2 ej
13

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Principios del mínimo y propiedad debil para funciones armonicas

TESIS

Que para obtener el título de:

MATEMATICO

Presenta:

MARIA EUGENIA GUZMAN FLORES

México, D. F. 1986

Prólogo:

Este trabajo consta de dos capítulos y en él se busca generalizar al recíproco del Teorema de Gauss sobre funciones armónicas y su caracterización con la PROPIEDAD DEL PROMEDIO, que es lo que se desarrolla el el CAPITULO II, siguiendo las ideas de Oliver D. Kellog expuestas en su artículo:

"CONVERSES OF GAUSS' THEOREM ON THE ARITMETIC MEAN"

pero la presentación que damos difiere a la del artículo, en cuanto que utilizamos la notación y conceptos introducidos en el CAPITULO I donde damos una amplia discusión sobre las funciones armónicas, discusión que parte de la propiedad del promedio, así como del principio del Mínimo, aunque por otro lado nos restringimos a trabajar con las funciones armónicas a partir de su comportamiento en las bolas, mientras que en el artículo se trabajan en regiones más generales como son las normales.

La realización de este trabajo fue posible gracias al apoyo e infinita paciencia de Luis Briseño, Ma. Emilia Caballero, Santiago López de Medrano, Julio Rodríguez.

Indice

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO I

FUNCIONES ARMONICAS

0.- Introducción:

Decimos que una función u de valores reales, definida en la región Ω de $\mathbb{R}^n$, satisface la "PROPIEDAD DEL PROMEDIO"; si para todo punto x de Ω, el valor de u en ese punto es igual al promedio de los valores que toma sobre la frontera de cualquier bola con centro x, cuya cerradura esté contenida en Ω.- A partir de esta propiedad definimos a las FUNCIONES ARMONICAS, es decir, una función u es armónica en Ω si satisface la PROPIEDAD DEL PROMEDIO.-

Valiéndose de esta(*) definición es fácil ver que toda función armónica satisface el PRINCIPIO DEL MINIMO (MAXIMO) [Si u alcanza su mínimo (máximo) en un punto interior x de Ω entonces u es constante].- Luego una función armónica queda determinada en cualquier punto x de Ω por los valores que toma en la frontera de una bola B de centro x contenida en Ω, pero utilizando la Integral de Poisson podemos conocer el valor de la función en un punto cualquiera de la bola B con sólo conocer sus valores en la frontera de B.-

A pesar de que en este trabajo no se discuten las aplicaciones que tienen las funciones armónicas en diversas situaciones físicas, es impor-

(*) En este capítulo se darán otras dos definiciones para función armónica.-

tante mencionarlas, sobre todo por la última definición que se da en este capítulo; donde una función armónica aparece como una solución a la ECUACIÓN DE LAPLACE

$$\Delta u = 0$$

pero como sabemos, esta ecuación surge vinculada a diversos situaciones físicas como:

(**) i) El potencial electrostático en el interior de un conductor

ii) El potencial gravitacional en el interior de un sólido hueco

iii) La distribución estacionaria de temperatura en un sólido en el que no se está generando calor.-

iv) Amplitudes en las vibraciones estacionarias de un sólido

Todas estas situaciones se pueden analizar en términos del siguiente problema matemático:

"Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, encuentre una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que: $\Delta u = 0$

es decir, una función armónica en Ω"

(**) Tomado de: Probabilidad y Potencial (I) Ma. Emilia Caballero, Diego Bricio Comunicación Interna No 6 1979 Fac. de Ciencias - UNAM

Ahora bien, sucede que hay una infinidad de funciones armónicas sobre un conjunto dado. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ las soluciones de la ecuación

$$u'' = 0$$

son todas las funciones lineales $x \longmapsto ax+b$.
En $\mathbb{R}^2$, las partes real e imaginarias de una función analítica son armónicas, es decir, soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Así pues hay que imponer alguna restricción adicional para que así quede determinada una función armónica en un abierto Ω

Por ejemplo: el primer problema de valores a la frontera de la Teoría del Potencial o Problema de Dirichlet presenta unicidad de soluciones (**)

Problema de Dirichlet:

Sea $v : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una función continua en $\partial\Omega$, donde Ω es una región de $\mathbb{R}^n$. El problema consiste en ver cuando existe una función u definida en Ω que sea:

i) armónica en Ω

ii) $\lim\limits_{\substack{x \to y \\ y \in \partial\Omega}} u(x) = v(y)$

(**) Se debe resolver el problema de Dirichlet para encontrar la distribución estacionaria de temperatura en la superficie, en ausencia de fuentes de generación de calor dentro del sólido. También aparece este problema al calcular potenciales en el interior de conductores cuando se especifica el potencial en la superficie del conductor, y también, cuando, en un problema de vibración estacionaria, especificamos la deflexión en la superficie del sólido o la membrana o la cuerda vibrante (**)

Usando la Integral de Poisson, mostramos que el problema de Dirichlet tiene solución cuando Ω es una bola.- (25)

En la última parte de este capítulo se habla de las funciones sobrearmónicos, y para definirlas se usa también el promedio sobre la frontera de cualquier bola contenida en su dominio, pero para estas funciones el valor que toma en el centro es mayor que el promedio, además de algunos ejemplos y propiedades, al final se da una caracterización de función sobrearmónica en términos de la Integral de Poisson,- y como consecuencia de la propiedad del promedio.- que satisfacen,-

Y así como lo hice para las funciones armónicos voy a mencionar alguna vinculación de estas funciones a situaciones físicas, aunque insisto, <u>en este trabajo no se desarrollan tales aplicaciones</u>

Por ejemplo; hay una ecuación en la Física Matemática de gran importancia, y es la ecuación de POISSON

$$\Delta u + f = 0 \ , \quad f \geq 0$$

Las soluciones de esta ecuación satisfacen

$$\Delta u \leq 0$$

y son conocidas como sobrearmónicas

CAPITULO I

Funciones Armónicas

1.- Notación : Si $u: \Omega \to \mathbb{R}$ es una función Borel medible en la región Ω de $\mathbb{R}^n$ y si $B = B_r(x_0)$ es una bola cuya cerradura está contenida en Ω, denotaremos por $M_u^r(x_0)$ al "promedio" de los valores de u sobre ∂B.-

$$M_u^r(x_0) = \begin{cases} u(x_0+r) + u(x_0-r) & \text{si } n=1 \\ \dfrac{1}{r^{n-1}\,\sigma_n(1)} \displaystyle\int_{\partial B} u(x)\,d\sigma(x) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

donde :

i) $\displaystyle\int_{\partial B} u(x)\,d\sigma(x)$ es la integral de u sobre ∂B con respecto a la medida superficial σ

ii) $\sigma_n(1)$ es el área de la esfera unitaria y $r^{n-1}\sigma_n(1) = \sigma_n(r)$ será el área de la esfera de radio r.-

$$(*)\quad \sigma_n(1) = \begin{cases} \dfrac{\pi^{n/2}\, n}{(n/2)!} & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{2^{(n+1)/2}\,\pi^{(n-1)/2}}{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (n-2)} & \text{si } n \text{ es impar} > 1 \end{cases}$$

iii) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es una región, es decir, Ω es un abierto y conexo.-

(*) Ver Apéndice I

2.- Definición: sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función definida en la región Ω de $\mathbb{R}^n$. Diremos que u es ARMONICA en Ω si u tiene los siguientes propiedades:

(i) u es continua en Ω

(ii) $\forall x \in \Omega$ y $\forall r \in \mathbb{R}$, $r>0$ tal que

$$\overline{B_r(x)} \subset \Omega \; ; \quad u(x) = M_u^r(x) \, .$$

A la clase de las funciones ARMONICAS en Ω la denotaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$

3.- Ejemplos:

(i) Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definida como $u(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b$ ..

Es claro que u satisface la propiedad (i); para probar la propiedad (ii) basta probar que

$M_u^r(x) = u(x)$ $\forall x \in \Omega$ y $\forall r \in \mathbb{R}$, $r>0$ tal que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ ..

Si $n = 1$ $\quad \overline{B_r(x)} = [x- \;, x+r]$

$$M_u^r(x) = \frac{u(x-r) + u(x+r)}{2}$$

$$= \frac{a(x-r) + b + a(x+r) + b}{2}$$

$$= ax + b = u(x)$$

Si $n=2$ $\qquad \overline{B_r(x)} = \{ y \in \mathbb{R} \mid d(y,x) \leq r \}$

La $\partial B_r(x)$ la podemos parametrizar como:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + r\cos t \\ y_2 = x_2 + r\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

entonces

$$M_u^r(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(x)} (a_1 y_1 + a_2 y_2 + b)\, d\sigma(y)$$

$$= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} [a_1(x_1 + r\cos t) + a_2(x_2 + r\,\mathrm{sen}\,t) + b]\, r\, dt$$

$$= a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = u(x)$$

Si $n \geq 3$, el cálculo de $M_u^r(x)$, se vuelve más laborioso, para hacerlo es conveniente parametrizar la esfera $\partial B_r(x)$, por pedazos, es decir separándola en hemisferios, así el hemisferio norte (Σ) queda parametrizado como:

$$\Sigma : \begin{cases} X_1 = y_1 - x_1 \\ X_2 = y_2 - x_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} = y_{n-1} - x_{n-1} \\ X_n = \left[r^2 - (y_1 - x_1)^2 - \dots - (y_{n-1} - x_{n-1})^2 \right]^{1/2} \end{cases}$$

$$M_u^r(\bar{x}) = \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B_r(x)} (a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n + b)\, d\sigma(y)$$

$$= \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\Sigma_n} \cdots \int \frac{r}{y_n - x_n} \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_{n-1}$$

$$+ \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\Sigma_n'} \cdots \int \frac{-r}{y_n - x_n} \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_{n-1}$$

$$= u(x) \qquad \text{donde } \Sigma_n = \{(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) / (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) \in \Sigma\}$$

$$\Sigma_n' = \{(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) / (y_1, \ldots, y_{n-1}, -y_n) \in \Sigma'\}$$

El último paso solo lo realizaré para el caso $n = 3$, y $\bar{x} = (0,0,0)$

$$\Sigma = \begin{cases} \bar{X}_1 = y_1 \\ \bar{X}_2 = y_2 \\ \bar{X}_3 = (r^2 - y_1^2 - y_2^2)^{1/2} \end{cases} \qquad \text{hemisferio norte } (\bar{X}_3 > 0)$$

$$\Sigma' = \begin{cases} \bar{X}_1 = y_1 \\ \bar{X}_2 = y_2 \\ \bar{X}_3 = -(r^2 - y_1^2 - y_2^2)^{1/2} \end{cases} \qquad \text{hemisferio sur } (\bar{X}_3 < 0)$$

$$\sec\gamma = \frac{r}{|y_3|} = \frac{r}{(r^2 - y_1^2 - y_2^2)^{1/2}}$$

$$M_u^r(0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(0)} (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + b) \, d\sigma(y)$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{-r}^{r} \int_{-(r^2 - y_2^2)^{1/2}}^{(r^2 - y_2^2)^{1/2}} \left[a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 (r^2 - y_1^2 - y_2^2)^{1/2} + b\right] \frac{r}{|y_3|} \, dy_1 \, dy_2$$

$$+\frac{1}{4\pi r^2}\int_{-r}^{r}\int_{-(r^2-y_2^2)^{1/2}}^{(r^2-y_2^2)^{1/2}}\left(a_1y_1+a_2y_2-a_3(r^2-y_1^2-y_2^2)^{1/2}+a_4\right)\frac{r}{|y_3|}\,dy_1\,dy_2$$

$$=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{-r}^{r}2\pi r a_4\,dx_2=\frac{4\pi r^2}{4\pi r^2}a_4=a_4=u(0)$$

Con lo anterior solo hemos probado que u es armónica en el 0, pero para cualquier $x\in\mathbb{R}^3$ $\bar{x}\neq\bar{0}$, el cálculo de $M_u^r(x)$ se hace con un cambio de variable, trasladando el origen a x, con lo cual definimos la función

$$V(X_1,X_2,X_3)=u(X_1+x_1,X_2+x_2,X_3+x_3)$$

y

$$M_u^r(\bar{x})=M_V^r(\bar{0})=V(\bar{0})=u(\bar{0}+\bar{x})=u(\bar{x})$$

por lo tanto $M_u^r(\bar{x})=u(\bar{x})$ para toda $\bar{x}\in\mathbb{R}^3$ y para todo radio r.-

ii) Numerosos ejemplos de funciones armónicas pueden ser construidos usando el siguiente Teorema.

Teorema: Sea $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$, Ω un abierto de $\mathbb{C}$, si f es analítica en Ω entonces la parte real y la parte imaginaria de f son funciones armónicas.

demostración: Es inmediata usando la fórmula Integral de Cauchy

(*) Fórmula Integral de Cauchy

Sea $f(z)$ una función uniforme y analítica en la región Ω y sea L una curva rectificable de Jordan cerrada, perteneciente a esta región conjuntamente con su interior G. En estas condiciones se verifica la siguiente fórmula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \qquad (z \in G)$$

Sea $z \in \Omega$, $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$

$f(z) = u(z) + i v(z)$ entonces según la FIC (*)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

como la ecuación de $\partial B_r(z)$ es

$$\xi = z + r e^{i\theta} \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \, re^{i\theta} i \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) \, d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + re^{i\theta}) \, d\theta$$

$$= u(z) + i v(z)$$

(*) Ver [5]

entonces

$$M_u^r(z) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(z)} u(\xi)\, d\sigma(\xi) = u(z)$$

$$M_v^r(z) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(z)} v(\xi)\, d\sigma(\xi) = v(z)$$

por lo tanto $u, v \in \mathcal{H}(\Omega)$

ejemplos

a) $f(z) = e^z$ es analítica entonces su parte real e imaginaria son armónicas en $\mathbb{R}^2$

$$u(z) = e^{x_1}\cos x_2 \qquad v(z) = e^{x_1}\operatorname{sen} x_2$$

b) $f(z) = z^2$ es analítica entonces

$u(z) = x_1^2 - x_2^2$ y $v(z) = 2x_1x_2$
son armónicas en $\mathbb{R}^2$

c) si $z \in \mathbb{C}$ y $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ entonces
$z^n = |z|^n(\cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta)$
por lo tanto
$|z|^n \cos n\theta$ y $|z|^n \operatorname{sen} n\theta$ son armónicos en

d) $u: \mathbb{C}-\{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad u(z) = \log|z|$ es armónica.-

Propiedades de $\mathcal{H}(\Omega)$

4.- Teorema: La clase $\mathcal{H}(\Omega)$ con Ω una región de $\mathbb{R}^n$ es un espácio vectorial lineal sobre $\mathbb{R}$.. $\mathcal{H}(\Omega)$ contiene a las funciones constantes

demostración: Sean $u, v \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$M^r_{(\alpha u+\beta v)}(x) = \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)}\int_{\partial B_r(x)} [\alpha u(y) + \beta v(y)]\, d\sigma(y)$$

$$= \frac{\alpha}{r^{n-1}\sigma_n(1)}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\, d\sigma(y) + \frac{\beta}{r^{n-1}\sigma_n(1)}\int_{\partial B_r(x)} v(y)\, d\sigma(y)$$

$$= \alpha M^r_u(x) + \beta M^r_u(x)$$

$$= \alpha\, u(x) + \beta\, v(x) = (\alpha u + \beta v)(x)$$

por lo tanto $\alpha u + \beta v \in \mathcal{H}(\Omega)$

Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad u(x) = K$ constante

$$M^r_u(x) = \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)}\int_{\partial B_r(x)} K\, d\sigma(K)$$

$$= \frac{K}{r^{n-1}\sigma_n(1)} (r^{n-1}\sigma_n(1))$$

$$= K = u(x).$$ por lo tanto $u \in \mathcal{H}(\Omega)$

5.- PRINCIPIO DEL MINIMO (MAXIMO)

Definición: Una función u definida en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ decimos que satisface el PRINCIPIO DEL MINIMO (MAXIMO) si cumple la siguiente propiedad.

Si u alcanza su MINIMO (MAXIMO) en un punto interior $x \in \Omega$, entonces u es constante..

6.- Teorema: Si $u \in H(\Omega)$ entonces u satisface el PRINCIPIO DEL MINIMO (MAXIMO)

demostración: Si u alcanza su mínimo en $x_0 \in \Omega$, tenemos que probar que $u(x) = u(x_0)$ para toda $x \in \Omega$.. Primero probaremos que $u(x) = u(x_0)$ para toda $x \in \overline{B_r(x_0)}$ (tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$), una vez probado ésto, solo faltará probar que es constante en $\Omega - \overline{B_r(x_0)}$, lo cual lo haremos usando la propiedad de que Ω es arco-conectable -

Demostración de que $u(x) = u(x_0)$ para toda $x \in \overline{B_r(x_0)}$

Si $x \in \partial B_r(x_0)$ entonces $u(x) = u(x_0)$, de no ser así tendríamos que $u(x) > u(x_0)$ lo cual implica que existe $\delta > 0$ tal que $u(y) > u(x_0)$ para todo $y \in B_\delta(x)$ ($B_\delta(x) \subset \Omega$) por ser u continua en Ω, entonces

$$u(x_0) = M_u^r(x_0) = \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y)\, d\sigma(y)$$

$$= \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \left[\int_D u(y)\, d\sigma(y) + \int_{\partial B_r(x_0) - D} u(y)\, d\sigma(y) \right] >$$

donde $D = B_\delta(x) \cap \partial B_r(x_0)$

$$\geq \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)}\left[\int_D u(x_0)\,d\sigma(y) + \int_{\partial B_r(x_0)-D} u(x_0)\,d\sigma(y)\right]$$

$$= \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)}\left[\int_{\partial B_r(x_0)} u(x_0)\,d\sigma(y)\right]$$

$$= \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)}\left[u(x_0)\ \sigma_n(r)\right] = u(x_0)$$

lo cual nos lleva a la contradicción de que $u(x_0) > u(x_0)$.

Por lo tonto $u(x) = u(x_0)$ para toda $x \in \partial B_r(x_0)$

Nótese que no solo hemos probodo que $u(x) = u(x_0)$ para toda $x \in \partial B_r(x_0)$, sino tombién para los puntos interiores de $B_r(x_0)$, porque si $x \in B_r(x_0)$ existe $s < r$ tal que $x \in \partial B_s(x_0)$ y el argumento anterior también vale pues $M_u^s(x_0) = u(x_0)$.-

Ahora demostraremos que $u(x) = u(x_0)$ para toda $x \in \Omega - \overline{B_r(x_0)}$

Como mencionamos antes, Ω es arcoconectable, así que existe una poligonal ($\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$) que une x_0 con x, totalmente contenida en Ω tal que $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$.-

Por la continuidad de γ, existe $t_1 \in (0,1]$ tal que $\gamma(t_1) \in \partial B_r(x_0)$, entonces $u(x_1) = u(x_0)$ donde $\gamma(t_1) = x_1$, luego existe $r_1 > 0$ tal que $B_{r_1}(x_1) \subset \Omega$, y de nuevo tenemo que u es constante en $\partial B_{r_1}(x_1)$.

Entonces existe $t_2 > t_1$ $t_2 \in [0,1]$, tal que $\gamma(t_2) = x_2 \in \partial B_{r_1}(x_1)$ y $u(x_2) = u(x_0)$, así sucesivamente, construimos la sucesión

$0 = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ en $[0,1]$, la cual genera la sucesión $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ sobre la poligonal, con la propiedad $u(x_i) = u(x_0)$ $i = 1, 2, \ldots$

La sucesión $\{t_n\}_{n\in N}$ es creciente y acotada, por lo tanto converge a $\sup M$ donde $M = \{ t_i \in [0,1] \mid u(x_i) = u(x_0) \}$.

Si $s = 1$, ya acabamos pues $\{x_n\}_{n\in N}$ converge a x, y por la continuidad de u tendríamos que $u(x) = u(x_0)$.-

Si $s < 1$, $u(\gamma(s)) = u(x_0)$, pero existe

$$r^0 \leq \frac{\| x - \gamma(s) \|}{2} \quad \text{tal que} \quad \overline{B_{r^0}(\gamma(s))} \subset \Omega$$

entonces $u(y) = u(x_0)$ para toda $y \in \partial B_{r^0}(\gamma(s))$ de lo cual deducimos que existe $s' \in [0,1]$ $s' > s$ tal que $u(\gamma(s')) \in \partial B_{r^0}(\gamma(s))$ lo cual contradice el hecho de que $s = \sup M$, por lo tanto $s = 1$.

Resumiendo lo anterior, tenemos que

$$u(x) = u(x_0) \quad \text{para toda } x \in \Omega .-$$

7.- Corolario: Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ y sea $u \in \mathcal{H}(\Omega)$

si $\alpha \leq \liminf_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} u(x) \leq \limsup_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} u(x) \leq \beta$

para toda $y \in \partial\Omega$ entonces $\alpha \leq u \leq \beta$ en Ω

Demostración: Demostraremos la desigualdad de la izquierda, pues la otra se prueba de manera análoga.

Sea $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(y) = \begin{cases} \liminf_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} u(x) & \text{si } y \in \partial\Omega \\ u(y) & \text{si } y \in \Omega \end{cases}$$

entonces v es semicontinua inferiormente en $\overline{\Omega}$ y alcanza su mínimo en $\overline{\Omega}$.

Si el mínimo lo alcanza en $\partial\Omega$ es inmediata la desigualdad.

Supongamos que alcanza el mínimo en $x_0 \in \Omega$, pero v es armónica en Ω, así que por el PRINCIPIO DEL MINIMO, v es constante en Ω y entonces si $y \in \partial\Omega$

$$v(y) = \liminf_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} u(x) = \liminf_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} u(x_0) = u(x_0)$$

por lo que

$$u(x) \geq u(x_0) = \liminf_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} u(x) \geq \alpha$$

es decir $u(x) \geq \alpha$ para toda $x \in \Omega$..

8.- Corolario : Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ y sea $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, si u es continua en $\bar{\Omega}$ y $u \equiv 0$ en $\partial\Omega$ entonces $u \equiv 0$ en $\bar{\Omega}$..

Demostración ; Es inmediata de corolario anterior (7), tomando $\alpha = \beta = 0$

Corolario : Sean $u_1, u_2 \in \mathcal{H}(\Omega)$, si son continuas en $\bar{\Omega}$ y $u_1 \equiv u_2$ en $\partial\Omega$ entonces $u_1 \equiv u_2$ en Ω

Demostración : Si $u_1, u_2 \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $u_1 - u_2 \in \mathcal{H}(\Omega)$ y es continua en $\bar{\Omega}$, además $u_1 - u_2 \equiv 0$ en $\partial\Omega$; así que por corolario (8), tenemos que

$$u_1 - u_2 \equiv 0 \text{ en } \Omega \text{ , es decir}$$
$$u_1 = u_2 \text{ en } \Omega ..$$

Con el PRINCIPIO DEL MINIMO hemos mostrado que las funciones armónicas quedan determinadas por sus valores en la frontera.

En el siguiente punto veremos como se comporta una función armónica respecto a sus puntos interiores,-

Daremos ahora otra definición de función armónica en donde en lugar de promediar en la esfera promediaremos sobre la bola; luego probaremos la equivalencia entre estas definiciones.

9.- **Definición**: Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función definida en la región Ω de $\mathbb{R}^n$. Diremos que u es ARMONICA en Ω si u tiene las siguientes propiedades:

(i) u es integrable (Lebesgue) en todo compacto $K \subset \Omega$

(ii) $\forall x \in \Omega$ y $\forall r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$..

$$u(x) = \frac{1}{V_n(r)} \int_{\overline{B_r(x)}} u(y)\, dy$$

(donde $V_n(r) = r^n V_n(1)$ es el volumen de la bola $B_r(x)$ de radio r y centro en x)*

Como consecuencia de esta definición tenemos:

10.- **Proposición**: Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ armónica en Ω. Entonces

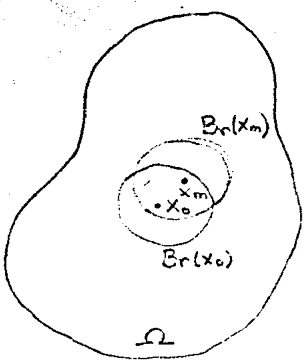
a) u es finita en Ω

b) u es continua en Ω

* ver apéndice I

demostración: la propiedad (a) es consecuencia inmediata de las hipótesis de integrabilidad de u. Pasemos a demostrar (b); sea $x_0 \in \Omega$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de Ω tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$



Sea $r>0$ tal que $\overline{B_{2r}(x_0)} \subset \Omega$; entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces

$$|x_n - x_0| < r.$$

Por lo tanto si $m > N$, tenemos que $B_r(x_m) \subset \Omega$.

En consecuencia

$$u(x_m) - u(x_0) = \frac{1}{V_n(r)}\left[\int_{B_r(x_m)} u(y)\,dy - \int_{B_r(x_0)} u(y)\,dy\right]$$

Sea $K = \overline{B_{2r}(x_0)}$. Es claro que para $m>N$

$B_r(x_0) \cup B_r(x_m) \subset K$ y entonces

$$u(x_m) - u(x_0) = \frac{1}{V_n(r)}\int_K u(y)\left[\chi_{B_r(x_m)} - \chi_{B_r(x_0)}\right] dy$$

como $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \chi_{B_r(x_m)} = \chi_{B_r(x_0)}$

c.d.

y como

$$\left| u\left[\chi_{B_r(x_m)} - \chi_{B_r(x_0)} \right] \right| \leq 2\, \chi_K |u|$$

podemos aplicar el teorema de convergencia dominada y obtenemos

$$|u(x_m) - u(x_0)| \leq \frac{1}{V_n(r)} \int_K |u| \left| \chi_{B_r(x_m)} - \chi_{B_r(x_0)} \right| dy$$

$$< \varepsilon \qquad \text{si} \quad m > N \qquad \text{o sea}$$

$$\lim_{m \to \infty} u(x_m) = u(x_0)$$

11.- El siguiente teorema nos muestra que las únicas funciones armónicas acotados inferior o superiormente en $\mathbb{R}^n$, son las constantes.-

Teorema de Picard: "Sea $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función ARMONICA (según la definición dada en (9)) acotada inferior o superiormente en todo $\mathbb{R}^n$ entonces u es constante..

Demostración:

Basta demostrarlo cuando u está acotada inferiormente, ya que $-u$ es armónica si u es armónica, entonces podemos suponer que u está acotada inferiormente.

También podemos suponer que $u \geq 0$, ya que la suma de una función armónica y una constante es armónica.

Sean x e y puntos distintos, probaremos que $u(x) = u(y)$..

Sea $\alpha = d(x,y) = \text{ctte.}$ y $r > \alpha$, $r' = r - \alpha$ con r y r' así definidas tenemos

$\overline{B_{r'}(x)} \subset \overline{B_r(y)}$ y como $u \geq 0$, entonces

$$(r')^n V_n(1)\, u(x) = \int_{\overline{B_{r'}(x)}} u(z)\, dz \leq \int_{\overline{B_r(y)}} u(z)\, dz = r^n V_n(1)\, u(y)$$

por lo tanto: $(r')^n V_n(1)\, u(x) \leq r^n V_n(1)\, u(y)$

y de ahí que $\quad u(x) \leq \left(\frac{r}{r'}\right)^n u(y) = \left(\frac{r}{r-\alpha}\right)^n u(y)$

Haciendo tender r a $+\infty$, obtenemos $u(x) \leq u(y)$. Análogamente se muestra que $u(y) \leq u(x)$..

12.- Ahora vamos a probar la equivalencia entre las dos definiciones de función armónica..

Proposición: Las definiciones dadas en (2) y en (9) son equivalentes

Demostración:

Supongamos que u satisface (2), es decir

$$u(x) = M_u^n(x)$$

Usando coordenadas esféricas (θ, r) relativas al polo x

$$\frac{1}{V_n(r)}\int_{B_r(x)} u(y)\,dy = \frac{1}{V_n(1)r^n}\int_0^r \rho^{n-1}\left(\int_{\|\theta\|=1} u(\theta,\rho)\,d\sigma(\theta)\right)d\rho$$

Si $\|\theta\| = 1$, entonces (θ,ρ) es un punto de $\partial B_\rho(x)$. La integral dentro del parentesis ès la integral sobre una esfera de radio ρ relativa a una medida uniformemente distribuida de masa total $\sigma_n(1)$ e igual a $\sigma_n(1)u(x)$

Entonces

$$\frac{1}{V_n(r)}\int_{B_r(x)} u(y)\,dy = \frac{1}{V_n(1)r^n}\int_0^r \rho^{n-1}\left(\sigma_n(1)\,u(x)\right)d\rho$$

$$= \frac{\sigma_n(1)\,u(x)}{V_n(1)r^n}\int_0^r \rho^{n-1}\,d\rho$$

$$= \frac{\sigma_n(1)}{V_n(1)\,n}\,u(x)$$

$$= \frac{\sigma_n(1)/n}{V_n(1)}\,u(x) = u(x)$$

dado que $\frac{\sigma_n(1)}{n} = V_n(1)$

Ahora supongamos que u satisfaca (10), es decir

$$u(x) = \frac{1}{V_n(r)}\int_{B_r(x)} u(y)\,dy$$

La relación que hay entre la medida superficial y la medida de Lebesgue es

$$\frac{d}{dr}\int_{B_r(x)} u(x)\,dx = \alpha_n(1)\, r^{n-1}\int_{\|\theta\|=1} f(\theta,r)\, d\sigma(\theta)$$

y además sabemos que $\frac{d}{dr} V_n(r) = \alpha_n(r)$;

entonces

$$u(x)\,\alpha_n(r) = \alpha_n(1)\, r^{n-1}\int_{\|\theta\|=1} u(\theta,r)\, d\sigma(\theta)$$

dado que $\alpha_n(r) = \alpha_n(1)\, r^{n-1}$

$$u(x) = \int_{\|\theta\|=1} u(\theta,r)\,d\sigma(\theta) = \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, d\sigma(y)$$

por lo tanto $u(x) = M_u^r(x)$

13.- En el siguiente resultado probaremos que toda función armónica es de clase C^∞ y también que todas sus derivadas son armónicas.-

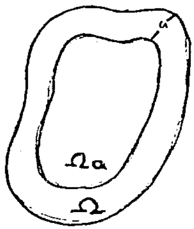
Teorema: Sea $u\ \Omega \to \mathbb{R}$ una función armónica en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ entonces

(a) u es de clase C^∞

(b) Todas sus derivadas son armónicas en Ω

demostración:

(a) Sea $a > 0$, $\Omega_a = \{x \in \Omega \,/\, d(x, \Omega^c) > a\}$



Sea $\rho(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como

$$\rho(x) = \begin{cases} C e^{\frac{1}{|x|^2 - a^2}} & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{si } |x| \geq a \end{cases}$$

donde C es tal que

$$\int_{|x| \leq a} \rho(x)\, dx = 1$$

Esta función es de clase C^∞ y además es tal que $u * \rho = u$ en Ω_a.

En efecto:

Si $x \in \Omega_a$

$$u*\rho(x) = \int_{\|x-y\| < a} u(y)\, \rho(x-y)\, dy$$

$$= \sigma_n(1) \int_0^a \left[\int_{\|\theta\|=1} u(\theta, r)\, d\sigma(\theta) \right] \rho(r)\, r^{n-1}\, dr$$

$$= u(x) \int_0^a \sigma_n(1)\, r^{n-1} \rho(r)\, dr$$

$$= u(x) \int_{|y| \leq a} \rho(y)\, dy = u(x)$$

Entonces como ρ es de clase C^∞ y $u = u * \rho$, se tiene que u es de clase C^∞.-

(b) Probaremos ahora que sus derivadas también son armónicas en Ω. Sea $x \in \Omega$ y $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$; como u es armónica, tenemos

$$u(x) = \frac{1}{V_n(r)} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy \qquad (1)$$

Hagamos el siguiente cambio de variable:

$y = x + z$, donde $z \in B_r(0)$, y definimos $v(x,z) = u(x+z)$ en $\Omega \times \overline{B_r(0)}$; entonces v es de clase C^∞ en $\Omega \times \overline{B_r(0)}$ y

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots \partial x_{i_k}^{\alpha_k}} \int_{B_r(0)} v(x,z)\, dz = \int_{B_r(0)} \frac{\partial^\alpha}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots \partial x_{i_k}^{\alpha_k}} v(x,z)\, dz$$

donde $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$

Por la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{\partial^\alpha u(x+z)}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots \partial x_{i_k}^{\alpha_k}} = \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots \partial x_{i_k}^{\alpha_k}} \right)(x+z)$$

sustituyendo en (1) la igualdad anterior y haciendo $y = x + z$ obtenemos que $D^\alpha u$ es armónica en Ω.-

14.- Demos ahora una tercera definición de función ARMONICA, que es la que se da usualmente en los cursos de cálculo.-

Definición: Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función definida en la región Ω de $\mathbb{R}^n$. Diremos que u es ARMONICA en Ω si u tiene las siguientes propiedades:

(i) u es de clase $C^2(\Omega)$

(ii) $\Delta u(x) = 0$ para toda $x \in \Omega$

15.- Teorema (Integral de Gauss)

Si u es armónica (en el sentido de la definición dada en (14)), en una vecindad de $\overline{B_r(x)}$ entonces

$$\int_{\partial B_r(x)} D_n u \, d\sigma = 0$$

demostración.:

A partir de la igualdad de Green (ver Apéndice II)

$$\int_{B_r(x)} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial B_r(x)} (u D_n v - v D_n u) \, d\sigma$$

haciendo $v \equiv 1$, entonces $\Delta v = 0$ $\Delta u = 0$

$D_n v = \text{grad } v \cdot \bar{n} = 0$

por lo tanto $\int_{\partial B_r(x)} D_n u \, d\sigma = 0$

16.- FUNCION ARMONICA FUNDAMENTAL

Suponga que u es ARMONICA en la región Ω (según la definición dada en (15)), y sea y un punto fijo de Ω.- Entonces Δu puede ser considerado como una función de las coordenadas esféricas (θ, r) de x, relativas a y para las cuales $r = \| x - y \|$ y θ es el punto de intersección del segmento de línea que une a x e y y una esfera unitaria con centro y

Suponga que u es solo función de r.
Entonces Δu, como una función de las coordenadas esféricas, está dado por

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{(n-1)}{r} \frac{du}{dr} \qquad r \neq 0$$

Las únicas funciones armónicas en $\mathbb{R}^n - \{y\}$ que dependen solamente de $r = \| x - y \|$, son las funciones que satisfacen la ecuación

$$\frac{d^2 u}{dr} + \frac{(n-1)}{r} \frac{du}{dr} = 0 \qquad \text{en } \mathbb{R}^n - \{y\}$$

Si $n = 2$, la solución general de esta ecuación es $A \log r + B$ donde A y B son constantes arbitrarias. La solución particular $-\log r$ es armónica en $\mathbb{R}^2 - \{y\}$ y es conocida como la FUNCION ARMONICA FUNDAMENTAL para $\mathbb{R}^2$ con polo y.

Si $n \geq 3$, la solución general de la anterior ecuación es $(A\, r^{-n+2} + B)$ donde A y B son constantes arbitrarias. La solución particular r^{-n+2} es armónica en $\mathbb{R}^n - \{y\}$ y se le conoce como la FUNCION ARMONICA FUNDAMENTAL para $\mathbb{R}^n$ con polo y.-

notación:

$$\text{si } n=2 \qquad u_y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = y \\ -\log \| x-y \| & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

$$\text{si } n \geq 3 \qquad u_y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = y \\ \dfrac{1}{\| x-y \|^{n-2}} & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

17.- Mas ejemplos de funciones armónicas..

-i) $u(x,y) = (A\cos nx + B\,\mathrm{sen}\, nx)\, e^{ny}$ es armónica en $\mathbb{R}^2$, ya que $\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$

ii) $u(x,y,z) = 2z^2 - x^2 - y^2$ es armónica en $\mathbb{R}^3$

iii) $u(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + eyz + fzx + gxy$.
es armónica en $\mathbb{R}^3$ si $a+b+c=0$

iv) $u(x,y) = xy$ es armónica en $\mathbb{R}^2$

v) $u(x,y,z) = \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

vi) $u(x,y,z) = \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tan^{-1} y/x$

vii) $u(x,y,z) = \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \log \dfrac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}+z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}-z}$

viii) $u(x,y,z) = \log \left[\dfrac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}+z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}-z}\right]$

(Estos ejemplos fueron tomados de [1])

ix) Si u es armónica en Ω y φ es:
a) Una similitud
b) Una simetría
c) uno Inversión
entonces $u \circ \varphi$ es armónica en $\varphi^{-1}(\Omega)$

La transformación en c), es conocida como la Transformación de Kelvin.

Veamos el efecto de una inversión sobre una función armónica. u .-

Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ uno función armónica

$$\varphi(x', y', z') = (x,y,z) = \left(\frac{a^2}{r'^2}x', \frac{a^2}{r'^2}y', \frac{a^2}{r'^2}z'\right)$$

donde $r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$

y φ es la inversión con respecto a la esfera $\partial B_a(0)$.-

La nueva función es :

$$v(x', y', z') = \frac{a}{r'} u\left(\frac{a^2}{r'^2}x', \frac{a^2}{r'^2}y', \frac{a^2}{r'^2}z'\right)$$

Para verificar que v es armónica se debe calcular su laplaciano utilizando la regla de la cadena.-

En el caso general, lo podemos ver como sigue:

Sea $\varphi(x) = x^*$, donde x^* es el inverso de x relativo a la esfera $\partial B_\rho(y)$, definido por

$$x^* = y + \frac{\rho^2}{\|y-x\|^2}(x-y) \quad , \quad x \neq y$$

y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n - \{y\}$ un abierto y sea Ω^* la imágen de Ω bajo φ.

Si u^* es una función definido en Ω^*, la ecuación

$$f(x) = \frac{\rho^{n-2}}{r^{n-2}} f^*\left(y + \frac{\rho^2}{r^2}(x-y)\right)$$

donde $r = \|y-x\|$ y $r^{n-2} = 1$ si $n=2$ define una función f en Ω.-

La transformación $f^* \longmapsto f$ definida de esta manera es la TRANSFORMACION DE KELVIN

Teorema: La transformación de kelvin preserva positividad y Armonicidad

Demostración: Si f^* es positiva entonces f será positiva por su definición

$$f(x) = \frac{\rho^{n-2}}{r^{n-2}} f^*\left(y + \frac{\rho^2}{r^2}(x-y) \right)$$

y para verificar que f es armónica hay que calcular su laplaciano usando la regla de la cadena.-

18.- Ahora vamos a probar la equivalencia entre las definiciones (2) y (14), para ello necesitamos el siguiente resultado, su demostración está en el apéndice II.-

Teorema: Si u tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en una vecindad de la cerradura de la bola $B_\rho(y)$, entonces

(i) para $n=2$ y $x \in B_\rho(y)$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_\rho(y)} \left[(-\log r) D_n u - u D_n(-\log r) \right] d\sigma(z)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{B_\rho(y)} \Delta u \, (-\log r) \, dz$$

(ii) Para $n \geq 3$ y $x \in B_\rho(y)$

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n(1)(n-2)} \int_{\partial B_\rho(y)} \left(r^{-n+2} D_n u - u\, D_n r^{-n+2} \right) d\sigma(z)$$

$$- \frac{1}{\sigma_n(1)(n-2)} \int_{B_\rho(y)} \Delta u \cdot r^{-n+2}\, dz$$

donde $r = \| x - z \|$, $z \in \overline{B_\rho(y)}$

Proposición: Las definiciones (2) y (14) son equivalentes.

Demostración:

Probaremos primero que (14) implica (2)

Lo haremos para el caso $n \geq 3$

Sea u una función armónica (según 14), definida en la región Ω.

Sea $\rho > 0$ tal que $\overline{B_\rho(y)} \subset \Omega$, entonces por el teorema antes citado, tenemos que.

$$u(y) = \frac{1}{\sigma_n(1)(n-2)} \int_{\partial B_\rho(y)} \left[u_y(z) D_n u - u\, D_n u_y(z) \right] d\sigma(z)$$

dado que $\int_{B_\rho(y)} \Delta u \cdot u_y\, dz = 0$ porque $\Delta u = 0$

en $\overline{B_\rho(y)}$..

Para $z \in \partial B_\rho(y)$, $u_y(z) = \rho^{-n+2}$ y

$$D_n u_y = D_r r^{-n+2} /_{r=\rho} = -(n-2)\rho^{-n+1}.-$$

Sustituyendo en la primera integral tenemos

$$u(y) = \frac{\rho^{-n+2}}{\sigma_n(1)(n-2)} \int_{\partial B_\rho(y)} D_n u \, d\sigma(z) + \frac{\rho^{-n+1}}{\sigma_n(1)} \int_{\partial B_\rho(y)} u \, d\sigma(z)$$

La primera integral vale cero por el Teorema 16 (Integral de Gauss), entonces

$$u(y) = \frac{1}{\sigma_n(1)\,\rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(y)} u(z)\, d\sigma(z) = M_u^\rho(y)$$

Probaremos ahora la otra implicación: (2) implica (14)

Sabemos por el teorema (13) que u es de clase $\mathcal{C}^\infty$; entonces falta demostrar que el laplaciano de u es cero.-

Sea $y \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{B_r(y)} \subset \Omega$
Por la igualdad de Green tenemos, si $v \equiv 1$

$$\int_{B_r(y)} (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int_{\partial B_r(y)} (u D_n v - v D_n u)\,d\sigma$$

pero $\Delta v = 0$ y $D_n v = 0$; así que

$$\int_{B_r(y)} \Delta u \, dx = \int_{\partial B_r(y)} D_n u \, d\sigma$$

y $$\int_{\partial B_r(y)} D_n(u)\, d\sigma = \alpha_n(1) \int_{\|\theta\|=1} \frac{d}{dr} u(\theta, r)\, d\sigma(\theta)$$

$$= \alpha_n(1) \frac{d}{dr} \int_{\|\theta\|=1} u(\theta, r)\, d\sigma(\theta)$$

$$= \alpha_n(1) \frac{d}{dr}\, u(y) = 0$$

tenemos, entonces que

$$\int_{B_r(y)} \Delta u\, dx = 0 \qquad \forall x \in \Omega \;, \forall r > 0 \text{ tal que } \overline{B_r(x)} \subset \Omega$$

lo cual implica que $\Delta u = 0$ en Ω por ser Δu una función continua.-

La tercera definición de función armónica, en términos de la ecuación de Laplace, es como dije antes, la más conocida; por ejemplo el resultado de que si u es armónica en el sentido de la tercera definición entonces satisface la "propiedad del promedio" es conocido como el TEOREMA DE GAUSS de la media aritmética.-

19.- La integral de Poisson

La "propiedad del promedio" con la que hemos definido a las funciones armónicas, nos dice que el valor de u en el centro de la bola $B_r(x)$ queda determinado por los valores que toma en la frontera.
Ahora veremos que también el valor en cualquier punto interior $y \in B_r(x)$, depende de los valores en la frontera.-

Aquí demostraremos que para funciones armónicas u en la región Ω y para cualquier $B_r(y)$ tal que $\overline{B_r(y)} \subset \Omega$, existe una medida μ_x, $x \in B_r(y)$ definida en ∂B tal que

$$u(x) = \int_{\partial B_r(y)} u \, d\mu_x$$

esta medida en este caso es absolutamente continua respecto a la medida superficial. ($\mu_x \ll \sigma$) y

$$\frac{d\mu_x}{d\sigma}(z) = \frac{1}{r\,\sigma_n(1)} \; \frac{r^2 - \|x-y\|^2}{\|x-z\|^n}$$

$$\mu_x(E) = \int_E \frac{d\mu_x}{d\sigma}\, d\sigma$$

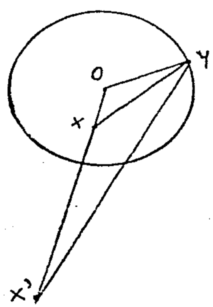
Nota: Una medida η se dice que es absolutamente continua con respecto a μ, si $\eta(A)=0$ para cada conjunto A para el cual $\mu(A)=0$
notación $(\eta \ll \mu)$

20.- Teorema: Sea $u:\overline{B_r(x_0)} \to \mathbb{R}$. Si u es armónica en $B_r(x_0)$ y continua en $\overline{B_r(x_0)}$, entonces para cada $x \in B_r(x_0)$ tenemos

$$u(x) = \frac{1}{r\,\sigma_n(1)} \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{r^2 - \|x - x_0\|^2}{\|x - y\|^n}\, u(y)\, d\sigma(y).$$

demostración

Sin pérdida de generalidad, tenemos $x_0 = 0$



Para $x \in B_r(0)$

$x' = \frac{r^2}{\|x\|^2} x$ es el inverso de x respecto a $\partial B_r(0)$

Sea $y \in \partial B_r(0)$ entonces

$$\frac{\|x' - y\|}{r} = \frac{\|x - y\|}{\|x\|}$$

dado que los triángulos $\Delta 0xy$ y $\Delta 0yx'$ son semejantes..

Separamos la demostración en dos casos, para $n=2$ y otro para $n \geq 3$

Para $n=2$:

Usando el Teorema(5) (apéndice II), obtenemos;

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(0)} \left[u_x D_n u - u D_n u_x \right] d\sigma(z) \quad \ldots (A)$$

(donde u_x es la armónica fundamental con polo x.)

A partir de la igualdad de Green, haciendo $v = u_{x'}$ (armónica fundamental con polo x') obtenemos

$$\int_{\partial B_r(0)} \left(u_{x'} D_n u - u D_n u_{x'} \right) d\sigma = 0 \quad \ldots (B)$$

A partir del Teorema Integral de Gauss (15) y de que

$$(u_x - u_{x'})(y) = \log \frac{\|x' - y\|}{\|x - y\|} = \log \frac{r}{\|x\|} = \text{constante}$$

obtenemos;

$$\int_{\partial B_r(0)} (u_x - u_{x'}) D_n u \, d\sigma = \log \frac{r}{\|x\|} \int_{\partial B_r(0)} D_n u \, d\sigma = 0 \quad \ldots (C)$$

Ahora, restando (B) de (A) obtenemos

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(0)} (u_x - u_{x'}) D_n u \, d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(0)} u \left(D_n u_{x'} - D_n u_x \right) d\sigma =$$

por (C) $$= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(0)} u\,(D_n u_{x'} - D_n u_x)\,d\sigma \quad \ldots (D)$$

pero $$D_n(u_{x'} - u_x) = \bar{n}\cdot\nabla(u_{x'} - u_x)$$

$$= \frac{y}{r}\left[-\frac{x-y}{\|x-y\|^2} + \frac{x'-y}{\|x'-y\|^2}\right]$$

$$= \frac{r^2 - \|x\|^2}{r\,\|x-y\|^2}$$

sustituyendo en (D) obtenemos la fórmula deseada, es decir

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(0)} \frac{r^2 - \|x\|^2}{r\,\|x-y\|^2}\,u(y)\,d\sigma(y)$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(0)} \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|x-y\|^2}\,u(y)\,d\sigma(y)$$

Para $n \geq 3$

sea $v_x = -\left(\frac{r}{\|x\|}\right)^{n-2} u_{x'}$ esta función es armónica $B_r(0)$, entonces usando la igualdad de Green tenemos:

$$\int_{\partial B_r(0)} (v_x D_n u - u D_n v_x) = 0 \quad \ldots (a)$$

y usando el teorema 5 (apéndice II) obtenemos

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n(1)(n-2)} \int_{\partial B_r(0)} (u_x D_n u - u D_n u_x)\, d\sigma(z) \quad \ldots (b)$$

Sumando (a) y (b) tenemos

$$\sigma_n(1)(n-2)\, u(x) = \int_{\partial B_r(0)} \left[(v_x + u_x) D_n u - u D_n (v_x + u_x) \right] d\sigma \quad ..(c)$$

Calcularemos cada uno de los sumandos de dicha integral:

$$(u_x + v_x)(y) = \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} - \left(\frac{r}{\|x\|} \frac{1}{\|x^0 - y\|} \right)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} - \left(\frac{r}{\|x\|} \frac{\|x\|}{r\|x-y\|} \right)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} - \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} = 0 \quad \ldots (d)$$

Si $y \in \partial B_r(0)$

$$D_n (v_x + u_x)(y) = \frac{y}{r} \cdot \nabla (v_x + u_x)$$

$$= (n-2) \frac{\|x\|^2 - r^2}{r \|x-y\|^n} \quad \ldots \quad (e)$$

sustituyendo (d) y (e) en (c) tenemos:

$$\sigma_n(1)(n-2)u(x) = \int_{\partial B_r(0)} (n-2)\,\frac{r^2-\|x\|^2}{r\,\|x-y\|^n}\,u(y)\,d\sigma(y)$$

por lo tanto

$$u(x) = \frac{1}{r\,\sigma_n(1)} \int_{\partial B_r(0)} \frac{r^2-\|x\|^2}{\|x-y\|^n}\,u(y)\,d\sigma(y)$$

21.- Definición: Dada $f:\partial B_r(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, f integrable en $(\partial B, \mathcal{B}(\partial B), d\sigma)$ definimos la Integral de Poisson de f como la función

$$\frac{1}{r\,\sigma_n(1)} \int_{\partial B} \frac{r^2-\|x-x_0\|^2}{\|x-y\|^n}\,f(y)\,d\sigma(y) = I_f^B(x)$$

donde $B_r(x_0) = B$

22.- Propiedades de la Integral de Poisson:

Sean $f, g : \partial B_r(x_0) \to \mathbb{R}^*$, f y g integrables en $(\partial B, \mathcal{B}(\partial B), d\sigma)$ .. $(B = B_r(x_0))$

a) $$\frac{1}{r\,\sigma_n(1)} \int_{\partial B} \frac{r^2-\|x-x_0\|^2}{\|x-y\|^n}\,M\,d\sigma(y) = M = I_M^B(x)$$

b) $I^{B}_{\alpha f+\beta g}(x) = \alpha I^{B}_{f}(x) + \beta I^{B}_{g}(x)$ para toda $x \in B$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

c) Si f está acotada en una vecindad V de $y_0 \in \partial B$, es decir $m \leq f(y) \leq M$ para toda $y \in V$, entonces

$$m \leq \liminf_{\substack{x \to y_0 \\ x \in B}} I^{B}_{f}(x) \leq \limsup_{\substack{x \to y_0 \\ x \in B}} I^{B}_{f}(x) \leq M$$

d) Sea $y_0 \in \partial B$, entonces

$$\liminf_{\substack{y \to y_0 \\ y \in \partial B}} f(y) \leq \liminf_{\substack{x \to y_0 \\ x \in B}} I^{B}_{f}(x) \leq \limsup_{\substack{x \to y_0 \\ x \in B}} I^{B}_{f}(x) \leq \limsup_{\substack{y \to y_0 \\ y \in \partial B}} f(y)$$

Demostración:

a) Si en el Teorema 20, hacemos $u(x) = M$ una función constante, la cual es armónica en B, entonces

$$M = u(x) = \frac{1}{r\,\sigma_n(1)} \int_{\partial B} \frac{r^2 - \|x - x_0\|}{\|x - y\|^n} \, M \, d\sigma(y)$$

para toda $x \in B$, es decir

$$I^{B}_{M}(x) = M$$

b) Es inmediata de las propiedad de linealidad de la integral.

c) Sea $V = B_\varepsilon(y_0) \cap \partial B$

$$I_f^B(x) = \frac{1}{r\sigma_n(1)}\int_V \frac{r^2 - \|x - x_0\|^2}{\|x-y\|^n} f(y)\,d\sigma(y) \; +$$

$$+ \; \frac{1}{r\sigma_n(1)}\int_{\partial B - V} \frac{r^2 - \|x - x_0\|^2}{\|x-y\|^n} f(y)\,d\sigma(y) = I_1 + I_2$$

$$I_1 \leq \frac{1}{r\sigma_n(1)}\int_V \frac{r^2 - \|x - x_0\|^2}{\|x-y\|^n} M\,d\sigma(y)$$

$$\leq \frac{1}{r\sigma_n(1)}\int_{\partial B} \frac{r^2 - \|x - x_0\|^2}{\|x-y\|^n} M\,d\sigma(y) = I_M^B(x) = M$$

por lo tanto $I_1 \leq M$

Sea $x \in B_{\varepsilon/2}(y_0)$ y $y \in \partial B - V$ de donde

$\|x - y\| \geq \varepsilon/2$ cuando $\|y_0 - y\| \geq \varepsilon$

Si $x \in B_{\varepsilon/2}(y_0)$

$$|I_2(x)| \leq \frac{1}{r\sigma_n(1)}\int_{\partial B - V} \frac{r^2 - \|x - x_0\|^2}{\|x-y\|^n} |f(y)|\,d\sigma(y)$$

$$\leq \frac{r^2 - \|x-x_0\|^2}{r\,\sigma_n(1)\,(\varepsilon/2)^n} \int_{\partial B - V} |f(y)|\, d\sigma(y)$$

$\|x-x_0\|$ tiende a r cuando $x \to y_0$

entonces $|I_2(x)| \to 0$ cuando $x \to y_0$

Por lo tanto

$$\limsup_{x \to y_0} I_f^B(x) \leq \limsup_{x \to y_0} I_1 + \limsup_{x \to y_0} I_2$$

$$\leq M + 0 = M$$

$$\limsup_{x \to y_0} I_f^B(x) \leq M$$

El otro lado de la desigualdad se prueba de monera análogo.-

d) Si $\limsup_{y \to y_0} f(y) \leq M$, entonces existe una vecindad de y_0 donde $f(y) \leq M$, y así a partir de lo probado en c), tenemos que

$$\limsup_{x \to y_0} I_f^B(x) \leq \limsup_{y \to y_0} f(y)$$

El otro lado de la desigualdad se prueba de manera análoga.-

23.- Proposición

Si f es continua en ∂B entonces

$$\lim_{x \to y} I_f^B(x) = f(y) \quad \text{poro todo } y \in \partial B$$

donde $B = B_r(x_0)$

Demostración: es inmediato del inciso d) en 22.-, ya que

$$\limsup_{y \to y_0} f(y) = \liminf_{y \to y_0} f(y)$$

24.- Proposición.

Si f es integrable en ∂B, entonces I_f^B es armónica en B $(B = B_r(x_0))$

demostración:

Necesitamos el siguiente lema

Lema: Sea $u: U \times C \to \mathbb{R}$ una función definida en $U \times C$, donde U es abierto en $\mathbb{R}^n$ y C compacto en $\mathbb{R}^n$.

Si $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,y)$ es continua en $U \times C$

para cada j. Entonces $x \in U$, $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_C u(x,y)\, d\mu(y) = \int_C \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,y)\, d\mu(y)$$

Sea $\quad u(x,y) = \dfrac{r^2 - \|x - x_0\|^2}{\|x-y\|^n}$.

$u : U \times C \to \mathbb{R}$ donde $U = B_r(x_0)$
$C = \partial B_r(x_0)$

ahora $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{r^2 - \|x - x_0\|^2}{\|x-y\|^n}\right)$ es continua en $U \times C$, así como sus derivadas parciales de segundo orden, entonces

$$\Delta I_f^B(x) = \frac{1}{r\,\sigma_n(1)} \int_{\partial B} \Delta\left(\frac{r^2 - \|x-x_0\|^2}{\|x-y\|^n}\right) f(z)\, d\sigma(z)$$

y $\quad \Delta\left(\dfrac{r^2 - \|x - x_0\|^2}{\|x-y\|^n}\right) = 0 \quad$ derivando respecto a $x = (x_1, \ldots, x_n)$

por lo tando $\quad \Delta I_f^B(x) = 0 \quad$ para toda $x \in B$

25.- Problema de Dirichlet

El problema de Dirichlet o el primer problema de frontera de Teoría de Potencial, es el problema más viejo en Teoría de Potencial.-

Sea $v : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una función continua en $\partial\Omega$, donde Ω es una región de $\mathbb{R}^n$

El problema consiste en ver cuando existe una función u definida en Ω, que sea:

i) armónica en Ω

ii) $\lim\limits_{\substack{x \to y \\ y \in \partial\Omega}} u(x) = v(y)$

Si $\Omega = B_r(x_0)$, podemos usar las proposiciones 22, 23 y 24 para demostrar que el problema tiene solución, y que esa solución es precisamente la integral de Poisson

$$u(x) = I_v(x) \quad \text{para toda } x \in B_r(x_0)$$

Teorema: Sea v continua en $\partial B_r(x_0)$. Entonces I_v^B resuelve el problema de Dirichlet para $B_r(x_0) = B$ con valores a la frontera $v(x)$. O sea, I_v^B es la solución del problema de Dirichlet.-

Funciones Sobrearmónicas

26. Definición: Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}^*$ $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})$ una función definida en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.. Diremos que u es SOBREARMONICA en Ω si u tiene las siguientes propiedades.

i) u no es idénticamente $+\infty$ y $u > -\infty$ en Ω

ii) u es semicontinua inferiormente en Ω

iii) $\forall x \in \Omega$ y $\forall r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tal que

$$\overline{B_r(x)} \subset \Omega \qquad u(x) \geq M_u^r(x)$$

A la clase de las funciones SOBREARMONICAS en Ω la denotaremos por $\mathcal{S}(\Omega)$

La función u es SUBARMONICA en Ω si $-u \in \mathcal{S}(\Omega)$.. A la clase de funciones SUBARMONICAS la denotaremos por $\mathcal{J}(\Omega)$

27. Ejemplos

a) Si $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $u \in \mathcal{S}(\Omega)$ y $u \in \mathcal{J}(\Omega)$

b) La armónica fundamental con polo y, u_y, es sobrearmónica en $\mathbb{R}^n$, ya que u_y es armónica en $\mathbb{R}^n - \{y\}$ y

$$u(y) = +\infty > \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B} u(z)\, d\sigma(z)$$

c) Si $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $|u| \in \mathcal{Y}(\Omega)$ y $-|u| \in \mathcal{S}(\Omega)$..

Demostración: Sea $r>0$ tal que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$
$B_r(x) = B$

$$|u(x)| = \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \left| \int_{\partial B} u(y)\, d\sigma(y) \right| \leq \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B} |u(y)|\, d\sigma(y)$$

entonces $|u(x)| \leq M^r_{|u|}(x)$

por lo tanto $|u| \in \mathcal{Y}(\Omega)$

y $-|u| \in \mathcal{S}(\Omega)$

d) Si $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $u^+ \in \mathcal{Y}(\Omega)$
$u^- \in \mathcal{S}(\Omega)$

demostración: sea $r>0$ tal que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B} u(y)\, d\sigma(y) \leq \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B} u^+(y)\, d\sigma(y) = M^r_{u^+}(x)$$

entonces $u(x) \leq M^r_{u^+}(x)$ para toda $x \in \Omega$
por lo tanto $u^+(x) \leq M^r_{u^+}(x)$
$u^+ \in \mathcal{Y}(\Omega)$

e) Si $u, v \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $u \vee v \in \mathcal{Y}(\Omega)$
y $u \wedge v \in \mathcal{S}(\Omega)$

Sea $x \in \Omega$, $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\max(u,v) = u \vee v(x) = u(x)$

entonces

$$u\vee v(x) = u(x) = \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \cdot \int_{\partial B} u(y)\, d\sigma(y)$$

$$\leq \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B} (u\vee v)(y)\, d\sigma(y) = M^r_{u\vee v}(x)$$

entonces $\quad u\vee v(x) \leq M^r_{u\vee v}(x)$ para todo $x \in \Omega$

por lo tanto $\quad u\vee v \in \mathcal{S}(\Omega)$

De manera análoga se puede probar que
$u\wedge v \in \mathcal{S}(\Omega)$.-

f) De nuevo podemos utilizar la fórmula integral de Cauchy (ver 3.ii pag 6), para generar ejemplos de funciones subarmónicas a partir de funciones analíticas.-

Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica en la región $\Omega \subset \mathbb{C}$ entonces $|f| \in \mathcal{S}(\Omega)$

demostración: sea $r>0$ tal que $\overline{B_r(z)} \subset \Omega$
Por la fórmula Integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

entonces
$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|} |d\xi| =$$

$$= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B} |f(\xi)|\,|d\xi| = M_{|f|}^{r}(z)$$

por lo tanto $|f(z)| \leq M_{|f|}^{r}(z)$

entonces $|f| \in \mathcal{Y}(\Omega)$

Por ejemplo si:

- $f(z) = z^2$ $\quad z = x + yi$
  entonces
  $$|f(z)| = (x^4 + y^4 + 2x^2y^2)^{1/2} \in \mathcal{Y}(\Omega)$$
- $f(z) = z$ entonces $|f(z)| = (x^2 + y^2)^{1/2} \in \mathcal{Y}(\Omega)$
- $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$

  entonces $|f(z)| = e^x \in \mathcal{Y}(\Omega)$

g) Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa entonces $\varphi \circ u : \Omega \to \mathbb{R}$ es sub-armónica..

demostración: Como φ es finita y continua, entonces basta demostrar que

$$\varphi \circ u(x) \leq \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B} (\varphi \circ u)(y)\, d\sigma(y) = M_{\varphi \circ u}^{r}(x)$$

$\forall x \in \Omega$, $\forall \overline{B_r(x)} \subset \Omega$. -

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B} u(y) \cdot d\sigma(y)$$

$$\varphi(u(x)) = \varphi\left[\frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B} u(y)\, d\sigma(y)\right]$$

$$\leq \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B} (\varphi \circ u)(y)\, d\sigma(y) = M^r_{\varphi\circ u}(x)$$

por la desigualdad de Jensen

por lo tanto $(\varphi \circ u)(x) \leq M^r_{\varphi\circ u}(x)$

Los ejemplos e y d son casos particulares de éste, haciendo $\varphi(t) = |t|$ y $\varphi(t) = t \vee 0$ respectivamente.-

h) Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es subarmónica sobre la región Ω y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y convexa entonces $\varphi \circ u$ es subarmónica.-

demostración

Sea $x \in \Omega$ y $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ entonces

$$u(x) \leq \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B} u(y)\, d\sigma(y)$$

, entonces

$$\varphi(u(x)) \leq \varphi\left(\frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B} u(y)\, d\sigma(y)\right)$$ por ser ϕ creciente

$$\leq \frac{1}{t^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B} (\varphi \circ u)(y)\, d\sigma(y) \qquad \text{por lo desig. de Jensen}$$

por lo tanto $\varphi \circ u \in \mathcal{J}(\Omega)$

i) Si u es armónica en Ω y $p > 1$, entonces $|u|^p$ es subarmónica en Ω.-

demostración: Ya que $|u|$ es subarmónica y

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^p & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

es convexa y creciente.-

entonces $\phi \circ |u| \in \mathcal{J}(\Omega)$

28.- Proposición:

Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función sobrearmónica en la región Ω entonces satisface el principio del mínimo.-

demostración: Supongamos que hay $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \inf\limits_{x \in \Omega} u(x)$, entonces tenemos que demostrar que $u(x) \equiv u(x_0)$ para toda $x \in \Omega$.-

Sea $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ entonces

$$u(x_0) \geq M_u^r(x_0).$$

Primero demostraremos que $u(x) \equiv u(x_0)$ en $\overline{Br(x_0)}$ y luego en $\Omega - \overline{Br(x_0)}$.-

Demostración de que $u(x) \equiv u(x_0)$ para toda $x \in \overline{B_r(x_0)}$

Si $x \in \partial B_r(x_0)$ entonces $u(x) \equiv u(x_0)$, de no ser así tendríamos que $u(x) > u(x_0)$, lo cual implica que existe $\delta > 0$ tal que $u(y) > u(x_0)$ para toda $y \in B_\delta(x)$ ($B_\delta(x) \subset \Omega$) por ser u s.c.i. en Ω, entonces

$$u(x_0) \geq M_u^r(x_0) = \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y)\, d\sigma(y)$$

$$= \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \left[\int_D u(y)\, d\sigma(y) + \int_{\partial B_r(x_0) - D} u(y)\, d\sigma(y) \right]$$

donde $D = B_\delta(x) \cap \partial B_r(x_0)$

$$> \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \left[\int_D u(x_0)\, d\sigma(y) + \int_{\partial B_r(x_0) - D} u(x_0)\, d\sigma(y) \right]$$

$$= \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \left[u(x_0)\ \sigma_n(r) \right] = u(x_0)$$

lo cual nos lleva a la contradicción de que $u(x) > u(x_0)$. Por lo tanto $u(x) = u(x_0)$ para toda $x \in \partial B_r(x_0)$

Nótese que no solo hemos probado que $u(x) = u(x_0)$ para toda $x \in \partial B_r(x_0)$, sino también para los puntos interiores de $B_r(x_0)$, porque si $x \in B_r(x_0)$ existe $s < r$ tal que $x \in \partial B_s(x_0)$ y el argumento anterior también vale pues $u(x_0) \geq M_u^S(x_0)$.-

Ahora para demostrar que $u(x) \equiv u(x_0)$ para toda $x \in \Omega - \overline{B_r(x_0)}$, se procede igual que en la demostración hecha en 6) donde probamos que las funciones armónicas satisfacen el PRINCIPIO DEL MINIMO.-

29. Proposición: Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función sobrearmónica en la región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si $\liminf_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega}} u(z) \geq 0$ para toda $x \in \partial\Omega$,

entonces $u \geq 0$ en Ω

demostración:

Supongamos hay un punto $z_0 \in \Omega$ tal que $u(z_0) < 0$. Entonces u no es constante.

Definamos una función v en $\bar{\Omega}$ como

$$v(x) = \liminf_{z \to x} u(z) \qquad x \in \bar{\Omega}$$

Entonces v es s.c.i en $\bar{\Omega}$ y $v \geq 0$ en $\partial\Omega$ y $v(z_0) < 0$.

Dado que v es s.c.i en $\bar{\Omega}$, debe alcanzar un mínimo negativo en $\bar{\Omega}$, de hecho en Ω; pero esto contradice el principio del mínimo.

Por lo tanto $u \geq 0$ en Ω.-

30.- Proposición:

Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función sobrearmónica en Ω. Sea $W \subset \Omega$ un abierto relativamente compacto, con $\overline{W} \subset \Omega$ y sea $h: \overline{W} \to \mathbb{R}$ una función continua con $h/_W$ armónica.

Si $u \geq h$ en ∂W entonces $u \geq h$ en W

demostración:

Basta considerar el caso en que Ω es conexo pues, en general, u y h tienen las propiedades mencionadas en el enunciado si y sólo si las tienen en cada componente conexa de Ω.-

Sea $\omega = u - h$ en $\overline{W}$ entonces $\omega \geq 0$ en ∂W, finita y s.c.i en W, de hecho es s.c.i en $\overline{W}$.

Por otro lado, si $x \in \Omega$, $r > 0$ es tal que $B_r(x) \subset W$ entonces

$\omega(x) \geq M_\omega^r(x)$ por lo tanto $\omega \in \mathcal{S}(W)$.

así que ω satisface el principio del mínimo ahí

Por otro lado, siendo $\overline{W}$ compacto y ω s.c.i ahí ésta alcanza su mínimo, pero entonces lo alcanza en ∂W no en W. Pero en ∂W es siempre no negativo, por lo que sigue siendo no negativo en W, lo que termina la demostración.

La propiedad anterior de hecho caracteriza a las funciones sobrearmónicas sobre una región Ω como se desprende del siguiente teorema.-

31.- Teorema: Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función definida en la región Ω de $\mathbb{R}^n$, si u es s.e.i y mayor que $-\infty$ en Ω. Entonces u es SOBREARMONICA en Ω si y solo si dodos

a) un abierto relativamente compacto $W \subset \Omega$, con $\overline{W} \subset \Omega$ y

b) una función continua $h: \overline{W} \to \mathbb{R}$, con h/W armónica, entonces

$$u \geq h \text{ en } \partial W \Rightarrow u \geq h \text{ en } W$$

Demostración:

Sólo falta probar la suficiencia de la condición dada para la sobrearmonicidad de u, para lo cual basta con probar que u excede a su promedio en Ω..

Para ello, sean $x \in \Omega$, $r > 0$ tal que $\overline{Br(x)} \subset \Omega$

Ahora bien $\partial Br(x)$ es compacta, por lo tanto u alcanza su mínimo ahí, digamos m. Es decir $u \geq m$ en $\partial Br(x)$. Luego existe una sucesión de funciones continuas $\{\varphi_j\}_{j \in N}$ definidas en $\partial Br(x)$ tal que $m \leq \varphi_j$. $\varphi_j \uparrow u$ ahí.

Para cada $j \geq 1$, sea $h: \overline{Br(x)} \to \mathbb{R}$ dado por

$$h_j(y) \begin{cases} \varphi_j(y) & \text{si } y \in \partial Br(x) \\ I_{\varphi_j}^{Br(x)}(y) & \text{si } y \in Br(x) \end{cases}$$

Entonces $W = B_r(x)$ y h_j satisfacen las condiciones a) y b) del enunciado, además de que $u = h_j$ en $\partial B_r(x)$, Luego $u \geq h_j$ en $B_r(x)$. Entonces

$$u(x) \geq h_j(x) = I_{\varphi_j}^{B_r(x)}(x) = \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B_r} \varphi_j(y)\, d\sigma(y)$$

Por el Teorema de Convergencia Monótona

$$\frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B_r} \varphi_j(y)\, d\sigma(y) \longrightarrow \frac{1}{r^{n-1}\sigma_n(1)} \int_{\partial B_r} u(y)\, d\sigma(y) = M_u^r(x)$$

luego

$$u(x) \geq M_u^r(x)$$

lo que prueba que $u \in \mathcal{S}(\Omega)$..

Como una consecuencia inmediata de esta caracterización de las funciones sobrearmónicas, podemos dar otra caracterización de esta clase de funciones en términos de la INTEGRAL DE POISSON.

32.- Proposición: Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función definida en el abierto Ω de $\mathbb{R}^n$, si u es s.c.i y mayor que $-\infty$ en Ω; entonces una condición necesaria y suficiente para que u sea SOBREARMONICA en Ω es que

$$u(x) \geq I_u^{B_r(x_0)}(x) \quad \forall\, x \in B_r(x_0) \quad \text{tal que } \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$$

CAPITULO II

FUNCIONES DEBILMENTE ARMONICAS

0.- Introducción :

Utilizando la Integral de Poisson definimos la propiedad débil del promedio, es decir, una función u con valores reales definida en la región Ω de $\mathbb{R}^n$, satisface esa propiedad si para toda x de Ω existe al menos una bola B, para la cual x no necesita ser el centro; tal que $u(x)$ es igual a la Integral de Poisson en x respecto a la ∂B, en el caso de las debilmente armonicas, mayor para las debilmente sobrearmónicas.-

Los ejemplos son importantes, aunque tal vez los primeros sean triviales, pero hay otros que muestran que si una función es debilmente armónica no cumple necesariamente el PRINCIPIO DEL MINIMO (MAXIMO), lo cual marca una diferencia fuerte con las armónicas;- Entonces se buscan condiciones para que las funciones debilmente armónicas, debilmente sobrearmónicas, o débilmente subarmónicas cumplan alguna propiedad que se vaya pareciendo al PRINCIPIO DEL MINIMO o DEL MAXIMO.-

Para el desarrollo de este capítulo seguimos las ideas de Oliver D. Kellog expuestas en el artículo ;

"Converses of Gauss' Theorem on the Arithmetic Mean"

Pero introducimos la notación y herramientas expuestas en el capítulo I, y de hecho todo el tiempo trabajamos con las propiedades de las funciones armónicas en las bolas, a diferencia del artículo que trabaja con regiones normales, es decir, regiones donde el problema de Dirichlet tiene solución para cualquier función continua definida en la frontera de la región.

Funciones debilmente Armónicos

1.- Notación: Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función Borel medible en la región Ω de $\mathbb{R}^n$ y si $B = B_r(x_0)$ es una bola cuya cerradura está contenida en Ω, denotaremos por $H_u^B(x)$ la función definida como:

$$H_u^B(x) = \begin{cases} I_u^B(x) & \text{si } x \in B \\ u(x) & \text{si } x \in \Omega - B \end{cases}$$

donde $I_u^B(x)$ es la INTEGRAL DE POISSON de u respecto a $\partial B_r(x_0)$ o la definimos idénticamente cero si ésta no existe o no es finita

2.- Definición: Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uno función definida en la región Ω de $\mathbb{R}^n$. Diremos que u es DEBILMENTE ARMONICA en Ω si u tiene las siguientes propiedades:

(i) u es continua en Ω

(ii) $\forall x \in \Omega \quad \exists\, r = r(x, u) > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$
y $u(x) = H_u^{B_r}(x)$

A la clase de funciones DEBILMENTE ARMONICAS en Ω la denotaremos por $\mathcal{H}_\mathcal{D}(\Omega)$ ..

3.- Observaciones:

(a) Esta definición surge de una búsqueda por generalizar el recíproco del Teorema de Gauss sobre funciones armónicas y su caracterización con la "propiedad del promedio". Esto es, aquí solamente suponemos que para cada punto $x \in \Omega$ existe un único radio tal que $u(x)$ es igual a su "promedio" en una bola, aún cuando el punto no sea precisamente el centro de dicha bola.-

(b) El hecho de que el radio para el cual se cumple la igualdad $u(x) = H_u^{B_r}(x)$ depende tanto del punto x como de la función u, nos impide tener propiedades deseables para el espacio $\mathcal{H}_{\wp}(\Omega)$ como serían: Si u, v son elementos de $\mathcal{H}_{\wp}(\Omega)$ entonces también lo fueran $\alpha u + \beta v$, $u \wedge v$, $u \vee v$, etc.-

4.- Análogamente, u es DEBILMENTE SOBREARMONICA (SUBARMONICA) si:

(i) u es semicontinua inferiormente (semicontinua superiormente) en Ω

(ii) $\forall x \in \Omega \quad \exists\, r = r(x,u) > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$
y $u(x) \geq H_u^{B_r}(x) \quad (u(x) \leq H_u^{B_r}(x))$

A estas clases los denotaremos por $\mathcal{S}_{\wp}(\Omega)$ y $\mathcal{I}_{\wp}(\Omega)$ respectivamente.-

5.- Ejemplos:

(i) Toda función armónica es debilmente armónica
$\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{H}_{\wp}(\Omega)$..

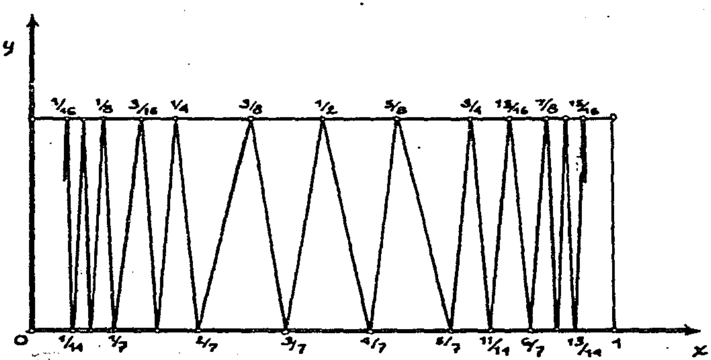
Esto es inmediato del teorema 21, donde si u es armónica en $B_r(x_0)$ entonces para toda $x \in B_r(x_0)$

$$u(x) = I_u^{B_r(x_0)}(x) = H_u^{B_r}(x)$$

(ii) Toda función sobrearmónica es debilmente sobrearmónica, $\mathcal{S}(\Omega) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{D}}(\Omega)$, ésto es inmediato de la proposición 30.-

Así también $\mathcal{I}(\Omega) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{D}}(\Omega)$

(iii) Sea f la función definida en la figura 1 sobre el intervalo $(0,1)$, la cual es continua en el $(0,1)$ y para toda $x \in (0,1)$, existe $h>0$ tal que la ecuación $u(x) = \frac{1}{2}\{u(x+h) + u(x-h)\}$ se cumple, es decir esta función pertenece a la familia $H_{\mathcal{D}}(\Omega)$..



En la figura 1 se ve claramente que no es continua en el 0 y en el 1. Denotemos con a_n, b_n las abscisas de los picos, a_n los que van a dar al uno. y b_n las que van a dar al cero. Para probar que satisface la propiedad débil del promedio, primero nos fijamos en las $x's$ que no coinciden con las

a_n y b_n ; para esta x, u es lineal y entonces tiene la propiedad del promedio para alguna $h(x)$, de hecho, para un número infinito de h's..

Para cualquier a_n nos fijamos en la sucesión $\{a_k\}$, ahí podemos escoger a_i, a_j tales que

$$d(a_n, a_j) = d(a_n, a_i) = h \quad a_i < a_n < a_j \text{ , luego}$$

$$u(a_n) = 1 = \tfrac{1}{2}(u(a_i) + u(a_j))$$

Para b_n escogemos de manera análoga, además b_n y a_n no coinciden para ninguna n, y entre dos a_n, a_m consecutivos solo puede haber un b_n..

Esta función no es armónica. Para construir las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ podemos usar los puntos con abscisas :

$$a = \begin{cases} \frac{1}{2^k} \;, \quad \frac{3}{2^{k+1}} \\ 1 - \frac{1}{2^k} \;, \quad 1 - \frac{3}{2^{k+1}} \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

sobre $y = 1$, y los puntos con las abscisas

$$b = \begin{cases} \frac{1}{7}\,\frac{1}{2^{k-1}} \;, \quad \frac{1}{7\cdot 2^k} \\ 1 - \frac{1}{7}\,\frac{1}{2^{k-1}} \;, \quad 1 - \frac{3}{7}\,\frac{1}{2^k} \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

sobre $y = 0$, las cuales son simétricas respecto a $x = \tfrac{1}{2}$ ..

(iv) La siguiente función pertenece a la familia $\mathcal{H}_\delta(\Omega)$, es continua en Ω, además alcanza el mínimo y el máximo en Ω, pero la función no es constante, es decir no satisface el PRINCIPIO DEL MINIMO

Sea x_0 un punto fijo y $\Omega = B_1(x_0)$. Para definir la función tomemos las bolas de radio $r_n = 1 - 1/n$ y centro en x_0 $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad d(x, x_0) < 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad x \in \partial B_{r_n}(x_0) \quad n = 3, 5, 7, \ldots \\ 0 & \text{si} \quad x \in \partial B_{r_n}(x_0) \quad n = 2, 4, 6 \end{cases}$$

Además en cada corona $B_{r_n}(x_0) - B_{r_{n-1}}(x_0)$ definimos a u como la solución al problema de Dirichlet en dicha región, con los valores 0 y 1 en la frontera respectivamente.-

Ahora veremos que $u \in \mathcal{H}_\delta(\Omega)$

a) Si $x \in B_{1/2}(x_0)$, basta tomar un radio r, suficientemente pequeño para que $\overline{B_r(x)} \subset B_{1/2}(x_0)$ y en $B_{1/2}(x_0)$ u es idénticamente cero, es decir $u \in \mathcal{H}(B_{1/2}(x_0))$.-

b) Si $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{r_n} - \overline{B}_{r_{n-1}}$ existe también un radio r suficientemente pequeño para que $\overline{B_r(x)} \subset B_{r_n} - \overline{B}_{r_{n-1}}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, pero $u \in \mathcal{H}(B_{r_n} - \overline{B}_{r_{n-1}})$

e) si $x \in \partial B_{r_n}$ es claro que $x \in B_{r_{n+2}}$ y que $u(x) = H_u^{B_{r_{n+2}}}(x)$, por lo tanto $u \in \mathcal{H}_{\wp}(\Omega)$..

En los dos últimos ejemplos, las funciones pertenecen a $\mathcal{H}_{\wp}(\Omega)$ pero no son armónicas.

Además alcanzan su máximo y su mínimo en puntos interiores y no implica que sean constantes como suceda con las funciones armónicas

Ahora nos interesa estudiar los principios del MINIMO o MAXIMO que satisfacen las funciones que pertenecen a las familias $\mathcal{H}_{\wp}(\Omega)$ $\mathcal{S}_{\wp}(\Omega)$ y $\mathcal{I}_{\wp}(\Omega)$

6.- Teorema: Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ $u \in \mathcal{S}_{\wp}(\Omega)$ y continua en $\bar{\Omega}$ entonces:

i) u alcanza su mínimo en $\partial\Omega$

ii) Si u alcanza el mínimo en un punto interior $x_0 \in \Omega$ entonces $u(y) = u(x_0) = m$ para toda $y \in \partial\Omega$.

Demostración: Es claro que basta probar el segundo inciso, pues si no alcanza el mínimo en punto interior, necesariamente lo alcanzará en un punto de $\partial\Omega$, ya que $\bar{\Omega}$ es compacto y u es continua ahí.-

demostración de ii)

Sea $m = \inf\limits_{x \in \Omega} u(x)$ y $E = \{x \in \Omega \,/\, u(x) = m\}$

por hipótesis $E \neq \phi$

Sea $x_1 \in E$ entonces existe $r_1(x_1, u)$ tal que $\overline{B_{r_1}} \subset \Omega$ y $u(x_1) \geq H_u^{B_{r_1}}(x_1)$ pues $u \in S_\rho(\Omega)$

entonces $m \geq H_u^{B_{r_1}}(x_1) \quad \ldots (A)$

Por otro lado recordemos que

$$H_u^{B_{r_1}}(x) \begin{cases} I_u^{B_{r_1}}(x) & \text{si} \quad x \in B_{r_1} \\ u(x) & \text{si} \quad x \in \Omega - B_{r_1} \end{cases}$$

y $\quad u(x) \geq u(x_1) = m \quad$ para toda $x \in \overline{B_{r_1}}$

$u(x) - m \geq 0 \quad$ " " "

$$I_u^{B_{r_1}}(x) - m = I_{u-m}^{B_{r_1}}(x) \geq 0$$

entonces $I_u^{B_{r_1}}(x) \geq m$ para toda $x \in B_{r_1} \ldots (B)$

en particular para x_1

$$I_u^{B_{r_1}}(x_1) \geq m \quad \ldots (C)$$

Así tenemos que $I_u^{B_{r_1}}(x_1) = m$ (por A y C)

Pero $I_u^{B_{r_1}}$ es armónica en B_{r_1}, y como alcanza el mínimo en x_1, por el PRINCIPIO DEL MINIMO clásico

$$I_u^{B_{r_1}}(x) = H_u^{B_{r_1}}(x) \equiv m \quad \text{para toda } x \in B_{r_1}$$

Además

$$u(y_0) = \liminf_{\substack{y \to y_0 \\ y,\, y_0 \in \partial B_{r_1}}} u(y) \leq \liminf_{\substack{x \to y_0 \\ x \in B_{r_1} \\ y_0 \in \partial B_{r_1}}} I_u^{B_{r_1}}(x) = m$$

entonces $u(y_0) \leq m$ para toda $y_0 \in \partial B r_1$
pero teníamos que $u(y_0) \geq m$
por lo tanto $u(y_0) \equiv m$ para todo $y_0 \in \partial B r_1$
Hasta aquí hemos probado que u es constante en $\partial B r_1$.-

Para demostrar que $u \equiv m$ en $\partial \Omega$, basta probar que para toda $y \in \partial \Omega$ y para toda $\varepsilon > 0$, hay un punto de E en $B_\varepsilon(y) \cap \Omega$; con ésto y la continuidad de u en $\bar{\Omega}$ podemos concluir que

$$u(y) = m \quad \text{para toda } y \in \partial \Omega$$

Sea y cualquier punto en la $\partial \Omega$ y $y_\varepsilon \in B_\varepsilon(y) \cap \Omega$ $(\varepsilon > 0)$.
Conectamo x_1 con y_ε por la poligonal

$$\gamma : [0,1] \to \Omega \qquad \gamma(0) = x_1 \qquad \gamma(1) = y_\varepsilon$$

γ rectificable y continua.

Como γ es continua, existe $t_1 \in (0,1]$ tal que $\gamma(t_1) = x_2 \in \partial B r_1 \subset E$, entonces $u(x_2) = m$

Para x_2, existe $r_2(x_2, u)$ tal que $\bar{B}_{r_2} \subset \Omega$ y $u(x_2) \geq H_u^{r_2}(x_2)$, por la afirmación probada $\partial B r_2 \subset E$, de nuevo la poligonal debe cortar a $\partial B r_2$ en el punto x_3, es decir existe $t_2 \in (0,1]$ tal que $\gamma(t_2) = x_3$. Continuando este proceso tenemos la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$x_n \in \Omega \qquad x_n = \gamma(t_{n+1}) \qquad t_n \in (0,1] \quad 0 < t_1 < t_2 \ldots$$

y $u(x_n) = m$ para toda $n \in \mathbb{N}$
la sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge pues es creciente y acotada superiormente por 1.-

Si para alguna k, $x_k = y_\varepsilon$ ya acabamos pues $u(y_\varepsilon) = u(x_k) = m$ y entonces y_ε es el punto que buscamos.-

Si $x_k \neq y_\varepsilon$ para toda $k \in \mathbb{N}$.
Tenemos que $\lim_{n \to \infty} t_n = s \leq 1$ y $\lim_{n\to\infty} u(\gamma(t_n)) = u(\gamma(s)) = m$ por ser u continua.

Si $s = 1$ de nuevo y_ε es el punto buscado

Si $s < 1$, $\gamma(s) = x_s$ y $u(x_s) = m$ entonces existe $r_s(x_s, u) > 0$ tal que $\bar{B}_{r_s} \subset \Omega$, $u(x_s) \geq H_u^{r_s}(x_s)$ y $u(x) = m$ para toda $x \in \partial B_{r_s}$

No hay puntos de la poligonal que intersecten a ∂B_{r_s} pues de haberlo, contradice el hecho de que $\lim_{n\to\infty} t_n = s = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{t_n\}$, por lo que el tramo de la poligonal correspondiente a $[s, 1]$ está contenido en B_{r_s}, entonces $y_\varepsilon \in B_{r_s}$.-

Por lo tanto hay puntos de la frontera de B_{r_s} que son puntos interiores de $B_\varepsilon(y) \cap \Omega$, y cualquier punto de esos satisface la condición.-

Por lo tanto $u(y) = m$ para toda $y \in \partial\Omega$.-

7.- Corolario:

Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uno función definida en la región acotada Ω de $\mathbb{R}^n$.

Si $u \in \mathcal{S}_{\wp}(\Omega)$ continua en Ω y alcanza su mínimo en un punto interior; entonces:

a) Para toda $y \in \partial\Omega$ y para toda $\varepsilon > 0$ existe $y^* \in B_\varepsilon(y) \cap \Omega$ donde $u(y^*) = m = \min_{x \in \Omega} u(x)$

b) Si u es continua en $y \in \partial\Omega$ entonces $u(y) = m$

Demostración:

a) Esta parte está hecha en la demostración del Teorema 6

b) Es inmediata también del teorema 6, segundo inciso

8.- Para las funciones en $\mathcal{J}_{\wp}(\Omega)$ tendríamos resultados análogos a los de 6 y 7 para $\mathcal{S}_{\wp}(\Omega)$

Teorema: Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ $u \in \mathcal{J}_{\wp}(\Omega)$ y continua en $\bar{\Omega}$ entonces

(i) u alcanza su MAXIMO en $\partial\Omega$

(ii) Si u alcanza el MAXIMO en un punto interior $x_0 \in \Omega$ entonces $u(y) = u(x_0) = m$ para toda $y \in \partial\Omega$

Corolario:

Sea $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en la región acotada Ω de $\mathbb{R}^n$

Si $u \in \mathcal{Y}_{\mathcal{D}}(\Omega)$, continua en Ω y alcanza su máximo en un punto interior, entonces:

a) Para toda $y \in \partial\Omega$ y para toda $\epsilon > 0$ existe $y^* \in B_\epsilon(y) \cap \Omega$ donde $u(y^*) = M = \max\limits_{x \in \Omega} u(x)$

b) Si u es continua en $y \in \partial\Omega$ entonces $u(y) = M$

Estos resultados podrían proponerse como principios del mínimo y máximo para $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(\Omega)$ y $\mathcal{Y}_{\mathcal{D}}(\Omega)$ respectivamente.

Para $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}(\Omega)$, damos los siguientes:

9.- Proposición:

Sea $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en la región acotada Ω de $\mathbb{R}^n$

Si $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}}(\Omega)$, continua en $\overline{\Omega}$ y alcanza el máximo y el mínimo en Ω entonces u es constante en $\overline{\Omega}$

Demostración: Es un corolario de Teorema 6 y Teorema 8, pues implican que $\max\limits_{x \in \Omega} u(x) = \min\limits_{x \in \Omega} u(x)$

Esta proposición la podemos precisar como:

10.- Proposición :

Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función definida en la región acotada Ω de $\mathbb{R}^n$

Si $u \in H_D(\Omega)$, continua en $y \in \partial\Omega$ y acotada en Ω entonces:

a) Si u alcanza su máximo y su mínimo en Ω entonces u es constante en $\Omega \cup \{y\}$

b) Si las cotas de u en Ω son distintas entonces no puede alcanzar a ambas..

Demostración:

a) Por corolario 7. b $u(y) = m$

Por corolario 8. b $u(y) = M$

Entonces $m = M$, por lo tanto $u(x) = m = M$ en $\Omega \cup \{y\}$

b) Supongamos que u alcanza ambas cotas, por lo probado en el inciso anterior tendríamos que $m = M$, lo cual contradice $m \neq M$, por lo tanto no puede alcanzar ambas cotas en Ω..

Los ejemplos 5.iii) y 5.iv) no son contra ejemplo a esta proposición, porque en esos dos casos las funciones no son continuas en $\partial\Omega$,- y es precisamente la continuidad en un punto de su frontera lo que define el comportamiento de la función..

11.- Proposición:

Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función definida en la región Ω de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in \mathcal{S}_p(\Omega)$, es continua en Ω y alcanza su mínimo en un punto $x_0 \in \Omega$ entonces existe una cubierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de Ω, tal que:

a) U_i es una bola cuya cerradura está contenida en Ω

b) $u(z) = m = \min\limits_{x \in \Omega} u(x)$ para toda $z \in \partial U_i$ y toda $i \in I$

c) Para toda $i \in I$, existe $x_i \in U_i$ tal que $u(x_i) = m$

Demostración:

Basta probar que para toda $x \in \Omega$, existe una de esos U_i que lo contiene.-

Sea $x \in \Omega$ entonces existe $r(x,u)$ tal que $\overline{B}_r \subset \Omega$ y $u(x) \geq H_u^{B_r}(x)$

Caso 1.- Si $u(x) = m$ entonces $u(y) = m$ para toda $y \in \partial B_r$ (lo probamos en la primera parte de la demostración del Teorema 6), por lo tanto tomamos $U_i = B_r$.-

Caso 2.- Si $u(x) \neq m$, de nuevo recurrimos a la poligonal que une x_0 a x y a la sucesión de puntos $x_n = \gamma(t_n)$ con $t_n \in [0,1]$ una sucesión creciente, tal que $u(x_n) = m$. (es decir la misma construcción hecho en la demostración del teorema 6)

$\lim_{n\to\infty} t_n = s = \sup_{n\in\mathbb{N}} t_n < 1$ pues $u(\gamma(1)) = u(x) \neq m$

Sea $x_s = \gamma(s)$ entonces $u(x_s) = m$ y existe $r_s(x_s, u) > 0$ tal que $u(x_s) \geq H_u^{B_{r_s}}(x_s)$

Entonces tomamos $U_i = B_{r_s}$, pues por un lado sabemos que $u(y) = m$ para toda $y \in \partial B_{r_s}$ y $x \in B_{r_s}$, de no ser así habría un punto $z \in \partial B_{r_s}$ tal que $z = \gamma(\hat{s})$ con $\hat{s} > s$ lo cual contradice el hecho de que $\lim_{n\to\infty} t_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{t_n\} = s$..

Por lo tanto hemos probado que para toda $x \in \Omega$ existe U_i, que satisface las tres condiciones..

12.- La siguiente función u que definiremos pertenece a $\mathcal{H}_D(\Omega)$, y como en los ejemplos 5.iii) y 5.iv) alcanza su mínimo en un punto interior pero no es constante, además es una función no acotada..

$u : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega = B_1(0)$

Sea $z \in \partial B_1(0)$ y $x_1, x_2, \ldots$ puntos en el segmento $\overline{Oz}$ con la propiedad de que

$0 < d(0, x_1) < d(0, x_2) < \ldots < d(0, z) = 1$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = z$

Alrededor de cada x_n construimos una bola de radio ρ_n, tales que

$$B_n = B_{\rho_n}(x_n) \subset \Omega \quad y \quad B_n \cap B_m = \phi \text{ si } n \neq m$$

Sean $C_1, C_2, \ldots$ bolas con centro en $x_1, x_2, \ldots$ respectivamente y radio r_n.

donde $$r_n = \frac{\rho_n\,[1 - d(0, x_{n+1})]}{3} < \rho_n$$

entonces $C_n \subset B_n$

Para toda $x \in C_n$ la bola $B_{2r_n}(x) \subset B_n$

dado que $d(x, x_n) < r_n = \dfrac{\rho_n\,[1-d(0,x_{n+1})]}{3} < \frac{1}{3}\rho_n$

si $y \in B_{2r_n}(x)$ entonces $d(x,y) < 2r_n < \frac{2}{3}\rho_n < \rho_n$
por lo tanto $y \in B_n(x_n)$.
Es decir $B_{2r_n}(x) \subset B_n(x_n)$..

Sea $x \in C_n$, construimos $B_{d_n}(x)$ con $d_n = d(x, x_{n+1})$
entonces $B_{d_n}(x) \subset \Omega$ y $B_n \subset B_{d_n}(x)$..

Ahora definimos u de la siguiente manera

$$u(x) \begin{cases} b_n\,[r_n - d(x, x_n)] & \text{si } x \in C_n \\ 0 & \text{si } x \in \Omega - \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \end{cases}$$

Donde r_n, d_n son los radio definidos arriba.
y b_n la escogemos como:

$b_1 = 1$

$b_2 > 2$ y tal que $b_2 \geqslant \frac{1}{2\pi d_1} \int_{\partial B_{d_1}(x^0)} u_2(y)\, d\sigma(y)$

$$\text{donde} \quad u_2(y) = \begin{cases} b_2\left[r^2 - d(y, x_2)\right] & \text{si } y \in C_2 \\ 0 & \text{si } y \notin C_2 \end{cases}$$

y la elección de b_2 no depende del punto $x^0 \in C_1$ escogido como centro de $B_{d_1}(x^0)$, sobre cuya frontera se promedia u_2.-

Continuamos de tal manera que

i) $b_n > n$

ii) $b_n \geqslant \frac{1}{2\pi d_{n-1}} \int_{\partial B_{d_{n-1}}(x^0)} u_n(y)\, d\sigma(y)$

$$u_n(y) = \begin{cases} b_n\left[r_n - d(y, x_n)\right] & \text{si } y \in C_n \\ 0 & \text{si } y \notin C_n \end{cases}$$

La elección resulta independiente del punto $x^0 \in C_{n-1}$

Así definida la función u, es idénticamente cero en $\Omega - \overline{\bigcup_{n=1} C_n}$ por lo que es continua ahí. En cada C_i u también es continua y si $x \in \partial C_i$, $y \in C_i$ tenemos que

$$\lim_{y \to x} u(y) = \lim_{y \to x} \left(b_i\left[r_i - d(y, x_i)\right]\right) = 0$$

Por lo tanto u es continua en Ω.-

Ahora, $u(x) \geq 0$ para toda $x \in \Omega$, pues

$u(x)=0$ si $x \in \Omega - \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ y si $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

$u(x) = b_n [r_n - d(x, x_n)] > 0$ dado que $r_n > d(x, x_n)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.-

Solo falta probar que $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}}(\Omega)$.

Si $x \in \Omega - \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n} = A$, A es abierto, entonces existe una bola $\overline{B_r(x)} \subset A$, de ahí que

$$\frac{1}{\sigma_n(r)} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, d\sigma(y) = 0 = u(x) = H_u^r(x)$$

Si $x \in \partial C_n$ para alguna n, escogemos la bola $B_{2r_n}(x')$ con $x' \in C_n$, sabemos que $\overline{C}_n \subset B_{2r_n}(x') \subset B_n$ entonces $u(y)=0$ para toda $y \in \partial B_{2r_n}(x')$ por lo que

$$u(x) = 0 = H_u^{2r_n}(x)$$

Si $x \in C_n$ para alguna n, nos fijamos en $\partial B_{2r_n}(x)$ y $\partial B_{d_n}(x')$ donde $x' \in C_n$, $d_n = d(x, x_{n+1})$

$\partial B_{2r_n}(x) \subset B_{d_n}(x')$ por lo tanto

$$\frac{1}{\sigma_n(r)} \int_{\partial B_{2r_n}(x')} u(y)\, d\sigma(y) = 0 \quad y \quad \frac{1}{\sigma_n(r)} \int_{\partial B_{d_n}(x)} u(y)\, d\sigma(y) \leq b_{n+1} ,$$

entonces $\quad 0 < u(x) < b_{n+1}$

Ahora tomamos bolas con centro en x y radio η tales que $2r_n < \eta < d_n$ y para toda η $B_\eta(x) \subset \Omega$, el promedio de los valores de u sobre $\partial B_\eta(x)$ varía continuamente, entonces existe un $\eta^* \in (2r_n, d_n)$ tal que.

$$u(x) = H_u^{\eta^*}(x)$$

Por lo tanto $u \in \mathcal{H}_\beta(\Omega)$.-

13.- En en teorema 6, la condición de ser continua en $\bar{\Omega}$ puede debilitarse.

Teorema: Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ $u \in \mathcal{S}_\beta(\Omega)$, si u está acotada inferiormente en Ω y

$$\liminf_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} u(x) \geq a \quad \text{para toda } y \in \partial\Omega$$

entonces $u(x) \geq a$ para toda $x \in \Omega$

Demostración:

Sea

$$\hat{u}(z) = \begin{cases} \liminf\limits_{\substack{x \to z \\ x \in \Omega}} u(x) & \text{si } z \in \partial\Omega \\ u(z) & \text{si } z \in \Omega \end{cases}$$

$\hat{u}$ es semicontinua inferiormente en $\bar{\Omega}$ que es compacto, por lo tanto $\hat{u}$ alcanza su mínimo en $\overline{\Omega}$.

Si $\hat{u}$ alcanza el mínimo m en $\partial\Omega$, ya acabamos pues eso quiere decir que existe $y_0 \in \partial\Omega$ tal que

$$m = \hat{u}(y_0) = \liminf_{\substack{x \to y_0 \\ x \in \Omega}} u(x) \geq a$$

entonces $m \geq a$ y por lo tanto $u(x) \geq a \quad \forall x \in \Omega$

Si u alcanza el mínimo en $x_0 \in \Omega$, basta demostrar el siguiente Lema.

Lema: Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ $u \in \mathcal{S}_D(\Omega)$ acotada inferiormente y existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \min_{x \in \Omega} u(x) = m$

entonces existe $r > 0$ tal que $u(x) = m$ para toda $x \in \partial B_r$ (donde $x_0 \in B_r$)

A partir de este Lema y el procedimiento de la poligonal, podemos construir una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $x_n \in \Omega$ tal que $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} y$ para cada $y \in \partial\Omega$, y además $u(x_n) = m$

entonces $\liminf_{n \to \infty} u(x_n) = m \geq a$

por lo tanto $u(x) \geq a$ para toda $x \in \Omega$

14.- *Lema:* Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ $u \in \mathcal{S}_p(\Omega)$ acotada inferiormente y existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \min\limits_{x \in \Omega} u(x) = m$

entonces existe $r > 0$ tal que $u(x) = m$ para toda $x \in \partial B_r$, donde $x_0 \in B_r$ y $\overline{B_r} \subset \Omega$

demostración:

Dado que $u \in \mathcal{S}_p(\Omega)$, para $x_0 \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $u(x_0) \geq H_u^{B_r}(x_0)$ $(\overline{B_r} \subset \Omega)$.
entonces

$$m = u(x_0) \geq H_u^{B_r}(x_0) = \frac{1}{\sigma_n(r)} \int_{\partial B_r} u(y)\, d\sigma(y)$$

$H_u^{B_r}(x_0) \geq H_m^{B_r}(x_0) = m$ por lo tanto

$$H_{u-m}^{B_r}(x_0) = 0 = \frac{1}{\sigma_n(r)} \int_{\partial B_r} (u-m)\, d\sigma(y) = 0$$

por lo tanto $u - m = 0$ casi seguramente en ∂B_r
entonces $u \equiv m$ en ∂B_r.-

En el teorema anterior (13), puede debilitarse la hipótesis de que $\liminf\limits_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} u(x) \geq \alpha$ para toda $y \in \partial\Omega$

y solo pedir que se cumpla en $\partial\Omega - Z$, donde Z es un CONJUNTO POLAR.-

El concepto de conjunto polar tiene importancia en Teoría del Potencial debido a que juega el papel de conjunto de medida cero, en el sentido de que si alguna propiedad vale salvo en un conjunto polar podemos concluir en general los mismos resultados que en el caso en que la propiedad fuera válida en todo el espacio (ej, Principio del mínimo, problema de Dirichlet etc, ...)

15.- Definición: Si $Z \subset U$, abierto de $\mathbb{R}^n$, decimos que Z es POLAR (en U) si existe una función $v: U \to \mathbb{R}^*$ sobrearmónica en U tal que $v(x) = +\infty$ para cada $x \in Z$

16.- Ejemplos y propiedades de Conjunto Polar

a) Sea x_0 un punto fijo de $\mathbb{R}^n$, entonces $Z = \{x_0\}$ es polar en todo abierto U de $\mathbb{R}^n$ que lo contenga.-

La función armónica fundamental con polo x_0 satisface las condiciones

b) Todo subconjunto Z' de un conjunto polar Z en U es polar en U

c) Si Z es polar en U, $m(Z) = 0$ (m = medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$)

Esto es consecuencia de las propiedades de integrabilidad de una función sobrearmónica (v sobrearmónica en U entonces v es finita m-casi dondequiera)

d) Si Z es polar en U y B es una bola cuya cerradura está contenida en U, entonces la medida superficial σ_B de $Z \cap \partial B$ es cero

En efecto, sabemos que si v es sobrearmónica en U y $\bar{B} \subset U$ la función

$$v' = \begin{cases} v & \text{en} \quad U - B \\ I_v^B & \text{en} \quad B \end{cases} \qquad v' \leq v \text{ en } U$$

es armónica en B y sobrearmónica en U.

Existe $x \in B$ tal que $v(x) < +\infty$ es decir $I_v^B(x) \leq v(x) < +\infty$. Entonces I_v^B es finita en B y $\sigma(Z \cap \partial B) = 0$

Ahora reescribimos el Teorema 13.-

17.- Teorema:

Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{S}_0(\Omega)$, si u está acotada inferiormente en Ω y

$$\liminf_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} u(x) \geq a \quad \text{para toda } y \in \partial\Omega - Z$$

Z un conjunto polar

entonces $\hat{u}(x) \geq a$ para toda $x \in \Omega$

donde
$$\hat{u}(z) = \begin{cases} \liminf\limits_{\substack{x \to z \\ x \in \Omega}} u(x) & \text{si } z \in \partial\Omega \\ u(z) & \text{si } z \in \Omega \end{cases}$$

demostración:

Dado que Z es un conjunto polar, existe una función sobrearmónica v en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$v(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in Z \\ < +\infty & \text{si } x \notin Z \end{cases}$$

Como $\overline{\Omega}$ es un compacto y v es s.c.i sabemos que v alcanza su mínimo m en $\overline{\Omega}$, $m > -\infty$.

Entonces $v - m$ sigue siendo sobrearmónica en $\mathbb{R}^n$ y

$$(v-m)(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in Z \\ < +\infty & \text{si } x \notin Z \end{cases}$$

entonces $\liminf\limits_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} \{u(x) + v(x)\} \geq a + m$ para todo $y \in \partial\Omega$

por el Teorema 13 tenemos que

$\widehat{u+v} \geq a+m$ para toda $x \in \Omega$

donde $$(\widehat{u+v})(z) = \begin{cases} \liminf\limits_{\substack{x \to z \\ x \in \Omega}} (u+v)(z) & \text{si } z \in \partial\Omega \\ (u+v)(z) & \text{si } z \in \Omega \end{cases}$$

Si se toma $\frac{1}{n} v \in \mathcal{S}(\Omega)$, tenemos que

$(\widehat{u + \frac{1}{n} v})(x) \geq a + \frac{m}{n}$ para toda $x \in \Omega$

Cuando $n \to \infty$ $u \geq a$ para toda $x \in \Omega$

Ahora trataremos de encontrar condiciones suficientes para que una función débilmente armónica sea armónica..

18.- Teorema: Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ $u \in \mathcal{H}_D(\Omega)$, u continua en $\overline{\Omega}$

Si existe una función $v \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} \{u(x) - v(x)\} = 0 \quad \text{para toda } y \in \partial\Omega$$

entonces u es armónica..-

Demostración:

Dado que $v \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces v es continua en Ω. Se puede considerar que

$$v(y) = u(y) \quad \text{para toda } y \in \partial\Omega$$

entonces

$$u - v \text{ es continua en } \overline{\Omega} \quad \ldots (A)$$

$$u - v \equiv 0 \text{ para toda } y \in \partial\Omega \quad \ldots (B)$$

y $u(x) - v(x) \geq H_u^{Br}(x) - H_v^{Br}(x)$ para alguna $r > 0$

por lo tanto $(u-v)(x) \geq H_{u-v}^{Br}(x)$ " " "

entonces $u - v \in \mathcal{S}_D(\Omega)$

por el Teorema 6 $u-v$ alcanza el mínimo en $\partial\Omega$, de aquí que $u - v \equiv 0$ en Ω

es decir $u \equiv v$ en Ω

De manera análoga: $u - v \in \mathcal{J}(\Omega)$, se prueba que $u-v$ alcanza el máximo en la $\partial\Omega$ entonces el máximo es 0. entonces $u - v \equiv 0$ en Ω.-

Ambas cotas son cero, entonces $u - v \equiv 0$ en Ω, es decir $u \equiv v$ en Ω, por lo tanto u es armónica en Ω.-

Apéndice I : Coordenodas Esféricas *

Muchas de las funciones que nos interesan, son funciones las cuales solo dependen de la distancia al origen. Para tales funciones resulta más útil usar coordenadas esféricas que rectangulares.-

Las coordenadas esféricos (θ, r) del punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, están definidas como sigue: si $r = \|x\| \neq 0$ entonces

$$\theta = \left(\frac{x_1}{r}, \ldots, \frac{x_n}{r}\right)$$

es un punto de la esfera unitaria $\partial B_r(0)$, con radio r y centro en el origen $0 \in \mathbb{R}^n$. Las coordenadas esféricos del 0 es la pareja $(0,0)$.-

La transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas es esencialmente la transformación:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}, r) \quad \ldots (1)$$

donde

$$\theta_1 = \frac{x_1}{r}$$

$$\theta_2 = \frac{x_2}{r}$$

$$\vdots$$

$$\theta_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{r}$$

$$r = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

y $\theta_n = \frac{x_n}{r}$ es el coseno de el ángulo entre x y el vector $(0, \ldots, 1)$.

$$\theta_n = (1 - \theta_1^2 - \theta_2^2 - \ldots - \theta_{n-1}^2)^{1/2}$$

(*) Ver [4] pags 3, 4, 5

El Jacobiano de la transformación (1) es:

$$\left|\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}, r)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial r} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial r} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \theta_j} = \frac{\partial r\theta_i}{\partial \theta_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ r & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{cuando } i, j = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial r} = \theta_i \qquad \text{donde, } i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial \theta_j} = -\frac{r\theta_i}{\theta_n} \qquad \text{donde } j = 1, \ldots, n-1$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial r} = \theta_n = \left(1 - \theta_1^2 - \ldots - \theta_{n-1}^2\right)^{1/2}$$

de donde se obtiene que:

$$\left|\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}, r)}\right| = \frac{r^{n-1}}{\left(1 - \theta_1^2 - \theta_2^2 - \ldots - \theta_{n-1}^2\right)^{1/2}} = \frac{r^{n-1}}{|\theta_n|}$$

Si $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\rho > 0$, entonces $\partial B_\rho(y)$ es la esfera de radio ρ y centro en y, definida por

$$(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 = \rho^2$$

Sea Σ un conjunto de Borel contenido en el hemisferio superior de la esfera $\partial B_\rho(y)$

$$\Sigma \subset \partial B_\rho(y) \cap \{(x_1,\dots,x_n) / x_n - y_n \geq 0\}$$

Sea Σ_n la proyección de Σ sobre el subespacio $\{(x_1,\dots,x_n) / x_n = 0\}$; esto es
$\Sigma_n = \{(x_1,\dots,x_{n-1},0) / (x_1,x_2,\dots,x_n) \in \Sigma\}$

Para cada $x \in \partial B_\rho(y)$, denotamos $\gamma = \gamma(x)$ al ángulo entre el "eje x_n" y la normal exterior a $\partial B_\rho(y)$, entonces

$$\sec\gamma = \frac{1}{\cos\gamma} = \frac{\rho}{x_n - y_n} \qquad y$$

$$\sigma(\Sigma) = \int_{\Sigma_n}\cdots\int \sec\gamma \; dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1}$$

representa el área de Σ. Si Σ está contenida en el hemisferio inferior, su área se calcula con la misma integral, donde
$\sec\gamma = -\dfrac{\rho}{x_n - y_n}$

La integral de una función Borel medible definida sobre $\partial B_\rho(y)$ relativa a la medida superficial σ, la denotamos por

$$\int_{\partial B_\rho(0)} f(x)\, d\sigma(x)$$

Considere una función f con dominio en $\mathbb{R}^n$ y valores en $\mathbb{R}^*$. Cuando f puede ser considerada como una función de las coordenadas esféricas, la denotaremos por $f(\theta, r)$

Suponga que f es integrable sobre $\overline{B_\rho(0)}$. Entonces la integral de f sobre $\overline{B_\rho(0)}$ puede ser evaluada usando coordenadas esféricos como sigue:

$$\int_{\bar{B}_\rho(0)} f(x)\,dx = \int_0^\rho \int \cdots \int_{\|\theta\|=1} f(\theta, r) \frac{r^{n-1}}{|\theta_n|}\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}\, dr$$

$$= \int_0^\rho r^{n-1} \left(\int_{\|\theta\|=1} f(\theta, r)\, d\sigma(\theta) \right) dr$$

El volumen de una bola de radio ρ es:

$$V_n(\rho) = \int \cdots \int_{\|x\| \leq \rho} dx = \rho^n V_n(1)$$

y el área de la esfera de radio ρ es;

$$\sigma_n(\rho) = 2 \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 < \rho^2} \frac{\rho}{(\rho^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2)^{1/2}}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

$$= \rho^{n-1} \sigma_n(1)$$

el factor 2 es necesario porque la integral solo representa el área del hemisferio superior.-

Solo falta calcular $V_n(1)$ y $\sigma_n(1)$..

$$V_n(1) = \int_0^1 r^{n-1}\left[\int_{\|\theta\|=1} \cdot\, d\sigma(\theta)\right] dr$$

$$= \int_0^1 r^{n-1}\sigma_n(1)\, dr = \frac{r^n}{n}\sigma_n(1)\Big/_0^1 = \frac{\sigma_n(1)}{n}$$

y

$$\sigma_n(1) = 2\int_{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2\le 1}\cdots\int \frac{1}{(1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2)^{1/2}}\, dx_1\dots dx_{n-1}$$

$$= 2\int_{x_1^2+\dots+x_{n-2}^2\le 1}\cdots\int\left[\int_{-(1-x_1^2-\dots-x_{n-2}^2)^{1/2}}^{+(1-x_1^2-\dots-x_{n-2}^2)^{1/2}} \frac{1}{(1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2)^{1/2}}\, dx_{n-1}\right]$$

$$\times\, dx_1\dots dx_{n-2}$$

$$= 2\int_{x_1^2+\dots+x_{n-2}^2\le 1}\int \pi\, dx_1\dots dx_{n-2} = 2\pi\, V_{n-2}(1)$$

Entonces $V_n(1) = \dfrac{\sigma_n(1)}{n}$ y $\sigma_n(1) = 2\pi V_{n-2}(1)$

Usando estos dos resultados y resultados elementales sobre círculos y esferas, obtenemos

$$\sigma_n(1) = \begin{cases} \dfrac{\pi^{n/2}\, n}{(n/2)!} & \text{si } n \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{2^{(n+1)/2}\,\pi^{(n-1)/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)} & \text{si } n \text{ es impar y } n>1 \end{cases}$$

Apéndice II (Ver [4] pag 6 y 7)

1.- Definición: Sea $v: \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función definida en el abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Cuyas funciones componentes v_j tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una vecindad de $\bar{\Omega}$.

La divergencia de v está definida por

$$\operatorname{div} v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

Si $\vec{n}(x)$ es el vector normal unitario exterior a la superficie $\partial\Omega$ en el punto $x \in \partial\Omega$.

2.- Teorema de la divergencia

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v \, dx = \int_{\partial\Omega} (v, \vec{n}) \, d\sigma$$

3.- Definición: Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función definida en la región Ω de $\mathbb{R}^n$, Si u tiene derivadas parciales continuas de segundo orden.

El Laplaciano de u, Δu, está definido por

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

El gradiente de u está definido por

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

Sea $v: \Omega \to \mathbb{R}$ entonces

$$u \operatorname{grad} v = \left(u \frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, u \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)$$

y

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = u \Delta v + (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)$$

A partir del Teorema de Divergencia tenemos que:

$$\int_\Omega u \Delta v \, dx + \int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) \, dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} (u \operatorname{grad} v \cdot \bar{n}) \, d\sigma$$

$$= \int_{\partial\Omega} u D_n v \, d\sigma$$

dado que $u \operatorname{grad} v \cdot \bar{n} = u(\operatorname{grad} v \cdot \bar{n})$ y el producto interior $\operatorname{grad} v \cdot \bar{n}$ es precisamente la derivada direccional $D_{\bar{n}} v$ de v en la dirección $\bar{n}$.

Intercambiando u y v, y restando obtenemos

4.- Igualdad de Green

$$\int_\Omega (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} (u D_{\bar{n}} v - v D_{\bar{n}} u) \, d\sigma$$

(*) 5.- Teorema: Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función definida en la región Ω. Sea $y \in \Omega$ y $\rho > 0$ tal que $\overline{B_\rho(y)} \subset \Omega$. Si u tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en Ω, entonces

(i) Para $n = 2$ y $x \in B_\rho(y)$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_\rho(y)} \left[(-\log r) D_n u - u D_n(-\log r) \right] d\sigma(z)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{B_\rho(y)} \Delta u \, (-\log r) \, dz$$

(ii) para $n \geq 3$ $x \in B_\rho(y)$

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n(1)(n-2)} \int_{\partial B_\rho(y)} \left(r^{-n+2} D_n u - u D_n r^{-n+2} \right) d\sigma(z)$$

$$- \frac{1}{\sigma_n(1)(n-2)} \int_{B_\rho(y)} \Delta u \cdot r^{-n+2} \, dz$$

donde $r = \| x - z \|$ $\quad z \in \overline{B_\rho(y)}$

Demostración:

(i) Sea $x \in B_\rho(y)$ y sea $v(z) = -\log \|x - z\| = -\log r$ para $z \neq x$. Entonces v es armónica en $\mathbb{R}^2 - \{x\}$. Escoja $\delta > 0$ tal que $\overline{B_\delta(x)} \subset B_\rho(y)$ y sea

(*) Ver [4] pags 10 y 11

D el conjunto abierto $B_\rho(y) - \overline{B_\delta(x)}$. Por la igualdad de Green

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)\,dz = \int_{\partial D} (u D_n v - v D_n u)\,d\sigma(z)$$

Dado que v es armónica ($\Delta v = 0$) y

$$\partial D = \partial B_\rho(y) \cup \partial B_\delta(x)$$

$$-\int_D v\Delta u\,dz = \int_{\partial B_\rho(y)} (u D_n v - v D_n u)\,d\sigma(z)$$

$$- \int_{\partial B_\delta(x)} (u D_n v - v D_n u)\,d\sigma(z) \quad \ldots (a)$$

El signo menos en la parte derecha de la igualdad corresponde al hecho de que la normal exterior de ∂D en un punto de $\partial B_\delta(x)$ es de sentido contrario a la normal exterior para $\partial B_\delta(x)$.

En la ecuación (a) haremos que $\delta \to 0$, para demostrar que

$$\lim_{\delta \to 0} \int_D v\Delta u\,dz = \int_{B_\rho(y)} v\Delta u\,dz \quad \ldots (b)$$

basta con probar que v es integrable en $B_\rho(y)$ dado que Δu está acotada en $B_\rho(y)$

Transformando a coordenadas esféricas relativas al polo x para $\delta < 1$

$$\int_{B_\delta(x)} |v|\, dz \leq 2\pi \int_0^\delta r \log \frac{1}{r}\, dr$$

Dado que $\lim_{r \to 0} r \log \frac{1}{r} = 0$, la función $v \Delta u$ es integrable en $B_\delta(x)$. Dado que $v \Delta u$ es integrable en D, es integrable en $B_\rho(y)$ y (b) se cumple. La primera integral en (a) no depende de δ, por lo que solo tenemos que considerar la segunda.

Dado que $|D_n u| = |n \cdot \operatorname{grad} u| \leq \|n\| \|\operatorname{grad} u\|$
$= \|\operatorname{grad} u\| = \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$ y

las $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ estan acotadas en $B_\rho(y)$, por lo tanto

$D_n u$ está acotado en $\partial B_\delta(x)$ por alguna constante m.

Para δ pequeña

$$\left| \int_{\partial B_\delta(x)} v\, D_n u\, d\sigma(z) \right| \leq m \int_{\partial B_\delta(x)} \log \frac{1}{r}\, d\sigma(z) = 2\pi m \delta \log \frac{1}{\delta}$$

Pero $\delta \log \frac{1}{\delta} \to 0$ como $\delta \to 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\partial B_\delta(x)} v\, D_n u\, d\sigma(z) = 0$$

Ahora consideremos: $\lim_{\delta \to 0} \int_{\partial B_\delta(x)} u\, D_n v\, d\sigma(z)$

$D_n v(z) = -r^{-1}$, ya que $v(z) = -\log r$ y la derivada normal de v es precisamente la derivada respecto a r

Entonces

$$\int_{\partial B_\delta(x)} u \, D_n v \, d\sigma(z) = -\frac{1}{\delta}\int_{\partial B_\delta(x)} u \, d\sigma(z)$$

La integral de la derecha es precisamente (-2π) veces el promedio de u sobre $\partial B_\delta(x)$, y tiene como límite $-2\pi u(x)$ cuando $\delta \to 0$

Esto muestra que

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\partial B_\delta(x)} u \, D_n v \, d\sigma(z) = -2\pi u(x)$$

Tomando el límite en (a) cuando $\delta \to 0$, obtenemos

$$-\int_{B_\rho(y)} v \, \Delta u \, dz = \int_{B_\rho(y)} (u \, D_n v - v \, D_n u) \, d\sigma(z) + 2\pi u(x)$$

$$\therefore \quad u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{B_\rho(y)} (v \, D_n u - u \, D_n v) \, d\sigma(z) - \frac{1}{2\pi}\int_{B_\rho(y)} v \, \Delta u \, dz$$

La demostración de (ii) es básicamente la misma, con $v(z)$ reemplazada por $v(z) = \|x - z\|^{-n+2}$

Bibliografía:

[1] Briseño, Luis; Caballero, Ma. Emilia; Bricio, Diego
Probabilidad y Potencial (fascículo III)
Armonicidad en Teoría Clásica del Potencial
Comunicaciones Internas No. 2, 1981
Departamento de Matemáticas, Fac. de Ciencias
UNAM

[2] Caballero, Ma. Emilia; Espinoza, Ramón
Funciones Armónicas
Comunicación Interna No. 2 1983
Departamento de Matemáticas, Fac. de Ciencias
UNAM

[3] Courant, R.; Hilbert, D.
Methods of mathematical Physics
Vol II
Interscience N.Y. 1962

[4] Helms, L.L.
Introduction to Potential Theory
Pure and Applied Mathematics Vol. XXII
Robert E. Krieger Publishing Company
Huntington, New York, 1975

[5] Markushevich, A
Teoría de las funciones Analíticas TOMO I
Editorial MIR (Moscú)

[6] Kellog, O. D.
Converses of Gauss' Theoren on the Arithmetic Mean

[7] Kellog, O. D.
Foundations of Potential Theory
Dover Publications, Inc. New York