ es filtro de Cauchy.

Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es filtro de Cauchy, para toda $\alpha \in \mathcal{U}_d$, se tiene $\alpha \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existen $y \in X$, $N \in \mathbb{N}$ tales que:

$S_N \subset B_{\varepsilon/2}{}^d(y)$.

Por lo tanto, para toda $m, n \geq N$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, es decir, $\{x_n\}$ es sucesión de Cauchy.

d) Como $\mathcal{F}_1$ es de Cauchy en $(X, \mathcal{U}_d)$, para toda n existe $F_n \in \mathcal{F}_1 \cap \alpha_{1/n}$.

Como $F_n \in \alpha_{1/n}$, existe $z_n \in X$ tal que $F_n = B_{1/n}(z_n)$.

Sea $x_n \in F_1 \cap \ldots \cap F_n$. Entonces, si $S_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ y $F = \{S_1, S_2, S_3, \ldots\}^+$, se tiene $F \sim F_1$.

En efecto, sea $St(F_0, \alpha_\varepsilon)$, con $F_0 \in F_1$, $\varepsilon > 0$.
Sea $n \in N$, tal que $1/n < \varepsilon$. Entonces $St(F_0, \alpha_\varepsilon) \supset St(F_0, \alpha_{1/n})$.

Si $x \in St(S_{4n}, \alpha_{1/4n})$, existe $K \geq 4n$ y $z \in X$ tales que $x, x_k \in B_{1/4n}(z)$, de manera que $d(x, x_k) < 1/2n$.

Por otro lado, por definición, $\delta(F_k) \leq 1/2n$. Además, $F_k \cap F_0 \neq \emptyset$.
Por lo tanto, si $w \in F_k \cap F_0$, se tiene $d(x,w) \leq d(x, x_k) + d(x_k, w) < (1/2n) + (1/2n) = 1/n$ y $St(S_{4n}, \alpha_{1/4n}) \subset St(F_0, \alpha_{1/n}) \subset St(F_0, \alpha_\varepsilon)$.
Por lo tanto, $F' \supset F_1'$.

Recíprocamente, es obvio que $St(S_k,\alpha_\varepsilon)\subset St(F_k,\alpha_\varepsilon)$ para cada $k\in N$ y cada $\varepsilon>0$.
Pero $St(F_k,\alpha_\varepsilon)\in \mathcal{F}_1'$. Por lo tanto, $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}_1'$.
Entonces, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_1'$, con lo que $\mathcal{F}\sim\mathcal{F}_1$.

2. a) De la construcción de II. 41. 1., para cada clase de filtros de Cauchy de un espacio pseudo-métrico (X,d), hay una clase de filtros de Cauchy del espacio uniforme $(X,\mathcal{U}_d)$, y es claro que son iguales.

b) De II. 41. 1., se deduce también que (X,d) es completo si y sólo si $(X,\mathcal{U}_d)$ lo es.

CAPITULO III

EXTENSIONES Y COMPLETACIONES

En este capítulo, se estudiarán el teorema de extensión, el teorema de completación de espacios pre-uniformes, y sus respectivas aplicaciones

III. 1. *Teorema de Extensión de Espacios Uniformes.*

Si A es un subconjunto denso de un espacio pre-uniforme y admisible $(X_1, \mathcal{U}_1)$ y $f:(A,\mathcal{U}_1|A)\to(X_2,\mathcal{U}_2)$ es una función uniformemente continua de A en un espacio semi-uniforme, completo y de Hausdorff $(X_2,\mathcal{U}_2)$, entonces f tiene una única extensión uniformemente continua $f^*:(X_1,\mathcal{U}_1)\to(X_2,\mathcal{U}_2)$.

Demostración.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\mathcal{U}_1$ es abierta.

Sea $x\in A^-$ y sea $\mathcal{F}_x = \{A\cap V \mid V\in \mathcal{N}_x\}$

Obviamente, $\mathcal{F}_x$ es un filtro en A que converge a x, porque $\mathcal{N}_x|A = \mathcal{F}_x$.

Como $\mathcal{F}_x$ converge a un punto de A^-, entonces $\mathcal{F}_x$ es un filtro de Cauchy en $(A, \mathcal{U}_1|A)$.

Por el resultado II. 30. se deduce que $\mathcal{H}_x = \{f(F_x) | F_x \in \mathcal{F}_x\}^+$ es un filtro de Cauchy en $(X_2, \mathcal{U}_2)$.

Por ser X_2 completo y T_2, existe un único punto $y_x \in X$ tal que $\mathcal{H}_x \to y_x$. Si se define $f^*(x) = y_x$, f^* es una extensión uniformemente continua de $(X_1, \mathcal{U}_1)$ en $(X_2, \mathcal{U}_2)$.

En efecto, como f es continua, si $x \in A$, entonces $f(x) = y_x$, por lo que f^* extiende a f.

Ahora, sea $\beta \in \mathcal{U}_2$ y sea $\beta_1 \in \mathcal{U}_2$ como en la condición de semi-uniformidad.

Por ser f uniformemente continua, existe $\alpha \in \mathcal{U}_1$ tal que $\{f(A \cap L) | L \in \alpha\} < \beta_1$; entonces $\{f^*(L) | L \in \alpha\} < \beta$, ya que si $x \in L \in \alpha$, con x, L fijos, y $B_1 \in \beta_1$, $B \in \beta$ y $\beta_2 \in \mathcal{U}_2$ son tales que $f(A \cap L) \subset B_1$ y $St(B_1, \beta_2) \subset B$, existe $F \in \mathcal{F}_x$ tal que $F \subset L \cap A$

(pues $\mathcal{U}_1$ es abierta y $\mathcal{F}_x \to x$).

Como $\mathcal{H}_x \to f^*(x)$, se tiene $f^*(x) \in f(F)^- \subset f(L \cap A)^- \subset B_1^-$.

Por otro lado, $B_1^- \subset St(B_1, \beta_2) \subset B$. Por tanto, $f^*(x) \in B$ y f^* es uniformemente continua.

Como $(X_2, \mathcal{U}_2)$ es un espacio de Hausdorff y A es denso en X_1, entonces no pueden existir dos extensiones continuas y distintas de f a X_1.

Por lo tanto, f^* es una extensión uniformemente continua de f y además es única.

III. 2. *Notación.*

Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio pre-uniforme y admisible.

Sea $\hat{X}$ la colección de filtros redondos de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$.

Para cada $U\subset X$, sea $\hat{U} = \{\mathcal{F}\in\hat{X} | U\in\mathcal{F}\}$.

Si $\alpha\in\mathcal{U}$, sean:

$\hat{\alpha} = \{\hat{U} | U\in\alpha\}$.

$\hat{\mathcal{U}} = \{\hat{\alpha} | \alpha\in\mathcal{U}\}$.

III. 3. *Observaciones.*

i) Si $A\subset B\subset X$, entonces $\hat{A}\subset\hat{B}$.

ii) Si $\alpha,\beta\in$ y $\beta<\alpha$, entonces $\hat{\beta}<\hat{\alpha}$.

iii) $\hat{\emptyset} = \emptyset$.

iv) Para cada pareja de subconjuntos $A, B \subset X$, se tiene $(A \cap B)^{\wedge} = \hat{A} \cap \hat{B}$.

v) Cada $\hat{\alpha} \in \hat{\mathcal{U}}$ cubre a $\hat{X}$, porque si $\mathcal{F} \in \hat{X}$ y $L \in \mathcal{F} \cap \alpha$ ($\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$-Cauchy), entonces $\mathcal{F} \in \hat{L} \in \hat{\alpha}$.

vi) Por los incisos anteriores, $\hat{\mathcal{U}}$ es una pre-uniformidad en X.

III. 4. *Teorema de Completación de Espacios Uniformes.*

Sea $\mathcal{U}$ una pre-uniformidad admisible y completamente extendible en un conjunto X.
Entonces $\hat{\mathcal{U}}$ es una pre-uniformidad abierta y completa en $\hat{X}$ y la función $\nu : X \to \hat{X}$ tal que $\nu(x) = N_x$ es una función uniformemente continua de X sobre un subespacio denso de $\hat{X}$.

Además $(\hat{X},\tau_{\hat{U}})$ es T_2 y $\{x\}^- = \nu^{-1}\nu(x)$ para cada x en X.

Si (X,τ_{U}) es también T_2, entonces ν es un encaje unimórfico.

Si además U es semi-uniformidad, $\hat{X}$ es único excepto por unimorfismos.

Demostración

Por la observación III. 3., $\hat{U}$ es una pre-uniformidad en $\hat{X}$.

Además, para toda $L\subset X$, $\hat{L}$ es abierto en $\hat{X}$, porque, si $F\in\hat{L}$, se tiene $L\in F$, y por ser F redondo, existe $\beta\in U$ tal que $St^*(F,\beta)\subset L$.

Si $F'\in St(F,\hat{\beta})$, sea $M\in\beta$ tal que $F, F'\in\hat{M}$.

Entonces, $M\in F\cap F'\cap\beta$ y $M\subset St^*(F,\beta)\subset L$.

Por tanto $F'\in\hat{M}\subset\hat{L}$ y $St(F,\hat{\beta})\subset\hat{L}$. Entonces $\hat{L}$ es abierto en $\hat{X}$.

Por lo tanto, $\hat{U}$ es una pre-uniformidad abierta en $\hat{X}$.

Sea $\mathcal{F}$ un $\hat{\mathcal{U}}$-filtro de Cauchy.

Sea $\mathcal{N} = \{A\subset X \mid \hat{A}\in\mathcal{F}\}$.

Entonces $\mathcal{N}$ es un $\mathcal{U}$-filtro de Cauchy, ya que si $\alpha\in\mathcal{U}$ y $\hat{A}\in \hat{\alpha}\cap\mathcal{F}$, con $A\in\alpha$, se tiene que $A\in\alpha\cap\mathcal{N}$.

Por hipótesis $\mathcal{N}$ contiene un filtro redondo de Cauchy $\mathcal{N}_0$. Si $\mathcal{N}_0\in\hat{A}$, con $A\subset X$, se tiene que $A\in\mathcal{N}_0\subset\mathcal{N}$ y $\hat{A}\in\mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}\to\mathcal{N}_0$ y $\hat{\mathcal{U}}$ es completa en $\hat{X}$.

Por consiguiente, $\hat{\mathcal{U}}$ es una pre-uniformidad abierta y completa en $\hat{X}$.

Ahora, sea ν tal que $\nu(x) = \mathcal{N}_x$.

Entonces $x'\in\nu^{-1}\nu(x)$ si y sólo si $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{x'}$ y esto último es equivalente a $\{x\}^- = \{x'\}^-$.

Por lo tanto, $\nu^{-1}\nu(x) = \{x\}^-$.

Como $\nu(x) = \mathcal{N}_x$, entonces $x\in\nu^{-1}(\hat{A})$ si y sólo si A es vecindad de x, por lo que $\nu^{-1}(\hat{A}) =$ int A para toda $A\subset X$.

Ahora, sea $\alpha\in\mathcal{U}$.

Por ser $\mathcal{U}$ admisible, existe $\alpha_1\in\mathcal{U}$ tal que $\alpha_1 < \{\text{int } A \mid A\in\alpha\}$.

Por lo tanto, $\{\nu(L) | L\in\alpha_1\} < \hat{\alpha}$ (porque $\nu(\text{int } A)\subset\hat{A}$).

Por consiguiente, ν es uniformemente continua.

Se ha probado entonces que $\nu^{-1}(\hat{A}) = \text{int } A$ y $\nu(\text{int } A) = \hat{A} \cap \nu(X)$.

Si $\hat{A}\cap\nu(X) = \emptyset$, entonces, por lo que se acaba de demostrar, $\text{int } A = \emptyset$.

Pero si $\hat{A} \neq \emptyset$, entonces $\text{int } A \neq \emptyset$.

Por tanto, $\hat{A} = \emptyset$ y $\nu(X)$ es denso en $\hat{X}$.

Por lo tanto, ν es una función uniformemente continua sobre un subespacio denso en $\hat{X}$.

Falta verificar que $(\hat{X},\tau_{\hat{\mathcal{U}}})$ es T_2.

Sean $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\subset\hat{X}$, con $\mathcal{F}_1\neq\mathcal{F}_2$. Como $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son filtros redondos de Cauchy, y son diferentes, entonces tienen miembros ajenos. Por lo que existen $L\in\mathcal{F}_1$, $M\in\mathcal{F}_2$ con $L\cap M = \emptyset$. Entonces $\hat{L}$ y $\hat{M}$ son abiertos ajenos que contienen a $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, respectivamente.

Por lo tanto, $(\hat{X},\tau_{\hat{\mathcal{U}}})$ es T_2.

Si $(X,\mathcal{U})$ también es T_2, sea $\nu^{-1}:\nu(X)\to X$ y sea $\alpha\in\mathcal{U}$.

Tomando $\beta = \hat{\alpha}|\nu(X)$, se tiene $\nu^{-1}(\beta) = \{\text{int } L | L\in\alpha\} < \alpha$.

Entonces ν^{-1} también es uniformemente continua y ν es un encaje unimórfico.

Por último, si $\mathcal{U}$ es semi-uniformidad, ν es única salvo por unimorfismos, porque si $\nu':(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ es otro encaje unimórfico sobre un subespacio denso de un espacio semi-uniforme y completo $(Y,\mathcal{V})$, las funciones:

$$\nu'\circ\nu^{-1}:\nu(X)\to\nu'(X) \quad \text{y} \quad \nu\circ\nu'^{-1}:\nu'(X)\to\nu(X)$$

tienen extensiones uniformemente continuas $\upsilon:\hat{X}\to Y$ y $\vee:Y\to\hat{X}$ tales que $\vee\circ\upsilon$ y $\upsilon\circ\vee$ son la identidad en $\nu(X)$ y $\nu'(X)$, respectivamente.

Por lo tanto, υ y $\vee$ son ambas unimorfismos y $\vee = \upsilon^{-1}$.

APLICACIONES DEL TEOREMA DE COMPLETACION DE ESPACIOS UNIFORMES.

III. 5. *Corolario.*

Un espacio topológico (X,τ) es R_1 si y sólo si existe una pre-uniformidad $\mathcal{U}$ en X, admisible y completamente extendible, tal que $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$.

Demostración.

Sea (X,τ) R_1 y sea $\mathcal{U}$ la colección de cubiertas abiertas de X.

Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{U}$-filtro de Cauchy.

Entonces $A_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, porque en caso contrario, $\alpha = \{X - N^{-} | N \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{U}$ y $\alpha \cap \mathcal{F} = \emptyset$, lo que es una contradicción, porque $\mathcal{F}$ es de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$.

Sea ahora $x \in A_{\mathcal{F}}$ y $V \in N_x$.

Para cada $y \in X - \{x\}^{-}$, sea V_y un abierto tal que $y \in V_y \subset V_y^{-} \subset X - \{x\}^{-}$ y sea $\beta = \{V\} \cup \{V_y | y \in X - \{x\}^{-}\}$.

Como $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$-Cauchy, existe $L\in\beta\cap\mathcal{F}$.

Entonces $L = V$, porque si $L = V_y$ para alguna $y\in X - \{x\}^-$, se tendría que $x\in L^- = V_y^- \subset X - \{x\}^-$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $V\in\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}\to x$.

Se ha probado entonces que $\mathcal{U}$ es completa.

Para probar que $\mathcal{U}$ es completamente extendible, basta demostrar que para cada $x\in X$, el filtro de vecindades $\mathcal{N}_x$ es redondo.

Si $V\in\mathcal{N}_x$ es arbitrario y se construye β como arriba, entonces $St^*(\mathcal{N}_x,\beta) = V$.

Por tanto, $\mathcal{N}_x$ es redondo.

Recíprocamente, sea $\mathcal{U}$ una pre-uniformidad admisible y completamente extendible.

Sean $\hat{X}$, $\hat{\mathcal{U}}$ y $\nu: X\to\hat{X}$ como en el teorema de completación.

Si x_1 y x_2 son puntos de X con cerraduras distintas, entonces $\nu(x_1)\neq\nu(x_2)$, porque $\{x_1\}^- = \nu^{-1}\nu(x_1)$ y $\{x_2\}^- = \nu^{-1}\nu(x_2)$.

Como $\hat{X}$ es T_2, existen $A, B \subset X$ ajenos, tales que $\nu(x_1) \in \hat{A}$ y $\nu(x_2) \in \hat{B}$.

Por lo tanto, int A e int B son abiertos ajenos que contienen a x_1 y x_2, respectivamente, y X es R_1.

III. 6. *Corolario.*

Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio semi-uniforme.

Entonces, $(\hat{X}, \hat{\mathcal{U}})$ es un espacio semi-uniforme, completo y T_1, y la función $\nu : X \to \hat{X}$ tal que $\nu(x) = N_x$ es una función uniformemente continua de X sobre un subespacio denso de $\hat{X}$.

Si $(X, \mathcal{U})$ es T_1, entonces ν es un encaje unimórfico y $(\hat{X}, \hat{\mathcal{U}})$ es único excepto por unimorfismos.

Demostración.

Por ser $(X,\mathcal{U})$ un espacio semi-uniforme, $\mathcal{U}$ es una pre-uniformidad admisible en X.

Por el resultado II. 15., todo filtro de Cauchy en un espacio semi-uniforme contiene un filtro redondo de Cauchy.

Por otro resultado (II. 17.), si un $\mathcal{U}$-filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ converge a un punto $x \in X$, entonces el filtro mínimo de Cauchy $\mathcal{F}'$ coincide con el filtro de vecindades $\mathcal{N}_x$ de x.

Por lo tanto, todo filtro de vecindades es redondo de Cauchy.

Se cumplen entonces las hipótesis del teorema de completación de espacios uniformes.

III. 7. *Observación.*

Sea $\mathcal{U} = \mathcal{U}_d$, en donde d es una métrica en X.
Sea (X^*,d^*) la completación métrica de (X,d).
Entonces existe una isometría $i:X\to X^*$ sobre un subespacio denso de (X^*,d^*).
La isometría i induce un encaje unimórfico de $(X,\mathcal{U}_d)$ en $(X^*,\mathcal{U}_{d^*})$.
Por la unicidad de las completaciones, los espacios $(X^*,\mathcal{U}_{d^*})$ y $(\hat{X},\hat{\mathcal{U}}_d)$ son unimórficos.

III. 8. *Proposición.*

Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio semi-uniforme.
Entonces $\hat{X}$ es compacto si y sólo si $(X,\mathcal{U})$ es totalmente acotado.

Demostración.

Por el teorema II. 32., un subespacio denso de un espacio semi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es totalmente acotado si y sólo si X lo es.

Por el teorema II. 40., un espacio semi-uniforme es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado.

De ahí el resultado.

III. 9. *Proposición.*

Si $\mathcal{U}$ es una semi-uniformidad totalmente acotada en X, entonces $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es completamente regular.

Recíprocamente, todo espacio completamente regular tiene una uniformidad compatible y totalmente acotada.

Demostración.

Supóngase que $\mathcal{U}$ es una semi-uniformidad totalmente acotada en X.

Por la proposición anterior, el espacio $(\hat{X},\tau_{\hat{\mathcal{U}}})$ es compacto.

Por el teorema de completación, $\hat{X}$ es también T_2.

Como todo espacio compacto y T_2 es completamente regular, entonces, $\hat{X}$ es completamente regular.

Si $x \in V \in \tau$ y $\hat{\upsilon}:\hat{X}\to[0,1]$ es una función continua tal que $\hat{\upsilon}(N_x) = 0$ y $\hat{X} - \hat{V} \subset \upsilon^{-1}(1)$, entonces, $\upsilon = \hat{\upsilon} \circ \nu : X \to [0,1]$ es continua, $\upsilon(x) = 0$ y $X - V \subset \upsilon^{-1}(1)$.

Por lo tanto, X es completamente regular.

Recíprocamente, por el resultado II. 24., todo espacio completamente regular tiene una uniformidad compatible $\mathcal{U}$ formada por cubiertas finitas.

$\mathcal{U}$ es entonces una uniformidad totalmente acotada en X.

III. 10. *Proposición.*

Si para cada $j \in J$, $\mathcal{U}_j$ es una pre-uniformidad admisible y completa en X_j, entonces, la pre-uniformidad producto $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ en $Z = \prod_{j \in J} X_j$ es también una pre-uniformidad admisible y completa.

Demostración.

Para cada $j \in J$, sea $g_j : Z \to X_j$ la proyección.

Por el resultado I. 23., se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que cada $\mathcal{U}_j$ es abierta.

Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{U}(\mathcal{G})$-filtro de Cauchy.

Por el resultado II. 30., $(g_j(\mathcal{F}))^+ = \{g_j(F) \mid F \in \mathcal{F}\}^+$ es un $\mathcal{U}_j$-filtro de Cauchy.

Sea $x_j \in X_j$ tal que $(g_j(\mathcal{F}))^+ \to x_j$.

Sea $x = \{x_j\}_{j \in J}$ en Z.

Como $\tau_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}$ es la topología producto de Z, entonces se tiene que $\mathcal{F} \to x$, y por lo tanto, $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ es completa. Y, por II. 36., $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ es admisible.

III. 11. *Corolario.*

Si para cada $j \in J$, $\mathcal{U}_j$ es una semi-uniformidad completa en X_j, entonces la semi-uniformidad producto $\mathcal{U}(G)$ es también completa.

Demostración.

Por el resultado II. 33., $\mathcal{U}(G)$ es semi-uniformidad.
Entonces, por la proposición anterior (III. 10.), $\mathcal{U}(G)$ es completa.

III. 12. *Observación.*

Consérvese la notación de la definición 55.

En general no es cierto que si cada $\mathcal{U}_j$ es una uniformidad completa y cada g_j es suprayectiva, esto implique que $\mathcal{U}(G)$ sea completa.

Por ejemplo:

Haciendo las siguientes sustituciones en la definición 55:

$\mathbb{Q}$ (racionales) por Z;

$\mathbb{I}\times(\mathbb{R}^{+}\cap\mathbb{Q})$ por J (con $\mathbb{I}$ irracionales, $\mathbb{R}^{+}$ reales positivos);

$\mathbb{Z}$ (enteros) por X_j, para toda J,

Y, definiendo $\mathcal{U}_j = \{\alpha\}$, en donde $\alpha = \{\{k\} \mid k\in\mathbb{Z}\}$, y para cada $j = (i,\varepsilon)$ en J, sea $\rho_j : Z\to X_j$ tal que $\rho_j(r) = [(r-i)/\varepsilon]$= parte entera de $(r-i)/\varepsilon$.

Entonces, cada $\mathcal{U}_j$ es uniformidad ya que $\alpha^* = \alpha$.

Además $(X_j,\mathcal{U}_j)$ es completo, porque si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{U}_j$-filtro de Cauchy en X_j y $\{x\}\in\mathcal{F}\cap\alpha$, entonces $\mathcal{F}\to x$.

Ahora, sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de elementos de $\mathbb{Q}$ tal que $z_n\to\sqrt{2}$ en la topología usual de $\mathbb{R}$.

Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $S_n = \{z_m \mid m\geq n\}$ y

$\mathcal{F} = \{S_n | n \in \mathbb{N}\}^+$ (en $\mathbb{Q}$).

Entonces $\mathcal{F}$ es claramente un filtro en Z. Además, $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{U}(G)$-filtro de Cauchy, ya que si $j = (i,\varepsilon) \in J$, y $\rho_j^{-1}(\alpha) = \{[i+k\varepsilon, i+(k+1)\varepsilon) \cap \mathbb{Q} | k \in \mathbb{Z}\}$, claramente existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\sqrt{2} \in [i+k_0\varepsilon, i+(k_0+1)\varepsilon)$, i.e., $i+k_0\varepsilon \leq \sqrt{2} < i+(k_0+1)\varepsilon$.

Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $S_N \subset [i+k_0\varepsilon, i+(k_0+1)\varepsilon)$, y, por consiguiente, $\rho_j^{-1}(\alpha) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ para toda $j \in J$.

De donde, $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{U}(G)$-filtro de Cauchy.

Además, $\tau_{\mathcal{U}(G)}$ es la topología usual de $\mathbb{Q}$, por lo que $\mathcal{F}$ no converge en $\mathbb{Q} = Z$.

Entonces, $(Z, \mathcal{U}(G))$ no es completo.

III. 13. *Proposición.*

Sea $\{(X_j,\tau_j)\mid j\in J\}$ una familia de espacios completamente regulares no vacíos.

Entonces $Z = \prod_{j\in J} X_j$ es topológicamente completo si y sólo si X_j es topológicamente completo para cada $j\in J$.

Demostración.

Supóngase que Z es topológicamente completo.

Sea $j_0\in J$. Es fácil verificar que X_{j_0} es homeomorfo a un subespacio S de Z tal que

$S^- = \cup\{\{x\}^- \mid x\in S\}$.

Sea $\mathcal{U}$ una uniformidad compatible y completa de Z.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $(S,\mathcal{U}|S)$.

Claramente $\mathcal{F}^+$ es un filtro de Cauchy en $(Z,\mathcal{U})$.

Por tanto, existe $z \in Z$ tal que $F^{+} \to z$ y necesariamente $z \in S^{-}$.

Sea $x \in S$ tal que $z \in \{x\}^{-}$.

Por la regularidad de Z, se tiene $F \to x$

(De hecho, el conjunto de puntos de convergencia de F coincide con $\{x\}^{-}$).

Por lo tanto, $(S, \mathcal{U}|S)$ es completo.

Recíprocamente, por el resultado II. 36. si cada $\mathcal{U}_j$ es admisible, entonces $\mathcal{U}(G)$ es admisible.

Por el resultado II. 34., si cada $\mathcal{U}_j$ es uniformidad, también lo es $\mathcal{U}(G)$.

Y por el resultado III. 10., si cada $\mathcal{U}_j$ es completa, $\mathcal{U}(G)$ también es completa.

Por consiguiente, si cada $\mathcal{U}_j$ es pre-uniformidad admisible y completa, entonces $\mathcal{U}(G)$ lo es también.

III. 14. *Corolario*

Todo espacio topológico homeomorfo a un subconjunto cerrado de un producto de espacios métricos completos es topológicamente completo.

III. 15. *Proposición.*

Sea $\{V_i \mid i\in J\}$ una familia de conjuntos coceros en un espacio X.
Entonces $A = \cap\{V_i \mid i\in J\}$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $X\times R^J$.

Demostración.

Para cada $i\in J$, sea $g_i : X\to R$ una función continua tal que $X-V_i = g_i^{-1}(0)$ y sea $f_i : A\to R$ definida mediante la fórmula $f_i(a) = 1/g_i(a)$.

Sea $j: A \to X$ la inclusión.

Claramente $\{j\} \cup \{f_i \mid i \in J\}$ es una familia de funciones continuas que distingue puntos de cerrados.

La función evaluatoria f es entonces un encaje de A en $X \times R^J$.

Se denotarán por $\{y, \beta_i\}_{i \in J}$ con $y \in X$ y $\beta_i \in R$ a los elementos de $X \times R^J$.

Sea $p = \{x, \alpha_i\}_{i \in J} \in X \times R^J - f(A)$.

Entonces $x \notin A$ o $x \in A$ y existe $j_0 \in J$ tal que $\alpha_{j_0} \neq f_{j_0}(x)$.

En el primer caso, existe $i_0 \in J$ tal que $x \notin V_{i_0}$ y, por tanto, $g_{i_0}(x) = 0$.

Sea $M > 0$ tal que $\alpha_{i_0} \in (-M, M)$ y sea $U = g_{i_0}^{-1}(-1/M, 1/M)$.

Para cada $a \in U \cap A$, se tiene $|f_{i_0}(a)| > M$.

De donde, $U \times (-M,M) \times \prod_{i\in J-\{i_0\}} R_i$, con $R_i = R$ para cada $i\in J$, es una vecindad de p que no intersecta a f(A).

Para el segundo caso, sean I_1, I_2 intervalos abiertos ajenos tales que $\alpha_{j_0} \in I_2$ y $f_{j_0}(x)\in I_1$.

Sea U un abierto en X tal que $U\cap A = f_{j_0}^{-1}(I_1)$.

Entonces $U \times I_2 \times \prod_{i\in J-\{j_0\}} R_i$ es una vecindad de p que no intersecta a f(A).

Por lo tanto, f(A) es cerrado.

III. 16. *Corolario.*

Todo P-cerrado en un espacio X es homeomorfo a un cerrado en un espacio de la forma $X \times \mathbb{R}^J$.

III. 17. *Corolario.*

Sea $\{B_j \mid j \in J\}$ una colección de F_σ's en un espacio topológicamente completo (X,τ).

Si $B = \bigcap_{j \in J} B_j$, entonces $(B, \tau|B)$ es también topológicamente completo.

III. 18. *Corolario.*

Todo G_δ en un espacio métrico (X,d) es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $X \times R^\omega$.

III. 19. *Proposición.*

Sea $\{L_\alpha | \alpha \in J\}$ una familia de subconjuntos de un espacio de Hausdorff Y.

Si $X = \bigcap_{\alpha \in J} L_\alpha$, entonces X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $L = \prod_{\alpha \in J} L_\alpha$.

Demostración.

Para cada $\alpha \in J$, sea $\upsilon_\alpha : X \to L_\alpha$ la inclusión y sea $\upsilon : X \to L$ la función evaluatoria de las υ_α's.

Es claro que υ es un homeomorfismo sobre su ímágen.

Sea $z \in L - \upsilon(X)$.

Entonces existen $\alpha_1, \alpha_2 \in J$ tales que $z(\alpha_1) \neq z(\alpha_2)$.

Sean V_1, V_2 abiertos ajenos en Y tales que $z(\alpha_i) \in V_i$ $(i = 1, 2)$.

Por tanto, z pertenece al abierto $W = p_{\alpha_1}^{-1}(L_{\alpha_1} \cap V_1) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(L_{\alpha_2} \cap V_2)$ y $W \cap \upsilon(X) = \emptyset$.

Por consiguiente $L - \upsilon(X)$ es abierto.

Con lo que $\upsilon(X)$ es cerrado en L.

III. 20. *Corolario.*

Sea $\{B_j \mid j \in J\}$ una familia de subespacios topológicamente completos de un espacio T_2 X. Entonces $B = \bigcap_{j \in J} B_j$ es también topológicamente completo.

CAPITULO IV

CUBIERTAS NORMALES Y BASES DE WALLMAN

En este capítulo, como su nombre lo indica, se estudiarán cubiertas normales y bases de Wallman, junto con sus aplicaciones.

IV. 1. *Teorema.*

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ una sucesión normal en un espacio topológico (X,τ). Entonces existe una pseudo-métrica ρ en X tal que:

a) La identidad $i:(X,\tau)\ (X,\tau_\rho)$ es continua.

b) Para cada $n = 1, 2, \ldots$, $\alpha_n < \{B^\rho_{2^{-n+1}}(x) \mid x \in X\}$ y $B^\rho_{2^{-n-2}}(x) \mid x \in X\} < \alpha_n$.

c) Para cada $x \in X$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\alpha_n)^- = \{y \in X \mid \rho(x,y)=0\}$

Demostración.

Sea $d: X\times X \to \mathbb{R}$ tal que:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } & y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\alpha_n) \\ 1 \text{ si } & y \notin St(x,\alpha_1) \\ \frac{1}{2}n \text{ si } & y \in St(x,\alpha_n) - St(x,\alpha_{n+1}) \end{cases}$$

Entonces:

i) $d(x,x) = 0$ para toda x en X

ii) $d(x,y) = d(y,x)\ 0$ para cualesquiera x,y en X.

iii) Si $\varepsilon>0$ es tal que $d(x,y)<\varepsilon$ y $d(y,z)<\varepsilon$, entonces $d(x,z)<2\varepsilon$.

i) y ii) son claras. En cuanto a iii), si $d(x,y)\geq 1/2$ o $d(y,z)\geq 1/2$, entonces $2\varepsilon>1$, y la conclusión es clara. Por tanto, supóngase que existe un entero $k>0$ tal que $d(x,y)\leq(1/2)^{k+1}<\varepsilon$ y $d(y,z)\leq(1/2)^{k+1}<\varepsilon$. Se tiene entonces que $y\in St(x,\ \alpha_{k+1})\cap St(z,\alpha_{k+1})$. Como $\alpha_{k+1}^{*}<\alpha_k$, existe $L\in\alpha_k$ tal que $St(y,\alpha_{k+1})\subset L$. En consecuencia, $z\in St(x,\alpha_k)$ y $d(x,z)\leq \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^{k+1}} <2\varepsilon$

Ahora, sea $\rho:X\times X\rightarrow R$ tal que:

$$\rho(x,y) = \inf\{d(x,x_1)+d(x_1,x_2)+\ldots+d(x_{n-1},x_n)+ +d(x_n,y) \mid (x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ es una sucesión finita en } X\}.$$

Por consiguiente, ρ es una pseudo-métrica en X, ya que de las propiedades i) y ii), se sigue que $\rho(x,x) = 0$ y $\rho(x,y) = \rho(y,x) \geq 0$ para cada x,y en X.

En cuanto a la desigualdad del triángulo, si existen $x,y,z \in X$ con $\rho(x,z)>\rho(x,y)+\rho(y,z)$, entonces existen sucesiones finitas $x_1,\ldots,x_n$ y $y_1,\ldots,y_n$ tales que $\rho(x,y)+\frac{\varepsilon}{2}>d(x,x_1)+\ldots+d(x_n,y)$ y $\rho(y,z)+\frac{\varepsilon}{2}>d(y,y_1)+\ldots+d(y_m,z)$, en donde $\varepsilon = \rho(x,z)-\rho(x,y)-\rho(y,z)$. Por lo que $\rho(x,z)>d(x,x_1)+\ldots+d(x_n,y)+d(y,y_1)+\ldots+d(y_m,z)$ lo cual contradice la definición de $\rho(x,z)$.

Ahora, para cada sucesión finita x, x_1, $\ldots$, x_n, y en X, se tienen las desigualdades:

iv) $d(x,y)/4 \leq \rho(x,y) \leq d(x,y)$

v) $d(x,y)\leq 2d(x,x_1)+4d(x_1,x_2)+\ldots+4d(x_{n-1},x_n)+ +2d(x_n,y)$.

En efecto, si v) fuera falsa, entonces sea N el mínimo natural tal que existen

$x, y, x_1, \dots, x_N \in X$ con la propiedad:

$$d(x,y)>2d(x,x_1)+4d(x_1,x_2)+ \dots +4d(x_{N-1},x_N)+ +2d(x_N,y)$$

Si $N=1$, se tendría $d(x,y)>2d(x,x_1)+2d(x_1,y)$

Tomando ε tal que $d(x,x_1)+d(x_1,y)<\varepsilon<\frac{1}{2}d(x,y)$, la propiedad iii) implicaría $d(x,x_1)\geq\varepsilon$ o $d(x_1,y)\geq\varepsilon$, lo que es una contradicción. Por tanto $N>1$.

iii) también implica que para cada r, con $1\leq r\leq N$, se tiene que $d(x,y)\leq 2d(x,x_r)$ o $d(x,y)\leq 2d(x_r,y)$, y en particular para $r=1$, necesariamente se tiene que $d(x,y)\leq 2d(x_1,y)$, porque en el caso contrario se tendría que :

$$d(x,y)\leq 2d(x,x_1)+4d(x_1,x_2)+ \dots + 4d(x_{N-1},x_N)+2d(x_N,y)$$

lo que contradice a la definición de N. Entonces, tiene sentido definir

$$k=\max\{r \mid 1\leq r\leq N \text{ y } d(x,y)\leq 2d(x_r,y)\}.$$

Se tiene que $1 \leq k$, y k no puede ser N, porque si $k=N$, entonces $d(x,y) \leq 2d(x_N,y) \leq 2d(x,x_1)+4d(x_1,x_2)+ \ldots +4d(x_{N-1},x_N)+2d(x_N,y)$, que de nuevo es una contradicción.

Por tanto $1 \leq k < N$, y por definición de k se sigue que $d(x,y) \leq 2d(x,x_{k+1})$ y $d(x,y) \leq 2d(x_k,y)$.

Luego,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x_{k+1})+d(x_k,y) \\ &\leq (2d(x,x_1)+4d(x_1,x_2)+ \ldots + \\ &\quad 4d(x_{k-1},x_k)+2d(x_k,x_{k+1}))+ \\ &\quad (2d(x_k,x_{k+1})+4d(x_{k+1},x_{k+2})+ \ldots + \\ &\quad 4d(x_{N+1},x_N)+2d(x_N,y)) = \\ &=2d(x,x_1)+4d(x_1,x_2)+ \ldots + \\ &\quad 4d(x_{N-1},x_N)+2d(x_N,y) \end{aligned}$$

lo que es una contradicción; así, v) queda demostrada.

Ahora, se probará la propiedad iv): Como caso particular de v), se tiene que :

$$\frac{d(x,y)}{4} \leq d(x,x_1)+d(x_1,x_2)+ \ldots +d(x_{N-1},x_N)+d(x_N,y)$$

para cada sucesión finita $x, x_1, \ldots ,x_N$, y en X. Entonces, $d(x,y)/4 \leq \rho(x,y)$ para cada $x,y \in X$.

Además, claramente $\rho(x,y)\leq d(x,y)$. Por consiguiente iv) queda demostrada.

Volviendo al teorema, b) y c) son inmediatas de iv) y de las definiciones de d y ρ.

Si T_1 es la topología inducida por la uniformidad $\mathcal{U}_1=\{\alpha_1,\alpha_2, \ldots\}$ de X, es claro que $T_1\subset T$; de b) se sigue que para cada $n\in\mathbb{N}$ y $x\in X$, $St(x,\alpha_{n+2})\subset B^{\rho}_{2^{-n}}(x)$, lo que nos dice que $T_\rho\subset T_1$, de manera que $T_\rho\subset T$. Por tanto, $i:(X,T)\to(X,T_\rho)$ es continua.

IV. 2. *Teorema.*

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ una sucesión normal en un espacio X. Sea ρ la pseudo-métrica en X, definida como en IV. 1.

Entonces:

i) Si la sucesión es completa, ρ es completa.

ii) Si la sucesión es $\omega\Delta$ para cada cerrado $K \subset X$, la τ_ρ-cerradura de K coincide con $\{y \in X \mid \rho(x,y)=0$, para alguna $x \in K\}$. Además, la τ_ρ-cerradura de cada punto de X es numerablemente compacta.

Demostración.

i) Sea $x_1, x_2, \ldots$ una ρ-sucesión de Cauchy en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n = \{x_k \mid k \geq n\}$ y sea el filtro $\mathcal{F} = \{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}^+$. Sea $\mathcal{U} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$. Entonces $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{U}$-filtro de Cauchy.

Para probarlo, sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_j, x_k) < 2^{-(n+3)}$, si $j,k \geq m$. Entonces como $\alpha_{n+1}{}^* < \alpha_n$, existe $G \in \alpha_n$ tal que

$St(x_m,\alpha_{n+1})\subset G$. Ahora, si $x_i\in F_m$ es arbitrario, entonces $\rho(x_i,x_m)<2^{-(n+3)}$ y, por tanto, $x_i\in St(x_m,\alpha_{n+1})\subset G$, es decir, $F_m\subset G$ y $G\in F\cap\alpha$. Como por hipótesis $\mathcal{U}$ es completa, existe $x\in X$ tal que $\mathcal{F}\to x$ en $(X,\tau_{\mathcal{U}})$. Como se tiene que $\tau_\rho\subset\tau_{\mathcal{U}}$, entonces $\mathcal{F}\to x$ en (X,ρ). De donde ρ es completa.

ii) Sea y cualquier punto en la τ_ρ-cerradura de K. Para cada n = 1, 2, ... , sea $x_n\in K$ tal que $\rho(x_n,y)<2^{-n-2}$. Por un resultado (IV.1.ii)) se tiene que $x_n\in St(y,\alpha_n)$. Por ser $\alpha_1,\alpha_2, \ldots$ una sucesión $\omega\Delta$, existe un punto $x\in X$ tal que $x_n\mapsto x$. Por ser K cerrado, se tiene que $x\in K$. Además, $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty} St(y,\alpha_n)^{-} = \bigcap_{n=1}^{\infty} St(y,\alpha_n)$.

Por el resultado IV. 1. iii), se tiene que $\rho(x,y) = 0$.

Por último, si $x \in X$, A es la τ_ρ cerradura de $\{x\}$ y $y \in A$, entonces $\rho(x,y) = 0$, con lo que $d(x,y) = 0$.

Por lo tanto, si se toma una sucesión

$x_1, x_2, \ldots$ de puntos de A, por ser $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\omega\Delta$, entonces $x_1, x_2, \ldots$ se acumula en un punto de X, que debe ser elemento de A, porque A es τ-cerrado. Por consiguiente, A es numerablemente compacto.

IV. 3. *Teorema.*

Si α es una cubierta normal de un espacio X, existe un espacio métrico Y y una función continua y suprayectiva $f: X \to Y$ con la propiedad:

*) para toda $x \in X$, existe un elemento $A_x \in \alpha$ tal que $x \in A_x$ y $f(x) \notin \overline{f(X-A_x)}$.

Demostración.

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ una sucesión normal, en donde $\alpha = \alpha_1$. Sea ρ como en IV. 1. Para cada pareja de puntos x, $x' \in X$, sea $x \sim x'$, si y sólo si $\rho(x,x') = 0$.

Claramente $\sim$ es una relación de equivalencia, y se puede dotar al conjunto cociente $Y = X/\sim$ de una métrica poniendo $\rho_1([x],[x']) = \rho(x,x')$, en donde $[x]$, $[x']$ denotan las clases de equivalencia de x, x', respectivamente.

La función $f: X \to Y$ definida por la fórmula $f(x) = [x]$ es entonces continua y suprayectiva.

Ahora, sea $x \in X$ y $A_x \in \alpha$ tales que $St(x,\alpha_2) \subset A_x$. Si $y \in X - A_x$, entonces $y \notin St(x,\alpha_2)$ y, por tanto, si d es como en IV. 1, se tiene que $\frac{1}{2} \leq d(x,y)$ y $\frac{1}{4} d(x,y) \leq \rho(x,y)$. De donde, $\frac{1}{8} \leq \rho(x,y) = \rho_1([x],[y]) = \rho_1(f(x),f(y))$, así que $f(x) \notin f(X - A_x)^-$ y se cumple la propiedad *).

IV. 4. *Corolario.*

a) Sea α una cubierta de un espacio X. Si α pertenece a una sucesión normal completa, en el teorema anterior (IV. 3.), se puede tomar Y completo.

b) Sea α una cubierta de un espacio X. Si α pertenece a una sucesión normal y $\omega\Delta$ existe una función continua cerrada y con fibras numerablemente compactas de X sobre un espacio métrico.

IV. 5. *Lema.*

Sea $\mathcal{B}$ una base de Wallman normal de un espacio no vacío X y sea $\mathcal{U}=\{U_j \mid j\in J\}$ una cubierta punto finita de X con elementos de $\mathcal{B}$ y con la propiedad siguiente:

Si $\{B_j \mid j\in J\}\subset\mathcal{B}$ y para cada $j\in J$, $B_j\subset U_j$, se tiene $\cup\{B_j \mid j\in J\}\in\mathcal{B}$.

Entonces existen elementos $H_j \in C(\mathcal{B})$ $(j \in J)$, tales que $H_j \subset U_j$ para cada $j \in J$ y tales que $X = \cup\{H_j \mid j \in J\}$.

Demostración.

Sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones F que satisfacen:

a) Dom $F \subset J$, Rango $F \subset \mathcal{B}$.

b) Para cada $j \in$ Dom F, existe $A_j \in C(\mathcal{B})$ tal que $F(j) \subset A_j \subset U_j$.

c) $X = \cup\{F(j) \mid j \in \text{Dom } F\} \cup \cup\{U_j \mid j \in J - \text{Dom } F\}$.

Para la demostración basta probar que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que J = Dom F.

Es claro que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, porque $\emptyset \in \mathcal{F}$.

Ahora, si se ordena $\mathcal{F}$ parcialmente por inclusión y $\{F_i \mid i \in I\}$ es una cadena en $\mathcal{F}$, entonces $F = \cup\{F_i \mid i \in I\} \in \mathcal{F}$. En efecto, F satisface obviamente las condiciones a) y b), y si F no cumpliera c), entonces existiría un punto $x \in X - (\cup F(j) \mid j \in \text{Dom } F\} \cup \cup\{U_j \mid j \in J - \text{Dom } F\}$.

Si $j_1, \ldots, j_n$ son los elementos j de J tales que $x\in U_j$ (recuérdese que $\mathcal{U}$ es punto finita), entonces $\{j_1, \ldots, j_n\}\subset \text{Dom } F$. Como $\text{Dom } F = \cup\{\text{Dom } F_i \mid i\in I\}$, existe $i\in I$ tal que $\{j_1, \ldots, j_n\}\subset \text{Dom } F_i$. Pero entonces, por la propiedad c) de F_i, existe $j\in J-\text{Dom } F_i$ tal que $x\in U_j$, lo que es una contradicción. Se puede aplicar entonces el Lema de Zorn(2), y deducir la existencia de un elemento maximal $F\in\mathcal{F}$.
Por último, $\text{Dom } F = J$, ya que en caso contrario existiría un elemento $j_0\in J-\text{Dom } F$. Entonces, aplicando la última parte de la hipótesis con $B_j = F(j)$ para $j\in\text{Dom } F$, $B_{j_0}=\emptyset$ y $B_j=U_j$ para $j\in(J-\{j_0\})-\text{Dom } F$, se deduce que

$B = \cup\{F(j) \mid j\in\text{Dom } F\}\cup\cup\{U_j \mid j\in J-\{j_0\}-\text{Dom } F\}$ es un elemento de $\mathcal{B}$.

Por definición, $X-B\subset U_{j_0}$

Como $\mathcal{B}$ es normal, existen $B', B''\in\mathcal{B}$ tales que $X-B\subset B'\subset X-B''\subset U_{j_0}$.

Por consiguiente, $F_1 = F \cup\{(j_0,B')\}\in\mathcal{F}$ en contradicción con la maximalidad de F.

(2) *Ver, por ejemplo,* [Ke], Teorema 25, pág. 33

IV. 6. *Observaciones.*

a) Sea $\{U_j | j\in J\}$ una familia localmente finita de conjuntos coceros en un espacio X. Entonces $\cup\{U_j | j\in J\}$ es un conjunto cocero.

b) Sea $\{U_j | j\in J\}$ una familia localmente finita de conjuntos coceros en un espacio X y para cada $j\in J$, sea H_j un nulo en X contenido en U_j. Entonces $H = \bigcup_{j\in J} H_j$ es un nulo en X y $U = \bigcup_{j\in J} U_j$ es un cocero en X.

IV. 7. *Corolario.*

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta punto finita de un espacio normal y $R_0(X,\tau)$. Entonces existe una función $F\colon \mathcal{U}\to\tau$ tal que:

i) $F(U)^- \subset U$ para cada $U\in\mathcal{U}$

ii) $X = \cup\{F(U) | U\in\mathcal{U}\}$

IV. 8. *Corolario.*

Toda cubierta abierta localmente finita de un espacio normal y R_0 tiene un refinamiento cocero y localmente finito, y también un refinamiento localmente finito formado por conjuntos nulos.

IV. 9. *Corolario.*

Sea $\mathcal{U} = \{U_j | j \in J\}$ una cubierta cocero y localmente finita de un espacio completamente regular X. Entonces, existen conjuntos nulos $\{H_j | j \in J\}$ tales que:

i) $H_j \subset U_j$ para cada $j \in J$

ii) $X = \cup\{H_j | j \in J\}$.

IV. 10. *Teorema.*

Sea $\mathcal{U} = \{U_j | j \in J\}$ una cubierta cocero y localmente finita de un espacio completamente regular X. Entonces $\mathcal{U}$ tiene un $*$-refinamiento cocero y localmente finito. Por tanto, $\mathcal{U}$ es normal.

Demostración.

Por el corolario anterior (IV. 9), existen conjuntos nulos H_j tales que $H_j \subset U_j$ para cada $j \in J$ y tales que $X = \cup\{H_j | j \in J\}$. Para cada subconjunto finito A de J, sea:

$C(A) = (\cap\{U_j | j \in A\}) \cap (\cap\{X - H_j | j \in J - A\})$.

Entonces, $\mathcal{C} = \{C | C = C(A)$ para alguna $A \subset J$ finita$\}$ es un Δ-refinamiento cocero y localmente finito de $\mathcal{U}$. Si $A \subset J$ es finito, se tiene que:

$X - C(A) = (\cup\{X - U_j | j \in A\}) \cup (\cup\{H_j | j \in J - A\})$.

Por un resultdo (IV. 6b)), $\cup\{H_j | j \in J - A\}$ es un conjunto nulo en X, por lo que $X - C(A)$ es también nulo por ser unión finita de nulos. Por tanto, cada elemento de $\mathcal{C}$ es cocero en X.

Si $p\in X$ y $A = \{j\in J | p\in H_j\}$, entonces $p\in C(A)$, por lo que $\mathcal{C}$ es una cubierta de X.

Ahora, como $\mathcal{U}$ es localmente finita, también lo es $\mathcal{C}$.

Finalmente, sea $p\in X$, y sean $j_0\in J$ y $A\subset J$ finito tales que $p\in H_{j_0}$ y $p\in C(A)$. Entonces, $j_0\subset A$, porque si $j_0\in J-A$, entonces $C(A)\subset X-H_{j_0}$, lo que es una contradicción, porque $p\in C(A)\cap H_{j_0}$. Por consiguiente, $C(A)\subset U_{j_0}$ para cada $C(A)\in\mathcal{C}$ que contenga a p, de manera que $St(p,\mathcal{C})\subset U_{j_0}$. Por tanto, $\mathcal{C}^{\Delta}<\mathcal{U}$.

Repitiendo el argumento, se encuentra una cubierta cocero y localmente finita υ de X tal que $\upsilon^{\Delta}<\tau$. Por lo que υ es el $*$-refinamiento que se quería.

IV. 11. *Corolario.*

En un espacio pseudo-métrico toda cubierta abierta es normal.

Demostración.

Todo espacio pseudo-métrico es paracompacto y y completamente regular (I. 26). Entonces, por los resultados IV. 8 y IV. 10, toda cubierta abierta de un espacio pseudo-métrico es normal.

IV. 12. *Corolario.*

Una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de un espacio topológico X es normal si y sólo si existen un espacio pseudo-métrico (Y,ρ), una función continua $f:X\to(Y,\rho)$ y una cubierta abierta γ de (Y,ρ) tal que $f^{-1}(\gamma)<\mathcal{U}$.

Demostración.

La necesidad es inmediata del resultado IV. 3. Recíprocamente, por el resultado I. 19. ii), si $\beta^* < \gamma$, entonces $[f^{-1}(\beta)]^* < f^{-1}(\gamma)$. Por tanto, utilizando el resultado anterior, se tiene la suficiencia.

IV. 13. *Teorema.*

Una cubierta $\mathcal{U}$ de un espacio completamente regular X tiene un refinamiento cocero y σ-localmente finito.

Demostración.

Sea $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$, en donde cada $\mathcal{U}_n$ es una familia cocero y localmente finita. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_3 \subset \ldots$ Para cada n = 1, 2, ... , sea $X_n = \cup\{U \mid U \in \mathcal{U}_n\}$. Por el resultado IV. 6. a), se deduce que cada X_n es un conjunto cocero de X, por lo que existe $f_n : X \to [0,1]$ tal que $X_n = f_n^{-1}((0,1])$, f_n continua.

Sean ahora $M_{n,k} = f_n^{-1}([1/k,1])$ con n,k = 1, 2, ... , y $M_k = M_{1,k} \cup \ldots \cup M_{n,k}$. Se pueden verificar fácilmente las siguientes propiedades:

i) $M_1 \subset M_2^0 \subset M_2 \subset M_3^0 \subset \ldots$

ii) $X = \cup\{M_k | k \in N\}$

iii) $M_k \subset X_k$ para cada $k \in N$

iv) M_k es un conjunto nulo en X para cada $k \in N$

Sea $\mathcal{W}_n = \{U \cap (X - M_{n-1}) | U \in \mathcal{U}_n\}$, en donde $M_0 = \emptyset$, y $\mathcal{W} = \cup\{\mathcal{W}_n | n \in N\}$. Entonces se tiene que $\mathcal{W}$ es una familia cocero en X.

$\mathcal{W}$ es una cubierta localmente finita de X que refina a $\mathcal{U}$. En efecto, sean $x \in X$ y $n \in N$ tales que $x \in M_n - M_{n-1}$. Entonces $x \in X_n \cap (X - M_{n-1})$. De donde, existe $U \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U$. Por consiguiente, $x \in U \cap (X - M_{n-1}) \in \mathcal{W}_n$, por lo que $\mathcal{W}$ es cubierta. Además, como $x \in M_n^0 \subset M_{n+1}$, M_{n+1} es una vecindad de x que sólo puede intersectar a elementos de $\mathcal{W}_1, \ldots, \mathcal{W}_{n+1}$ y, como estas familias son localmente finitas, existe una vecindad de x que sólo intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{W}$. Es inmediato que $\mathcal{W}$ refina a $\mathcal{U}$.

Por tanto, toda cubierta cocero y σ-localmente finita tiene un refinamiento cocero y localmente finito.

El recíproco es obvio.

Se pueden resumir los últimos resultados en el siguiente teorema:

IV. 14. *Teorema.*

Si X es un espacio completamente regular y ν es una cubierta abierta de X, son equivalentes:

a) ν es normal

b) Existen un espacio pseudo-métrico Y, una función continua $f:X\to Y$ y una cubierta abierta υ de Y tales que $f^{-1}(\upsilon) < \nu$.

c) ν tiene un refinamiento cocero y σ-discreto.

d) ν tiene un refinamiento fuertemente cocero y σ-discreto.

e) ν tiene un refinamiento cocero y σ-localmente finito.

f) ν tiene un refinamiento fuertemente cocero y σ-localmente finito.

g) ν tiene un refinamiento cocero y localmente finito.

Demostración.

a) => b) es el corolario IV. 12.

b) => d) es consecuencia del hecho de que todos los espacios pseudo-métricos son paracompactos y de que las cubiertas abiertas de estos espacios son fuertemente coceros (ya que todo abierto es cocero)

d) => f) es trivial; entonces b) => f)

b) => g) se obtiene de b) => f) y del resultado IV. 13.

c) => e) es inmediata.

e) => g) es el resultado IV. 13.

g) => a) se deduce del resultado IV. 10.

d) => c) es trivial

f) => e) es trivial

IV. 15. *Corolario.*

Toda cubierta cocero numerable de un espacio completamente regular tiene un refinamiento cocero, numerable y localmente finito.

A continuación se estudiarán algunas aplicaciones importantes.

Cada base de Wallman de un espacio X induce, de manera natural, una compactificación de X.

IV. 16. *Observaciones.*

Sea $\mathcal{B}$ una base de Wallman de un espacio X y sea $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ la familia de cubiertas finitas de X con elementos de $\mathcal{B}$.

Entonces:

a) $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ es una pre-uniformidad compatible, abierta y totalmente acotada de X.

b) Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en $\mathcal{G}=\{G \mid X-G\in\mathcal{B}\}$, entonces $\mathcal{F}^{+}$ es un $\mathcal{U}(\mathcal{B})$-filtro de Cauchy.

c) Para cada $x\in X$, $\{G \mid x\in G\in\mathcal{G}\}$ es un ultrafiltro en $\mathcal{G}$.

IV. 17. *Teorema.*

Sea $\mathcal{B}$ una base de Wallman de un espacio X y sea $\mathcal{G} = \{G \mid X-G \in \mathcal{B}\}$

Sea $X(\mathcal{G})$ la familia de ultrafiltros en $\mathcal{G}$.

Para cada $A \subset X$, sea $A^* = \{\mathcal{F} \in X(\mathcal{G}) \mid L \subset A$ para alguna $L \in \mathcal{F}\}$

Entonces:

a) para cada $A, B \subset X$, $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$, $\emptyset^* = \emptyset$ y $X^* = X(\mathcal{G})$.

b) Si A y B pertenecen a $\mathcal{B} \cup \mathcal{G}$, entonces $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$.

c) Si $A \in \mathcal{G}$, entonces $A^* = \{\mathcal{F} \in X(\mathcal{G}) \mid A \in \mathcal{F}\}$.

Demostración.

a) Es obvio que $\emptyset = \emptyset^*$ y $X^* = X(\mathcal{G})$

Ahora, sea $\mathcal{F} \in X(\mathcal{G})$. Es claro que $A^* \cap B^* \subset (A \cap B)^*$

Si $\mathcal{F} \in (A \cap B)^*$, entonces existe $L \in \mathcal{F}$ tal que $L \subset (A \cap B)$. Por consiguiente $L \subset A$ y $L \subset B$; con lo que $\mathcal{F} \in A^*$ y $\mathcal{F} \in B^*$.

b) Es claro que $A^* \cup B^* \subset (A\cup B)^*$. Sea $\mathcal{F} \notin A^* \cup B^*$, y supóngase que A, $B \in \mathcal{B}$. Entonces $L\cap(X-A) \neq \emptyset \neq L\cap(X-B)$ para cada $L\in F$. En consecuencia, $X-(A\cup B) = (X-A)\cap(X-B) \in F$ y $\mathcal{F} \notin (A\cup B)^*$. Si A, $B\in G$, entonces $A\notin F$ y $B\notin F$. De donde, $A\cap L_1 = \emptyset = B\cap L_2$ para ciertos L_1, $L_2 \in F$. Como $L_1\cap L_2 \in F$ y $(A\cup B)\cap L_1\cap L_2 = \emptyset$, entonces $A\cup B \in F$. Por tanto, $\mathcal{F} \notin (A\cup B)^*$.
Si $A\in\mathcal{B}$ y $B\in G$, entonces $X-A\in F$ y existe $L\in F$ tal que $B\cap L = \emptyset$. Con lo que $L_1 = L\cap(X-A)$ es un elemento de $\mathcal{F}$ ajeno a $A\cup B$ y $\mathcal{F} \notin (A\cup B)^*$. Análogamente para $A\in G$ y $B\in\mathcal{B}$.

c) Es inmediato de las definiciones.

IV. 18. *Teorema.*

Sean $\mathcal{B}$, X, $\mathcal{G}$, $X(\mathcal{G})$ como en el teorema IV. 17. Sea τ^* la topología de $X(\mathcal{G})$ que tiene como base a la familia $\{B^* \mid B \in \mathcal{B}\}$. Para cada $x \in X$, sea $v(x) = \{G \in \mathcal{G} \mid x \in G\}$. Entonces:

a) $(X(\mathcal{G}), \tau^*)$ es un espacio compacto y T_1.

b) Para cada $A \subset X$, $A^* \subset C_{X(\mathcal{G})}\, v(A)$. Si $A \in \mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ $v(A) = A^* \cap v(X)$. Si $A \in \mathcal{G}$, $A^* = C_{X(\mathcal{G})} v(A)$.

c) Para cada $x \in X$ y cada $A \in \mathcal{B} \cup \mathcal{G}$, se tiene $v^{-1} v(x) = \{x\}^-$ y $v^{-1}(A^*) = A$

d) La correspondencia $x \to v(x)$ define una función abierta y continua de X sobre un subespacio denso de $X(\mathcal{G})$. Si X es T_1, $(v, X(\mathcal{G}))$ es una compactificación T_1 de X.

e) $X(\mathcal{G})$ es T_2 si y sólo si $\mathcal{B}$ es normal.

f) Si $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{B}$ es normal, entonces $\emptyset \in \mathcal{B}$.

Demostración.

Unicamente se probarán a) y b)

a) Sea $\{B_\alpha | \alpha \in J\} \subset \mathcal{B}$ tal que $X(\mathcal{G}) = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha^*$

Si no existe $J_0 \subset J$, finito, tal que $X(\mathcal{G}) = \bigcup_{\alpha \in J_0} B_\alpha$, entonces $\mathcal{J} = \{X - \bigcup_{\alpha \in J_0} B_\alpha | J_0 \subset J$, J_0 finito$\}$ es una $\mathcal{G}$-dirección por el teorema IV. 17. b). Por consiguiente, existe un $\mathcal{G}$-ultrafiltro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$ (esta propiedad se prueba con el lema de Zorn).

Pero entonces $\mathcal{F} \in B_{\alpha_0}^*$ para alguna $\alpha_0 \in J$ y también $\mathcal{F} \in (X - B_{\alpha_0})^*$, pues $X - B_{\alpha_0} \in \mathcal{J} \subset \mathcal{F}$, lo que contradice el teorema IV. 17. a).

Ahora, sean $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2 \in X(\mathcal{G})$, $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$. Entonces existen elementos ajenos $F_1 \in \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ y $F_2 \in \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$. Por tanto, $\mathcal{F}_1 \in (X - F_2)^* \subset X(\mathcal{G}) - \{\mathcal{F}_2\}$ y $\mathcal{F}_2 \in (X - F_1)^* \subset X(\mathcal{G}) - \{\mathcal{F}_1\}$ y $X(\mathcal{G})$ es T_1.

b) Claramente $A^* \cap v(X) \subset v(A)$ para cada $A \subset X$.

Sea $x \in A$. Si $A \in \mathcal{B}$, existe $F \in \mathcal{G}$ tal que $x \in F \subset A$.

Si $A\in\mathcal{G}$, sea $\mathcal{F} = A$. En cualquier caso, existe $F\in\mathcal{G}$ tal que $x\in F\subset A$. Por tanto, $F\in v(x)$ y $v(x)\in F^*\subset A^*$. De donde, $v(A)\subset A^*\cap v(X)$ para cada $A\in\mathcal{B}\cup\mathcal{G}$.

Si $\mathcal{F}\in X(\mathcal{G})-C_{X(\mathcal{G})}v(A)$, existe $B\in\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{F}\in B^*$ y $B^*\cap v(A) = \emptyset$. Sea $F\in\mathcal{F}$ tal que $F\subset B$. En consecuencia, $F^*\cap v(A) = v(F)\cap v(A) = \emptyset$ y $F\cap A = \emptyset$. De donde, $\mathcal{F}\in(X-A)^*$ y $\mathcal{F}\notin A^*$. Se ha probado entonces que $A^*\subset C_{X(\mathcal{G})}v(A)$ para cada $A\subset X$.

Finalmente, si $A\in\mathcal{G}$, entonces A^* es un cerrado en $X(\mathcal{G})$ pues $X(\mathcal{G})-A^* = (X-A)^*$ es abierto, y $v(A)\subset A^*\subset C_{X(\mathcal{G})}v(A)$. Por tanto, $A^* = C_{X(\mathcal{G})}v(A)$.

IV. 19. *Corolario.*

Un espacio topológico X es completamente regular si y sólo si X tiene una base de Wallman normal.

IV. 20. *Observación.*

Sea (X,τ) un espacio localmente compacto, T_2 y no compacto.

Sea $\mathcal{B} = \{V \in \tau \mid V^{-}$ ó $X-V$ compacto$\}$.

Entonces $\mathcal{B}$ es una base de Wallman normal y la compactificación $X(\mathcal{B})$ es la compactificación por un punto de X.

A continuación, se muestra la relación entre los conceptos de uniformidad y de base de Wallman.

IV. 21. *Teorema.*

Sea $\mathcal{B}$ una base de Wallman de un espacio X y sea $\mathcal{U}$ la familia de cubiertas finitas de X con elementos de $\mathcal{B}$.

Entonces $\mathcal{B}$ es normal si y sólo si $\mathcal{U}$ es una uniformidad.

Demostración.

Sea $\mathcal{B}$ normal.

Sea $\alpha = \{B_1, \ldots, B_n\} \in \mathcal{U}$. Entonces $X(\mathcal{G}) = B_1^* \cup \ldots \cup B_n^*$. Como $X(\mathcal{G})$ es compacto, por los resultados IV. 8 y IV. 10 se deduce que la cubierta $\{B_1^*, \ldots, B_n^*\}$ tiene un $*$-refinamiento $\{D_1^*, \ldots, D_m^*\}$, en donde cada $D_i \in \mathcal{B}$. Por tanto, $\{v^{-1}(D_1^*), \ldots, v^{-1}(D_m^*)\} = \{D_1, \ldots, D_m\}$ es un $*$-refinamiento de $\{v^{-1}(B_1^*), \ldots, v^{-1}(B_n^*)\} = \alpha$ y $\mathcal{U}$ es una uniformidad.

Recíprocamente, sean $H_1, H_2 \in \mathcal{G}$ ajenos. Si $B_i = X - H_i$, $i = 1,2$, entonces $\{B_1, B_2\} \in \mathcal{U}$. Por los resultados III. 6 y III. 8, la completación $(\hat{X}, \hat{\mathcal{U}})$ de $(X, \mathcal{U})$ es un espacio compacto y T_2.

Como $\hat{X} = \hat{B}_1 \cup \hat{B}_2$ y $\hat{X}$ es normal, existen cerrados S_1, S_2 en $\hat{X}$ tales que $\hat{X} = S_1 \cup S_2$ y $S_i \subset B_i$, $i=1,2$. Por consiguiente, $\hat{X}-\hat{B}_i \subset \hat{X}-S_i$, $i=1,2$.

Como $\{\hat{B} \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base de $\hat{X}$ y los conjuntos $\hat{X}-\hat{B}_i$ $(i=1,2)$ son compactos, existen $D_1, \ldots, D_m$. $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{B}$ tales que $\hat{X}-\hat{B}_1 \subset \bigcup_{i=1}^{m} \hat{D}_i \subset \hat{X}-S_1$ y $X-B_2 \subset \bigcup_{j=1}^{n} \hat{E}_j \subset \hat{X}-S_2$.

De donde, $H_1 = X-B_1 \subset \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ y $H_2 = X-B_2 \subset \bigcup_{j=1}^{n} E_j$ y los conjuntos $\bigcup_{i=1}^{m} D_i$, $\bigcup_{j=1}^{n} E_j$ son elementos ajenos de $\mathcal{B}$.

De donde $\mathcal{B}$ es normal.

IV. 22. *Teorema.*

Sea $f: X \to Y$ una función del espacio X en el espacio Y. Sean $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$ bases de Wallman de X, Y, respectivamente.

Si:

i) $\mathcal{B}_y$ es normal y Y es T_2

ii) $f^{-1}(C(\mathcal{B}_y)) \ll C(\mathcal{B}_x)$ (Véase definición 78)

Entonces f es continua y existe una única función continua $f^*: X(C(\mathcal{B}_x)) \to Y(C(\mathcal{B}_y))$ tal que $f^* \circ v_x = v_y \circ f$, en donde $v_x: X \to X(C(\mathcal{B}_x))$ y $v_y: Y \to Y(C(\mathcal{B}_y))$ son los encajes canónicos (ver el resultado IV. 18).

Demostración.

Para probar que f es continua, sean $x \in X$ y $G \in \mathcal{B}_y$ tales que $f(x) \in G$. Por la regularidad de $\mathcal{B}_y$, existe $M \in C(\mathcal{B}_y)$ tal que $f(x) \in M \subset G$. Por la condición ii) de la hipótesis, existen $H_1, H_2 \in C(\mathcal{B}_x)$, ajenos, tales que $f^{-1}(M) \subset H_1$ y $f^{-1}(Y-G) \subset H_2$. Por tanto, $x \in X - H_2 \in \mathcal{B}_x$ y $f(X-H_2) \subset G$. De donde, f es continua.

Ahora, supóngase primero que Y es compacto, y sea $F \in X(C(B_x))$. Sea $G = \{f(N)^- \mid N \in F\}$. G es entonces una dirección en Y. Por ser Y compacto, G tiene al menos un punto de adherencia. Si existen dos tales puntos y_1, y_2, entonces, como Y es T_2, existen G_1, $G_2 \in B_y$, ajenos, tales que $y_1 \in G_1$ y $y_2 \in G_2$.
Sea $V \in B_y$ tal que $L = Y - G_2 \subset V \subset V^- \subset Y - \{y_2\}$.
Los conjuntos L y Y-V son vecindades de y_1 y y_2, respectivamente. Por tanto, $L \cap f(N) \neq \emptyset \neq (Y-V) \cap f(N)$ para cada $N \in F$.
Por la condición ii), existen H_1, $H_2 \in C(B_x)$, ajenos tales que $f^{-1}(L) \subset H_1$ y $f^{-1}(Y-V) \subset H_2$.
Por tanto, $H_1 \cap N \neq \emptyset \neq H_2 \cap N$ para toda $N \in F$.
Como F es un $C(B_x)$-ultrafiltro, necesariamente H_1 y H_2 pertenecen a F, una contradicción.
Por tanto, G tiene exactamente un punto de adherencia y.
La compacidad de Y implica que G converge a y.
Sea entonces $\bar{f}(F) = y$. Es claro que $\bar{f} \circ v_x = f$.
Para probar que $\bar{f}$ es continua, sean $F \in X(C(B_x))$ y $V \in B_y$ tales que $\bar{f}(F) \in V$.
Existen elementos $L \in C(B_y)$ y $W \in B_y$ tales que

$\bar{f}(F)\in \operatorname{int} L\subset L\subset W\subset W^-\subset V$. Como $G\to\bar{f}(F)$, existe $N\in F$ tal que $f(N)\subset L$. Por la condición ii), existe $B\in\mathcal{B}_X$ tal que $f^{-1}(L)\subset B\subset f^{-1}(W)$. Por consiguiente, $F\in B^*$. Ahora, sea $\eta\in B^*$, arbitraria, y sea $G\in\eta$ tal que $G\subset B$. Por tanto, $f(G)\subset W$, con lo que $\bar{f}(\eta)\in \overline{f(G)}\subset W^-\subset V$ y $\bar{f}$ es continua.

Volviendo al caso general, sea el espacio compacto y T_2 $Y(C(\mathcal{B}_Y))$ y la función continua $v_Y\circ f: X\to Y(C(\mathcal{B}_Y))$. Por la primera parte de la demostración, existe una función continua $\bar{f}: X(C(\mathcal{B}_X))\to Y(C(\mathcal{B}_Y))$ tal que $\bar{f}\circ v_X = v_Y\circ f$.

Es claro, además, que esta función es única.

IV. 23. *Corolario.*

Sean $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ dos bases de Wallman normales en un espacio X. Si $C(\mathcal{B}_1) << C(\mathcal{B}_2)$, entonces existe una única función continua $g^*: X(C(\mathcal{B}_2)) \to X(C(\mathcal{B}_1))$ tal que $g^* \circ v_2 = v_1$.

IV. 24. *Corolario.*

Sea $\mathcal{B}$ una base de Wallman normal en un espacio T_2 X tal que $\mathcal{B}$ contiene todos los conjuntos coceros de X. Entonces $X(C(\mathcal{B}))$ es equivalente a la compactificación de Stone-Čech de X.

IV. 25. *Corolario.*

Sea $\mathcal{B}_j$ una base de Wallman normal del espacio T_2 X, para cada $j \in J$. Sea $Y_j = X_j(C(\mathcal{B}_j))$ y sean $X = \prod_{j \in J} X_j$, $Y = \prod_{j \in J} Y_j$.

Sea $\mathcal{B}$ el semi-anillo de conjuntos de X generado por todos los conjuntos de la forma $p_j^{-1}(V)$, en donde $V \in \mathcal{B}_j$, $j \in J$ y $p_j : X \to X_j$ es la proyección. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de Wallman normal de X y Y, $X(C(\mathcal{B}))$ son compactificaciones equivalentes de X.

Demostración.

Es claro que $\mathcal{B}$ es una base de Wallman de X. Sean $v_j : X_j \to Y_j$, $j \in J$ los encajes canónicos, y sea $v^{\#} : X \to Y$ la función producto de las v_j. Sean también el encaje canónico $v : X \to X(C(\mathcal{B}))$ y las proyecciones $q_j : Y \to Y_j$. Por último, sea $\mathcal{G}$ el semi-anillo en Y generado por todos los conjuntos de la forma $q_j^{-1}(V^*)$ en donde $V \in \mathcal{B}_j$ y $j \in J$. $\mathcal{G}$ es una base de Wallman de Y y es normal porque Y es compacto y T_2. Por la definición de $v^{\#}$, para cada $C \in C(\mathcal{G})$.
$(v^{\#})^{-1}(C) \in C(\mathcal{B})$.

Por el teorema IV. 22, existe una única función continua $g:X(C(\mathcal{B}))\to Y$ tal que $v^{\#} = g\circ v$. Sean $F_1, F_2 \in X(C(\mathcal{B}))$ dos elementos distintos. Existen entonces $H\in F_1$ y $K\in F_2$ tales que $H\cap K = \emptyset$. Como F_1, F_2 son $C(\mathcal{B})$-ultrafiltros, se puede suponer que $H = \bigcap_{i=1}^{n} p_{j_i}^{-1}(M_{j_i})$ y $K = \bigcap_{i=1}^{n} p_{j_i}^{-1}(N_{j_i})$, en donde M_{j_i}, $N_{j_i} \in C(\mathcal{B}_{j_i})$, $i = 1, 2, \ldots ,n$.

Para evitar casos triviales se puede suponer que $X_j \neq \emptyset$ para cada $j\in J$; por tanto, el resultado IV. 18 f) implica $X_j\in C(\mathcal{B}_j)$ para cada $j\in J$. De ahí que se pueda tomar el mismo número de intersectandos en H y en K.

Definiendo $A = \{j_1, \ldots , j_n\}$ y $M_j = N_j = X_j$ para $j\in J-A$, se tiene $H = \prod_{j\in J} M_j$ y $K = \prod_{j\in J} N_j$.

Dado que $H\cap K = \emptyset$, existe $j\in A$ tal que $M_j\cap N_j = \emptyset$. Por consiguiente, por el resultado IV. 17. a), $M_j^*\cap N_j^* = \emptyset$. Pero, además

$(v^{\#}(H))^- = (\prod_{j\in J} v_j(M_j))^- = \prod_{j\in J}(v_j(M_j))^- = \prod_{j\in J} M_j^*$ y, análogamente, $(v^{\#}(K))^{-} = \prod_{j \in J} N_j^{*}$. Por lo tanto, $(v^{\#}(H))^{-} \cap (v^{\#}(K))^{-} = \emptyset$. Por definición de g, se tiene que $g(F_1) \in (v^{\#}(H))^{-}$ y $g(F_2) \in (v^{\#}(K))^{-}$. De donde, $g(F_1) \neq g(F_2)$ y g es un homeomorfismo.

De aquí, la normalidad de $\mathcal{B}$ es inmediata.

IV. 26. *Corolario.*

Sea $\mathcal{A}$ una base anular de un espacio compacto y T_2 Y. Sea X denso en Y y sea $\mathcal{B} = \{G \cap X \mid G \in \mathcal{A}\}$. Si Y es el único elemento de $\mathcal{A}$ que contiene a X, entonces $\mathcal{B}$ es una base de Wallman normal de X y $Y \simeq X(C(\mathcal{B}))$.

Demostración.

Es claro que $\mathcal{A}$ es una base de Wallman normal de Y. Es fácil probar entonces que $\mathcal{B}$ es una base de Wallman de X. Para probar la normalidad de $\mathcal{B}$, sean H, $K \in C(\mathcal{A})$ ajenos.

Existen entonces H_1, $K_1 \in C(\mathcal{A})$ tales que $H = H_1 \cap X$ y $K = K_1 \cap X$. Si $H_1 \cap K_1 \neq \emptyset$, $Y - H_1 \cap K_1$ sería un elemento de $\mathcal{A}$, distinto de Y, el cual contendría a X, contrario a la hipótesis. Por tanto, $H_1 \cap K_1 = \emptyset$. Como $\mathcal{A}$ es normal, existen V, $W \in \mathcal{A}$, ajenos, tales que $H_1 \subset V$ y $K_1 \subset W$. Por tanto, $V \cap X$, $W \cap X$ son elementos ajenos de $\mathcal{B}$ y $H \subset V \cap X$, $K \subset W \cap X$. Esto prueba que $\mathcal{B}$ es normal.

Sea $j: X \to Y$ la inclusión. Si se toman las bases de Wallman $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ para X, Y, respectivamente, se puede aplicar el resultado IV. 22. Existe entonces una función continua $j^*: X(C(\mathcal{B})) \to Y$ tal que $j^* \circ v = j$, en donde $v: X \to X(C(\mathcal{B}))$ es el encaje canónico.

Ahora, sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in X(C(\mathcal{B}))$, $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$. Existen entonces $H \in \mathcal{F}_1$, $K \in \mathcal{F}_2$ ajenos. Con el mismo razonamiento, se encuentran H_1, $K_1 \in C(\mathcal{A})$, ajenos, tales que $H \subset H_1$, $K \subset K_1$. Por la definición de j^*, se tiene $j^*(\mathcal{F}_1) \in H^- \subset H_1$, $j^*(\mathcal{F}_2) \in K^- \subset K_1$. Por tanto, $j^*(\mathcal{F}_1) \neq j^*(\mathcal{F}_2)$.

IV. 27. *Corolario.*

Sea $\mathcal{A}$ una base anular de un espacio compacto y T_2 Y. Si cada $G\in\mathcal{A}$ es un dominio abierto, entonces, para cada $X\subset Y$ denso, $\mathcal{B}_X = \{G\cap X \mid G\in\mathcal{A}\}$ es una base de Wallman normal de X y $Y\approx X(C(\mathcal{B}_X))$

IV. 28. *Corolario.*

Sea X un subespacio denso de un espacio compacto y T_2 Y. Si Y tiene una base $\mathcal{A}_1$ tal que la Y-frontera de cada elemento de $\mathcal{A}_1$ está contenida en X, entonces X tiene una base de Wallman normal $\mathcal{B}$ tal que $Y\approx X(C(\mathcal{B}))$.

IV. 29. *Corolario*

Sea X un subespacio denso y abierto de un espacio compacto y T_2 Y. Si Y-X es totalmente disconexo, entonces X tiene una base de Wallman normal $\mathcal{B}$ tal que $Y\approx X(C(\mathcal{B}))$.

IV. 30. *Corolario.*

Sea X un subespacio denso de un espacio compacto y T_2 Y. Si el único G_δ en Y ajeno a X es el conjunto vacío, entonces X tiene una base de Wallman normal $\mathcal{B}$, que consiste de conjuntos coceros en X, y tal que $Y \simeq X(C(\mathcal{B}))$.

IV. 31. *Teorema.*

Sea $\mathcal{B}_0$ una base de Wallman normal de un espacio X.

Sea $A \subset X(C(\mathcal{B}_0)) - v(X)$ un conjunto compacto con más de un punto.

Si $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{B}_0 \mid A \subset B^* \text{ o } A \cap B^* = \emptyset\}$,

entonces $\mathcal{B}$ es una base de Wallman normal de X y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_0$ no son equivalentes.

Demostración.

Sea $x \in D \in \mathcal{B}_0$. Sea $B \in \mathcal{B}_0$ tal que $v(x) \in B^* \subset D^* - A$.

Como $B^* \cap A = \emptyset$, entonces $x \in B \subset D$ y $B \in \mathcal{B}$.

Por tanto, $\mathcal{B}$ es una base de X.

Claramente $\mathcal{B}$ es anular.

En cuanto a la regularidad de $\mathcal{B}$, sea $x \in B \in \mathcal{B}$.

Sea $D \in \mathcal{B}_0$ tal que $v(x) \in D^* \subset B^* - A$.

Entonces $D^* \cap A = \emptyset$, con lo que $D \in \mathcal{B}$.

Sea $H \in C(\mathcal{B}_0)$ tal que $x \in H \subset D$. Claramente $A \subset (X-H)^*$, así que $H \in C(\mathcal{B})$.

Para la normalidad, sean H, $K \in C(\mathcal{B})$ ajenos.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $A \subset (X-H)^*$ (porque $X(C(\mathcal{B}_0)) = (X-H)^* \cup (X-K)^*$).

Sean B_1, $B_2 \in \mathcal{B}_0$ ajenos, tales que $H^* \subset B_1^*$ y $A \cup K^* \subset B_2^*$. Por tanto, B_1 y $B_2 \in \mathcal{B}$.

Por último, sean $L \in \mathcal{F}$, $L' \in \mathcal{F}'$ ajenos, con $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}' \in A$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$. Si $\mathcal{B}$ fuera equivalente a $\mathcal{B}_0$, existirían H, $H' \in C(\mathcal{B})$, ajenos, tales que $L \subset H$, $L' \subset H'$. Pero entonces $\mathcal{F}' \in (X-H)^*$, de manera que $A \cap (X-H)^* \neq \emptyset$. Como $H \in C(\mathcal{B})$, necesariamente $A \subset (X-H)^*$, o bien, $A \cap H^* = \emptyset$. Pero $\mathcal{F} \in A \cap H^*$, lo que es una contradicción. Por lo que $\mathcal{B}_0$ y $\mathcal{B}$ no son equivalentes.

IV. 32. *Corolario.*

Sea $\mathcal{B}_0$ una base de Wallman normal de un espacio de Tychonoff X. Si todas las bases de Wallman de X contenidas en $\mathcal{B}_0$ son equivalentes a $\mathcal{B}_0$, entonces $X(C(\mathcal{B}_0))-v(X)$ consta, a lo más, de un punto. En este caso, X es localmente compacto.

IV. 33. *Corolario.*

Si todas las bases de Wallman normales de un espacio de Tychonoff X son equivalentes, entonces $|Z-h(x)|\leq 1$ para cada compactificación (h,Z) de X.

En este caso, excepto por equivalencias, X tiene una sóla compactificación T_2.

Este último corolario (IV. 33) tiene un recíproco:

IV. 34. *Corolario.*

Sea X un espacio de Tychonoff tal que $|\beta X - X| \leq 1$. Entonces todas las bases de Wallman normales de X son equivalentes.

Demostración.

Si X es compacto, el teorema es claro.
Entonces, sea $X \neq \beta X$. Con lo que $\beta X - X$ consta de un único punto z.
Sea $\mathcal{B}$ una base de Wallman normal de X. Por la propiedad universal de βX, existe una función continua υ: $\beta X \to \dot{X}(C(\mathcal{B}))$ tal que $\upsilon|X = v$ = encaje canónico de X en $X(C(\mathcal{B}))$. Como $\upsilon(\beta X - X) = X(C(\mathcal{B})) - v(X) = \{\upsilon(z)\}$, υ es un homeomorfismo, y las compactificaciones βX y $X(C(\mathcal{B}))$ son equivalentes. Por el resultado IV. 22 se deduce que la base de Wallman $\mathcal{B}$ y la base $\mathcal{B}_0$, formada por todos los conjuntos coceros de X, son equivalentes.

CONCLUSIONES

En esta tesis, se unieron las teorías de espacios uniformes y la de filtros.

Se utilizaron los filtros y los ultrafiltros como herramientas para resolver algunos problemas en espacios (pre-)uniformes.

Se utilizó la notación de estrellas y cubiertas, en lugar de conectores, para estudiar los espacios (pre-)uniformes.

La notación de estrellas y cubiertas es la siguiente:

Para X un conjunto, α una cubierta de X y $B\subset X$, se definieron:

Las <u>estrellas</u>:

$$St(B,\alpha) = \cup\{L\in\alpha \mid B\cap L\neq\emptyset\}$$

$$\alpha^* = \{St(A,\alpha) \mid A\in\alpha\}$$

$$\alpha^{\Delta} = \{St(x,\alpha) \mid x\in X\}$$

Las ***cuñas*:**

La ***cuña*** $(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ *de las cubiertas de* X α_1 *y* α_2 *como la cubierta de* X *que consiste de todas las intersecciones de un elemento de* α_1 *y un elemento de* α_2.

Los ***refinamientos*:**

α_1 ***refina*** *a* α_2 $(\alpha_1 < \alpha_2)$ *si cada elemento de* α_1 *está contenido en un elemento de* α_2.

α_1 ***refina débilmente*** *a* $\alpha_2 (\alpha_1 <_W \alpha_2)$ *si para cada* $x\in X$, *se tiene* $St(x,\alpha_1)\subset St(x,\alpha_2)$ *y* α_1 ***refina regularmente*** *a* $\alpha_2 (\alpha_1 <_R \alpha_2)$ *si cada par de puntos en la unión de dos elementos intersectantes de* α_1 *pertenece a un elemento de* α_2.

En esta notación, se definieron los espacios (pre-)uniformes como sigue:

Para $\mathcal{U}$ una colección de cubiertas del conjunto X:

$\mathcal{U}$ es una pre-uniformidad (resp. w-pre-uniformidad) en X, si dados α, β en $\mathcal{U}$, existe $\gamma \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma < \alpha \wedge \beta$ (resp. $\gamma <_w \alpha \wedge \beta$), y un espacio (w-)pre-uniforme es una pareja $(X, \mathcal{U})$ que consiste de un conjunto X y una (w-)pre-uniformidad $\mathcal{U}$ en X.

$\mathcal{U}$ es una semi-uniformidad en X si $\mathcal{U}$ es una pre-uniformidad en X y si además para toda $\alpha \in \mathcal{U}$, existe $\beta \in \mathcal{U}$ tal que para toda $B \in \beta$, existen $A_B \in \alpha$ y $\gamma_B \in \mathcal{U}$ tales que $St(B, \gamma_B) \subset A_B$.

$\mathcal{U}$ es una R-uniformidad en X si $\mathcal{U}$ es una w-pre-uniformidad en X y si para toda $\alpha \in \mathcal{U}$, existe $\beta \in \mathcal{U}$ tal que $\beta <_R \alpha$.

$\mathcal{U}$ es una uniformidad en X si $\mathcal{U}$ es una pre-uniformidad en X y si para toda $\alpha \in \mathcal{U}$, existe $\beta \in \mathcal{U}$ tal que $\beta^* < \alpha$.

Ahora, el conector de α es $E(\alpha) = \cup\{A \times A \mid A \in \alpha\}$.

Entonces, en la notación de conectores se tendría:

Una colección no vacía de conectores $\mathcal{U}$ de un conjunto no vacío X es una uniformidad en X si satisface:

Para cualesquiera elementos U_1, U_2 de $\mathcal{U}$, existe $U_3 \in \mathcal{U}$ tal que $U_3 \subset U_1 \cap U_2$, y para todo elemento U de $\mathcal{U}$, existe un elemento V de $\mathcal{U}$ tal que $V \circ V^{-1} \in \mathcal{U}$.

Algunas relaciones entre conectores y cubiertas son las siguientes:

a) Si α es cubierta de X, $E(\alpha) = E(\alpha)^{-1}$.

b) Si α, β son cubiertas de X, entonces $\alpha <_W \beta \Leftrightarrow E(\alpha) \subset E(\beta)$.

c) Si α, β son cubiertas de X, entonces $\alpha <_R \beta \Leftrightarrow E(\alpha) \circ E(\alpha) \subset E(\beta)$.

Por lo tanto, todo espacio R-uniforme da lugar a un espacio uniforme en el sentido de conectores.

En efecto, si $\mathcal{U} = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ es una R-uniformidad, en donde las α_i son cubiertas, entonces, la uniformidad (en el sentido de conectores) sería la formada por A_i, con $A_i = E(\alpha_i) = \cup\{A \times A \mid A \in \alpha_i\}$.

Recíprocamente, dado $E \supset \Delta(x)$, no necesariamente se tiene que $E = E^{-1}$; entonces se toma $E \cap E^{-1} = F$. Por lo tanto, las cubiertas de la R-uniformidad serían: $\alpha_F = \{V \subset X \mid V \times V \subset F\}$.

Para resolver algunos problemas en estos espacios, se utilizaron los filtros y los ultrafiltros como principales herramientas.

Para X un conjunto y $G \subset 2^X$, se definieron:

$\mathcal{D} \subset G$ es una <u>G-dirección</u> ó <u>G-base de filtro</u> si $\mathcal{D}$ es una familia no vacía de elementos no vacíos de G, y dados D_1, D_2 en $\mathcal{D}$, existe D_3 en $\mathcal{D}$ tal que $D_3 \subset D_1 \cap D_2$.

Una <u>dirección</u> ó <u>base</u> <u>de</u> <u>filtro</u> en X es simplemente una 2^X-dirección ó 2^X-base de filtro.

$\mathcal{F}$ es un *G-filtro* si $\mathcal{F}$ es una G-dirección y dados F en $\mathcal{F}$ y G en $\mathcal{G}$, con $F \subset G$, se tiene que G pertenece a $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ es un *G-ultrafiltro* si $\mathcal{F}$ es un G-filtro no contenido propiamente en ningún otro G-filtro.

A los 2^X-filtros (resp. 2^X-ultrafiltros) se les llama simplemente *filtros* (resp. *ultrafiltros*).

Un filtro $\mathcal{F}$ es *U-Cauchy* si para toda $\alpha \in \mathcal{U}$, $\mathcal{F} \cap \alpha \neq \emptyset$.

Un filtro $\mathcal{F}$ es *U-fuertemente de Cauchy* si $\{St(F,\alpha) \mid F \in \mathcal{F}, \alpha \in \mathcal{U}\}^+$ es U-Cauchy, en donde para cada $\mathcal{H} \subset 2^X$, $\mathcal{H}^+$ denota $\{B \in 2^X \mid B \supset H$ para alguna $H \in \mathcal{H}\}$.

Un filtro $\mathcal{F}$ es *redondo* si $\mathcal{F} = \{St^*(\mathcal{F},\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{U}, \mathcal{F} \cap \alpha \neq \emptyset\}^+$, donde $St^*(\mathcal{F},\alpha) = \cup\{L \in \alpha \mid L \cap F \neq \emptyset \ \forall \ F \in \mathcal{F}\}$.

Un primer problema que se trató con filtros y ultrafiltros fue el de encontrar una extensión continua de una función dada.

Para dos espacios topológicos (X_1,τ_1), (X_2,τ_2), un subconjunto Y de X_1 y una función continua $f:Y\to X_2$, se deseaba encontrar una función continua $g:X_1\to X_2$ tal que $f(x) = g(x)$ si $x\in Y$.

No siempre tiene solución este problema. Pero existen condiciones bajo las cuales se puede encontrar este tipo de extensión.

Para esto, se estudió el _teorema de extensión en espacios uniformes_, en el que aparece una función uniformemente continua de un subconjunto denso de un espacio pre-uniforme y admisible en un espacio semi-uniforme, completo y de Hausdorff.

A cambio de todas estas limitaciones, se encontró que no sólo existía la extensión deseada, sino que además era única.

Como consecuencia de la unicidad, el teorema puede utilizarse para definir funciones: Dada una función f se puede definir una función nueva f^* como la extensión continua de f.

Este teorema de extensión se utilizó para demostrar un teorema todavía más importante: El teorema de completación de espacios uniformes.

Por definición, un espacio completo es aquel en el que no existen filtros de Cauchy sin límite. Es decir, un espacio (X,U) es completo si todo U-filtro de Cauchy converge en X.

Esto sugirió la posibilidad de extender un espacio uniforme no completo dado a uno completo, pero sin modificar esencialmente su estructura original.

El objetivo fue entonces encontrar, a partir de un espacio uniforme no completo dado (X,U), un espacio uniforme completo (X',U') que tuviera un subespacio unimórfico a (X,U).

Cualquier punto x de X puede identificarse con su filtro de vecindades, y en este sentido (X',U') es una extensión de (X,U).

Una solución a este problema apareció en el teorema de completación de espacios uniformes, en el cual se daba un espacio pre-uniforme admisible en el que todo filtro de vecindades fuera redondo y todo filtro de Cauchy contuviera un filtro redondo de Cauchy.

Entonces, el nuevo espacio, formado a partir de la colección de filtros redondos de Cauchy, también era pre-uniforme y resultaba además ser completo y de Hausdorff.

Además, se encontró un mapeo uniformemente continuo entre los dos espacios, definido mediante los filtros de vecindades de x.

Si se agregaba a las hipótesis que el espacio fuera T_2, entonces la función entre los dos espacios era un encaje unimórfico, y si además (X,U) era semi-uniforme, el nuevo espacio era único excepto por unimorfismos.

En el último capítulo se estudiaron las cubiertas normales y las bases de Wallman, junto con sus aplicaciones.

Una *sucesión* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de cubiertas abiertas de un espacio topológico X es *normal* si $\alpha_{n+1}^{*} < \alpha_n$ para cada $n = 1, 2, \ldots$

Una *cubierta* α es *normal* si pertenece a una sucesión normal de cubiertas.

Para X un conjunto y $G \subset 2^X$, se define:

$C(G) = \{A \mid X - A \in G\}$.

Entonces,

$G \subset 2^X$ es *regular* si para cada $G \in G$ y cada $x \in G$, existe $H \in C(G)$ tal que $x \in H \subset G$.

$G \subset 2^X$ es *anular* si dados $G_1, G_2 \in G$, también $G_1 \cup G_2 \in G$ y $G_1 \cap G_2 \in G$.

$G \subset 2^X$ es *normal* si dados $H_1, H_2 \in (G)$, ajenos, existen $G_1, G_2 \in G$, ajenos, tales que $H_1 \subset G_1$ y $H_2 \subset G_2$.

Una base B de un espacio X es una *base* de *Wallman* de X si B es anular y regular (y obviamente es una *base de Wallman normal*, si además B es normal).

Por medio de las bases de Wallman, se pudo tratar un problema muy importante en topología: El de la <u>compactificación</u>.

Una compactificación de un espacio X es un par (h,Y) que consiste de un espacio compacto Y y un homeomorfismo h de X sobre un subconjunto denso de Y.

En nuestro caso, dado un espacio uniforme totalmente acotado (X,U), se indicó como construir un espacio compacto uniforme que tuviera un subespacio unimórfico a (X,U) (Un espacio uniforme (X,U) es <u>totalmente acotado</u> si cada $\alpha\in U$ tiene una subcubierta finita).

Cada base de Wallman de un espacio T_1 X induce de manera natural una compactificación del espacio X.

Si B es una base de Wallman de un espacio X y $G=\{G \mid X-G\in B\}$, se llamó $X(G)$ a la familia de G-ultrafiltros.

Además, para cada $A \subset X$, se definió:

$A^* = \{F \in X(G) \mid L \subset A$ para alguna $L \in F\}$,

y τ^* a la topología de $X(G)$ que tenía como base a la familia $\{B^* \mid B \in B\}$.

Por último, para cada $x \in X$, se definió

$v(x) = \{G \in G \mid x \in G\}$.

Entonces, $Z = (X(G), \tau^*)$ resultó ser un espacio compacto, T_1 y v un encaje de X en Z, obteniéndose así una compactificación del espacio X, a partir de las bases de Wallman, utilizando a los ultrafiltros como principal herramienta.

Ahora, para compactificar un espacio semi-uniforme y totalmente acotado de una manera inmediata, basta completarlo, ya que el nuevo espacio resulta ser completo y totalmente acotado y, por lo tanto, compacto.

Cada base de Wallman B de un espacio topológico (X,τ) determina una pre-uniformidad abierta, totalmente acotada y compatible $U(B)$ en (X,τ).

Basta definir:

$$U(B) = \{\alpha \subset B \mid \alpha \text{ finita, } X = \cup\alpha\}$$

Otra aplicación de las bases de Wallman, consiste en verificar si una función es o no uniformemente continua respecto a las pre-uniformidades inducidas.

Sean B y B' bases de Wallman de X, Y, respectivamente, y sean $C(B) = \{X-B \mid B\in B\}$ y $C(B') = \{Y-B' \mid B'\in B'\}$.

Entonces $f:(X,U(B))\to(Y,U(B'))$ es uniformemente continua si y sólo si para cada H, $K \in C(B')$, ajenos, existen P, $Q \in C(B)$, ajenos, tales que $f^{-1}(H)\subset P$ y $f^{-1}(K)\subset Q$.

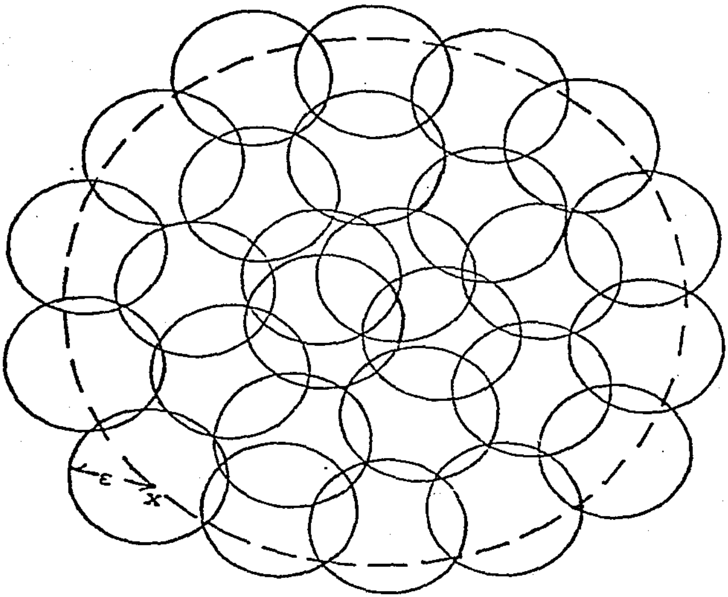

Fig. 1. Ejemplo de cubierta.

El círculo punteado representa al espacio X.

Los círculos pequeños representan a las "bolas" de radio ε y centro en un punto x de X.

El conjunto de las "bolas" de radio ε y centro en x∈X, forma una cubierta de X.

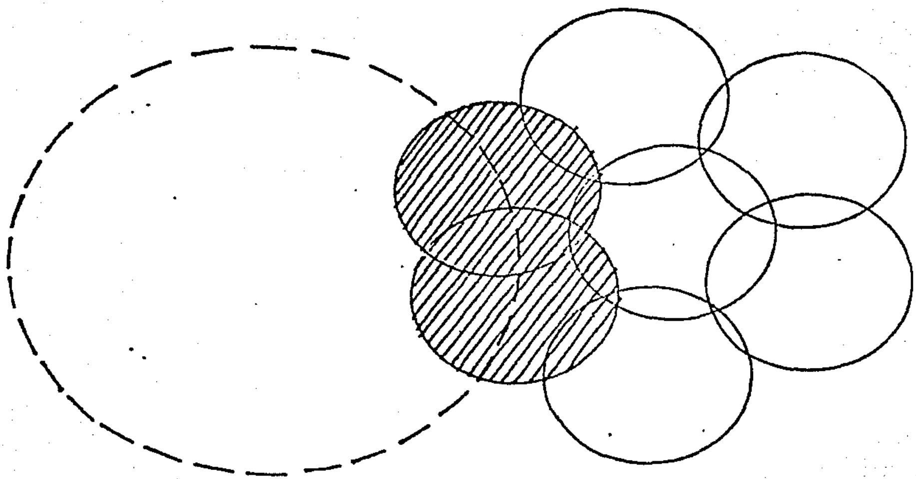

Fig. 2. Estrellas

El círculo punteado representa a B.

Los círculos pequeños representan las A's (con A en α).

La parte sombreada representa a la estrella de B con respecto a α.

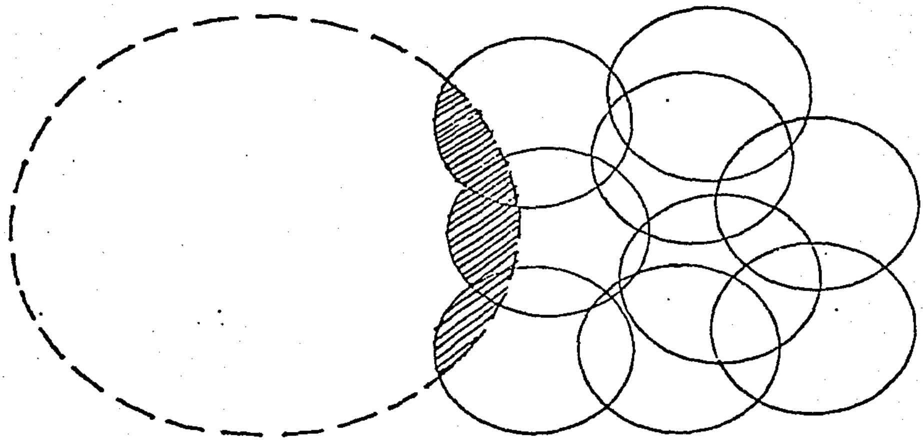

Fig. 3. Restricción.

El círculo punteado representa a B.

La colección de los círculos pequeños representa a α.

La parte sombreada representa a la restricción de α a B.

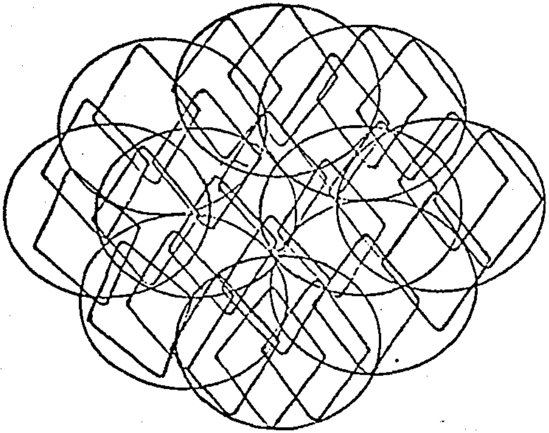

Fig. 4. Refinamiento.

Los círculos representan a los elementos de la cubierta α.

Los rombos representan a los elementos de la cubierta β.

β refina a α.

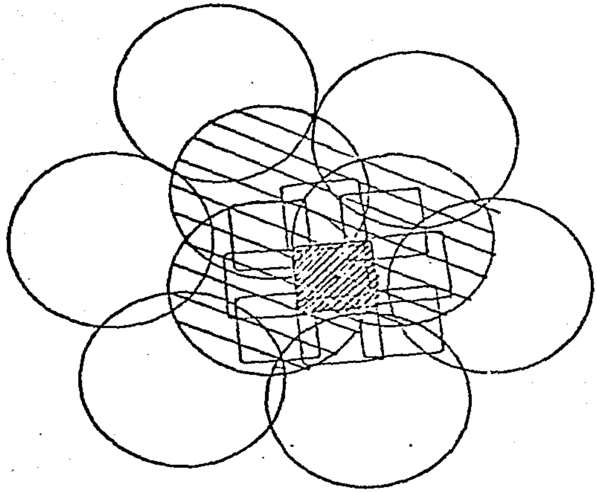

Fig. 5. Refinamiento débil.

Los cuadros representan a los elementos de α.
Los círculos representan a los elementos de β.
α refina débilmente a β.

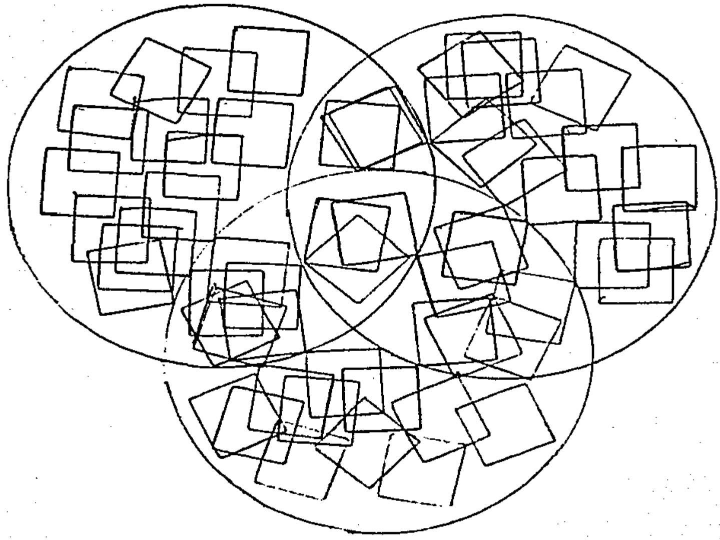

Fig. 6. Refinamiento regular.

Los círculos representan a los elementos de la cubierta β.

Los rectángulos representan a los elementos de la cubierta α.

α refina regularmente a β.

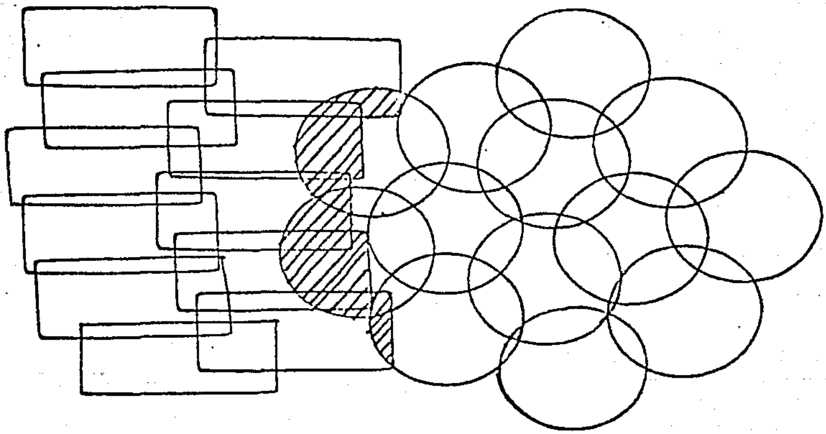

Fig. 7. Cuña.

Los rectángulos representan a los elementos de la cubierta α.

Los círculos representan a los elementos de la cubierta β.

La parte sombreada representa a la cuña de α y β.

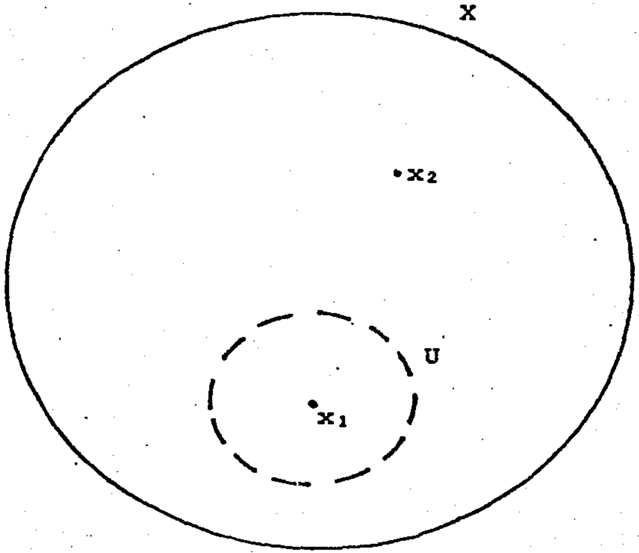

Fig. 8. Espacio T_1.

El círculo no punteado representa a un espacio T_1.

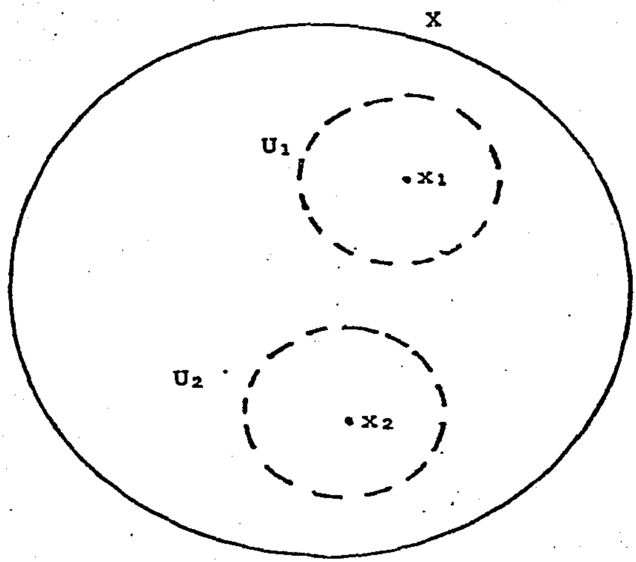

Fig. 9. Espacio T_2.

El círculo no punteado representa a un espacio T_2.

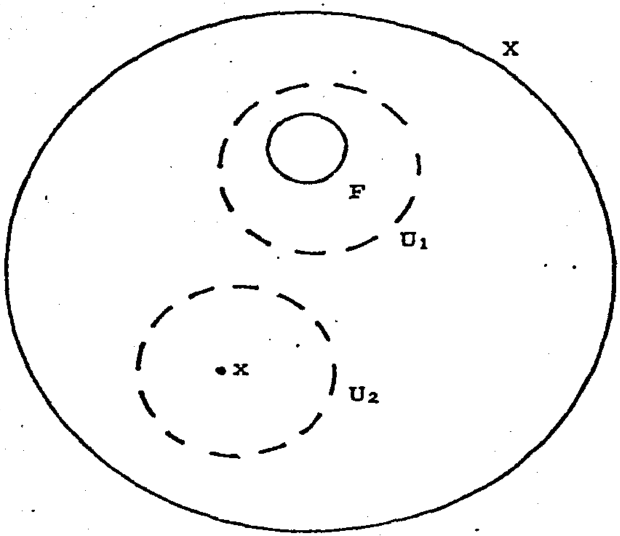

Fig. 10. Espacio regular.

El círculo más grande representa un espacio regular.

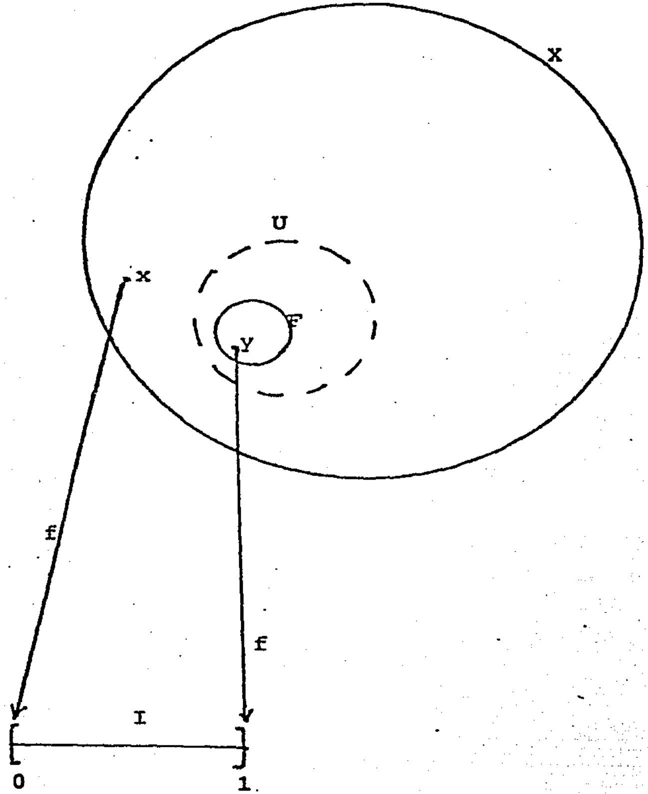

Fig. 11. Espacio completamente regular.

El círculo más grande representa a un espacio completamente regular.

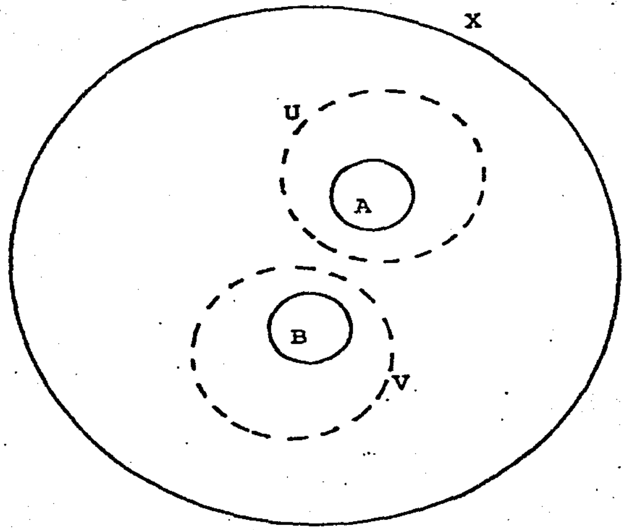

Fig. 12. Espacio normal.

El círculo más grande representa a un espacio normal.

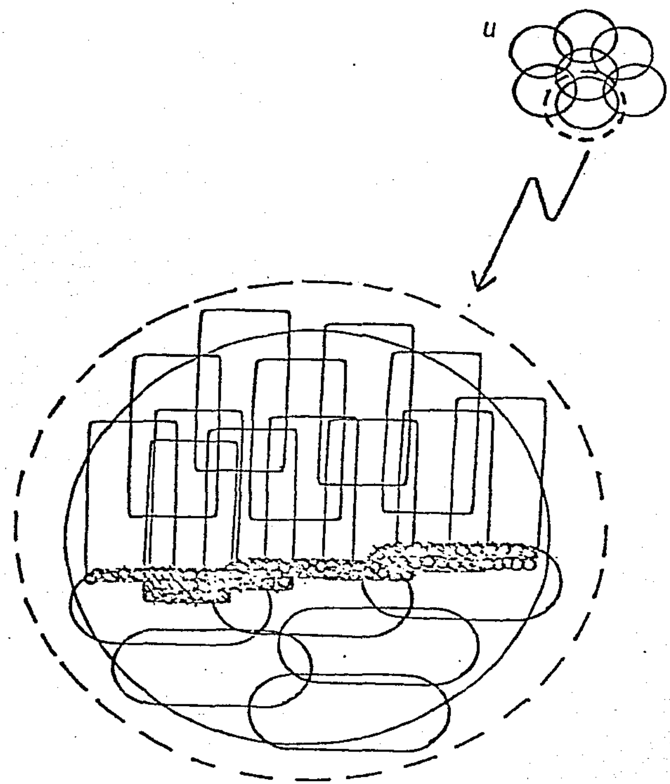

Fig. 13. Pre-uniformidad.

Dentro del círculo punteado está representado un elemento de una pre-uniformidad U.

Los rectángulos representan elementos de una cubierta α de U.

Los óvalos representan elementos de una cubierta β de U.

Los círculos más pequeños representan a una cubierta γ.

γ refina a la cuña de α y β.

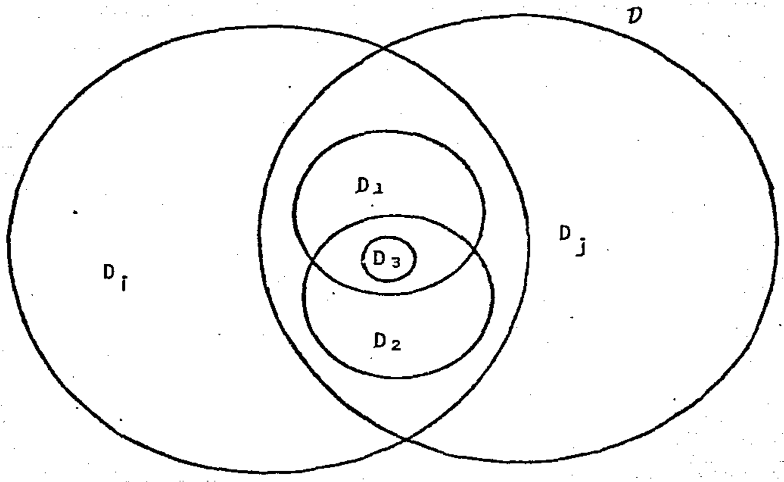

Fig. 14. Dirección (ó base de filtro).

Los círculos representan elementos de la dirección $\mathcal{D}$.

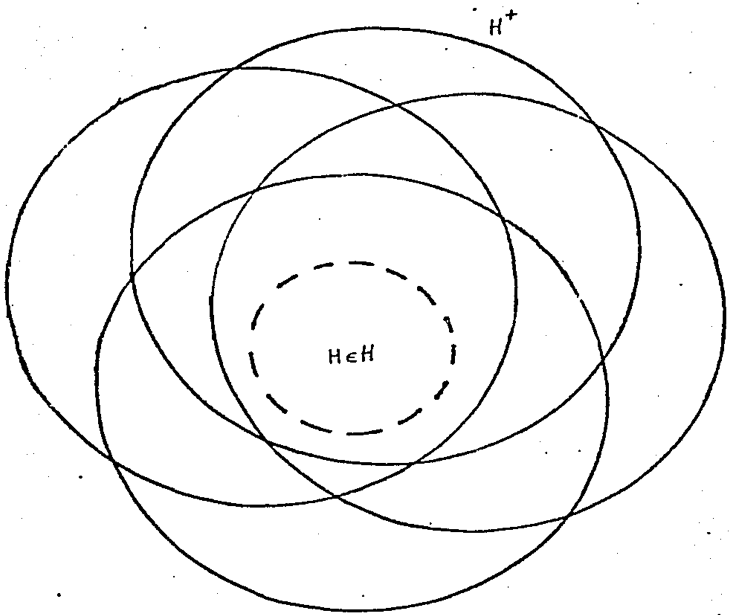

Fig. 15. Superset.

El círculo punteado representa a un elemento de $\mathcal{H}$.

Los círculos no punteados representan subconjuntos de X, que contienen al elemento H de $\mathcal{H}$.

La colección de los círculos no punteados representa al superset de $\mathcal{H}$.

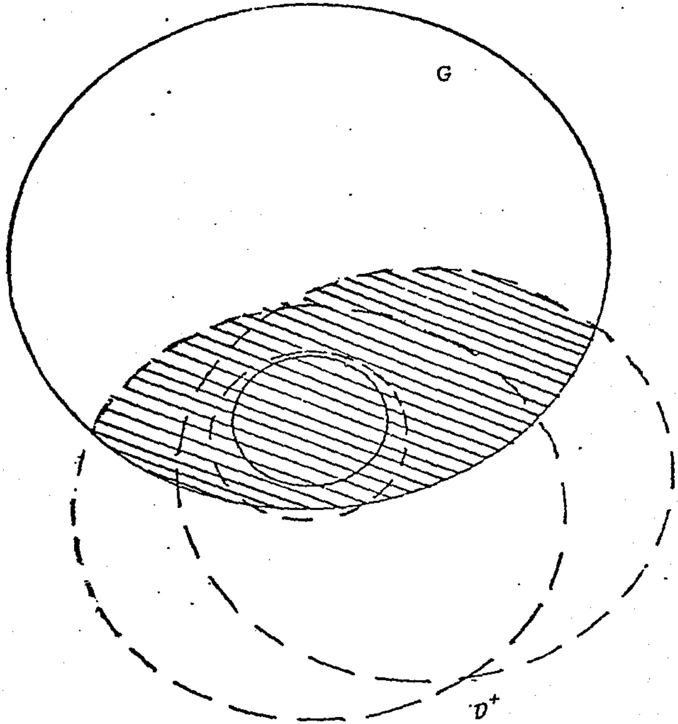

Fig. 16. Filtro generado.

El círculo más grande (no punteado), representa a G.

Los círculos punteados representan al superset de $\mathcal{D}$.

El círculo pequeño representa a la dirección $\mathcal{D}$.

La parte sombreada representa al G-filtro generado por la G-dirección $\mathcal{D}$.

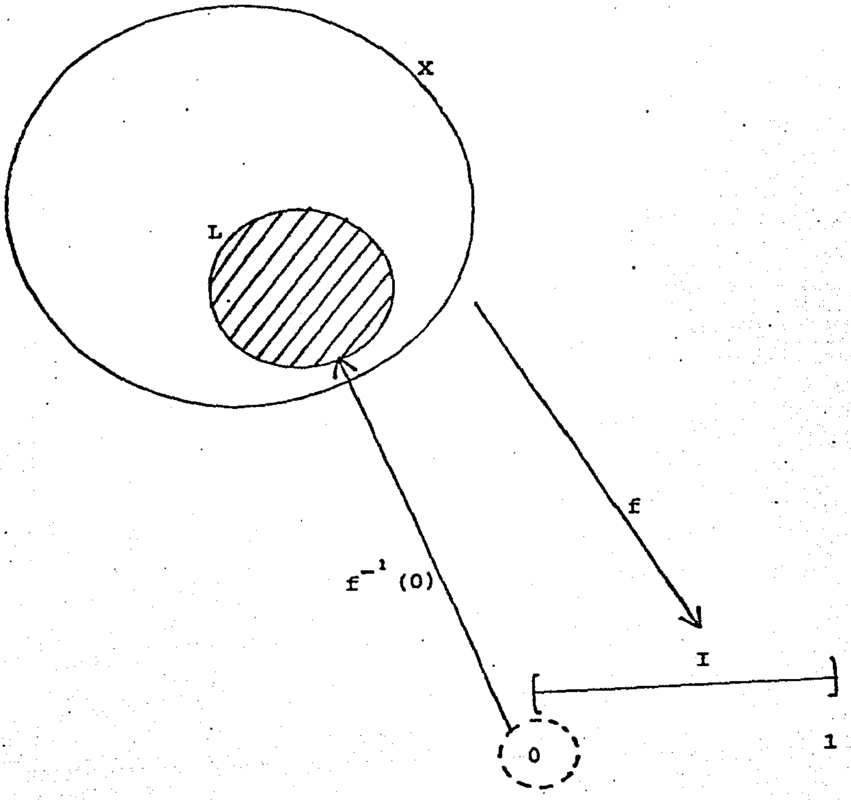

Fig. 17. Nulos

$f: X \to I$ es una función continua.
$L = f^{-1}(0)$ es un subconjunto nulo en X (parte sombreada).

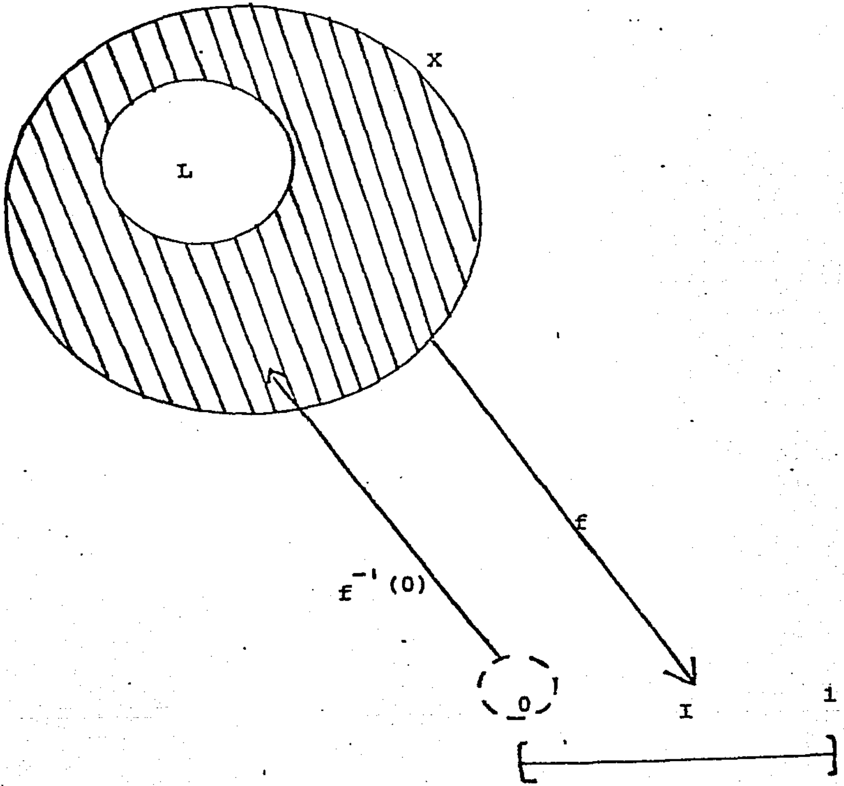

Fig. 18. Coceros.

L (parte no sombreada) es un subconjunto cocero.
$f: X \to I$ es una función continua.
$f^{-1}(0) = X-L$ (parte sombreada).

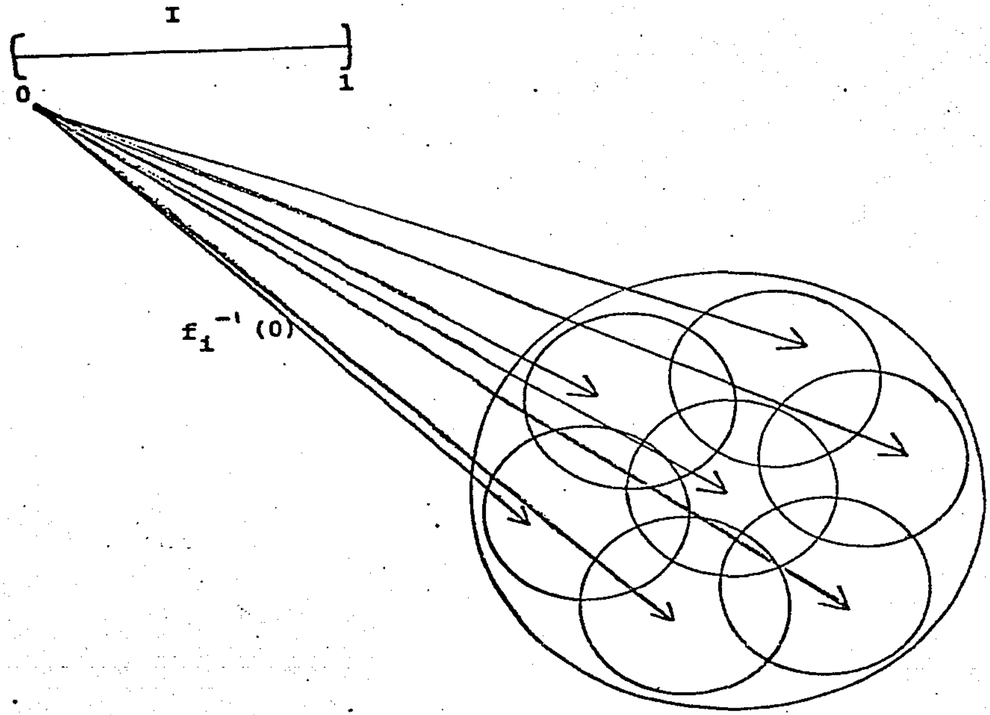

Fig. 19. Familia (cubierta) nulo.

El círculo más grande representa una familia (cubierta) nulo.

Cada círculo pequeño representa un elemento de la familia (cubierta).

BIBLIOGRAFIA

[Du] *Dugundji James,* TOPOLOGY
Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966

[Ha] *Harris Douglas,* STRUCTURES IN TOPOLOGY
Providence, Memoirs of the American Mathematical Society (A. M. S.), number 115, 1971

[Is] *Isbell J. R.,* UNIFORM SPACES,
Mathematical Surveys of the A. M. S., number 12, 1964

[Ke] *Kelley John L.,* GENERAL TOPOLOGY
Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1955

[Ho] *Hodel R. E.,* THE ALEXANDROFF-URYSOHN METRIZATION THEOREM REVISITED,
SET-THEORETIC TOPOLOGY, *Reed George M. (Ed.)*
Academic Press Inc., Institute for medicine and mathematics, Ohio University, 1977

[Sa] *Samuel Pierre,* ULTRAFILTERS AND COMPACTIFICATION OF UNIFORM SPACES,
Princeton University, Princeton, N. J., 1950

[St] *Steiner E. F.,* WALLMAN SPACES AND COMPACTIFICATIONS
Fund. Math., number 61, 1968

INDICE

D

E

I

N

O

P

R

S

T