2 ej.
6

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ALGUNAS PROPIEDADES SOBRE CLASES TTF.

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

Rogelio Fernández Alonso González

México, D. F. Julio de 1986

INDICE

INTRODUCCION

El objetivo central de este trabajo es presentar, como el título lo dice, algunas propiedades sobre clases TTF con respecto a un anillo, tomando como base principalmente la correspondencia que existe entre éstas y los ideales bilaterales idempotentes del anillo. Siempre se hará referencia a un anillo fijo A, cuando se haga mención de las categorías de A-módulos izquierdos y de A-módulos derechos (denotadas por A-mod y mod-A, respectivamente) o de ideales izquierdos, derechos o bilaterales.

Para llegar al objetivo mencionado anteriormente se hace necesario asentar una base teórica, la cual se desarrolla en los primeros tres capítulos. En el primero se definen los conceptos de clase de torsión, clase libre de torsión y teoría de torsión. Las definiciones alternativas de este último concepto facilitan la demostración de la existencia de la correspondencia biunívoca entre éste y cada uno de los dos restantes. En el segundo capítulo se define el concepto de filtro idempotente y se establece la relación existente entre las clases de torsión hereditarias y los filtros idempotentes, para luego extender esta relación y obtener así un paralelismo entre las clases TTF y los filtros idempotentes con elemento menor. En vista de que los filtros idempotentes con elemento menor están determinados por los ideales bilaterales idempotentes del anillo, queda asociado a cada clase TTF $\mathcal{T}$, y de manera única, un ideal bilateral idempotente, denotado por $\mathcal{I}(\mathcal{T})$. En el tercer capítulo se establece una nueva correlación, ahora entre las clases de torsión y los radicales idempotentes, misma que se extiende entre las clases de torsión hereditarias y los radicales idempotentes exactos izquierdos.

Ya que una clase TTF es simultáneamente una clase de torsión y una clase libre de torsión, cada clase TTF $\mathfrak{T}$ encierra implícitamente dos clases de torsión, a saber: ella misma y $L(\mathfrak{T})$. La parte final del capítulo tres aclara la constitución de los radicales idempotentes asociados a éstas, los cuales a su vez tienen mucho que ver con el ideal $\mathfrak{I}(\mathfrak{T})$.

Es en el capítulo cuarto donde se presentan ciertas propiedades sobre clases TTF, las cuales son reflejo de otras propiedades sobre sus ideales bilaterales idempotentes asociados. Así, dadas dos clases TTF $\mathfrak{T}$ y $\mathfrak{F}$, se encuentran condiciones necesarias y suficientes sobre $\mathfrak{I}(\mathfrak{T})$ y $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ para que $(\mathfrak{T}, \mathfrak{F})$ sea una teoría de torsión. Este resultado servirá de trampolín para concluir que, dada una clase TTF $\mathfrak{T}$, se tiene $L(\mathfrak{T}) = R(\mathfrak{T})$ (o equivalentemente, $L(\mathfrak{T})$ y $R(\mathfrak{T})$ son ambas clases TTF) si y sólo si $\mathfrak{I}(\mathfrak{T})$ está generado por un elemento idempotente central del anillo. Posteriormente, dada una clase TTF $\mathfrak{T}$, se encuentran condiciones equivalentes a que $L(\mathfrak{T})$ sea una clase de torsión hereditaria, e inclusive una clase TTF; es interesante que dichas condiciones se refieran a ciertas propiedades del anillo $A/\mathfrak{I}(\mathfrak{T})$ como A-módulo izquierdo o derecho. Dichos resultados son precisamente los que motivan el contenido del capítulo cinco. Básicamente se presentan en él dos aplicaciones a la teoría general de módulos. La primera de ellas nos dice, dado un ideal bilateral I de A, cuándo un A/I-módulo izquierdo proyectivo, inyectivo o plano, lo sigue siendo considerándolo ahora como A-módulo izquierdo. La segunda aplicación consiste de una serie de equivalencias que se refieren a módulos proyectivos y generadores con respecto a los anillos A y A/I, donde I es un ideal bilateral de A.

Mi más sincero agradecimiento para el Dr. Francisco Raggi Cárdenas, quien me asesoró en este trabajo de tesis. Resulta de más decir que sus enseñanzas han sido, y creo firmemente que lo seguirán siendo, parte esencial de mi formación matemática.

CAPITULO I

TEORIAS DE TORSION, CLASES DE TORSION Y CLASES LIBRES DE TORSION.

1.1. Definición. Sea $\mathcal{C}$ una clase en A-mod.

1) $\mathcal{C}$ es cerrada bajo monomorfismos si para cada sucesión exacta $0 \to N \to M$ con $M \in \mathcal{C}$ se tiene $N \in \mathcal{C}$.

2) $\mathcal{C}$ es cerrada bajo epimorfismos si para cada sucesión exacta $M \to L \to 0$ con $M \in \mathcal{C}$ se tiene $L \in \mathcal{C}$.

3) $\mathcal{C}$ es cerrada bajo extensiones si para cada sucesión exacta $0 \to N \to M \to L \to 0$ con $N, L \in \mathcal{C}$ se tiene $M \in \mathcal{C}$.

4) $\mathcal{C}$ es cerrada bajo sumas directas si para cada familia $\{M_\alpha\}_\alpha$ contenida en $\mathcal{C}$ se tiene $\bigoplus_\alpha M_\alpha \in \mathcal{C}$.

De esto resulta evidente cómo definir una clase en A-mod cerrada bajo isomorfismos o productos directos.

1.2. Definición. Una clase en A-mod es de torsión si es cerrada bajo epimorfismos, extensiones y sumas directas.

1.3. Definición. Una clase en A-mod es libre de torsión si es cerrada bajo monomorfismos, extensiones y productos directos.

1.4. Definición. Una teoría de torsión es una pareja $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$, de clases en A-mod, tal que:

i) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$.

ii) $\mathcal{T}$ es cerrada bajo epimorfismos.

iii) $\mathcal{F}$ es cerrada bajo monomorfismos.

iv) Para cada $M \in$ A-mod existe una sucesión exacta $0 \to N \to M \to L \to 0$ con $N \in \mathcal{T}$ y $L \in \mathcal{F}$.

He considerado oportuno dar la caracterización anterior de las teorías de torsión como definición, pues a mi parecer es la que más claramente generaliza la noción de torsión en grupos. La proposición siguiente proporciona otras caracterizaciones, la última de las cuales, atribuida a Dickson [4], se distingue por su simplicidad, si bien la noción original se ha escondido.

1.5. <u>Proposición</u>. Para una pareja $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ de clases en A-mod son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es una teoría de torsión.

b) i) Para cada $T\in\mathcal{T}$ y cada $F\in\mathcal{F}$ se tiene $Hom(T,F)=0$.

ii) $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ son cerrados bajo isomorfismos.

iii) Para cada $M\in$ A-mod existe una sucesión exacta $0\to N\to M\to L\to 0$ con $N\in\mathcal{T}$ y $L\in\mathcal{F}$.

c) i) Para cada $T\in\mathcal{T}$ y cada $F\in\mathcal{F}$ se tiene $Hom(T,F)=0$.

ii) Si $T\in$ A-mod es tal que $\forall F\in\mathcal{F}$ $Hom(T,F)=0$, entonces $T\in\mathcal{T}$.

iii) Si $F\in$ A-mod es tal que $\forall T\in\mathcal{T}$ $Hom(T,F)=0$, entonces $F\in\mathcal{F}$.

(se dice entonces que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ son completas respecto a la propiedad i)).

<u>Demostración</u>.

a) $\Rightarrow$ b):

i): Sean $T\in\mathcal{T}$ y $F\in\mathcal{F}$.

Sea $f:T\to F$

Sea $F' = \mathrm{Im} f$. Tenemos entonces las sucesiones exactas: $T \to F' \to 0$ y $0 \to F' \to F$.
Como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo epimorfismos y $\mathcal{F}$ es cerrada bajo monomorfismos se sigue que $F' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$.
Por tanto $f = 0$. Se ha probado así que $\mathrm{Hom}(T,F) = 0$.

ii): Es claro de 1.4.ii) y 1.4.iii).

iii): Es justamente 1.4.iv).

b) $\Rightarrow$ c):

i): Es justamente b).i).

ii): Sea $T \in A$-mod tal que $\forall F \in \mathcal{F}$ $\mathrm{Hom}(T,F) = 0$.
Por b.iii), tenemos una sucesión exacta $0 \to N \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} L \to 0$ con $N \in \mathcal{T}$ y $L \in \mathcal{F}$.
Así, $g = 0$; es decir, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\, g = T$.
Luego f es isomorfismo, y por b.ii), se tiene que $T \in \mathcal{T}$.

iii): Sea $F \in A$-mod tal que $\forall T \in \mathcal{T}$ $\mathrm{Hom}(T,F) = 0$.
Por b.iii), tenemos una sucesión exacta $0 \to N \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} L \to 0$ con $N \in \mathcal{T}$ y $L \in \mathcal{F}$.
Así $f = 0$, de donde $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im} f = 0$.
Por tanto g es isomorfismo, y por b.ii) se tiene que $F \in \mathcal{F}$.

c) $\Rightarrow$ a):

i): Sea $M \in \mathfrak{T} \cap \mathfrak{F}$.
Como $1_M \in Hom(M,M) = 0$, por c.i),
se tiene $M = 0$.

ii): Sea $T \xrightarrow{p} T' \to 0$ una sucesión exacta con $T \in \mathfrak{T}$.
Sea $F \in \mathfrak{F}$ y $f \in Hom(T', F)$.
Entonces $fp \in Hom(T,F) = 0$, por c.i).
Luego $f = 0$; se ha probado que $\forall F \in \mathfrak{F}$ $Hom(T',F) = 0$
Por c.ii) se tiene $T' \in \mathfrak{T}$.

iii): Sea $0 \to F' \xrightarrow{i} F$ una sucesión exacta con $F \in \mathfrak{F}$.
Sea $T \in \mathfrak{T}$ y $f \in Hom(T, F')$.
Entonces $if \in Hom(T,F) = 0$, por c.i).
Luego $f = 0$. Así, $\forall T \in \mathfrak{T}$, $Hom(T,F') = 0$.
Por c.iii) se tiene $F' \in \mathfrak{F}$.

iv): Sea $\{T_\alpha\}_\alpha$ una familia contenida en $\mathfrak{T}$.
Sea $F \in \mathfrak{F}$.
Tenemos: $Hom(\bigoplus_\alpha T_\alpha, F) \cong \prod_\alpha Hom(T_\alpha, F) = 0$, por c.i).
Luego, por c.ii), $\bigoplus_\alpha T_\alpha \in \mathfrak{T}$.
Se ha probado así que $\mathfrak{T}$ es cerrada bajo sumas directas.

Sea $0 \to T_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} T_2 \to 0$ una sucesión exacta
con $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$. Sea $F \in \mathcal{F}$.
Sea $h \in \mathrm{Hom}(M,F)$.
Tenemos $hf \in \mathrm{Hom}(T_1,F)=0$.
Luego existe $k \in \mathrm{Hom}(T_2,F)$ tal que $kg=h$.
Pero $\mathrm{Hom}(T_2,F)=0$. Así $h=kg=0$.
Por tanto, $\forall F \in \mathcal{F}$ $\mathrm{Hom}(M,F)=0$.
Por c.ii) tenemos $M \in \mathcal{T}$.
Se ha probado que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones.

Sea $M \in A\text{-mod}$.
Sea $t(M) = \sum \{N \leq M : N \in \mathcal{T}\}$.
Tenemos entonces una sucesión exacta
$\bigoplus \{N \leq M : N \in \mathcal{T}\} \longrightarrow t(M) \to 0$.
Por otro lado, se ha probado ya que $\mathcal{T}$ es cerrada
bajo sumas directas y epimorfismos.
Así, $t(M) \in \mathcal{T}$.

Sea $T \in \mathcal{T}$ y $f \in \mathrm{Hom}(T, M/t(M))$.
Como $\mathrm{Im} f \leq M/t(M)$, existe $H \leq M$ tal que
$t(M) \leq H$ y $\mathrm{Im} f = H/t(M)$.
Por otro lado, tenemos una sucesión exacta
$T \to \mathrm{Im} f \to 0$. Como $T \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ es cerrada
bajo epimorfismos entonces $\mathrm{Im} f \in \mathcal{T}$.
Además, de la sucesión exacta
$0 \to t(M) \to H \to H/t(M) \to 0$, con $t(M)$,
$H/t(M) = \mathrm{Im} f \in \mathcal{T}$, y del hecho de que $\mathcal{T}$ es

cerrada bajo extensiones se concluye que $H \in \mathfrak{T}$.
Por tanto $t(M) \leq H$. Así $t(M) = H$ y $f = 0$.
Se ha probado que $\forall T \in \mathfrak{T}$ $\mathrm{Hom}(T, M/t(M)) = 0$,
y por c.iii) se tiene $M/t(M) \in \mathfrak{F}$.
Así tenemos la sucesión exacta
$$0 \to t(M) \to M \to M/t(M) \to 0$$
con $t(M) \in \mathfrak{T}$ y $M/t(M) \in \mathfrak{F}$.

+.

1.6. <u>Definición</u>. Sea $\mathcal{C}$ una clase en A-mod. Definimos las siguientes clases en A-mod:

$L(\mathcal{C}) = \{ M \in A\text{-mod} : \forall N \in \mathcal{C} \ \mathrm{Hom}(M,N) = 0 \}$

$R(\mathcal{C}) = \{ N \in A\text{-mod} : \forall M \in \mathcal{C} \ \mathrm{Hom}(M,N) = 0 \}$

1.7. <u>Observación</u>. Usando la definición anterior, el inciso c) de la proposición 1.5 afirma que $\mathfrak{T} = L(\mathfrak{F})$ y $\mathfrak{F} = R(\mathfrak{T})$.

La siguiente proposición liga los conceptos de teoría de torsión, clase de torsión y clase libre de torsión.

1.8. <u>Proposición</u>. 1) Si $\mathfrak{T}$ es una clase de torsión entonces $(\mathfrak{T}, R(\mathfrak{T}))$ es una teoría de torsión.

2) Si $\mathfrak{F}$ es una clase libre de torsión entonces $(L(\mathfrak{F}), \mathfrak{F})$ es una teoría de torsión.

3) Si $(\mathfrak{T}, \mathfrak{F})$ es una teoría de torsión entonces $\mathfrak{T}$ es una clase de torsión y $\mathfrak{F}$ es una clase libre de torsión.

Demostración.

1): Se usará la equivalencia entre los incisos a) y b) de la proposición 1.5.

Por definición de $R(\mathcal{T})$ tenemos $\forall T\in\mathcal{T}\ \forall F\in R(\mathcal{T})\ \mathrm{Hom}(T,F)=0$.

Como $\mathcal{T}$ es una clase de torsión, es cerrada bajo epimorfismos, y por tanto, bajo isomorfismos.

Sea $F' \xrightarrow{f} F$ un isomorfismo con $F\in R(\mathcal{T})$.

Sea $T\in\mathcal{T}$ y $g\in \mathrm{Hom}(T,F')$. Entonces $fg\in \mathrm{Hom}(T,F)=0$.

Luego $g=0$. Así, $\forall T\in\mathcal{T}\ \mathrm{Hom}(T,F')=0$, es decir, $F'\in R(\mathcal{T})$.

Se ha probado que $R(\mathcal{T})$ es cerrada bajo isomorfismos.

Sea $M\in$ A-mod.

Sea $t(M)=\sum\{N\leq M : N\in\mathcal{T}\}$.

Como en el inciso (v) de la demostración de c)$\Rightarrow$a) en la proposición 1.5., teniendo como hipótesis que $\mathcal{T}$ es una clase de torsión se prueba que $t(M)\in\mathcal{T}$ y que $M/t(M)\in R(\mathcal{T})$; además tenemos la sucesión exacta $0\to t(M)\to M\to M/t(M)\to 0$.

Se ha probado así el inciso b) de la proposición 1.5, y por tanto $(\mathcal{T}, R(\mathcal{T}))$ es una teoría de torsión.

2): Por definición de $L(\mathcal{F})$ tenemos $\forall T\in L(\mathcal{F})\ \forall F\in\mathcal{F}\ \mathrm{Hom}(T,F)=0$.

Como $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión, es cerrada bajo monomorfismos, y por tanto, bajo isomorfismos.

Sea $T \xrightarrow{f} T'$ un isomorfismo con $T\in L(\mathcal{F})$.

Sea $F\in\mathcal{F}$ y $g\in \mathrm{Hom}(T',F)$. Entonces $gf\in \mathrm{Hom}(T,F)=0$.

Luego $g=0$. Así, $\forall F\in\mathcal{F}\ \mathrm{Hom}(T',F)=0$, es decir, $T'\in L(\mathcal{F})$.

Por tanto $L(\mathcal{F})$ es cerrada bajo isomorfismos.

Sea $M\in$ A-mod.

Sea $\mathcal{S}=\{S\leq M : M/S\in\mathfrak{F}\}$ y $t'(M)=\cap\,\mathcal{S}$.
Para cada $S'\in\mathcal{S}$, sea $p_{S'}: M\longrightarrow M/S'$ la proyección canónica y $\pi_{S'}:\prod\limits_{S\in\mathcal{S}} M/S\longrightarrow M/S'$ la proyección del producto directo.

Tenemos entonces, por la propiedad universal del producto directo, el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_{S'}"'] & \prod\limits_{S\in\mathcal{S}} M/S \arrow[d, "\pi_{S'}"] \\ & M/S' \end{tikzcd}$$

y donde $t'(M)=\operatorname{Ker} f$.
Luego $M/t'(M)\cong \operatorname{Im} f\leq \prod\limits_{S\in\mathcal{S}} M/S$.

Como $\mathfrak{F}$ es cerrada bajo productos directos y monomorfismos, tenemos $M/t'(M)\in\mathfrak{F}$.
Sea $F\in\mathfrak{F}$ y $f\in \operatorname{Hom}(t'(M),F)$. Sea $H=\operatorname{Ker} f$.
Entonces $t'(M)/H\cong \operatorname{Im} f\leq F$. Luego $t'(M)/H\in\mathfrak{F}$.
Además, de la sucesión exacta $0\to M/t'(M)\to M/H\to t'(M)/H\to 0$ con $M/t'(M),\ t'(M)/H\in\mathfrak{F}$ y del hecho de que $\mathfrak{F}$ es cerrada bajo extensiones se concluye que $M/H\in\mathfrak{F}$, es decir, $H\in\mathcal{S}$.
Como $H\leq t'(M)$ y $t'(M)=\cap\,\mathcal{S}$, se tiene $t'(M)=H$. Así $f=0$.
Se ha probado que $\forall F\in\mathfrak{F}$ $\operatorname{Hom}(t'(M),F)=0$, es decir, $t'(M)\in L(\mathfrak{F})$.
Tenemos así la sucesión exacta $0\to t'(M)\to M\to M/t'(M)\to 0$ con $t'(M)\in L(\mathfrak{F})$ y $M/t'(M)\in\mathfrak{F}$.
Se ha probado así el inciso b) de la proposición 1.5., y por tanto $(L(\mathfrak{F}),\mathfrak{F})$ es una teoría de torsión.

3): Como $(\mathfrak{T},\mathfrak{F})$ es una teoría de torsión, se sigue de la proposición 1.5. que la pareja $(\mathfrak{T},\mathfrak{F})$ cumple el inciso c) de la misma, y en la demostración de c)$\Rightarrow$a) se probó que $\mathfrak{T}$ es cerrada bajo epimorfismos, sumas directas y extensiones.
Por tanto, $\mathfrak{T}$ es una clase de torsión.

También en la demostración de c)$\Rightarrow$a) en la proposición 1.5. (específicamente en el inciso iii)) se probó que $\mathfrak{F}$ es cerrada bajo monomorfismos.
Sea $\{F_\alpha\}_\alpha$ una familia contenida en $\mathfrak{F}$.
Sea $T \in \mathfrak{T}$.
Tenemos: $Hom(T, \prod_\alpha F_\alpha) \cong \prod_\alpha Hom(T, F_\alpha) = 0$.

Luego $\prod_\alpha F_\alpha \in R(\mathfrak{T}) = \mathfrak{F}$. Así, $\mathfrak{F}$ es cerrada bajo productos directos.

Sea $0 \to F_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} F_2 \to 0$ una sucesión exacta con $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$.
Sea $T \in \mathfrak{T}$ y $h \in Hom(T,M)$.
Tenemos $gh \in Hom(T,F_2) = 0$. Luego existe $k \in Hom(T,F_1)$ tal que $fk = h$. Pero $Hom(T,F_1) = 0$. Así $h = fk = 0$.
Por tanto $\forall T \in \mathfrak{T}$ $Hom(T,M) = 0$, es decir, $M \in R(\mathfrak{T}) = \mathfrak{F}$.
Así $\mathfrak{F}$ es cerrada bajo extensiones.
Se concluye entonces que $\mathfrak{F}$ es una clase libre de torsión.

+.

1.9. Corolario. 1) Hay una correspondencia biunívoca entre las clases de torsión y las teorías de torsión.

2) Hay una correspondencia biunívoca entre las clases libres de torsión y las teorías de torsión.

Demostración.

1): Llamemos A-tors a la clase de las teorías de torsión, $\mathbb{T}$ a la clase de las clases de torsión, y $\mathbb{F}$ a la clase de las clases libres de torsión. Tenemos entonces, por la proposición 1.8. dos funcionales:

$\mathbb{T} \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}}$ A-tors, definidos por: $\varphi(\mathcal{T}) = (\mathcal{T}, R(\mathcal{T}))$

$\psi(\mathcal{T},\mathcal{F}) = \mathcal{T}$,

y tales que $\psi\varphi(\mathcal{T}) = \psi(\mathcal{T}, R(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$

$\varphi\psi(\mathcal{T},\mathcal{F}) = \varphi(\mathcal{T}) = (\mathcal{T}, R(\mathcal{T})) = (\mathcal{T},\mathcal{F})$, puesto que si $(\mathcal{T},\mathcal{F}) \in$ A-tors entonces $\mathcal{F} = R(\mathcal{T})$.

2): También tenemos las funcionales:

$\mathbb{F} \underset{\psi'}{\overset{\varphi'}{\rightleftarrows}}$ A-tors, definidas por: $\varphi'(\mathcal{F}) = (L(\mathcal{F}),\mathcal{F})$

$\psi'(\mathcal{T},\mathcal{F}) = \mathcal{F}$,

y son tales que $\psi'\varphi'(\mathcal{F}) = \psi'(L(\mathcal{F}),\mathcal{F}) = \mathcal{F}$

$\varphi'\psi'(\mathcal{T},\mathcal{F}) = \varphi'(\mathcal{F}) = (L(\mathcal{F}),\mathcal{F}) = (\mathcal{T},\mathcal{F})$, pues si $(\mathcal{T},\mathcal{F}) \in$ A-tors entonces $\mathcal{T} = L(\mathcal{F})$.

+.

1.10. Corolario. 1) $\mathcal{T}$ es una clase de torsión si y sólo si $LR(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

2) $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión si y sólo si $RL(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Demostración.

1): Si $\mathfrak{T}$ es una clase de torsión entonces $(\mathfrak{T}, R(\mathfrak{T}))$ es una teoría de torsión, por la proposición 1.8. Luego, de la observación 1.7. se concluye que $LR(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}$.
Inversamente, si $LR(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}$, como también $R(\mathfrak{T}) = R(\mathfrak{T})$, la observación 1.7. nos lleva a que $(\mathfrak{T}, R(\mathfrak{T}))$ es una teoría de torsión.
Por tanto, $\mathfrak{T}$ es una clase de torsión.

2): Si $\mathfrak{F}$ es una clase libre de torsión entonces $(L(\mathfrak{F}), \mathfrak{F})$ es una teoría de torsión. Luego $RL(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$.
Si $RL(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$ entonces, tomando en cuenta que $L(\mathfrak{F}) = L(\mathfrak{F})$, $(L(\mathfrak{F}), \mathfrak{F})$ es una teoría de torsión, por la observación 1.7.
Por tanto $\mathfrak{F}$ es una clase libre de torsión.

+.

1.11. <u>Corolario</u>. Para una pareja $(\mathfrak{T}, \mathfrak{F})$ de clases en A-mod son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $(\mathfrak{T}, \mathfrak{F})$ es una teoría de torsión.

b) $R(\mathfrak{T}) = \mathfrak{F}$ y $L(\mathfrak{F}) = \mathfrak{T}$.

c) $\mathfrak{T}$ es una clase de torsión y $R(\mathfrak{T}) = \mathfrak{F}$.

d) $\mathfrak{F}$ es una clase libre de torsión y $L(\mathfrak{F}) = \mathfrak{T}$.

Demostración.

La equivalencia entre a) y b) es justamente la observación 1.7.

b) $\Leftrightarrow$ c): De b) se tiene $LR(\mathfrak{T}) = L(\mathfrak{F}) = \mathfrak{T}$. Luego, por el corolario 1.10., $\mathfrak{T}$ es una clase de torsión.
Inversamente, si $\mathfrak{T}$ es una clase de torsión y $R(\mathfrak{T}) = \mathfrak{F}$, entonces $L(\mathfrak{F}) = LR(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}$.

b) $\Leftrightarrow$ d): De b) se tiene $RL(\mathfrak{F}) = R(\mathfrak{T}) = \mathfrak{F}$. Por el corolario 1.10, se tiene que $\mathfrak{F}$ es una clase libre de torsión.
Inversamente, si $\mathfrak{F}$ es una clase libre de torsión y $L(\mathfrak{F}) = \mathfrak{T}$ entonces $R(\mathfrak{T}) = RL(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$.

+.

CAPITULO II

FILTROS IDEMPOTENTES Y CLASES TTF.

2.1. Definición. Un filtro idempotente de A es una familia no vacía $\mathcal{L}$ de ideales izquierdos de A tal que:

i) $\forall I \in \mathcal{L}\ \forall a \in A\ (I:a) \in \mathcal{L}$, donde $(I:a) = \{b \in A : ba \in I\}$.

ii) Si I, un ideal izquierdo de A, y $J \in \mathcal{L}$ son tales que $\forall a \in J\ (I:a) \in \mathcal{L}$, entonces $I \in \mathcal{L}$.

2.2. Proposición. Sea $\mathcal{L}$ un filtro idempotente de A. Entonces:

1) $A \in \mathcal{L}$.

2) $\forall I, J \in \mathcal{L}, I \cap J \in \mathcal{L}$

3) $\forall I \in \mathcal{L}\ \forall J \leq A\ (I \subset J \Rightarrow J \in \mathcal{L})$

4) $\forall I, J \in \mathcal{L}, IJ \in \mathcal{L}$.

Demostración.

1): Como $\mathcal{L}$ es una familia no vacía, existe en $\mathcal{L}$ un ideal izquierdo I de A, y entonces $A = (I:0) \in \mathcal{L}$, por 2.1. i).

2): Sean $I, J \in \mathcal{L}$. Sea $a \in I$. Entonces $(I \cap J : a) = (J:a) \in \mathcal{L}$. Así, $\forall a \in I\ (I \cap J : a) \in \mathcal{L}$, y como $I \in \mathcal{L}$, por 2.1. ii) se tiene $I \cap J \in \mathcal{L}$.

3): Sea $I \in \mathcal{L}$ y J un ideal izquierdo de A tal que $I \subset J$. Sea $a \in I$. Entonces para cualquier elemento b de A se tiene $ba \in I \subset J$, es decir $b \in (J:a)$. Por tanto $(J:a) = A \in \mathcal{L}$. Así, $\forall a \in I\ (J:a) \in \mathcal{L}$. Luego, como $I \in \mathcal{L}$, se tiene $J \in \mathcal{L}$.

4): Sean $I, J \in \mathcal{L}$. Sea $a \in J$. Entonces $\forall b \in I$, $ba \in IJ$, es decir,

$I \subset (IJ:a)$. Como $I \in \mathcal{L}$, tenemos, por el inciso 3), que $(IJ:a) \in \mathcal{L}$. Así $\forall a \in J$ $(IJ:a) \in \mathcal{L}$, con $J \in \mathcal{L}$. Por tanto $IJ \in \mathcal{L}$.

+.

2.3. <u>Proposición</u>. Si I es un ideal bilateral idempotente de A entonces $\mathcal{L}_I = \{J \leq A : I \subset J\}$ es un filtro idempotente de A con elemento menor I.

<u>Demostración</u>.

Sea $J \in \mathcal{L}_I$ y $a \in A$.
Sea $b \in I$. Entonces $ba \in I$, por ser I un ideal bilateral.
Además, como $J \in \mathcal{L}_I$ entonces $I \subset J$. Luego $ba \in J$, es decir, $b \in (J:a)$. Así $I \subset (J:a)$, es decir, $(J:a) \in \mathcal{L}_I$.

Sea $J \in \mathcal{L}_I$ y sea K un ideal izquierdo de A tal que $\forall a \in J$ $(K:a) \in \mathcal{L}_I$.
Sea $b \in I = I^2$, ya que I es idempotente. Entonces $b = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$, con $a_i, c_i \in I$, para cada $i \in \{1, \ldots n\}$.
Tenemos $c_i \in I \subset J$, pues $J \in \mathcal{L}_I$, para cada $i \in \{1, \ldots n\}$.
También $a_i \in I \subset (K:c_i)$, pues $(K:c_i) \in \mathcal{L}_I$, para cada $i \in \{1, \ldots n\}$.
Por tanto $\forall i \in \{1, \ldots n\}$ $a_i c_i \in K$; luego $b \in K$.
Se ha probado así que $I \subset K$, es decir, $K \in \mathcal{L}_I$.

El hecho de que I es el elemento menor de $\mathcal{L}_I$ es evidente.

+.

2.4. Proposición. Si $\mathcal{L}$ es un filtro idempotente de A con elemento menor I entonces I es un ideal bilateral idempotente y $\mathcal{L}=\mathcal{L}_I$.

Demostración.
Sea $a\in A$. Como $\mathcal{L}$ es un filtro idempotente y $I\in\mathcal{L}$ entonces $(I:a)\in\mathcal{L}$. Luego $I\subset(I:a)$, es decir, $Ia\subset I$. Se ha probado así que I es un ideal bilateral.
Como I es un ideal izquierdo, tenemos $I^2\subset I$. Además, como $I\in\mathcal{L}$ entonces $I^2\in\mathcal{L}$, por la proposición 2.2.4). Es decir, $I\subset I^2$. Así, I es idempotente.
Como I es el elemento menor de $\mathcal{L}$ tenemos $\forall J\in\mathcal{L}$ $I\subset J$, es decir, $\mathcal{L}\subset\mathcal{L}_I$. Por otro lado, si J es un ideal izquierdo de A tal que $I\subset J$ entonces $J\in\mathcal{L}$, pues $I\in\mathcal{L}$ y por la proposición 2.2.3). Así se tiene $\mathcal{L}=\mathcal{L}_I$.

+.

2.5. Corolario. Hay una correspondencia biunívoca entre los ideales bilaterales idempotentes de A y los filtros idempotentes de A con elemento menor.

Demostración.
Para cada filtro idempotente $\mathcal{L}$ con elemento menor, sea $\mathcal{I}(\mathcal{L})$ dicho elemento menor. La proposición 2.4. dice que $\mathcal{I}(\mathcal{L})$ es un ideal bilateral idempotente y que $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\mathcal{I}(\mathcal{L})}$.
Por otro lado, para cada ideal idempotente bilateral I, tenemos que

$\mathcal{L}_I$ es un filtro idempotente con elemento menor I, según la proposición 2.3., es decir, $I = \partial(\mathcal{L}_I)$.

$+$.

Habiendo desarrollado el concepto de filtro idempotente, se establecerá a continuación la relación existente entre los filtros idempotentes y las clases de torsión hereditarias, que en seguida se definen.

2.6. <u>Definición</u>. Una clase de torsión es hereditaria si es cerrada bajo monomorfismos.

2.7. <u>Lema</u>. Sea $\mathcal{T}$ una clase de torsión y sea $M \in A\text{-mod}$.
Si $\forall x \in M$ $\langle x \rangle \in \mathcal{T}$ entonces $M \in \mathcal{T}$.

<u>Demostración</u>.
Por la propiedad universal de la suma directa tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \langle x \rangle \arrow[r, hook, "j_x"] \arrow[d, "i_x"'] & M \\ \bigoplus\limits_{y \in M} \langle y \rangle \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $y \in M$. Entonces $f i_y(y) = j_y(y) = y$. Luego f es epimorfismo.
Por tanto, como $\forall x \in M$ $\langle x \rangle \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas y epimorfismos, entonces $M \in \mathcal{T}$.

$+$.

2.8. <u>Lema</u>. Si $M \in A$-mod entonces $\forall x \in M$ $\langle x\rangle \cong A/\mathrm{an}\,x$.

<u>Demostración</u>.

Tenemos, para cada $x \in M$, la sucesión exacta:

$0 \longrightarrow \mathrm{an}\,x \hookrightarrow A \xrightarrow{d_x} \langle x\rangle \longrightarrow 0$, donde $\forall a \in A$ $d_x(a) = ax$.

$\dagger$.

2.9. <u>Proposición</u>. Si $\mathcal{T}$ es una clase de torsión hereditaria entonces $\mathcal{L}_{\mathcal{T}} = \{J \leq A : A/J \in \mathcal{T}\}$ es un filtro idempotente.

<u>Demostración</u>.

Sean $J \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ y $a \in A$.

Consideremos los siguientes morfismos en A-mod:

$d_a : A \to A$, definido por $d_a(b) = ba$,

$i : (J:a) \to A$, la inclusión,

$p : A \to A/J$ y $q : A \to A/(J:a)$, las proyecciones canónicas.

Tenemos entonces la sucesión exacta:

$0 \to (J:a) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} A/(J:a) \longrightarrow 0$.

Sea $b \in (J:a)$. Entonces $pd_a i(b) = p(ba) = 0$, pues $ba \in J$.

Así, $pd_a i = 0$. Por tanto, existe $f \in \mathrm{Hom}(A/(J:a), A/J)$ tal que $pd_a = fq$.

Sea $b + (J:a) \in A/(J:a)$ tal que $f(b + (J:a)) = 0$.

Entonces $p(ba) = pd_a(b) = fq(b) = f(b + (J:a)) = 0$, es decir, $ba \in J$.

Luego $b + (J:a) = 0$; así f es un monomorfismo.

Tenemos entonces la sucesión exacta $0 \to A/(J:a) \xrightarrow{f} A/J$, con $A/J \in \mathcal{T}$, pues $J \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$. Como $\mathcal{T}$ es una clase de torsión hereditaria se sigue que $A/(J:a) \in \mathcal{T}$, es decir, $(J:a) \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$.

Sea I un ideal izquierdo de A y sea $J \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ tal que $\forall a \in J$ $(I:a) \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$.
Tenemos una sucesión exacta $A/J \to A/I+J \to 0$, con $A/J \in \mathcal{T}$, puesto que $J \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$. Como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo epimorfismos entonces $A/I+J \in \mathcal{T}$.
Por otro lado, sea $a + I \cap J \in J/I \cap J$.
Entonces $an(a+I\cap J) = (I \cap J : a) = (I:a)$, pues $a \in J$.
Luego $an(a+I\cap J) \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, y por tanto $\langle a+I\cap J\rangle \in \mathcal{T}$, pues por el lema 2.8., $\langle a+I\cap J\rangle \cong A/an(a+I\cap J)$.
Se ha probado que $\forall a+I\cap J \in J/I\cap J$ $\langle a+I\cap J\rangle \in \mathcal{T}$. Luego, del lema 2.7. se concluye que $J/I\cap J \in \mathcal{T}$.
Así tenemos una sucesión exacta $0 \to J/I\cap J \to A/I \to A/I+J \to 0$ con $J/I\cap J$, $A/I+J \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones entonces $A/I \in \mathcal{T}$, es decir, $I \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$.
Con ésto se ha probado que $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ es un filtro idempotente.

+.

2.10. <u>Proposición</u>. Si $\mathcal{L}$ es un filtro idempotente entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{L}} = \{M \in A\text{-mod} : \forall x \in M \ an\, x \in \mathcal{L}\}$ es una clase de torsión hereditaria.

<u>Demostración</u>.
Sea $T \xrightarrow{g} M \to 0$ una sucesión exacta con $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.

Sea $y \in M$. Como g es un epimorfismo entonces $\exists x \in T \ni g(x) = y$.
Ahora, si $b \in anx$, entonces $by = bg(x) = g(bx) = 0$. Luego $anx \subset any$.
Como $x \in T$ y $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ entonces $anx \in \mathcal{L}$, y como $\mathcal{L}$ es un filtro idempotente, por la proposición 2.2.3) tenemos $any \in \mathcal{L}$.
Así $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, y $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ es cerrada bajo epimorfismos.

Sea $\{T_\alpha\}_{\mathcal{Q}}$ una familia contenida en $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$
Sea $\varphi \in \bigoplus_{\mathcal{Q}} T_\alpha$ y digamos que $\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\} = \{\alpha \in \mathcal{Q} : \varphi(\alpha) \neq 0\}$.
Obsérvese que si $\alpha \in \mathcal{Q}$ es tal que $\varphi(\alpha) = 0$ entonces $an(\varphi(\alpha)) = A$.
Luego $an\varphi = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{Q}} an(\varphi(\alpha)) = \bigcap_{i=1}^{n} an(\varphi(\alpha_i))$.

Ahora bien, para cada $i \in \{1, \ldots n\}$ se tiene $\varphi(\alpha_i) \in T_{\alpha_i}$, con $T_{\alpha_i} \in \mathcal{T}$.
Luego $an(\varphi(\alpha_i)) \in \mathcal{L}$ para cada $i \in \{1, \ldots n\}$, y de la proposición 2.2.2) se sigue que $an\varphi \in \mathcal{L}$.
Se ha probado entonces que $\bigoplus_{\mathcal{Q}} T_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, y así, $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ es cerrada bajo sumas directas.

Sea $0 \to T_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} T_2 \to 0$ una sucesión exacta con $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$
Sea $x \in M$.
Para cada $a \in A$ tenemos: $ax \in Imf \Leftrightarrow ax \in Kerg \Leftrightarrow g(ax) = 0$,
de donde $(Imf : x) = an\, g(x) \in \mathcal{L}$, puesto que $g(x) \in T_2$ y $T_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.
Sea $a \in (Imf : x)$.
Como $T_1 \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ es cerrada bajo epimorfismos entonces $Imf \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.
Ahora, $(anx : a) = an(ax) \in \mathcal{L}$, pues $ax \in Imf$ y $Imf \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.
Se ha probado entonces que $(Imf : x) \in \mathcal{L}$ y que $\forall a \in (Imf : x)$, $(anx : a) \in \mathcal{L}$.
Como $\mathcal{L}$ es un filtro idempotente se sigue que $anx \in \mathcal{L}$.
Luego $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ y así $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ es cerrada bajo extensiones.

Sea $0 \to M \xrightarrow{f} T$ una sucesión exacta con $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.
Sea $x \in M$. Como f es un monomorfismo entonces
$\forall a \in A\ (ax = 0 \Leftrightarrow af(x) = 0)$, es decir, $\mathrm{an}\,x = \mathrm{an}\,f(x)$. Además
$\mathrm{an}\,f(x) \in \mathcal{L}$, puesto que $f(x) \in T$ y $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.
Así, $\forall x \in M$ $\mathrm{an}\,x \in \mathcal{L}$, es decir, $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.
Por tanto, $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ es una clase de torsión hereditaria.

+

2.11. <u>Corolario</u>. Hay una correspondencia biunívoca entre las clases de torsión hereditarias y los filtros idempotentes.

<u>Demostración</u>.
Llamemos $\mathcal{Th}$ a la clase de las clases de torsión hereditarias y $\mathcal{Filt}$ a la clase de los filtros idempotentes. Tenemos entonces dos funcionales:
$\mathcal{Th} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \mathcal{Filt}$ definidas por: $\Phi(\mathcal{T}) = \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ y $\Psi(\mathcal{L}) = \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.

Sea $\mathcal{T}$ una clase de torsión hereditaria. Sea $M \in \mathcal{T}$ y $x \in M$.
Como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo monomorfismos entonces $\langle x \rangle \in \mathcal{T}$. Luego, del lema 2.8 se sigue que $A/\mathrm{an}\,x \in \mathcal{T}$, es decir, $\mathrm{an}\,x \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$.
Así, $\forall x \in M$ $\mathrm{an}\,x \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, es decir, $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}_{\mathcal{T}}} = \Psi\Phi(\mathcal{T})$.
Inversamente, sea $M \in \Psi\Phi(\mathcal{T})$. Sea $x \in M$. Entonces $\mathrm{an}\,x \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ y por tanto $\langle x \rangle \cong A/\mathrm{an}\,x \in \mathcal{T}$. Por el lema 2.7 tenemos entonces $M \in \mathcal{T}$.
Así se tiene $\Psi\Phi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

Por otro lado, sea $\mathcal{L}$ un filtro idempotente.

Sea $I \in \mathcal{L}$. Sea $a+I \in A/I$. Entonces $an(a+I) = (I:a) \in \mathcal{L}$, por ser $\mathcal{L}$ un filtro idempotente. Luego $\forall a+I \in A/I$ $an(a+I) \in \mathcal{L}$, pero esto significa que $A/I \in \mathfrak{T}_{\mathcal{L}}$, es decir, $I \in \mathcal{L}_{\mathfrak{T}_{\mathcal{L}}} = \varphi\psi(\mathcal{L})$

Inversamente, sea $I \in \varphi\psi(\mathcal{L})$. Entonces $A/I \in \mathfrak{T}_{\mathcal{L}}$, es decir, $\forall a+I \in A/I$ $an(a+I) \in \mathcal{L}$. En particular $an(1+I) \in \mathcal{L}$. Pero entonces $I = (I:1) = an(1+I) \in \mathcal{L}$.

Esto prueba que $\varphi\psi(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.

+.

Llegamos ahora al concepto en torno al cual se ha hecho este trabajo.

2.12. Definición. Una clase TTF es una clase de torsión hereditaria que es cerrada bajo productos directos.

Así, una clase en A-mod es una clase TTF si y sólo si es simultáneamente una clase de torsión y una clase libre de torsión.

2.13. Lema. Si $\mathfrak{T}$ es una clase de torsión hereditaria y $\mathcal{L}_{\mathfrak{T}}$ tiene elemento menor I entonces $\mathfrak{T} = \{M \in A\text{-mod} : IM = 0\}$.

Demostración.

Sea $M \in \mathfrak{T}$. Sea $m \in M$. Como $Im \leq M$ y $\mathfrak{T}$ es una clase de torsión hereditaria, entonces $Im \in \mathfrak{T}$.

Consideremos ahora el morfismo $d_m : I \longrightarrow Im$ definido por $d_m(a) = am$.

Sea $J = \operatorname{Ker} d_m$. Como d_m es un epimorfismo entonces $I/J \cong Im \in \mathcal{T}$. Además como $I \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ entonces $A/I \in \mathcal{T}$. Así tenemos la sucesión exacta $0 \to I/J \to A/J \to A/I \to 0$ con $I/J,\ A/I \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones entonces $A/J \in \mathcal{T}$, es decir, $J \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$. Por tanto $I \leq J \leq I$, es decir, $I = J$. Se sigue que $Im = 0$.
Así, $IM = 0$.

Inversamente, sea $M \in A\text{-mod}$ tal que $IM = 0$.
Sea $x \in M$. Consideremos el morfismo $d_x : A \to M$ dado por $d_x(a) = ax$. Ahora bien, tenemos la sucesión exacta $0 \to I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/I \to 0$. Como $IM = 0$ entonces $d_x i = 0$. Luego existe $f_x \in \operatorname{Hom}(A/I, M)$ tal que $d_x = f_x p$. Por la propiedad universal de la suma directa, la familia de morfismos $\{f_x : x \in M\}$ induce un morfismo $\theta : (A/I)^{(M)} \to M$ que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A/I \arrow[r, "f_x"] \arrow[dr, "i_x"'] & M \\ & (A/I)^{(M)} \arrow[u, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

donde i_x es la inclusión en la suma directa.

Sea $y \in M$. Entonces $\theta i_y p(1) = f_y p(1) = d_y(1) = y$. Luego θ es un epimorfismo. Como $I \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ entonces $A/I \in \mathcal{T}$ y ya que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas y epimorfismos tenemos $M \in \mathcal{T}$.

$+$.

2.14. <u>Proposición.</u> Sea $\mathcal{T}$ una clase de torsión hereditaria. Entonces $\mathcal{T}$ es una clase TTF si y solo si el filtro idempotente $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ tiene elemento menor.

Demostración.

Supongamos que $\mathcal{T}$ es una clase TTF.

Para cada $J' \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ sea $p_{J'}: A \longrightarrow A/J'$ la proyección canónica y $\pi_{J'}: \prod_{J \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}} A/J \longrightarrow A/J'$ la proyección del producto directo.

Por la propiedad universal del producto directo tenemos entonces el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_{J'}"'] & & \prod_{J \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}} A/J \arrow[dl, "\pi_{J'}"] \\ & A/J' & \end{tikzcd}$$

Sea $I = \operatorname{Ker} f$. Entonces $A/I \cong \operatorname{Im} f \leq \prod_{J \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}} A/J$.

Como $\mathcal{T}$ es una clase TTF entonces es cerrada bajo productos directos y monomorfismos, y así $A/I \in \mathcal{T}$, es decir, $I \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$.

Sea $J' \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$. Entonces $I = \operatorname{Ker} f = \bigcap_{J \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}} \operatorname{Ker} p_J = \bigcap_{J \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}} J \leq J'$.

Así I es el elemento menor de $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$.

Inversamente, supongamos que $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ tiene elemento menor I.

Sea $\{T_\alpha\}_{\mathfrak{A}}$ una familia contenida en $\mathcal{T}$.

Sea $\varphi \in \prod_{\mathfrak{A}} T_\alpha$. Sea $\alpha \in \mathfrak{A}$. Como $T_\alpha \in \mathcal{T}$, por el lema 2.13 tenemos $I T_\alpha = 0$. Así, $I\varphi(\alpha) = 0$. Se ha probado que $\forall \alpha \in \mathfrak{A}$ $I\varphi(\alpha) = 0$, es decir, $I\varphi = 0$. Por tanto $I(\prod_{\mathfrak{A}} T_\alpha) = 0$, y de nuevo por el lema 2.13 tenemos $\prod_{\mathfrak{A}} T_\alpha \in \mathcal{T}$.

Así, $\mathcal{T}$ es una clase de torsión hereditaria, cerrada bajo productos directos, es decir, una clase TTF.

+

2.15. <u>Corolario</u>. Hay una correspondencia biunívoca entre las clases TTF y los ideales bilaterales idempotentes de A.

<u>Demostración</u>.
Sea $\mathfrak{T}$ una clase TTF. Usando la notación de la demostración al corolario 2.11. tenemos, por la proposición 2.14., que $\varphi(\mathfrak{T}) = \mathcal{L}_{\mathfrak{T}}$ es un filtro idempotente con elemento menor. Además $\psi\varphi(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}_{\mathcal{L}_{\mathfrak{T}}} = \mathfrak{T}$.
Sea $\mathcal{L}$ un filtro idempotente con elemento menor. Entonces $\varphi\psi(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_{\mathfrak{T}_{\mathcal{L}}} = \mathcal{L}$, y por la proposición 2.14. tenemos que $\psi(\mathcal{L}) = \mathfrak{T}_{\mathcal{L}}$ es una clase TTF. De manera que las restricciones correspondientes de las funciones φ y ψ en la demostración al corolario 2.11. determinan una correspondencia biunívoca entre las clases TTF y los filtros idempotentes con elemento menor. Este hecho, junto con el corolario 2.5, demuestran el corolario.

+.

2.16. <u>Notación</u>. Para cada clase TTF $\mathfrak{T}$ se denotará su ideal bilateral idempotente asociado por $\mathcal{I}(\mathfrak{T})$.

La siguiente observación, que se concluye del lema 2.13., describe directamente una clase TTF en términos de su ideal bilateral idempotente asociado.

2.17. <u>Observación</u>. Si $\mathfrak{T}$ es una clase TTF y $I = \mathcal{I}(\mathfrak{T})$ entonces $\mathfrak{T} = \{M \in A\text{-mod} : IM = 0\}$.

CAPITULO III

TEORIAS DE TORSION Y RADICALES.

3.1. <u>Definición</u>. Un prerradical en A-mod es una funcional $r: A\text{-mod} \to A\text{-mod}$ tal que para cada A-módulo izquierdo M se tiene $r(M) \leq M$ y para cada morfismo $f: M \to N$ en A-mod se tiene $f(r(M)) \leq r(N)$.

Nótese que si r es un prerradical en A-mod, cada morfismo $f: M \to N$ induce otro morfismo $r(f): r(M) \to r(N)$ tal que $\forall x \in r(M)$ $r(f)(x) = f(x)$.

3.2. <u>Definición</u>. 1) Un prerradical r es idempotente si para cada A-módulo izquierdo M se tiene $r(r(M)) = r(M)$.

2) Un prerradical r es un radical si para cada A-módulo izquierdo M se tiene $r(M/r(M)) = 0$.

3) Un prerradical r es exacto izquierdo si para cada sucesión exacta $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$, la sucesión $0 \to r(N) \xrightarrow{r(f)} r(M) \xrightarrow{r(g)} r(L)$ es exacta.

3.3. <u>Proposición</u>. Si $\mathfrak{T}$ es una clase de torsión entonces la funcional $r_{\mathfrak{T}}: A\text{-mod} \to A\text{-mod}$ definida por $r_{\mathfrak{T}}(M) = \sum \{N \leq M : N \in \mathfrak{T}\}$ es un radical idempotente.

<u>Demostración</u>.

Evidentemente, para cada $M \in A\text{-mod}$ se tiene $r_{\mathfrak{T}}(M) \leq M$.

Además, tenemos la sucesión exacta $\bigoplus \{N \leq M : N \in \mathfrak{T}\} \to r_{\mathfrak{T}}(M) \to 0$, y como $\mathfrak{T}$ es una clase de torsión entonces $r_{\mathfrak{T}}(M) \in \mathfrak{T}$.

Así, $\forall M \in A\text{-mod}$ $r_{\mathfrak{T}}(M) \in \mathfrak{T}$.

Sea $f: M \to N$ un morfismo en A-mod.

Tenemos entonces una sucesión exacta $r_{\mathcal{T}}(M) \longrightarrow f(r_{\mathcal{T}}(M)) \rightarrow 0$, y como $r_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ es cerrada bajo epimorfismos entonces $f(r_{\mathcal{T}}(M)) \in \mathcal{T}$. Luego $f(r_{\mathcal{T}}(M)) \leq r_{\mathcal{T}}(N)$. Así, $r_{\mathcal{T}}$ es un prerradical.

Sea $M \in A\text{-mod}$. Entonces $r_{\mathcal{T}}(r_{\mathcal{T}}(M)) \leq r_{\mathcal{T}}(M)$, por ser $r_{\mathcal{T}}$ prerradical. Además $r_{\mathcal{T}}(M) \leq r_{\mathcal{T}}(M)$ y $r_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{T}$. Luego $r_{\mathcal{T}}(M) \leq \sum\{N \leq r_{\mathcal{T}}(M) : N \in \mathcal{T}\}$ $= r_{\mathcal{T}}(r_{\mathcal{T}}(M))$. Así $r_{\mathcal{T}}(r_{\mathcal{T}}(M)) = r_{\mathcal{T}}(M)$, es decir, $r_{\mathcal{T}}$ es idempotente.

Sea $M \in A\text{-mod}$. Como $\mathcal{T}$ es una clase de torsión entonces $(\mathcal{T}, R(\mathcal{T}))$ es una teoría de torsión. En el inciso (v) de la demostración de c)$\Rightarrow$a) en la proposición 1.5 se probó que $M/r_{\mathcal{T}}(M) \in R(\mathcal{T})$.
Como $r_{\mathcal{T}}(M/r_{\mathcal{T}}(M)) \leq M/r_{\mathcal{T}}(M)$ y $R(\mathcal{T})$ es cerrada bajo submódulos entonces $r_{\mathcal{T}}(M/r_{\mathcal{T}}(M)) \in R(\mathcal{T})$. Por otro lado $r_{\mathcal{T}}(M/r_{\mathcal{T}}(M)) \in \mathcal{T}$.
De esto se concluye que $r_{\mathcal{T}}(M/r_{\mathcal{T}}(M)) = 0$, es decir, $r_{\mathcal{T}}$ es un radical.
Se ha probado así que $r_{\mathcal{T}}$ es un radical idempotente.

+.

La siguiente proposición nos dá una definición alternativa de $r_{\mathcal{T}}$.

3.4. <u>Proposición</u>. Si $\mathcal{T}$ es una clase de torsión entonces para cada A-módulo izquierdo M se tiene $r_{\mathcal{T}}(M) = \bigcap\{N \leq M : M/N \in R(\mathcal{T})\}$.

<u>Demostración</u>.
Por un lado, tenemos $M/r_{\mathcal{T}}(M) \in R(\mathcal{T})$, de donde $\bigcap\{N \leq M : M/N \in R(\mathcal{T})\} \leq r_{\mathcal{T}}(M)$.

Por otro lado, sea $N' \in \bigcap\{N \leq M : M/N \in R(\mathcal{T})\}$. Sea $p: M \longrightarrow M/N'$ la proyección canónica. Entonces, como $p(r_{\mathcal{T}}(M)) \leq M/N' \in R(\mathcal{T})$ y $R(\mathcal{T})$ es cerrada bajo submódulos tenemos $p(r_{\mathcal{T}}(M)) \in R(\mathcal{T})$.
Además se tiene una sucesión exacta $r_{\mathcal{T}}(M) \longrightarrow p(r_{\mathcal{T}}(M)) \rightarrow 0$, y como $r_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ es cerrada bajo epimorfismos entonces $p(r_{\mathcal{T}}(M)) \in \mathcal{T}$.
De esto se concluye que $p(r_{\mathcal{T}}(M)) = 0$, es decir, $r_{\mathcal{T}}(M) \leq \operatorname{Ker} p = N'$.
Por tanto $r_{\mathcal{T}}(M) \leq \bigcap\{N \leq M : M/N \in R(\mathcal{T})\}$.

$\dashv$.

3.5. <u>Proposición</u>. Si r es un radical idempotente entonces $(\mathcal{T}_r, \mathcal{F}_r)$ es una teoría de torsión, donde $\mathcal{T}_r = \{M \in A\text{-mod} : r(M) = M\}$ y $\mathcal{F}_r = \{M \in A\text{-mod} : r(M) = 0\}$.

<u>Demostración</u>.
Sean $M \in \mathcal{T}_r$, $N \in \mathcal{F}_r$ y $f \in \operatorname{Hom}(M,N)$. Como r es un prerradical entonces $f(M) = f(r(M)) \leq r(N) = 0$. Luego $f = 0$.
Sea $M \in A\text{-mod}$ tal que $\forall N \in \mathcal{F}_r$ $\operatorname{Hom}(M,N) = 0$.
Como r es un radical tenemos $r(M/r(M)) = 0$, es decir, $M/r(M) \in \mathcal{F}_r$.
Sea $p: M \longrightarrow M/r(M)$ la proyección canónica. Entonces $p = 0$. Así $M = \operatorname{Ker} p = r(M)$, es decir, $M \in \mathcal{T}_r$.
Sea $N \in A\text{-mod}$ tal que $\forall M \in \mathcal{T}_r$ $\operatorname{Hom}(M,N) = 0$.
Como r es idempotente tenemos $r(r(N)) = r(N)$, es decir, $r(N) \in \mathcal{T}_r$.
Sea $i: r(N) \hookrightarrow N$ la inclusión. Entonces $i = 0$. Así $r(N) = 0$, es decir, $N \in \mathcal{F}_r$.
Se ha probado así que $\mathcal{T}_r = L(\mathcal{F}_r)$ y $\mathcal{F}_r = R(\mathcal{T}_r)$, es decir, $(\mathcal{T}_r, \mathcal{F}_r)$ es una

teoría de torsión.

$\dashv$

3.6. <u>Proposición</u>. 1) Si r es un radical idempotente entonces $r_{\mathcal{T}_r}=r$.
2) Si $\mathcal{T}$ es una clase de torsión entonces $\mathcal{T}_{r_{\mathcal{T}}}=\mathcal{T}$.

<u>Demostración</u>.

1): Sea $M\in A$-mod. Por definición tenemos $r_{\mathcal{T}_r}(M)=\sum\{N\leq M : N\in\mathcal{T}_r\}$
$=\sum\{N\leq M : r(N)=N\}$.
Como r es idempotente entonces $r(r(M))=r(M)$. Luego $r(M)\leq r_{\mathcal{T}_r}(M)$.
Por otro lado, sea $N\leq M$ tal que $r(N)=N$. Consideremos la inclusión $i: N \hookrightarrow M$. Como r es un prerradical entonces $r(N)=i(r(N))\leq r(M)$, es decir, $N\leq r(M)$. Así $r_{\mathcal{T}_r}(M)\leq r(M)$. Con esto se tiene $r_{\mathcal{T}_r}=r$.

2): Sea $M\in\mathcal{T}_{r_{\mathcal{T}}}$. Entonces $M=r_{\mathcal{T}}(M)\in\mathcal{T}$.
Por otro lado, sea $M\in\mathcal{T}$. Como $r_{\mathcal{T}}(M)=\sum\{N\leq M : N\in\mathcal{T}\}$ entonces $M\leq r_{\mathcal{T}}(M)\leq M$, es decir $r_{\mathcal{T}}(M)=M$. Luego $M\in\mathcal{T}_{r_{\mathcal{T}}}$.
Por tanto, $\mathcal{T}_{r_{\mathcal{T}}}=\mathcal{T}$.

$\dashv$.

Con la proposición anterior resulta evidente el siguiente corolario.

3.7. <u>Corolario</u>. Hay una correspondencia biunívoca entre las clases de torsión y los radicales idempotentes.

3.8. <u>Lema.</u> Un prerradical r es exacto izquierdo si y sólo si para cada A-módulo izquierdo y para cada submódulo N de M se tiene $r(N)=N\cap r(M)$.

<u>Demostración.</u>

Supongamos que r es exacto izquierdo. Sea $M\in A\text{-mod}$ y sea $N\leq M$.

Tenemos la sucesión exacta $0\to N\xrightarrow{i} M\xrightarrow{p} M/N\to 0$.

Como r es exacto izquierdo entonces la sucesión $0\to r(N)\xrightarrow{r(i)} r(M)\xrightarrow{r(p)} r(M/N)$ es exacta. Por tanto $r(N)=\mathrm{Im}\, r(i)=\mathrm{Ker}\, r(p)$.

Sea $x\in r(N)$. Entonces $p(x)=r(p)(x)=0$, de donde $x\in N$. Así $r(N)\leq N\cap r(M)$.

Sea $x\in N\cap r(M)$. Entonces $r(p)(x)=p(x)=0$, es decir, $x\in \mathrm{Ker}\, r(p)=r(N)$.

Por tanto $r(N)=N\cap r(M)$.

Recíprocamente, supongamos que $\forall M\in A\text{-mod}\ \forall N'\leq M\ r(N')=N'\cap r(M)$.

Sea $0\to N\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} L\to 0$ una sucesión exacta. Sea $N'=\mathrm{Im} f$

Tenemos entonces un isomorfismo $h: N'\to N$ tal que $\forall y\in N'\ fh(y)=y$.

Sea $y\in \mathrm{Im}\, r(f)$. Entonces $\exists\, x\in r(N)$ .q. $y=r(f)(x)=f(x)\in r(N')$, pues r es un prerradical. Sea $y\in r(N')$. De nuevo, como r es un prerradical tenemos $h(y)\in r(N)$. Además $y=f(h(y))=r(f)(h(y))\in \mathrm{Im}\ r(f)$.

Así $r(N')=\mathrm{Im}\, r(f)$.

Sea $x\in N'\cap r(M)$. Entonces $x\in \mathrm{Im} f=\mathrm{Ker}\, g$; luego $r(g)(x)=g(x)=0$.

Sea $x\in \mathrm{Ker}\, r(g)\leq r(M)$. Entonces $g(x)=r(g)(x)=0$, es decir, $x\in \mathrm{Ker}\, g=N'$. Así $N'\cap r(M)=\mathrm{Ker}\, r(g)$.

Por tanto, $\mathrm{Im}\, r(f)=r(N')=N'\cap r(M)=\mathrm{Ker}\, r(g)$.

Sea $x\in r(N)$ tal que $r(f)(x)=0$. Entonces $f(x)=0$, es decir, $x\in \mathrm{Ker} f=0$. Luego, $\mathrm{Ker}\ r(f)=0$.

Se ha probado así la exactitud de la sucesión:

$$0 \longrightarrow r(N) \xrightarrow{r(f)} r(M) \xrightarrow{r(g)} r(L).$$

Por tanto r es un prerradical exacto izquierdo.

$+$.

3.9. <u>Proposición</u>. Un radical idempotente r es exacto izquierdo si y sólo si $\mathcal{T}_r$ es una clase de torsión hereditaria.

<u>Demostración</u>.

Supongamos que r es un radical idempotente exacto izquierdo.
Sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M$ una sucesión exacta con $M \in \mathcal{T}_r$. Sea $N' = \operatorname{Im} f$.
Entonces $r(N') = N' \cap r(M) = N' \cap M = N'$, es decir, $N' \in \mathcal{T}_r$. Como $N \cong N'$ tenemos así que $N \in \mathcal{T}_r$. Luego $\mathcal{T}_r$ es una clase de torsión hereditaria.
Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{T}_r$ es hereditaria. Sea $M \in A\text{-mod}$ y sea $N \leq M$. Entonces $r(N) \leq N \cap r(M)$. Además $N \cap r(M) \leq N$, y como $r(M) \in \mathcal{T}_r$, y $\mathcal{T}_r$ es hereditaria, la sucesión exacta $0 \longrightarrow N \cap r(M) \longrightarrow r(M)$ nos lleva a la conclusión de que $N \cap r(M) \in \mathcal{T}_r$. Por tanto $N \cap r(M) \leq r(N)$.
Así, $\forall M \in A\text{-mod}$ $\forall N \leq M$ $r(N) = N \cap r(M)$, lo cual es equivalente, por el lema 3.8. a que r sea exacto izquierdo.

$+$.

3.10. <u>Corolario</u>. Una clase de torsión $\mathcal{T}$ es hereditaria si y sólo si $r_{\mathcal{T}}$ es un radical idempotente exacto izquierdo.

Demostración.

Por la proposición 3.9 tenemos que $r_{\mathcal{T}}$ es exacto izquierdo si y sólo si $\mathcal{T}_{r_{\mathcal{T}}}$ es una clase de torsión hereditaria. Además, la proposición 3.6 nos dice que $\mathcal{T}_{r_{\mathcal{T}}} = \mathcal{T}$.

+.

Con ésto se extiende la correspondencia biunívoca dada por el corolario 3.7. a una correspondencia biunívoca entre clases de torsión hereditarias y radicales idempotentes exactos izquierdos. El siguiente paso es establecer la relación existente entre clases TTF y radicales idempotentes.

3.11. Proposición. Si I es un ideal izquierdo idempotente entonces la funcional $r_I :$ A-mod $\longrightarrow$ A-mod dada por $r_I(M) = IM$ es un radical idempotente.

Demostración.

Es evidente que $\forall M \in$ A-mod $r_I(M) \leq M$. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo en A-mod. Sea $y \in f(IM)$. Entonces $\exists x \in IM$.³. $y = f(x)$. Luego $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ con $a_i \in I$, $x_i \in M$, para cada $i \in \{1, \dots n\}$. Así $y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \in IN$. Se ha probado que $f(IM) \leq IN$. Por tanto r_I es un prerradical.

Si $a \in I$ y $x + IM \in M/IM$ entonces $a(x + IM) = ax + IM = IM$, de donde $I(M/IM) = 0$, para cada $M \in$ A-mod. Esto prueba que r_I es un radical. Por último, como I es un ideal izquierdo idempotente entonces $I^2 = I$. Luego $IIM = IM$ para cada $M \in$ A-mod, es decir, r_I es idempotente.

+.

De la proposición anterior y la proposición 3.5. es inmediato el siguiente corolario.

3.12. <u>Corolario</u>. Si I es un ideal izquierdo idempotente entonces $(\mathfrak{T}_I, \mathfrak{F}_I)$ es una teoría de torsión, donde $\mathfrak{T}_I = \{M \in A\text{-mod} : IM = M\}$ y $\mathfrak{F}_I = \{M \in A\text{-mod} : IM = 0\}$.

Es interesante hacer notar que en el caso particular del radical idempotente r_I la clase libre de torsión asociada resulta ser una clase TTF, como a continuación se prueba.

3.13. <u>Proposición</u>. Si I es un ideal izquierdo idempotente entonces $\mathfrak{F}_I$ es una clase TTF.

<u>Demostración</u>.
Sea $M \xrightarrow{g} L \to 0$ una sucesión exacta con $M \in \mathfrak{F}_I$.
Sea $y \in IL$. Entonces $y = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$ con $a_i \in I$, $y_i \in L$, para cada $i \in \{1, \dots n\}$. Como g es un epimorfismo, para cada $i \in \{1, \dots n\}$ existe $x_i \in M$ tal que $y_i = g(x_i)$. Así $y = \sum_{i=1}^{n} a_i g(x_i) = g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = 0$, puesto que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in IM = 0$, ya que $M \in \mathfrak{F}_I$.
Por tanto $IL = 0$, es decir, $L \in \mathfrak{F}_I$.
Se ha probado, pues, que $\mathfrak{F}_I$ es cerrada bajo epimorfismos, y así $\mathfrak{F}_I$ es una clase TTF.

+.

En vista de que para todo A-módulo izquierdo M sucede que $AM=M$ tenemos la siguiente observación.

3.14. Observación. Si I es un ideal izquierdo idempotente entonces $\mathfrak{F}_I = \mathfrak{F}_{IA}$.

Una condición necesaria y suficiente para que un ideal izquierdo I sea bilateral es que $IA=I$. De tal manera que si I es un ideal izquierdo idempotente que no es bilateral hay al menos dos ideales izquierdos idempotentes (a saber, I y IA) que dan lugar a la misma clase TTF $\mathfrak{F}_I$ a través de la asociación descrita en la proposición 3.13. Sin embargo, al tratar con ideales bilaterales idempotentes dicha asociación resulta una correspondencia biunívoca, como se vió al final del capítulo 2.

Es oportuno dar ahora, recíprocamente a la observación 2.17., una descripción directa de un ideal bilateral idempotente en términos de su clase TTF asociada.

3.15. Proposición. Si $\mathfrak{T}$ es una clase TTF entonces $\mathcal{I}(\mathfrak{T}) = r_{L(\mathfrak{T})}(A)$.

Demostración.
Si $\mathfrak{T}$ es una clase TTF entonces $\mathcal{I}(\mathfrak{T})$ es el elemento menor de $\mathcal{L}_{\mathfrak{T}}$, el filtro idempotente asociado a $\mathfrak{T}$; así $\mathcal{I}(\mathfrak{T}) = \bigcap \mathcal{L}_{\mathfrak{T}} = \bigcap\{J \leq A : A/J \in \mathfrak{T}\}$
$= \bigcap\{J \leq A : A/J \in RL(\mathfrak{T})\} = r_{L(\mathfrak{T})}(A)$, por la proposición 3.4.

$+$.

Una clase TTF $\mathcal{T}$ da lugar a dos clases de torsión, que son $L(\mathcal{T})$ y $\mathcal{T}$ misma, y por tanto, a dos radicales idempotentes, que se describen a continuación.

3.16. <u>Definición</u>. Sea M un A-módulo izquierdo y I un ideal bilateral de A. Definimos $d_I(M)=\{x\in M : Ix=0\}$

Es claro de la definición que $d_I(M)$ resulta ser un submódulo de M. Además la funcional $d_I : A\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$ es un radical idempotente, como a continuación se prueba.

3.17. <u>Proposición</u>. Si $\mathcal{T}$ es una clase TTF y $I=\mathcal{A}(\mathcal{T})$ entonces:

1) $r_{L(\mathcal{T})}=r_I$
2) $r_{\mathcal{T}}=d_I$.

<u>Demostración</u>.

1): Según la observación 2.17. tenemos $\mathcal{T}=\{M\in A\text{-mod} : IM=0\}$. Sea $\mathcal{C}=\{M\in A\text{-mod} : IM=M\}$. Así se tiene que $\mathcal{C}=\mathcal{T}_{r_I}$ y $\mathcal{T}=\mathcal{F}_{r_I}$ y por la proposición 3.5. se concluye que $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ es una teoría de torsión; luego, $\mathcal{C}=L(\mathcal{T})$. Por tanto, la proposición 3.6. nos lleva a que $r_{L(\mathcal{T})}=r_{\mathcal{C}}=r_{\mathcal{T}_{r_I}}=r_I$.

2): Sea $M\in A\text{-mod}$. Por definición tenemos que $\forall a\in I\ \forall x\in d_I(M)\ ax=0$. Luego $I\,d_I(M)=0$, es decir, $d_I(M)\in\mathcal{T}$. Por tanto $d_I(M)\leq r_{\mathcal{T}}(M)$. Sea $N\leq M$ tal que $N\in\mathcal{T}$, es decir, $IN=0$. Así, si $x\in N$ entonces $Ix=0$, es decir, $x\in d_I(M)$. Por tanto $N\leq d_I(M)$ y así se tiene $r_{\mathcal{T}}(M)=\sum\{N\leq M : N\in\mathcal{T}\}\leq d_I(M)$.

Se ha probado pues que $\forall M \in A\text{-mod}$ $r_{\mathcal{G}}(M) = d_I(M)$, es decir, $r_{\mathcal{G}} = d_I$.

+.

3.18. <u>Corolario</u>. Si $\mathcal{G}$ es una clase TTF y $I = \partial(\mathcal{G})$ entonces:

1): $L(\mathcal{G}) = \{M \in A\text{-mod} : IM = M\}$ y $\mathcal{G} = \{M \in A\text{-mod} : IM = 0\}$.

2): $\mathcal{G} = \{M \in A\text{-mod} : d_I(M) = M\}$ y $R(\mathcal{G}) = \{M \in A\text{-mod} : d_I(M) = 0\}$.

<u>Demostración</u>.

1): De la proposición 3.17. y la proposición 3.6. se tiene que $L(\mathcal{G}) = \mathcal{T}_{r_{L(\mathcal{G})}} = \mathcal{T}_{r_I} = \{M \in A\text{-mod} : IM = M\}$. La segunda afirmación es justamente la observación 2.17.

2): También la proposición 3.17. y la proposición 3.6. nos llevan a que $\mathcal{G} = \mathcal{T}_{r_{\mathcal{G}}} = \mathcal{T}_{d_I} = \{M \in A\text{-mod} : d_I(M) = M\}$. Por la proposición 3.5. tenemos entonces que $R(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_{d_I} = \{M \in A\text{-mod} : d_I(M) = 0\}$.

+.

CAPITULO III

ALGUNAS PROPIEDADES SOBRE CLASES TTF.

4.1. <u>Lema</u>. Sean I un ideal izquierdo y J un ideal derecho de A tales que $I+J=A$ y $IJ=0$. Entonces:

1) Existen idempotentes $e,f\in A$ tales que $e+f=1$, $I=Ae$ y $J=fA$.

2) I y J son ideales bilaterales.

3) $I=l(J)$ y $J=d(I)$, donde $l(J)=\{a\in A : aJ=0\}$ y $d(I)=\{b\in A : Ib=0\}$.

<u>Demostración</u>.

1): Como $I+J=A$ entonces $\exists e\in I, \exists f\in J$ t.q. $e+f=1$.
Sea $a\in I$. Entonces $a=ae+af=ae$, pues $af\in IJ=0$.
Por tanto, $\forall a\in I$ $a=ae$; en particular $e=e^2$, y así e es idempotente.
Además $I\subseteq Ae\subseteq I$, pues I es un ideal izquierdo. Luego $I=Ae$.
Sea $b\in J$. Entonces $b=eb+fb=fb$, pues $eb\in IJ=0$.
Así, $\forall b\in J$ $b=fb$; en particular $f=f^2$, es decir, f es idempotente.
Además $J\subseteq fA\subseteq J$, por ser J un ideal derecho. Luego $J=fA$.

2): Sea $c\in A=I+J$. Entonces $c=a+b$ con $a\in I$ y $b\in J$.
Por tanto $Ic=I(a+b)=Ia+Ib=Ia\subseteq I$, pues $Ib=0$.
También se tiene $cJ=(a+b)J=aJ+bJ=bJ\subseteq J$, pues $aJ=0$.
Así, I y J son ideales bilaterales.

3): Como $IJ=0$, entonces $I\subseteq l(J)$ y $J\subseteq d(I)$.
Sea $a\in l(J)$. Entonces $af=0$, y así $a=ae+af=ae\in I$. Así $I=l(J)$.
Sea $b\in d(I)$. Entonces $eb=0$, y así $b=eb+fb=fb\in J$.
Luego $J=d(I)$.

+.

4.2. Proposición. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ clases TTF y sean $I=\mathcal{J}(\mathcal{T})$ y $J=\mathcal{J}(\mathcal{F})$. Entonces $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es una teoría de torsión si y sólo si $I+J=A$ y $IJ=0$.

Demostración.

Supongamos que $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es una teoría de torsión. Como $I=\mathcal{J}(\mathcal{T})$ y $J=\mathcal{J}(\mathcal{F})$ entonces $\mathcal{T}=\{M\in A\text{-mod}: IM=0\}$ y $\mathcal{F}=\{M\in A\text{-mod}: JM=0\}$. Además $I\in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, es decir, $A/I\in\mathcal{T}$. Como $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es una teoría de torsión entonces $\mathcal{T}=L(\mathcal{F})=\{M\in A\text{-mod}: JM=M\}$. Por lo tanto, $J(A/I)=A/I$. Sea $c\in A$. Entonces $c+I\in A/I=J(A/I)$. Luego $c+I=\sum_{i=1}^{n} b_ic_i+I$, con $b_i\in J$ y $c_i\in A$, para cada $i\in\{1,\dots n\}$. Así $c-\sum_{i=1}^{n} b_ic_i\in I$, es decir, $c=a+\sum_{i=1}^{n} b_ic_i$, con $a\in I$. Como J es un ideal bilateral se tiene también $\sum_{i=1}^{n} b_ic_i\in J$. Se ha probado pues que $I+J=A$. Por otro lado, como J es un ideal idempotente se tiene $JJ=J$, es decir, $J\in\mathcal{T}$, y por tanto $IJ=0$.

Recíprocamente, supongamos que $I+J=A$ y $IJ=0$.
Sea $M\in\mathcal{T}$. Entonces $IM=0$ y por lo tanto $M=AM=(I+J)M=IM+JM=JM$, es decir, $M\in L(\mathcal{F})$. Inversamente, sea $M\in L(\mathcal{F})$. Entonces $M=JM$ y así $IM=IJM=0$, es decir, $M\in\mathcal{T}$. Se ha probado que $\mathcal{T}=L(\mathcal{F})$, y siendo $\mathcal{F}$ una clase libre de torsión, se tiene por el corolario 1.11. que $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es una teoría de torsión.

+.

4.3. Proposición. Sea $\mathcal{T}$ una clase TTF y sea $I=\mathcal{J}(\mathcal{T})$.

1) $R(\mathcal{T})$ es una clase TTF si y sólo si existe un idempotente $e\in A$ tal que $I=Ae$.

2) $L(\mathcal{T})$ es una clase TTF si y sólo si existe un idempotente $f\in A$ tal que $I=fA$

Demostración.

1): Supongamos que $R(\mathcal{T})$ es una clase TTF. Sea $J=\mathfrak{I}(R(\mathcal{T}))$. Como $(\mathcal{T},R(\mathcal{T}))$ es una teoría de torsión entonces por la proposición 4.2. tenemos que $I+J=A$ y $IJ=0$. Por el lema 4.1. existe un idempotente $e\in A$ tal que $I=Ae$.

Inversamente, si $I=Ae$ con $e\in A$, idempotente, sea $J=(1-e)A$. Entonces J es un ideal derecho de A tal que $IJ=0$. Además, si $c\in A$ entonces $c=ec+(1-e)c \in I+J$, pues I es un ideal bilateral. Por lo tanto $I+J=A$. Por el lema 4.1. tenemos que J es un ideal bilateral. Además $(1-e)^2=1-e-e+e^2=1-e$, por ser e idempotente, de manera que $J=(1-e)A=(1-e)(1-e)A\leq J^2$, y así J es un ideal bilateral idempotente. Sea $\mathcal{F}$ su clase TTF asociada. Por la proposición 4.2. $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es una teoría de torsión, y por tanto $R(\mathcal{T})=\mathcal{F}$ es una clase TTF.

2): Supongamos que $L(\mathcal{T})$ es una clase TTF. Sea $K=\mathfrak{I}(L(\mathcal{T}))$. Como $(L(\mathcal{T}),\mathcal{T})$ es una teoría de torsión, la proposición 4.2. nos lleva a que $K+I=A$ y $KI=0$. Por el lema 4.1. existe entonces un idempotente $f\in A$ tal que $I=fA$.

Inversamente, si $I=fA$ con $f\in A$ idempotente, sea $K=A(1-f)$. Entonces K es un ideal izquierdo de A tal que $KI=0$. Si $c\in A$ entonces $c=c(1-f)+cf\in K+I$. Por tanto $K+I=A$, y por el lema 4.1., K es un ideal bilateral; además es idempotente, pues $(1-f)$ es idempotente. Sea $\mathcal{C}$ la clase TTF asociada a K. Por la proposición 4.2. $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ es una teoría de torsión. Por lo tanto $\mathcal{L}(\mathfrak{T}) = \mathcal{G}$ es una clase TTF.

+.

Antes de pasar a un corolario a esta proposición probaremos un pequeño lema técnico.

4.4. <u>Lema.</u> Si e es un idempotente tal que $Ae = eA$ entonces e es idempotente central.

<u>Demostración.</u>

Sea $c \in A$. Entonces $ce \in Ae = eA$; por tanto $ce = ea$ con $a \in A$. Como e es idempotente entonces $ce = ea = eea = ece$. Por otro lado, $ec \in eA = Ae$ y así $ec = be$ con $b \in A$. Luego $ec = be = bee = ece$. Luego $ce = ec$ y así e es un idempotente central.

+.

4.5. <u>Corolario.</u> Sea $\mathfrak{T}$ una clase TTF y sea $I = \mathfrak{d}(\mathfrak{T})$. Entonces $R(\mathfrak{T})$ y $\mathcal{L}(\mathfrak{T})$ son ambas clases TTF si y sólo si existe un idempotente central $e \in A$ tal que $I = Ae$. En este caso, $R(\mathfrak{T}) = \mathcal{L}(\mathfrak{T})$.

<u>Demostración.</u>

Supongamos que tanto $A(\mathfrak{T})$ como $\mathcal{L}(\mathfrak{T})$ son clases TTF. Por la proposición 4.3. existen idempotentes $e, f \in A$ tales que $Ae = I = fA$. Ahora, $e \in Ae = fA$; por lo tanto $e = fa$ con $a \in A$ y como f es idempotente entonces $e = ffa = fe$.

También $f \in fA = Ae$ y así $f = be$ con $b \in A$. Como e es idempotente entonces $f = bee = fe$. Por lo tanto, $e = f$ y luego $Ae = eA$. Por el lema 4.4. se tiene que e es un idempotente central.

Inversamente, si $I = Ae$ con $e \in A$ idempotente central entonces $I = Ae = eA$. De la proposición 4.3. se concluye que $R(\mathcal{T})$ y $L(\mathcal{T})$ son clases TTF.

En este caso, sean $J = \partial(R(\mathcal{T}))$ y $K = \partial(L(\mathcal{T}))$. Como $(L(\mathcal{T}), \mathcal{T})$ y $(\mathcal{T}, R(\mathcal{T}))$ son teorías de torsión, de la proposición 4.2. se tiene que $K + I = A$, $KI = 0$, $I + J = A$ y $IJ = 0$. Luego, por el lema 4.1., $K = l(I)$ y $J = d(I)$.

Sea $a \in l(I)$. Entonces $aI = 0$ y por tanto $ae = 0$. Inversamente, si $ae = 0$ y $be \in Ae = I$ entonces $abe = aeb = 0$; así $aI = 0$. Por lo tanto $a \in l(I)$ si y sólo si $ae = 0$; análogamente $a \in d(I)$ si y sólo si $ea = 0$. Ya que e es un idempotente central tenemos $ae = ea$. Esto prueba que $l(I) = d(I)$, es decir, $K = J$. Por tanto, $R(\mathcal{T}) = L(\mathcal{T})$.

+.

Es oportuno establecer ahora, dada una clase TTF $\mathcal{T}$, una serie de afirmaciones equivalentes a $R(\mathcal{T}) = L(\mathcal{T})$, utilizando los conceptos que se definen a continuación.

4.6. <u>Definición</u>. 1) Una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ se escinde si para cada A-módulo izquierdo M, $\mathfrak{t}(M)$ es sumando directo de M.

2) Una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ se escinde centralmente si existe un idempotente central $e \in A$ tal que $\mathcal{T} = \{M \in A\text{-mod} : eM = M\}$ y $\mathcal{F} = \{M \in A\text{-mod} : eM = 0\}$.

4.7. Lema. Si $(\mathfrak{T},\mathfrak{F})$ es una teoría de torsión entonces $\mathfrak{T}$ es hereditaria si y sólo si $\mathfrak{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Demostración.

Supongamos que $\mathfrak{T}$ es una clase de torsión hereditaria. Sea $M\in\mathfrak{F}$ y sea $Q=E(M)$, la cápsula inyectiva de M. Supongamos que $r_{\mathfrak{T}}(Q)\neq 0$. Como M es esencial en Q entonces $M\cap r_{\mathfrak{T}}(Q)\neq 0$. Por otro lado, como $\mathfrak{T}$ es hereditaria entonces $M\cap r_{\mathfrak{T}}(Q)\in\mathfrak{T}\cap\mathfrak{F}=\{0\}$ ⚡. Por lo tanto, $r_{\mathfrak{T}}(Q)=0$, y así $Q\cong Q/r_{\mathfrak{T}}(Q)\in\mathfrak{F}$. Luego $\mathfrak{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Supongamos ahora que $\mathfrak{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Sea $M\in\mathfrak{T}$ y $N\leq M$. Sea $F\in\mathfrak{F}$ y $f\in Hom(N,F)$. Sean $i:N\hookrightarrow M$ y $j:F\hookrightarrow E(F)$ las inclusiones. Como $E(F)$ es inyectivo, existe $g\in Hom(M,E(F))$ tal que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} N & \xhookrightarrow{i} & M \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ F & \xrightarrow[j]{} & E(F) \end{array}$$

Como $M\in\mathfrak{T}$ y $E(F)\in\mathfrak{F}$, por ser $\mathfrak{F}$ cerrada bajo cápsulas inyectivas, entonces $g=0$. Luego $jf=gi=0$, de donde $f=0$. Se ha probado, pues, que $\forall F\in\mathfrak{F}$ $Hom(N,F)=0$, es decir, $N\in L(\mathfrak{F})=\mathfrak{T}$. Por lo tanto $\mathfrak{T}$ es hereditaria.

+.

4.8. Lema. Si r es un prerradical en A-mod y $\{M_\alpha\}_\alpha$ es una familia contenida en A-mod entonces $r(\bigoplus_\alpha M_\alpha)=\bigoplus_\alpha r(M_\alpha)$.

Demostración.

Para cada $\beta\in\mathfrak{A}$ sean $i_\beta : M_\beta \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{a}} M_\alpha$ y $p_\beta : \bigoplus_{\mathfrak{a}} M_\alpha \longrightarrow M_\beta$ la inclusión y la proyección en la suma directa, respectivamente.

Sea $\varphi\in r(\bigoplus_{\mathfrak{a}} M_\alpha)$. Digamos que $\{\alpha\in\mathfrak{A} : \varphi(\alpha)\neq 0\} = \{\alpha_1,\dots\alpha_n\}$. Entonces $\varphi=\sum_{i=1}^{n} i_{\alpha_i}p_{\alpha_i}(\varphi)$. Como r es un prerradical entonces $p_{\alpha_i}(\varphi)\in r(M_{\alpha_i})$ para cada $i\in\{1,\dots n\}$. Luego $\varphi\in\bigoplus_{\mathfrak{a}} r(M_\alpha)$. Inversamente, si $\varphi\in\bigoplus_{\mathfrak{a}} r(M_\alpha)$, digamos como antes que $\{\alpha\in\mathfrak{A}:\varphi(\alpha)\neq 0\}=\{\alpha_1,\dots\alpha_n\}$. Entonces, para cada $i\in\{1,\dots n\}$ tenemos $p_{\alpha_i}(\varphi)\in r(M_{\alpha_i})$, y como r es un prerradical entonces $i_{\alpha_i}p_{\alpha_i}(\varphi)\in r(\bigoplus_{\mathfrak{a}} M_\alpha)$.
Luego $\varphi=\sum_{i=1}^{n} i_{\alpha_i}p_{\alpha_i}(\varphi)\in r(\bigoplus_{\mathfrak{a}} M_\alpha)$. Así, $r(\bigoplus_{\mathfrak{a}} M_\alpha)=\bigoplus_{\mathfrak{a}} r(M_\alpha)$.

+.

4.9. Proposición. Sea $\mathcal{T}$ una clase TTF y sean $\mathcal{C}=L(\mathcal{T})$, $\mathcal{F}=R(\mathcal{T})$, $c=r_{\mathcal{C}}$ y $t=r_{\mathcal{T}}$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $\mathcal{C}=\mathcal{F}$.

b) Para todo A-módulo izquierdo M se tiene $M=c(M)\oplus t(M)$.

c) $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ y $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ se escinden.

d) $\mathcal{C}$ es hereditaria y $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ se escinde.

e) $A=c(A)\oplus t(A)$.

f) $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ se escinde centralmente.

g) $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ se escinde centralmente.

Demostración.

a)$\Rightarrow$b): Observemos que, por la proposición 3.17., tenemos que $\forall N\in A\text{-mod}$ $c(N)=r_{L(\mathcal{T})}(N)=r_I(N)=IN$, donde $I=\mathcal{J}(\mathcal{T})$.

Sea $M\in A\text{-mod}$.

Entonces $M/t(M) \in \mathcal{F} = \mathcal{C}$.
Luego $M/t(M) = c(M/t(M)) = I(M/t(M)) = IM+t(M)/t(M) = c(M)+t(M)/t(M)$,
de donde $M = c(M) + t(M)$.
Además, como $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ son ambas cerradas bajo monomorfismos y $\mathcal{C} = \mathcal{F}$ entonces $c(M) \cap t(M) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{T} = \{0\}$. Por tanto $M = c(M) \oplus t(M)$.

b) $\Rightarrow$ c): Se sigue directamente de la definición 4.6.

c) $\Rightarrow$ d): Sea $M \in \mathcal{T}$ y sea $Q = E(M)$.
Como $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ se escinde entonces $Q = t(Q) \oplus L$, con $L \leq Q$.
Supongamos que $L \neq 0$. Como M es esencial en Q entonces $M \cap L \neq 0$.
Además $M = t(M)$, pues $M \in \mathcal{T}$. Por otro lado, como $M \leq Q$ y t es un prerradical entonces $t(M) \leq t(Q)$. Luego $M \leq t(Q)$ y por tanto $t(Q) \cap L \neq 0$ ↯. Así $L = 0$ y por lo tanto $Q = t(Q) \in \mathcal{T}$.
Se ha probado así que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.
Por el lema 4.7. se tiene entonces que $\mathcal{C}$ es hereditaria. Además, por hipótesis $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ se escinde.

d) $\Rightarrow$ e): Como $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ se escinde entonces $A = c(A) \oplus K$, con $K \leq A$.
Por el lema 4.8. tenemos que $t(A) = t(c(A) \oplus K) = t(c(A)) \oplus t(K)$.
Por otro lado, como $\mathcal{C}$ es hereditaria entonces $t(c(A)) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{T} = \{0\}$.
También $K \cong A/c(A) \in \mathcal{T}$. Luego $K = t(K) = t(A)$.
Por lo tanto $A = c(A) \oplus t(A)$.

e) $\Rightarrow$ a): Sean $I = c(A)$ y $J = t(A)$. Por la proposición 3.15. tenemos que $I = \mathfrak{J}(\mathcal{T})$ y $J = \mathfrak{J}(\mathcal{F})$. Así I y J son ambos ideales bilaterales.

Además como $A = I \oplus J$ entonces $JI \leq I \cap J = 0$. Así, por la proposición 4.2. $(\mathfrak{F}, \mathfrak{T})$ es una teoría de torsión, es decir, $\mathfrak{F} = \mathcal{L}(\mathfrak{T}) = \mathcal{C}$.

a)$\Leftrightarrow$g): Sea $I = \partial(\mathfrak{T})$. Por el corolario 4.5. la condición a) es equivalente a que $I = Ae$, con $e \in A$ idempotente central, y esto ocurre si y sólo si para cada $M \in A$-mod se tiene $r_I(M) = eM$, es decir, $\mathcal{C} = \mathcal{L}(\mathfrak{T}) = \{M \in A\text{-mod} : eM = M\}$ y $\mathfrak{T} = \{M \in A\text{-mod} : eM = 0\}$, es decir, $(\mathcal{C}, \mathfrak{T})$ se escinde centralmente.

f)$\Leftrightarrow$g): Supongamos que $(\mathcal{C}, \mathfrak{T})$ se escinde centralmente. Entonces $\mathfrak{T} = \{M \in A\text{-mod} : eM = 0\}$, con $e \in A$ idempotente central. En este caso $1 - e \in A$ también es un idempotente central. Sea $J = A(1-e) = (1-e)A$. Entonces para cada $M \in A$-mod se tiene que $eM = 0$ si y sólo si $JM = M$, es decir, $\mathfrak{T} = \{M \in A\text{-mod} : JM = M\}$. Por lo tanto $\mathfrak{F} = \{M \in A\text{-mod} : JM = 0\}$ o lo que es lo mismo, $\mathfrak{T} = \{M \in A\text{-mod} : (1-e)M = M\}$ y $\mathfrak{F} = \{M \in A\text{-mod} : (1-e)M = 0\}$. Así, $(\mathfrak{T}, \mathfrak{F})$ se escinde centralmente. El recíproco es completamente análogo.

$+$.

En seguida se establecerán, dada una clase TTF $\mathfrak{T}$, una serie de condiciones equivalentes a que $\mathcal{L}(\mathfrak{T})$ sea una clase de torsión hereditaria.

4.10. <u>Lema</u>. Si I es un ideal derecho de A tal que $\forall a \in I$ $a \in Ia$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada conjunto finito $\{a_1, \ldots a_n\} \subseteq I$

existe $c\in I$ tal que $ca_i=a_i$ para cada $i\in\{1,\dots n\}$.

<u>Demostración</u>.

Se probará el lema por inducción sobre n.

Si $n=1$ se cumple trivialmente, pues $\forall a\in I$ $a\in Ia$.

Supongamos que el lema se cumple para $n=k-1$.

Sean $a_1,\dots a_k\in I$. Como $a_k\in Ia_k$ entonces $\exists c_k\in I$ $\ni$ $a_k=c_ka_k$.

Sea $b_i=a_i-c_ka_i$ para cada $i\in\{1,\dots k-1\}$. Por hipótesis de inducción existe $c'\in I$ tal que $c'b_i=b_i$ para cada $i\in\{1,\dots k-1\}$. Sea $c=c_k+c'-c'c_k$. Entonces si $i\in\{1,\dots k-1\}$ tenemos $ca_i=c_ka_i+c'a_i-c'c_ka_i=c_ka_i+c'(a_i-c_ka_i)=c_ka_i+c'b_i=c_ka_i+b_i=c_ka_i+a_i-c_ka_i=a_i$. Además $ca_k=c_ka_k+c'a_k-c'c_ka_k=a_k+c'a_k-c'a_k=a_k$. Se ha probado así que existe $c\in I$ tal que $ca_i=a_i$ para cada $i\in\{1,\dots k\}$.

+.

4.11. <u>Lema</u>. Si I es un ideal derecho de A entonces:

1) Para cada A-módulo izquierdo M existe un isomorfismo $\varphi_M: A/I\otimes_A M\longrightarrow M/IM$ tal que para cada $a+I\in A/I$ y para cada $m\in M$ se tiene $\varphi_M((a+I)\otimes m)=am+IM$.

2) Para cada morfismo $f:N\longrightarrow M$ existe un morfismo $f^\#: N/IN\longrightarrow M/IM$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A/I\otimes_A N & \xrightarrow{A/I\otimes f} & A/I\otimes_A M \\ \varphi_N\downarrow & & \downarrow\varphi_M \\ N/IN & \xrightarrow{f^\#} & M/IM \end{array}$$

Demostración.

1): Sea $M \in A\text{-mod}$. Tenemos entonces la sucesión exacta $0 \to IM \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/IM \to 0$, de la cual se obtiene la sucesión exacta $A/I \underset{A}{\otimes} IM \xrightarrow{A/I \otimes i} A/I \underset{A}{\otimes} M \xrightarrow{A/I \otimes p} A/I \underset{A}{\otimes} M/IM \to 0$. Por otro lado tenemos $A/I \underset{A}{\otimes} IM = (A/I)I \underset{A}{\otimes} M = 0 \underset{A}{\otimes} M = 0$, y por lo tanto $A/I \otimes p$ es un isomorfismo. Además, ya que M/IM es también un A/I-módulo izquierdo, se tiene un isomorfismo $\alpha : A/I \underset{A}{\otimes} M/IM \to M/IM$ tal que $\alpha((a+I) \otimes (m+IM)) = am + IM$, para cada $a+I \in A/I$ y para cada $m+IM \in M/IM$.

Sea $\varphi_M = \alpha \circ A/I \otimes p$. Entonces $\varphi_M : A/I \underset{A}{\otimes} M \longrightarrow M/IM$ es un isomorfismo tal que para cada $a+I \in A/I$ y para cada $m \in M$ se tiene $\varphi_M((a+I) \otimes m) = (\alpha \circ A/I \otimes p)((a+I) \otimes m) = \alpha((a+I) \otimes (m+IM)) = am + IM$.

2): Sea $f : N \to M$ un morfismo en A-mod. Tenemos entonces las sucesiones exactas $0 \to IN \xrightarrow{i} N \xrightarrow{p} N/IN \to 0$ y $0 \to IM \xrightarrow{j} M \xrightarrow{q} M/IM \to 0$.

Sea $x \in IN$. Entonces $f(x) \in IM$ y por lo tanto $qf(x) = 0$. Así, $qfi = 0$; luego existe $f^{\#} \in \mathrm{Hom}(N/IN, M/IM)$ tal que $f^{\#} p = qf$.

Sea $a+I \in A/I$ y sea $n \in N$. Entonces $f^{\#}\varphi_N((a+I) \otimes n) = f^{\#}(an + IN) = f^{\#}p(an) = qf(an) = f(an) + IM = af(n) + IM = \varphi_M((a+I) \otimes f(n)) = (\varphi_M \circ A/I \otimes f)((a+I) \otimes n)$. Luego $f^{\#}\varphi_N = \varphi_M \circ A/I \otimes f$.

+.

4.12. Proposición. Si I es un ideal derecho de A entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) A/I es un A-módulo derecho plano.

b) Para cada A-módulo izquierdo M y cada submódulo N de M

se tiene $IN = IM \cap N$.

c) Para cada ideal izquierdo J se tiene $IJ = I \cap J$.

d) Para cada $a \in I$ se tiene $a \in Ia$.

Demostración.

a)⇒b): Supongamos que A/I es un A-módulo derecho plano.

Sea $M \in A$-mod y sea $N \leq M$. Tenemos entonces la sucesión exacta $0 \to N \overset{i}{\hookrightarrow} M$, donde i es la inclusión. Como A/I es plano, entonces $A/I \otimes i : A/I \otimes_A N \longrightarrow A/I \otimes_A M$ es un monomorfismo. Por el lema 4.11. tenemos los isomorfismos φ_N y φ_M y el morfismo $i^{\#} : N/IN \to M/IM$ junto con el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A/I \otimes_A N \arrow[r, "A/I\otimes i"] \arrow[d, "\varphi_N"'] & A/I \otimes_A M \arrow[d, "\varphi_M"] \\ N/IN \arrow[r, "i^{\#}"] & M/IM \end{tikzcd}$$

Como $A/I \otimes i$ es un monomorfismo, también lo es $i^{\#}$

Tenemos $IN \leq IM \cap N$. Sea ahora $x \in IM \cap N$. Por definición de $i^{\#}$ se tiene $i^{\#}(x+IN) = x+IM = IM$, ya que $x \in IM$. Como $\operatorname{Ker} i^{\#} = 0$ entonces $x+IN = IN$, es decir, $x \in IN$. Así $IM \cap N \leq IN$, y por lo tanto $IN = IM \cap N$.

b)⇒c): Sea J un ideal izquierdo de A. Tomando a A como A-módulo izquierdo y a J como submódulo de A se tiene por hipótesis $IJ = IA \cap J = I \cap J$, ya que I es un ideal derecho.

c)⇒d): Sea $a \in I$. Entonces Aa es un ideal izquierdo de A. Por lo tanto $I \cap Aa = IAa = Ia$, ya que I es un ideal derecho. Así $a \in Ia$.

d) $\Rightarrow$ b): Sea $M \in A$-mod y sea $N \leq M$. Entonces $IN \leq IM \cap N$.

Sea $x \in IM \cap N$. Como $x \in IM$ entonces $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ con $a_i \in I$, $x_i \in M$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por el lema 4.10. existe $c \in I$ tal que $ca_i = a_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto $x = \sum_{i=1}^{n} ca_i x_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = cx \in IN$, puesto que $x \in N$. Se ha probado así que $IM \cap N \leq IN$, y por tanto $IN = IM \cap N$.

b) $\Rightarrow$ a): Sea $0 \to N \xrightarrow{f} M$ una sucesión exacta. Por el lema 4.11. existe un morfismo $f^{\#}: N/IN \to M/IM$ tal que para cada $x + IN \in N/IN$ se tiene $f^{\#}(x+IN) = f(x) + IM$. Además tenemos isomorfismos φ_N y φ_M tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A/I \otimes N & \xrightarrow{A/I \otimes f} & A/I \otimes M \\ \varphi_N \downarrow & & \downarrow \varphi_M \\ N/IN & \xrightarrow{f^{\#}} & M/IM \end{array}$$

Sea $N' = \operatorname{Im} f$.

Sea $x + IN \in N/IN$ tal que $f^{\#}(x+IN) = IM$. Entonces $f(x) + IM = IM$, es decir, $f(x) \in IM$. Luego $f(x) \in IM \cap N' = IN'$, por hipótesis. Así $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$ con $a_i \in I$, $x_i \in N$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto $f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i)$, y como f es un monomorfismo entonces $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in IN$, es decir, $x + IN = IN$. Se ha probado así que $f^{\#}$ es un monomorfismo. Por lo tanto $A/I \otimes f$ es un monomorfismo y así, A/I es plano.

$+$.

4.13. <u>Corolario</u>. Si $\mathcal{T}$ es una clase TTF y $I=\mathfrak{d}(\mathcal{T})$ entonces $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ es hereditaria si y sólo si A/I es un A-módulo derecho plano.

<u>Demostración</u>.
Por el corolario 3.10. $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ es hereditaria si y sólo si $r_{\mathcal{L}(\mathcal{T})}$ es exacto izquierdo. Ahora, $r_{\mathcal{L}(\mathcal{T})}=r_I$, por la proposición 3.17., y por el lema 3.8. r_I es exacto izquierdo si y sólo si para cada $M\in A\text{-mod}$ y para cada $N\leq M$ se tiene $IN=IM\cap N$. Por la proposición 4.12. esto es equivalente a que A/I sea plano.

+.

El siguiente corolario añade una más a la lista de afirmaciones equivalentes de la proposición 4.9.

4.14. <u>Corolario</u>. Si $\mathcal{T}$ es una clase TTF entonces $\mathcal{L}(\mathcal{T})=\mathcal{R}(\mathcal{T})$ si y sólo si $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ es hereditaria y $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ es una clase TTF.

<u>Demostración</u>.
Si $\mathcal{L}(\mathcal{T})=\mathcal{R}(\mathcal{T})$ entonces es claro que $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ es hereditaria y que $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ es una clase TTF.
Supongamos que $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ es hereditaria y que $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ es una clase TTF. Sean $I=\mathfrak{d}(\mathcal{T})$ y $J=\mathfrak{d}(\mathcal{R}(\mathcal{T}))$. Como $(\mathcal{T},\mathcal{R}(\mathcal{T}))$ es una teoría de torsión entonces por la proposición 4.2. tenemos que $I+J=A$ y $IJ=0$. Por el corolario 4.13 y la proposición 4.12, el hecho de que $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ sea hereditaria implica que $I\cap J=IJ=0$. Por lo tanto $A=I\oplus J$. Así también se tiene

que $JI \subseteq I \cap J = 0$, ya que I y J son ideales bilaterales. Luego, por la proposición 4.2. se concluye que $(R(\mathcal{T}), \mathcal{T})$ es una teoría de torsión, es decir, $L(\mathcal{T}) = R(\mathcal{T})$.

+.

4.15. <u>Lema</u>. Un ideal izquierdo I es sumando directo de A si y sólo si $I = Ae$ con $e \in A$ idempotente.

<u>Demostración</u>.

Supongamos que I es sumando directo de A. Entonces existe un ideal izquierdo J tal que $A = I \oplus J$. Por lo tanto $1 = e + f$ con $e \in I$ y $f \in J$. Así $e^2 + ef = e = e^2 + fe$, de donde $ef = e - e^2 = fe$. Luego $e - e^2 \in I \cap J = 0$, es decir $e = e^2$ y así e es idempotente. Sea $a \in I$. Entonces $a = ae + af$ y por tanto $af = a - ae \in I \cap J = 0$. Luego $a = ae \in Ae$. Se ha probado que $I = Ae$.

Inversamente, supongamos que $I = Ae$ con $e \in A$ idempotente. Sea $J = A(1-e)$. Sea $a \in A$. Entonces $a = ae + a - ae = ae + a(1-e) \in I + J$. Luego $A = I + J$. Sea $a \in I \cap J$. Entonces existen $b, c \in A$ tales que $be = a = c(1-e)$. Así $a = c(1-e)^2 = be(1-e) = 0$, puesto que e, y en consecuencia $(1-e)$, es idempotente. Por lo tanto $A = I \oplus J$.

+.

4.16. <u>Lema</u>. Si $f: M \longrightarrow N$ es un epimorfismo, L es un submódulo de M y $K = \operatorname{Ker} f$ entonces $M = K + L$ si y sólo si $f(L) = N$.

Demostración.

Supongamos que $M=K+L$. Sea $y\in N$. Como f es un epimorfismo entonces $y=f(x)$ con $x\in M$. Como $M=K+L$ entonces $x=z+w$ con $z\in K$ y $w\in L$. Luego $y=f(x)=f(z+w)=f(z)+f(w)=f(w)$, pues $z\in \operatorname{Ker} f$. Así $y\in f(L)$. Por lo tanto $f(L)=N$.

Supongamos ahora que $f(L)=N$. Sea $x\in M$. Entonces $f(x)\in N=f(L)$ y por tanto $f(x)=f(w)$, con $w\in L$. Sea $z=x-w$. Entonces $f(z)=f(x-w)=f(x)-f(w)=0$, es decir, $z\in \operatorname{Ker} f=K$. Así $x=z+w\in K+L$. Por lo tanto $M=K+L$.

$+$.

4.17. Corolario. Sea P un A-módulo izquierdo proyectivo. Un epimorfismo $f:P\longrightarrow M$ es una cubierta proyectiva si y sólo si para cada submódulo L de P tal que $f(L)=M$ se tiene que $L=P$.

Demostración.

Sea $K=\operatorname{Ker} f$. Entonces f es una cubierta proyectiva si y sólo si K es un submódulo superfluo de P, es decir, si para cada submódulo L de P tal que $P=K+L$ se tiene que $L=P$. Por el lema 4.16. la condición $P=K+L$ es equivalente a la condición $f(L)=M$.

$+$.

La siguiente proposición nos proporciona, dada una clase TTF $\mathfrak{T}$ y su ideal bilateral idempotente asociado I, una equivalencia entre el hecho de que

$L(\mathcal{T})$ sea una clase TTF y ciertas condiciones sobre el módulo A/I.

4.18. <u>Proposición</u>. Si $\mathcal{T}$ es una clase TTF y $I=d(\mathcal{T})$ entonces $L(\mathcal{T})$ es una clase TTF si y sólo si A/I es plano como A-módulo derecho y tiene cubierta proyectiva como A-módulo izquierdo.

<u>Demostración</u>.

Supongamos que $L(\mathcal{T})$ es una clase TTF. Entonces, por la proposición 4.3. 2) $I=fA$ con $f\in A$ idempotente. Sea $J=(1-f)A$. Entonces J es un ideal derecho de A. Además se prueba, como en la demostración al lema 4.15. que $A=I\oplus J$. Luego, como A-módulos derechos, $A/I\cong J=(1-f)A$, que es proyectivo, y por tanto, plano. Así A/I es plano como A-módulo derecho.

Por otro lado, sea $K=A(1-f)$. Entonces $KI=0$. Además si $a\in A$ entonces $a=a-af+af=a(1-f)+af\in K+I$. Así, $A=K+I$. Por el lema 4.1. se tiene que $K=l(I)$. Sea $\pi: A\longrightarrow A/I$ la proyección canónica. Como $I=\ker\pi$ y $A=K+I$ entonces, por el lema 4.16., tenemos que $\pi(K)=A/I$. Por lo tanto $\pi|_K: K\longrightarrow A/I$ es un epimorfismo. Obsérvese que $K=A(1-f)$ es un A-módulo izquierdo proyectivo. Sea $L\leq K$ tal que $\pi|_K(L)=A/I$. Entonces $\pi(L)=A/I$ y, de nuevo por el lema 4.16., esto significa que $A=L+I$. Además $L\leq K=l(I)$, es decir, $LI=0$. Por tanto, del lema 4.1. se concluye que $L=l(I)=K$. Luego, por el corolario 4.17., se ha probado que $\pi|_K: K\longrightarrow A/I$ es una cubierta proyectiva del A-módulo izquierdo A/I.

Inversamente, supongamos que A/I es plano como A-módulo derecho y que tiene cubierta proyectiva como A-módulo izquierdo. Sea $f: P \to A/I$ una cubierta proyectiva. Como antes, sea $\pi: A \to A/I$ la proyección canónica. Como f es un epimorfismo y A es proyectivo entonces existe $\varphi \in Hom(A,P)$ tal que $\pi = f\varphi$. Por lo tanto $f(\varphi(A)) = \pi(A) = A/I$. Como f es una cubierta proyectiva se sigue del corolario 4.17. que $\varphi(A) = P$, es decir, φ es un epimorfismo. Como P es proyectivo entonces existe $\psi \in Hom(P,A)$ tal que $1_P = \varphi\psi$. Así ψ es un monomorfismo que se escinde, y por tanto el ideal izquierdo $\psi(P)$ es sumando directo de A. Luego por el lema 4.15. tenemos que $\psi(P) = Ae$ con $e \in A$ idempotente.

Sea $\psi^*: P \to Ae$ la correstricción de ψ a $\psi(P)$ y sea $\pi^* = \pi|_{Ae}$. Entonces ψ^* es un isomorfismo. Además si $x \in P$ entonces $\pi^*\psi^*(x) = \pi\psi(x) = f\varphi\psi(x) = f(x)$; por lo tanto $\pi^*\psi^* = f$. Se concluye así que $\pi^*: Ae \to A/I$ es una cubierta proyectiva.

Sea $a \in I$. Sea $d_a: Ae \to Aea$ el morfismo definido por $d_a(x) = xa$ para cada $x \in Ae$. Así d_a es un epimorfismo y $Ker\, d_a = Ae \cap i(a)$, donde $i(a) = \{b \in A : ba = 0\}$.

Como A/I es un A-módulo derecho plano y $ea \in I$ entonces por la proposición 4.12. tenemos que $ea \in Iea$. Por lo tanto $Iea = Aea$. Luego $d_a(Ie) = Iea = Aea$, y por el lema 4.16. se tiene que $Ie + Ker\, d_a = Ae$.

Por otro lado, $Ie \leq Ae \cap I$, pues I es un ideal bilateral. Además, si $be \in Ae \cap I$ entonces $be = bee \in Ie$ ya que e es idempotente. Así $Ie = Ae \cap I = Ker\, \pi^*$. Como π^* es una cubierta proyectiva entonces Ie es un submódulo superfluo de Ae. Luego, como $Ie + Ker\, d_a = Ae$ entonces $Ker\, d_a = Ae$, es decir, $Ae \cap i(a) = Ae$, lo cual significa que $Ae \leq i(a)$. Por lo tanto $Aea = 0$. Se ha probado así que $AeI = 0$.

Por otra parte, el hecho de que π^* sea un epimorfismo significa que

$\pi(Ae) = A/I$ y por el lema 4.16. se tiene que $Ae + I = A$.
Por lo tanto, del lema 4.1. se concluye que $I = fA$ con $f \in A$ idempotente, lo cual implica, por la proposición 4.3.2), que $L(\mathcal{T})$ es una clase TTF.

+.

4.19. Corolario. Si A es un anillo semiperfecto y $\mathcal{T}$ es una clase TTF entonces $L(\mathcal{T})$ es una clase TTF si y sólo si es hereditaria.

Demostración.
Es claro que si $L(\mathcal{T})$ es una clase TTF entonces es una clase de torsión hereditaria.
Supongamos que $L(\mathcal{T})$ es hereditaria. Sea $I = \mathfrak{J}(\mathcal{T})$. Entonces, por el corolario 4.13. A/I es plano como A-módulo derecho. Por otro lado es conocido el hecho de que A es semiperfecto si y sólo si todo A-módulo izquierdo finitamente generado tiene cubierta proyectiva. Luego si A es semiperfecto en particular el A-módulo izquierdo cíclico A/I tiene cubierta proyectiva. Así, de la proposición 4.18. se sigue que $L(\mathcal{T})$ es una clase TTF.

+

CAPITULO VI

APLICACIONES A LA TEORIA GENERAL DE MODULOS.

El propósito del presente capítulo es presentar algunos resultados generales sobre módulos usando la teoría desarrollada en el capítulo 4.

Dado un ideal bilateral I de A, todo A/I-módulo izquierdo M puede ser considerado también como A-módulo izquierdo por medio de la operación definida como $am=(a+I)m$, para cada $a\in A$ y para cada $m\in M$. También, dados dos A/I-módulos izquierdos M y N se tiene $Hom_{A/I}(M,N)=Hom_A(M,N)$. De ésto se sigue que si un A/I-módulo izquierdo es inyectivo, proyectivo o plano como A-módulo izquierdo, entonces también lo es, respectivamente, como A/I-módulo izquierdo, como veremos a continuación.

5.1. Proposición. Sea I un ideal bilateral de A y sea M un A/I-módulo izquierdo. Si M es inyectivo como A-módulo izquierdo entonces también lo es como A/I-módulo izquierdo.

Demostración.

Sea $0\to K\xrightarrow{i} N$ una sucesión exacta en A/I-mod y sea $f\in Hom_{A/I}(K,M)$. Por las observaciones anteriores, $0\to K\xrightarrow{i} N$ puede ser considerada también como sucesión exacta en A-mod, y también se tiene $f\in Hom_A(K,M)$. Como M es inyectivo en A-mod entonces existe $g\in Hom_A(N,M)=Hom_{A/I}(N,M)$ tal que $f=gi$. Así, M es inyectivo en A/I-mod.

+.

El mismo argumento es utilizado para probar proposiciones análogas si la condición de ser inyectivo se sustituye por la de ser proyectivo o plano.

Sin embargo, dado un A/I-módulo izquierdo, no necesariamente se cumple que si éste es inyectivo, proyectivo o plano como A/I-módulo izquierdo entonces lo es como A-módulo izquierdo, respectivamente, ya que no todo A-módulo izquierdo M puede ser considerado como A/I-módulo izquierdo; en realidad una condición necesaria y suficiente para que ésto suceda es que $IM=0$. A pesar de todo, la siguiente proposición proporciona condiciones necesarias y suficientes sobre el ideal bilateral I para que se cumpla dicha afirmación para todos los módulos de la categoría.

5.2. <u>Proposición</u>. Si I es un ideal bilateral de A entonces:

1) Todo A/I-módulo izquierdo proyectivo es proyectivo como A-módulo izquierdo si y sólo si $I=Ae$, con $e\in A$ idempotente.
2) Todo A/I-módulo izquierdo inyectivo es inyectivo como A-módulo izquierdo si y sólo si A/I es plano como A-módulo derecho.
3) Todo A/I-módulo izquierdo plano es plano como A-módulo izquierdo si y sólo si A/I es plano como A-módulo izquierdo.

<u>Demostración</u>.

1): Supongamos que todo A/I-módulo izquierdo proyectivo lo es también como A-módulo izquierdo. Así, ya que A/I es proyectivo como A/I-módulo izquierdo, también lo es como A-módulo izquierdo. Por lo tanto la sucesión exacta $0\to I\to A\to A/I\to 0$ en A-mod se escinde, es decir, I es sumando directo de A, lo cual es equivalente, de acuerdo al lema 4.15., a que $I=Ae$, con $e\in A$ idempotente.

Inversamente, supongamos que $I = Ae$, con $e \in A$ idempotente. Por el lema 4.15. I es sumando directo de A. Por lo tanto A/I es isomorfo a un sumando directo de A y así A/I es proyectivo como A-módulo izquierdo.
Sea P un A/I-módulo izquierdo proyectivo. Entonces P es isomorfo a un sumando directo de una suma directa de copias de A/I, que es proyectivo en A-mod. Luego P es proyectivo como A-módulo izquierdo.

2): Supongamos que todo A/I-módulo izquierdo inyectivo lo es también como A-módulo izquierdo.
Sea $a \in I$. Sea $\varphi : Aa \to Aa/Ia$ la proyección canónica. Como I es un ideal bilateral entonces $I(Aa/Ia) = IAa/Ia = 0$. Luego Aa/Ia puede ser considerado también como A/I-módulo izquierdo. Sea Q la cápsula inyectiva de Aa/Ia en A/I-mod. Como Q es un A/I-módulo izquierdo inyectivo entonces también es inyectivo como A-módulo izquierdo.
Por lo tanto existe $\psi \in Hom_A(A, Q)$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] & Q \\ Aa \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi"'] & Aa/Ia \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Sea $u = \psi(1)$. Entonces para cada $x \in Aa$ se tiene $\varphi(x) = \psi(x) = \psi(x \cdot 1) = x\psi(1) = xu$. Por otro lado, como $a \in I$ y I es un ideal bilateral entonces $Aa \subseteq I$. Además, como Q es un A/I-módulo izquierdo entonces $IQ = 0$. Luego, para cada $x \in Aa$ tenemos $\varphi(x) = xu = 0$. Así $\varphi = 0$, es decir, $Ia = Aa$.
Se ha probado así que $\forall a \in I$ $a \in Ia$, lo cual es equivalente, según la proposición 4.12., a que A/I sea plano como A-módulo derecho.

Inversamente, supongamos que A/I es plano como A-módulo derecho. Sea Q un A/I-módulo izquierdo inyectivo; así Q puede ser considerado también como A-módulo izquierdo. Sea E la cápsula inyectiva de Q en A-mod. Sea $u \in E$. Sea $x \in Iu \cap Q$. Entonces $x = au$ con $a \in I$ y $au \in Q$. Como Q es un A/I-módulo izquierdo entonces $IQ = 0$. Luego $Iau = 0$. Por otro lado, como A/I es plano como A-módulo derecho y $a \in I$ se tiene por la proposición 4.12. que $a \in Ia$. Por tanto $au \in Iau = 0$, es decir $x = 0$. Así $Iu \cap Q = 0$. Como Q es esencial en E entonces $Iu = 0$. Se ha probado que $\forall u \in E$ $Iu = 0$, es decir, $IE = 0$. Luego E puede ser considerado como A/I-módulo izquierdo. Como E es inyectivo en A-mod también lo es en A/I-mod, por la proposición 5.1. Así, siendo Q esencial en E, E es también la cápsula inyectiva de Q en A/I-mod. Como Q es inyectivo como A/I-módulo izquierdo entonces $Q = E$. Luego Q es inyectivo como A-módulo izquierdo.

3): Supongamos que todo A/I-módulo izquierdo plano lo es también como A-módulo izquierdo. Así, como A/I es un A/I-módulo izquierdo plano, también es plano como A-módulo izquierdo.

Inversamente, supongamos que A/I es plano como A-módulo izquierdo. Sea F un A/I-módulo izquierdo plano. Sea $0 \to N \xrightarrow{f} M$ una sucesión exacta en mod-A, la categoría de A-módulos derechos. Del resultado dual al lema 4.11., ahora sobre la categoría mod-A, se obtienen isomorfismos $\varphi'_N : N \otimes_A A/I \to N/NI$ y $\varphi'_M : M \otimes_A A/I \to M/MI$ y un morfismo $f_\# : N/NI \to M/MI$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} N\otimes_A A/I & \xrightarrow{f\otimes A/I} & M\otimes_A A/I \\ \varphi'_N\downarrow & & \downarrow\varphi'_M \\ N/NI & \xrightarrow{f_\#} & M/MI \end{array}$$

Como A/I es plano como A-módulo izquierdo y f es un monomorfismo entonces $f\otimes A/I$ es un monomorfismo. Por lo tanto también $f_\#$ es un monomorfismo.

Por otro lado tenemos la sucesión exacta $0\to NI \overset{i}{\hookrightarrow} N \xrightarrow{p} N/NI \to 0$ en mod-A, de la cual se obtiene la sucesión exacta:

$NI\otimes_A F \xrightarrow{i\otimes F} N\otimes_A F \xrightarrow{p\otimes F} N/NI\otimes_A F \to 0$. Además, ya que F es un A/I-módulo izquierdo, $NI\otimes_A F = N\otimes_A IF = N\otimes_A 0 = 0$, y por lo tanto $p\otimes F$ es un isomorfismo. Análogamente, de la sucesión exacta $0\to MI \overset{j}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{q} M/MI \to 0$ se obtiene un isomorfismo $q\otimes F : M\otimes_A F \to M/MI\otimes_A F$.

Por otro lado, de la definición de $f_\#$, que es análoga a la definición de $f^\#$ en la demostración al lema 4.11., se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ p\downarrow & & \downarrow q \\ N/NI & \xrightarrow{f_\#} & M/MI \end{array}$$

del cual se obtiene a su vez el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} N\otimes_A F & \xrightarrow{f\otimes F} & M\otimes_A F \\ p\otimes F\downarrow & & \downarrow q\otimes F \\ N/NI\otimes_A F & \xrightarrow[f_\#\otimes F]{} & M/MI\otimes_A F \end{array}$$

Como F es un A/I-módulo izquierdo plano, y N/NI y M/MI son ambos

A/I-módulos derechos (pues $(N/NI)I = 0 = (M/MI)I$) entonces $f_\# \otimes F$ es un monomorfismo, ya que $f_\#$ es un monomorfismo. Así, como $p \otimes F$ y $q \otimes F$ son isomorfismos, del diagrama conmutativo anterior se sigue que $f \otimes F$ es un monomorfismo. Por lo tanto, F es plano como A-módulo izquierdo.

+.

Con la proposición anterior y el siguiente lema daremos ahora una demostración alternativa al corolario 4.13.

5.3. Lema. Si $\mathfrak{T}$ es una clase TTF y $I = \mathfrak{t}(\mathfrak{T})$ entonces $\mathfrak{T}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas si y sólo si todo A/I-módulo izquierdo inyectivo es inyectivo como A-módulo izquierdo.

Demostración.

Supongamos que $\mathfrak{T}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Sea Q un A/I-módulo izquierdo inyectivo; así Q puede ser considerado también como A-módulo izquierdo. Sea E la cápsula inyectiva de Q en A-mod. Como Q es un A/I-módulo izquierdo entonces $IQ = 0$, es decir, $Q \in \mathfrak{T}$. Luego, como $\mathfrak{T}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas entonces $E \in \mathfrak{T}$, es decir, $IE = 0$. Así, E puede ser considerado como A/I-módulo izquierdo. Como E es inyectivo en A-mod también lo es en A/I-mod, por la proposición 5.1. Ya que Q es esencial en E, E también es la cápsula inyectiva de Q en A/I-mod. Como Q es inyectivo como A/I-módulo izquierdo entonces $Q = E$. Luego Q es inyectivo como A-módulo izquierdo.

Supongamos ahora que todo A/I-módulo izquierdo inyectivo lo es también como A-módulo izquierdo.
Sea $M \in \mathfrak{T}$. Así $IM=0$, es decir, M puede ser considerado como A/I-módulo izquierdo. Sea E la cápsula inyectiva de M en A-mod, y E' la cápsula inyectiva de M en A/I-mod. Como E' es un A/I-módulo izquierdo inyectivo también es inyectivo como A-módulo izquierdo. Además, siendo M esencial en E', E' es también la cápsula inyectiva de M en A-mod, es decir, $E \cong E'$. Como E' es un A/I-módulo izquierdo entonces $IE'=0$. Por lo tanto $IE=0$, es decir, $E \in \mathfrak{T}$.
Así, $\mathfrak{T}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

$+$.

5.4. <u>Observación</u>. Esta es la demostración alternativa al corolario 4.13.:
Si $\mathfrak{T}$ es una clase TTF y $I = \partial(\mathfrak{T})$ entonces, por el lema 4.7., $L(\mathfrak{T})$ es hereditaria si y sólo si $\mathfrak{T}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Por el lema 5.3. ésto es equivalente a que todo A/I-módulo izquierdo inyectivo sea inyectivo como A-módulo izquierdo, lo cual es equivalente a su vez, por la proposición 5.2.2), a que A/I sea plano como A-módulo derecho.

Dado un A-módulo izquierdo M sean $Tr_A(M) = \sum\{Im f : f \in Hom_A(M,A)\}$, la traza de M, y $Ann_A(M) = \{a \in A : aM = 0\}$, el anulador de M; ambos son ideales bilaterales de A. Utilizando estos conceptos y los siguientes lemas, probaremos una serie de equivalencias, importante para la teoría de los módulos proyectivos.

5.5. <u>Lema</u>. Si M es un A-módulo izquierdo entonces M genera a A si y sólo si $Tr_A(M) = A$.

<u>Demostración</u>.

Supongamos que M genera a A. Entonces existe una sucesión exacta $M^{(\mathfrak{a})} \xrightarrow{f} A \to 0$. Para cada $\alpha \in \mathfrak{a}$ sean $i_\alpha : M \to M^{(\mathfrak{a})}$ y $p_\alpha : M^{(\mathfrak{a})} \to M$ la inclusión y la proyección en la suma directa, respectivamente.

Sea $a \in A$. Como f es un epimorfismo entonces existe $\varphi \in M^{(\mathfrak{a})}$ tal que $f(\varphi) = a$. Digamos que $\{\alpha \in \mathfrak{a} : \varphi(\alpha) \neq 0\} = \{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$. Entonces $\varphi = \sum_{i=1}^{n} i_{\alpha_i} p_{\alpha_i}(\varphi)$. Así $a = f(\varphi) = f\left(\sum_{i=1}^{n} i_{\alpha_i} p_{\alpha_i}(\varphi)\right) = \sum_{i=1}^{n} f i_{\alpha_i}(p_{\alpha_i}(\varphi)) \in Tr_A(M)$, puesto que para cada $i \in \{1, \dots n\}$ se tiene $f i_{\alpha_i} \in Hom(M, A)$. Luego $A \leq Tr_A(M) \leq A$, es decir, $Tr_A(M) = A$.

Inversamente, supongamos que $Tr_A(M) = A$.

Por la propiedad universal de la suma directa, la familia de morfismos $Hom(M, A)$ induce un morfismo $f : M^{(Hom(M,A))} \to A$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M^{(Hom(M,A))} \arrow[rr, "f"] & & A \\
& M \arrow[ul, "i_h"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

donde para cada $h \in Hom(M, A)$ i_h es la inclusión en la suma directa.

Sea $a \in A$. Como $A = Tr_A(M)$ entonces $a = \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i)$, donde para cada $i \in \{1, \dots n\}$ $h_i \in Hom(M, A)$ y $x_i \in M$. Por otro lado para cada $i \in \{1, \dots n\}$ tenemos $h_i = f i_{h_i}$.
Luego $a = \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f i_{h_i}(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} i_{h_i}(x_i)\right)$, con $\sum_{i=1}^{n} i_{h_i}(x_i) \in M^{(Hom(M,A))}$.
Se ha probado así que f es un epimorfismo. Por lo tanto, M genera a A.

+.

5.6. <u>Corolario</u>. Si M es un A-módulo izquierdo entonces M es un generador si y sólo si $Tr_A(M)=A$.

<u>Demostración</u>.
Si M es un generador entonces en particular genera a A, es decir, $Tr_A(M)=A$, de acuerdo al lema 5.5.
Inversamente, si $Tr_A(M)=A$ entonces M genera a A, por el lema 5.5. Luego, como A es un generador, también M es un generador.

+.

5.7. <u>Lema</u>. Si P es un A-módulo izquierdo proyectivo y $T=Tr_A(P)$ entonces $TP=P$.

<u>Demostración</u>.
Como A es un generador tenemos entonces una sucesión exacta $A^{(\mathfrak{A})} \xrightarrow{f} P \to 0$.
Como P es proyectivo, existe $g \in Hom(P, A^{(\mathfrak{A})})$ tal que $fg = 1_P$.
Sea $x \in P$. Entonces $g(x) \in A^{(\mathfrak{A})}$. Digamos que $\{\alpha \in \mathfrak{A} : g(x)(\alpha) \neq 0\} = \{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$.
Entonces $g(x) = \sum_{i=1}^{n} i_{\alpha_i} p_{\alpha_i} g(x)$. Luego $x = fg(x) = f(\sum_{i=1}^{n} i_{\alpha_i} p_{\alpha_i} g(x)) =$ $\sum_{i=1}^{n} f i_{\alpha_i}(p_{\alpha_i} g(x)) = \sum_{i=1}^{n} (p_{\alpha_i} g(x)) \cdot f i_{\alpha_i}(1)$, puesto que para cada $i \in \{1, \ldots n\}$ se tiene $p_{\alpha_i} g(x) \in A$. Además para cada $i \in \{1, \ldots n\}$ tenemos $f i_{\alpha_i}(1) \in P$ y $p_{\alpha_i} g(x) \in T$, ya que $p_{\alpha_i} g \in Hom(P, A)$. Así $x = \sum_{i=1}^{n} (p_{\alpha_i} g(x)) \cdot f i_{\alpha_i}(1) \in TP$. Por lo tanto, $P \leq TP \leq P$, es decir, $TP = P$.

+.

5.8. <u>Proposición</u>. Sea P un A-módulo izquierdo y sean $I = Ann_A(P)$ y $T = Tr_A(P)$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) P es proyectivo en A-mod y $I+T=A$.

b) P es proyectivo en A-mod y P es un generador en A/I-mod.

c) P es un progenerador en A/I-mod y $I = Ae$, con $e \in A$ idempotente.

d) P es proyectivo en A-mod y $T = fA$, con $f \in A$ idempotente.

<u>Demostración</u>.

a) $\Rightarrow$ b), a) $\Rightarrow$ c), a) $\Rightarrow$ d):

Sea $f \in Hom_A(P,A)$. Entonces $If(P) = f(IP) = 0$, pues $I = Ann_A(P)$.
Luego $IT = I\left(\sum_{f \in Hom(P,A)} f(P)\right) = \sum_{f \in Hom(P,A)} I f(P) = 0$.

Como $I+T=A$, entonces por el lema 4.1. tenemos que $I = Ae$ y $T = fA$, con $e, f \in A$ idempotentes.
Sea $\pi : A \to A/I$ la proyección canónica. Sea $f \in Hom_A(P,A)$.
Entonces $\pi f \in Hom_A(P, A/I) = Hom_{A/I}(P, A/I)$. Luego $\pi(T) = \pi\left(\sum_{f \in Hom(P,A)} f(P)\right)$
$= \sum_{f \in Hom(P,A)} \pi f(P) \leq \overline{T}$, donde $\overline{T} = Tr_{A/I}(P)$.

Por otro lado, como $I+T=A$ entonces por el lema 4.16. se tiene $\pi(T) = A/I$. Así $A/I \leq \overline{T} \leq A/I$, es decir $\overline{T} = A/I$. Por el corolario 5.6. tenemos entonces que P es un generador en A/I-mod. Además, como P es proyectivo como A-módulo izquierdo, también lo es como A/I-módulo izquierdo. Así, P es un progenerador en A/I-mod.

c) $\Rightarrow$ b): Como $I = Ae$, con $e \in A$ idempotente y P es proyectivo como A/I-módulo izquierdo entonces es proyectivo como A-módulo izquierdo, por la proposición 5.2.1). Además, por hipótesis. P es un generador en A/I-mod.

b) $\Rightarrow$ a): Como antes, sea $\pi : A \to A/I$ la proyección canónica.
Sea $\bar{f} \in Hom_{A/I}(P, A/I) = Hom_A(P, A/I)$. Como P es proyectivo entonces existe $f \in Hom_A(P, A)$ tal que $\bar{f} = \pi f$. Luego $\bar{f}(P) = \pi f(P) \leq \pi(T)$.
Así $\bar{T} = \sum_{\bar{f} \in Hom(P, A/I)} \bar{f}(P) \leq \pi(T)$, donde $\bar{T} = Tr_{A/I}(P)$.

Por otro lado, como P es un generador en A/I-mod entonces, por el corolario 5.6. tenemos $\bar{T} = A/I$. Por lo tanto $A/I \leq \pi(T) \leq A/I$, es decir, $\pi(T) = A/I$. Del lema 4.16. se concluye entonces que $I + T = A$.

d) $\Rightarrow$ a): Si $T = fA$, con $f \in A$ idempotente, entonces $(1-f)T = 0$.
Por otro lado, como P es proyectivo en A-mod entonces $TP = P$, por el lema 5.7. Por lo tanto $(1-f)P = (1-f)TP = 0$, y así $1-f \in I$.
Como I es un ideal bilateral entonces $(1-f)A \subseteq I$. Luego $A = (1-f)A + fA \subseteq I + T$, es decir, $I + T = A$.

+.

BIBLIOGRAFIA

[1] Anderson, F.W., Fuller, K.R. Rings and Categories of Modules.
Springer-Verlag, 1974.

[2] Azumaya, G. Some Properties of TTF-Classes.
Proceedings of the Conference on Orders, Group Rings and Related Topics.
Lecture Notes in Mathematics 353.
Springer-Verlag, 1973.

[3] Chase, S.U. Direct Products of Modules.
Transactions - American Mathematical Society 97, 1960.
p.p. 457-473.

[4] Dickson, S.E. A Torsion Theory for Abelian Categories.
Transactions - American Mathematical Society 121, 1966.
p.p. 223-235.

[5] Jans, J.P. Some Aspects of Torsion.
Pacific Journal of Mathematics 15, 1965.
p.p. 1249-1259.

[6] Stenström, B. Rings of Quotients.
Springer-Verlag, 1975.